INSTITUZIONI

DI

MECCANICA, D'IDROSTATICA, D'IDROMETRIA

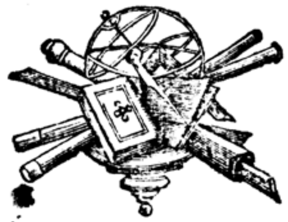
E DELL' ARCHITETTURA STATICA, E IDRAULICA

AD USO DELLA REGIA SCUOLA ERETTA IN MILANO

PER GLI ARCHITETTI, E PER GL' INGEGNERI

DELL' A. D. P. FRISI

REGIO CENSORE, E PROFESSORE DI MATEMATICA
SOCIO DELLE ACCADEMIE DELLE SCIENZE
DI LONDRA, BERLINO, PIETROBURGO, BOLOGNA,
COPENHAGUE, STOCKOLM, UPSAL, HARLEM,
SIENA, LIONE, BERNA,
CORRISPONDENTE DELLA REALE ACCADEMIA
DELLE SCIENZE DI PARIGI.



IN MILANO. MDCCLXXVII.

Appresso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore.
Col permesso de' Superiori.

A SUA ALTEZZA REALE

IL SERENISSIMO

FERDINANDO

ARCIDUCA D'AUSTRIA

PRINCIPE REALE D'UNGHERIA, E DI BOEMIA
DUCA DI BORGOGNA, E DI LORENA ec.
CESAREO REALE LUOGOTENENTE,
GOVERNATORE, E CAPITANO GENERALE
NELLA LOMBARDIA AUSTRIACA.

DEdico a V.A.R. quest' opera: il solo pubblico contrassegno, che posso darle degl' intimi sentimenti, con cui risguardo le sue virtù, e le sue glorie. Ho quì cercato di appianare, e di estendere quella parte delle Scienze Matematiche, e Fiſiche, che può influire più direttamente ne' vantaggi, e ne' comodi della Società, e del Commercio. Queſto ſemplice titolo potrebbe raccomandare la mia fatica ad un Principe, che ſi occupa tanto indefeſſamente del pubblico bene, e che nella più freſca età vi ha portato tutta l'intelligenza, la maturità, e l'energia. Potrei anche ſperare dalla penetrazione di V. A. R. che ſi voleſſe occupare delle mie preſenti ricerche: ed avrei tutto l'intereſſe di aggiugnere, che V. A. R. ſi è degnata di trattenerſi meco ſulle materie Fiſiche quanto baſtava perchè io comprendeſſi da me medeſimo ciò che ſarebbe negli ſtudj più ſublimi, ſe l'elevazione del ſuo rango, e la fortuna di queſti Stati non l'aveſſe deſtinata ad altri ſtudj più importanti, a quelli che formano la pubblica, e la privata felicità. Ma io non oſo di dimandare a V. A. R. che voglia onorare queſto mio libro con quel tempo prezioſo, che può ſottrarre alle ſuperiori cure del Governo. Ciò che più vivamente deſidero ſi è, che V. A. R. accetti grazioſamente queſto tributo dell' intima venerazione, con cui ſono, e ſarò ſempre

Di Vostra Altezza Reale

Milano 10. Luglio del 1777.

Umiliſs., Devotiſs., Obbligatiſs. Servitore
Paolo Friſi.

INDICE
DE' LIBRI, E DE' CAPITOLI.

IV. Dell

VIII. Delle

DELLA

DELLA MECCANICA, E DELLA STATICA,

OSSIA

DELLE LEGGI GENERALI DELL' EQUILIBRIO, E DEL MOTO DE' CORPI.

LIBRO PRIMO.

CAPO PRIMO.

Delle prime nozioni del moto.

MEccanica è quella parte delle Matematiche, che tratta delle leggi generali del moto di tutt' i corpi: Statica quella che tratta dell' equilibrio de' corpi solidi. L' Idrostatica ha per oggetto l' equilibrio de' fluidi, e particolarmente delle acque: l' Idraulica *il* moto, e *la* forza: l' Idrometria *la* quantità, e *la* misura. L' Architettura Statica, e Idraulica non è che un' applicazione delle leggi fondamentali dell' equilibrio, del moto, e delle forze. Non è possibile di ridurre ad un compito trattato le teorie delle fabbriche, dei canali, dei torrenti, e dei fiumi, senza mettere prima sott' occhio i principj, e le regole analoghe della Meccanica, e della Statica. Noi quì cercheremo di scegliere tutto ciò che influisce più direttamente negli usi, e nei comodi della società, e rimetteremo a quanto abbiam detto nel primo, e nel secondo tomo della Cosmografia quelli che si volessero maggiormente instruire nella Meccanica più sublime della Terra, e del Cielo.

Moto è una successiva trasposizione del corpo da un luogo all' altro. Il luogo poi, o si prende nello spazio immobile dell' Universo, e allora il moto è assoluto: o si misura dalla vicinanza di altri corpi, e nel caso che ancor essi si muovano nello spazio asso-

 luto,

luto, il moto dell' altro corpo, in quanto ſi accoſta, o ſi diſcoſta da eſſi, chiamaſi relativo. Le prime idee dell' eſtenſione, dello ſpazio, del moto, della quiete, del tempo, e della velocità ſono tanto chiare, e diſtinte in ciaſcuno, che baſta ſolamente di pronunziare queſti vocaboli perchè da ciaſcuno s' intenda coſa ſignificano. E così appunto ſuccede generalmente nella ſerie delle noſtre idee, che riſolvendoſi le più compoſte nelle più ſemplici, e arrivando alle ſempliciſſime non ſi può andare più oltre. Gli Autori antichi, e moderni, che hanno abuſato delle ſottigliezze metafiſiche per diſputare ſulla natura del tempo, dello ſpazio, e del moto, non hanno fatto che confondere quanto v' è di più ſemplice nelle nozioni umane. Archimede, Galileo, e Newton, partendo dalle prime nozioni del moto, ne ritrovarono le leggi principali, ed indicarono la retta ſtrada di ritrovar tutte le altre.

Più, o meno veloce, e celere ſi dice quel corpo, che traſcorre uno ſpazio dato in meno, o più di tempo, oſſia che in un dato tempo traſcorre uno ſpazio maggiore, o minore. Forza motrice ſi chiama un' azione qualunque, che altera, e muta ne' corpi in qualunque maniera lo ſtato di moto, o di quiete: la linea, ſecondo cui viene impreſſa ne' corpi la forza motrice, ſi chiama direzione del moto: e quantità di moto, oſſia impeto di un corpo moſſo, ſi chiama la ſomma del moto di tutte le particelle componenti, ch' è il prodotto di tutta la maſſa nella comune velocità. La diſtinzione che ſi è voluta fare tra le forze dei corpi in quiete, e dei corpi in moto, indicate coi nomi di forze morte, e forze vive, e le queſtioni che ſono inſorte nel miſurare le forze vive, o dal quadrato della velocità, come propoſe il Leibnitz, o dalla velocità ſemplice, come ſoſtennero molti altri, ſono queſtioni affatto eſtranee alla Meccanica. La ſoluzione dei problemi ancor più difficili ſi può trattare ſui ſoli dati delle velocità, e delle maſſe: e queſto baſta perchè levando alla Meccanica le ſuddette queſtioni ſi debbano interamente abbandonare alla Metafiſica.

Per

Per mettere ſott' occhio le prime analogie, e i rapporti analitici delle velocità, delle maſſe, e delle quantità di moto, non fa biſogno che di ordinare una ſemplice compoſizione di ragioni. E' manifeſto che la quantità Q del moto in un corpo, la cui maſſa ſia M, e la velocità V, ſta alla quantità Q' del moto in un altro corpo, che abbia la ſteſſa maſſa M, e la velocità v in ragione delle ſemplici velocità: e però ſarà

$$Q:Q'=V:v.$$

E' manifeſto ancora che la quantità di moto Q' nel corpo della maſſa M, e della velocità v ſta alla quantità q del moto in un altro corpo, che abbia la ſteſſa velocità v, e la maſſa m, in ragione delle ſemplici maſſe: e però ſarà ancora

$$Q':q=M:m.$$

Adunque componendo le ragioni ſi avrà $QQ':Q'q=Q:q=MV:mv$, e moltiplicando inſieme le quantità eſtreme, e le medie di queſta analogia, e riſolvendo nuovamente i prodotti ſi dedurranno gli altri rapporti delle velocità, e delle maſſe.

$Q:q = MV:mv$

componendo

Per ritrovare le variazioni, che devono ſuccedere quando due corpi M, ed m, colle velocità V, ed v, e colle quantità di moto MV, mv vengano ad urtarſi nella medeſima direzione, biſogna in oltre por mente ad alcuni altri principj per ſe evidenti. Il primo ſi è, che un corpo più veloce continua ſempre ad agire contro un corpo più tardo, fino che l'uno e l'altro non abbiano acquiſtata una eguale velocità, coſicchè preſcindendo da qualſivoglia altra forza, che ſopravvenga, debbano i due corpi muoverſi dopo l'urto come ſe faceſſero un corpo ſolo. Il ſecondo ſi è, che non potendo la quantità del moto nè creſcere, nè ſcemare da ſe medeſima, quando innanzi all' urto i due corpi ſiano indirizzati verſo la ſteſſa parte, la quantità del moto accreſciuta al corpo più tardo deve mancare al più veloce, e così tanto prima che dopo l'urto ſi deve conſervare la ſteſſa ſomma delle quantità del moto $MV+mv$. Il terzo principio ſi è, che quando i due corpi vadano ad urtarſi diretta-

$V:v = \frac{Q}{M} : \frac{q}{m}$

rettamente dalle due parti opposte, si devono distruggere le due quantità di moto, che sono eguali, e contrarie, e così tanto prima che dopo l'urto si deve conservare la stessa differenza delle quantità del moto $MV - mv$.

Il Newton espresse forse con minore precisione questi ultimi due principj quando disse che l'azione è sempre eguale, e contraria alla reazione, ossia che le azioni di due corpi sono sempre eguali tra loro, e si dirigono in parti contrarie. Mentre quando il corpo più veloce va ad urtare il più lento nella stessa direzione, il più lento non esercita propriamente azione alcuna nel più veloce. Questo perde bensì la stessa quantità di moto, che comunica all' altro corpo. Ma dove si hanno azioni eguali, e contrarie, la quantità del moto non si trasferisce soltanto, ma si distrugge. E così quando due corpi vanno ad urtarsi dalle due parti opposte, coll' azione dell' une, e colla reazione dell' altro viene a distruggersi la differenza delle due quantità di moto. Anche quella, che il Newton chiamava forza d'inerzia, non deve già concepirsi come una forza assoluta, che risieda propriamente ne' corpi, e che tenda a conservarli nello stato, in cui sono, o di moto, o di quiete. Un corpo, ridotto che sia allo stato di quiete, abbisogna di qualche forza per moversi: e quand' abbia incominciato a moversi con una data velocità, e direzione, abbisogna di una nuova forza per deviare o da una parte, o dall' altra, e per accrescere, o scemare la propria velocità. E così uno stato qualunque si conserva precisamente perchè vi vuole una ragione per poterlo cambiare.

Per esprimere analiticamente i principj accennati dovrebbe dirsi che nell' urto de' corpi rimane sempre costante la quantità $MV \pm mv$, prendendo il segno superiore quando i due corpi vanno ad urtarsi verso la stessa parte, ed il segno inferiore quando il moto si fa dalle parti opposte. In oltre chiamando Z la velocità comune ad ambidue dopo l'urto, la quantità del moto dovrebbe anche esprimersi per $Z . \overline{M + m}$: ed eguagliando tra loro queste due quantità si

si avrebbe $Z = \frac{MV \pm mv}{M + m}$. Il caso sarebbe ancora lo stesso se, oltre alle velocità V, ed v, vi fosse nei corpi, che si urtano, qualche altro grado di velocità comune ad ambidue. Mentre i corpi non agiscono gli uni sugli altri che colla differenza delle loro velocità: e la differenza è la stessa, tanto di V, ed v, quanto di $A + V$, ed $A + v$. Dunque il moto comune non può portare cambiamento alcuno alle leggi del moto relativo: ossia per usare la frase del Newton, il moto de' corpi chiusi in un dato spazio rimane sempre il medesimo, relativamente a ciascuno di essi, comunque lo spazio o stia fermo, o si muova con una velocità comune a tutte le sue parti.

Prendendo le differenze delle velocità innanzi l'urto V, ed v, e della velocità comune dopo l'urto $\frac{MV \pm mv}{M + m}$ si avrà la velocità acquistata da un corpo, e perduta dall' altro per cagione semplicemente dell' urto. L'elasticità deve fare che i corpi si comprimano urtandosi, e che poscia ripiglino la figura istessa di prima, rilasciandosi in parti opposte. Se le forze, con cui si comprimono, e con cui si rimettono i corpi fossero tra loro eguali, cioè se l'elasticità fosse perfetta, il corpo, che perde per l'urto una data porzione della velocità di prima, ne dovrebbe perdere altrettanto per l'elasticità: e così pure la velocità acquistata dall' altro corpo dovrebb' essere il doppio di quella, che corrisponde all' urto semplice. Però dalle formole generali dell' urto si possono derivare anche quelle dell' urto de' corpi elastici. Ma tutte le stesse formole, e tutte le leggi dell' urto de' corpi, già ritrovate dal Wallis, dal Wrenn, e dall' Huygens, sono esposte tanto semplicemente nell' Introduzione al secondo tomo della Cosmografia, che non occorre quì di trascriverle.

CAPO

CAPO SECONDO.

Delle prime leggi del Moto uniforme, e variabile.

Anche tutt' i rapporti della velocità, dello spazio, e del tempo, nel moto, che si continua equabilmente, e colla stessa invariabile velocità, dipendono da una semplice composizione di ragioni. Lo spazio S percorso nel tempo T colla velocità V, dev' essere allo spazio S' percorso nello stesso tempo T, e colla velocità v in ragione delle velocità semplici V, ed v, cioè dev' essere

$$S : S' = V : v.$$

$S' : s = T : t$

Ma lo spazio S' percorso nel tempo T, e colla velocità v dev' essere allo spazio s percorso nel tempo t, e colla stessa velocità v in ragione de' tempi T, e t, cioè dev' essere

$$S' : s = T : t.$$

$SS' : S's = TV : tv$

dunque

$S : s = TV : tv$

Sarà dunque $S : s = TV : tv$, cioè gli spazj percorsi nel moto equabile, ed uniforme, saranno in ragion composta delle velocità, e dei tempi. Di quì ancora si caverà $Stv = sTV$: e conseguentemente si avranno le analogie $V : v = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, e similmente $T : t = \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$.

vedi annalogia ... moto.

Cioè le velocità saranno in ragione diretta degli spazj, e reciproca dei tempi: e i tempi saranno in ragione diretta degli spazj, e reciproca delle velocità: al che si riducono tutt' i teoremi, e le leggi del moto equabile esposte dal Galileo nel dialogo terzo della Meccanica.

Dalle suddette leggi si possono ricavare anche le altre del moto variabile, accelerato, o ritardato, quando di più si rifletta che qualunque sia l' accelerazione, e il ritardo in un tempo più corto si avrà sempre una variazione minore, e però diminuendo il tempo all' infinito si avrà finalmente un limite, dentro il quale si potrà trascurare ogni variazione, e il moto potrà riguardarsi come uniforme. Applicando adunque le analogie del moto equabile alle velocità, e agli spazj percorsi in qualunque tempo infinitamente piccolo, non farà più di bisogno che di prenderne le somme per avere l'intero spazio percorso in qualunque altro tempo proposto. Data la legge, con cui cresce la velocità, sarebbe un problema puramente analitico quello di ritrovare generalmente il rapporto dello spazio, e del tempo. Ma nell' ipotesi più semplice, che, presi eguali tra loro i tempicciuoli infinitamente piccoli, si abbiano in ciascuno di essi degli accrescimenti eguali della velocità, e che il moto sia uniformemente accelerato, la sola Geometria può bastare per la soluzione del problema.

I tempicciuoli eguali, e infinitamente piccoli si esprimano colle rette AB, BC, CD, DE, ec., *fig.* 1., e sia BF la velocità acquistata nella prima porzione di tempo AB. Tirando la retta AFM, e segnando tutte le parallele come nella figura, saranno aG, cH, eI, ec. gli accrescimenti eguali della velocità, e la velocità totale nel tempo AE dovrà esprimersi per EI, e in qualunque altro tempo AN si esprimerà per NM. Ma perchè presi i punti D, E infinitamente prossimi tra loro, il moto può riguardarsi come uniforme, e la velocità DH come costante nel tempo DE, e si può in oltre trascurare la retta eI rispetto a DH, e il triangolo HeI rispetto al trapezio $DHIE$; lo spazio percorso in tutto il suddetto tempo si esprimerà col prodotto del tempo DE nella velocità DH, ossia col trapezio $DHIE$. Così pure in qualunque altra porzione di tempo CD lo spazio percorso si esprimerà col trapezio corrispondente $CEHD$, e, prendendo le somme, tutto lo spazio percorso nel tempo AE si esprimerà coll' area del triangolo AEI, e lo spazio percorso in qualunque altro tempo AN si esprimerà coll' area ANM.

Dunque nel moto uniformemente accelerato se i tempi si esprimeranno colle basi di due triangoli simili, le velocità si dovranno esprimere colle altezze, e gli spazj percorsi colle aree corrispondenti alle basi, e alle altezze dei triangoli. Ma le aree di tutte le figure simili

ſimili ſtanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi, ed è pure l'area del triangolo AEI all' area del triangolo ANM come il quadrato di AE al quadrato di AN, o come il quadrato di EI al quadrato di NM. Dunque nel moto uniformemente accelerato creſcendo le velocità in ragione ſemplice de' tempi computati dal principio del moto, gli ſpazj percorſi creſceranno in ragione duplicata tanto de' tempi, quanto delle velocità. Ma di più ſe in tutto il tempo eſpreſſo per AN un corpo ſi moveſſe equabilmente colla velocità invariabile NM, lo ſpazio percorſo dovrebbe eſprimerſi coll' intero rettangolo di AN in NM, cioè col doppio del triangolo ANM. Dunque ſe dopo un tempo qualunque il moto uniformemente accelerato ſi convertiſſe in equabile, e il corpo continuaſſe a moverſi colla velocità acquiſtata nel fine del tempo ſuddetto, percorrerebbe in altrettanto tempo uno ſpazio doppio di quello, che ha veramente percorſo incominciando dalla quiete, e gradatamente accelerandoſi.

Per applicare tutti queſti teoremi alla caduta libera de' corpi, biſognerebbe richiamare alla mente alcune verità fiſiche: che la gravità è una proprietà generale de' corpi, e che agiſce in tutti, accelerandoli ſempre egualmente in tempi eguali. Il Galileo incominciò ad eſplorare colle ſperienze queſte leggi primarie della natura, laſciando cadere dal campanile di Piſa dei corpi di diverſo genere, ed oſſervando che la differenza dei tempi della caduta era tanto piccola da doverſi onninamente attribuire alla reſiſtenza dell' aria. Dopo che il Guericke inventò la macchina Pneumatica, le ſperienze fatte nel vuoto divennero più preciſe. Il Galileo dall' eguale accelerazione di tutt' i corpi, che cadono, ne inferì che la gravità aſſoluta, e il peſo totale de' corpi dev' eſſere proporzionale alla quantità della materia. Mentre eſſendo eguale la velocità in tutte le particelle, che cadono, la quantità totale del moto, e la forza motrice dev' eſſere come il numero delle particelle medeſime, oſſia come la quantità di materia di ciaſcun corpo.

A queſti principj d'eſperienza aggiunſe il Galileo un' ipoteſi che la gravità in tempi eguali agiſca ſempre egualmente, e nei corpi che incominciano, e in quelli che continuano a muoverſi. L'idea di una forza continua non baſterebbe a ſomminiſtrarci una prova diretta di queſta fiſica verità. Al Galileo baſtò che l'ipoteſi foſſe conforme in ſe ſteſſa alla ſemplicità della natura, ne ricercò i riſultati, e trovandoli pienamente conformi alle ſperienze rimaſe certo della verità dell' ipoteſi. I primi riſultati ſono, che la velocità deve creſcere in ragione ſemplice, e gli ſpazj in ragione duplicata dei tempi: che, eſprimendo i tempi ſucceſſivamente coi numeri 1, 2, 3, 4, ec., gli ſpazj preſi dal principio del moto ſi eſprimeranno coi termini analoghi della ſerie 1, 4, 9, 16, ec.: e gli ſpazj ſucceſſivamente percorſi in tempi eguali ſaranno 1, 3, 5, 7, ec. Il Galileo verificò queſta proporzione ne' piani inclinati, dove, come il moto è più lento, così ancora l'eſperienza è più facile. Secondo le più preciſe eſperienze, che ſi ſono fatte nell' Oſſervatorio di Parigi, un corpo cadendo liberamente in un minuto ſecondo di tempo percorre 15 piedi di Parigi, 1 pollice, e linee $2\frac{1}{18}$: nell' altro ſecondo ſuſſeguente piedi 45, pollici 3, e linee $6\frac{1}{2}$: e ſucceſſivamente in un altro ſecondo piedi 75, pollici 5, linee $10\frac{5}{18}$. Il divario dalla ragione dei numeri 1, 3, 5 è tanto piccolo da doverſi onninamente attribuire alla reſiſtenza dell' aria.

Volendo eſprimere analiticamente anche i rapporti della velocità, del tempo, e dello ſpazio ne' moti uniformemente accelerati, chiamando G la forza aſſoluta, e coſtante della gravità, T, V, ed S riſpettivamente il tempo, la velocità acquiſtata, e tutto lo ſpazio percorſo, T', V', S' i riſpettivi elementi infinitamente piccoli; ſarà in primo luogo il prodotto della forza, e dell' elemento del tempo, in cui agiſce, eguale all' elemento della velocità, cioè ſarà $G . T' = V'$, e prendendo le ſomme $G . T = V$. In ſecondo luogo, poichè in un tempo infinitamente piccolo il moto può prenderſi per equabile, e nel moto equabile lo ſpazio S' dev' eſſere eguale al prodotto del tempo T', e dell' intera velocità V, e per conſeguenza dev' eſſere $T' = \frac{S'}{V}$; ſarà ancora $G . S' = V . V'$. In terzo luogo, perchè tutto lo ſpazio S, percorſo nel tempo T con un moto uniformemente accelerato, è doppio dello ſpazio, che ſi potrebbe percorrere nello ſteſſo tempo, e coll' ultima velocità V continuata uniformemente; ſarà $2 S = VT = \frac{V^2}{G}$, ed $V = \sqrt{2 G . S}$.

+ [illegible]

Per applicare le ſteſſe formole ai corpi gravi, che caſcano in un piano inclinato, biſogna premettere un altro teorema elementare, che quantunque ſia ſtato il ſoggetto di molti dubbj, e di molte, ed oſcure dimoſtrazioni, ſi può adeſſo ridurre alla maggiore ſemplicità, ed evidenza.

CAPO TERZO.

Dei principj della compoſizione, e della riſoluzione delle forze.

SIa ſpinto il corpo da due forze che baſtino ſeparatamente per traſportarlo in un dato tempo, la prima da O in P, *fig.* 2., la ſeconda da O in M, e che però ſi poſſano eſprimere riſpettivamente colle rette OP, OM. Sia retto l'angolo MOP, e s'intenda che l'effetto della prima forza ſia di allontanare il corpo dalla retta OM dello ſpazio OP, e l'effetto della ſeconda ſia di allontanarlo da OP dello ſpazio OM. Impreſſe inſieme le due forze, la ſeconda di eſſe non potrà fare che il corpo ſi diſcoſti da OM, nè più nè meno di quello che farebbe colla prima. Mentre per diſcoſtarlo maggiormente biſognerebbe che una porzione della ſeconda forza agiſſe da O in P: ed eſſendo OM egualmente inclinata, e poſta riſpetto alla OP, ed alla linea prolungata Op, non vi ſarebbe ragione alcuna, per cui dalla ſeconda forza non doveſſe riſultare una

+ OP

una azione diretta da O in p eguale a quella, che ſupporrebbeſi diretta da O in P: e ciò poſto le due azioni eguali, e contrarie ſi diſtruggerebbero. Così ancora nell' ipoteſi del ritardo, riſultando dalla forza OM una qualche azione diretta da O in p, ne dovrebbe riſultare un' altra eguale da O in P. Il corpo adunque nel tempo dato ſi diſcoſterà da OM della ſteſſa quantità OP, e arriverà preciſamente alla retta PN parallela ad OM. Alla ſteſſa maniera ſi potrà provare che la ſeconda forza porterà il corpo fino alla retta MN parallela ad OP, o ſia, o non ſia impreſſa la prima forza. Però impreſſe inſieme le due forze il corpo paſſerà nello ſteſſo tempo da O in N, come ſe foſſe ſpinto da una ſola forza rappreſentata colla retta ON.

Due forze adunque, che ſi eſprimano co' due lati di un rettangolo, equivalgono ad una forza, che ſi eſprima colla ſola diagonale, e ſi potrà ſoſtituire indifferentemente, e queſt' una a quelle due, e quelle due a queſt' una. Poichè nella ſteſſa maniera movendoſi il corpo per la diagonale ON ſi diſcoſta dal lato OM della quantità OP, e dal lato OP della quantità OM, e i moti ſecondo OM, OP, formando un angolo retto colle loro direzioni, non poſſono reciprocamente influire l'uno ſull' altro. Così il principio della compoſizione, e della riſoluzione delle forze ſi può dimoſtrare con una ſpecie di riduzione all' aſſurdo, quando l'angolo delle due forze ſia retto. Gli altri due caſi dell' angolo acuto, e ottuſo ſi riducono Geometricamente al caſo dell' angolo retto. Sono molti anni che ho propoſto queſta maniera di dimoſtrare una verità elementare, forſe non abbaſtanza ſchiarita, e dimoſtrata con altri più lunghi ragionamenti. Ho avuto il piacere di veder poi ſeguitata la ſteſſa idea in un trattato di Meccanica ſtampato in Parigi, e in operetta ſtampata ſullo ſteſſo argomento in Verona. Biſogna adeſſo ripetere la riduzione degli angoli obliqui al caſo che le direzioni delle due forze formino inſieme un angolo retto.

Siano le due forze OP, OM, *fig.* 3., e ſia acuto l'angolo POM.

Si compisca il parallelogrammo *POMN*, e il rettangolo circoscritto *DOCN*, e in oltre dal punto *M* si tiri sul lato *OP* la perpendicolare *ME*. Nel rettangolo *MEOC* la forza espressa per *OM*, per ciò che si è detto, equivale alle due *OE*, *OC*. Dunque le due *OP*, *OM* equivalgono alle tre *OP*, *OE*, *OC*. Ma sono eguali i triangoli *OME*, *PND*, ed eguali pure le rette *OE*, *PD*. Dunque le due *OP*, *OM* equivalgono ad altre due forze espresse per *OD*, *OC*, che insieme equivalgono alla forza espressa per *ON*. Se l'angolo *MOP* fosse ottuso, come nella fig. 4., la forza *OE* avrà una direzione contraria alla forza *OP*, e la differenza di esse sarà *OD*. Così le due forze *OP*, *OM* saranno equivalenti alle due *OD*, *OC*, che già equivalgono alla forza *ON*. Dunque generalmente se le due forze impresse insieme ad un corpo, e le due direzioni di esse si esprimeranno co' due lati di un parallelogrammo qualunque, la forza risultante, e composta si dovrà esprimere per la diagonale: ed al contrario la forza espressa con una retta qualunque sarà equivalente a due altre, le cui quantità, e direzioni si esprimano co' due lati d'un parallelogrammo qualunque, che abbia la stessa retta per diagonale.

Perchè la diagonale è sempre minore della somma de' due lati, ancora la forza composta secondo la diagonale sarà minore della somma delle due forze risolute secondo i lati: e lo stesso si dovrà dire delle velocità, quand' esse siano proporzionali alle quantità delle forze impresse. Ma se da *M*, e *P* si condurranno sulla diagonale *ON* le due perpendicolari *MQ*, *PR*, e se così le due forze *OM*, *OP* si risolveranno nelle quattro *MQ*, *OQ*, *PR*, *OR*; le due *MQ*, *PR*, essendo tra loro eguali, faranno equilibrio nel punto *O*, e le due sole *OQ*, *OR* agiranno secondo la direzione della diagonale. Nel caso dell' angolo acuto, *fig.* 5., cospireranno insieme le due forze, e se ne dovrà prendere la somma, e sarà $ON = OQ + OR$. Nel caso dell' angolo ottuso, *fig.* 6., bisognerà prendere la differenza delle due forze contrarie, e sarà $ON = OR - OQ$. Però l'errore di quelli, che credettero di trovare nella composizione delle forze l'effetto minore della causa, e maggiore nella risoluzione, nasce dall' aver essi paragonato l'effetto prodotto in una data direzione alla causa, che agisce in una direzione diversa. Ridotto il paragone alla direzione medesima è manifesto, che la forza composta secondo la diagonale produce sempre lo stesso effetto, che le due forze espresse separatamente coi lati potrebbero produrre secondo la direzione della già detta diagonale.

Era più singolare l'error di quelli, che ammettendo la composizione del moto rigettavano poi il principio della risoluzione, ch' è una immediata conseguenza del primo, e sostenevano che la natura si serve sempre della composizione, e giammai della risoluzione. I fenomeni più famigliari dell' equilibrio di varj pesi, della tensione delle corde, e dell' urto obliquo de' corpi fanno chiaramente vedere, che la natura si serve indifferentemente, e di un principio, e dell' altro. Mentre se da tre fili *PO*, *MO*, *QO*, *fig.* 8., tirati in un piano orizzontale, e uniti insieme nel punto *O*, si lascieranno pendere verticalmente tre pesi *P*, *M*, *Q*, si avrà l'equilibrio di tutti e tre, e il punto *O* si fermerà dove i pesi *P*, *M*, *Q* saranno ordinatamente proporzionali ai seni degli angoli *ONP*, *NOP*, *OPN*. Onde essendo i lati di qualunque triangolo proporzionali ai seni degli angoli opposti, con questa semplice esperienza può ciascuno vedere, che nel caso dell' equilibrio le forze esercitate secondo le direzioni *OQ*, *OP*, *OM* devono essere tra di loro come la diagonale *ON*, e come i lati *OP*, *OM* del parallelogrammo *POMN*: ossia che le forze *OP*, *OM* equivalgono alla forza *ON*, a cui è eguale, e contraria la forza *OQ*, che arriva ad equilibrarle.

Istessamente se la linea *MNm*, *fig.* 7., rappresenterà un piano immobile, che venga urtato da una palla nel punto *N*, e nella direzione *ON*, esprimendo la forza della palla colla retta *ON*, e risolvendola nelle due *OR*, *OM*; la forza *OM* sarà quella, che dovrà estinguersi coll' urto. Senza di essa la palla continuerebbe a scor-

ſcorrere equabilmente al lungo del piano, colla ſemplice forza OR, oſſia Nm; quando nell' urto iſteſſo per ragione dell' elaſticità non veniſſe a rimetterſi qualch' altra forza perpendicolare. Se l'elaſticità foſſe perfetta, e ſi rimetteſſe la forza NR eguale ad OM, la palla riſalirebbe nella direzione No, e l'angolo di rifleſſione oNm ſarebbe eguale all' angolo d'incidenza ONM. Se l'elaſticità foſſe imperfetta, come ordinariamente ſuccede, l'angolo d'incidenza ſarebbe ~~minore~~ + maggiore : e per lo contrario ſi avrebbe colla rifleſſione un angolo maggior di prima ſe il corpo ricuperaſſe la propria figura con una forza maggiore di quella della compreſſione, come ſuccede nella gomma Peruana, detta Caotchouk. Negli urti obbliqui di molte palle, ſeguitando i principj medeſimi, biſognerà riſolvere la forza intera dell' urto in due, l'una parallela alla ſuperficie del corpo urtato, che non eſerciterà contra di eſſo azione alcuna, l'altra perpendicolare, che ſoſtituendoſi in luogo della forza, e della velocità aſſoluta, laſcierà applicare le formole già eſpoſte ſopra l'urto diretto de' corpi a qualunque altro caſo, che i corpi ſi urtino con qualſivoglia direzione.

CAPO QUARTO.

Della diſceſa libera de' corpi ne' piani inclinati.

IL principio della riſoluzione delle forze, baſta per applicare le leggi della caduta libera de' corpi a quei corpi, che cadono ſopra qualunque piano inclinato. Sia il piano AB, *fig. 9.*, inclinato all' orizzonte CB coll' angolo ABC. Sia poſto il corpo nel punto O, e tutta la gravità ſi eſprima colla verticale NO, e dal punto N ſi tiri ſul piano AB la perpendicolare NP. Tutta la forza del corpo nel punto O ſi riſolverà in due: una eſpreſſa per NP, che eſſendo perpendicolare al piano s'impiegherà unicamente nel premerlo: l'altra eſpreſſa per OP, che eſſendo parallela al piano s'impiegherà nell' accelerazione della caduta. Ed eſſendo tra loro ſimili

Esprimendo ON la gravità
G

$ON : OP = AB : AC$

$G : OP = AB : AC$

$OP = G \cdot \frac{AC}{AB}$

così si vede che l'accelerazione in un piano è eguale a [illegible] caduta verticale

ſimili i due triangoli NOP, BAC, ſarà in qualunque punto O la forza totale della gravità alla forza, con cui il corpo cade, e s'accelera nel piano inclinato AB, nella ragione coſtante della lunghezza del piano AB all' altezza AC. Però eſſendo data, e coſtante la forza, che agiſce al lungo del piano inclinato, il moto vi ſarà uniformemente accelerato: le velocità creſceranno nella ſemplice ragione de' tempi: e gli ſpazj percorſi AO, AB ſaranno come i quadrati dei tempi, o ancora come i quadrati delle velocità acquiſtate in O, e B. Cioè il moto in un piano inclinato ſarà quell' iſteſſo che avrebbeſi nella caduta verticale di un corpo, la cui gravità aſſoluta G foſſe diminuita nella ragione dell' altezza del piano alla lunghezza, e diveniſſe ſolamente $G \cdot \frac{AC}{AB}$.

Queſta è una ſemplice conſeguenza dei principj antecedenti. Affine di paragonare il moto nella verticale AC, e nel piano inclinato AB, baſta rifletter che in un luogo, e nell' altro continuando ſempre l'azione della forza come comincia, le velocità acquiſtate in tempi eguali, comunque o infinitamente piccoli, o finiti, devono eſſere proporzionali alle forze: cioè, la velocità della libera diſceſa dev' eſſere alla velocità acquiſtata in egual tempo nel piano inclinato AB, come la lunghezza AB all' altezza AC. E queſta pure ſarà la ragione degli ſpazj percorſi in egual tempo. Poichè in un tempo infinitamente piccolo potendoſi riguardare come equabile il moto uniformemente accelerato, e nel moto equabile gli ſpazj eſſendo proporzionali alle velocità; ſe tutto il tempo della diſceſa divideraſſi in qualſivoglia numero di parti eguali, e infinitamente piccole, gli ſpazj percorſi nella prima parte del tempo verticalmente, e nel piano inclinato ſaranno tra loro come la velocità della diſceſa verticale alla velocità nel piano inclinato, oſſia nella ragione coſtante della lunghezza AB all' altezza AC. E ciò valendo egualmente nella ſeconda porzione di tempo, e in tutti gli altri tempi ſucceſſivi, prendendo tutte le ſomme, e componendo le ragioni,

gioni, tutto lo ſpazio percorſo nella diſceſa verticale ſarà allo ſpazio percorſo in egual tempo nel piano inclinato, come la lunghezza del piano all' altezza.

Se dal punto C, *fig.* 10., ſul piano inclinato AB ſi tirerà la perpendicolare CP, eſſendo $AB:AC = AC:AP$, ſarà AP lo ſpazio percorſo nel piano inclinato AB in tutto quel tempo, in cui il corpo cadendo verticalmente arriverebbe da A in C. Ed eſſendo gli ſpazj AC, AP percorſi in egual tempo, la velocità in C, ſecondo l'altro teorema antecedente, ſarà alla velocità in P, come tutta la forza della gravità a quella porzione di forza, che agiſce nel piano inclinato, cioè, come la lunghezza del piano AB all' altezza AC. Ma poichè il moto nel piano AB è uniformemente accelerato, lo ſpazio AB dev' eſſere allo ſpazio AP, come il quadrato della velocità in B al quadrato della velocità in P. Dunque la velocità acquiſtata cadendo da A in B, ſarà alla ſemplice velocità acquiſtata cadendo da A in P, come la radice di AB alla radice di AP, oſſia nella ragione ſemplice di $AB:AC$. Dunque tanto la velocità in C, quanto la velocità in B avranno la ſteſſa ragione alla velocità in P: e per conſeguenza le velocità in C, e in B ſaranno tra loro eguali. Alla ſteſſa maniera ſi proverà che la velocità della caduta libera da A in C, ſarà eguale a quella, che ſi acquiſterebbe cadendo in qualunque altro piano Ab, che abbia la ſteſſa altezza AC: e così ſarà vero generalmente che un corpo cadendo da un dato punto per qualſivoglia piano inclinato arriverà ſempre colla ſteſſa velocità alla ſteſſa linea orizzontale.

Poichè le perpendicolari CP, Cp, ec., che dal punto C ſi poſſono tirare ſu tutt' i piani inclinati AB, Ab, ec., terminano nel ſemicircolo deſcritto col diametro AC, cadendo un corpo per tutte le corde ſuperiori AP, Ap, ec. del ſemicircolo APC impiegherà lo ſteſſo tempo, in cui cadrebbe dal diametro AC. E poichè tirando pa parallela, ed eguale ad AC, e congiungendo la Ca, l'angolo aCp è retto, e aC è la perpendicolare tirata

dal punto a nel piano inclinato pc; ancora tutte le corde inferiori PC, pC, ec. ſi percorreranno nello ſteſſo tempo del diametro AC, o pa. In oltre, poichè il tempo della diſceſa da A in B è al tempo della diſceſa da A in P, come la radice di AB alla radice di AP, oſſia in ragione ſemplice di $AB:AC$, e iſteſſamente il tempo della diſceſa da A in P, oſſia da A in p è al tempo della diſceſa da A in b, come $AC:Ab$; il tempo della diſceſa da A in B, ſarà al tempo della diſceſa da A in b, come $AB:Ab$, cioè i tempi della diſceſa per diverſi piani inclinati di eguale altezza, ſaranno proporzionali alle lunghezze ſemplici de' piani. Finalmente ſe ancora le altezze dei piani foſſero differenti, *fig.* 9., poichè il tempo della diſceſa per AC è al tempo della diſceſa per aC, come $\sqrt{AC} : \sqrt{aC}$, componendo inſieme tutte le ragioni di $AB:AC$, $\sqrt{AC}:\sqrt{aC}$, $aC:ab$, ſi troverà che il tempo della diſceſa per AB è al tempo della diſceſa per ab, come $\frac{AB}{\sqrt{AC}} : \frac{ab}{\sqrt{aC}}$, cioè, che i tempi della diſceſa per differenti piani diverſamente inclinati all' orizzonte ſono tra loro in ragione ſemplice delle lunghezze, e ſudduplicata reciproca delle altezze.

Sono queſti i principali teoremi, che il Galileo, e in ſeguito gli altri Autori hanno inſegnato intorno alla diſceſa de' corpi in qualſivoglia piano di una data inclinazione. Il Galileo aveva anche inſegnati gli altri teoremi, che riſguardano la compoſizione, e la riſoluzione dei moti, e delle forze: e ſe n'è anzi ſervito ampiamente nella teoria de' corpi gettati obbliquamente. Ma è poi ſingolare, che nel Teorema undecimo del moto naturalmente accelerato non abbia egli avvertito, che il moto di un corpo deve conſeguentemente variarſi nel paſſare da un piano all' altro di diverſa inclinazione: ed abbia anzi ſuppoſto generalmente, che un corpo partendo da un punto dato doveſſe ſempre arrivare colla ſteſſa velocità ad un dato orizzonte, qualunque foſſe il numero, e la poſizione dei piani inclinati, e contigui, per i quali foſſe obbligato di scendere successivamente. L'Huygens nella Propos. VIII. dell' Orologio Oscillatorio, il Keill nel Teorema XXXVIII. dell' Introduzione alla Fisica, e molti altri hanno adottato lo stesso errore. E' però facile da vedersi, che se i due piani AB, BC, *fig.* 11., formeranno tra loro l'angolo ABC, e sulla BC continuata si condurrà la perpendicolare AD, sarà la velocità del corpo nel primo piano alla velocità residua nel secondo, come $AB : DB$, ossia come il seno totale al coseno dell' angolo de' due piani. E se la prima velocità si esprimerà per AB, sarà DB la velocità nel secondo piano, AD la porzione di velocità, che impiegherassi nel premerlo, e descritto col centro B, e col raggio BA il semicircolo EAC, sarà ED la velocità perduta per la semplice inclinazione dei piani.

Se l'angolo ABD sarà infinitamente piccolo, sarà pure infinitamente piccolo il seno AD rispetto al raggio AB. Ora egli è chiaro, che in qualsivoglia curva continua è infinitamente piccolo l'angolo, che formano tra loro tutti gli archetti, o elementi contigui del perimetro. Dunque, se un corpo si moverà nel perimetro di una curva, sarà infinitamente piccola la forza della pressione, che nel passare da un archetto all' altro s'impiegherà perpendicolarmente contro ciascuno di essi. Ma poichè il seno verso ED si uguaglia al quadrato di DA diviso per DC, essendo DC una quantità finita, ed AD una quantità infinitamente piccola del prim' ordine, come succede in qualsivoglia curva continua, la velocità ED, perduta nel passare da un archetto all' altro, sarà come il quadrato di una quantità infinitamente piccola, cioè sarà una quantità infinitamente piccola del second' ordine. Bisognerà adunque, che il corpo passi per un numero infinito di archetti infinitamente piccoli del primo ordine, cioè che passi per un arco d'estensione finita, perchè tutte le velocità perdute formino un infinitamente piccolo del prim' ordine. Dunque in un tempo dato, e finito non perderà il corpo, che una porzione infinitamente piccola di moto, e il corpo continuerà a moversi in una curva, senza che la variazione delle direzioni porti alcuna variazione sensibile nella velocità.

CAPO

CAPO QUINTO.

Della discesa nelle curve, e del moto de' Pendoli.

IL teorema antecedente è di un uso grandissimo nella dottrina delle acque correnti, importando moltissimo di sapere, che la velocità de' Fiumi si diminuisce bensì per l'irregolarità del fondo, e delle ripe, e per l'urto negli angoli rettilinei, ma non soffre però alcuna variazione sensibile quando il fondo, e le ripe formino col loro andamento una qualche curva continua. Nella Meccanica quest' è il principio generale, che ci guida nella soluzione di tutt' i Problemi appartenenti alla discesa de' corpi in qualsivoglia curva CBD, *fig.* 12. Poichè non dovendosi tener conto delle variazioni, che nascono per la curvità istessa, e per la continuata deviazione di tutte le direzioni, il corpo arriverà da C in B con una velocità eguale a quella, che acquisterebbe cadendo liberamente da tutta l'altezza verticale HB. Il che si può ancora dedurre più brevemente dagli altri principj antecedenti. Mentre, secondo ciò, che si è detto, la velocità in M, *fig.* 13., è la stessa, comunque il corpo vi cada dal piano CM, o PM egualmente alto. In oltre supposto l'angolo CMP infinitamente piccolo non può succedere variazione alcuna passando da CM in MN: e però il corpo cadendo ne' due piani CM, MN arriverà al punto N colla stessa velocità, che acquisterebbe colla caduta continuata nel solo piano PMN. E similmente passando nel terzo piano NB, o in qualunque altro numero di piani, che formino tra loro degli angoli infinitamente piccoli, il corpo arriverà al punto B colla stessa velocità, che acquisterebbe cadendo nel solo piano ENB, o ancora cadendo da tutta l'altezza verticale HB.

Nell' introduzione al primo tomo della Cosmografia si è applicato questo principio alla soluzione de' problemi più celebri, com' è quello, in cui si cerca la curva della più breve discesa da K in B, *fig.* 12., op-

oppure la curva, in cui cominciando il corpo a cadere da qualſivoglia altezza C, o K arriverebbe ſempre in egual tempo all' infimo punto D. Ma quantunque queſti problemi ſiano ivi trattati alla maniera degli antichi Geometri, e coll' ajuto della ſemplice Geometria, noi quì ci limiteremo a quelle ſole conſiderazioni, che riſguardano gli uſi più ordinarj, e importanti della Meccanica. Incomincieremo adunque a far oſſervare ai principianti, che il caſo della caduta libera in un arco circolare CBD è lo ſteſſo di un corpo, che ſi ſoſpenda dal centro A col filo AB, e ſi laſci cadere dal punto C. In oltre faremo riflettere, che in qualunque altro punto B eſprimendo tutta la gravità colla verticale BE, e tirando dal punto E le due perpendicolari EF, EG ſulla tangente BF, e ſul raggio prodotto AB; tutta la ſteſſa forza ſi riſolverà in due altre, l' una delle quali BG agirà direttamente contro il punto di ſoſpenſione A, e produrrà la tenſione del filo AB: l' altra BF s' impiegherà nell' accelerazione del corpo al lungo dell' arco circolare BD.

Da queſta riſoluzione delle forze, e dalla ſemplice iſpezione dei triangoli è manifeſto, che la forza BG nell' infimo punto D ſi confonde colla BE, e che così la tenſione creſce gradatamente da C in D. E' manifeſto in ſecondo luogo, che la forza BF ſi confonde colla BG all' altezza C del quadrante CD, e va ſempre diminuendoſi nell' accoſtarſi al punto D. Così adunque il moto da C, o da K in D è bensì accelerato continuamente, ma non uniformemente, e nel progreſſo diventano ſempre minori i gradi accreſciuti in egual tempo alla velocità. La ſomma poi di tutti gl' iſteſſi gradi, oſſia la velocità totale, ſi farà maſſima nel punto D: ſarà eguale a quella che ſi acquiſterebbe cadendo da tutta l' altezza verticale, e ſarà proporzionale alla radice dell' altezza medeſima. E poichè la velocità concepita ſi dirige ſempre ſecondo la tangente del circolo, il corpo caduto da K in D dovrà riſalire nell' arco Dk: e finalmente poichè le forze BF, bf non ſono eguali, e contrarie ſe non

nei

nei punti egualmente alti B, b; non ſi potranno eſtinguere tutt' i gradi della velocità acquiſtata cadendo da K in D, ſe non ſalendo per un arco Dk eguale a DK. Così adunque le oſcillazioni continuerebbero ſempre egualmente ſe non vi foſſe la reſiſtenza dell' aria, e l' attrito del filo intorno al punto di ſoſpenſione.

Incominci il corpo a cadere dal punto K nell' arco circolare KBD, *fig.* 14. La velocità nel punto B ſarà quella che ſi acquiſterebbe cadendo da tutta l' altezza LM: e per ciò, che ſi è detto ſul fine del Cap. II., eſprimendo coll' unità la forza aſſoluta della gravità, la velocità ſi dovrà eſprimere generalmente colla radice del doppio ſpazio percorſo, e ſarà eſſa nel punto $B = \sqrt{2LM}$. Ma perchè il moto può riguardarſi come equabile nell' archetto picciliſſimo BF, per le altre formole del Cap. I., ſarà il tempo della diſceſa da B in $F = \frac{BF}{\sqrt{2LM}}$: e deſcritto ſopra di LD il ſemicircolo LND, eſſendo LM terza proporzionale ad MD, ed MN, poſta $2LM = \frac{2MN^2}{MD}$; ſarà il tempo dell' iſteſſa diſceſa $= \frac{BF}{MN} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}MD}$. Affine di ridurre queſt' eſpreſſione a qualch' altra, di cui ſi poſſa prendere facilmente la ſomma, per eſprimere tutto il tempo della diſceſa da K in D, biſogna premettere alcune analogie geometriche, che riſguardano i principj del calcolo infiniteſimale: e che ſono.

I. Preſe le due ſemiordinate MB, QF infinitamente proſſime tra loro, e ſulla prima di eſſe tirata dal punto F la perpendicolare FO, il triangoletto FOB potrà conſiderarſi come rettilineo, e come ſimile al triangolo rettangolo BMA. Ed eſſendo eguali gli angoli FBO, BAM, che aggiunti all' angolo MBA arrivano a formare un angolo retto, ſi avrà l' analogia $MB : AB = FO : BF = MQ : BF$. Sarà dunque l' archetto $BF = AB \cdot \frac{MQ}{MB}$.

II. Il

II. Il quadrato della semiordinata d'un semicircolo essendo sempre eguale al rettangolo delle ascisse, sarà $MB^2 = 2AB.MD - MD^2$. Ma se l'arco KD, e tutta l'altezza LD si supponesse tanto piccola, che rispetto al rettangolo $2AB.MD$ si potesse trascurare la quantità MD^2 come d'un ordine inferiore, sarebbe $MB = \sqrt{2AB.MD}$. In questo caso adunque potrebbe supporsi l'archetto $BF = \frac{AB.MQ}{\sqrt{2AB.MD}} = \frac{MQ}{\sqrt{MD}}.\sqrt{\tfrac{1}{2}AB}$: e ciò posto sarebbe il tempo della discesa del corpo da B in $F = \frac{MQ}{2MN}.\sqrt{AB}$.

III. Ma se P sarà il centro, e PN il raggio del semicircolo LND, colla stessa analogia di prima si caverà $MN:PN = MQ:NR$. Sarà dunque $MQ = \frac{MN}{PN}.NR$: e fatta quest' altra sostituzione sarà il tempo della discesa in qualsivoglia archetto $BF = \frac{NR}{2PN}.\sqrt{AB} = \frac{NR}{LD}.\sqrt{AB}$, ossia eguale alla quantità costante $\frac{\sqrt{AB}}{LD}$, moltiplicata per l'archetto NR del semicircolo LND.

Ridotta l'espressione del tempo a questi termini è manifesto, che, prendendo tutte le somme, il tempo della discesa da K in D, sarà eguale alla stessa quantità costante $\frac{\sqrt{AB}}{LD}$, moltiplicata per tutto il semicircolo LND. Considerando poi la formola $\frac{LND}{LD}.\sqrt{AB}$ se ne potranno ricavare molte conseguenze importanti.

I. Poichè $\frac{LND}{LD}$ esprime la ragione della semiperiferia al diametro, ch' è costantemente la stessa in qualsivoglia semicircolo, data la lunghezza del pendolo AB, si avrà sempre la stessa espressione del tempo della discesa negli archi circolari, comunque disuguali tra di loro, quando si possano riguardar tutti come assai piccoli: e però le oscillazioni ne' minimi archi circolari si faranno tutte in egual tempo.

II. Data la quantità $\frac{LND}{LD}$ se si varierà la lunghezza del pendolo AB, il tempo di ciascuna oscillazione negli archi minimi si varierà in ragione sudduplicata della lunghezza medesima: e al contrario le lunghezze dei pendoli saranno in ragione duplicata diretta del tempo di ciascuna oscillazione, ossia in ragione duplicata reciproca del numero delle oscillazioni fatte in un dato tempo: mentre è manifesto, che il numero delle oscillazioni fatte in un dato tempo è in ragione reciproca del tempo di ciascuna oscillazione.

III. Poichè il tempo della discesa per $\frac{1}{2}AB$, secondo le altre formole antecedenti, si deve similmente esprimere per $\sqrt{AB}$; sarà il tempo della discesa nel piccolo arco circolare KD al tempo della discesa libera per la metà della lunghezza del pendolo, come $\frac{LND}{LD}.\sqrt{AB}:\sqrt{AB}$, o come $LND:LD$, cioè come la semiperiferia di un circolo al suo diametro.

= LND·√AB : LD·√AB
= LND : LD

IV. Quando sia data la lunghezza di un pendolo, che nel tempo di un minuto secondo compisce un' intera oscillazione scendendo, e poi salendo in un piccolo arco circolare, sarà il diametro alla periferia, come il tempo della discesa per la metà della lunghezza del pendolo al tempo di un minuto secondo: e poichè nelle cadute libere sono gli spazj decorsi come i quadrati dei tempi impiegati a decorrerli; sarà il quadrato del diametro al quadrato della periferia, come la metà della lunghezza del pendolo all' altezza, che si percorre verticalmente in un minuto secondo.

V. Essendo il diametro alla periferia di un circolo prossimamente, come 100000 : 314159, supposto che a Roma la lunghezza del pendolo semplice, che compisce una vibrazione nel tempo di un un minuto ſecondo ſia di 3 piedi di Parigi, e linee 8. 38, come riſulta dalle oſſervazioni de' celebri le Seur, e Jacquier, ſarà lo ſpazio decorſo in un minuto ſecondo da un corpo, che cada liberamente, di piedi 15, un pollice, e linee $1\frac{1}{5}$. Ed eſſendo la latitudine di Roma di 44° 54′, cioè minore di circa un mezzo grado ſolamente della latitudine di Milano, in qualunque ipoteſi della gravità accreſciuta nelle maggiori diſtanze dall' Equatore, ſi potrà ſupporre che ancora nel noſtro paeſe lo ſpazio decorſo in un ſecondo nella caduta libera ſia circa di piedi 15. 1.

Il Galileo fu il primo ad accorgerſi nelle lampane ſmoſſe dell' eguaglianza dei tempi di tutte le vibrazioni, ma non arrivò mai a cavarne la dimoſtrazione dalle prime leggi, e dalla natura iſteſſa della gravità. Anzi credette il Galileo, che ciò poteſſe ſuccedere generalmente comunque gli archi circolari non foſſero più tanto piccoli. L'Huygens fu il primo a dimoſtrare, che tutti gli archi e piccoli e grandi della cicloide ſi ſcorrono in egual tempo da un corpo, che continua a cadervi ſino al punto più baſſo: e che ciò non ſuccede nel circolo ſe non quando gli archi ſono piccoliſſimi. La teoria del moto nella cicloide è ſtata ridotta alla maggiore ſemplicità nell' introduzione al primo tomo della Coſmografia. Nell' introduzione al ſecondo ſi ſono anche ſpiegate tutte le formole per ritrovare il centro d'oſcillazione nei pendoli compoſti. Quì biſognava eſporre i fondamenti Geometrici, e Meccanici dell' uſo ordinario di adattare agli orologj aſtronomici dei pendoli, che ſi vibrino nei minimi archi d'un circolo.

CAPO SESTO.

Del moto de' Projetti.

UN corpo, che ſi muova in qualſivoglia curva DAT, *fig.* 15., quando foſſe abbandonato a ſe ſteſſo in qualſivoglia punto A, ſcorrerebbe per la tangente AMN deſcrivendo eguali ſpazj in tempi eguali: poichè la tangente AMN ſi può conſiderare come la direzione iſteſſa della curva nel punto A: e ſi ricercano ſempre delle nuove forze per deviare un corpo dall' attuale direzione del moto, e per accelerarlo, o ritardarlo. Ma ſe foſſe AR perpendicolare alla curva nel punto A, e ſe col centro R, e col raggio AR ſi deſcriveſſe l'arco circolare APQ, il corpo ſcorrendo per la tangente ſi ſcoſterebbe dal centro degli ſpazj MP, NQ. Il niſo adunque, e la forza, che ha il corpo di ſeguitare, quanto è da ſe, la prima direzione del moto, e di ſcorrere ſecondo la tangente fa naſcere un' altra forza di allontanarſi dal centro direttamente. Queſt' altra forza ſi chiama forza centrifuga, ed è la ſteſſa, che quando un ſaſſo ſi fa girare in una fionda la tiene ſempre diſteſa, e ſi fa ſentire contro la mano. La conſiderazione di queſta forza entra ſoſtanzialmente nella teoria delle variazioni della gravità, che ſi hanno andando dall' equatore ai poli, anzi entra in tutte le teorie più ſublimi della Terra, e del Cielo, come ſi è ampiamente ſpiegato nel primo, e nel ſecondo tomo della Coſmografia.

Ora per limitarci al ſemplice moto de' Projetti, faremo riflettere in primo luogo, che qualunque ſia la curva ATQ, *fig.* 16., ceſſando la forza di gravità in qualunque punto A, il corpo ſcorrerebbe per la tangente AMN, deſcrivendo gli ſpazj AM, AN proporzionali ai tempi.× In ſecondo luogo è da rifletterſi, che per la forza di gravità, cadendo il corpo, e deviando dalla tangente, deſcriverebbe gli ſpazj MR, NT proporzionali ai quadrati dei tempi () Sarebbe adunque $MR:NT = AM^2:AN^2$, e tirate le parallele come nella *fig.* 16., ſarebbe $AB:AC = BR^2:CT^2$: ch' è la proprietà della parabola ATQ riferita al diametro AO. Da queſta ſemplice conſiderazione ſe ne poſſono ricavare moltiſſime conſeguenze.

× poichè [illegible]

() perchè [illegible]

I. Poichè il corpo abbandonato nel punto A alla forza di projezione, movendoſi equabilmente nella tangente AMN, ſi ſco-

[illegible] AM, AP [illegible] AM, AN [illegible] AL, AP [illegible]

ſterebbe dalla verticale AO degli ſpazj AL, AP proporzionali ai tempi, e poichè in oltre la forza della gravità, agendo nella direzione verticale, non può alterare il moto orizzontale; la parabola ATQ ſi deſcriverà in maniera, che, tirate le verticali equidiſtanti AO, ML, NT, il corpo paſſerà in egual tempo dall' una all' altra, e conſerverà ſempre la ſteſſa velocità orizzontale, che aveva al principio del moto.

II. Poichè il corpo abbandonato a ſe ſteſſo ne' punti A, ed R ſcorrerebbe per le tangenti AM, RV, e, per ciò che ſi è detto precedentemente, arriverebbe in egual tempo da A in M, e da R in V: e poichè in oltre nel moto equabile le velocità ſono proporzionali agli ſpazj percorſi in tempi eguali; la velocità, e la quantità del moto, oſſia l'impeto del corpo ſarà proporzionale alle tangenti AM, RV intercette tra le verticali equidiſtanti AO, ML, NT.

III. Eſſendo equabilmente accelerato il moto delle cadute verticali, la velocità acquiſtata cadendo per qualſivoglia ſpazio NT, o AC ſarà quella, con cui in egual tempo ſi potrebbe ſcorrere equabilmente lo ſpazio $2AC$. Però la velocità della caduta libera ſarà alla velocità della projezione in qualſivoglia punto A, come $2AC : AN$, e la velocità, con cui il corpo è gettato nel punto A, ſi eguaglierà alla velocità acquiſtata deviando dalla tangente di uno ſpazio AC tale che ſia $2AC = AN$.

IV. Se ſi chiamerà P il parametro della parabola appartenente al diametro AO, e ſarà generalmente $P.AB = BR^2$, e $P.AC = CT^2$, poſta $CT = AN = 2AC$, ſi troverà $P = 4AC$, e $AC = \frac{1}{4}P$: cioè dato il punto A, il parametro P, e tutta la parabola ATQ, il corpo cadendo per un' altezza eguale alla quarta parte dello ſteſſo parametro acquiſterebbe una velocità eguale a quella, con cui dev' eſſere gettato nel punto A ſecondo AMN, acciò deſcriva la parabola ATQ.

Ciò

Ciò poſto il moto del corpo ſi può ridurre ad una ſemplice coſtruzione Geometrica. Si prenda la verticale $XA = \frac{1}{4}P$, *fig.* 17., e ſopra la XA ſi deſcriva il ſemicircolo XMA, che taglj la linea AZ della direzione del getto nel punto M. Si produca la ſemiordinata KM in D, per modo che ſia $KM = MD$, e però $AZ = BD = 2AM$. Per la proprietà del circolo ſarà $XA.KA = \frac{1}{4}P.KA = AM^2$, ed eſſendo $KA = ZD = AB$, ſarà ancora $P.AB = 4AM^2 = BD^2$: cioè il punto D ſarà nella parabola, e poichè il punto D determinato con queſta coſtruzione non può eſſere ſe non un ſolo, ſarà D il vertice, DE l'altezza, e $2AE$ l'ampiezza AQ della parabola. Da ciò ſe ne cavano ancora molte altre conſeguenze.

I. Data l'altezza XA, che corriſponde alla velocità della projezione, ſi avrà colla ſteſſa coſtruzione l'altezza, e l'ampiezza di tutte le parabole corriſpondenti alle diverſe direzioni del getto AM, AU, *fig.* 18. Poichè in quella maniera, che KA è l'altezza, e $2KD$, oppure $4KM$ l'ampiezza del getto diretto ſecondo AM; ſe poſta la ſteſſa velocità del getto ſarà la direzione AU, ſarà pure SA l'altezza, e $4SU$ l'ampiezza del nuovo getto.

II. Eſſendo il raggio la maggiore ſemiordinata del circolo, data la velocità, con cui un corpo è gettato, ſi avrà l'ampiezza maſſima $4KM$ quando ſarà $KM = KA$, e quando per conſeguenza ſarà ſemiretto l'angolo MAK, o MAQ. Dunque la maſſima diſtanza, a cui ſi poſſa ſpignere una palla di cannone con una data quantità di polvere, ſi avrà dando al cannone l'inclinazione di gradi 45 coll' orizzonte.

III. Se ſi prenderanno due archi eguali MU, MU ſotto, e ſopra il punto M, ſaranno eguali i due angoli MAU, le due ſemiordinate SU, e per conſeguenza le ampiezze AFI, AHI. Data adunque la forza del getto ſi potrà gettare la palla alla ſteſſa diſtanstanza AI sotto due differenti direzioni AU, che declinino egualmente dall' angolo semiretto MAQ. Si sceglie la direzione superiore nelle bombe, con cui si hanno a rompere i tetti, e le volte, e l'inferiore nei cannoni, con cui si atterrano le muraglie.

IV. Vicendevolmente quando sia data la forza del getto, e data l'ampiezza AI, a cui conviene gettar la palla, prendendone la quarta parte AV, e alzando in V la perpendicolare VU, che incontri il semicircolo XMA ne' punti U, U, si avranno le due direzioni AU, che soddisfaranno egualmente all' intento. Se la perpendicolare incontrerà il semicircolo in un solo punto M, sarà unico il caso del getto, e si avrà la massima ampiezza, che sotto direzioni diverse possa corrispondere ad un impeto dato di projezione.

V. Se si farà una volta l'esperienza della massima ampiezza AQ, che possa aversi con un impeto dato, cioè con una data quantità di polvere in una palla di un dato peso, la quale ampiezza suol essere nelle colubrine di passi 500, e se si cercherà poi l'angolo QAU, sotto cui abbia a dirigersi il getto, perchè la palla arrivi
* 404½ alla distanza, per esempio, di passi* [redacted], dovrà prendersi $QA : IA = KM : SU = 5 : 4$. In questo caso si troverà nelle tavole l'arco AU di gradi 54, l'arco MU di 36: e però l'angolo MAU sarà di gradi 18, e si potrà soddisfare al quesito con due getti, che declinino egualmente dall' angolo semiretto, e sopra, e sotto di gradi 18.

In questa semplice costruzione sono abbracciati tutt' i Teoremi del Galileo intorno al getto de' corpi in un piano orizzontale. Il Grandi, il Simpson, e molti altri Autori hanno dato la soluzione del problema del getto de' corpi in qualunque piano inclinato. Nell' introduzione al primo tomo della Cosmografia la soluzione Geometrica del Problema si è ridotta al principio medesimo, che sia fatto una volta l'esperimento della massima ampiezza, che con un dato pezzo d'artiglieria si può avere in un piano orizzontale. Si sono anche spiegate tutte le regole Trigonometriche di percuotere un corpo alzato di una quantità data ad una data distanza sull'

sull' orizzonte. L'equazione analitica del Problema si può dare più brevemente.

Sia AQ, *fig.* 19., la massima ampiezza, a cui può arrivare il getto, dirigendolo ad angolo semiretto dal punto A, e si faccia $AQ = a$. Sarà $\frac{1}{2}a$ l'altezza della caduta corrispondente alla velocità della projezione, e sarà $2a$ il parametro corrispondente al diametro AC. Sia t la tangente dell' angolo NAQ, sotto cui deve dirigersi il getto, perchè la parabola ATI passi per un dato punto T, e sia $AP = b$, $PT = c$, e però* $PN = bt$, $NT = bt - c$, e $AN = b . \sqrt{(1 + t^2)}$. Per la natura della parabola, si avrà $2a . \overline{bt - c} = b^2 . \overline{1 + t^2}$, ed ordinando l'equazione, e poi estraendo la radice, si avrà $t = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - b^2 - 2ac)}$.

Per esempio sia l'ampiezza massima AQ di 8000 piedi, sia AP di 5600, e PT di 812, e però il punto T sia alzato sopra l'orizzontale AQ dell' angolo TAQ di 8° 15′. Fatte le sostituzioni numeriche, e prendendo il segno superiore, si troverà la tangente t di 2.22, che, posto il raggio 1, corrisponde ad un angolo di 65° 45′: e prendendo il segno inferiore si troverà 0.637, che corrisponde ad un angolo di 32° 30′. Per lo contrario se fosse data la direzione del getto, e si cercasse la forza necessaria per arrivare ad un punto alzato di un angolo dato ad una data distanza sull' orizzonte, l'equazione da risolversi sarebbe $a = \frac{1}{2} b^2 . \frac{1 + t^2}{bt - c}$.

CAPO SETTIMO.

Dell' equilibrio, e del centro di gravità.

S'Intenda, che il piano ABH, *fig.* 20., sia mobile intorno ad un asse perpendicolare nel punto A, e che per moverlo vi sia da superare una resistenza determinata. Si esprima la forza, che vi s' ims'impiega, colla retta BC: si prolunghi la BC fino in H, e presa $BC = DE$ s'intenda, che la stessa forza nella direzione della stessa linea BH venga applicata, prima in B perpendicolarmente al raggio BA, e poi in D obbliquamente a DA. E' manifesto, che in un caso, e nell' altro si avrà sempre lo stesso effetto di svolgere il piano egualmente intorno al punto A. Ora tirando DF perpendicolare, ed EF parallela al raggio DA, e compiendo il parallelogrammo $DEFG$, la forza DE si risolverà in due, l'una DG, che agendo secondo la lunghezza del raggio DA non contribuirà punto al moto intorno ad A, e l'altra DF, che essendo perpendicolare resterà tutta impiegata nello stesso moto. In oltre, essendo simili tra loro i due triangoli rettangoli DFE, ABD, sarà $DF : DE = DF : BC = BA : DA$. Saranno dunque equivalenti le forze BC, DF quando avranno tra loro la ragione reciproca delle distanze perpendicolari DA, BA dal centro del moto A.

Ciò posto se alla linea inflessibile BAD, *fig.* 21., e mobile intorno al punto A, s'intenderanno applicate perpendicolarmente in B, e D le forze BC, DE, tali che si abbia $BC : DE = DA : BA$; saranno le due forze in equilibrio. E se alle suddette forze si sostituissero due pesi espressi per B, e D, e fosse $B.BA = D.DA$, sarebbe $B.BA$ tutto lo sforzo, o il momento esercitato dal peso B per alzare il peso D, e $D.DA$ il momento contrario del peso D, e per l'eguaglianza dei due momenti si avrebbe l'equilibrio. In questo caso il punto A, intorno a cui non potrebbe darsi alcun moto, si chiamerebbe il centro di gravità dei due pesi B, e D, ed essendo $B : D = DA : BA$, sarebbe ancora $B + D : D = BD : BA$; cioè sarebbe la somma dei due pesi ad uno di essi come la distanza totale alla distanza dell' altro peso dal centro di gravità. Con questa analogia, dati che siano due pesi, e la distanza di uno di essi dal punto di sospensione, si troverà a quale distanza si debba collocar l'altro, perchè abbiasi l'equilibrio: e date le due distanze, e un peso, si troverà qual debba essere l'altro peso da equilibrarsi.

Ora

Ora s'intendano attaccati i tre pesi A, D, M, *fig.* 22., alla verga inflessibile BM, e mobile intorno al punto A. S'intenda ancora, che O sia il centro di gravità dei due pesi D, ed M. I momenti dei due corpi D, ed M rispetto al punto ~~G~~ A dovranno essere $D.DA + M.MA = D.\overline{OA - DO} + M.\overline{OA + MO}$. Ma supposto, che O sia il centro di gravità, per ciò che si è detto precedentemente, sarà $D.DO = M.MO$. Dunque sottratte le quantità eguali saranno i momenti suddetti $D.OA + M.OA = \overline{D + M}.OA$: cioè i medesimi, che si avrebbero se i due pesi D, ed M fossero concentrati nel punto O, e sospesi alla distanza OA dal punto A. Che se dalla parte di D, ed M si aggiugnerà un terzo peso, si troverà alla stessa maniera, che il momento del terzo peso, e dei due D, ed M riuniti insieme nel centro O, sarà il momento istesso di tutti e tre i corpi riuniti insieme nel loro centro comune di gravità. E come il caso di tre corpi si riduce al caso di due soli, così il caso di quattro si riduce a quello di tre, ed in qualunque numero di corpi uniti insieme con linee inflessibili, e sospesi da qualche punto, il momento di tutti insieme deve essere quello stesso, che si avrebbe se tutti fossero riuniti nel centro di gravità.

Questo teorema basta per ritrovare in qualunque corpo il centro di gravità, cioè quel punto, intorno a cui, equilibrandosi tutte le forze, non si può dare alcun moto. Poichè supponendo, che siano legati insieme in qualunque modo i pesi P, P', P'', ec., e che le rispettive distanze di ciascuno di essi da un asse dato di posizione siano Q, Q', Q'', ec., e i momenti $P.Q$, $P'.Q'$, $P''Q''$, ec., e supponendo in oltre che sia z la distanza dell' asse dal centro di gravità, e il momento di tutt' i pesi riuniti nello stesso centro sia $(P + P' + P'', \text{ec.}).z$, dovendo questo momento eguagliarsi alla somma di tutti quelli, dovrà anch' essere $z = \dfrac{P.Q + P'.Q' + P''.Q'', \text{ec.}}{P + P' + P'', \text{ec.}}$

Per esempio, se si proponesse una lamina piana NAP, *fig.* 23., nella

nella cui superficie fosse distribuito il peso uniformemente, e si cercasse il centro di gravità O, bisognerebbe riportare la figura ad un asse GAg dato di posizione, e intenderla sospesa orizzontalmente, in modo che non potesse moversi se non rotando intorno ad esso. Allora ponendo $AO = z$, chiamando y la semiordinata DC, x l'ascissa AD, dx l'elemento infinitamente piccolo Dd, sarebbe $2y.dx$ il peso dell' area $CFfc$, e il momento $2y.x.dx$, e indicando le somme colla lettera S, sarebbe $z = \frac{Syxdx}{Sydx}$. Generalmente si avrà la distanza del centro di gravità da una data retta considerata come l'asse di sospensione di tutto il corpo, moltiplicando ciascun peso per la rispettiva distanza dall'asse, e dividendo la somma di tutti questi prodotti per la somma di tutt' i pesi.

Nei trattati elementari del calcolo differenziale, e integrale si diffondono ordinariamente gli Autori nell' applicazione di questa formola ai casi particolari dei triangoli, delle piramidi, delle parabole, delle paraboloidi, ec.: e l' applicazione non ricerca altro appunto, fuorichè le notizie elementari dello stesso calcolo. Nei corpi omogenei come le sfere, le sferoidi, i prismi, i poliedri, ec. il centro di gravità è manifestamente lo stesso centro della figura, e della grandezza. In tutt'i corpi essendo eguali i momenti e da una parte, e dall' altra del piano, che passa per il centro di gravità, se si tirerà un altro piano che non vi passi, saranno maggiori i momenti nella porzione, che include il centro di gravità, e minori nell' altra. Così sottoponendo a un corpo qualche impedimento alla discesa, il corpo o si moverà, o starà fermo, secondo che l'impedimento o non arriverà fino al centro di gravità, o si stenderà più oltre. Nei corpi liberi poi la caduta si dirigerà secondo la linea tirata dal centro di gravità perpendicolarmente al piano dell' orizzonte, e alla superficie media della Terra, che può riguardarsi come la superficie dell' equilibrio. Mentre intorno alla

stessa

stessa linea di direzione per l'eguaglianza dei momenti non possono inclinarsi i corpi nè da una parte, nè dall' altra. Il Borelli nel suo celebre libro sul moto degli animali ridusse a questi principj tutto il meccanismo dell' equilibrio, e dei differenti moti, e naturali, e forzati degli uomini, e dei quadrupedi.

Nella Meccanica sublime la considerazione del centro di gravità apre un campo vastissimo ad altre più difficili ricerche intorno alla Teoria generale del moto. Nel primo libro del secondo tomo della Cosmografia la ricerca dell' asse, della velocità, e delle variazioni del moto di un corpo qualunque, con un metodo facile, e nuovo è già stata ridotta a tutta quella semplicità, di cui sono suscettibili queste materie. I principali teoremi sono: che se la direzione della forza impellente non passerà pel centro di gravità del corpo, oltre il moto di projezione, tutte le particelle concepiranno un moto di rotazione intorno ad un asse, che passi pel centro medesimo: che il moto di projezione sarà lo stesso come se la forza fosse impressa nel centro con una direzione parallela, e il moto di rotazione sarà lo stesso come se il centro restasse fisso, e non vi fosse alcun moto di projezione: che due moti di rotazione intorno a due assi differenti compongono sempre un solo moto di rotazione intorno ad un altr' asse dato di posizione, e vicendevolmente un solo moto di rotazione si può risolvere in due, o in più altri: che se i momenti delle forze centrifughe non si eguaglieranno da tutte le parti opposte, continuandosi il moto di rotazione si varierà l'asse: che in ciascun corpo vi sono almeno tre assi, posti ad angolo retto, intorno a ciascuno dei quali può continuarsi uniformemente il moto di rotazione, come incomincia, ec.

Ma ancora nella Geometria la considerazione del centro di gravità somministra un metodo semplice, e generale per misurare tutt'i solidi generati dalla rivoluzione d'una figura piana, come NAP, *fig.* 23., intorno all' asse Gg. Mentre si può dimostrare, che tutto il solido si eguaglia al prodotto della figura generatrice

 NAP

NAP nella periferia del circolo descritto dal centro O in tutta la rivoluzione. Quest' elegante teorema, già indicato da Pappo Alessandrino, e provato dal Guldino coll' induzione di molti casi, fu per la prima volta dedotto dai principj del moto da un discepolo del nostro Cavalieri. La dimostrazione non deve quì tralasciarsi, e si riduce ai principj seguenti. Esprima $1:p$ la ragione del raggio alla periferia, e restando le altre denominazioni antecedenti sia pz la periferia descritta col raggio AO intorno all' asse Gg, px la periferia descritta da qualunque punto della retta Cc, e $p.2yxdx$ l'anello circolare descritto dalla rivoluzione dell' area $CFfc$, ossia $2ydx$. Essendo $z = \frac{Syxdx}{Sydx}$, sarà ancora $pz.S2ydx = p.S2yxdx$, cioè il prodotto del circolo pz nella somma di tutte le aree, ossia in tutta la figura generatrice, sarà eguale alla somma di tutti gli anelli circolari, ossia a tutto il solido generato colla già detta rivoluzione.

CAPO OTTAVO.

Della Teoria, e del maneggio delle Macchine semplici, e composte.

NEl capitolo precedente si è già spiegato il principio generale dell' equilibrio, e nelle figure 24., 25., e 26. sono indicate le tre differenti combinazioni del peso P, della forza F, e del punto d'appoggio. In tutti tre questi casi si avrà l'equilibrio se il peso, e la forza saranno in ragion reciproca delle distanze dal centro del moto A, ossia se sarà $F:P = PA:FA$. Se adunque la forza F al peso P avrà una ragione maggiore di $PA:FA$, la resistenza del peso verrà superata dalla forza. Ma supposto che la linea inflessibile FP incominciando a svolgersi intorno al punto A passi in fp, e descriva gli angoli eguali PAp, FAf, sarà $PA:FA = Pp:Ff$, ed in oltre gli spazj Pp, Ff descritti nello stesso tempo esprimeranno le velocità del peso P, e della forza F. Adunque il principio fondamentale dell' equilibrio si risolverà in quest' altro: che non si potrà dare alcun moto quando la forza e il peso siano in ragione inversa della velocità: e che la forza prevalerà alla resistenza del peso quando la ragione della forza al peso sarà maggiore della ragione della velocità del peso alla velocità della forza, ossia quando sarà $F:P > Pp:Ff$, ed $F.Ff > P.Pp$.

Da ciò apparisce generalmente, che essendo data la quantità assoluta della forza, e data pure la velocità, con cui si muove, non si può accrescere la resistenza, e il peso da superarsi se non diminuendone la velocità, e impiegando un tempo maggiore per alzarlo, o trasportarlo per uno spazio determinato. Così l'economia delle leve, e di tutte le altre macchine, si riduce propriamente a questo, che non potendo noi accrescere oltre di un certo limite la quantità delle forze motrici, e potendo disporre del tempo, facciamo agire una data forza per un tempo tanto maggiore, quant' è maggiore la resistenza da superarsi. Il Galileo nel suo trattato della Scienza Meccanica ha presentato sotto questo punto di vista l'organizzazione delle macchine, ed ha anzi addotto l'esempio, che se ci serviremo di una semplice corda con un secchio attaccato per cavare da un pozzo una data quantità d'acqua in un dato tempo con una data forza, s'ingannerebbe moltissimo chi credesse di poter coll' ajuto di qualsivoglia macchina, colla stessa forza di prima, cavare nello stesso tempo una maggiore quantità d'acqua. Onde fa meraviglia, che ancora volgarmente si dica di accrescere colle macchine l'azione, e l'energia delle forze.

Il Galileo nel trattato suddetto al principale vantaggio di spendere in tempo ciò che non si può accrescere nella forza, ha soggiunto ancora due altri vantaggi importantissimi, che si possono ricavare dalle macchine: di applicare più facilmente, e comodamente una forza data: e di sostituire alla forza degli uomini le forze degli animali, delle acque correnti, e si potrebbe aggiugnere anche dell' aria,

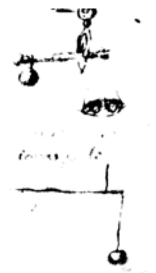
aria, e del fuoco. Il de la Hire negli Atti dell' Accademia di Parigi del *1699* valutando il peso di un uomo di mezzana statura di circa 140 libbre di Francia, e riflettendo, che un uomo può alzarsi di ginocchio quand' anche sia caricato di 150 libbre, valutò la forza dei muscoli delle gambe, e delle coscie di circa *290* libbre. Con altre simili osservazioni lo stesso Autore fece ascendere la forza dei muscoli lombali solamente a 170 libbre, e a *160* la forza dei muscoli delle braccia, e delle spalle. Alcuni altri Autori Francesi eguagliano la forza di un cavallo a 7 uomini, ed alcuni Autori Inglesi la eguagliano solamente a 5, come può vedersi nelle note alla Lezione IV. del Desaguliers.

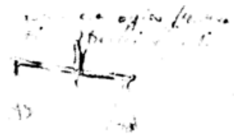
Con un semplice vette si può alzare, o smovere un peso anche 20 volte maggiore quando il peso resti applicato ad una distanza 20 volte minore di quella, a cui si applica la forza. Considerando il vette anch' esso come pesante vi è un' altra resistenza da vincere. Bisogna considerare il peso del vette AF, *fig.* 27., come riunito nel centro di gravità O: bisogna ricercare la forza, che può farvi equilibrio nel punto F, ed aggiugnerla alla forza necessaria per ismovere il peso P, posto alla distanza AP dal centro del moto A. Per esempio, se il peso del vette s' intendesse uniformemente distribuito per tutta la lunghezza, e fosse in tutto di 20 libbre, e però si potesse sostenere con una forza di libbre 10 nell' estremità F: e se in oltre il peso P fosse di libbre 300, e le distanze AP, AF fossero nella ragione di $1:6$; basterà una forza di libbre *60* nel punto F per equilibrare la resistenza e del vette, e del peso aggiunto, e per vincerla vi vorrà una forza un poco maggiore, o basterà la stessa di libbre *60* applicata ad una distanza un poco maggiore dal punto A. Nel caso che il punto d'appoggio, il peso attaccato, e la forza si combinino insieme come nella *fig.* 24., la porzione del vette AF conspirerà col proprio peso ad alzare il peso P.

1:6 = 50:300
onde bastavano 2 50
di forza le quali aggiunte alle 2 10 faranno
in tutto 2 60

Su questa considerazione si regolano appunto le divisioni della stadera, ch' è un vette di braccia disuguali, in cui, come è noto, con un solo peso trasportato a diverse distanze da una parte si riconoscono tutt' i pesi, che si sospendono successivamente dall' altra parte, sempre ad egual distanza dal centro del moto. Nella pratica si mette la stadera in equilibrio da se medesima con aggiugnere un peso o da una parte, o dall' altra: e poi sul braccio più corto facendo crescere i pesi in ragione aritmetica, si segnano nel braccio più lungo le divisioni per l'equilibrio. Ma in ciò vi vuole tutta la diligenza, perchè gli errori commessi a principio non si possono in ogni caso correggere, alternando i pesi come nella bilancia. In questa, ch' è una stadera di braccia eguali, riconoscendosi i pesi da una parte con altrettanti pesi posti dall' altra, se fosse corso qualche errore nella differente lunghezza delle due lanci, e se il peso da riconoscersi si attaccasse prima in F, e poi in P, *fig.* 24., se ne potrebbe avere la quantità precisa con prendere una media geometricamente proporzionale tra i due pesi, che vi facessero equilibrio prima in P, e poi in F. Mentre supposto il peso da riconoscersi in F, sarà $FA:PA$, come il contrappeso P al peso suddetto: ed alternando le lanci sarà pure $FA:PA$, come il suddetto peso al contrappeso da porsi in F. La bilancia, e la stadera, e così pure l'asse nella ruota, e gli altri strumenti, che vi si riducono, il mangano, l'argano, le ruote dentate, sono specie di vetti così semplici, che per intenderne tutta l'applicazione non fa bisogno più altro dopo aver detto generalmente che nel caso dell' equilibrio la resistenza, e la forza devono essere in ragione reciproca delle distanze.

Ma quantunque io supponga, che chi studierà le presenti instituzioni avrà ancora sott' occhio non solamente le figure, ma ancora le macchine istesse, aggiugnerò qualche cosa intorno alle taglie, che nei trattati elementari della Meccanica sogliono dar luogo a più equivoci. In primo luogo se il centro delle taglie C, e B fosse immobile, come nella *fig.* 28., sarà manifestamente eguale la velocità





locità del peso P, e della forza F, non si varieranno i **momenti**, e vi si avrà solamente il vantaggio di cambiare la direzione, di scegliere la più comoda, e di adattare anche i cavalli ad alzare un peso verticalmente. In secondo luogo se il peso P si sospendesse dal centro C della taglia mobile LBA, come nella *fig.* 29., congiugnendo insieme colla sottesa BA i punti del contatto B, A, ed abbassando dal punto A la perpendicolare AE sulla direzione della corda BR, che si suppone tirata in F, mentre la taglia incominciasi a svolgere intorno al punto A, sarà OA la distanza perpendicolare alla direzione del peso, ed EA la distanza perpendicolare alla direzione della forza: ed essendo simili i triangoli COA, BAE, cederà il peso alla forza quando la ragione della forza, e del peso sarà maggiore di quella di $OA:EA$, ossia di $CA:BA$, cioè del raggio alla sottesa. Nel caso delle corde parallele TA, RB, confondendosi la sottesa col diametro, il peso si supererà da una forza, che sia un poco maggiore della metà.

Se si combineranno insieme diverse taglie mobili, come nella *fig.* 30., in primo luogo è manifesto, che le sottese GI, EK, ec. tirate per i punti estremi del contatto si ridurranno ad essere perpendicolari alle direzioni delle resistenze, che nelle taglie inferiori si devono superare in T, e in R. Altrimenti se DA fosse obbliqua ad EK, la forza secondo DA si potrebbe risolvere in due l'una perpendicolare, e l'altra parallela: e questa seconda forza smoverebbe la taglia da E in K, o da K in E, nè cesserebbe il moto se non quando la taglia avesse ripreso una situazione, in cui EK fosse perpendicolare a DA. Ciò posto la forza in E nel caso dell' equilibrio dovrebb' essere alla forza in A, come $DK:EK$, e la forza in A alla forza in P, come $CB:AB$, e così componendo tutte le ragioni sarebbe la forza F al peso P come il prodotto dei raggi di tutte le taglie mobili al prodotto di tutte le sottese. Nel caso delle corde parallele la ragione del raggio alla sottesa sarebbe quella di $1:2$, e posto che il numero delle taglie fosse $1, 2, 3, 4$, ec. sareb-

sarebbe il momento della stessa forza $2, 4, 8, 16$, ec., cioè si avrebbe l'equilibrio con una forza, che fosse $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ec. della resistenza da superarsi.

Ciò che si è ricavato dal principio fondamentale della ragion reciproca delle forze, e delle distanze, risulta ancora manifestamente dall' altro principio, in cui si risolve il primo della ragion reciproca delle forze, e delle velocità. Mentre è manifesto, che alzando di un dito il peso P ne avanzerebbe uno in A, e un altro in B: e così, per tenere tese le corde, bisognerebbe che si sollevasse di due diti la seconda taglia D, e di 4 la taglia H: onde avanzandone 4 per parte in G, ed I, nell' ipotesi delle corde parallele, la velocità della forza F sarebbe 8. Lo stesso principio si può anche facilmente adattare alle altre combinazioni di taglie, mobili, ed immobili alternativamente intrecciate, come nelle *fig.* 31., e 32. Se il capo della corda FC pende da un punto fisso C, come nella *fig.* 31., è manifesto che per alzare di un dito il peso P, bisogna che ne avanzino 2 nelle corde della taglia mobile RL, 4 nelle due taglie RL, ID, e così in tre taglie 6, e 8 in quattro, ec. Ma se la corda girasse prima intorno alla taglia immobile HE, e poi intorno alla mobile RL, come nella *fig.* 32., la ragione delle velocità del peso, e della forza sarebbe di $1:3$, con due taglie immobili, e due mobili di $1:5$, e successivamente di $1:7$, ec. Non è adunque vero se non in questi ultimi casi ciò che il Wolfio nel Teor. 195. della Meccanica, e molti altri Autori hanno supposto generalmente, che in qualunque combinazione di taglie distribuendosi il peso sopra tutte le corde, e tenendole dappertutto tese egualmente, debba essere alla potenza, che lo equilibra, nella ragione del numero delle corde all' unità.

Lo stesso principio si adatta con eguale facilità a qualunque combinazione di ruote dentate, alla vite, ed al cuneo. Per esempio in quella combinazione di ruote, che lo Stevino chiamò col nome di di Pancrazio, e che si rappresenta nella *fig.* 33., le velocità saranno le stesse in E, ed F, e così pure in N, ed H, in A, ed S: in D, ed A poi le velocità saranno proporzionali ai raggi, e così pure in S, ed H, in N, ed E, in F, e G: onde supponendo la ragione dei raggi di 10 : 1, sarà nel caso dell' equilibrio la ragione del peso, e della potenza di 10000 : 1. La vite perchè si avanzi dell' intervallo delle due spire ricerca un' intera rivoluzione della potenza, che si applica con un vette ad una data distanza dall' asse: e così nel caso dell' equilibrio la potenza dovrà essere al peso da sostenersi, o da schiacciarsi, in ragione composta dell' intervallo delle due spire alla lunghezza del vette, e del raggio alla periferia. Il cuneo ABC, perchè passi nella situazione abc, *fig.* 34., deve avvanzarsi dello spazio Bb, mentre la perpendicolare BO misura la quantità dello schiacciamento di tutte le parti del corpo $EHDG$, che sono in contatto col cuneo. Sarà adunque la forza alla resistenza, come $BO : Bb = AF : AB$, ossia come la semi-larghezza del cuneo al lato.

Questi sono i rapporti generali, che determinano l'azione, e l'energia delle macchine indipendentemente dal peso di esse, e dalle altre resistenze. Si sono già accennati i principj di valutare ciò che devesi al peso. Ma il peso delle macchine ordinariamente è assai piccolo, e la principale considerazione da aggiugnersi risguarda la resistenza che nasce dall' asprezza de' corpi, e dall' intreccio reciproco delle piccole cavità, e delle piccole prominenze delle superficie, che si toccano. Il Leibnitz nelle Miscellanee di Berlino ne incominciò la teoria fisica, e distinse due sorti di movimenti l'uno radente, l'altro volvente. Il primo è il caso d'un parallelepipedo, il secondo di una ruota che scorre sopra di un piano dato. Nel primo caso presentandosi sempre la stessa superficie al contatto, e non potendosi avvanzare un corpo senza che si rompano, o che si pieghino tutte le piccole prominenze, la resistenza è assai maggiore: e però la prima regola pratica, che può darsi generalmente, si è di sostituire

tuire il moto volvente al radente quant' è possibile. Sebbene in alcuni casi particolari, per esempio nelle ruote dentate, può aversi qualche volta un attrito assai maggiore di quello, con cui due pezzi della stessa materia verrebbero a soffregarsi senz' alcun moto di rotazione. E ciò non solamente per la difficile corrispondenza dei denti, ma ancora perchè le dimensioni dei metalli vengono alterate dalle variazioni del caldo, e del freddo, e quelle del legno dall' umido, e dal secco.

Il Desaguliers nelle note alla lezione decima ci diede i risultati delle sperienze, che fece intorno alla quantità dell' attrito in tutte le macchine. Nella bilancia lo trovò piccolo, essendo piccola la superficie, su cui si appoggia il vette, e circolare il moto concepito intorno al punto d'appoggio. Lo stesso accade nella bilancia: ma perchè si possano con essa discernere le più piccole differenze dei pesi, bisogna che l'asse, e l'anello, da cui pende siano assai lisci, e che la forma dell' anello sia più tosto ovale, che circolare, e bisogna che il peso, la figura, e la distanza dal centro del moto sia precisamente eguale nelle due lanci. Per lo contrario la forza dell' attrito è assai grande nelle piccole taglie, massime se accade che per l'umidità si gonfino le corde. Secondo il diverso diametro delle rotelle trovò il Desaguliers una grandissima differenza di attrito. In una taglia di centro immobile, e del diametro di 3 pollici, accavalcata una corda del diametro d'un pollice, e di due terzi, e sospese egualmente dai due capi 800 libbre di peso, ve ne volevano da una parte altre libbre $436\frac{2}{3}$ per incominciar qualche moto. Fatto lo stesso esperimento in una taglia di 29 pollici di diametro, bastavano per togliere l'equilibrio 45 libbre di peso, cioè meno di $\frac{1}{18}$. L'asse nella ruota ha pure un piccolo attrito, quando il cilindro sia piccolo, e non sia troppo grossa la corda, con cui si sostenta il peso, nè vi sia da impiegare una forza consideraderabile per piegarla. Il cuneo, presentando sempre la stessa superficie al corpo da fendersi, ha un attrito grandissimo: il che deve anche dirsi della vite, che propriamente è un cuneo spinto da un vette, come si espresse il Newton.

Anche a questo genere di ricerche il Sig. Eulero, ed altri celebri Matematici hanno ultimamente applicato tutti gli ajuti dell' Algebra più sublime. Le formole analitiche, per valutare la forza dello sfregamento in qualunque macchina, sono ridotte a maggiore semplicità sul fine della prima Parte della Meccanica del Sig. Bossut. Ma per l'applicazione delle stesse formole bisogna prima conoscere la proporzione, che passa in qualunque caso proposto tra la pressione, e la frizione. Questa non può conoscersi se non colle sperienze immediate: e le sperienze per determinare la proporzione delle due forze nelle superficie, che si sfregano insieme, nella bilancia, o in qualunque altra macchina, non ricercano meno di quelle, con cui si può determinare l'intero effetto dello sfregamento. Tutte le congetture proposte finora intorno alla natura dei primi filamenti dei corpi, e alla maniera, con cui si piegano, e cedono nel soffregarsi, non danno nessuna regola ben sicura. Le stesse sperienze, che si sono fatte per determinare in un caso dato le variazioni, che nascono dalla diversa velocità, e dai diversi pesi, non suggeriscono niente di ben preciso per gli altri casi. Essendomi adunque proposto di abbracciare in queste Instituzioni ciò che può essere di un uso immediato, lascio che in qualunque caso si giudichi dalle sperienze immediate della frizione, e senza portarne più avanti la teoria analitica, incomincierò ad applicare gli altri principj antecedenti alla teoria delle Fabbriche.

DELL'

DELL' ARCHITETTURA STATICA,

OSSIA

DELL' APPLICAZIONE DE' PRINCIPJ PRECEDENTI ALLA TEORIA DELLE FABBRICHE.

LIBRO SECONDO.

CAPO PRIMO.

Dell' idea Generale, e degli Ordini d'Architettura.

Il nome di Architettura fu preso da Vitruvio nel senso più generale, che significa una scienza ornata di molte cognizioni, con cui si regolano i lavori d'ogni sorte. In questo senso l'Architettura comprenderebbe la Meccanica, l'Jdraulica, la Gnomonica, e l'Architettura propriamente detta civile, e militare. Noi quì ci limiteremo all' applicazione de' principj già esposti della Meccanica, e della Statica alla Teoria della fermezza, e della solidità delle fabbriche. Questa è la parte, in cui l'Architetto ha di bisogno di tutti gli ajuti della Matematica. Le idee dei comodi, che si ricercano in ogni edifizio, si possono formare colla semplice cognizione degli usi della vita civile: e le idee dell' Euritmia, ossia della bellezza, e della decorazione, comunque in parte dipendano dalla Geometria, e dall' Ottica, si possono ancora ricavare dalle moltiplici, e attente considerazioni dei migliori edifizj. I canoni della solidità ricercano delle teorie più profonde: e i casi tanto frequenti di fabbriche scompaginate, e rovinose ne fanno sentire la necessità, e l'importanza.

Gli ordini di Architettura formano non solamente l'ornato, ma ancora l'ossatura di ogni edifizio, che dà poi regola, e norma

 a tutte

a tutte le altre proporzioni. Sono essi principalmente composti dalle colonne, dai piedestalli, e dai cornicioni. Le altre parti, come finestre, nicchj, acroterj, e cose simili, quantunque appartengano agli ordini, si riguardano però come accessorie, e si regolano sulla disposizione delle parti principali. Nelle Città Greche di Europa s'incominciò anticamente da un ordine sodo, e robusto, chiamato Dorico. Nelle colonnie Greche dell' Asia minore si seguitò un altr' ordine nobile, e maestoso, chiamato Jonico. Ritrovossi poi da Callimaco un nuovo capitello, e un nuovo ordine più delicato, e gentile del secondo, che fu adottato dalla splendida Città di Corinto. Trasferita in seguito l'Architettura dalla Grecia a Roma credettero alcuni di ravvisarvi due altri ordini aggiunti: l'uno rozzo, e massiccio, chiamato Toscano, perchè erasi ritrovato più corrispondente alla semplicità delle Etrusche Dinastie: l'altro ideato dagli Architetti Latini, e chiamato composto, perchè propriamente è un composto di due ordini Jonico, e Corintio.

Vitruvio, il Maestro degli Architetti, sul fine del Cap. I. del Lib. IV. insegnò, che il Composto non deve riguardarsi come diverso dall' Ordine Corintio: e nel Cap. VII. dello stesso libro descrivendo la maniera particolare di fabbricare i Tempj nella Toscana, non parve che riguardasse l'Ordine Toscano come sostanzialmente differente dal Dorico. Veramente nell' Ordine Toscano il piedestallo, la colonna, e il corniccione si tiene un poco più basso, e vi si suole disegnare la base della colonna con un membretto di meno, e il capitello con tre altri istessamente di meno del Dorico. Ma siccome l'altezza della base ~~e della colonna~~ è la stessa in un ordine, e nell' altro, la differenza di que' membretti appartiene unicamente all' Ornato: e tutto insieme l'Ordine Toscano può riguardarsi come un Dorico più massiccio, e più rozzo. Le proporzioni sono poi esattamente le stesse nel Composto, e nel Corintio. La sola differenza si è, che distinguendosi il capitello Jonico con quattro volute ai quattro angoli, e il capitello Corintio con tre

tre ordini di foglie, e con sopra i caulicoli, o siano viticci; il capitello dell' Ordine Composto riunisce le volute dell' Ordine Jonico, e le foglie del Corintio.

Quell' ardita, e bizzarra maniera di fabbricare, che volgarmente chiamasi Gotica, deve riguardarsi più tosto come una corruttela, che come un ordine particolare di Architettura. I Goti nell' Italia, e i Saraceni nelle Spagne, nel Palazzo di Granata, nella Cattedrale di Toledo, nel Palazzo, e nella Cattedrale di Siviglia, e in altre fabbriche, incominciarono ad allontanarsi dalle antiche forme, regole, e proporzioni de' capitelli, de' piedestalli, delle colonne, e degl' intercolonnj. Si uscì allora dai limiti della semplicità, e della sobrietà degli ornati, che formava il carattere principale dell' Architettura Greca, e Romana. Si videro degli ornati minuti, e capricciosi, degli altissimi loggiati, dei capitelli bizzarri, e irregolari. S'ebbe ancora un minore riguardo a tutt' i canoni della solidità reale, ed apparente. Gli Architetti Tedeschi sul fine del secolo tredicesimo nelle Chiese di Strasburgo, di Rheims, di Aversa, e in altre fabbriche aggiunsero alle licenze degli Architetti Goti, e Saraceni ancora la deformità degli archi acuti, disegnandoli coll' intersecazione di due archi circolari, che hanno ordinariamente la sommità delle colonne per centro, e la distanza di esse per raggio. Il Blondel nel Cap. I. della Par. I. del Lib. I. della sua Architettura chiamò questa maniera di fabbricare enorme, e insopportabile: e il Belidor nel Cap. XI. del Lib. V. la riguardò ancora come ridicola. Lo Scamozzi nel Cap. VI. della Par. I. del Lib. I. parlando del Duomo di Milano, incominciato nel 1386, ci lasciò scritto: che questo Tempio manca prima nell' eccellenza dell' invenzione, e forma universale, e poi nella corrispondenza delle parti, e finalmente nella corrispondenza delle membra e col tutto; e aggiunse di riguardarlo come un monte traforato di marmi, e di altre materie condotte con grandissima spesa da' monti, e lavorate, e poste l'una sopra l'altra inordinatamente, e come alla confusa.

Tor-

Tornando adunque ai tre Ordini, e incominciando dalle idee più generali pare che tutte le diſtinzioni da farviſi non poſſano ridurſi che a tre capi: ſodezza, nobiltà, e gentilezza. Pare di più, che la diverſa ſodezza, e gentilezza debba meno cercarſi nella qualità degli ornati, che nella groſſezza, o ſveltezza delle colonne, che formano l'oſſatura principale d'un edifizio, e che hanno un' aria di maggiore ſodezza quanto più ſono groſſe relativamente a tutta l'altezza, e di maggiore ſveltezza, e leggiadria ſe ſono più alte relativamente alla groſſezza. Quindi non pare, che nell' Architettura ſi poſſano dare più di tre ordini ſoſtanzialmente differenti tra di loro: il tozzo, e ſodo, che abbia minore altezza nelle colonne, come il Toſcano, e il Dorico: lo ſnello, e leggiadro, che abbia un' altezza maggiore, come il Corintio, e il Compoſto: e un terzo che ſtia di mezzo tra l'uno, e l'altro, e che riunendo la robuſtezza, e la gentilezza preſenti un' aria di maggiore nobiltà, come l'ordine Jonico. Le proporzioni delle parti principali, che vi ha fiſſato il Vignola, e che ſono più comunemente ſeguitate, preſo per l'unità il raggio della colonna, ſi eſprimono coi numeri ſeguenti:

		Toſcano.	*Dorico.*	*Jonico.*	*Corintio, e Compoſto.*
Piedeſtallo	Baſſamento	$\frac{1}{2}$.	$\frac{5}{6}$.	$\frac{3}{4}$.	1.
	Fuſto	$3\frac{2}{3}$.	4.	5.	$5\frac{5}{6}$.
	Cimaſa	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{4}$.	$1\frac{1}{6}$.
Colonna	Baſe	1.	1.	1.	1.
	Fuſto	12.	14.	$16\frac{1}{3}$.	$16\frac{2}{3}$.
	Capitello	1.	1.	$\frac{2}{3}$.	$2\frac{1}{3}$.
Corniccione	Architrave	1.	1.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{2}$.
	Fregio	$1\frac{1}{6}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.
	Cornice	$1\frac{1}{3}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{3}{4}$.	2.
Intercolonnj ſenza piedeſtallo		$4\frac{2}{3}$.	$5\frac{1}{2}$.	$4\frac{1}{2}$.	$4\frac{2}{3}$.

Io ſuppongo abbaſtanza note le proporzioni, le altezze, e gli ſporti delle altre ſuddiviſioni di più piccole parti, che appartengono propriamente all' ornato, ed ho meſſo ſott' occhio come l'oſſatura principale di ogni ordine, di cui occorrerà maggiormente di ragionare. Preſſo diverſi Autori, e in diverſi edifizj antichi, e moderni, ſenza ſcapito alcuno della bellezza, e della maeſtà ſi trovano un poco variati, e gli ornati, e ancora le proporzioni principali. Ma perchè appunto le fabbriche non perdano di bellezza e di pregio, le variazioni delle proporzioni principali devono ſempre reſtringerſi tra' limiti molto più anguſti di quelle degli ornati. Così l'ordine Jonico ſi può indifferentemente diſegnare colla baſe ſua propria, e colla baſe Attica, ch' è comune all' ordine Corintio. Così le quattro volute Joniche ne' capitelli più antichi ſono direttamente poſte dai due lati, reſtando dagli altri due lati involte ne' cartocci, che riſaltano diſotto all' abaco: e lo Scamozzi raddoppiò le volute, collocandole ad angolo, come ſi ſuole praticare nell' ordine compoſto. Nel portico del Pantheon di Roma, che a giudizio del Serlio è l'Architettura meglio inteſa di tutta l'antichità, ſi vedono ne' capitelli Corintj le fronde di ulivo, e le fronde di alloro in quelli del tempio della Dea Veſta. Ma le proporzioni delle altezze, e dei diametri delle colonne in ciaſcun ordine non poſſono comportare ſenza difetto che delle variazioni aſſai piccole. E queſta verità, che ſalta da ſe medeſima all' occhio in qualunque fabbrica, dà luogo di dimandare perchè la ſodezza delle colonne porti in circa 8 diametri di altezza, la nobiltà 9, e 10 la ſveltezza, e leggiadria.

Il Galileo ne' ſuoi Dialoghi ſulla Meccanica avea già detto, che le ragioni, che più piacciono all' orecchio ſono le più ſemplici, e ſono quelle iſteſſe che piacciono all' occhio. Il Perrault avea detto di più che nella proporzione degli Ordini vi è una reale armonia, la cui mancanza offende l'occhio, come le diſſonanze di un concerto offendono l'orecchio anche di quelli, che non s'intendono

di

di Musica. Questi principj sono stati più sviluppati dal Sig. Conte Jacopo Riccati. Osservò egli che le altezze delle colonne di pari diametro formando ne' tre Ordini la progressione aritmetica 8, 9, 10; i diametri delle colonne di pari altezza $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ formerebbero una progressione armonica. Osservò in oltre che la proporzione del diametro Dorico, e Jonico, cioè di 9 : 8 è quella istessa che nelle lunghezze delle corde musiche forma il tuono maggiore: che la proporzione di 10 : 9 del diametro Jonico, e Corintio è quella del tuono minore: e che la proporzione di 10 : 8, ossia di 5 : 4 del Dorico, e del Corintio è quella delle due corde, che consonando formano la terza maggiore. E comunque nell' analogia della Musica, e dell' Euritmia possano nascere dei dubbj, perchè non siano belle a vedersi negli ordini d' Architettura le proporzioni più semplici, dell' ottava per esempio, o della quinta; è però singolare la combinazione avvertita dal medesimo Autore che la terza maggiore, divisa armonicamente rende i due tuoni, o modi, maggiore, e minore.

Il Sig. Conte Algarotti credette che essendo state verisimilmente di legno le prime fabbriche, la diversa grossezza, e altezza delle piante adoperate per sostenere i diversi piani abbia fatto nascere l' idea degli ordini: e che in seguito anche nelle fabbriche di pietra si siano seguitate le proporzioni degli ordini di legno. Così l' idea della restremazione delle colonne, come suole praticarsi o per tutta l' altezza della colonna dal sommo all' imo scapo, o per i soli due terzi superiori, può essere stata suggerita dagli alberi più sottili in cima, che in fondo. Così i triglifi dell' ordine Dorico rappresentano le teste dei travi, che sporgono in fuori sotto il gocciolatojo, restando gl' intervalli di mezzo ornati colle metope: il che pare anche indicato da Vitruvio nel Cap. II. del Lib. IV. E generalmente la lunghezza dell' architrave conviene più coll' idea d'un trave maestro, che unisce le colonne, e regge le teste degli altri travi del palco, ripartiti nell' altezza del fregio, sopra cui la cornice simboleggia la gronda dei tetti. Anche l' idea degli archi acuti, che avendo uno svantaggio ottico nella cima, e uno svantaggio meccanico nel mezzo, come vedremo, hanno poi all' imposta il vantaggio di caricare più a piombo sulle colonne, pare suggerita dal bisogno di assicurare più i palchi dal carico delle nevi: e così appunto quest' idea ci è venuta dal Nord. Molte altre cose combinano coi principj medesimi. Ma resterebbe sempre da dimandarsi perchè tra le altre proporzioni dell' altezza, e del diametro delle piante, quelle sole appaghino l' occhio, che si sono trascelte nei tre Ordini d' Architettura, e perchè tutte le variazioni, oltre di certi limiti assai ristretti, facciano comparire le fabbriche sproporzionate.

Vitruvio sul principio del Lib. IV. indicò un' altra maniera di soddisfare al quesito, dicendo che le prime proporzioni degli ordini furono prese dal corpo umano. Riferì adunque che le colonne del Tempio di Giunone, fabbricato in Argo da Doro Re dell' Achaja, essendo riuscite a caso colle proporzioni dell' ordine chiamato Dorico, e volendo in seguito i Greci passati nella Jonia fabbricare degli altri Tempj, e mettervi delle colonne non solamente atte a reggere al peso, ma ancora belle a vedersi, misurarono il piede umano, fecero la colonna di sei grossezze, e pensarono così di darvi la bellezza, e sodezza del corpo umano. Ma poi volendo fare qualche cosa di nuovo nel tempio di Diana, presero le proporzioni più delicate della donna, e diedero alle colonne otto diametri di altezza. Vi posero anche sotto la base a imitazione della scarpa, mentre non vi era base nelle più antiche colonne d' ordine Dorico. Riferisce in oltre Vitruvio che le proporzioni dell' Ordine Corintio si sono ricavate dalle fanciulle, e narra distintamente come Callimaco si sia formata l' idea del capitello: e infine accenna come alle colonne si siano sostituite indifferentemente le statue negli antichi edifizj. Mentre narra che le donne di Caria ridotte in servitù, e i Persiani vinti dai Lacedemoni a Platea furono i primi soggetti delle Cariatidi, e delle Persiche, che rappresentano o donne, o uomini robusti.

E certo pare assai naturale, che i primi Architetti volendo fissar qualche regola di fabbricare, prendessero il corpo umano per campione, e modello di tutte le proporzioni, cercando nelle colonne i rapporti, che siamo più accostumati a vedere nella società, e in noi medesimi. E siccome il piede arriva ancora alla settima parte dell' altezza di un uomo di maggiore statura; così può dirsi che nelle fabbriche da vedersi di lontano, l'occhio ricerchi qualche cosa di più, e che però i limiti della colonna Dorica debbano essere oltre i sette diametri, e verso gli otto. Alzando di un diametro di più la colonna, si avrà la nobiltà, e la maestà, che succede alla sodezza: e alzandola ancora di più, gli si darà per conseguenza una forma più leggiadra, e gentile. E come diminuendo di più il Dorico, si avrà il tozzo, e il grossolano invece del sodo; così alzando di più il Corintio, si avrà il debole, e il gracile invece del gentile. Adunque la proporzione delle altezze, e dei diametri delle colonne dipende in qualche parte dalla Meccanica, e dall' Ottica in quanto le colonne degli ordini inferiori devono essere generalmente più grosse, o meno alte di quelle, che sostentano minor peso, e si vedono ad una maggiore elevazione. La parte principale del problema appartiene alla sensazione, al buon gusto, e ai rapporti più famigliari, che siamo accostumati di fare col corpo umano, come coll' oggetto principale che ci occupa. Vedremo le regole più precise, che si cavano dai principj della Meccanica per proporzionare le grossezze degli architravi, delle colonne, e de' piè diritti colle forze dei pesi, che devono sostenere.

CAPO SECONDO.

Della solidità reale, ed apparente nell' Architettura antica, e moderna.

UN edifizio non solamente dev' essere tutto insieme sodo, e sicuro; ma deve ancora comparir tale in tutte le parti, che lo

compongono. Dappertutto si deve presentar subito all' occhio qualche ragione, per cui le parti restino fermamente connesse insieme tra loro. Oltre alla solidità reale vi si ricerca ancora l'apparente. I primi canoni della solidità reale sono di caricar meno le parti più deboli, e di proporzionare dappertutto le resistenze alle forze, e verticali, e laterali. La solidità apparente ricerca che niente resti sul falso: che il pieno corrisponda al pieno nella stessa linea verticale, e il vuoto al vuoto: che tutte le parti poggino sui loro veri, e stabili fondamenti: e che le parti principali, come i lati, e i costoloni d'una fabbrica poggino sopra fondamenti maggiori.

Gli Antichi, com' erano estremamente sobrj in tutti gli ornati delle fabbriche, così erano estremamente rigorosi nel provvedere alla solidità reale, e all' apparente. Vitruvio ne' suoi precetti, e gli altri Architetti Greci, e Romani nelle loro fabbriche non si servirono che delle linee rette, e del circolo. I loro archi, e le loro volte erano circolari: i fastigj erano o circolari, o triangolari; e fino le volute de' capitelli erano da loro disegnate con tanti circoli di raggio differente. La forma ellittica non fu da loro adottata che per gli Anfiteatri, dove la natura degli spettacoli da darsi esigeva una tratta maggiore da una parte che dall' altra. Nessun vestigio ci lasciarono essi di tutte quelle curve, che dopo i tempi del Borromini furono liberamente introdotte non solamente negli ornati, ma ancora nelle porte, nei fastigj, e nelle altre parti principali degli edifizj. I più severi imitatori degli antichi furono in Italia il Palladio, e in Inghilterra Inigo Jones, e il Cavaliere Wrenn. Essi credettero di conservare nell' Architettura la stessa semplicità della Geometria, in cui si lasciano le linee più composte quando i Problemi si possono costruire colla linea retta, e col circolo.

Così pure ci prescrisse Vitruvio, che quando tutto il peso d'un edifizio si deve caricare sopra diversi ordini di colonne isolate, quella dell' ordine superiore si faccia un quarto meno grossa della colonna, che resta immediatamente al disotto: appunto perchè non solamente il il fuſto d'una colonna, ma ancora il plinto, il toro, e tutta la baſe corriſpondano al vivo della colonna inferiore. Queſta regola fu ſeguitata eſattamente nel portico della ſcena del Teatro di Pola in Dalmazia. Nel Coliſeo di Roma per maggiormente evitare che niente daſſe ſul falſo, le colonne degli ordini ſuperiori ſi ſono tenute più indietro, e appoggiate al muro interiore. Queſte regole ſi oſſervano più traſcurate ne' moderni edifizj, e ſpeſſe volte occorre di vedervi riſaltare al di fuori le baſi delle colonne, e gli angoli dei pilaſtri corriſpondere al vuoto degli archi. Negli edifizj Gotici, come nel Duomo di Milano, ſi vede fino la ſtravaganza di tante ſtatue attaccate, e tenute all' intorno come per aria, o incurvate diſotto agli archi delle fineſtre.

In Piſa, e in Bologna ſi vede un' altra ſtravaganza maggiore, di due torri inclinate ſenſibilmente all' orizzonte. Egli è vero che un corpo tutto conneſſo nelle ſue parti non può cadere quando la linea di direzione del centro di gravità cade dentro il recinto della baſe, come ſi oſſerva nelle ſuddette torri. Mentre in tal caſo è maggiore la porzione, e la forza del corpo, che lo tiene attaccato alla baſe, di quella che tende a roveſciarlo. Ma quando la verticale tirata dall' angolo ſuperiore cade fuori della baſe, vi reſta ſempre ſuperiormente una parte ſenza fondamenti, e per aria. Nella Torre dei Gariſendi di Bologna la verticale cade circa braccia $4\frac{1}{2}$ lontano dalla baſe: e ſembra che la Torre ſia ſtata fabbricata per bizzarria così com' è, avendo tutti gli ſtrati di mattoni paralleli all' orizzonte, e i buchi delle travature ſimilmente orizzontali. Nel campanile del Duomo di Piſa la verticale cade lontano circa braccia $5\frac{1}{2}$: i buchi formano coll' orizzonte un angolo acuto da una parte, e ottuſo dall' altra: onde rimettendovi i palchi non vi ſi potrebbe lavorare preſentemente ſenza pericolo. Di più gli ſtrati di marmo ſono tutti inclinati all' orizzonte più nella terza parte inferiore, meno nella parte

parte di mezzo, e meno ancora ſuperiormente. Onde pare che la Torre ſia ſtata fabbricata diritta a tre riprese differenti, e che a proporzione che creſceva in altezza, abbia ſucceſſivamente ceduto avvallandoſi ſui panconi d'arena, ſopra i quali è fabbricata Piſa, e che vi fanno inclinare ancora le altre fabbriche più alte.

Non praticavano neppure gli antichi di ſpezzare l'architrave, indebolendo il corpo principale della fabbrica per dar luogo agli ornati bizzarri delle porte, come aſſai ſpeſſo ſuccede preſentemente. Gl' intercolonnj nell' Ordine Corintio ſi facevano anticamente di due diametri, e nell' Ordine Jonico di due e un quarto. Nell' Ordine Dorico ſi avevano eſempj fino di tre diametri, come nei Tempj Diaſtili di Apolline, e di Diana. Ma avvertì Vitruvio nel Cap. II. del Lib. III. che quegli architravi per la troppa lunghezza erano ſoggetti a ſpezzarſi. Nel Tempietto ſotterraneo del Duomo di Milano il Pellegrini ha fatto la diſtanza delle colonne Doriche maggiore dell' altezza degli archi: e nel Battiſterio, ch' è d'Ordine Corintio, e di forma quadrata, vi ha laſciato nelle colonne più di ſei diametri di diſtanza. Martino Baſſi nelle ſue lettere rilevò ſubito queſto difetto: il Palladio, il Vaſari, e il Vignola diedero ragione al Baſſi: e il Vignola alludendo al ripiego delle chiavi di ferro, propoſte dal Pellegrini, ſcriſſe quel memorabile aforiſmo, che le fabbriche ben inteſe devono reggerſi da ſe ſteſſe, e non ſtare attaccate colle ſtringhe.

Preſſo gli antichi erano pure aſſai rari gli eſempj dei Dioſtili, oſſia delle colonne binate: non ſolamente perchè non piacciono all' occhio gl' intercolonnj alternativamente piccoli, e grandi; ma ancora perchè una parte della fabbrica vi viene rappreſentata più debole, e l'altra più forte del biſogno. Non ci hanno poi laſciato gli antichi eſempio alcuno nè di cupole poſate ſu quattro archi, nè di archi fatti girare ſopra le colonne iſolate delle Baſiliche, degli antitempj, e de' portici. Vi ſi vedono in vece tirati ſopra degli architravi: forſe perchè le punte dei quattro archi, che nei noſtri por-

portici si appoggiano sui quattro angoli d'un capitello, paressero appoggiati sul falso, come notò il Vasari nel Cap. III. Il primo esempio di archi continuati sopra le colonne isolate è forse quello della Chiesa di S. Vitale di Ravenna, fatta incominciare nell' anno 541 dalla Regina Amalasunta figlia di Teodorico. Il primo esempio di una cupola fabbricata su quattro archi è posteriore di pochi anni, ed è quello della Chiesa di S. Sofia, fatta fabbricare in Costantinopoli da Giustiniano Imperatore.

Ma sopra tutto gli antichi erano ben lontani dal pensare che la parte più debole della fabbrica, cioè la sommità di una cupola, si avesse da caricare con tutto il peso di un cupolino. Le cupole degli antichi Romani, o erano aperte nel mezzo, come il Pantheon, o, s'erano chiuse, avevano in cima un fiore, che senza la piramide era alto quanto il capitello, come nota Vitruvio nel Cap. VII. del Lib. IV. Avendo i tempj di questo genere, o diroccata, o dimezzata almeno la volta, e non essendosi spiegato di più Vitruvio, non può intendersi precisamente cosa fosse la piramide, e il fiore. Ciò non ostante il Sig. Marchese Galiani, forse sull' indizio di qualche medaglia, ne' suoi commenti ci delineò la piramide come un piccolo ornato, che spuntasse in mezzo del fiore. Prima del mille gli Architetti Greci nella Chiesa di S. Marco di Venezia incominciarono a terminare le cupole superiormente con alcuni lavori a forma di piccolissimi cupolini. La Cattedrale di Pisa, fabbricata d'ottimo gusto da Buschetto di Dulichio nel 1016, ha chiusa la cupola con sopra il finimento di una palla. Sono pure chiuse le cupole di S. Sofia, e delle altre antiche Chiese di Costantinopoli, di S. Antonio, e di S. Giustina di Padova, della Cattedrale di Siena, di S. Giovanni di Monza ec.: e ne' tempi a noi più vicini il Bramante in S. Pietro in Montorio, e molti altri Architetti in altri luoghi non vollero caricare le cupole coi cupolini.

Gli Architetti, che nei secoli XIII., e XIV. avevano impostate le cupole sugli archi acuti, furono ancora più coraggiosi nel caricarle

carle

carle alla cima, e avendovi provveduto nei fianchi alla solidità reale, principalmente colle chiavi di ferro, non si presero pensiero alcuno dell' apparente. Nel Duomo di Milano i quattro arconi Gotici tirati sulle quattro colonne di mezzo, formano il quadrato, da cui sorge l'ottagono della cupola. Esteriormente la cupola ha la figura di un prisma ottangolare, e verticale, di 23 braccia di altezza, senz' alcuna degradazione di fianchi, che soddisfaccia almeno alla vista. Interiormente posando l'ottagono sopra un quadrato, le aperture di quattro finestre corrispondono agli assi delle colonne, e gli otto costoloni, che si spiccano dagli otto angoli, e che formano come l'ossatura principale della cupola, corrispondono al vuoto degli archi. Cesare Cesariani, autore della traduzione, e del commento di Vitruvio stampato in Como nel 1521, nelle note al Cap. II. del Lib. I., rilevò l'incongruenza di fabbricare un ottagono sopra un quadrato. Ed alla stessa maniera, e per le stesse ragioni dovrebbe pure disapprovarsi l'idea di fabbricare un ottagono di lati uguali sopra un ottagono di lati disuguali, come si vede nella cupola di S. Lorenzo, che merita per altri capi ogni lode. Mentre quantunque in quella fabbrica con tutti gli appoggi laterali si sia provveduto abbastanza alla solidità reale, vi si è però mancato alle regole della solidità apparente, la quale ricerca che i lati, e i costoloni non restino sul falso, ma poggino sui loro veri, e continuati fondamenti.

Il meccanismo principale, con cui si vede congegnata insieme la cupola del Duomo è il seguente. La base resta serrata da quattro archi Romani, che sono in tutta la larghezza perpendicolari al piano degli archi Gotici, e che si spiccano dalle medesime colonne. I costoloni sono rinforzati al piede cogli otto lati del tamburo esteriore. La maggiore grossezza negli angoli è di braccia 4 nella larghezza ragguagliata di braccia 3: e poi da una parte e dall'altra dei costoloni per circa altre 3 braccia continua la grossezza solamente di braccia $1\frac{3}{4}$. La larghezza della cupola è di braccia $31\frac{1}{4}$, e l'altezzza

è di

è di 28. Il tamburo, e i costoloni sono di marmo, e da un costolone e l'altro sono tirate le volte di cotto, che insieme formano la testuggine. Così tutto il peso della cupola si carica veramente sugli otto costoloni. Vanno essi a serrarsi insieme alla cima, e terminano in un anello rotondo, e piano, che serve di base alla parte interiore del cupolino, e della torre, o aguglia, che vi sta sopra. L'altezza del cupolino è di braccia 14, e dell'aguglia più di 50. Esteriormente il tamburo all'altezza di otto, e di sedici braccia, e sulla cima resta serrato da tre grosse chiavi di ferro: e negli angoli superiori sostiene otto altre aguglie di circa 17 braccia d'altezza, unite con altri ornati agli angoli corrispondenti del cupolino. La forma dell'aguglia principale, per circa 28 braccia fino al piano del Belvedere, è di un prisma ottangolare, con sopra una piramide tutta di marmo, e in cima una statua di rame.

Il Brunelleschi sul principio del secolo quindicesimo, fabbricando la grandiosa cupola del Duomo di Firenze, vi volle aggiugnere un cupolino proporzionato, che terminossi dopo la di lui morte. Veramente il Brunelleschi partì da una falsa supposizione, ch' essendo la volta in quarto acuto, avesse bisogno di essere caricata con un peso maggiore per rendersi più forte, come riferisce il Vasari nella sua vita. Ma gli si può perdonare quest' errore per la bella invenzione della volta duplicata, per la finezza, e per l'arte, con cui procurò di darvi tutta la maggiore sodezza, e per l'eleganza delle proporzioni, con cui seppe distribuire una mole così vasta, e maestosa. La cupola ottagona di Firenze suggerì l'idea della cupola rotonda di S. Pietro di Roma. Il Bramante la disegnò con varj ordini di colonne, e il divino Michelangiolo la fece di un ordine solo. Coll' ajuto delle semplici carte, e senz' avere veduta, e considerata quella gran mole, non sarebbe possibile di darne una giusta idea. La sostanza di tutto il meccanismo si è: che il cupolino si appoggia principalmente sopra la volta interna, ed ha le colonne sostenute dall' esterna: che le due volte, e i sedici costoloni si appoggiano sopra

sopra di un Attico rinfiancato da altrettanti pilastri: che tutto l'Attico si appoggia ad un tamburo rinfiancato all' intorno dai contraforti di sedici paja di colonne: e che il tamburo insieme ai contraforti è sostenuto da una base assai più larga, e spaziosa.

Questa gradazione di rinfianchi, e di appoggi, siccome unisce maravigliosamente la bellezza esterna all' interna, così rende ancora più ferma, e consistente tutta la cupola. Ciò non ostante una mole così grandiosa, fabbricata in soli 21 mesi di tempo, ha incominciato a cedere pochi anni dopo la sua costruzione. Il peso soverchio del cupolino, le scosse de' fulmini, e il tempo vi ha fatto crescere i danni, fino a vedersi ora staccati in gran parte i contraforti, spezzati gli architravi in molti luoghi, e sparsa tutta la cupola di peli fino alla larghezza di tre, e di quattro once. Si è pure riconosciuto, che hanno sofferto notabilmente le altre dodici principali cupole di Roma. Istessamente è sparsa di peli, e di piccole crepature la sodissima cupola di Firenze, quantunque fabbricata in 20 anni, col materiale più scelto, inferiormente di pietra, e sopra di mattoni ridotti in forma di cunei. Gli angoli del tamburo della cupola di Milano si vedono sparsi di peli continuati a diritta, e a sinistra dall' alto al basso, fino per cinque, e sei marmi consecutivi, sfacellati in alcuni luoghi, e divisi con varie schegge. Il soverchio peso dà ancora di tanto in tanto dei casi di varj pezzi, che staccansi interiormente dalle volte, dai costoloni, e dalle colonne. In altri luoghi, dove gli Architetti sono stati anche più arditi, si sono avuti dei casi di piloni sfiancati, e di volte interamente rovinate.

Il Cavaliere Wrenn, ch' era insieme grande Architetto, Filosofo, e Matematico, ha saputo alzare con tant' arte la cupola del maestoso tempio di S. Paolo di Londra, che in quasi un secolo non ha dato ancora alcun segno di patimento. Ultimamente è stata quella cupola premunita con sei conduttori elettrici. Le aste di ferro, o di rame, che ordinariamente si trovano isolate in cima dei cupolini, portano un altro inconveniente di richiamarvi i fulmini più facilmenmente. Il caſo è molto frequente nella cupola di S. Pietro di Roma. Il Baldinucci racconta nella vita del Bernino, che un fulmine ſmoſſe quattro colonne del cupolino, e gettò a terra due capitelli: ed altri hanno atteſtato che la maggiore fenditura, che trovaſi ſopra il pilone della Veronica, è l'effetto di un fulmine caduto ſul principio di queſto ſecolo. La cupola di Firenze nella primavera ſcorſa è reſtata notabilmente danneggiata da un altro fulmine. Nell' aguglia di Milano, prima che vi s'innalzaſſe la ſtatua di rame, il fulmine de' 28. Agoſto del 1770. ſcompoſe diverſi pezzi, ucciſe un uomo, e ne gettò a terra cinque altri: e nella vecchia aguglia, che reſtava prima la più alta, ſono caduti a memoria noſtra con danno notabile tre fulmini. Nell' aguglia del campanile del Duomo di Siena ho la notizia di quattro fulmini caduti in queſto ſecolo con grave danno, e di molti altri caduti nell' aguglia della Cattedrale di Strasburgo, e in altre fabbriche Gotiche, che ſono ſimilmente collegate alla cima, e ſparſe di ferro, e piombo.

CAPO TERZO.

Della reſiſtenza dei corpi ſolidi, dei cornicciomi, e dei tetti.

LA reſiſtenza, che un corpo qualunque, di uniforme adeſione in tutte le ſue parti, oppone ad eſſere diviſo perpendicolarmente a qualunque ſezione EFG, *fig.* 35., è manifeſtamente come l'area della ſezione. Mentre ſuppoſta eguale la reſiſtenza, che naſce in tutte le parti dall' adeſione, la reſiſtenza totale ſarà come il numero delle parti da ſtaccarſi direttamente l'una dall' altra, cioè come l'area dove vuol farſi la diviſione. Il caſo ſarebbe differente quando la forza foſſe applicata perpendicolarmente all' aſſe FH, e parallelamente alla ſezione EFG, coſicchè il pezzo ſuperiore non poteſſe ſtaccarſi dall' inferiore ſe non prendendo un moto di rotazione intorno al punto E. Per intendere più facilmente coſa vi abbia a ſuc-

a ſuccedere, figuriamoci che l'adeſione della baſe inferiore del primo pezzo colla ſuperficie contigua del ſecondo ſia rappreſentata con tanti peſi diſtribuiti uniformemente per tutta l'area. Allora la reſiſtenza, che farà la baſe EFG ad eſſere ſmoſſa intorno al punto E, ſecondo i principj già eſpoſti nella Meccanica, ſarà come ſe i peſi ſi trovaſſero tutti riuniti nel centro comune di gravità: e però la reſiſtenza ſarà come la ſomma dei peſi moltiplicata per la diſtanza EO del centro di gravità O dal centro del moto E. Poichè adunque nei corpi omogenei la ſomma dei peſi ſuddetti dev' eſſere proporzionale all' area delle ſezioni; ſarà generalmente la reſiſtenza di un ſolido omogeneo ad eſſere ſpezzato traſverſalmente in qualunque ſezione EFG come l'area della ſezione moltiplicata per la diſtanza EO del centro di gravità dal perimetro. E finalmente poichè nelle ſezioni ſimili le aree ſono come i quadrati dei diametri, e i diametri ſono proporzionatamente diviſi dai centri di gravità; ſaranno le reſiſtenze come i cubi dei diametri.

Che ſe un corpo qualunque $ABCD$, *fig.* 36., foſſe ſoſpeſo orizzontalmente, o attaccato ad un piano verticale nella ſezione BC; il momento del peſo, con cui tenderà a ſpezzarſi nel punto F, ſarà come tutto il peſo moltiplicato per la diſtanza EB del centro di gravità E del centro dal moto B. Queſto ſempliciſſimo teorema coll' altro teorema antecedente, baſtano per definire in qualunque corpo la proporzione delle forze, e delle reſiſtenze a ſpezzarſi. Su queſti principj il Viviani, il Grandi, e molti altri Autori hanno diſteſo la teoria già incominciata dal Galileo della reſiſtenza de' corpi ſolidi. Il più curioſo problema da eſſi ſciolto in queſto genere ſi è di ritrovare il ſolido AGB, *fig.* 37., che attaccato ad una parete per la ſezione verticale AB, o CD ſia ſempre egualmente reſiſtente al momento del proprio peſo. Il ſolido per i due teoremi già eſpoſti dev' eſſer tale, che ſia dappertutto $EA^3 : FC^3 = AGB.EG : CGD.FG$. Mentre nei ſolidi ſimili AGB, CGD la diſtanza del centro di gravità delle baſi AB, CD dev' eſſere pro-

proporzionale alle altezze EG, FG. Dimoſtrò il Grandi che gli archi delle parabole, delle iperbole, e delle logaritmiche, rivoltati intorno ad un aſſe dato, producono il ſolido ricercato: e dimoſtrò in oltre che il ſolido generato dalla rivoluzione della logaritmica intorno al proprio aſintoto è tale, che, tenuto a piombo, preſenta in ogni ſezione un' eguale reſiſtenza a ſpezzarſi, cioè che tutte le ſezioni orizzontali ſono proporzionali ai ſolidi ſoſpeſi da eſſe verticalmente.

Noi quì, laſciando le ingegnoſe ſpeculazioni de' ſuddetti Geometri, paſſeremo all' applicazione, che il Conte Jacopo Riccati ne ha fatto all' Architettura. Perchè le trabeazioni di diverſi ordini, architrave, fregio, e cornice, rieſcano di eguale conſiſtenza, biſogna che dappertutto i momenti delle reſiſtenze abbiano la ſteſſa proporzione ai momenti dei peſi. E perchè in oltre è molto piccola la differenza dei peſi degli ornati, riſpettivamente al peſo totale dei cornicciooni, ſi potrà fare la ſuppoſizione che le ſezioni traſverſali ſiano tra loro ſimili in ciaſcun ordine. Ciò poſto, chiamando A, G, L l'altezza, la groſſezza, e la lunghezza di tutto il corniccione in un ordine, ed a, g, l in un altro, ſecondo i teoremi già eſpoſti, ſarebbero i momenti riſpettivi dei peſi AGL^2, agl^2: e le aſſolute reſiſtenze a ſpezzarſi intorno all' impoſta ſarebbero A^2G, a^2g. Dunque volendo proporzionare dappertutto le forze alle reſiſtenze, dovrebbe eſſere $AGL^2 : A^2G = agl^2 : a^2g$, e però ancora $L^2 : A = l^2 : a$, cioè le altezze dei cornicciooni dovrebbero eſſere come i quadrati delle larghezze degl' intercolonnj.

Ora le groſſezze degli architravi ſono gl' iſteſſi diametri delle colonne, a cui ſono ſovrappoſti: e però chiamando riſpettivamente i diametri D, d, dev' eſſere $G : g = D : d$. In oltre poichè le baſi degli architravi ſono DG, dg, e i peſi aſſoluti dei cornicciooni, o le intere ſolidità AGL, agl riſpettivamente: e poichè i peſi ſi poſſono aumentare nella proporzione medeſima delle baſi, che ſervono a ſoſtentarli; dovrà eſſere $DG : dg = AGL : agl$, oſſia

$D : d$

$D : d = AL : al$. Dunque per la ragione di $A : a$ ſoſtituendo quella di $L^2 : l^2$, e reciprocamente, ſi avrà

$D : d = AL : al$, $L^3 : l^3 = A\sqrt{A} : a\sqrt{a}$:

donde ſi caveranno le due analogie

$$\text{I.}\quad L : l = \sqrt[3]{D} : \sqrt[3]{d}.$$

$$\text{II.}\quad A : a = \sqrt[3]{D^2} : \sqrt[3]{d^2}.$$

Dunque perchè le trabeazioni di diverſi ordini di Architettura rieſcano di eguale ſolidità, e conſiſtenza, non devono già farſi tra loro ſimili, proporzionando le altezze dei cornicciooni, e le larghezze degl' intercolonnj ai diametri delle colonne, come comunemente ſuppongono gli Architetti: ma le altezze devono proporzionarſi alle radici cube dei quadrati dei diametri, e le larghezze alle radici cube dei diametri ſemplici.

Il Vignola non ebbe in viſta che i ſemplici principj di ſimmetria nel delineare le larghezze, e le altezze, come ſi è detto: e ſalvò l' incongruenza di dare all' ordine Corintio un intercolonnio maggiore dell' ordine Jonico, dicendo che ciò facevaſi perchè i modiglioni della cornice, nel ſuo eguale ſpartimento, corriſpondeſſero al mezzo delle colonne. Ma ſe ſi trattaſſe di non caricare più un ordine dell' altro, e di dare a tutti un' eguale fermezza, e conſiſtenza, ſupponendo che le altezze delle intere colonne di egual diametro ſiano ne' tre ordini riſpettivamente 8, 9, e 10, e che però i diametri delle colonne di eguale altezza ſiano $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, le larghezze degl' intercolonnj dovrebbero eſſere

nell' ordine Dorico $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$ $= \dfrac{12}{24}$

nell' ordine Jonico $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{1}{2+\frac{1}{12}}$ $\dfrac{12}{25}$

nell'

nell' ordine Corintio $\frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \frac{1}{2+\frac{1}{6}}$: $\frac{12}{26}$

cioè le larghezze degl' intercolonnj dovrebbero essere prossimamente tra loro come i numeri $\frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}$: e però dando all' ordine Jonico $4\frac{1}{2}$ semidiametri d' intercolonnio, bisognerebbe darne circa $4\frac{2}{3}$ al Dorico, e $4\frac{1}{3}$ al Corintio.

Parimente nel caso di un' eguale fermezza, e consistenza, le altezze delle trabeazioni dovrebbero essere

nell' ordine Dorico $\frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4} \quad = \frac{2}{8}$

nell' ordine Jonico $\frac{1}{\sqrt[3]{81}} = \frac{1}{4+\frac{1}{3}} = \frac{2+\frac{1}{13}}{9}$

nell' ordine Corintio $\frac{1}{\sqrt[3]{100}} = \frac{1}{4+\frac{2}{3}} = \frac{2+\frac{1}{7}}{10}$.

Però supponendo che l' altezza della trabeazione Dorica sia la quarta parte dell' altezza della colonna, nel che convengono col Vignola gli Architetti antichi, e moderni; non si potrà l' altezza stabilire similmente di un quarto nell' ordine Jonico, e nel Corintio. Surrogando alle ragioni esatte le prossime, e le più semplici, potrebbe stabilirsi l' altezza nell' ordine Jonico di $\frac{2}{9}$, e di $\frac{2}{10}$ nel Corintio: cioè si potrebbe fissare l' altezza della trabeazione in ciascun ordine generalmente di due diametri delle colonne. Alcuni Architetti si sono già conformati a queste regole, alleggerendo di qualche piccolissimo peso gli ordini più gracili, e aggravando di

più

più le modificazioni del Dorico, che stanno al disotto degli otto diametri, e che vengono comprese comunemente col nome di ordine Toscano.

Per passare dai cornicioni alle travature dei tetti, e ai pesi che possono sostenere, primieramente poichè i momenti dei pesi attaccati nel mezzo sono proporzionali alle distanze dal punto d' appoggio, supponendo simili le travi, e sostenute da ambedue le estremità, saranno le resistenze al piegarsi nella sezione di mezzo, o i pesi da sostenervisi, direttamente come i cubi dei diametri, e reciprocamente come la lunghezza delle travi. Però fatto una volta l' esperimento del peso, con cui si rompe un parallelepipedo di legno di una data lunghezza, diametro, e qualità, si troverà con questa semplice analogia a che peso possono reggere nel mezzo le travi dello stesso legno, che abbiano simili le sezioni, e che siano di qualunque altra grossezza, e lunghezza. Se il peso fosse uniformemente distribuito per tutta la lunghezza delle travi, è manifesto che se ne potrà sostenere anche il doppio di quello, che basterebbe per romperle quando fosse attaccato nel mezzo. Mentre prese le due metà EA, EB, *fig.* 36., e supposta la distribuzione uniforme da A in B, il momento di EB per moversi intorno a B sarà come se il peso fosse riunito nel punto di mezzo F, e però sarà la metà del momento, che si avrebbe attaccando tutto il peso di EB in E. Quest' altro principio ci può guidare nel calcolo della consistenza di un palco, caricato di grano, o di qualunque altra materia distribuita ad eguale altezza per tutta l' area.

Lo stesso principio ha da tenersi per calcolare la consistenza dei tetti. Sia AB il tetto inclinato all' orizzonte coll' angolo ABC, *fig.* 48. Sarà $\frac{CB}{AB}$ la porzione di peso, che in ciascun pezzo si dirigerà perpendicolarmente ad AB, e tutto il carico perpendicolare del tetto sarà $\frac{CB}{AB} . AB = CB$, e la somma dei momenti tendenti

a roma romperlo intorno ai punti A, e B sarà $\frac{1}{2} CB \cdot AB$: cioè data la larghezza del tetto si avrà sotto tutte le inclinazioni lo stesso peso rispettivo, e nei tetti più alti il momento di rompersi crescerà in ragione della lunghezza. Il punto più debole sarà sempre nel mezzo E, ed ivi il tetto dovrà essere più rinfiancato secondo la perpendicolare EF. Sarà pure $\frac{AC}{AB} \cdot AB = AC$ la forza proveniente dal peso di tutto il tetto secondo AB: e fatta la solita risoluzione sarà $AC \cdot \frac{BC}{AB}$ la forza orizzontale nel punto B: e il momento di svolgere il piè diritto BD intorno al punto D sarà $BD \cdot AC \cdot \frac{BC}{AB}$. Cioè la spinta, o la forza orizzontale all' imposta del piè diritto sarà direttamente come l'altezza, e la larghezza, e reciprocamente come la lunghezza del tetto. Estenderemo poi tutti questi principj al calcolo delle spinte dei cupolini, e delle volte. Intanto può rilevarsi da questa formola l'errore del Sig. Krafft nel calcolare la spinta dei tetti al §. XLIII. della Dissertazione sopra varj Problemi d'Architettura, inserita nel Tom. IV. de' nuovi Commentarj di Pietroburgo.

CAPO QUARTO.

Della resistenza delle chiavi, e delle catene, e della tensione delle funi.

I Tre celebri Matematici, che scrissero sopra i danni, e i risarcimenti della cupola di S. Pietro, proposero quest' altro teorema: che la resistenza di una catena di ferro curvata in cerchio sta alla resistenza, che avrebbe se fosse distesa direttamente, come la circonferenza al raggio. La dimostrazione si potrebbe ridurre più chiaramente a questi termini. Si concepiscano in un piano verticale una

una verga diritta, ed un cerchio di eguale grossezza: siano pendenti dalla verga, e dal cerchio due pesi sufficienti a distenderli tanto, che arrivino a rompersi: si chiami r il raggio, e p la periferia del cerchio, e sia m la dilatazione necessaria nella verga, e nel cerchio per rompersi. E' manifesto che il peso attaccato alla verga diritta, nell' atto della rottura, dovrà discendere dello spazio m: ed è ancora manifesto, che mentre la periferia p si distenderà fino a farsi $p + m$, il raggio diverrà $\frac{r}{p} \cdot \overline{p+m} = r + \frac{r}{p} \cdot m$, e il peso dovrà discendere solamente dello spazio $\frac{r}{p} \cdot m$. Nel caso adunque della rottura sarà la velocità del primo peso alla velocità del secondo come $m : \frac{r}{p} \cdot m = p : r$, cioè come la periferia al raggio: e però la forza necessaria per rompere la verga diritta sarà alla forza necessaria per rompere la stessa verga curvata in cerchio come il raggio alla periferia.

Su questo principio si è calcolata la resistenza dei due cerchj di ferro, che cingono la cupola di S. Pietro disopra all' Attico, dove incomincia la divisione delle due volte. Si è presa per base un' esperienza del Musschenbroek, che un filo rotondo di ferro del diametro di $\frac{1}{120}$ del piede Renano arrivi a rompersi col peso di 450 libbre di Olanda, che sono circa libbre 600 di Roma. Si è supposto che le resistenze dei fili cresca in proporzione delle grossezze: e si è trovato la resistenza nel cerchio più alto di poco più di due milioni di libbre, e nel più basso di poco più di un milione e tre quarti. Alla stessa maniera si troverebbe che ciascuna delle tre catene di ferro, che cingono la cupola del Duomo di Milano, quando fosse distesa in linea retta reggerebbe al peso di 164278 libbre grosse di Milano, e curvata, com'è in ottagono, al peso di libbre 1131250. Nel qual calcolo importa però di osservare,

vare,

vare, che secondo le sperienze dello stesso Musschenbroek le resistenze dei fili di ferro crescono in una proporzione sensibilmente minore di quella delle intere grossezze delle sezioni. Per esempio, essendo le aree delle sezioni 1, 2, 3, 4, i pesi necessarj per rompere i fili diritti, erano successivamente di libbre 130, 230, 310, 450. Ma quando poi si trattasse di affidare alla resistenza delle chiavi di ferro il sopraccarico di una fabbrica, bisognerebbe in oltre osservare, che la sola azione del freddo, raccorciando sensibilmente le chiavi, basta qualche volta per romperle: come anche in chiavi assai grosse è già succeduto in molti luoghi, ed a me è occorso di vedere l'anno 1750 in due chiavi della piazza di S. Carlo di Torino. Perciò i grandi Architetti risguardavano le chiavi di ferro come un sopra più, che assicurasse maggiormente una fabbrica già abbastanza solida, e consistente in se medesima.

Parleremo più a lungo delle altre ricerche matematiche, alle quali ha dato occasione la controversia insorta intorno alla cupola di S. Pietro. Coll' occasione che si è discorso in Milano di munire la fabbrica del Duomo di un Conduttore elettrico, che dalla cima dell' aguglia si diramasse, e scendesse per differenti parti del tempio, si è ancora parlato dell' azione, che i fili del Conduttore potrebbero esercitare contro l'aguglia, e si sono proposti varj Problemi intorno alle tensioni delle funi. Io quì aggiugnerò le soluzioni, che ho ritrovato, e incomincierò dalla prima risoluzione delle forze tendenti, la quale siccome è interamente differente da quella, che hanno seguitato altri Autori, così non sarà meraviglia che porti dei risultati interamente differenti da quelli che sono stati sinora pubblicati. Penda il filo QVR, *fig.* 38., dai punti Q, ed R, e vi si attacchi in V il peso P. Si produca la verticale PV in A: si esprima il peso P colla retta VA: e dal punto A si tirino sopra QV, RV le perpendicolari AM, AN. Sarà MV l'intera forza esercitata secondo QV, ed NV sarà quella che si eserciterà secondo RV.

La stessa cosa si dedurrebbe risolvendo la forza AV nelle due Aq, Ar parallele ai fili QV, RV, e poi risolvendo di nuovo la forza Aq nelle due AN, Nq, e similmente la AR in due altre AM, Mr. Mentre con queste risoluzioni è manifesto che la forza totale esercitata nel tendere il filo QV dev' essere $Aq - Mr = rV - Mr = MV$, e la tensione del filo $RV = Vq - Nq = NV$. S' ingannerebbe chi misurasse separatamente la tensione del filo QV dalla forza Aq, ossia rV, e la tensione di RV da Ar, oppure da qV. Egli è vero, che le due tensioni equivalgono insieme, come alla sola forza AV, così ancora alle due Ar, Aq, oppure alle quattro insieme AN, Nq, AM, Mr. Ma nel prendere le tensioni separate bisogna in oltre avvertire, che quando l'angolo QVR non è retto, una porzione di Aq agisce secondo RV, ed una porzione di Ar secondo QV: e separando le azioni sarà MV la tensione del filo QV, ed NV quella di RV. Così adunque per esprimere le tensioni assolute si avranno le tre formole seguenti:

× Av

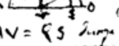
I. $\text{tens. } QV = \dfrac{P.MV}{AV} = P.\text{cos. } AVQ.$

II. $\text{tens. } RV = \dfrac{P.NV}{AV} = P.\text{cos. } AVR.$

III. $\dfrac{\text{tens. } QV}{\text{tens. } RV} = \dfrac{MV}{NV} = \dfrac{\text{cos. } AVQ}{\text{cos. } AVR}.$

Esaminiamo i casi differenti di queste formole. Se l'angolo AVR fosse retto, svanirebbe il coseno, non si avrebbe tensione alcuna nel filo orizzontale RV, e la tensione del filo QV sarebbe $P.\text{cos. } AVQ = P.\text{sen. } QVR$. Se l'angolo AVR fosse ottuso, come nella *fig.* 39., e però la perpendicolare AN cadesse oltre AV verso Q, allora, diventando negativo il coseno dell' angolo AVR, si rilascierebbe anzi il filo RV, e sarebbe la forza contraria $P.\text{cos. } AVN$. Se i due fili RV, QV coincidessero nella retta QVR, *fig.* 40., il punto N cadrebbe in M, ed eguagliandosi i due coseni, si rilascierebbe la porzione RV con una forza eguale alla tensione dell'

× mentre ... angol retto ... RV ... = P. cos. AVV = P. 0 = 0



sin QVR = QS

cos. AVQ = AV

AV = QS dunque sin QVR = cos. AV

mentre cos AVR ... = VN ... P. VN ... VN = anche Cos. AVN ... P. Cos. AVN

† mentre Cos. RVA = VM cos. AVM

dell' altra porzione QV, e la forza sarebbe P. cos. AVQ. Misurando la tensione di QV da tutta la forza Aq, *fig.* 38., nel caso che il punto V cadesse sulla retta QR, la retta Aq sarebbe parallela a QR, e non arrivando mai queste due rette a incontrarsi, la forza della tensione diverrebbe infinita. Quest' assurdo basta per far sentire che la forza della tensione non può misurarsi generalmente dalla Aq, come hanno supposto alcuni Autori. Finalmente nel caso che l' uno dei due fili RV si riducesse alla situazione verticale, *fig.* 41., è manifesto che la tensione vi si dovrebbe misurare da tutto il peso P; ed è manifesto che quando il peso pendesse verticalmente nel punto V dal filo QV lo tenderebbe colla forza P. cos. QVR.

Dai casi differenti passiamo ora ai problemi principali che vi si possono riferire. E in primo luogo sia data la verticale AV, *fig.* 42., e sia data la posizione, e la distanza de' punti Q, ed R, e nella stessa verticale si cerchi a quale punto V attaccato il peso P arrivi a tendere il filo RV con una forza eguale ad un dato peso p. Col centro A, e con qualunque raggio Av descritto un arco circolare, si prenda l' angolo vAn tale, che sia $\frac{vn}{Av} = \frac{p}{P}$, e dal punto R si tiri la retta RV parallela al seno nv. Il punto V sarà quello che si cerca. Se fosse data tutta la QR, e la RV si conoscesse solamente di posizione, sarebbe inutile di ricercarne la lunghezza RV, perchè un peso attaccato in V arrivasse a distenderla con una forza determinata. Mentre in qualunque punto V della stessa linea prolungata, sarà il peso attaccato alla forza della tensione come il seno totale al coseno dell' angolo AVR, che la RV forma colla verticale AV.

Se fosse data tutta la QR, *fig.* 43., e fosse data la sola lunghezza di RV, e si cercasse sotto quale angolo QRV il peso P attaccato in V potesse tendere il filo RV colla forza p; si soddisfarebbe al Problema tirando una verticale qualunque av, ed inclinan-

[illegible]

[illegible] con due rette $\frac{P}{}$ $\frac{p}{}$

Si segni sulla verticale AV data una quantità P indi fatto centro nel mezzo si descriva un semicircolo Anv indi si segni una quantità vn = p allora si avrà P : p = Av : nv
$\frac{p}{P} = \frac{nv}{Av}$ e tirata la parallela RV si avrà nv proporzionale NV ma NV = cosin AVR che misura la tensione dunque p proporzionale cosin AVR [illegible]

nandovi la an, in maniera che il seno totale sia al seno dell' angolo van come $P : p$. Mentre allora tirando dal punto R una perpendicolare ad an si avrebbe la proporzione assegnata. Così tutt' i Problemi di questo genere si possono ridurre a varie construzioni affatto elementari. Nè sarebbe più difficile il caso di una corda, a cui fossero attaccati diversi pesi a diverse distanze l' uno dall' altro. Poichè sospesi dalla corda $QMNR$, *fig.* 44., i pesi M, ed N, e tirate le verticali MC, NB, sarà N. cos. BNM la forza che il peso N eserciterà secondo NM, e la forza risultante secondo MQ sarà N. cos. BNM. cos. CMQ: e così tutta la tensione della corda QM sarà M. cos. $CMQ + N$. cos. BNM. cos. CMQ. La regola si potrà estendere a qualunque numero e di pesi, e di lati successivamente tirati in qualunque poligono funiculario.

CAPO QUINTO.

Della curvità della Catenaria, e della figura più consistente delle volte.

IL Galileo fu il primo a trattare della tensione delle corde, proponendo il teorema, che una corda orizzontale, considerata come non pesante, e tesa con due pesi grossissimi, attaccati all' estremità, deve piegarsi per qualunque piccolissimo peso aggiunto nel mezzo. Egli è vero, che il caso dell' equilibrio non è precisamente quello che credeva il Galileo, come ha rilevato il Viviani nelle sue lettere. Il teorema però è verissimo, ed evidente. Il Galileo ricercò ancora quale fosse la curva, a cui riducesi naturalmente una fune, o una catena di grossezza uniforme, che si possa piegare liberamente in tutte le sue parti, ma che non si possa maggiormente allungare, e che resti sospesa nelle due estremità da due punti non presi nella stessa linea verticale. Si lasciò egli ingannare da qualche specie di somiglianza credendo che la funicularia, o catenaria fosse la stessa curva, che si descrive dai projetti, cioè una parabola.

Il

Il Leibnitz fu il primo, che cogli ajuti del calcolo differenziale soddisfece rigorosamente al Problema. Furono in seguito pubblicate delle altre soluzioni da altri celebri Matematici, estese ancora ai casi più complicati del peso distribuito con qualsivoglia legge per tutta la lunghezza della curva. Noi ci limiteremo adesso al primo Problema, che può essere di uso nell' Architettura, e cercheremo di presentarne la soluzione sotto il punto di vista più semplice.

Sia V, *fig.* 45., il vertice, e VA l'asse della curva, e presa una porzione qualunque CV si tirino le tangenti CT, VT, che arrivino a tagliarsi nel punto T. Le forze assolute delle tensioni nei due archetti della curva, presi l'uno in C, l'altro in V si dirigeranno secondo le tangenti TC, TV, che possono considerarsi come continuate nella direzione degli archetti medesimi. Di più una forza qualunque, che agisce nella direzione TV, si potrà intendere indifferentemente applicata in V, o in T: e così pure sarà indifferente, che la forza, che agisce in C, s'intenda applicata nel punto T, e nella stessa direzione della tangente TC. Sia TN la prima forza, e la seconda TM, e compito il parallelogrammo $MKNT$ sia la forza composta, o equivalente TK. Perchè mantengasi l'equilibrio bisogna che la forza TK sia eguale, e contraria alla forza che nasce dal peso di tutto l'arco CV: cioè bisogna che la TK sia verticale, e che passi per il centro di gravità G dell' arco CV. Mentre è manifesto, che ridotte le cose allo stato dell' equilibrio, l'arco CV agirà col proprio peso sopra i punti C, ed V come se fosse interamente solido: e nel caso d'un arco solido è pure manifesto che si avrebbe la stessa azione ne' punti C, ed V se tutto il peso si riducesse nel centro di gravità G, e tutta la forza risultante si dirigesse secondo la verticale GT tirata dal centro G.

Nel caso adunque dell' equilibrio la forza della tensione nel vertice V sarà a tutto il peso dell' arco CV come $TN:TK$, o come il seno al coseno dell' angolo TKN, o KTM. Ma la forza, che l'arco CV esercita nel punto V, qualunque sia l'arco istesso,

istesso, dev' essere sempre eguale, e contraria a quella che si esercita da tutto l'arco opposto CV: cioè dev' essere data, e costante la forza della tensione nel punto V, comunque la catena sospesa in R finisca dall' altra parte in C, o in Q. Si chiami a questa forza, e il peso dell' arco CV si chiami p. Sarà $a:p$ la ragione del seno al coseno dell' angolo KTM, che la tangente CT formerà colla verticale TK. E poichè continuando la tangente fino a tagliare l'asse della curva in L, e tirando l'orizzontale CB, resteranno tra loro simili i triangoli MKT, CBL; si avrà la proprietà primaria della curva ricercata CVR, che in qualunque punto C la semiordinata CB starà sempre alla sottotangente BL come la quantità costante a al peso, o alla lunghezza dell' arco CV.

Se si volesse esprimere analiticamente questa proprietà della curva bisognerebbe tirare le due semiordinate infinitamente prossime CB, cb, e fare $BV=x$, $Bb=CD=dx$, $BC=y$, $Dc=dy$, $CV=p$, $Cc=dp$. E ciò posto per la somiglianza dei triangoli CDc, LBC si avrebbe l'analogia $a:p=dy:dx$, e l'equazione differenziale $a.dx=p.dy$. Ma essendo $dy^2=dp^2-dx^2$, sarà ancora $a^2.dx^2=p^2.dy^2=p^2(dp^2-dx^2)$, e per conseguenza $dx^2=\frac{p^2.dp^2}{a^2+p^2}$: ed estraendo la radice si avrà indifferentemente $+dx=\frac{+p.dp}{\sqrt{(a^2+p^2)}}$, oppure $-dx=\frac{-p.dp}{\sqrt{(a^2+p^2)}}$, secondo che s'intenderà che l'ascissa x cresca, o scemi nel punto B della quantità infinitamente piccola $\pm dx$. Prendendo adunque le somme, secondo le note regole del calcolo integrale, sarà $a+x=\sqrt{(a^2+p^2)}$: donde si dedurrà facilmeute $p=\sqrt{(2ax+x^2)}$, e così nella catenaria, quando sia data l'ascissa x, si potrà sempre assegnare algebraicamente la lunghezza dell' arco p.

Il Leibnitz, l'Huygens, e Giovanni Bernoulli, seguitando l'analisi del Problema, ne diedero delle ingegnose costruzioni per mezzo della Logaritmica, dell' Iperbola, e della Parabola. Vi ritro-

siccome $a:p=TN:TK$
per li triangoli simili
si avrà $TN:TK=CB:BL$
ovvero $a:p=CB:BL$
ovvero sottang. BL : semiord.
CB = peso arco CV : tensione
in V

il triangolo cCD simile
al triangolo CBL onde
$a:p=CB:BL$ ma
$CB:BL=cD:CD$ dunque
$a:p=cD:CD$ ma per
le denominaz. $a:p=dy:dx$
Nel triangolo cCD essendo
rettangolo sarà $dy^2=dp^2-dx^2$
e sostituendo nell' analogia
$a.dx=p.dy$ ovvero
$a^2.dx^2=p^2.dy^2$ sostituendo
$a^2.dx^2=p^2.dp^2-dx^2$

$\sqrt{a^2+p^2}=$

trovarono ancora delle proprietà fingolari: come, che nella catenaria non folamente l'arco CV è rettificabile, ma ancora l'area CBV, e tutta la QVR è quadrabile: e che in oltre tra tutte le curve di eguale lunghezza QVR, e di eguale larghezza QR, la catenaria fi è quella, che ha il centro di gravità più lontano dall' orizzontale QR. Per ciò che appartiene alla femplice analifi, noi ci accontenteremo di far avvertire, che la catenaria ha un folo ramo, cioè che, quando fi fofpenda una catena da due punti, vi è una fola curva, che poffa foddisfare al cafo dell' equilibrio. Ciò, come fi può dedurre da tutte le coftruzioni degli Autori fopraccitati, così ancora rifulta chiaramente dal calcolo precedente: mentre prendendo i fegni, o pofitivi, o negativi nell' eftrazione della radice, fi ha in foftanza una fola equazione $dx = \frac{p \cdot dp}{\sqrt{(a^2 + p^2)}}$. Egli è vero che, quando la gravità agiffe in fenfo contrario, la catenaria farebbe la fteffa curva QVR rivolta all' insù. Ma quefto non è già un nuovo cafo del Problema propofto, come non fi avrebbero degli altri cafi differenti fe la direzione della gravità s'immaginaffe rivolta a diritta, o a finiftra con un' inclinazione qualunque coll' orizzonte.

Vi è un' altra proprietà della catenaria, che, potendo effere di molto ufo nella coftruzione delle volte, merita di effere fpiegata più particolarmente. Se fi difegnaffe un arco rivolgendo la catenaria QCV col vertice insù, e fe dappertutto veniffe caricato di pefi eguali, e fi faceffe di egual groffezza FC, fc, *fig. 46.*, tutt' i piccoli cunei, nei quali fi può intendere divifo l'arco, fi fofterrebbero tra loro in equilibrio. Ciò fi potrebbe dimoftrare rigorofamente con altri ajuti del calcolo differenziale. Mentre tirando in C, e in c le due perpendicolari, che s'incontraffero in H, e che foffero come una continuazione dei lati FC, fc della metà $CcfF$ di tutto il cuneo prefo intorno al punto C, fi troverebbe che tutta la forza, proveniente dal pefo dell' arco CVF perpendicolarmente

mente a CF, fta alla forza, con cui il pezzo $CefF$ tenderebbe a fcorrere parallelamente a CF, come CH a Cc, o come la lunghezza intera del cuneo alla metà della larghezza: il che pofto, fecondo i principj già fpiegati, la refiftenza dei lati, e la forza della fpinta farebbero dappertutto in equilibrio. Ma ciò fi potrebbe anche intendere più facilmente con una confiderazione generale. Perchè una catena di groffezza uniforme, o un filo caricato di pefi eguali per tutta la fua lunghezza, riducafi all' equilibrio con prendere la forma della curva QCV, bifogna che in ogni archetto Cc la forza della tenfione, proveniente dal pefo inferiore, e diretta fecondo la tangente, fi equilibri colla forza, proveniente dal pefo dell' archetto medefimo nella direzione perpendicolare all' archetto, e alla tangente. E poichè in oltre non viene a cambiarfi nulla nell' equilibrio volgendo in fenfo contrario le direzioni di tutte le forze, ne fegue manifeftamente che rivolgendo la catenaria all' insù a forma di volta, e caricandovi fopra in ciafcun punto dei pefi eguali, fi devono foftentare gli uni cogli altri, ed equilibrarfi.

Giacomo Bernoulli fu il primo a produrre quefta ingegnofa fpeculazione, che in feguito parve di un ufo grande al Gregory, al Couplet, al Polheim, al Belidor, ed a molti altri Autori. Il Krafft nel Tom. IV. de' nuovi Atti di Pietroburgo credette che in vece per la più folida coftruzione delle volte fi doveffe cercare la curva QCV, in cui tutt' i cunei tendeffero al centro A con egual forza, e in cui foffe eguale per confeguenza il pefo rifpettivo di tutti, come anche prima aveva creduto il de la Hire. Secondo quefto principio, chiamando P il pefo affoluto del cuneo pofto in C, $P : p = CA : BA$
e il pefo rifpettivo $\frac{P \cdot BA}{CA}$, acciò dappertutto foffe eguale la forza $p = \frac{P \cdot BA}{CA}$
diretta al centro A, bifognerebbe che in ciafcun cuneo il pefo af- $R : CA = \sin C : BA$
foluto P foffe in ragione inverfa del~~la~~ ~~tangente~~ seno $\frac{BA}{CA}$ dell' angolo $\sin C = \frac{BA}{CA} \cdot 1 = \frac{BA}{CA}$
BCA. Ciò pofto il pefo affoluto dovrebbe continuatamente crefcere

dalla cima dell' arco ſino all' impoſta, dove, ſvanendo l'angolo, diverrebbe il peſo infinito. Ma indipendentemente ancora da queſta incongruenza è da rifletterſi, che l'eguale conſiſtenza di tutto l'arco non ricerca già l'eguaglianza del peſo riſpettivo, e della ſpinta laterale in tutt' i cunei, che lo compongono, ma bensì l'equilibrio tra la ſpinta, che naſce dal peſo riſpettivo di ciaſcun cuneo, e tra la forza, con cui tutt' i peſi ſuperiori lo tengono ſerrato, e ſtretto contro il lato dell' altro cuneo contiguo. E il caſo di queſt' equilibrio ricerca, come ſi è detto, che la quantità della ſpinta, e della reſiſtenza ſiano in ragione inverſa delle velocità: il che verificandoſi ſolamente nella catenaria, ſarà queſta la ſola curva da proporſi per norma nella coſtruzione delle volte della maggiore ſolidità.

Il Belidor nella Propoſ. IV. del Lib. II. della Scienza degl' Ingegneri, dopo di avere propoſta la ſteſſa norma, avvertì poi che nella pratica non biſognerebbe ſeguitare a rigore la curvità della catenaria, perchè, andando eſſa ad unirſi obbliquamente col piè diritto, le volte non ſarebbero belle a vederſi. E certamente ſe la catenaria nel luogo dell' impoſta incominciaſſe a ſalire verticalmente ſul piè diritto, biſognerebbe dare alla volta una elevazione eceſſiva: e perchè l'altezza non riuſciſſe troppo grande riſpettivamente alla larghezza, biſognerebbe che la volta faceſſe col piano ſuperiore dell' impoſta un angolo acuto, o, come chiamano, poplite. Ma in primo luogo quand' anco non ſi poteſſero combinare inſieme i principj, e della ſolidità, e dell' eleganza, converrebbe ſempre cercare ſeparatamente coſa richiedaſi e per un oggetto, e per l'altro. E poi ſiccome le volte ſono ſempre più ſicure verſo l'impoſta, quand' abbiano piè diritti baſtanti, e proporzionati, non vi ſarà inconveniente alcuno che incomincino da un' altra curva più regolare, e che ſi conducano a poco a poco a conformarſi colla curvità della catenaria nelle parti ſuperiori, dove in qualche caſo può maggiormente abbiſognare, che tutte le parti ſi reggano, e ſi ſoſtentino da ſe medeſime.

Per

Per ciò che appartiene alla ſemplice venuſtà, ed eleganza, il Blondel nel Lib. IV. del Cap. VI. del Corſo d'Architettura propoſe la regola ſeguente. Sia la larghezza della volta QP, *fig.* 47., e preſe le eguali QT, PL, e fatto il triangolo ~~equilatero~~ isoscele TLH, dai centri T, L, e co' raggi QT, PL ſi deſcrivano gli archi circolari QC, DP, e col centro H, e col raggio HTC ſi deſcriva l'arco CVD. Il Krafft nel luogo ſopraccitato adattò queſta regola al caſo, che foſſe data l'altezza AV, e vi applicò anche il calcolo: il che può farſi in queſt' altra maniera ſpeditamente. Sia $QA = a$, $AV = b$, $a - b = c$, $TA = x$, $HA = y$. Sarà $HC = TQ + HT = a - x + \surd(x^2 + y^2) = HV = y + b$: donde ſi caverà $x = \frac{2cy - c^2}{2y - 2c}$: e così tutt' i caſi poſſibili del Problema ſi ridurranno all' Iperbola tra gli aſſintoti. Ma in queſta coſtruzione è da rifletterſi che quantunque ſi eviti il poplite in Q, e in V, vi ſono però due archi di differente raggio, che incontrandoſi nel punto C devono ſempre laſciarvi qualche diſuguaglianza. Il Krafft ne determinò i limiti cercando il valore da darſi alle incognite del Problema, perchè la differenza dei raggi TC, HC rieſca la minima di tutte. Ciò ſi potrebbe facilmente dedurre dall' equazione antecedente, applicandovi le ſolite regole del calcolo differenziale: e nella pratica baſterebbe prendere $QT = VA$. Ciò non oſtante, quando foſſe ſenſibile la differenza degli archi, la volta in C ſarebbe ſempre diſettoſa a vederſi, e ſempre ſarebbe meglio diſegnarla con un elliſſi, incominciata ſopra l'impoſta a quell' altezza, che corriſponde allo ſporto del corniccione.

CAPO SESTO.

Dei metodi di varj Autori per calcolare la ſpinta delle volte.

De la Hire fu il primo a trattare geometricamente il Problema della ſpinta delle volte, e della reſiſtenza de' piè diritti

negli

negli atti dell' Accademia di Parigi del 1712. Suppose egli, come un principio d'esperienza, che gli archi, e le volte sogliano rompersi verso il mezzo tra l'imposta, e la cima: suppose che la metà superiore della volta fosse come rassodata in un solo masso, e così pure che la metà inferiore col piè diritto non formasse che un masso solo: e in seguito ricercò tutto lo sforzo esercitato dal primo pezzo per rovesciare il secondo. Il Couplet negli atti del 1730 considerò gli archi come aperti dalla parte interiore in cima, e sull' imposta, e dalla parte esteriore verso il mezzo, e determinò la spinta corrispondente nel sostegno. Il Belidor nel Lib. II. dell' Architettura ridusse a maggiore semplicità il suddetto metodo, in maniera ch'è stato più comunemente seguitato, ancora nel nostro paese, da quelli, che hanno avuto occasione di calcolare la consistenza di alcune cupole antiche. Ma il Belidor, e il Couplet hanno certamente sbagliato nella prima risoluzione delle forze: e quest' errore fondamentale ha influito in tutte le formole del Problema. Abbiamo già addotto nel Cap. IV. un esempio degli errori, in cui può condurre il principio notissimo della composizione, e della risoluzione delle forze quando non sia rigorosamente applicato. Adesso ne addurremo anche un altro.

Sia il piè diritto $PSBZ$, *fig.* 49., e ad esso si appoggi l'arco circolare $EBDG$, descritto dal centro A col raggio AC, e si divida in due parti eguali BC, CD. Si consideri la metà superiore $CDGF$ come un peso tutto unito, e appoggiato al piano inclinato FC, che tenda a smovere l'altra metà inferiore, e il piè diritto intorno al punto P. Sia X il centro di gravità del peso superiore, e indi si tiri sul piano FC, e si prolunghi la perpendicolare XLO, e sopra di essa dal punto P si tiri l'altra perpendicolare PO. Sarà PO il braccio del vette, a cui dovrassi intendere applicata la forza perpendicolare ad FC: e il momento esercitato per isvolgere in fuori tutto il masso $PSBCFEZ$ sarà come il prodotto della stessa forza in PO. Similmente se sarà Q il centro di

di gravità della metà inferiore dell' arco, ed R il punto, su cui cadrà la perpendicolare QR tirata sulla base PS: e se T sarà pure il punto, su cui cadrà la perpendicolare tirata dal centro di gravità del piè diritto, saranno PR, PT i bracci delle due leve, a cui si dovranno intendere applicati i pesi dell' arco inferiore, e del piè diritto per tenere tutto il masso a suo luogo.

Supposto che tutt' i pesi siano proporzionali alle aree delle sezioni, e che sia rettangola la sezione del piè diritto $PSBZ$; sarà manifestamente $PT = \frac{1}{2} PS$, e sarà il peso del piè diritto $PZ.PS$, e il momento $\frac{1}{2} PZ.PS^2$ *. Similmente chiamando n^2 l'area, o il peso dell' arco inferiore $BCFE$, sarà $n^2.\overline{PS-RS}$ tutto il momento esercitato nel punto R. Ma in oltre per la manifesta somiglianza dei triangoli PON, LMN, LKA, e per l'eguaglianza dei lati LK, KA, sarà il braccio $PO = \frac{LK}{LA}.PN = \frac{LK}{LA}.\overline{PM-ML}$: e chiamando m^2 il peso dell' arco superiore $CDGF$, tutta la difficoltà si ridurrà a trovare la forza risultante nella direzione XL: poichè moltiplicando questa forza per PO, ed eguagliando il prodotto alla somma dei due momenti $\frac{1}{2} PZ.PS^2 + n^2.\overline{PS-RS}$, si avrà l'equazione del Problema. A questo fine il Couplet, e il Belidor tirata la verticale XY, *fig.* 50., e colle orizzontali LY, XU compito il parallelogrammo $XLYU$, supposero che se il peso m^2, e la forza totale della metà superiore dell' arco si esprimesse colla retta XY, e si risolvesse nelle due forze XL, XU, la prima XL, o $m^2.\frac{LA}{LK}$ fosse quella che agisce perpendicolarmente al piano FC, e che l'altra forza XU si dirigesse contro la commessura DG, e venisse equilibrata, e distrutta dalla forza contraria dell' arco corrispondente dall' altra parte. Così sarebbe il momento della forza per-

essendo simili i triangolo fig. 49 LXY, LKA sarà
$XL : XY = LA : LK$, $XL : m^2 = LA : LK$, $XL = \frac{m^2.LA}{LK}$

cioè il peso sarà il rettangolo d'un lato nel altro

* dovendosi per avere il momento moltiplicare il peso per la distanza dalla linea di direzione ossia da un $\frac{1}{2} PS$ sarà $PZ.PS.\frac{1}{2}PS = PZ.\frac{1}{2}PS^2 = \frac{1}{2}PZ.PS^2$

essendo l'angolo KAK misurato da un quarto di semicircolo e per conseg. da un arco di 45 gradi egli è semiretto dunque anche l'angolo KLA sarà semiretto e il triangolo sarà isoscele cioè $LK = KA$

$PO : LK = PN : LA$
$PO = \frac{LK.PN}{LA}$ ma $PN = PM - MN = PM - ML$
sarà $PO = \frac{LK}{LA}.\overline{PM-ML}$

la somma delle resistenze essendo il momento del piè diritto $\frac{1}{2} PZ.PS^2$ ed il momento del arco FC $n^2.\overline{PS-RS}$ sarà la somma resistenze $= \frac{1}{2} PZ.PS^2 + n^2.\overline{PS-RS}$

si cerca ora il mom[illegible]

* Dovendosi dà la forza $m^2.\frac{LA}{LK}$ per avere il momento x spiegare per la distanza dal centro del moto onde sarà mom. $= m^2.\frac{LA.PO}{LK}$

ma $PN : LA = PO : LK$

onde $PN = \frac{LA.PO}{LK} =$

$PM - MN = PM - ML$

onde $m^2.\frac{LA.PO}{LK} = m^2.\overline{PM-ML}$

\+ cioè l'equalianza de due momenti per avere l'equilibrio.

* $XV : XY = LK : LA$

$XV : m^2 = LK : LA$

$X^2 = \frac{m^2.LK}{LA}$

* il momento della forza sarà $m^2.\frac{LK}{LA}.PO$ ma

$PO : PN = LK : LA$

$PO = \frac{LK}{LA}.PN$

onde $m^2.\frac{LK}{LA}.PO =$

$m^2.\frac{LK}{LA}.\frac{LK}{LA}.PN =$

$m^2.\frac{LK^2}{LA^2}.PN$ ma

$LA^2 = LK^2 + KA^2 = 2LK^2$

sarà $m^2.\frac{LK^2}{2LK^2}.PN =$

$m^2.\frac{1}{2}.PN = \frac{1}{2}m^2.\overline{PM-ML}$

perpendicolare $m^2.\frac{LA.PO}{LK} = m^2.\overline{PM-ML}$, e l'equazione del Problema sarebbe $\frac{1}{2}PZ.PS^2 + n^2.\overline{PS-RS} = m^2.\overline{PM-ML}$.

Io dico che non vi è alcuna forza orizzontale, che stringa la parte diritta della volta contro la sinistra: e dico in oltre che, tirando Yv perpendicolare a XL, la forza perpendicolare ad FC sarà solamente $Xv = m^2.\frac{LK}{LA}$: e che per conseguenza il momento esercitato nel punto O sarà $m^2.\frac{LK^2}{LA^2}.PN = \frac{1}{2}m^2.\overline{PM-ML}$, cioè solamente la metà di quello che risulterebbe dalle supposizioni degli Autori sopraccitati. E' in primo luogo non potendo una forza applicata in una data direzione esercitare azione alcuna in una direzione perpendicolare, come si è già provato generalmente nel Cap. III. della Meccanica, neppure dalla gravità, che agisce verticalmente in tutt' i pezzi d'una volta, si potrà mai derivare alcuna forza orizzontale, che nella sommità DG serri una parte contro dell' altra. Ciò ancora è manifesto perchè tirando per la sommità DG un piano verticale, che divida tutta la volta in due emisferj, e tirando tanti altri piani paralleli, che dividano ciascun emisferio in tanti archi verticali; un arco qualunque non sarà retto dagli altri archi, e ciascun emisferio, posando sopra la mezza corona, che gli serve di base, non avrà bisogno, per reggere, di alcuna forza che lo bilanci nell' altro emisferio. Generalmente e in una volta, e in un arco qualunque è manifesto, che risoluta la forza totale XY nelle due XU, XL, *fig.* 50.; la forza XL, ch'è obbliqua ad XU deve impiegarsi in qualche parte in quest' altra direzione: e risolvendo la XL nelle due Xx, XY, sarà tutta la forza orizzontale $XU - Xx = 0$. Così pure la forza XU essendo obbliqua ad XL, e potendosi risolvere nelle due Uu, Xu, lascierà che la forza totale secondo XL sia solamente $XL - Xu = XL - Lv = Xv$.

E per

E per l'altra parte è un assurdo, che essendo XY la forza totale della gravità, nè possa mai risultare una forza maggiore XL, in un' altra direzione.

Ho voluto spiegare queste idee elementari, che, non essendo state ben concepite, hanno dato luogo, ancora nel nostro paese, a moltissimi equivoci. La forza XY equivale realmente alle due XU, XL: ma nè la prima è la forza orizzontale esercitata alla cima della volta, nè la seconda è l'intera forza, che impiegasi a svolgere il piè diritto. Data la forza verticale XY per avere l'intera forza originata nella direzione XL, basta tirarvi dal punto Y la perpendicolare Yv, e prendere la Xv, come quando si tratta dei corpi posti sopra un piano inclinato. Così adunque e la forza, e il momento esercitato contro il piè diritto della metà superiore dell' arco sarà solamente la metà di quello, ch'è stato supposto fino a quest' ora. Facendo l'altezza del piè diritto $PZ = a$, la larghezza $PS = y$, $RS = f$, $CA = r$, $KA = LK = c$, $PM = a + c$, $ML = r + y - c$, sarà l'equazione del Problema

$PM = PZ + ZM = PZ + AK = a + c$

$ML = ZB + BA - VA$

$ML = PS + CA - LK$

$ML = y + r - c$

$$\frac{1}{2}ay^2 + n^2.\overline{y-f} = \frac{1}{2}m^2.\overline{a+2c-r-y}:$$

e nel caso più semplice, facendo $n^2 = m^2$, si avrà

$$y^2 + \frac{3n^2}{a}y = \frac{n^2}{a}(a+2c+2f-r):$$

e finalmente estraendo la radice si troverà

$$y = n\sqrt{\left(1+\frac{2c+2f-r}{a}+\frac{9n^2}{4a^2}\right)} - \frac{3n^2}{2a}.$$

L'avere raddoppiato il momento della spinta originata dalla metà superiore dell' arco, non è il solo difetto del metodo del Couplet, e del Belidor. Esso è in oltre limitato al puro caso, che la rottura si faccia in mezzo dell' arco tra l'imposta, e la cima: e in questo caso medesimo non vi si adduce neppure ragione alcuna, perchè la rottura abbiasi a fare precisamente nella continuazione del raggio CA, e perchè il peso della metà superiore dell' arco

deb-

debbasi intendere come appoggiato sopra il piano inclinato FC. In oltre gli archi, e le cupole si riguardano in questo metodo come composte di alcuni massi, che possano cedere, e rovesciarsi tutti insieme, ma non già fendersi, e dividersi in altre parti: ipotesi, che non è certamente applicabile nè ai mattoni, nè ai marmi. I tre celebri Matematici, che scrissero sopra i danni, e i risarcimenti della cupola di S. Pietro, non vollero servirsi di questo metodo, perchè non lo credettero applicabile al caso particolare di una cupola, in cui non si vedevano aperture orizzontali per tutta la lunghezza dei costoloni dall' imposta fino alla cima, e in cui vi era di più da calcolare alla cima l'azione del cupolino. Essi credettero, che nel caso della cupola di S. Pietro si dovesse considerare che ciascuno dei costoloni $IHMN$, *fig.* 52., fosse passato nel sito $ibmn$, dando infuori tutto insieme il tamburo da H in I, ed abbassandosi il cupolino da N in n senza allargarsi, o restrignersi.

Ma nel dare infuori il tamburo i medesimi Matematici considerarono due differenti casi: o che restando unito insieme il tamburo ai contrafforti, ed alla base, si sia smosso, e rialzato tutto il masso $AFIHD$ intorno all' angolo esterno A: o che avendo ceduto a principio la base, e i contrafforti, sia poi passato il solo tamburo $CIHD$ nel sito $Cibd$, o comprimendosi, o sollevandosi intorno all' angolo esterno C. In ambedue questi casi si avrebbero avute tre spaccature: l'una alla base del piè diritto: l'altra verso l'imposta dei costoloni, dando ivi infuori tutta la volta: e la terza alla cima abbassandosi il cupolino. E in un caso, o nell' altro i Matematici nominati considerarono il peso di ciascun pezzo come riunito nel centro di gravità: cercarono la proporzione della velocità, con cui poteva dare infuori il centro di gravità del piè diritto, alla velocità, con cui poteva abbassarsi il centro di gravità della volta, dei costoloni, e del cupolino: e così date le masse, e le velocità determinarono la proporzione dei momenti della resistenza, e della spinta. Così adunque trovarono, che nel secondo caso, svolgendosi tutto il tamburo intorno all' angolo esterno C, sarebbe il momento della spinta del cupolino, e insieme delle due cupole, e dei costoloni di circa 9 milioni di libbre Romane: e il momento della resistenza dell' attico, del tamburo, e di quella parte dei contrafforti, e della base, che pare ancora unita, di circa milioni $3\frac{1}{2}$. Trovarono ancora che in un caso, e nell' altro la forza de' due cerchj di ferro, de' quali si è parlato nel Cap. IV., riferita al sito dell' imposta, dovrebbe valutarsi di circa milioni $2\frac{1}{2}$. Però nel secondo caso sarebbe lo sbilancio della spinta sopra la somma di tutte le resistenze di circa 3 milioni di libbre. Nel primo caso del tamburo unito alla base, e a tutt' i contrafforti, la resistenza sarebbe stata più di dieci volte superiore alla spinta.

Questo semplice risultato, che, senza un più esteso dettaglio dei calcoli, pubblicossi ventitre anni fa, diede subito luogo di dimandare come mai sia seguita la divisione della base, e dei contrafforti: giacchè supposto unito tutto il tamburo, com' era certamente a principio, la resistenza sarebbe stata più di dieci volte superiore alla spinta. E dato che il Buonaroti avesse così bene proporzionate le forze, e che le spaccature della base, e dei contrafforti in progresso di tempo siano procedute, almeno in gran parte, da altre cause accidentali, dall' azione del caldo, e del freddo, dal primo sedimento dei materiali, da qualche scossa di terremoto, o dai fulmini; non vi è alcuna ragione, per cui alle cause medesime non si debbano attribuire in gran parte ancora gli altri danni consecutivi. Mentre in qualunque ipotesi lo sbilancio del sopraccarico, se vi è, deve risentirsi sulla stessa curvità della cupola, e cagionarvi delle rotture orizzontali, e incominciare di là, tra l'imposta, e la cima, come dal punto più debole, a svolgere infuori tutto il piè diritto. Ora nella cupola interna di S. Pietro, e nell' esterna le spaccature non sono orizzontali: e la spaccatura principale, detta della

della Veronica, continua per lungo tratto dall' alto al baſſo. Conſiderando adunque che i danni maggiori ſono quelli dei contrafforti, e della baſe, e che devono eſſi attribuirſi nella parte principale a varie cagioni eſtrinſeche, e non già al ſopraccarico del cupolino; converrà dire, che le ſteſſe cagioni abbiano avuto la parte principale ancora negli altri danni, che ſi vedono al lungo della cupola, e nel tamburo: coſicchè il ſopraccarico del cupolino non abbia fatto che renderne le conſeguenze più gravi, e più pernicioſe.

Parlando generalmente, e dato che la cerniera in N ſi ſia abbaſſata per lo ſpazio Nn ſenza allargarſi; il moto dalla parte oppoſta in I, e in H poteva ſuccedere in tante maniere differenti, ſecondo che i coſtoloni, e il tamburo ſi riguardaſſero come incomprenſibili, e così non poteſſe ſuccedere altro moto ſe non rialzandoſi tutto il piè diritto intorno all' angolo eſterno C: o che, ſuccedendo qualche compreſſione in C, e in H, daſſe infuori il piè diritto volgendoſi intorno all' angolo interno D: o che cedendo tutta la cupola in una maniera inſieme, e nell' altra, veniſſero conſeguentemente a variarſi le aſceſe, le diſceſe, e le velocità aſſolute dei centri di gravità. Ora non ſolamente i mattoni, e la calce, ma ancora le pietre, e i marmi ſono ſenſibilmente compreſſibili, ſecondo tutte le ſperienze del Mariotte, e del Muſſchenbroek. Così l'ipoteſi del moto potrebbe ſomminiſtrare delle ſoluzioni differentiſſime del problema. Ed io per me conſidero che in molte, anzi infinite maniere differenti poſſano cedere le cupole, e le volte. Il marmo ſopraccaricato, e compreſſo da un peſo ſoverchio ſi divide in diverſi ſtrati, e forma dei peli, e delle crepature: accreſcendoſi la preſſione ſi poſſono allargare, e moltiplicare i peli in infinite maniere differenti: e così in infinite maniere può cedere una cupola. Preſcindendo adunque da qualunque ipoteſi del moto delle differenti parti, è neceſſario di calcolare generalmente la ſpinta, che un arco, o una volta qualunque, caricata di un peſo qualunque, eſercita ſopra qualunque punto: al qual problema cercheremo adeſſo di ſoddisfare.

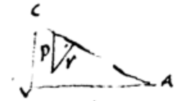
CAPO

CAPO SETTIMO.

Del metodo generale di calcolare le ſpinte, e dell' applicazione alla Cupola del Duomo di Milano.

Sia BCD, *fig.* 51., un arco circolare deſcritto dal centro A col raggio AC, aggravato in D di qualunque peſo, e appoggiato al piè diritto $RBZP$. Si concepiſca che l'arco non abbia alcuna ſenſibile groſſezza, e ſi ricerchi la forza, che ne deriva dal peſo in C ſecondo la tangente CN. Sarà queſta tutta la forza, che impiegheraſſi per iſtaccare la parte inferiore BC dell' arco dalla ſuperiore CD, e per iſvolgere tutto il piè diritto all' infuori. Ora tirando le orizzontali CM, BA, e le verticali NM, CV, e conſiderando l'arco CD come appoggiato in C al piano inclinato CA; ſarà tutto il peſo P alla forza, che ne riſulterà perpendicolarmente a CA, e ſecondo la tangente CN, come la lunghezza del piano CA alla larghezza VA: e l'altra forza, con cui l'arco ſuperiore tenderà a ſcorrere nella direzione iſteſſa di CA, non influirà punto ad iſmovere l'arco inferiore, e il piè diritto dal proprio luogo. Sarà dunque la forza riſultante ſecondo $CN = \frac{P.VA}{CA}$: e queſta ſi riſolverà di nuovo in due altre, la prima $\frac{P.VA.CM}{CA.CN} = \frac{P.VA.CV}{CA^2}$, che ſarà orizzontale, e la ſeconda $\frac{P.VA.NM}{CA.CN} = \frac{P.VA^2}{CA^2}$, che ſarà verticale nel punto C. Se poi s' intenderà che all' arco CD ſi ſovrappongano tanti altri archi concentrici, avrà luogo la ragione iſteſſa per tutti, e, chiamando P tutto il peſo ſuperiore al piano CA, ſi avrà ancora la ſteſſa eſpreſſione delle due forze.

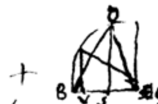
Facendo adunque $CA = r$, $CV = p$, $VA = q$, ſarà la prima forza



r eſprime la forza che perpendicola: a CA perche è tangente. Dunque
$P : r = CA : VA$, $r = CN$ dunque
$CN = \frac{P.VA}{CA}$
CN si risolve in CM e MN dunque si avrà l'analogia
for. CM : for. CN = CM : CN
forza CM : $\frac{P.VA}{CA}$ = CM : CN
forza CM = $\frac{P.VA.CM}{CA.CN}$ ma
CM : CV = CV : CA, $\frac{CM}{CN} = \frac{CV}{CA}$ dunque sostituendo
for. CM = $\frac{P.VA.CV}{CA^2}$ e presa la forza orizzontale
for. perpendicolare secondo MN
for. MN : for. CN = MN : CN
forza MN : $\frac{P.VA}{CA}$ = MN : CN
for. MN = $\frac{P.VA.MN}{CA.CN}$ ma
MN : CN = VA : CA onde
$\frac{MN}{CN} = \frac{VA}{CA}$, sostituendo
for. MN = $\frac{P.VA^2}{CA^2}$

forza $P.\frac{pq}{r^2}$, e la seconda $P.\frac{q^2}{r^2}$: ed essendo Bc il braccio della leva, a cui resta applicata la forza orizzontale, e BV quello della verticale, sarà $P.\frac{qp^2}{r^2}$ il momento orizzontale, e $P.\frac{q^2}{r^2}.\overline{r-q}$ il verticale: e così tutto il momento impiegato ad isvolgere il piano $BVCc$, e l'arco inferiore BC intorno al punto B, sarà $\frac{P}{r^2}(qp^2 - q^2.\overline{r-q})$, che, essendo $p^2 = r^2 - q^2$, si ridurrà all' espressione $P.\frac{q}{r}.\overline{r-q}$. Con questa formola si potranno paragonare insieme le spinte cagionate dallo stesso peso P in qualunque punto tra l'imposta, e la cima del quadrante, dove svanendo o il coseno q, o il seno verso $r-q$ non resta più alcuna spinta all' infuori. E se si ricercasse il punto di mezzo dove la stessa spinta riuscisse la massima di tutte, basterà ancora la semplice Geometria per vedere che il punto V dovrà cadere di mezzo tra B, ed A, perchè sia massimo il rettangolo di BV in VA, ossia di $r-q$ in q, e che però l'angolo ACV dovrà essere di 30 gradi, e l'angolo CAV di 60.

Poichè la forza cagionata dallo stesso peso nella direzione perpendicolare a CA è sempre la stessa comunque il peso s'intenda caricato in D, o in G, *fig.* 53., e l'arco CD si allunghi, o si accorci; se col centro A, e col raggio AB si descriverà il quadrante BG, e collo stesso raggio dal centro B si descriverà un altr' arco AD, essendo equilatero il triangolo BDA, e l'arco BD essendo di 60°, verso la metà C dell' arco Gotico $BCDA$ si avrà la stessa spinta, che verso la terza parte dell' arco Romano ACG. E poichè in oltre la spinta verso la terza parte dell' arco AG, che abbia AB per raggio, è manifestamente maggiore di quella, che si potrebbe cagionare dallo stesso peso caricato alla terza parte del quadrante, che abbia per raggio la metà dell' intera larghezza AB, ne segue che l'arco Gotico sarà più debole di un arco Ro-



mano egualmente largo. Ciò ancora si deduce dalla formola $P.\frac{q}{r}.\overline{r-q}$. Mentre dato il peso P, e posto nell' arco Romano $r=\frac{1}{2}AB=1$, sarà il seno di 60 gradi $=\sqrt{\frac{3}{4}}=q$, e però sarà $\frac{q}{r}.\overline{r-q}=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{4}$: e nell' arco Gotico egualmente largo, posto $BA=2$, e $CV=1$, sarà $q=\sqrt{3}$, e $\frac{q}{r}.\overline{r-q}=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$: e così la quantità della spinta cagionata dallo stesso peso alla metà dell' arco Gotico sarà doppia di quella che potrebbe aversi alla terza parte dell' arco Romano. Sarà pure la spinta alla metà dell' arco Romano $\sqrt{\frac{1}{2}}.1-\sqrt{\frac{1}{2}}$, cioè ancora minore che alla metà dell' arco Gotico. Il Belidor nel §. XXXIV. del Lib. II. avvertì di guardarsi bene dal fare le volte Gotiche nei magazzini, che devono essere a prova di bombe: e Cesare Cesariani nelle note al Cap. II. del Lib. I. di Vitruvio aveva già preventivamente osservato, che il principio dell' arco Gotico è sodissimo, ed attissimo a sostenere dei grandi pesi, ma che tra l'imposta, e la cima si può esso rompere facilmente.

Per una più dettagliata applicazione della suddetta formola ricercheremo separatamente lo sbilancio, che può aversi, o nella sola cupola, o nella cupola unita ai piè diritti. Questi sono i due casi, che chiamansi di una cupola considerata o in terra, o in aria. Incominciando dal caso che i piè diritti siano assicurati abbastanza, e che tutta la volta si possa riguardare come appoggiata sopra di un piano immobile, supponiamo che nella parte inferiore non possa darsi altro moto se non intorno a qualche punto della base BZ, *fig.* 53. In questo caso chiamando z la distanza del punto B dal centro del moto, Q il peso che sovrasta alla base fino al punto C, ed f la distanza del punto B dalla linea di direzione del centro di gravità, sarà il momento dello stesso peso * $Q.\overline{z-f}$. Così pure chiamando P tutto il peso superiore al punto suddetto, sarà $P.\frac{qp^2}{r^2}$ il momento della forza orizzontale: ed essendo † $r-q+z$ la lunghezza del braccio del vette, a cui deve intendersi applicata la forza verticale nel punto C, sarà il momento di essa $P.\frac{q^2}{r^2}(r-q+z)$. Però nel caso dell'equilibrio dovrà essere $Q.\overline{z-f}=P.(q-\frac{q^2}{r^2}.\overline{r+z})$: e posto $q=\frac{1}{2}$, sarà $Q:P=\frac{1}{4}.\overline{r-z}:z-f$.

Volendo poi far entrare nel calcolo ancora la resistenza dei piè diritti, ai quali si consideri come appoggiata tutta la cupola, si chiami a l'altezza PZ, y la larghezza PR, *fig.* 51., ed l la grossezza del piè diritto: e però sia il peso aly, e il momento di svolgersi intorno all'angolo esterno della base × $\frac{1}{2}aly^2$. In oltre si chiami Q il peso dell'arco inferiore al punto C, ed f la distanza della linea di direzione dal punto B, e però sia il momento da aggiugnersi * $Q.\overline{y-f}$. Così pure chiamando P tutto il peso superiore, ed essendo $a+p$ il braccio del vette, a cui deve intendersi applicata la forza orizzontale, ed † $y+r-q$, quello a cui resta applicata la forza verticale, sia tutto il momento della spinta $P.\frac{pq}{r^2}(a+p)-P.\frac{q^2}{r^2}(y+r-q)$. Nel caso dell'equilibrio dovrà essere × $\frac{1}{2}aly^2+Q.(y-f)=P(q+\frac{apq}{r^2}-\frac{q^2}{r^2}.\overline{r+y})$, e quindi si caverà facilmente qual debba essere la larghezza y del piè diritto, che regga ad un dato peso di una qualunque volta circolare. La stessa formola potrebbe estendersi facilmente al caso di un arco ellittico, o ancora di qualsivoglia altra curva, se s'intendesse dise-

gnato

$z = BS$ quando il punto dove cade la linea di direzione del centro di gravità O

* momento = al peso Q moltiplicato per distanza centro gravità dal centro del moto $= SZ = ZB - BS = z - f$ onde viene $= Q.z-f$

† la linea di direzione del peso nel punto C è CV onde ZV sarà il braccio del vette $= ZB + BA - VA = z + r - q = r - q + z$

Per avere la spinta bisogna sottrarre dalla forza orizzontale la forza verticale [illegible] totalmente dalla spinta onde si deve sottrarre da $P.\frac{qp^2}{r^2}$ la $P.\frac{q^2}{r^2}(r-q+z)$ il qual calcolo si osservi al libretto [illegible]

* come nella fig. 55 solo cambiate le denominazioni

† quando la forza orizzontale applicata secondo MC sarà la distanza dal centro del moto: $PZ + ZM = PZ + VC = a + p$

† la forza vertic. poi essendo secondo CV onde la distanza dal centro del moto sarà ZV intendendosi nella direzione Z come P centro del moto $ZV = ZB + BA - VA = y + r - q$

r. n. 4 [illegible] linea 3

come a [illegible] solo invertiti [illegible] $r-q$ per $r-q+z$ [illegible]

× $= aly . \frac{1}{2}y$ cioè per la distanza dal centro di gravità al centro del moto

cioè la differenza delli rispettivi momenti darà la spinta ossia sottratto dal momento orizzontale il momento verticale s'avrà la spinta mentre quel che perpendicolarmente non spinge anzi fa resistenza qual che spinge è [illegible] orizzontale dalla quale si deve sottrare la resistenza ossia la verticale —

× sommati poi insieme [illegible] resistenza del piè diritto come pure del arco inferiore questi per l'equilibrio devono egualiarsi alla differenza come sopra della spinta però ridotta a minori termini come lo vedrai al libro de calcol

gnato per r il raggio osculatore in un dato punto, e per p, e q la verticale, e l'orizzontale corrispondente: e si potrebbe ridurre all'altra formola del capitolo precedente ponendo $p=q$, trascurando la grossezza l del piè diritto, e prendendo per P, e Q le semplici aree, come si potrebbe fare in un arco continuato uniformemente sulla stessa grossezza del piè diritto.

La semplice esposizione di questo metodo darà luogo di riscontrare gli errori di varj calcoli, coi quali s'è voluto applicare a varj casi particolari il metodo del Couplet, e del Belidor. Per esempio nell'applicazione che se n'è fatta al caso della cupola del Duomo di Milano, oltre all'essersi raddoppiata la spinta, si è presa ancora per la proporzione dei pesi la semplice proporzione delle aree delle sezioni dei piè diritti, dei costoloni, e del cupolino. Nel calcolo pubblicato alcuni anni fa sopra la cupola di S. Lorenzo vi sono degli altri errori che si combinano insieme a dare alla spinta un valore maggior del vero. Gli errori principali sono: che per la forza perpendicolare al raggio si è calcolato tutto il peso superiore senza la previa risoluzione: e che dopo la risoluzione della forza perpendicolare si è tenuto conto della sola forza orizzontale, e non già della verticale. L'altro principio adottato in quel calcolo, e comune ad altri Scrittori, di dividere tutto il peso in ragione della larghezza dell'arco all'altezza per avere la proporzione della forza, che spigne, a quella che resiste, porterebbe per conseguenza, che data l'altezza, e la larghezza, e dato il peso, si dovesse avere in qualunque arco la stessa proporzione delle due forze: il che è assurdo.

Per aggiugnere qui un esempio, prendiamo i dati della stessa cupola del nostro Duomo. Ciascuna delle quattro colonne di marmo, che la sostengono, avendo 53 braccia di altezza, e circa 5 di diametro ragguagliato, e però avendo circa 1040 braccia cube di solidità, con dare ad un braccio cubo di marmo il peso di 800 libbre grosse, può valutarsi del peso di libbre 832000. Ciascuna

co-

Diametro : Circ. = come 3 1/4 : Perif. = 3,14 : 15 $\frac{1}{3}$ che moltiplicato per $\frac{5}{4}$ s'averà l'area della colonna $= 3,14 \times 1\frac{1}{4} = 19\frac{7}{12}$ che moltiplicato per 53 s'averà la solidità della colonna = 134 circa colonna negli archi superiori, prima di arrivare alla base della cupola, sostiene più del doppio del proprio peso: e nel piano inferiore ciascuna di esse ha di fianco 8 altre colonne verso la porta, 2 colonne con un contrafforte nell' asta della croce, e 3 colonne con un altro contrafforte dalla parte del coro.

Gli otto pilastri del tamburo della cupola, avendo l' altezza di braccia 23, nella larghezza, e grossezza ragguagliata di braccia 3 si possono valutare tutti insieme di libbre 1324800. Tutto il resto della cupola, interiormente ai pilastri, che la fiancheggiano, fino al piede del cupolino, costoloni, muri, ornati superiori, per quanto si è rilevato dalla riduzione de' differenti pezzi in braccia cube, potrebbe valutarsi di circa 3 milioni di libbre. Similmente il peso del cupolino può valutarsi di libbre 337000, e il peso di tutta l' aguglia, torre, scalini, piramide ec. di 223000.

per avere il peso delli otto pilastri bisogna trovare la solidità di cadauno la ~~quall~~ quale siccome le aree della base sono rettangole, s'avrà facendo il quadrato del diametro = 9 che multiplicato per 13 = 107 braccia cube per cadauno e ragguagliato il peso di 400 libre per braccia cubo s'avrà il peso di cadauno = 165600 che multiplicato pel numero de pilastri s'avrà 1324800

Così ciascuna delle suddette quattro colonne sopra una base di circa 5 braccia di diametro sostiene poco meno di 3 milioni di libbre grosse. Intorno alla cupola il carico maggiore cade sulle colonne, e sulle volte, che restano dalla parte del coro, e del campanile. Le volte di cotto sono tirate dappertutto dall' uno all' altro dei costoloni di marmo, che si spiccano dai capitelli delle colonne prese a quattro a quattro, e che vanno a crosegglarsi, e ad unirsi insieme alla cima con un angolo acuto. La quantità del carico dei costoloni, e delle colonne, e la proprietà indicata de' mattoni, de' marmi, e de' cementi sopraccaricati di fendersi, e di scomporsi in diversi strati, sono le due ragioni, per cui si staccano di quando in quando dei pezzi piccoli, e grossi: il che non succedendo in alcun altro luogo, è una prova bastante che gli antichi architetti hanno accresciuto il carico più che non conveniva per una fabbrica da trasmetterfsi salva, ed illesa ai secoli più remoti. In tutto il corpo della cupola si combinano in un' altra maniera tutte le spinte a facilitare le divisioni della volta interiore, ed a lasciare dei peli, e delle crepature negli angoli esterni del tamburo, come si è detto

nel

nel Cap. II. Colle altre formole precedenti si possono in qualunque ipotesi paragonare insieme i momenti.

Essendo composto il tamburo, e i costoloni di pezzi differenti, e diversamente impostati, quando non vogliasi concepire che per qualche compressione del marmo negli angoli esterni E, e Z resti il centro del moto negli angoli interni B, ed E, la supposizione più semplice, e più naturale da farsi sarebbe, che il tamburo $ELMZ$ si rivolgesse intorno all' angolo esterno Z, e il costolone EBD con tutto il peso superiore s'alzasse istessamente intorno al punto E. Posto il peso del tamburo di milioni $1\frac{1}{3}$ di libbre, e posta EZ di 3 braccia sarebbe il momento della resistenza tutto all' intorno $1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2}$. E poichè in oltre tutto il peso del cupolino, e dell' aguglia arriva a libbre 560000, e il peso di tutto il resto della cupola tra il cupolino, e il tamburo può valutarsi di 3 milioni, supponiamo che solamente un milione s'impieghi verso la cima D nelle spinte, e che restino al disotto milioni $2\frac{1}{2}$. Se tutt' i pezzi, che partono dal piede EB della cupola, e vanno ad unirsi verso la cima D si potessero riguardare come tante piramidi; il centro comune di gravità resterebbe lontano dalla base di un quarto dell' altezza, cioè d'un angolo di gradi 15: il cui seno verso essendo 0.04 del raggio preso per unità, supposto il raggio AB di braccia $31\frac{1}{4}$, riuscirebbe di braccia $1\frac{1}{4}$, e la distanza della linea di direzione dal punto E di $2\frac{1}{4}$: e però sarebbe il momento della resistenza da aggiugnersi $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$. Ma è facile da vedere che il peso dei due milioni e mezzo di libbre, essendo ripartito disugualmente, e più sopra la base EB, che intorno alla metà dei costo-

mentre si deve multiplicare per la distanza del centro di gravità il quale è nel mezzo dell centro del moto: $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{6} = 2$

* mentre essendo in tutto $3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ milioni ond impiegandosene un milione nelle spinte [illegible] $2\frac{1}{2}$ milioni rimanenti [illegible]

$1 : 0,04 = 31\frac{1}{4} : x$

$100 : 4 = 31\frac{1}{4} : \frac{31\frac{1}{4} \times 4}{100}$

$= 31\frac{1}{4} : \frac{125}{100}$

$= 31\frac{1}{4} : 1,25$

$= 31\frac{1}{4} : 1\frac{1}{4}$

* mentre si suppone $EB = 3$ e [illegible] essendo $BV = 1\frac{1}{4}$ sarà $EV = 2\frac{1}{4}$

3. [illegible] il peso come [illegible] * [illegible] braccio [illegible] $\frac{1}{4}$

costoloni, ancora la distanza del centro di gravità dalla base deve essere minore di quella, che qui si è supposta: e che però la somma dei due momenti non può eguagliarsi a quello della spinta. Poichè quand' anco verso la cima non s' intendesse impiegato nella spinta che il peso di un milione di libbre, posto $y=1$, $r=31\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{2}r=15\frac{3}{5}$, sarebbe tutto il momento $P(q-\frac{q^2}{r^2}.\overline{r+y})=7\frac{1}{2}$.

Lo sbilancio risulterebbe ancora maggiore se i costoloni si riguardassero come riuniti solamente dal piede, e coi muri trasversali al tamburo: e se per qualche piccola compressione, o per qualche stritolamento dei marmi negli angoli esterni E, Z tutto il masso dei costoloni si potesse piegare intorno agli angoli interni B. Mentre in simili casi non si potrebbe più tener conto di tutta la resistenza del tamburo, nè di quella parte dei costoloni, il cui centro di gravità venisse a cadere sopra il centro del moto B. In tutte queste ipotesi la consistenza, e la solidità della cupola si dovrebbe principalmente alla naturale coesione de' marmi, ed alle catene di ferro che sono tirate intorno al tamburo, e attraverso dei costoloni. Che se poi le catene di ferro si volessero riguardare come un rinforzo da aggiugnersi ad una fabbrica già abbastanza sicura, e consistente da se medesima, come già si è avvertito nel Cap. IV., e se si volessero in oltre considerare gli esempj delle altre chiavi, che si sono casualmente spezzate nella fabbrica istessa del Duomo, e in altri luoghi, non potrà a meno di riguardarsi come eccedente il sopraccarico del cupolino, e dell' aguglia. E questa ragione appunto unitamente alle altre ragioni d'una maggiore simmetria, ed al pronostico fisico dei fulmini, che si è già verificato abbastanza, come si è detto nel Cap. II., mi aveva fatto pensare altre volte che convenisse più tosto di terminare in un' altra maniera la cupola. Le diverse opinioni di allora sono bastantemente indicate nel viaggio d'Italia del celebre Sig. la Lande, e non occorre qui di ripeterle.

DE'

DE' PRINCIPJ, E DEGLI USI DELL' IDROSTATICA,

OSSIA

DELLE LEGGI DELL' EQUILIBRIO DE' CORPI FLUIDI, E DELLA LIVELLAZIONE.

LIBRO TERZO.

CAPO PRIMO.

Delle leggi generali della Pressione, e dell' Equilibrio de' fluidi.

ARchimede, a cui dobbiamo i più alti voli, che anticamente si siano fatti nella Geometria, e nella Meccanica, ci ha dato ancora le prime leggi dei corpi solidi, che galleggiano, o che s' immergono ne' fluidi, ed ha spiegato ingegnosamente alcuni casi più delicati, e difficili di certi corpi, che possono conservare in un fluido la prima posizione. Dai tempi di Archimede fino al principio del secolo passato non si è aggiunto nulla di più all' Idrostatica. Simone Stevino, Matematico Olandese, ricavò più da alcune particolari sperienze, che da un concludente, e preciso raziocinamento, che la pressione esercitata dai fluidi sopra una data base dipende unicamente dall' altezza dei fluidi, e non già dall' ampiezza, o dalla figura dei vasi, che li contengono. Il Galileo ristabilì le dottrine di Archimede, e soddisfece a tutte le difficoltà, che intorno ad esse venivano obbiettate da alcuni. Cercò ancora di dimostrare il principio dello Stevino, e di ridurlo agli altri principj generali della Meccanica. Ma questo, che volgarmente suole

chia-

chiamarsi *il* paradosso Idrostatico, e che ci dà per misura della pressione la semplice altezza, e non già tutta la quantità del fluido, che preme una data base, pare ad alcuni inviluppato ancora di tante ambiguità, che prima di ogni altra cosa è necessario di esporlo coll' evidenza più semplice, e indisputabile.

Fluidi si chiamano que' corpi, le cui parti anche più piccole sono talmente sciolte, e staccate, che cedono a qualsivoglia forza impressa, e cedendo si muovono tra di loro. Risiedono veramente in tutte le particelle de' corpi, ancora fluidi, certe piccole forze, che bisogna prima bilanciare con qualche porzione della forza impressa, affinchè colla forza residua vi si ecciti poi qualche moto. Particolarmente tra le particelle dell' acqua vi è una certa viscosità, e adesione, che non si fa conoscere solamente nelle sperienze fisiche di semplice curiosità, ma che influisce ancora sensibilmente nei fenomeni delle acque, che scorrono sopra di un piano dato, o che precipitano dall' altezza di qualche chiusa. Ma tutte queste forze sono assai piccole, e se ne può prescindere da principio. Bisogna incominciare dall' idea dell' assoluta fluidità, per poi aggiugnervi la considerazione di tutte le differenze, che in ciascun caso particolare possono nascere da qualche difetto della medesima. E generalmente nella Idrodinamica, non meno che nella Geometria, e nella Meccanica, bisogna incominciare dai casi più semplici per poi gradatamente discendere ai più composti.

Considerando il fluido come un ammasso di particelle interamente libere, e sciolte, e in oltre considerando ciascuna particella come pesante, la prima cosa da dedursene si è, che un fluido qualunque, rinchiuso in qualunque vaso GBC, *fig.* 54, non potrà essere in equilibrio se non quando la superficie esteriore GC sia perpendicolare in qualunque punto alla direzione della gravità. Mentre in qualunque punto M se la direzione della gravità MO non fosse perpendicolare alla superficie MC, tirandovi la perpendicolare ON, e compiendo il rettangolo PN, la forza della gravità si risolverebbe in due altre forze dirette secondo MN, MP, e la prima di esse, non essendo bilanciata da alcun altra forza, dovrebbe produrre qualche moto da M in N. La stessa verità si può rendere manifesta dividendo coll' immaginazione tutta la massa del fluido in tanti strati paralleli tra loro, e perpendicolari alla direzione della gravità: mentre supposta eguale l'altezza di tutte le particelle, saranno eguali le forze nello strato più basso, e così pure nel secondo strato preso immediatamente al disopra, e nel terzo e in tutti gli altri, di qualunque ampiezza essi siano, e così tutti gli strati resteranno egualmente serrati gli uni sopra degli altri.

L'idea dell' equilibrio ricerca che tutte le forze si compensino insieme, e si distruggano. Adunque, dovendosi il fluido equilibrare, bisognerà che si distruggano tutte le forze nel vaso GBC, quando il fluido dappertutto vi arrivi alla stessa linea GC, ch' è perpendicolare alla direzione della gravità: e così pure si dovranno distruggere tutte le forze in qualunque altro vaso DEF. Prendendo adunque le differenze bisognerà che si distruggano ancora tutte le forze nel fluido contenuto dal vaso $GBCFED$, quando e da una parte e dall' altra arrivi fino alla stessa linea GC. Da ciò ne risulta il principio generale che nei vasi, sifoni, o tubi comunicanti in qualunque modo tra loro, resterà equilibrato un fluido, se da una parte, e dall' altra arriverà alla stessa orizzontale GC, che può considerarsi come perpendicolare alla direzione comune di gravità. Questo è il principio che regola tutte le sperienze ordinarie dell' Idrostatica. Nei tratti più vasti della Terra, nei mari, e nei fiumi, che comunicano tra di loro, la superficie dell' equilibrio sarà rigorosamente quella d'una sferoide, e assai prossimamente quella d'una sfera, descritta intorno al centro comune da qualsivoglia luogo che si proponga.

Riflettendo più particolarmente sopra il principio già esposto s'intenderà, che dovendosi il fluido equilibrare tanto sotto la forma $GBCFED$, quanto sotto qualunque altra $ABCFEH$, termiminata dalla medesima orizzontale, ed essendo data la forza, e la pressione esercitata da tutto il fluido $BCFE$ contro una parte dello strato BE, ch'è comune alle due forme; bisogna che ancora dall' altra parte sia egualmente data la forza, e la pressione del fluido della forma $GBED$, oppure $ABEH$. Cioè posto che il fluido arrivi sino all' orizzontale GC bisogna che la pressione esercitata sopra la base BE sia sempre la stessa, comunque i lati del tubo superiore GB, DE, oppure AB, HE, o convergano, o divergano tra loro con qualsivoglia curvità, o siano paralleli. E siccome la pressione d'un fluido contenuto in un vaso prismatico $ABEH$, che abbia i lati AB, HE verticali, e paralleli, dev'essere necessariamente come tutto il peso del fluido premente, o, quando sia data la densità, come il prodotto della base, e dell' altezza del prisma; bisogna ancora che in un vaso, o in un tubo qualunque la pressione di un fluido omogeneo sia in ragion composta della base, e della semplice altezza. Variandosi la densità dei fluidi, colle ragioni già dette, bisognerà comporre anche quella delle densità, ossia del peso, che hanno i fluidi sotto un egual volume, e che chiamasi peso, o gravità specifica. Generalmente adunque nei tubi comunicanti, dov'è comune la sezione, che rappresenta la base premuta, saranno in equilibrio due fluidi eterogenei quando le altezze siano reciprocamente proporzionali alle gravità specifiche de' fluidi.

Questa è la dimostrazione diretta, e rigorosa del principio dello Stevino. La prova indiretta, che già ne ha dato il Galileo, si risolve in quella specie di riduzione all' assurdo, con cui si prova l'impossibilità del moto in due corpi uniti insieme, quando le masse fossero reciprocamente proporzionali alle velocità, che potessero concepire. Per intenderne più facilmente la forza, supponiamo che il fluido non sia ancora equilibrato salendo ne' due tubi comunicanti FBC, ABD fino alla stessa orizzontale AC, *fig.* 55., e che però concepisca qualche moto, scendendo per esempio da una parte lo strato MN in PR, e dall' altra salendo pr in mn. Perchè il fluido rimanga continuo in tutte le sue parti, bisogna che la stessa quantità che scende da una parte salga dall' altra, e sia $MNRP$ eguale a $prnm$, e che tirate per conseguenza le verticali MQ, mq sia $MN . MQ = mn . mq$. Ma nel principio del moto MQ esprime la velocità dello strato MN, che discende, ed mq la velocità dello strato mn, che sale. Dunque saranno eguali le due quantità del moto diretto contrariamente: e poichè, supposte eguali le altezze del fluido ne' due tubi, e tirandovi tanti piani orizzontali, deve aversi e in un tubo, e nell' altro un numero eguale di strati, e in ciascuno di essi devono sempre eguagliarsi le quantità del moto; anche tutta la quantità del moto nel fluido, che scende in un tubo, sarà eguale alla quantità del moto nel fluido, che sale: il che è assurdo, poichè due quantità di moto eguali, e contrarie si devono sempre distruggere.

Ne' fluidi adunque vi sono da distinguere due cose, il peso, e la pressione. Il peso è sempre in ragione composta della densità, e del volume ne' corpi fluidi, come ne' solidi: la pressione è in ragione composta della densità del fluido, che preme, della base premuta, e dell' altezza. Si fa l'esperienza del peso mettendo tutto il vaso da un lato della bilancia. Si fa l'esperienza della pressione adattando al vaso $FXZC$, *fig.* 56., una base mobile XZ, e ricercando le forze necessarie per istaccare la stessa base da XZ in xz ne' due casi del tubo vuoto, e ripieno di qualche fluido: mentre prendendo la differenza delle due forze, cioè defalcando quant'è dovuto alla frizione delle pareti interne del tubo sul contorno della base, si avrà la forza assoluta della pressione di tutto il fluido. Ed è manifesto, che sollevando la base XZ in xz uscirà dalla cima FC un volume di fluido eguale ad $XxzZ$, e che qualsivoglia strato MN si solleverà in mn per modo che sia $MmnN = XxzZ$, cioè $XZ . Oo = MN . Qq$, e però ancora $XZ : MN = Qq : Oo$. Così adunque nel caso di sollevare un poco la base, la velocità in qualunque strato sarà reciprocamente proporzionale all' am-

ampiezza, la quantità del moto sarà in ogni strato la stessa, e la quantità totale sarà come il numero degli strati, cioè come l'altezza, qualunque sia la figura del vaso, e comunque i lati convergano, o divergano, o siano paralleli.

Questo principio generale include ancora manifestamente l'altro principio, che la pressione è eguale in tutte le particelle del medesimo strato orizzontale di un fluido, e si esercita sempre egualmente per tutte le direzioni. Poichè dipendendo la forza della pressione dalla semplice altezza del fluido superiore, preso qualunque strato orizzontale, vi sarà eguale in tutt' i punti, come l'altezza del fluido, che preme, così pure la forza della pressione. E ciò può ancora dedursi dalla prima nozione del fluido. Mentre se in qualcuno degli strati paralleli, e orizzontali del fluido la pressione fosse maggiore da una parte che dall' altra, vi dovrebbe cedere il fluido, ed eccitarvisi qualche moto. Dovrebbe dirsi lo stesso se in una particella del fluido la pressione fosse maggiore per una direzione che per un' altra: e sempre il moto si farebbe da quella parte verso di cui fosse minore la forza risultante. Così la pressione in qualunque particella di fluido deve esercitarsi sempre egualmente verso qualunque direzione: e se dentro di un qualche vaso si adattasse un cannello libero, e vuoto, le particelle di fluido, che vi si affacciassero, incomincierebbero ad entrarvi con eguale velocità, qualunque fosse la direzione del cannello, orizzontale, verticale, inclinata all' insù, oppure anche all' ingiù: il che precisamente è conforme a tutte le sperienze.

Dallo stesso principio ne siegue ancora, che prendendo qualunque strato orizzontale in un vaso qualunque, la somma delle pressioni esercitate contro il perimetro sarà come il perimetro della sezione, e insieme come l'altezza del fluido superiore: e paragonando tra loro delle sezioni circolari, la proporzione delle pressioni sarà composta da quella dei diametri, e da quella delle altezze. Poichè adunque la resistenza di un filo di una data grossezza non può variarsi

variarsi per la maggiore, o minore lunghezza del filo, quando in tutti gli anelli di un tubo si vogliano proporzionare le grossezze alle forze impiegate per romperli, bisognerà che le grossezze siano come i diametri degli anelli, e come le altezze del fluido, che sostengono. Per esempio, poichè un tubo di piombo di 12 pollici di diametro, e di 6 linee di grossezza, secondo le sperienze del Parent, regge al peso d'una colonna d'acqua di 60 piedi d'altezza, in un altro tubo di 6 pollici di diametro basterà la grossezza di cinque linee per reggere a 100 piedi d'acqua. Variandosi le densità dei fluidi è manifesto che bisognerà comporre la ragione diretta delle densità istesse colle ragioni delle altezze dei fluidi, e dei diametri dei tubi: e variandosi ancora la qualità dei tubi bisognerà aggiungere la ragione inversa della tenacità, e consistenza delle materie, che li compongono. Per esempio, poichè la tenacità del rame, essendo pari tutte le altre circostanze, è 28 volte maggiore di quella del piombo, basterà per la grossezza di un tubo di rame $\frac{1}{28}$ di quella, che si ricercherebbe in un tubo di piombo. E poichè inoltre le forze assolute della coesione nel rame, e nel ferro sono tra loro prossimamente come 2 : 3, basterà in un tubo di ferro $\frac{2}{3}$ della grossezza, che si ricercherebbe nel rame.

Il Parent negli Atti dell' Accademia di Parigi del 1707, e il Belidor nel Cap. III. del Lib. III. dell' Architettura Idraulica hanno disteso la tavola delle grossezze, e dei diametri dei tubi o di piombo, o di rame, e delle corrispondenti altezze d'acqua. I principj ora esposti bastano per avere una regola in qualunque caso proposto. L'altro teorema, che vi ha aggiunto il Parent, si risolve in quell' istesso, che abbiamo generalmente, e brevemente dimostrato nel Cap. III. del Lib. II.: cioè che la forza esercitata da tutto il fluido perpendicolarmente al perimetro di ciascuno di quelli anelli, ne' quali si può intendere diviso un tubo di condotta, sta alla forza, che ne risulta secondo la tangente, e che tende a distaccare in ciascun anello direttamente una parte dall' altra, nella ragione della periferia al raggio. Mentre perchè la forza di coesione arrivi ad impedire che non si stacchi una parte direttamente dall' altra in qualunque anello circolare, secondo ciò che si è detto nel capo citato, bisogna che stia a tutta la forza perpendicolare allo stesso anello nella ragione del raggio alla periferia.

CAPO SECONDO.

Della teoria delle gravità specifiche, e dei problemi delle mescolanze delle arie fattizie, e di altri corpi.

Se nel vaso *FXZC*, ripieno di un fluido omogeneo fino all' orizzontale *FC*, *fig.* 57., si segnerà qualunque porzione *MNQ*, la somma delle pressioni di tutto il resto del fluido all' intorno sarà eguale al peso assoluto della stessa porzione *MNQ*: altrimenti si avrebbe qualche moto nel fluido se la forza, con cui essa tende a discendere, non fosse eguale alla forza, con cui il resto del fluido, compresso all' intorno, la tiene sollevata a suo luogo. E' manifesto ancora, che se la porzione istessa arrivasse a consolidarsi, conservando l' istesso ordine delle parti, e l' istesso peso di prima, nè succedendo alcun' altra mutazione in tutto il resto del fluido, rimarrebbe l' istessa forza della pressione, e il nuovo solido sarebbe in equilibrio col fluido. Ma la forza del solido per discendere è uguale al peso del fluido contenuto sotto il volume *MNQ*, e si dirige secondo la verticale *OQ* tirata dal centro di gravità *O*. Poichè adunque per qualunque mutazione, che facciasi sotto di un dato volume, accrescendovi, o scemandovi la quantità di materia, non si arriva a variare la pressione del fluido all' intorno; se un solido qualunque *MNQ* verrà immerso in un fluido, la pressione esercitata dal fluido sarà eguale al peso di quella porzione di fluido, che si

si potrebbe contenere sotto il volume *MNQ*, e si dirigerà secondo la verticale *OQ* tirata dal centro di gravità *O* della stessa porzione, considerata come omogenea a tutto il resto del fluido posto all' intorno.

Se sotto la superficie *FC* s' immergerà un solido di qualsivoglia figura *MNQ*, e se tutto il peso del solido sarà eguale al peso, che avrebbe il fluido sotto il volume istesso *MNQ*, potrà il solido restare sommerso a qualsivoglia profondità. E se di più il solido sarà omogeneo in tutte le sue parti, oppure se, essendo eterogeneo, avrà il centro di gravità nella stessa verticale *OQ*, che passerebbe per il centro di gravità della porzione di fluido *MNQ*; le due forze risultanti dal peso del solido, e dalla pressione del fluido posto all' intorno, si opporranno nella stessa verticale *OQ*: e il solido immerso conserverà immobilmente la situazione *MNQ*. Altrimenti se il centro di gravità del solido immerso, e della porzione di fluido, nel cui luogo è subentrato, non fossero nella stessa verticale *OQ*, il solido farebbe delle oscillazioni continue, nè potrebbe arrivare allo stato di quiete se non quando le forze eguali del peso, e della pressione avessero una direzione contraria.

Se si accrescerà il peso del solido, cioè se il suo peso specifico sarà maggiore del peso specifico del fluido, in cui viene a sommergersi, discenderà il solido fino al fondo del vaso, e la forza, che vi eserciterà sopra, o con cui potrebbe trattenersi dalla discesa, sarà eguale alla differenza del peso assoluto del solido, e del peso di un egual volume di fluido, al quale peso si eguaglia sempre la pressione del fluido posto all' intorno. Adunque un solido, che venga immerso in un fluido, vi perderà una porzione del proprio peso eguale al peso, che avrebbe il fluido sotto un volume eguale: e se lo stesso solido s' immergerà successivamente in diversi fluidi, le porzioni del peso perduto si eguaglieranno ai pesi di un volume eguale di ciascun fluido: cioè le gravità specifiche de' fluidi saranno tra loro come le porzioni del peso assoluto, che vi si perderanno successivamente dallo stesso solido immerso. Il teorema è semplicissimo: ma vi

 vuole

vuole tutta la diligenza di uno sperimentatore per ricavarne la tavola delle precise gravità specifiche de' fluidi. Si può essa vedere nella Lez. XII. del Desaguliers.

Se si prenderanno diversi solidi, e s'immergeranno successivamente nel medesimo fluido, le porzioni del peso perduto saranno proporzionali al volume dei solidi immersi. Ora nei solidi di un eguale peso assoluto, essendo eguali i prodotti del volume e della gravità specifica di ciascuno, sarà la gravità specifica in ragione reciproca del volume. Generalmente se il peso assoluto, la gravità specifica, e il volume si chiameranno per ordine in un corpo P, G, V, e in un altro p, g, v, sarà $P:p=GV:gv$, e però posto $P=p$, sarà $GV=gv$, e $G:g=v:V$. Se adunque si prenderanno dei solidi di egual peso, se s'immergeranno successivamente nel medesimo fluido, e si noteranno le porzioni del peso perduto; saranno esse reciprocamente proporzionali alle gravità specifiche de' solidi. Quest' altro teorema serve a determinare le gravità specifiche di quei solidi, che sono più pesanti dei fluidi, in cui s'immergono. Se sotto un egual volume il peso dell' oro sarà 100; il peso del mercurio sarà $71\frac{1}{2}$: del piombo $60\frac{1}{2}$: dell' argento $54\frac{1}{2}$: del rame $47\frac{1}{3}$: dell' ottone 45: del ferro 42: dello stagno puro $38\frac{1}{4}$: dell' acqua $5\frac{1}{3}$.

Se il peso assoluto del solido immerso sarà minore del peso del fluido sotto un egual volume, la differenza del peso del solido, e della pressione del fluido diverrà negativa, e agirà in senso contrario. Così il solido verrà sollevato alla superficie superiore del fluido insino a tanto, che vi s'immerga di quella sola porzione, sotto il di cui volume il peso del fluido si eguaglj al peso di tutto il solido. In questo caso se il centro di gravità di tutto il solido, e il centro di gravità della parte sommersa, considerata come omogenea al fluido, saranno nella stessa verticale, il corpo galleggierà immobilmente: altrimenti farà delle oscillazioni continue insino a tanto che il suo peso, e la pressione del fluido si eguaglino in una direzione contraria: cioè insino a tanto che i due centri di gravità, e del solido immerso, e del fluido smosso del proprio luogo, giacciano nella stessa verticale. I varj casi dell' immobilità, o delle oscillazioni de' corpi solidi, che s'immergono, o che galleggiano, hanno dato luogo alle ingegnose speculazioni di Archimede, e di molti illustri Geometri dell' età nostra. Tra gli altri il Sig. Bossut nel Cap. III. dell' Idrostatica ha ridotto a molta semplicità le ricerche Geometriche di questo genere. Noi quì non faremo altro che aggiugnere le analogie pratiche, che si deducono dai principj antecedenti.

I. Poichè nel caso dell' equilibrio, il peso del galleggiante deve essere eguale al peso del fluido smosso dal proprio luogo, e poichè in oltre dove si eguagliano i pesi devono i volumi proporzionarsi alle gravità specifiche reciprocamente; sarà il volume della parte sommersa al volume di tutto il solido, come la gravità specifica del solido alla gravità specifica del fluido.

II. Se un galleggiante di una data gravità specifica crescerà di volume, e in conseguenza ancora di peso, crescerà nella stessa ragione e il peso, e il volume del fluido, che deve cedere di luogo al solido acciò vi galleggi: cioè nei solidi di un' eguale gravità specifica i volumi delle parti sommerse nello stesso fluido saranno proporzionali ai volumi interi dei solidi.

III. Se si prenderanno dei solidi di egual volume, e di differente gravità specifica, e s'immergeranno successivamente nello stesso fluido, il volume della parte sommersa sarà in ciascun solido proporzionale alla gravità specifica.

La teoria delle gravità specifiche fu ritrovata già da Archimede coll' occasione del celebre problema, propostogli dal Re Jerone, di ritrovare la quantità dell' argento mescolato coll' oro, dato

dato il peso assoluto, e la gravità specifica di tutto il misto, e date le gravità specifiche dell' oro, e dell' argento. Supponendo che il volume del misto si eguagliasse alla somma dei due volumi, che si mischiano insieme, il problema si scioglierebbe generalmente in questo modo. Sia il peso del misto A, la gravità specifica a, il volume $\frac{A}{a}$: il peso di una delle due quantità, che si mischiano, X, la gravità specifica b, il volume $\frac{X}{b}$: il peso dell' altra quantità $A-X$, la gravità specifica c, il volume $\frac{A-X}{c}$. Posto che sia

$\frac{A-X}{c}+\frac{X}{b}=\frac{A}{a}$, si troverà

$$X=\frac{bA}{b-c}\left(1-\frac{c}{a}\right).$$

Per esempio ponendo $b:c=100:54\frac{1}{2}=19:10\frac{1}{3}$, ch' è la proporzione delle gravità specifiche dell' oro, e dell' argento, e ponendo in oltre che la gravità specifica dell' oro b fosse alla gravità specifica della corona del Re Jerone come $19:17$, si troverebbe $X=\frac{190}{221}.A$: e ponendo in fine che il peso A della corona fosse di libbre 5, sarebbe il peso dell' oro X di libbre $4\frac{66}{221}$, e dell' argento $A-X$ di $\frac{155}{221}$.

Nelle premesse supposizioni sarebbe questa la soluzione Idrostatica del problema: ma non sarebbe già la soluzione Fisica, e Chimica. L' oro, e l' argento mescolandosi insieme, crescono di volume. Il Sig. Hanh nella sua bella Dissertazione sull' efficacia delle mescolanze nel mutare i volumi dei corpi, con replicate sperienze si assicurò che presi 136 grani d' oro, ed altrettanti di argento, e fusi, e mescolati insieme, l' accrescimento del volume era $\frac{1}{56}$ della somma dei due volumi separati. Ponendo adunque generalmente che il volume $\frac{A}{a}$ di tutto il misto sia maggiore, o minore della somma dei due volumi separati, e che la gravità specifica diventi minore, o maggiore di quella che si avrebbe senza la variazione dei volumi, restando le altre denominazioni di prima, e prese per m, ed n due quantità costanti; saranno le equazioni corrette del problema

$$\frac{A-X}{c}+\frac{X}{b}=\frac{A}{a\mp n}.\left(1\mp m\right),$$

$$X=\frac{bA}{b-c}\left(1-\frac{c\pm cm}{a\mp n}\right),$$ e poste le quantità m, ed n assai picciole sarebbe $X=\frac{bA}{b-c}\left(1-\frac{c}{a}\pm\frac{cm}{a}\mp\frac{cn}{a^2}\right)$.

Prendendo adunque il segno superiore, cioè supponendo che colla mescolanza dell' oro, e dell' argento si abbia qualche accrescimento di volume, e qualche diminuzione della gravità specifica di tutto il misto; la quantità X dell' oro mescolato si troverebbe maggiore di quella che potrebbe corrispondere all' ipotesi dell' eguaglianza dei volumi: e così il calcolo di Archimede faceva comparire maggiore la frode dell' artefice di Siracusa.

Il celebre Sig. Hanh nella Dissertazione indicata ha esposto sotto di un altro aspetto l' analisi di questo problema, ed ha pubblicato una lunga serie di belle, ed interessanti esperienze intorno all' accrescimento, ed alla diminuzione del volume, che si ha in diverse mescolanze. Per esempio prendendo 200 grani di piombo, e di mercurio, si è ritrovata nel misto una diminuzione di volume di circa $\frac{1}{65}$: in 200 grani di stagno, e di mercurio la diminuzione del volume era di $\frac{1}{10}$: e in 135 grani di rame, e 1350 di stagno

gno di $\frac{1}{68}$. In 200 grani di ftagno, e di piombo non fi è riconofciuta alcuna variazione fenfibile. L'eguaglianza dei volumi avanti, e dopo la mefcolanza fi è pure ritrovata nell' acqua, e nell' alcohol, e in alcuni altri cafi. Nella maggior parte delle mefcolanze s' è ritrovata della condenfazione, ed in alcuni della rarefazione. Un cafo particolare di tutte quefte ricerche è ftato pofteriormente confiderato dal Sig. Prieftley, e da alcuni altri celebri Fifici, che fi ha una diminuzione fenfibile di volume mefcolando l'aria comune con quella fpecie d'aria fattizia, che fi leva dai metalli fcioglien-doli collo fpirito di ~~vitriolo, o collo fpirito~~ di ~~fal~~ nitro ~~marino~~, e che fuole comunemente chiamarfi aria nitrofa. Per efempio prendendo $\frac{2}{3}$ d'aria comune, ed $\frac{1}{3}$ d'aria nitrofa, dopo una piccola effervefcenza il volume dell' aria mifta, ed equilibrata col refto dell' atmosfera non era che di $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$. L'aria così mefcolata era ancora fpecificamente più leggiera dell' aria comune. Ma ficcome la leggierezza della fola aria nitrofa è tanto grande, che arriva a circa $\frac{1}{10}$ di quella dell' aria comune, fi vede fubito la ragione di tutto il fenomeno: cioè che dovendofi diminuire colla mefcolanza dell' aria comune l'attività, e l'elafticità del vapore, che fi ottiene coll' indicata foluzione dei metalli, devono proporzionatamente contrarfi le dimenfioni dell' aria mefcolata per ritornare in equilibrio col refto dell' aria femplice, e comune.

Il Sig. Prieftley ha portato più avanti le offervazioni di quefto genere, ed avendo riconofciuto con altre fperienze che l'aria comune è tanto più atta per la refpirazione quanto meno abbonda di flogiftico, e quanto più può riceverne dall' aria nitrofa, o da altri corpi che ne abbondano maggiormente, s'immaginò che la refpirabilità, e la falubrità della prima fi poteffe mifurare dal maggiore affor-

fforbimento della feconda, e dalla diminuzione dei volumi uniti infieme. Nello Scol. III. del Cap. I. del Lib. V. della Par. II. della Cofmografia, ho indicato come fi poteffe ridurre alla maggiore femplicità l'apparecchio di Prieftley per mifurare i diverfi gradi di quefta diminuzione: cioè di fervirfi di un barometro d'una capacità conofciuta, e d'infondervi dalla parte inferiore con due boccette curve, ifteffamente di una data capacità, le due quantità d'aria comune, e nitrofa, che fi hanno da mefcolare infieme nella parte fuperiore. Ho ancora efpofto la formola Geometrica, con cui dalle differenti altezze del mercurio fi potrebbe calcolare la diminuzione del volume dell' aria, a cui nelle indicate fuppofizioni dovrebbe corrifpondere il grado della falubrità. Ma nello fteffo tempo mi fono dichiarato che non aveva ancora ripetute da me medefimo le fperienze di Prieftley, e che non pretendeva di far altro in quel luogo che di analizzarle, e di portarvi la Geometria. Dopo d'allora avendo avuto tempo di riconofcerle, mi fono fubito accorto che quefto puramente è un problema di chimica curiofità. L'aria nitrofa, e così pure l'aria chiamata fiffa, acida, alcalina, infiammabile, non è altro che l'aria comune mefcolata colle diverfe efalazioni dei corpi, dai quali, e coi quali fi eftrae. Le piccole fperienze di tutte quefte arie fattizie, e preparate artificialmente nelle bocce, non fi poffono mai trasferire allo ftato naturale dell' atmosfera: e fopra tutto non è mai da immaginarfi che tutta l'aria attorniata al globo terracqueo fino all' altezza di più di 47 miglia fi fia mai potuta formare colle femplici efalazioni delle acque, dei vulcani, e delle materie putrefatte. La refpirabilità, e la falubrità dell' aria atmosferica dipenderà fempre dai gradi della leggerezza, e del pefo, del caldo, e del freddo, dell' umido, e del fecco, che fi riconofcono col Barometro, col Termometro, e coll' Igrometro, e dalla ventilazione, che dipende dalla Topografia fifica dei luoghi.

Ciò non oftante fe qualcuno defideraffe di avere fott' occhio la formola, che fecondo l'ipotefi del Sig. Prieftley, dovrebbe fervire per calcolare i gradi della ſalubrità dell' aria, biſognerebbe incominciare da un altro problema Barometrico. Sia A la lunghezza del Barometro, e C l'altezza del mercurio ſoſpeſo ed equilibrato colla colonna d'aria, che vi corriſponde al di fuori. Vi s'infonda quella quantità d'aria, che nello ſtato naturale baſti per occupare la lunghezza del tubo B, e ſi ricerchi l'altezza D, a cui deve ridurſi il mercurio. Il volume B d'aria ſi ſpanderà per tutto lo ſpazio $A-D$: e poichè le forze elaſtiche ſono reciprocamente come i volumi, e la forza dell' aria nello ſtato naturale ſi eguaglia a tutto il peſo C del mercurio equilibrato, e ſoſpeſo; ſarà $\frac{B}{A-D}\cdot C$ la forza dell' aria intruſa, e ridotta al volume $A-D$. E poichè in oltre la forza dell' aria intruſa deve eguagliarſi alla differenza $C-D$ delle altezze del mercurio, ſi avrà l'equazione

$C-D=\frac{B}{A-D}\cdot C$, oſſia $B=(A-D)\left(\frac{C-D}{C}\right)$: donde ſi caverà

$$D=\frac{1}{2}\left(A+C-\sqrt{(A-C)^2+4BC}\right).$$

Ciò poſto ſe B eſprimerà la ſomma dei due volumi delle due ſpecie d'aria da meſcolarſi, ed E la diminuzione del volume, che ſe ne fa colla meſcolanza, e ſe ſarà F la differenza delle altezze del mercurio, che corriſponde a quella diminuzione di volume; mentre il volume B ſi riduce a $B-E$, e l'altezza D a $D-F$, la ſeconda delle tre eſpoſte equazioni ſi convertirà in queſt' altra

$B-E=(A-D-F)\left(\frac{C-D-F}{C}\right)$: donde ſi caverà

$$E=\frac{F}{C}\left(C+A-2D-F\right)=\frac{F}{C}\left(\sqrt{(A-C)^2+4BC}-F\right).$$

Per applicare la ſteſſa formola al caſo delle ſperienze, ſupponiamo che ſi prenda un tubo di 30 pollici d'altezza, e che, levata l'aria, vi ſi ſollevi il mercurio all' altezza di pollici 28. Supponiamo in oltre che il volume delle due arie ſeparate ſi eguaglj alla capacità inter-

interna del tubo, e che dopo la meſcolanza ſi riduca a $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$, oſſia a $\frac{17}{21}$ di prima. Sarà $A=30$, $C=28$, e $B=30\times\frac{17}{21}$, e fatte le ſoſtituzioni ſi troverà l'altezza D di 3 pollici. Ma ſe ſi ſupponeſſe che dopo la meſcolanza ſi riduceſſe tutto il volume dell' aria a $\frac{19}{21}$, poſto $B=30\times\frac{19}{21}$, e ritenuti gli altri numeri, ſi troverebbe $D=1\frac{1}{2}$ proſſimamente. Ma ſe l'eſperienza ſi faceſſe nell' acqua collo ſteſſo tubo, dovendo eſſere l'altezza C di piedi 32, e prendendoſi A di piedi $2\frac{1}{2}$, nella prima ſuppoſizione che il volume ſi diminuiſca per la meſcolanza in ragione di $17:21$, ſi troverebbe l'altezza D di circa pollici $5\frac{1}{2}$: e nella ſeconda ſuppoſizione che ſi diminuiſca in ragione di $19:21$, ſi troverebbe D di circa 3 pollici. La ſteſſa formola ſi può ancora applicare alla miſura delle diverſe quantità dell' aria chiamata fiſſa, che può eſſere aſſorbita dall' acqua con altrettanta diminuzione del volume dell' aria reſidua nel tubo. Per eſempio ſe lo ſteſſo tubo di 30 pollici d'altezza ſi riempiſſe d'aria, e da una parte s'immergeſſe nell' acqua, e l'aria fiſſa aſſorbita dall' acqua arrivaſſe a $\frac{2}{21}$ del volume dell' aria intera, dovrebbe l'acqua ſollevarſi nel tubo all' altezza di circa 3 pollici.

Dal paragone, e dall' applicazione della prima formola è manifeſto in primo luogo, che quando le altezze o del mercurio, o dell' acqua ſono aſſai piccole, reſtano proſſimamente proporzionali ai diverſi gradi di diminuzione del volume dell' aria. Ma dalla ſeconda formola appariſce ancora che quando la differenza F delle altezze non ſi può traſcurare riſpetto a B, e C, eſſa non ſegue più la proporzione della diminuzione E del volume. In oltre è ma-

manifesto, che nelle già fatte ipotesi, ossia nelle stesse ipotesi delle sperienze ordinarie, le differenze delle altezze sono assai sensibili nel mercurio, e che nell' acqua riescono di circa il doppio. Ma siccome tutte le differenze sono di circa 3, e di 6 pollici, e inoltre l'aria esteriore trova un passaggio molto più libero attraverso agl' interstizj dell' acqua, ed ogni piccola porzione che se ne introducesse nel tubo turberebbe sensibilmente l'esito delle sperienze, è manifesto che nell' acqua non si possono esse portare a quella diligenza, che si potrebbe ottenere nel mercurio. Avrei molte altre riflessioni da fare sulle due formole esposte, se non riguardassi questo genere di sperienze, come cosa di sterile curiosità. Onde in vece passerò adesso a spiegare gli altri usi importanti, e sicuri, che l'Idrostatica, e ancora tutta la Geodesia può ricavare dai Barometri.

CAPO TERZO.

Dell' equilibrio dell' aria, e del mercurio, e del metodo di misurare le maggiori elevazioni dei luoghi.

ERa già conosciuto fino ai tempi di Ctebisio il fenomeno, che nelle trombe aspiranti l'acqua può sollevarsi fino all' altezza di circa 32 piedi. Il Galileo non ragionò bastantemente sopra un fenomeno così semplice, e il Torricelli fu il primo ad indicare ch' esso dovevasi al peso, e alla pressione dell' atmosfera, e ne semplificò l'esperienza sostituendo all' acqua il mercurio, e un cannello di vetro alle trombe Ctebisiane. La proporzione delle gravità specifiche del mercurio, e dell' acqua, secondo alcune sperienze del Musschenbroek, è di 13.593 : 1, quella dell' acqua, e dell' aria di 1 : 0.00125, ossia di 800 : 1, e però la gravità specifica del mercurio è alla gravità specifica dell' aria come 10874 : 1. Riguardando adunque il mercurio sospeso nel barometro, l'acqua innalzata nelle trombe, e la colonna d'aria corrispondente come tre fluidi eterogenei, comunicanti tra loro, ed equilibrati, all' altezza ordinaria del mercurio so-

speso nei barometri di pollici 28, ossia di piedi $2\frac{1}{3}$ di Parigi, dovrebbero corrispondere piedi 31.7 d'acqua, e piedi $25372\frac{2}{3}$ d'aria omogenea a quella, ch' è immediatamente in contatto colla superficie dell' acqua, o del mercurio. Secondo alcune altre sperienze del Musschenbroek la proporzione delle gravità specifiche del mercurio, e dell' aria sarebbe quella di 11200 : 1, e secondo le sperienze del Cotes di 11900. Nel primo caso l'altezza della colonna d'aria considerata dappertutto come omogenea, ed equilibrata con piedi $2\frac{1}{3}$ di mercurio, dovrebb' essere di piedi $26133\frac{1}{3}$, e nel secondo di $27433\frac{1}{3}$.

Le particolarità di questo fenomeno hanno dato occasione a molte dispute, e a molti errori: l'eguaglianza delle altezze del mercurio ne' luoghi aperti e chiusi: l'abbassamento, che si osserva ordinariamente ne' tempi piovosi, e l'innalzamento a cielo sereno: la successiva diminuzione delle altezze medesime, che si ha nelle maggiori elevazioni sopra la superficie della terra. Alcuni credettero di soddisfare alle due prime osservazioni, attribuendo la sospensione del mercurio alla semplice elasticità dell' aria, che in un dato tempo dev' essere di un' egual forza ne' luoghi aperti e chiusi, e che deve diminuirsi ne' tempi piovosi, ed umidi. Altri pensarono ad altre ipotesi, ed alcuni dubitarono ancora che se ne potesse rendere ragione alcuna. Ma secondo i principj già esposti la pressione dei fluidi non dipende nè dalla elasticità, nè dal peso assoluto delle parti che premono. Dipende dalla gravità specifica, dalla base, e dall' altezza della colonna premente, e si esercita sempre egualmente verso qualunque parte, e secondo qualunque linea e retta, e obbliqua. Per questo l'altezza del mercurio è la stessa ne' luoghi aperti, e chiusi, e sarebbe ancora la stessa se, restando la gravità spefpecifica, e l'altezza dell' aria, vi fi toglieffe l'elafticità. Perchè poi le efalazioni terreftri, e i vapori umidi, e acquofi ricadano in pioggia, neceffariamente fi deve avere qualche rarefazione nell' aria, e qualche diminuzione della gravità fpecifica, e della preffione. Così adunque il dimandare perchè il mercurio fi abbaffi ne' tempi piovofi farà lo fteffo che il dimandare la ragione generale della pioggia. E bifogna ben avvertire, che il pefo di tutt' i vapori, fciolti in una pioggia anche grande, è troppo piccola cofa, perchè aggiunto, o levato al pefo della colonna d'aria corrifponda alle variazioni dei barometri. La variazione in poche ore qualche volta è di un pollice, e anche più: e un pollice di mercurio corrifponde a pollici $13\frac{3}{5}$ d'acqua: ch' è circa la metà di quella che può ricadere in un anno intero.

La teoria delle variazioni, che corrifpondono alle varie diftanze dal centro, è ftata ampiamente trattata ful fine della Par. II. della Cofmografia. Si è fciolto il problema in tutta la fua generalità: fi è fatta fvanire dalle formole analitiche qualunque fpecie di paradoffo: e nell' applicazione fifica fi è fatto vedere che il calcolo fi accorda proffimamente con tutte le offervazioni, che abbiamo, intorno all' altezza delle montagne, almeno dentro i limiti dell' efattezza, con cui fi conofce la proporzione delle gravità fpecifiche dell' aria, e del mercurio. Si è particolarmente parlato delle offervazioni del Sig. de Luc, e fi è dimoftrato che dalle altre offervazioni di Padova non può ricavarfi alcuna prova dell' influenza della Luna nei barometri. Ora per prefentare fotto un punto di vifta più femplice tutto ciò che appartiene all' attuale mifura delle altezze, ripiglieremo il teorema di Newton, che falendo per eguali intervalli fopra la fuperficie della terra, cioè facendo crefcere le altezze in proporzione Aritmetica, le denfità dell' aria devono fcemare in proporzione Geometrica.

Sia A il centro, ed AF il raggio della terra, *fig.* 58., e fopra

pra di effa fi prendano degl' intervalli eguali, e affai piccoli CD, DE, ec. Per l'eguaglianza dei volumi faranno le maffe proporzionali alle denfità: e però, fupponendo la gravità coftante, farà il pefo dell' aria contenuta fotto il volume CD al pefo contenuto fotto il volume DE come la denfità in C alla denfità in D. Ma fecondo le fperienze del Mariotte, e di molti altri le denfità dell' aria fono proporzionali ai pefi, che s' impiegano nel comprimerla. Dunque il pefo del volume CD farà al pefo del volume DE come tutto il pefo fuperiore al punto C a tutto il pefo fuperiore al punto D. Dunque l'accrefcimento del pefo in ciafcuno degli eguali intervalli farà proporzionale a tutto il pefo della colonna d'aria che preme, e l'accrefcimento della denfità farà proporzionale alla denfità intera: ch' è quanto dire che le denfità formeranno una progreffione geometrica.

Ora le denfità, e le preffioni dell' atmosfera, e le altezze del mercurio fofpefo, ed equilibrato nei barometri, devono fempre variarfi nella proporzione medefima. Pofto adunque che le altezze dell' atmosfera venendo fino alla fuperficie della terra formino una progreffione aritmetica, le altezze corrifpondenti del mercurio nei barometri formeranno una progreffione geometrica: cioè le altezze dell' atmosfera faranno i logaritmi delle altezze del mercurio nei barometri. Suppofto adunque che FO fia tutta l'altezza dell' atmosfera, B l'altezza del mercurio nella fuperficie della terra F, e b l'altezza del mercurio nel luogo E, farà FO il logaritmo di B, ed EO il logaritmo di b: e prefa per C una quantità coftante, farà $FO = C.\ \log. B$, $EO = C.\ \log. b$, $FO - EO = FE = C.\ \log. B - C.\ \log. b = C.\ \log. \frac{B}{b}$. Così tutta la difficoltà del problema fi ridurrà a determinare la quantità C, e quando quefta fia conofciuta una volta, mifurando nello fteffo tempo l'altezza del mercurio nella fuperficie della terra, e in qualunque luogo propofto, fe ne potrà calcolare l'elevazione.

Nella

segnate dunque le progressioni aritmetiche le porzioni CD, DE che colonne d'aria [illegible] saranno CO · CD, CE · CO [illegible] li logaritmi [illegible] per la quantità costante. Si supponga che le porzioni segnate siano 1, 2, 3, 4, 5, 6 si chiamino e le densità facendo una progressione geometrica saranno a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 onde l'altezza D sarà per esempio il log. della densità del [illegible] onde supposta B l'altezza del mercurio in F sarà FO = quantità costante [illegible] per il logaritmo di B il quale dovrà [illegible]

Nella Par. II. della Cosmografia, procedendo per un metodo differente, s'è ritrovato che la costante C si eguaglia all' altezza della colonna d'aria omogenea, che farebbe equilibrio col mercurio sospeso nel barometro, moltiplicata per 100000000, e divisa per 43429448. Per esempio nelle osservazioni del celebre Sig. Bouguer presa l'altezza del mercurio a livello del mare nel Perù di pollici 28, e una linea, ossia di linee 337, e sulla cima del monte Pichincha di linee 191, sarebbe log. $337 = 2.5276299$, log. $191 = 2.2810334$, log. $\frac{337}{191} = 0.2466$. Onde posto che le gravità specifiche dell' aria, e del mercurio siano tra loro come 1 : 10874, sarebbe l'altezza dell' aria omogenea al livello del mare di tese parigine 4241, e l'altezza del monte di tese 2409: e presa la proporzione di 1 : 11200, sarebbe l'altezza del monte di tese 2481: tra i quali numeri è quasi di mezzo l'altezza di tese 2435, che il Sig. Bouguer ha ritrovato colle osservazioni trigonometriche.

Ma per questo appunto che l'esattezza del calcolo dipende dal conoscere esattamente la proporzione delle gravità specifiche dell' aria, e del mercurio nel tempo, e nel luogo dato, proporzione che variasi secondo i diversi gradi del barometro, e del termometro, e che ricerca sempre delle sperienze delicate, e difficili per essere verificata; in vece io proporrei di aggiugnere alle due osservazioni ordinarie dell' altezza del mercurio nella superficie della terra, e nel luogo da riconoscersi, una terza osservazione dell' altezza del mercurio in qualche luogo di un' elevazione già conosciuta. Il confronto della prima, e della terza osservazione darebbe a dirittura la quantità costante del problema, e così col confronto della prima e della seconda si troverebbe l'elevazione del luogo da riconoscersi. Il caso più semplice sarebbe, che essendo l'altezza del mercurio alla superficie della terra di pollici 29, ossia di linee 348, per avere una linea di meno bisognasse salire col barometro all' altezza di ~~[illegible]~~ 12.497, come nella sperienza, che ha fatto il Sig. de Luc. Poichè essendo log. $348 = 2.5415792$, log. $347 = 2.5403295$, log. $\frac{348}{347} = 0.0012497$, la quantità costante C sarebbe 10000. In questo caso adunque prendendo la differenza del primo logaritmo, e di quello che corrisponderebbe a qualunque altro luogo, e moltiplicandola per 10000, si avrebbe il numero de' piedi dell' elevazione ricercata.

Alla stessa maniera in qualunque altro caso con tre semplici osservazioni si potrebbe determinare, e la quantità costante del problema, e l'altezza da riconoscersi, senza che vi sia bisogno o di fare qualch' altro esperimento intorno alla proporzione delle gravità specifiche dell' aria, e del mercurio, o di ricorrere alle altre regole empiriche del Sig. de Luc. Ed io sono persuaso, che quando si abbiano tre barometri ben preparati, e le tre osservazioni si facciano attentamente, si potrà in questa maniera arrivare ad una esattezza molto maggiore di quella che si avrebbe colle ordinarie operazioni trigonometriche, dove la refrazione, e gli errori commessi, o nella positura del quadrante, o nella misura degli angoli possono portare delle differenze assai più considerabili. Nelle altezze non molto grandi senza grande errore potrà supporsi che l'abbassamento di una* linea nel barometro corrisponda all' altezza di piedi $12\frac{1}{2}$ di Parigi, che sono braccia 6, e once 10 di Milano.

CAPO QUARTO.

Dell' equilibrio dell' acqua, delle linee del livello vero, ed apparente, e dei difetti delle livellazioni ordinarie.

LA parte più sublime dell' Idrostatica, la teoria dell' equilibrio de' fluidi, che attorniano il nostro globo, è già stata ampiapiamente trattata nel Lib. II., e V. della Par. II. della Cosmografia. Si è bastantemente provato che la figura, a cui si conformano i mari, e a cui prossimamente si ridurrebbe tutta la terra se fosse fluida, è quella di una sferoide: e che il raggio dell' equatore si può supporre di 3280108 tese parigine, e il semiasse minore, che passa per i poli, di tese 3265909. Ma poichè la differenza dei due semiassi non è maggiore di $\frac{1}{231}$, per tutti gli usi idrostatici, nelle distanze non molto grandi, si potrà supporre che la superficie della terra sia sferica, e che il raggio mediocre sia di circa tese 3273000, un poco minore di quanto lo avevano valutato il Picart, e il Mariotte ne' loro trattati sulla livellazione. E poichè la tesa è di 6 piedi, e il piede di Parigi sta al braccio di Milano assai prossimamente come $6:11$, il ~~semi~~diametro della terra si potrà valutare di braccia 21423234, che fanno in circa 7141 delle nostre miglia.

Adunque la linea dell' equilibrio, che può tirarsi dal punto F al punto Q, *fig. 59.*, è l' arco FQ del circolo massimo FQR, che passa per il centro della terra A. Quest' arco è quello che chiamasi l' orizzontale vera, o la linea del vero livello del punto F, e nelle piccole distanze si confonde colla tangente FN, che chiamasi l' orizzontale apparente. Ma rigorosamente parlando s' ingannerebbe chi traguardando dal punto F al punto N per una linea perpendicolare alla direzione della gravità FA, credesse che i punti F, ed N fossero di livello. La deviazione NQ dell' orizzonte vero dall' apparente si potrà calcolare facilmente: poichè essendo $FN^2 = NQ.NR$, trascurando il quadrato di NQ per la sua piccolezza, si potrà supporre $NQ = \frac{FN^2}{2QA}$: e prendendo il raggio QA come sopra, e supponendo la distanza FN di 1000 braccia, si troverà la differenza NQ di punti 6.72. E poichè in oltre si ha sempre $NQ:MP = FN^2:FM^2$, nelle distanze o maggiori, o minori la differenza dei due livelli si dovrà accrescere, o diminuire in ragione

gione duplicata delle distanze medesime: e così per esempio nella distanza di 2000 braccia la differenza sarà di once 2, e punti 2.88, e nella distanza di braccia 500 sarà solamente di punti 1.68.

Questa è la semplice regola, ch' io sostituirei alla tavola del Sig. Picart per ritrovare in qualunque caso le differenze del vero livello, e dell' apparente: cioè di prendere $\frac{1}{1000}$ del numero delle braccia di qualunque distanza proposta, farne il quadrato, e moltiplicarlo per 6 punti, e $\frac{72}{100}$. Alla stessa maniera si potrà calcolare la differenza dell' elevazione dei punti M, ed N. Ma se le altezze MP, NQ, e la differenza $NQ - MP$ fosse assai grande, l' esattezza del calcolo richiederebbe che vi si tenesse conto ancora delle refrazioni. E poichè la refrazione dipende dalla densità dell' aria, dai gradi di calore, e di freddo, e da altre cause accidentali, nel caso delle distanze disuguali sarebbe sempre imbarazzato, e meno preciso il calcolo delle altezze. Nelle grandi livellazioni si ha sempre una maniera assai facile di ritrovare i punti, che sono di livello, indipendentemente da tutte le correzioni di questo genere. Poichè traguardando a diritta, e a sinistra nella direzione perpendicolare al raggio FA, e prendendo le distanze eguali FN, Fn, egli è certo che nei punti N, ed n le elevazioni sopra la superficie sferica della terra, le quantità delle refrazioni, e le distanze dal centro saranno eguali, e che però gl' istessi punti N, ed n saranno rigorosamente di livello.

Se da un luogo dato a qualunque altro luogo proposto si potesse tirare un canale d' acqua, o di qualche altro fluido, e si potesse ridurre ad essere stagnante, si avrebbero tutt' i punti di livello, e si potrebbero misurare più facilmente le differenti altezze degli altri punti, rapportandole alla superficie del fluido. Questa è la livellazione della natura, ed è il riscontro sicuro, e indubitato delle altre livellazioni artificiali. La superficie dei laghi, che siano

P 2 anche

anche un poco agitati dal vento, o da altre cause accidentali, può servire allo stesso intento, quando si possa prendere un medio tra le altezze di tutte le oscillazioni. A me una volta è riuscito di livellare ad acqua assolutamente stagnante un tratto di più di mille braccia. Ma siccome nei tratti assai lunghi è troppo difficile di tirare dei canali, in cui l'acqua riducasi ad essere stagnante, il primo compenso, che l'arte vi ha ritrovato, sino dalle più antiche epoche dell' Idrostatica, è stato quello di replicare l'operazione, o con tanti canali successivi, o colla traspostzione dei medesimi tubi comunicanti.

Vitruvio nel Cap. VI. del Lib. IV. ci descrisse la pratica de' suoi tempi, scrivendo, che si livellava, o col traguardo, o col livello d'acqua, o meno fallacemente col corobate. Chiamavasi corobate un regolo lungo in circa venti piedi, che aveva all' estremità due braccia incastrate ad angolo retto, e tra le due braccia aveva pure pendenti diversi fili, e inferiormente ad essi dei piombi. Con alcune linee tirate in un altro regolo, posto al disotto, riconoscevano gli antichi se i fili pendevano ad angolo retto dal primo regolo, e se esso era per conseguenza orizzontale. Ma perchè il vento poteva alterare la posizione verticale dei fili, solevano gli antichi assicurarsi con qualche previa osservazione, che il regolo inferiore fosse esattamente parallelo al superiore, e poi versando dell' acqua in un canaletto scavato nel regolo inferiore per la lunghezza di cinque piedi, e procurando che l'acqua ne toccasse esattamente i due margini, riducevano il regolo superiore, e l'inferiore ad essere paralleli all' orizzonte.

Ma la difficoltà di trasportare, o di connettere insieme più corobati, di traguardarvi al lungo della superficie senz' alcun' altra guida dell' occhio nudo, e in oltre di giudicare quando l'acqua riempisse dappertutto il canaletto escavato nel legno, doveva necessariamente dar luogo a degli errori considerabili. Però non è meraviglia che anticamente siano riuscite male delle intraprese ancora grandiose per il solo difetto della livellazione. Così racconta Tacito nel Lib. XII. degli Annali, che volendo l'Imperatore Claudio, con un taglio del Monte, asciugare il Lago di Celano, aprendovi un emmissario nel fiume Garigliano, finita l'opera l'emmissario non si trovò sprofondato abbastanza per dare esito alle acque. Ed essendosi aperto in seguito uno scavo maggiore, e più profondo, le acque ne uscirono con tant' impeto, che strapparono i fondamenti del ponte, e rovinarono le case vicine, con pericolo dell' Imperadrice Agrippina, che accusò poi d'imperizia, e di frode l'Architetto Narcisso.

Il Riccioli nel Cap. VI. del Lib. VI. dell' Astronomia Riformata, ed il Leupold nella Par. IV. del Teatro Statico ci descrissero alcuni altri livelli antichi, e tra tutti raccomandò il Riccioli l'uso del livello a fluidi colorati. Esso consiste in un lungo tubo di ottone, dalle cui estremità sorgono due bocce di vetro, che finiscono superiormente in due piccioli cannelli, e che, comunicando interiormente tra loro, si riempiono fino alla cima, o di vino, o di qualch' altro fluido colorato, in cui la superficie si possa distinguere più facilmente. Non occorre quì di descrivere più minutamente un istrumento, ch' è dappertutto assai conosciuto. In altri paesi si cerca di fissar meglio la visuale colle diottre, che consistono o in due piccoli fori circolari, o in due fori più grandi, nel cui centro si taglino ad angolo retto due fili: e i fori si fanno in due lastre sottili di metallo, adattate esteriormente ai due cannelli di vetro in maniera che il centro dei fori resti egualmente lontano dalla superficie del fluido. Tra di noi si traguarda d'ordinario radendo col raggio visuale, esteriormente ai cannelli, la superficie del fluido: e si traguarda alla distanza di circa 75 braccia per parte. La facilità di maneggiare questa sorte d'istrumenti, e di avervi segnati naturalmente i punti di livello coll' equilibrio di un solo fluido, impone anche al giorno d'oggi ad alcuni, che non hanno avvedutezza bastante per conoscere l'illusione, che vi può essere.

Ep-

Eppure in tutt' i paesi si citano degli esempj di errori assai grossolani, che si sono commessi servendosi di questa sorte di livelli. Si è avuto un caso di questa sorte nella livellazione fatta nel Pò di Primaro coi livelli ordinarj nel 1757: mentre la caduta totale in dieci miglia, dal luogo del Morgone alla Bastia, è risultata allora maggiore di circa la metà di quella, che si è veramente ritrovata coi livelli a cannocchiale l'anno 1761. Ed io potrei aggiugnere un altro sicuro esempio di una livellazione da me fatta col livello Ugeniano, nel tratto di miglia 19, dove ho ritrovato la caduta di braccia 91, in vece delle 65, che prima eransi ritrovate colle altre pratiche volgari. Generalmente sarà un caso ben singolare se si accorderanno prossimamente i resultati delle livellazioni ripetute nello stesso tratto, e collo stesso livello d'acqua, o di qualch' altro fluido colorato. E nella stessa battuta di livello, traguardando ad una distanza anche minore di braccia 75, due livellatori rare volte si troveranno d'accordo sulla linea del traguardo, e vi potrà spesso correre la differenza di una mezz' oncia, e anche più. Questo fatto, che facilmeute può essere verificato, fa in oltre sentire, che se qualche volta riescono bastantemente esatte simili livellazioni, ciò dev' essere per la sola combinazione, che gli errori positivi, e negativi arrivino a compensarsi, e che lo sbaglio sia alternativamente in più, e in meno. Ma poichè le battute non si possono portare molto al di là delle 80 braccia, verrà a moltiplicarsi tanto, e complicarsi l'operazione nei tratti di molte miglia, che il compenso degli errori riuscirà più difficile: e se per qualche casualità gli errori si combinassero nel medesimo senso, come negli esempj già addotti, si avranno delle differenze tali da sconcertare tutte le operazioni, che conseguentemente s'intraprendessero.

La Fisica, e l'Ottica c'insegnano quanti elementi concorrano a fare che la visuale tirata sull' orlo delle due superficie del fluido non sia una linea retta. Le due superficie non sono piane, ma sono con-

convesse nel mercurio, e concave negli altri fluidi, che s'attaccano alle pareti interne del vetro: la concavità dell' acqua, del vino, e degli altri liquori colorati è sensibile, ed è sensibilmente diversa in diversi tubi: l'orlo superiore termina sempre in un sottilissimo anello, e il luogo, a cui si riferisce nella superficie esteriore del vetro, dipende dalle varie refrazioni, che vi ha la luce, e nell' entrare, e nell' uscire. Così il raggio visuale non si regolerebbe su due superficie piane, ma concave, se si tenesse in mezzo ai due tubi: e se si portasse di fianco, vi si dovrebbe variamente piegare, entrando, uscendo, e ancora passando vicino al vetro. Finalmente è sempre incerta la stima dell' occhio nudo, ed ognuno se ne può accertare da se medesimo, prendendo una laminetta piana, e ben liscia, ed esaminando se sia possibile di determinare, anche alla distanza di 15, e 20 braccia, in qual punto del muro opposto vada a finire la visuale regolata sul piano della laminetta medesima. Queste generali considerazioni, i frequenti errori delle livellazioni ad occhio nudo, la difficoltà, e l'imbarazzo di continuarle nel tratto di molte miglia, e l'impossibilità di stenderle attraverso ai marazzi, e ad altri luoghi non accessibili, ha fatto rinunziare alle supposte facilità di tutt' i livelli di questo genere.

CAPO QUINTO.

Della scielta, e della rettificazione dei livelli a cannocchiale.

L' Huygens, ed il Picart sono stati i primi a portare nelle operazioni Geodetiche la stessa precisione delle Astronomiche, rinforzando la vista con un cannocchiale d'un piede e mezzo, e anche più, e fissando la linea del traguardo coll' intersecazione di due sottilissimi fili, posti nel foco dell' oggettivo, e con un piccolissimo foro, aperto nel mezzo di una lastra, che vi deve coprir l'oculare. Il Roemer, de la Hire, Mariotte hanno dato delle altre spe-

ſpecie di livello a cannocchiale, e il Picard ha data la deſcrizione di tutti nel ſuo trattato della livellazione. Tutti queſti livelli diſferiſcono nella maniera di montare il cannocchiale, e di ridurne l'aſſe alla ſituazione orizzontale. Il livello Picardiano ha ricevuto in ſeguito diverſi gradi di perfezione, e ultimamente il Sig. Lieſganig ſi è ſervito di un altro livello a bolla d'aria per rettificarlo, come può vederſi nel ſecondo tomo del corſo Matematico del Sig. Scherffer. Il livello a bolla d'aria, che per la difficoltà di diſtinguere il centro, e il margine della bolla, e per non eſſere così libero il moto tra l'acqua, e l'aria, ſi riſerbava ſolo per gli uſi di minore preciſione, è ſtato ultimamente perfezionato dal celebre Sig. Ab. Fontana, con ſoſtituirvi l'aria rarefatta alla comune, e con regolarvi talmente tutt'i moti più piccoli del cannocchiale, ch'eſſo è riuſcito beniſſimo in livellazioni ancora aſſai lunghe, e complicate. Io tratterò particolarmente dei livelli, dei quali ho avuto occaſione di ſervirmi.

Il livello Picardiano, che ho fatto venire a Milano, è quell' iſteſſo, che ha ſervito per le livellazioni dell' ultima viſita generale del Bologneſe. Il cannocchiale è di circa due piedi di Parigi. Dal mezzo del tubo s'alza ad angolo retto una laſtra di ottone, dentro di cui reſta ſoſpeſo da un ago un ſottiliſſimo crino della lunghezza di circa due piedi e mezzo, e dal crino pende una palla di piombo, che ſi tiene immerſa nell' acqua perchè le oſcillazioni finiſcano più preſtamente. Il crino nella parte inferiore deve egualmente radere un punto dato, traguardando da una parte, e poi girando l'iſtrumento, e traguardando dalla parte oppoſta: e ſe dalle due parti non ſi traguarda a diſtanze eguali, biſogna prima aſſicurarſi preciſamente per qual punto debba paſſare il filo, acciò l'aſſe del cannocchiale ſia parallelo all' orizzonte. E' finiſſimo il meccaniſmo delle due viti, con cui, quando l'iſtrumento proſſimamente ſia meſſo a luogo, vi ſi danno i due piccoli movimenti: l'uno da diritta a ſiniſtra, acciò il filo riſponda al punto aſſegnato: l'altro in

un

un piano perpendicolare alla direzione del primo, acciò il filo nè tocchi la laſtra, in cui è ſegnato il punto, e così il moto non rieſca più libero, nè il filo cada troppo lontano, e così dia luogo a qualche errore di parallaſſe. Ma con una ſemplice figura, e ſenza vedere l'iſtrumento, non ſe ne potrebbe baſtantemente intendere la coſtruzione.

La *figura* 60. rappreſenta il livello Ugeniano, di cui mi ſono ſervito nelle più lunghe livellazioni. Il tubo di ottone AB, lungo 16 pollici di Parigi, paſſa per un anello GK, che ha due ale piane E, H. Queſte rinchiudono nelle due parti eſtreme due ſottili naſtri di ſeta, che paſſano per due anelletti di ottone F, S, dai quali ſi può egualmente ſoſpendere l'iſtrumento. L'Huygens ha inſegnata la maniera di riſcontrare, e la linea verticale, e l'orizzontale reſtando l'oſſervatore a ſuo luogo. Si trova la verticale avvicinando, o ſcoſtando dal punto di mezzo l'anello I inſino a tanto che reſti bilanciato l'iſtrumento in maniera, che il peſo P aggiunto, o levato inferiormente non vi cagioni alcun moto, nè faccia variare il punto del traguardo: mentre in queſto caſo è manifeſto, che il centro di gravità C dev' eſſere nella retta FS, che congiugne i due punti di ſoſpenſione del peſo, e dell' iſtrumento. Si trova poi la linea orizzontale alzando, o abbaſſando il filo poſto nel foco dell' oggettivo inſino a tanto che roveſciando l'iſtrumento, e ſoſpendendolo dall' anello S, ſi abbia ancora lo ſteſſo punto di traguardo, comunque ſi ſoſpenda, o ſi levi dall' anello F il peſo P: mentre in queſt' altro caſo la linea tirata per l'apertura dell' oculare, e per l'interſecazione dei fili, deve tagliare ad angoli retti la verticale FS, e in conſeguenza dev' eſſere orizzontale. Così la rettificazione del livello ricerca che ſi abbia ſempre lo ſteſſo punto di traguardo in quattro differenti caſi, di ſoſpendere l'iſtrumento dagli anelli F, o S, e di aggiugnere, o di levare inferiormente il peſo P. Il peſo ſi ſommerge nell' acqua, o in qualche altro fluido, perchè più preſtamente riducaſi alla quiete.

Q Nel

Nel primo livello Ugeniano si otteneva la condizione del rovesciamento, alzando, o abbassando con una piccola vite il filo orizzontale posto nel foco dell' oggettivo, insino a tanto, che dalle due parti opposte si avesse lo stesso punto di traguardo. L' istrumento, di cui mi sono servito, in vece del filo orizzontale, ha due punte sottili *m*, *n*, come nella *fig. 61.*, che sortono dai due lembi del tubo, e, non arrivando a toccarsi nel mezzo, fanno le veci di un filo spezzato, che lascia certamente distinguere la linea orizzontale del profilo senza coprirla, come farebbe il filo in tutta la sua grossezza. Ma non essendomi mai riuscito di fissare le punte in modo, che rovesciando l' istrumento non vi si avesse nel traguardare qualche variazione, quantunque piccolissima, ho pensato che, senza impegnarmi nelle ultime rettificazioni, si poteva sempre ottenere la linea orizzontale, raddoppiando solamente l' operazione. Poichè data la verticale *FS*, *fig. 62.*, se l' asse del cannocchiale *AB* fosse inclinato all' orizzontale *CO* dell' angolo *ACO*, e mettendo l' occhio in *B* si traguardasse il punto *M* più alto del punto *O*, sospeso in seguito l' istrumento dal punto *S*, e voltato il punto *A* in *a*, e *B* in *b*, l' angolo *aCO* sarebbe eguale ad *ACO*, e mettendo l' occhio in *b* per traguardare il punto *N*, sarebbe *MO* eguale ad *NO*. Prendendo adunque la semisomma delle due altezze *KN*, *KM*, si avrebbe l' altezza *KO*, e il punto *O*, per cui passerebbe la parallela *CO* tirata dal punto *C* all' orizzontale *Kc*.

Ma per avere i punti di livello non è neppure necessaria questa cautela, quando si abbia in vece la precauzione di collocare il livello precisamente di mezzo ai due luoghi da traguardarsi a diritta, e a sinistra. Anzi parlando generalmente non fa bisogno di alcuna previa rettificazione nei livelli a cannocchiale, quando livellando si facciano battute eguali e da una parte, e dall' altra. S'intenda nella *fig. 63.*, che l' asse del cannocchiale *BA* resti sospeso dal punto *F*, formando un angolo qualunque *ACO* colla linea *Oo* parallela all' orizzontale *Kk*, e, prese le distanze eguali *CO*, *Co*, si supponga che prima dal punto *B* si traguardi in *M*, e che poi, facendo girare l' istrumento intorno ad *FC*, si traguardi dall' altra parte il punto *m*. In questo caso saranno eguali le altezze *MO*, *mo*: e solamente prendendo *CX* maggiore, o minore di *Co*, si avrà *TX* maggiore, o minore di *mo*, e i punti traguardati *T*, *m* non saranno più di livello. Quando adunque l' asse del cannocchiale sia comunque inclinato all' orizzonte, e nelle due verticali *MK*, *mk* si abbiano da segnare i punti di livello *M*, *m*, basta dividere in *c* per metà la distanza *Mk*, e fissare il punto di sospensione nella verticale *Fc*, e poi traguardare a diritta, e sinistra: ch' è quanto dicesi fare battute eguali Nelle livellazioni delle pianure mi è sempre facilmente riuscito di livellare a battute eguali, e così di prescindere ancora da tutte le altre correzioni, che corrispondono alle refrazioni, ed alla figura sferica della Terra. Ne' luoghi montuosi una volta sola, per evitare l' imbarazzo di scendere, e di salire con moltiplicate operazioni, ho fatto al lungo dell' Adda, colle cautele indicate sopra, due battute sensibilmente disuguali, traguardando alla distanza di 493 braccia da una parte, e 647 dall' altra.

La circostanza delle battute eguali suggerisce ancora il metodo più semplice di rettificare il livello Picardiano, o qualunque altro livello in maniera che la linea del traguardo sia rigorosamente orizzontale. Sospeso il livello in *F*, *fig. 65.*, ad eguale distanza dalle stazioni *KM*, *km*, qualunque sia l' inclinazione dell' asse, si traguarderanno sempre e a diritta, e a sinistra due punti egualmente alti *M*, *m*. Notate le altezze *KM*, *km*, e trasportato il livello in qualch' altro luogo *f*, se l' asse del cannocchiale sarà inclinato all' orizzonte, i punti traguardati *N*, *n* non saranno più di livello, e le altezze *KN*, *kn* riusciranno disuguali. Nel caso dell' asse orizzontale, ancora a distanze disuguali *fN*, *fn*, *fig. 64.*, si traguarderanno due punti *N*, *n*, o egualmente alti, o egualmente bassi, oppure i medesimi che prima si traguardavano a distanze eguali.

Però

Però se si noteranno i due punti del traguardo a distanze eguali, e, trasportato indi il livello a distanze disuguali, se non si troverà di traguardare per una linea parallela alla prima, bisognerà correggere, e inclinare il cannocchiale o da una parte, o dall' altra insino a tanto che si arrivi ad ottenere un esatto parallelismo. Così la rettificazione del livello riuscirà facilissima, e solamente nel caso di prendere delle distanze assai grandi bisognerà di più diffalcare tutto ciò che si deve alla sfericità della Terra, perchè dalla differenza delle altezze osservate si possa dedurre l'inclinazione della linea del traguardo coll' orizzonte.

Nel livello Picardiano, traguardandosi dall' intersecazione dei due fili, si afficurerà meglio il traguardo disegnando la biffa con un cerchio nero, del diametro di circa un pollice, contorniato da altri anelli di eguale larghezza, alternativamente bianchi, e neri. Mentre così si conosce più distintamente quando il cerchio, e gli anelli siano tagliati in quattro parti eguali da due fili anche di seta, che alla distanza di 1000 braccia coprano la grossezza di circa un pollice. Il circolo, e gli anelli si segnano sopra una tavoletta piana, che si possa alzare, abbassare, e fissare con delle molle ad un' asta di legno, divisa in braccia, once, e punti, e alzata verticalmente sopra una base croseggiata. Nel livello Ugeniano, traguardando colle punte staccate, mi sono servito del lembo di una carta bianca, e rettangola, attaccata ad una lastra di latta, che si poteva e movere, e fissare al lungo di un' asta verticale. E per ogni maggiore precisione ho avuto ancora l'avvertenza di traguardare sempre per una punta medesima, e coll' istrumento sempre sospeso dal medesimo punto dell' anello. La pratica di traguardare sul margine di una carta attaccata ad una verga sottile, e di serrare colla mano la verga al lungo di una pertica alzata, nelle volgari livellazioni, indipendentemente dall' incerta stima dell' occhio, deve dar luogo ad una serie di altri errori continuati, e sensibili.

Il livello Picardiano ha un vantaggio sull' Ugeniano, che, essendo fermamente connesso in tutte le sue parti, si può con una vite serrare sopra una tavola, o sopra un treppiede, in maniera tale, che tutto il livello regga alle scosse del vento, e che il filo, riparato anche inferiormente da una lastra di vetro, più facilmente riducasi alla quiete. Il livello Ugeniano, che sta pendente da un anelletto, e da un nastro, si chiude in una cassetta di latta, che non lo tocchi in nessuna parte, e che resti aperta solamente dalla parte dell' oggettivo, e dell' oculare. Con questa precauzione ancora nei venti più impetuosi dei nostri paesi, ho sempre avuto degl' intervalli sensibili di tempo, in cui o l'istrumento era sensibilmente immobile, o le oscillazioni delle punte erano piccolissime: e in questo secondo caso fissando la linea del traguardo dove le oscillazioni delle punte comparivano eguali e al disopra, e al disotto, ho avuto dei risultati interamente conformi a quanto ho ritrovato in seguito cessando il vento. Il caso più sfavorevole mi è accaduto nella valle dell' Adda, dove una volta ho dovuto aspettare circa tre quarti d'ora, perchè fossi contento della posizione dell' istrumento. Non avendo adunque mai incontrato maggiore imbarazzo per questo capo, la facilità del maneggio, e del trasporto dell' istrumento, la semplicità di tutta l'operazione, la piccolezza dei divarj trovati tutte le volte, che ho voluto ripeterla, nelle grandi livellazioni mi ha fatto preferire a tutti gli altri il livello Ugeniano.

CAPO SESTO.

Della livellazione, del calcolo delle altezze, e del profilo.

Servendomi adunque del livello Ugeniano, col cannocchiale di 16 pollici di Parigi, quando non vi erano dei punti obbligati, nei quali convenisse fermare il traguardo, fossi, ponti, sostegni, ho fatto ordinariamente delle battute di 400, o 500 braccia

cia per parte. Una volta ho fatto la prova di portare il traguardo fino alla distanza di 777 braccia, e così di livellare da una sola stazione il tratto d'un mezzo miglio. Non mi sono mai esteso di più per la difficoltà di poter concertare in maggiori distanze la precisa posizione della biffa. Così nel tratto di braccia 55292 da Milano a Pavia, quantunque convenisse limitare molte battute al fondo dei fossi, e al soprarco dei ponti, mi è riuscito di fare la livellazione tutta di seguito con sole 85 stazioni. Nella pratica volgare di traguardare a occhio nudo, e attraverso alla superficie di un fluido colorato, non potendosi prendere più di 80 braccia per parte, vi sarebbero abbisognate circa 345 stazioni. Onde la pratica istessa, ch' è sempre incerta, ed erronea nei tratti non molto grandi, e che può riuscire inutile dove s'incontrano delle rupi scoscese, o dove s'abbiano ad attraversare dei fiumi, e dei marazzi, riesce poi d'una complicazione, e di un imbarazzo grandissimo nelle maggiori livellazioni.

L'esattezza, a cui sono arrivato col livello descritto, e con tutte le precauzioni accennate, era tale, che ripetendo varie volte l'operazione a diversi intervalli, e maggiori, e minori, uguali, e disuguali, non ho trovato tra i medesimi termini che delle piccolissime differenze. In tre intere miglia, nelle quali ho ripetuto due volte la livellazione, tutto il divario è stato di circa un' oncia e mezzo. Nel tratto di braccia 970, dove la pendenza totale risultava di br. 4. 10. $1\frac{1}{2}$, essendosi fatta la livellazione con una sola stazione, e poi con due, prima a distanze uguali, e poi disuguali, il divario non è mai arrivato a due punti: e in quel tratto essendosi ritrovata la maniera di fare la livellazione anche ad acqua stagnante, si è avuto dentro due punti il medesimo risultato. In altri tratti di 1000 braccia la differenza è stata qualche volta di un punto, e qualche volta non arrivava neppure a un mezzo: per modo che dopo di essermi così assicurato in differenti combinazioni dell'

dell' esattezza, a cui portava il mio livello, non ho pensato più in seguito a replicare ciascuna livellazione.

Questo sarebbe il luogo di esaminare qual sia la somma degli errori, che si possono probabilmente commettere in un dato numero di battute uguali, e successive di livello, supposto che in ogni battuta si commetta l'errore m, indifferentemente di eccesso, o di difetto, nel riferire il centro della biffa all' orizzontale tirata per il centro dell' oggettivo, e per l'incrocicchiatura dei fili del cannocchiale, che serve di traguardo. Un celebre Matematico ha ridotto questo problema ad una formola generale, secondo cui l'errore probabile crescerebbe in una proporzione minore di quella del numero delle battute, come può vedersi nelle note inserite al trattato del Picard nella Raccolta degli Scrittori d'acque ultimamente fatta in Firenze. Ma nella maniera, con cui io mi rappresento tutte le combinazioni, quantunque sia possibile il caso che gli errori si accumulino o tutti in più, o tutti in meno, senza veruna compensazione, ciò non ostante l'errore medio, o probabile non dovrebbe farsi maggiore crescendo il numero delle battute. Per esempio se in ciascuna battuta si sbagliasse sempre della quantità $\pm m$, in due battute le combinazioni sarebbero quattro: la prima $+m, +m$: la seconda $-m, -m$: la terza $+m, -m$: la quarta $-m, +m$: e le ultime due combinazioni sarebbero distinte tra loro, e non una sola. Poichè adunque la differenza della quantità massima, e minima sarebbe $4m.$, dividendola per il numero de' casi, l'errore medio sarebbe m. Così ancora in tre battute il numero de' casi sarebbe otto, e la somma degli errori, considerati indifferentemente come tali, o in più, o in meno, sarebbe $8m.$: e così pure negli altri casi successivi.

La regola ordinaria di riconoscere con una continuata livellazione la differenza delle altezze de' punti estremi A, ed I, *fig. 66.*, si è, che posto il livello in G si traguardino le due altezze IH, DF: e in seguito che trasportando il livello in C si prendino le altez-

altezze DE, AB, e così ſucceſſivamente legando la ſeconda battuta collo ſteſſo termine D della prima, e così la terza colla ſeconda, ec. Finite le oſſervazioni biſogna prendere in una ſomma le altezze AB, DF, ec. traguardate alla diritta, e ſottrarne la ſomma delle altezze DE, IH, ec. traguardate alla ſiniſtra. Mentre è manifeſto che eſſendo $AB - DE$ l'altezza del punto D ſopra di A, e ſimilmente eſſendo $DF - HI$ l'altezza del punto I ſopra E; ſarà $AB + DF - DE - HI$ l'altezza del punto I ſopra di A. Per darne un eſempio più dettagliato, ſupponiamo che incominciando da un luogo dato ſi faccia una ſtazione di braccia 520, e che poſto nel mezzo il livello, cioè alla diſtanza di br. 260 dalle due biffe, alzate ne' luoghi eſtremi, ſi traguardi nella prima all' altezza di braccia 6, once 8, e punti 8 del braccio Milaneſe, e ſulla ſeconda biffa all' altezza di 4. 1. 4. Supponiamo che reſtando la ſeconda a ſuo luogo, e preſa un' altra ſtazione di 1000 braccia, le due altezze ſimilmente traguardate ſiano 2. 2. 11., e 4. 2. 8.: e ſupponiamo che tutta la livellazione proceda come ſegue:

	Diſtanze.	*Altezze da una parte.*	*Altezze dall' altra.*
brac.	520.	6. 8. 8.	4. 1. 4.
	1000.	2. 2. 11.	4. 2. 8.
	950.	2. 10. 1.	4. 0. $1\frac{1}{2}$.
	690.	4. 0. 3.	3. 5. 4.
	990.	2. 11. $10\frac{1}{2}$.	5. 0. 10.
	790.	4. 1. 3.	5. 3. 3.
Somme	4940.	22. 11. $\frac{1}{2}$.	26. 1. $6\frac{1}{2}$.

Sarà l'altezza del primo punto ſull' ultimo 3. 2. 6.

Continuate che ſiano le battute ſino all' ultimo termine, biſogna mettere tutta la livellazione in profilo. Ma ciò non ſi ottiene già diſegnando in miſura le battute ſucceſſive, ed eſprimendo

i ri-

i riſultati numerici di ciaſcuna di eſſe con altrettante linee, rapportate ad una ſcala determinata, come ſi pratica volgarmente. Biſogna collegare inſieme tutte le miſure, riferirle ad una orizzontale, che ſia la più comoda nel caſo, di cui ſi tratta, ſegnarvi con altrettante perpendicolari le altezze, o le profondità de' punti più importanti, come il fondo de' cavi, le ſoglie delle bocche, i ſottarchi de' ponti, ec.: e così biſogna diſegnare in piccolo ciò che la natura ci rappreſenta più in grande. Mentre avendo così ſott' occhio l'andamento, e la poſizione de' differenti piani del terreno, in qualunque caſo o di regolare gli alvei vecchj de' fiumi, o di derivarne dei nuovi, o per l'irrigazione delle campagne, o per la navigazione, ſi potranno concertare, e ſegnare le cadenti dei nuovi fondi, calcolare la quantità dell' eſcavazione, ripartirvi le chiuſe, i ſoſtegni, le bocche, ec.

Io qui aggiugnerei volontieri il profilo, con cui ho voluto rappreſentare l'intera livellazione, che ho fatto da Milano a Pavia, eſprimendo i ſettanta punti principali con altrettante perpendicolari riferite ad una ſola orizzontale, tirata non già per l'ultimo, ma per il primo termine della livellazione, ch'è un termine fiſſo, e ſtabile. Un eſempio darebbe più lume di quanto ſi poteſſe ſuggerire generalmente per altri caſi conſimili. Ma appunto l'eſtenſione, e la qualità del profilo non permette d'inſerirlo in un libro. Per le ſteſſe ragioni non potrei ſoſtituirvi gli altri profili, che tengo preſſo di me, come quello che Euſtachio Manfredi ha fatto del Tevere, o quegli altri, che ſi ſono fatti nell' ultima viſita generale della pianura Bologneſe. Le perpendicolari di tutti queſti profili ſono riportate all' ultimo termine della livellazione, ch' è il pelo baſſo del mare. Ne inſerirò quì un ſolo pezzo, che comprende le ultime miglia $14\frac{1}{2}$ del Reno ſuperiormente alla rotta, da cui ſpargevaſi allora diſalveato nelle valli inferiori: e ſopra tutto il profilo, e intorno alle varie ſezioni, che ſi ſono preſe nel fiume, occorrerà poi di ragionare più lungamente a ſuo luogo.

R CAPO

CAPO SETTIMO.

Della livellazione, e della latitudine di Pavia, e del parallelo di gradi 45.

SEguitando la ferie della livellazione, e riducendola ai punti estremi con lasciare gli altri punti intermedj, m'è risultato

	Distanze.	*Cadute.*
Dal ciglio delle brida, che si trova di fianco al Naviglio maggiore di Milano, di sotto al ponte da cui erasi incominciato il Naviglio di Pavia, fino al ciglio della caduta del sostegno fatto nella stessa occasione di fianco alla strada maestra	br. 4940.	3. 2. 6.
Dal ciglio superiore di quel sostegno fino alla soglia della chiavica, che chiamasi Falcona, fuori del Borgo di Binasco	20160.	24. 9. 0.
Dalla stessa chiavica fino alla soglia dello scaricatore, che chiamasi Campeggi	23859.	28. 1. $7\frac{1}{2}$.
Dalla detta soglia fino alla soglia della chiavica, per cui la fossa di Pavia, nell' angolo del bastione inferiore, comunica col Tesino	br. 6333.	35. 0. 8.
In tutto dalla prima brida, che può riguardarsi come il fondo stabile del Naviglio maggiore di Milano, fino all' ultima chiavica, che può prendersi per il pelo basso del Tesino a Pavia	55292.	91. 1. $9\frac{1}{2}$.

Non occorre ch' io quì mi estenda su gli altri risultati di questa livellazione. Il progetto proposto dal Sig. Cassini di continuare la misura del parallelo di gradi 45 da Aurillac, e da Grenoble attraverso alle alpi fino a Torino, e poi nelle nostre pianure fino a Ferrara, mi ha dato occasione di ricavare dalle stesse misure la differenza delle latitudini di Milano, e di Pavia. La distanza del borgo

borgo di Binasco dal Naviglio grande preso in vicinanza di Milano è di braccia 25100. Da Binasco fino a Campeggi vi sono braccia 23859, e contando sulla stessa dirittura della strada altre braccia 3500 per arrivare dentro Pavia, si avrebbero dal Naviglio fuori di Milano sin dentro la Città di Pavia in tutto braccia 52459. Le distanze sono state misurate due volte con pertiche di cinque braccia, e con tanta diligenza, che il divario non arrivava mai a una pertica in un miglio. Ora già abbiamo due gradi misurati quasi nella medesima latitudine di queste due Città: il primo si è misurato in Francia nella latitudine di 45° 45′ dal Sig. Cassini, e si è ritrovato di tese Parigine 57050: l'altro in Piemonte nella latitudine di 44° 44′ si è ritrovato dal P. Beccaria di tese 57138. Il braccio di Milano sta al piede di Parigi assai prossimamente come 11 : 6, e sta per conseguenza alla tesa come 11 : 36. Però sulla norma del primo grado 52459 braccia di Milano, quando fossero prese in una sola linea retta, e nella stessa dirittura del Meridiano, corrisponderebbero a $1011\frac{1}{2}$ secondi: e prendendo per norma il secondo grado, si avrebbero secondi 1010: e però quì le diverse misure dei gradi non portano alcuna sensibile differenza. Ma la differenza dei due paralleli dell' Osservatorio, e del Duomo di Milano è di 23. 6″, e in oltre la stessa differenza, presa su tutte le nostre mappe, sta alla differenza dei paralleli del Duomo, e del Naviglio nel luogo indicato assai prossimamente come 3 : 5. Aggiugnendo adunque 63″, sarebbe nelle due suddette ipotesi la differenza delle latitudini dell' Osservatorio di Milano, e di Pavia di 1073″, ossia di 17′ 53″.

Ora le due Città sono bensì sotto il medesimo Meridiano, o ne declinano pochissimo: ma tutta la strada, trascurando le piccole deviazioni, si può prendere come distesa in due rette, l'una tirata da Milano a Binasco, l'altra da Binasco a Pavia. L'angolo delle due rette non è certamente maggiore di 130°, per quanto ho rilelevato dalla mappa, che ho fatto levare, e dalle altre più antiche mappe del paese. In oltre la seconda delle rette indicate non ha alcuna deviazione sensibile: ma la prima forma un altr' angolo due miglia prima di arrivare a Binasco. Bensì, per quanto ho potuto osservare, la deviazione dell' ago calamitato dalla linea, che da Milano si può tirare direttamente a Pavia, è prossimamente eguale alla deviazione dalla meridiana dell' Osservatorio, ch' è di gradi 17 verso Ponente. Onde siccome l' errore di qualche grado nel parallelo di Pavia, rapportato a Milano come a centro, non porterebbe alcun errore sensibile quando si rapportasse al centro del parallelo medesimo, questa semplice osservazione mi basta per prendere come eguale la longitudine delle due Città nel calcolo della differenza delle latitudini. Ma essendo 0.9063078 il seno di 65°, ch' è la metà di 130°, io crederei che la differenza di 1010″ ridotta a una sola retta tirata da Milano a Pavia, non possa essere più di 915″. Però aggiugnendo come prima 63″, sarebbe la differenza totale di 16′ 18″: ed essendo la latitudine dell' Osservatorio di Milano 45° 28′ 10″, sarebbe quella di Pavia 45° 11′ 52″. L' errore di un minuto primo ne porterebbe un altro di più di 4000 braccia nelle distanze: errore di gran lunga maggiore di tutti quelli, che possano essere mai corsi nelle misure.

Così adunque il parallelo di gradi 45 passerebbe un poco al di là di Pavia. Nel Probl. IV. del Lib. II. della seconda Parte della Cosmografia ho spiegato la formola, che serve per determinare i gradi di longitudine, quando sia data la proporzione dell' asse, che passa per i poli della Terra, al diametro dell' Equatore. Ho preso la proporzione di 230 : 231, come la media dalle medie, che risultavano da tutte le combinazioni degli undici gradi del Meridiano, che mi parevano più opportuni per un confronto, e ch' erano due di America, uno di Africa, due d'Italia, tre di Francia, e quelli di Austria, di Olanda, e di Lapponia. La formola così applicata si accordava dentro il divario di 30 tese colla misura del grado

grado del parallelo, che si è già presa nella latitudine di 43° 32′. Seguitando la stessa formola sarebbe il parallelo di gradi $48\frac{5}{6}$, ch' è appunto il parallelo di Parigi, e di Vienna, di tese $37775\frac{3}{4}$. Il Sig. Cassini negli Atti dell' Accademia del 1763 ha già ridotto la distanza di Parigi, e di Vienna a tese 531000: onde prendendo dalle ultime tavole la differenza delle longitudini di quelle due Metropoli di gradi 14.03, sarebbe un solo grado di tese $37847\frac{1}{2}$, e tutto il divario si ridurrebbe a circa tese 72. Corrispondendo adunque la stessa formola ai due gradi già misurati, si può adattare con maggiore fiducia anche al terzo, e indipendentemente da una nuova misura si può supporre che il parallelo di gradi 45 debba essere di circa tese $40567\frac{3}{4}$.

Coll' occasione degli ordini superiori, che ho ricevuto, di servire il Sig. Cassini quanto potevo nella sua letteraria spedizione, ho fatto anche avvertire i risultati dell' altra formola, che aveva già dato nel Probl. III. del libro sopraccitato per determinare la proporzione degli assi, e la quantità dello schiacciamento della Terra, quando siano conosciuti i gradi di due circoli paralleli all' Equatore. Sia F il grado del parallelo più lontano dall' Equatore, e T il coseno della sua latitudine: sia H il grado del parallelo più vicino, ed S il coseno della latitudine corrispondente: sia C il semiasse minore della Terra, $C+B$ il raggio dell' Equatore, e B la differenza dei due semiassi. Sarà $\frac{B}{C+B} = \frac{F.S - H.T}{H.T.\overline{1-T^2} - F.S.\overline{1-S^2}}$. Il numeratore di questa formola è la differenza dei due prodotti del grado maggiore nel coseno minore, e del grado minore nel coseno maggiore. Però se i gradi non si prendessero molto lontani tra di loro, la differenza riuscirebbe piccolissima, ed un piccolissimo

simo errore trascorso nell' attuale misura porterebbe un divario grandissimo, nella differenza dei due semiassi. Per esempio, posto $H = 40567\frac{3}{4}$, ed $F = 37775\frac{3}{4}$, sarebbe $F.S - H.T = 7.7$, e $\frac{B}{C+B} = \frac{1}{230}$ all' incirca. Ma se nella misura del primo grado si supponesse solamente l'errore di 10 tese, e che tutto il grado fosse di tese $40577\frac{3}{4}$, si troverebbe $\frac{B}{C+B} = \frac{1}{1650}$. Se l'errore si supponesse di 12 tese, la frazione si variarebbe tanto, che la Terra in vece di essere schiacciata ai poli, risulterebbe anzi allungata.

Ora è noto che un secondo di tempo corrisponde a 15 secondi di grado, che portano circa 169 tese, e che, quand' anco si ripartissero in tutta la tratta di 9 gradi, porterebbero in ciascuno di essi l'errore di quasi 19 tese: e ciò posto non vi sarebbe più da concluder nulla col confronto dei due paralleli. Nei corollarj del quarto problema di già citato ho fatto avvertire l'inconveniente medesimo nel paragone del parallelo di 43° 32′ col grado del Meridiano misurato oltre il circolo polare. E così pure se i gradi degli altri due paralleli di Francia si volessero paragonare col grado del Meridiano di Lapponia, il più piccolo errore delle osservazioni porterebbe un divario grandissimo nella proporzione degli assi della Terra. Resterebbe adunque da paragonare i gradi dei paralleli indicati cogli altri gradi del Meridiano, che si sono misurati in maggiore distanza dal polo, e massime sotto all' Equatore. Ma in questo caso ancora ogni piccolo errore delle osservazioni porterebbe dei divarj maggiori di quelli, che possono aversi col paragone dei soli gradi del Meridiano. E poi confrontando il primo grado del Meridiano con due, o tre gradi di paralleli tra loro così vicini si caverebbe poco di più, che confrontandolo con un solo. In un progetto geografico, di cui s'è tanto parlato nell' anno scorso, non ho voluto quì tralasciare alcune mie riflessioni.

DE'

DE' PRINCIPJ DELL' IDRAULICA.

LIBRO QUARTO.

CAPO PRIMO.

Delle cagioni esterne del moto de' fluidi, delle chiocciole, delle trombe, e delle altre macchine Idrauliche.

Le cagioni interne, e generali del moto de' fluidi sono la gravità di ciascuna particella, e la pressione di tutte le altre, che vi stanno al disopra. Vi sono alcuni principj esterni del moto, e alcune cause particolari, che si mettono in azione nelle macchine Idrauliche, come le forze degli animali, la pressione dell' aria, l'elasticità dei vapori, e del fuoco. Nella serie di tante macchine Idrauliche, che si vedono adoperate in diversi paesi, io risguardo le trombe come l'invenzione più semplice, più ingegnosa, e più utile, che siasi fatta in questo genere. Vitruvio ne attribuisce la prima idea a Tebisio. Ma nell' ultimo secolo si è tanto studiato, e travagliato intorno alle trombe, che hanno esse come acquistato una nuova forma. Dopo le trombe aspiranti, prementi, e composte per la singolarità dell' invenzione, e ancora per l'estensione degli usi, nominerei la chiocciola di Archimede. Quest' ingegnosa macchina fu da lui inventata mentr' era in Egitto per irrigare colle acque del Nilo le campagne dell' Isola di Delta, per quanto almeno pare che si raccolga da Diodoro di Sicilia. Le altre macchine, o sono di un uso più limitato, come quella del celebre Sig. Segner, o sono ripieghi più grossolani per certi casi di minore difficoltà, come le secchie, o incatenate a forma di rosario, o adattate sopra le ruote, ec.

Nelle

Nelle secchie a rosario, e nelle ruote primieramente la dispersione dell' acqua è assai grande, ed arriva per lo meno ad un quarto. Il volume delle ruote le rende ancora più incomode per la loro applicazione. Nelle macchine, che i Francesi chiamano a rosario, e che in Italia propriamente si chiamano Bindoli, la dispersione dell' acqua si fa maggiore, e il moto non può continuarsi che irregolarmente, quando le secchie non siano abbastanza strette, e serrate sulle faccie dei due prismi superiore, e inferiore: il che non è così facile ad ottenersi, ed ottenendosi poi si rendono grandissime le resistenze del moto, e le frizioni. Le corde si rilasciano facilmente col tempo, e le catene di ferro si rompono qualche volta per le sole disuguaglianze del calore, e del freddo. Di più essendovi sempre lo sbilancio delle secchie piene, che si alzano verticalmente da una parte, e delle vuote, che scendono dall' altra, riesce molto difficile di procurare a queste macchine una consistenza bastante. L'uso di esse si limita ai casi di grande abbondanza d'acqua, e dove basta portarne una piccola quantità ad una piccola altezza: e sopra tutto nell' acqua torbida restano queste macchine esenti dagli altri incomodi, che la torbidezza suole qualche volta cagionare nelle trombe.

Vitruvio nel Cap. XI. del Lib. X. ci ha insegnato la costruzione della chiocciola di Archimede. Il Pitot negli Atti dell' Accademia di Parigi del 1736, ed altri Autori in altre opere ce ne hanno dato delle altre costruzioni differenti. Il Sig. Hennert nel Tom. V. de' suoi Elementi di Matematica, e nella Dissertazione premiata dall' Accademia di Berlino ci ha descritto le chiocciole fabbricate a Leida nel 1756, e messe in moto con un mulino a vento. Ciascuna di esse avea tre spire distanti l'una dall' altra di 120 gradi nella sezione circolare della base, da cui sorgevano. Il cilindro, a cui restavano attorniate le spire, era lungo piedi $14\frac{1}{2}$, e il raggio della base era di piedi 2.91. L'angolo delle spire colla

colla base era di 11° 55': l'inclinazione della base coll' orizzonte di 30°: e l'inclinazione dell' asse della chiocciola di 60°. La quantità dell' acqua somministrata in un minuto primo era di 273 piedi cubici, sei, o sette volte maggiore di quella, che arriva a somministrarsi dalle trombe ordinarie. Ma le trombe hanno poi l'avantaggio sopra le chiocciole di portar l'acqua ad altezze molto maggiori, e di essere di una costruzione, e di un maneggio molto più facile.

Il Sig. Daniello Bernoulli fu il primo che incominciasse a sottomettere al calcolo quest' ordigno ingegnoso nella Sezione IX. della sua Idrodinamica. Il Sig. Eulero ha poi trattato l'argomento con tutta la generalità nel Tomo V. de' nuovi Atti di Pietroburgo, facendo entrare nel calcolo ancora l'elemento delle forze, e delle resistenze che nascono dal moto di rotazione. Ma tutte le formole, con cui questo grande Analista ha esteso queste ricerche, appartengono più all' Algebra, che alla Meccanica, e nella loro complicazione non danno luogo ad applicarle a qualche uso. Per mettere sotto l'occhio tutta la disposizione, e l'azione della chiocciola $DHIVUX$, *fig. 67.*, immaginiamoci che essendo MZ l'asse, BDC la base, e BDH l'angolo della chiocciola, la porzione della spira DEH resti un poco inclinata all' orizzonte. Immerso che sia nell' acqua il punto D, se ne empirà subito l'arco EHK, che però chiamasi Idroforo, fino ad un altro punto K che resti sull' orizzonte BA alla stessa altezza del punto D. In seguito rivolgendosi la chiocciola intorno all' asse MZ colla direzione da K in H, e dal punto D della base verso il punto superiore C, sortiranno dall' acqua i punti D ed E, e l'acqua già entrata nella porzione della spira EHK si terrà sempre dalla parte del lato XB, passando successivamente nelle altre porzioni KI, IV, ec., insino che arrivi a versarsi dal punto X. Così restando il principio D della spira alternativamente nell' acqua, e nell' aria, il getto sarà interrotto: altrimenti se tutta la base BDC della chiocciola re- A ſtaſſe immerſa nell' acqua ſino all' altezza CA, l' aria contenuta nel reſto della ſpira $KIVUX$ potrebbe impedire la diviſione delle particelle, che per diſcendere nei piani inclinati della ſpira ſi dovrebbero ſtaccare dalle altre. Nelle ſpire di maggiore diametro, e nelle chiocciole più grandi, le bolle d'aria, che vengono dalla parte ſuperiore a meſcolarſi inſieme coll' acqua, poſſono ſupplire al difetto dell' aria nella parte inferiore, e fare che l'acqua ſalga quantunque tutta la baſe della chiocciola reſti ſott' acqua.

Il problema, da cui dipende una tanto ingegnoſa invenzione, ſi è quello di determinare i punti egualmente alti E, e K, che terminano l'arco Idroforo EHK ſotto una data inclinazione della ſpira alla baſe, e dell' aſſe della chiocciola all' orizzonte. Il problema è ſtato trattato dal Sig. Daniello Bernoulli, e dagli Autori coi ſoliti ajuti del calcolo differenziale: ma però eſſo non ſupera le forze della Geometria elementare. Sia $FNEG$, *fig. 68.*, una ſezione circolare tirata parallelamente alla baſe della chiocciola nel punto E, e ſia il diametro FG parallelo a CB. Sia P il punto del concorſo della tangente EP del circolo col diametro FG prolungato in P. Si tiri l'orizzontale PQ: s'intenda che Ee rappreſenti un piccolo archetto della ſpira inclinato al piano GE: e ſia EeR la tangente, o la continuazione del lato medeſimo fino ad incontrare la PQ. Congiunta la OR, e tirate le EL, El perpendicolari riſpettivamente ad OP, e ad OR, ſarà EL parallela all' orizzonte, e chiamando n il ſeno dell' angolo FPQ, che il piano della ſezione forma coll' orizzontale PQ, ſarà $\frac{n \cdot LP}{EP}$ il ſeno dell' angolo EPQ. Facendo in oltre il raggio $OG = 1$, il coſeno $OL = x$, poichè per la ſomiglianza dei triangoli OLE, ELP dev' eſſere $OE : LE = EP : LP$, ſarà pure il ſeno dello ſteſſo angolo $EPQ = \frac{n \cdot LE}{OE} = n \cdot \sqrt{(1 - xx)}$. Ora è manifeſto che ſe l'angolo PER, formato dall' archetto Ee della ſpira, e dalla tangente

gente EeR colla tangente del circolo EP ſarà minore dell' angolo, che la EP forma col piano dell' orizzonte, il piano Ee reſterà inclinato, e vi continuerà l'acqua a diſcendere. Però i limiti della diſceſa ſaranno in quel punto E, dove ſi eguaglieranno i due angoli.

Se n' foſſe il ſeno dell' angolo formato dalla EP col piano della ſpira, per ritrovare i ſuddetti limiti, baſterebbe fare $n\sqrt{(1-x^2)} = n'$. Ma chiamando m il ſeno dell' angolo, che l'archetto Ee della ſpira forma coll' archetto corriſpondente del circolo, e tirando al piano del circolo una perpendicolare nel punto E, che arrivi a incontrare il piano dell' orizzonte PQ, e che però ſia eguale ad $\frac{n \cdot PL}{\sqrt{(1-n^2)}}$; ſarà $\frac{n \cdot PL}{\sqrt{(1-n^2)} \cdot PE}$ la tangente dell' angolo ſotteſo dalla ſteſſa tangente al centro P: e nel caſo dei limiti dovrà eſſere $\frac{n\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-n^2)}} = \frac{m}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Quindi ſi caverà $\sqrt{(1-x^2)} = \frac{m\sqrt{(1-n^2)}}{n\sqrt{(1-m^2)}}$, ed $x = \frac{\pm\sqrt{(n^2-m^2)}}{n\sqrt{(1-m^2)}}$, e la duplicazione del ſegno dinoterà due punti, l'uno ſopra, l'altro ſotto il centro O, dove l'acqua finirà di diſcendere. E poichè la perpendicolare tirata dal punto [illegible] al piano $ReEO$ della ſpira deve cadere nel punto l, ſarà $Ol = \pm\sqrt{\frac{(n^2-m^2)}{n^2}}$, ed $El = \frac{m}{n}$. Sarà ancora $\frac{2m\sqrt{(1-n^2)}}{n\sqrt{(1-m^2)}}$ tutta la corda, per cui la baſe della chiocciola dovrà reſtare ſommerſa nell' acqua: e ſecondo la coſtruzione di Vitruvio ponendo $m = \sqrt{(1-m^2)}$, cioè eſſendo ſemiretto l'angolo della ſpira alla baſe, e ponendo in oltre $\frac{\sqrt{(1-n^2)}}{n} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, ch'è la tangente dell' angolo CBA di 36° 52′, ſarà il ſeno $\frac{m\sqrt{(1-n^2)}}{n\sqrt{(1-m^2)}}$ di 48° 35′: e così dovrà reſtare ſommerſo nell' acqua un arco di 262° 50′, ed avanzarne al di fuori 97° 10′.

Le *figure 69.*, 70., e 71. rappreſentano agli occhi baſtantemente

mente le tre ſorti di trombe, che abbiamo, aſpiranti, prementi, e compoſte. La coſtruzione pratica di eſſe non appartiene al ſoggetto di queſto libro, ed è baſtantemente ſpiegata dal Belidor nel Tomo I. dell' Architettura Idraulica. E' però da avvertirſi il lettore, che non è punto eſatta la teoria aggiuntavi dal Belidor, come ha già oſſervato il Sig. Boſſut nel Cap. II. del Lib. I. dell' Idrodinamica. Ma ſiccome ho ritrovato qualche divario ancora nelle formole dello ſteſſo Sig. Boſſut, così ripiglierò adeſſo la ſerie di queſti problemi, e cercherò di dare col calcolo un' idea più preciſa del modo, con cui l' acqua ſi fa ſalire gradatamente nelle trombe aſpiranti. Sia r il raggio del tubo AB, che chiamaſi d' aſpirazione, *fig. 69.*, ed R il raggio di CS, che chiamaſi il corpo della tromba, e ſia il raggio alla periferia come $1 : p$. In oltre ſi chiami a l' altezza TI, per cui ſale, e ſcende lo ſtantuffo F, e ſi faccia l' altezza $IC = b$, tutta la $CA = c$, l' altezza Aa, a cui già ſi ſuppone ſalita l' acqua $= x$, e l' altezza aV, che vi ſi aggiugne agitando di nuovo lo ſtantuffo $= y$: e ſia per conſeguenza il cilindro $IS = \frac{1}{2} p R^2 . a$, il cilindro $CH = \frac{1}{2} p R^2 . b$, il cilindro $aB = \frac{1}{2} p r^2 . \overline{c - x}$, il cilindro $aP = \frac{1}{2} p r^2 . y$. Finalmente ſi chiami A l' altezza, ſotto cui l' acqua arriva ad equilibrarſi con tutta la preſſione dell' atmosfera: e ſia $A - x$ la forza equivalente all' aria intruſa, mentre l' acqua è ſalita all' altezza x.

Fiſſate queſte denominazioni, e ſuppoſto, che ſollevando lo ſtantuffo da IH in TS l' altezza dell' acqua arrivi ad eſſere $x + y$, ſarà lo ſpazio occupato prima dall' aria interiormente alla tromba $\frac{1}{2} p R^2 . b + \frac{1}{2} p r^2 . \overline{c - x}$, e lo ſpazio occupato dopo $\frac{1}{2} p R^2 . \overline{b + a} + \frac{1}{2} p r^2 . \overline{c - x - y}$. Ora le forze dell' aria eſſendo in ragione inverſa dei volumi, che occupa, ed eſſendo in oltre proporzionali alle differenze delle altezze dell' acqua x, ed $x + y$ dall' altezza maſſima A, ſarà

$A - x :$

$A - x : A - x - y = R^2 . \overline{b + a} + r^2 . \overline{c - x - y} : R^2 . b + r^2 . \overline{c - x}$: e nel principio del moto ponendo $x = 0$, e in vece di $\frac{R^2}{r^2}$ ſcrivendo t, ſarà $A - y = A \left(\frac{t b + c}{t . \overline{b + a} + c - y} \right)$, e quindi ſi caverà

$$y = \frac{1}{2} \left(A + c + t . \overline{b + a} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left((A + c + t . \overline{b + a})^2 - 4 A t a \right)}:$$

nella quale equazione è da avvertirſi che il ſolo ſegno inferiore può ſervire alle circoſtanze del problema, altrimenti l' altezza y diverrebbe maggiore di A. Soſtituendo adunque $\frac{1}{2} \left(A + c + t . \overline{b + a} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left((A + c + t . \overline{b + a})^2 - 4 A t a \right)}$ in vece d' x nell' altra equazione antecedente ſi avrà l' altezza y, per cui deve ſollevarſi l' acqua nel ſecondo colpo dello ſtantuffo: e ſuſſeguentemente ſcrivendo $x + y$ in vece d' x ſi potranno calcolare gli accreſcimenti ſucceſſivi di tutta l' altezza. Alcuni Autori hanno trovato delle altre formole differenti, principalmente perchè hanno ſuppoſto, che alzata l' acqua in $a k$, e fermato lo ſtantuffo in IH la preſſione dell' aria contenuta in $IHka$ equivalga a tutta la colonna d' acqua A, quando equivale ſolamente ad $A - x$.

Ciò è quanto baſta per ben comprendere il meccaniſmo delle trombe aſpiranti. L' altezza A non può eſſere maggiore di piedi $31 \frac{2}{3}$ di Parigi ſuppoſta l' altezza del mercurio nel barometro di pollici 28, come ſi è detto nel Cap. III. del Lib. III. Molte altre cauſe concorrono a diminuire l' elevazione. Mentre per quanto ſi tenga inumidito il contorno di cuojo dello ſtantuffo, e per quanto ſiano lavorate diligentemente le valvule, o a chiocciola, come nella *fig. 69.*, o a capello, come nella *fig. 70.*, non ſi poſſono mai ſerrare tutti gl' interſtizj, e per qualunque piccola quantità d' aria, che reſti chiuſa nel corpo della tromba, ſi bilancierà ſempre una

parte

parte della pressione dell' aria esteriore, e l'acqua salirà un poco meno. E quand' anco alle valvule si sostituiscano delle palle di ottone, come si pratica da alcuni artefici, e le aperture della tromba si facciano circolari, vi è sempre la stessa difficoltà di ottenere un perfetto contatto. Quando lo stantuffo arrivi al disotto della massima altezza, a cui può sollevarsi l'acqua per semplice aspirazione, ne farà passare una porzione al disopra, e potrà darvi una maggiore elevazione. Supponendo che lo stantuffo sia un cilindro d'un piede di diametro, e che salga e scenda alternativamente per un altro piede, sarà la quantità d'acqua somministrata in ciascun colpo di $\frac{314}{400}$ d'un piede cubo: e supponendo in oltre che in una buona tromba si abbiano 40 colpi per ogni minuto primo, si avranno in ogni minuto $31\frac{2}{5}$ piedi cubi d'acqua. Servono le trombe aspiranti per cavar l'acqua dai pozzi, e dagli altri luoghi profondi, e portarle ad una piccola altezza sopra terra. Le trombe prementi si adoprano quando le acque hanno a portarsi da una piccola profondità ad una altezza maggiore, come da una fontana sopra una torre. Le trombe aspiranti insieme, e prementi servono per cavar acqua a grande profondità, e portarla ad altezza grande.

L'intermittenza del getto, e la perdita del tempo, che abbisogna per abbassare lo stantuffo, non è di alcuna conseguenza nelle trombe ordinarie, che servono alla decorazione dei giardini, e al comodo delle case: ma è un inconveniente grandissimo per quelle macchine, che servono per gl' incendj, e in tutt' i casi, nei quali è necessario di gettar l'acqua continuatamente ad un dato punto. Se n'è trovato il rimedio con mettere intorno al tubo di salita una specie di timpano, ferrato d'ogn' intorno al disopra, e aperto per disotto in maniera tale che l'aria rinchiusa, e condensata a proporzione, che l'acqua è sforzata ad entrarvi, possa da se sola supplire interiormente per qualche tempo al difetto della pressione esteriore. Questo è quello, che chiamasi giuoco dell' aria condensata, e può vedersi minutamente descritto, e disegnato con tutte le altre parti della macchina Newshamiana, ch'è più usitata in Inghilterra per estinguere gl' incendj, nella Sezione XXII. della Lezione XI. del Desaguliers. La macchina del Newsham è una specie di pompa aspirante insieme, e premente, e serve ancora per tirar l'acqua nelle conserve donde si deve gettare in alto. Le nostre macchine sono semplicemente prementi. Negli Atti dell' Accademia di Parigi del 1716 si trovano descritti degli altri ripieghi per avere un getto continuo: ma il ripiego della condensazione dell' aria, lasciata interiormente in contatto coll' acqua, è stato più comunemente adottato dagli artefici anche Francesi come il più sicuro, e il più facile. Nei paesi Settentrionali il maggior numero delle case di legno, e il pericolo degl' incendj ha fatto maggiormente studiare su queste macchine: e coll' occasione del premio ultimamente proposto a Copenhague sul soggetto medesimo vi si è portata una maggiore semplicità, e perfezione.

Nelle miniere la necessità di cavare più prontamente una grande quantità d'acqua da luoghi assai profondi, ha fatto immaginare delle altre macchine molto ingegnose. La macchina a fuoco passerà sempre per la più ingegnosa di tutte. Il Marchese di Worcester in un libretto stampato a Londra nel 1663 pubblicò la famosa sperienza di un cannone riempito d'acqua per circa tre quarti, e serrato fortemente a vite nella bocca, e al focone, che, sottopostovi il fuoco, scoppiò con uno strepito grandissimo. Quest' esperienza fece conoscere il curioso fenomeno, che quantunque l'acqua sia composta di parti quasi del tutto incompressibili, come con replicate sperienze si sono assicurati il Newton, e molti altri Fisici, ciò non ostante coll' azione del fuoco se ne fa svaporare un fluido sottilissimo, e tanto elastico da bilanciare ancora i maggiori pesi. Il Savery, ed il Papin hanno indi presa l'idea di far movere gli stantuffi d'una tromba col vapore dell' acqua bollente alternativamente rare-

rarefatto, e condensato. Ma il passaggio da quella prima sperienza alle macchine, che fecero construire verso il principio di questo secolo, il primo in Inghilterra, e il secondo nell' Assia, è tanto grande, che ne lascia ad essi l'intero merito dell' invenzione. Le prime macchine erano però molto imperfette, come succede ordinariamente nelle invenzioni più utili, e più belle. Nella macchina di Saveri era tanto grande la forza del vapore, che nei primi tentativi scoppiò la caldaja dell' acqua bollente: il Papin non pensò al ripiego di condensare il vapore con alcune gocciole d'acqua fredda; e nè l'uno nè l'altro, e neppure il Desaguliers nelle macchine, che mandò a Pietroburgo per il Czar Pietro, non aveva immaginato ancora il meccanismo di mantenere l'acqua nella caldaja ad un' altezza determinata.

La perfezione della macchina a fuoco devesi principalmente agli abili artefici Newcomen, e Cawley, che avendo adattato lo stantuffo in un cilindro superiormente alla caldaja dell' acqua bollente, fecero in modo che spignendosi lo stantuffo fino ad una altezza data si chiudesse la comunicazione colla caldaja, ed entrassero lateralmente nel cilindro alcune gocciole d'acqua fredda, onde smorzandosi il vapore, si obbligasse lo stantuffo a discendere, e a rinnovare lo stesso giuoco di prima. La principale differenza si è che nelle prime macchine Saveriane per fare che l'acqua salga ad una altezza maggiore di 32 piedi, bisogna accrescere proporzionatamente la forza del vapore, e con ciò mettere il recipiente in pericolo di rompersi. Laddove nelle macchine Newcomeniane lo stantuffo continua a salire insino a tanto che l'elasticità del vapore sia un poco maggiore di quella dell' aria. La pianta, lo spaccato, e il profilo di queste macchine si può vedere trai rami dell' Enciclopedia, nella Sezione XV. della Lezione XII. del Desaguliers, nel Cap. II. della Par. I. dell' Idrodinamica del Bossut, nel corso di Fisica del Musschenbroeck, e nell' Architettura Idraulica del Belidor. Nella macchina a fuoco, che si ritrova nelle cave del carbone a Montrelais sui

sui confini del paese d'Anjou, l'acqua con sei ripetizioni di trombe si cava fino dalla profondità di 600 piedi. Nella Toscana il bisogno di gettare nelle saline 150000 piedi cubi d'acqua in 24 ore ha fatto aggiugnere a questo genere di macchine diversi miglioramenti, che si possono vedere nel libro stampato a Parma dal Sig. Digny.

CAPO SECONDO.

Dei principj meccanici del Torricelli, del Newton, e del Varignon per calcolare la velocità de' fluidi, che dipende dalla pressione.

CHe i fluidi sortano dalle conserve, e dai vasi con una maggiore velocità quando le aperture restano ad una profondità maggiore sotto la superficie, è un principio assai ovvio, e tanto antico quanto l'Idraulica. Giulio Frontino lo ha chiaramente enunziato nel suo trattato sopra gli acquedotti di Roma. La difficoltà era di ritrovare la relazione delle velocità, e delle altezze de' fluidi. Benedetto Castelli nel Lib. II. sulla misura delle acque correnti incominciò a sospettare che la velocità de' fluidi crescesse nella proporzione istessa del numero delle particelle prementi, cioè delle semplici altezze. Ma non restando soddisfatto il Castelli, nè dalle proprie sperienze, nè dalle congetture suggerite dal Cavalieri, lasciò ad altri la più felice continuazione di simili ricerche. Il Torricelli nel fine del Lib. II. sul moto de' corpi gravi, più con alcune sperienze fisiche, che colle sue congetture meccaniche, stabilì che le velocità originate dalla pressione sono come le radici quadrate delle altezze, ed attribuì al Maggiotti il merito d'essere stato il primo a tentare delle sperienze decisive in questo genere.

Il Torricelli fece riflettere che se alle aperture dei vasi si adattassero altrettante fistole, o tubi, l'acqua vi salirebbe fino all' orizzontale tirata per la superficie del vaso. In oltre suppose egli due cose: la prima, che la velocità, con cui l'acqua incomincia ad en-

entrare nelle fistole, sia tutta quella, con cui può salire fino alla detta orizzontale: la seconda, che l'acqua esca sempre colla velocità istessa dai fori, e applicate, e rimosse le fistole: e da ciò ne inferì, che l'acqua esca dai fori con quella velocità, che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza del vaso, e ch'è proporzionale alla radice dell' altezza medesima. Il ragionamento del Torricelli fu adottato dal Guglielmini, e applicato generalmente al caso delle acque correnti nell' alveo libero d'un fiume. Ma si potrebbe quì dimandare se nell' uscire dai fori ciascuna gocciola ha tutta la velocità necessaria per la salita, o se più tosto sale per gl' impulsi consecutivi del fluido, che continua a premere nel vaso, insino a tanto che dentro e fuori le altezze arrivino ad eguagliarsi. In sostanza è lo stesso che la velocità sia quella, che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza del vaso, e che sia quella, che basta per risalire ad eguale altezza: e così le supposizioni del Torricelli includono equivalentemente il teorema, che ricercavasi di dimostrare.

Le idee proposte dal Newton, nella Propos. XXXVI. del Lib. II. de' suoi Principj, sono tanto singolari, e ingegnose, che meriteranno sempre di avere un luogo in qualunque trattato d'Idraulica. S'immaginò adunque che un cilindro di ghiaccio $PFCQ$, *fig.* 72., s'andasse equabilmente abbassando, e che l'ultimo strato, arrivando nel luogo FC, si risolvesse in acqua, e continuasse poscia a discendere colle leggi ordinarie dei corpi gravi. In quest' ipotesi la velocità sarebbe sempre in ragione sudduplicata della distanza dal luogo FC, e se le particelle del medesimo strato rimanessero sempre contigue, e l'area si restringesse a proporzione della velocità accresciuta, sarebbe dappertutto constante la quantità $BH^2 . \sqrt{HT}$: e così continuando a discendere il fluido formerebbe una specie d'imbuto, o di cateratta $FEDC$, e la curva FE, o CD sarebbe del genere iperbolico. S'immaginò in oltre il Newton che se all' intorno tutto lo spazio FEX, CDZ fosse di ghiaccio, e che le superficie FE, CD fossero tanto liscie, e regolari da non opporre

porre alcuna resistenza sensibile a tutte le particelle, che vi strisciassero sopra discendendo, il moto di tutta l'acqua $FEDC$ continuerebbe ancora come prima. E finalmente s'immaginò che il moto non dovesse alterarsi neppure quando lateralmente si sciogliesse il ghiaccio, e quando s'intendesse levato il cilindro superiore alla sezione FC, e in vece si proponesse il vaso $FXZC$, ripieno d'acqua fino all' altezza OT, ed aperto nel mezzo con un foro circolare del diametro ED.

Osservò di più il Newton che per l'obbliquità delle direzioni, e dei moti, con cui tutte le particelle arrivano al foro ED, devono esse approssimarsi maggiormente tra loro, e stringersi verso il centro, e poco sotto del foro medesimo ridursi ad una sezione più angusta, che chiamasi vena contratta. E per definire la contrazione, che nasce dalla semplice convergenza dei moti, senza comporvi il restringimento del diametro, che anche nelle cadute libere, e verticali nasce dall' accelerazione del moto, fece egli l'esperienza in un foro circolare, posto di fianco al vaso, per cui l'acqua incominciava ad uscire orizzontalmente. Il foro era scolpito in una laminetta piana, e sottile: avea $\frac{5}{8}$ d'un pollice di diametro: e continuando l'acqua ad uscire, il diametro del foro era al diametro della vena contratta, in distanza d'un mezzo pollice, prossimamente come $25 : 21$. Onde essendo le velocità reciprocamente come le aree delle sezioni, ossia reciprocamente come i quadrati dei diametri; nelle due sezioni del foro, e della vena contratta la ragione delle velocità doveva essere di $441 : 625$, oppure di $1 : 1\frac{2}{5}$, ch'è prossimamente la ragione di $1 : \sqrt{2}$.

Vel. nel for: Vel. nella vena $= 21^2 : 25^2 = 441 : 625$ ossia prossim. $= 1 : 1\frac{2}{5} = 1 : \frac{7}{5} = 5 : 7 = 1 : 1,4 = 1 : \frac{14}{10} = \sqrt{1} : \sqrt{\frac{196}{100}} = 1 : \sqrt{2}$ cioè prossimamente

Questa felice osservazione suggerì al Newton la maniera di combinarvi insieme anche un' altra, e di spiegare come la velocità, e la quantità d'acqua uscita in un dato tempo sia bensì proporzionale alla radice dell' altezza, ma nella quantità assoluta sia minore della quantità che uscirebbe colla velocità acquistata cadendo liberamente da tutta l'altezza del vaso. Mentre considerando la vena contratta come l'ultima sezione del vaso, e supponendo che nella vena solamente si abbia la velocità, che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza proposta, la velocità assoluta nel foro sarebbe minore in ragione di $1 : \sqrt{2}$, e però le due velocità nel foro, e nella vena contratta seguirebbero la ragione sudduplicata dell' altezza: ma la velocità assoluta nel foro sarebbe solamente quella che si acquisterebbe cadendo dalla metà dell' altezza medesima. E così anche la quantità d'acqua uscita in un dato tempo sarebbe minore, in ragione di $1 : \sqrt{2}$, della quantità, che uscirebbe colla velocità corrispondente a tutta l'altezza. Più propriamente direbbesi che uscendo l'acqua colla velocità di tutta l'altezza, per cagione del restringimento della vena, è come se uscisse liberamente da un foro più piccolo.

La proporzione dei diametri del foro, e della vena contratta, e delle quantità d'acqua, ch' escono realmente in un dato tempo, e che escirebbero colla velocità acquistata cadendo da tutta l'altezza del vaso, è poi stato il soggetto di molte altre sperienze, ripetute più in grande a giorni nostri in Francia, e ancora in Italia, come diremo a suo luogo. Il Mac-Laurin nel Cap. XII. della grand' Opera delle Flussioni diede una maggiore estensione alle teorie Idrauliche del Newton: e supponendo le stesse cose intorno alla formazione, e ai limiti della cateratta, s'immaginò che tutto il peso del fluido si potesse distinguere in tre parti, una delle quali s'impiegasse nell' accelerare il fluido dentro del vaso, l'altra nell' accelerarlo all' uscita, e la terza nel premere il fondo: ed in oltre suppose che la forza dell' accelerazione all' uscita fosse alla forza della pressione, come il solido della cateratta già detta $FEDC$ a tutto il resto del cilindro $FXZC$. Quest' ultima supposizione ne includerebbe anche un' altra, che data l'altezza del vaso si avesse sempre la stessa accelerazione e al principio, e nel proseguimento del

del moto, comunque il fluido si possa considerare diversamente, nel primo caso come ancora stagnante, e nel secondo come composto di strati, e di particelle spinte con una determinata velocità verso il foro.

Ma indipendentemente da questo dubbio tutta la teoria della cateratta non sembra altro che un' ingegnosa immaginazione. Il Sig. Daniello Bernoulli ha fatto vedere colle sperienze che i varj moti del fluido dentro il vaso non hanno nulla che si possa rapportare ai limiti della curva indicata. Mentre avendo gettato nell' acqua delle polveri colorate per potervi più facilmente seguitare coll' occhio la direzione di tutt' i moti, osservò che le polveri discendevano quasi verticalmente per quasi tutta la larghezza del vaso, e che solamente in poca distanza dal foro incominciavano a piegare, e convergere verso di esso. Riassumendo il discorso del Newton è manifesto che sciogliendosi in acqua qualunque strato del cilindro di ghiaccio, immaginato al disopra del vaso, tutte le particelle dovrebbero discendere parallelamente, e staccarsi così tra di loro. E se per tenerle tutte contigue, e restringerne le sezioni a proporzione della velocità accresciuta nella discesa, vi s'intendessero aggiunti di fianco dei moti orizzontali, non si avrebbe più il caso d'un fluido, che dalla sola forza di gravità, e di pressione è portato ad uscire dal foro. Neppure in questo caso è possibile che un' iperbola del terzo ~~quarto~~ grado, o qualunque altra curva formi il limite delle due porzioni contigue di fluido, una delle quali sia immobile, e l'altra si acceleri, e si restringa. Finalmente la velocità delle particelle all' uscita non sarebbe proporzionale alla radice dell' altezza del vaso se non perchè si risguarderebbero tutte come cadute dall' altezza medesima: il che non potrebbe aver luogo almeno quando il moto incomincia, e per le prime particelle, che sortono.

E come le supposizioni del Newton non sembrano in nessuna maniera applicabili al principio del moto, così pare che i principj del Varignon siano al più applicabili al principio, e non alla continuatinuazione del moto de' fluidi, ch' escono da qualche vaso. Il ragionamento del Varignon, ch' è stato ancora seguitato dall' Ermanno, dal Grandi, e da molti altri, in sostanza si riduce a questo: che la pressione nei vasi è proporzionale all' altezza: che la quantità del moto ne' fluidi, ch' escono dai fori, è proporzionale alla pressione: che il numero delle particelle uscite in un dato tempo è in ragion semplice, e la quantità del moto in ragion duplicata della velocità: e che per conseguenza l'altezza del fluido nei vasi è come il quadrato della velocità acquistata nei fori. Posto che ciò sia vero nelle prime particelle, che sortono, resterebbe da vedere se continuandosi il moto, anche al di dentro del vaso, la forza sia tuttavia proporzionale all' altezza: cioè se la pressione sia inalterabilmente la stessa in un fluido stagnante, o posto in movimento. In oltre quando il precedente ragionamento bastasse per determinare in qualunque caso la proporzione delle velocità, non basterebbe poi per ritrovarne la quantità assoluta: e l'Ermanno nella Prop. XXXIII. del Lib. II. della Foronomia suppose appunto senza dimostrazione che la quantità assoluta della velocità fosse quella, che si acquisterebbe cadendo liberamente da tutta l'altezza del vaso.

CAPO TERZO.

Dei metodi Analitici de' Signori Giovanni, e Daniello Bernoulli, Alembert, ed Eulero.

Dopo i primi tentativi degli Autori già nominati per applicare le leggi più generali della Meccanica al moto de' fluidi, che sgorgano dalle aperture dei vasi, tre Opere memorabili sono uscite alla luce: l'Idrodinamica del Sig. Daniello, l'Idraulica del Sig. Giovanni Bernoulli, e il Trattato dell' equilibrio, e del moto de' fluidi del Sig. d'Alembert. Questi celebri Autori per vie assai differenti sono quasi sempre arrivati alle conclusioni medesime, e qualche volta non hanno discordato che nell' ipotesi. Il primo ci ha dato ancora una serie d'interessanti, e delicate esperienze. Il terzo ci ha avvertiti sotto il Prob. IV. del Lib. II., che quanto mai si può dire in questa materia è limitato a due supposizioni: l'una che gli strati del fluido, che si muove, restino tra loro paralleli: l'altra che in tutte le particelle del medesimo strato si abbia sempre un' eguale velocità, e che in tutte la direzione del moto sia parallela. La prima supposizione non è generalmente conforme alle sperienze, mentre la superficie superiore dei vasi, che si vuotano, spesse volte si abbassa nel mezzo, massime se il foro non è molto piccolo, e l'altezza del fluido non molto grande. La seconda non può essere esattamente vera nei vasi, che non siano verticali, e prismatici, e non si può in modo alcuno applicare agli strati, che sono in vicinanza dei fori, dove le direzioni incominciano visibilmente a convergere.

Queste, e alcune altre eccezioni variamente cavate dalle prefazioni, e da qualche scolio delle opere già nominate, hanno dato luogo a parlarne diffusamente in un libro assai conosciuto nel nostro paese, e intitolato l'Idrostatica esaminata ne' suoi principj. Ma qui da noi potrebbe qualcuno richiedere molto di più, cioè ch' entriamo nello spirito delle teorie, e dei metodi differenti dei tre celebri Autori sopraccitati, che gli svolgiamo nelle espressioni più precise, e più semplici, e che facciamo sentire cosa vi resti veramente da desiderare, e da aggiugnere. Nella continuazione delle presenti Instituzioni cercheremo di portare più avanti le nostre ricerche, di supplire a tutt' i dubbj sperimentali, e teorici, e di ridurre alla certezza fisica i calcoli della velocità, e della quantità delle acque correnti: mentre al contrario pare che lo scopo principale dell' indicata Idrostatica fosse di spargere tutt' i dubbj possibili sulle teorie senza giammai ricercare il modo di prevenirli, o di scioglierli: e dopo di avere richiamate le teorie generali alle semplici esperienze, pare che ancora sopra di esse si studiasse l'Autore di di accumulare degli altri dubbj. Noi faremo buon uso a suo luogo di alcune sperienze, che ha fatto, e lascieremo che ciascuno confronti a piacere questo col di lui libro, senza che abbiamo occasione più di citarlo.

Ora per incominciare dal metodo del Sig. d'Alembert, si chiami v la velocità comune di tutto lo strato $BAab$, *fig.* 73.: dv la variazione, che vi si fa nel tempo infinitamente piccolo dt: dx l'elemento Hb dell' altezza variabile HO: e finalmente g la gravità acceleratrice. Se lo strato $BAab$ fosse abbandonato alla sola forza di gravità, la velocità v dopo il tempo dt diverrebbe $v+gdt$, ossia $v+gdt+dv-dv$. Poichè adunque coll' azione degli altri strati diviene $v+dv$, bisogna che in qualsivoglia strato sia $gdt-dv=0$, ed, essendo $dt=\frac{dx}{v}$, bisogna ancora che in tutta l'altezza HO sia $\int\frac{g\,dx^2}{v}=\int dx\,.\,dv$. Quest' equazione fondamentale, con cui si estende all' Idraulica il principio generale introdotto nella Dinamica dal Sig. d'Alembert, oltre alle due precedenti supposizioni, propriamente ne includerebbe anche un' altra: che essendo v la velocità corrispondente alla pressione degli strati superiori, la variazione dv dipenda unicamente dalla gravità g di ciascuna particella dello strato $BAab$, e che però sia sempre $gdt=dv$, come succederebbe in altrettante particelle isolate. Adunque la precedente equazione si risolverebbe nella prima formola generale dei moti variabili: e ciò è quanto dire, che data l'altezza del fluido si abbia sempre la stessa pressione, e nel principio, e nel proseguimento del moto: alla quale supposizione abbiam veduto che si riducono anche i principj dell' Ermanno, e del Varignon. Date queste ipotesi fisiche l'analisi del Sig. d'Alembert è molto semplice, ed elegante.

Si chiami y l'area della sezione BA, n l'area del foro ED, u la velocità nello stesso foro. Sarà $v=\frac{nu}{y}$, $dv=\frac{nydu-nudy}{y^2}$, e fatte

e fatte queste sostituzioni sarà l'equazione fondamentale

$$\int\frac{gy\,dx^2}{nu}=n\int\frac{du\,.\,dx}{y}-n\int\frac{udy\,dx}{y^2}.$$

E poichè passa per tutte le sezioni la stessa quantità di fluido ydx, e ancora le quantità u, e du sono invariabilmente le stesse rispetto a tutt'i differenti strati del vaso, si potrà ancora disporre tutta l'equazione sotto la forma $\frac{gydx}{nu}\,.\int dx=ndu\,.\int\frac{dx}{y}-nuydx\,.\int\frac{dy}{y^3}$: e prendendo le somme del primo, e dell' ultimo termine si avrà

$$\frac{gx\,.\,ydx}{nu}=ndu\,.\int\frac{dx}{y}-nuydx\left(\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{2n^2}\right):$$

e finalmente se s'intenda per x tutta l'altezza del vaso TO, e per y la sezione superiore FC, sarà

$$2gx\,.\,ydx=u^2\,.\,ydx-n^2u^2\,.\,\frac{dx}{y}+2n^2\,.\,udu\,.\int\frac{dx}{y}.$$

Daniello Bernoulli ha esteso ai fluidi, che si muovono, un altro principio generale della Statica de' solidi: che in qualunque sistema de' corpi, in qualunque discesa, il centro di gravità acquista la velocità necessaria per risalire con direzione opposta all' altezza medesima di prima. Il principio generalmente è manifesto, perchè le azioni della gravità, che si fanno in senso contrario, non possono distruggersi se non in punti egualmente alti, e per eguali spazj scendendo, e poi ascendendo. Ma nell' applicazione di questo principio ai corpi fluidi lo stesso Sig. Bernoulli, sul fine delle Sezioni prima, e terza, ci ha prevenuti d'un dubbio, che per l'azione reciproca delle particelle de' fluidi non venga a perdersi qualche porzione del moto concepito. Il dubbio è tanto più naturale perchè verso le aperture dei vasi convergendo insieme le direzioni di tutt'i moti, e in parte ancora opponendosi, vi è qualche porzione di forza, che deve elidersi. Il Sig. Bernoulli confessò di non avere alcun metodo per calcolare la porzione della forza assorbita, e attribuì anche a ciò che molte volte non si accordino le ſperienze coi reſultati della teoria. Suppoſto però il di lui principio dell' uguaglianza tra la diſceſa attuale, e la ſalita potenziale del centro di gravità, tutto il calcolo eſpoſto nella Sezione ſeconda dell' Idrodinamica ſi può ridurre ad eſpreſſioni molto più ſemplici.

Sia come prima l'altezza del fluido $TO = x$, l'area dello ſtrato ſuperiore $FC = y$, e s'intenda che aperto il foro ED eſca in un dato tempo il volume di fluido $EDde = FCcf = ydx$. Sia b la diſtanza della baſe XZ dal centro di gravità di tutta la maſſa M del fluido $fcZX$. Aggiunto di ſopra lo ſtrato ydx, ſarebbe la diſtanza del centro di gravità di tutto il fluido $FCZX$ dalla baſe $XZ = \frac{M.b + ydx.x}{M + ydx} = b + \frac{yxdx - bydx}{M}$: e aggiunto di ſotto il volume di fluido $EDde$, ſecondo le regole ſpiegate nel Cap. VII. del Lib. I. la diſtanza del centro di gravità della maſſa $fcZDdeEZ$ dalla ſuperficie fc ſarebbe $\frac{M.\overline{x - b} + ydx.x}{M + ydx} = x - b + \frac{bydx}{M}$: e la diſtanza dello ſteſſo centro dalla baſe XZ ſarebbe $b - \frac{bydx}{M}$. Però paſſando il fluido dalla ſituazione $FCZX$ nella $fcZDdeEZ$ ſarebbe la differenza delle diſtanze, oſſia la diſceſa attuale del centro di gravità $\frac{yxdx}{M}$.

Ora ſi chiami z l'altezza, a cui potrebbero ſalire tutte le particelle di uno ſtrato determinato dell' area m, colla velocità, che hanno al principio del dato tempo. Poichè le altezze ſono come i quadrati delle velocità, e le velocità ſono in ragione inverſa delle aree delle ſezioni, ſarà $\frac{m^2}{y^2}.z$ l'altezza corriſpondente alla velocità di uno ſtrato indeterminato dell' area y, e la ſomma delle ſalite potenziali di tutte le particelle, ſarà $\int \frac{m^2}{y^2}.z.ydx$, oppure $m^2 z.\int\frac{dx}{y}$, e la ſalita del centro di gravità $\frac{m^2 z}{M}.\int\frac{dx}{y}$. Ma ſe continuandoſi il moto, al fine del tempo propoſto, l'altezza conveniente allo ſtrato dell' area m diventaſſe $z + dz$, ſarebbe $\frac{m^2 dz}{M}.\int\frac{dx}{y}$ l'accreſcimento della ſalita potenziale dello ſteſſo centro di gravità. In oltre ſe mancaſſe di ſopra il ſolo ſtrato ydx mancherebbe alla ſomma delle ſalite di tutte le particelle la quantità $\frac{m^2 z}{y^2}.ydx$: ed eſſendo l'area del foro n, ed $\frac{m^2 z}{n^2}$ l'altezza corriſpondente alla velocità di ciaſcuna particella del fluido $EDde$, nell' uſcita del fluido dovrebbe accreſcerſi la detta ſomma della quantità $\frac{m^2 z}{n^2}.ydx$. Però nel paſſare il fluido da $FCZX$ in $fcZDdeEX$ ſarebbe la ſalita potenziale del centro di gravità $\frac{m^2}{M}\left(\frac{zydx}{n^2} - \frac{zdx}{y} + dz.\int\frac{dx}{y}\right)$:

ed eguagliando queſta quantità ad $\frac{yxdx}{M}$, ſi avrebbe

$$x.ydx = \frac{m^2 z}{n^2}.ydx - m^2 z.\frac{dx}{y} + m^2 dz.\int\frac{dx}{y}.$$

Ciò poſto ſe ſi chiamerà u la velocità delle particelle ſituate nel foro ED, ſarà $\frac{nu}{m}$ la velocità nello ſtrato dell' area m, e per conſeguenza ſarà $2gz = \frac{n^2 u^2}{m}$, e $2gdz = \frac{2n^2 udu}{m^2}$: e fatte queſte ſoſtituzioni ſi avrà la ſteſſa equazione già ritrovata coll' altro metodo antecedente $2gx = u^2 - \frac{n^2 u^2}{y^2} + \frac{2n^2 udu}{ydx}.\int\frac{dx}{y}$. Le altre riduzioni da farſi per ricavare da queſta equazione tutt' i rapporti del tempo, della velocità, e dell' altezza, non ſono che un la-

lavoro puramente analitico. Ciò che appartiene interamente all' Idrometria, e all' Idraulica, e che conviene più particolarmente avvertire, ſi è: in primo luogo che ſuppoſto il foro aſſai piccolo, e traſcurata la quantità n^2, ſi avrebbe $2gx = u^2$, e così la velocità nel foro ſarebbe quella, che ſi acquiſterebbe cadendo liberamente da tutta l'altezza del vaſo: e in ſecondo luogo che ſuppoſto $n^2 = y^2$, ſi avrebbe $2gx \cdot dx = 2udu \cdot \int dx = 2xudu$, e però ſi avrebbe la velocità iſteſſa di prima quando il foro ſi eguagliaſſe a tutta l'ampiezza del vaſo. Si avrebbe ancora lo ſteſſo caſo quando di fianco ad una ſezione verticale, e rettangola s'intendeſſe fatta un' apertura orizzontale di egual larghezza: e queſt' ultimo caſo potrebbe poi applicarſi ai fiumi, e ai canali, che non hanno alcuna pendenza ſenſibile di fondo.

Nella precedente equazione ſupponendo che z ſia l'altezza corriſpondente alla velocità nel foro, e però ſcrivendo n^2 in luogo di m^2, ed eſprimendo in ſeguito colla lettera m l'area dello ſtrato ſuperiore y, ſi avrebbe generalmente $z = \dfrac{m^2 x - \dfrac{n^2 dz}{dx} \cdot \int \dfrac{dx}{y}}{m^2 - n^2}$: e nel caſo particolare di un vaſo conſtantemente pieno, ſupponendo invariabile l'altezza z, e la velocità u nel foro, ſi avrebbe $z = \dfrac{m^2 \cdot x}{m^2 - n^2}$. A queſt' ultimo riſultato arrivò ſpeditamente il Sig. Giovanni Bernoulli nella nuova ſua Idraulica. S'immaginò egli che il fluido paſſando dalla ſezione FC nel foro ED, per un' altezza indefinitamente piccola mX, *fig.* 74., debba formare una ſpecie di gorgo $mEDn$, e che alla forza motrice di qualſivoglia ſtrato Bb ſi poſſa ſoſtituire un' altra forza, applicata in vece allo ſtrato ſuperiore FC, e tanto maggiore della prima quant' è maggiore l'area dello ſtrato, a cui ſi applica. Ciò poſto ſi chiami g la gravità di ciaſcuna particella, u la velocità nel foro ED, v la velocità nella ſezione BA, e ſiano ſucceſſivamente n, y, m le aree delle

delle ſezioni ED, BA, FC, e ſia in oltre $TH = x$, $Hb = dx$. Sarà $g \cdot ydx$ la forza motrice di tutto lo ſtrato dell' altezza Hb, e la forza equivalente da ſoſtituirſi in FC ſarà $gmdx$, e la ſomma di tutte le forze gmx. Ora eſſendo $gdx = vdv$, ſecondo le prime formole del moto accelerato, dev' eſſer pure la ſteſſa ſomma $\frac{1}{2} m \cdot \overline{u^2 - v^2} = \frac{1}{2} m \cdot \overline{u^2 - \frac{n^2 u^2}{y^2}}$, e poſto $y = m$ dev' eſſere la ſomma intera $\dfrac{\overline{m^2 - n^2}}{2m} \cdot u^2$. Quando adunque ſia z l'altezza corriſpondente alla velocità u, ſcrivendo $2gz$ in vece di u^2, ed eguagliando le due ſomme ſi avrà come prima $z = \dfrac{m^2 x}{m^2 - n^2}$.

Da queſto caſo più ſemplice è poi paſſato lo ſteſſo Autore a determinare le leggi del movimento per tutt'i caſi, nei quali la velocità non foſſe ancora arrivata nel foro allo ſtato di uniformità. Di più avendo trovato il modo di calcolare la velocità, e il moto d'un fluido, che da un cilindro verticale paſſaſſe in molti altri tubi orizzontali, e immaginandoſi che queſti tubi foſſero accreſciuti di numero, e raccorciati in lunghezza all' infinito, ha determinato il Bernoulli generalmente con quali leggi un fluido poſſa paſſare da un cilindro verticale in un tubo orizzontale di qualſivoglia figura, e ampiezza. Ma in tutto il di lui metodo oltre le ſuppoſizioni ordinarie del paralleliſmo degli ſtrati, e del moto uniforme di tutte le particelle di uno ſtrato medeſimo, vi è ancora la finzione del gorgo, che non pare applicabile al caſo dei fori aperti in una lamina piana, e ſottile. E ancora ſuppoſto il gorgo non pare che tutta l'accelerazione nel paſſare da una ſezione all' altra ſi debba attribuire al ſolo peſo del fluido ſuperiore, e non anche al reſtringimento delle ſezioni. Finalmente l'equazione fondamentale $gdx = vdv$ include l'altra ſuppoſizione che i fluidi ſotto una data altezza premano ſempre egualmente, e quando ſono in moto, e quan-

quando restano nello stato di quiete. Alcuni Autori più moderni riassumendo indistintamente le formole generali del moto accelerato, e facendo $2gx = v^2$, non hanno avvertito che riguardavano tutte le particelle del fluido come sciolte, isolate, e cadute attualmente da tutta l'altezza del vaso.

Il Sig. Leonardo Eulero negli Atti dell' Accademia di Berlino del 1755, e del 1760, e nei tomi XIV., e XV. dell' Accademia di Pietroburgo, è uscito da tutte queste limitazioni cercando generalmente il moto di qualsivoglia particella d'un fluido, e rapportandolo a tre coordinate ortogonali. Tutto il genio analitico dell' immortale Calcolatore si è spiegato in quest' occasione: si sono ritrovate le formole più generali del moto, e dell' azione de' fluidi tra loro: vi si sono applicati tutt' i sussidj, che si potevano mai sperare dall' Algebra. Ma appunto per quest' istessa generalità delle formole questo genere di sublimi ricerche appartiene all' Algebra interamente. Negli Atti del 1760 avendo incominciato a dire il Sig. Eulero, che si riduce a ben poco quanto gli altri Autori hanno scritto intorno al moto de' Fiumi, non ha poi fatto alcuna applicazione delle nuove sue formole se non alla possibilità del caso, che movendosi un Fiume sopra un fondo orizzontale conservi la superficie istessamente orizzontale. E nel tomo XV. di Pietroburgo, essendo trattato in 142 pagine il primo, e semplice caso del moto lineare de' fluidi, non vi si vede ancora il passaggio dalle formole analitiche all' Idrometria, e all' Idraulica. Noi adesso cercheremo che lumi ci possa somministrare la sola Fisica intorno alle leggi fondamentali della pressione, e del movimento de' fluidi.

CAPO

CAPO QUARTO.

Delle leggi, e delle sperienze Fisiche intorno al moto de' fluidi, ch' escono dai vasi.

E' Rigorosamente vero che la velocità d'un fluido, che incomincia ad uscire dalle aperture di qualche vaso, è come la radice dell' altezza di tutto il resto del fluido, che preme. Mentre le pressioni dei fluidi omogenei si misurano dalle semplici altezze, come si è detto: le istesse pressioni devono ancora proporzionarsi alle quantità del moto, che generano in un dato tempo: la quantità del moto è come la quantità del fluido, ch' esce nel tempo dato, moltiplicata per la comune velocità: la quantità istessa del fluido è proporzionale alla velocità, con cui esce: e però le altezze sono proporzionali ai quadrati delle velocità, e le semplici velocità alle radici delle altezze. Così è affatto concludente il discorso dell' Ermanno, e del Varignon quando si limiti al principio del moto: nel qual caso, rimanendo ancora stagnante tutto il resto del fluido al di dentro del vaso, non vi può essere nessun dubbio che la quantità del moto nelle prime particelle, che sortono, non sia l'effetto intero della pressione. E poichè la pressione dei fluidi si esercita sempre egualmente verso qualunque parte, la proporzione delle velocità rimarrà sempre la stessa comunque l'apertura sia fatta o nel fondo del vaso, o di fianco: e così le velocità, con cui lo stesso fluido comincierà ad uscire dai fori sotto altezze differenti saranno proporzionali alle radici delle altezze medesime. Lo stesso potrebbe dirsi di un fluido, che continui ad uscire da un foro infinitamente piccolo, poichè in questa supposizione tutto il resto del fluido dentro del vaso potrebbe sempre considerarsi come stagnante. Ma nel caso di un foro qualunque, e di un moto continuato e fuori, e dentro del vaso, possono nascere tanti dubbj intorno alla quantità, e alla direzione del moto, e della pressione, che il problema

blema superi affatto le forze della Geometria, e del calcolo.

Generalmente parlando la difficoltà di tutt' i problemi cresce in proporzione del numero delle condizioni, e degli elementi, che vi entrano. Così i problemi meccanici sono tanto più complicati quant' è maggiore il numero, de' corpi, de' quali si cerca il moto, e che in qualunque maniera agiscono tra di loro. Ora in una massa di fluido, che si muova in qualsivoglia tubo, o canale tutte le particelle agiscono insieme urtandosi, premendosi, e, come porta la natura del fluido, facendo passare la pressione dall' una all' altra in qualunque senso, e all' infinito. Dunque il determinare la velocità, e il moto di ciascuna particella è un problema che dipende da infinite equazioni, e che supera per conseguenza tutte le forze dell' Algebra. Per questa ragione io riguardo l' Idraulica, e l' Idrometria come una parte della Fisica più tosto che della Matematica, o come una parte della Matematica, i cui progressi finora fatti, e da farsi sono puramente ipotetici, e limitati a certi casi, che forse nella natura rigorosamente non hanno luogo. Questa è una verità, che un Matematico deve ultroneamente accordare. Ma nello stesso tempo io devo aggiugnere, che in tutte queste materie, e massime nella teoria, e nella pratica de' Fiumi, bastano le prove, e le dimostrazioni Fisiche, e che io risguardo come una verità fisicamente certa, che i fluidi nell' uscire dai vasi incominciano, e continuano a moversi colle leggi medesime, e che la velocità, tanto nel principio, quanto nel proseguimento del moto, è quella istessa, che si acquisterebbe cadendo liberamente da tutta l' altezza del fluido superiore.

Per rendere ragione di tutto ciò incomincierò a mettere sotto agli occhj con un esempio i limiti, e i gradi della certezza delle verità Fisiche. Per indagare le prime leggi della caduta libera dei corpi gravi bisogna premettere un' ipotesi, di cui inutilmente si cercherebbero delle prove dirette, e rigorose: che la gravità agisca egualmente, e nel principio, e nel proseguimento del moto. I resul-

sultati di quest' ipotesi sono, che gli spazj percorsi crescano come i quadrati delle velocità, o come i quadrati dei tempi, computati del principio del moto. Ciò assai prossimamente si accorda colle sperienze, e dentro i limiti di piccolissime differenze, che devono attribuirsi alla resistenza dell' aria: e ciò appunto è bastato perchè l' ipotesi fosse riguardata dal Galileo, e dagli altri Autori come fisicamente certa. Alla stessa maniera si può supporre che la pressione de' fluidi si eserciti sempre egualmente, e in quelli che cominciano, e in quelli che continuano a moversi. I primi resultati di quest' ipotesi sarebbero, che la quantità del moto dovesse sempre proporzionarsi all' altezza intera del fluido, e la velocità alla radice dell' altezza medesima: e in oltre se continuando il fluido ad uscire dal foro *ED*, *fig.* 72., si rimettessero dalla parte superiore *FC*, degli altri strati, e si mantenesse nel vaso l' altezza costante *TO*, quando le particelle del primo strato *FC* fossero arrivate al foro *ED*, avrebbero veramente tutta la velocità, che ogni altro corpo acquisterebbe cadendo da tutta l' altezza *TO*: e però la velocità di tutte le particelle sarebbe non solamente proporzionale, ma ancora eguale a quella, che si acquisterebbe cadendo dall' altezza del fluido che preme. Quando ciò si trovasse sufficientemente conforme alle sperienze, questo primo principio dell' Idraulica arriverebbe alla stessa certezza fisica dei teoremi fondamentali della Statica: il che deve bastare per tutt' i calcoli, e per gli usi, che in seguito abbiano a farsi nella teoria, e nella pratica dei Fiumi.

E quì lasciando a parte le sperienze più ingegnose, e sottili, addurremo solamente i fenomeni più famigliari, e più semplici, che ciascuno può facilmente verificare da se medesimo, e in cui la complicazione del meccanismo, e del metodo può portare delle minori differenze. Se al fondo di un vaso ripieno d' acqua si adatterà un tubo incurvato, e rivolto un poco all' insù, e, incominciato il getto, si chiuderà con un dito l' apertura del tubo; le ultime gocciole, come le altre antecedenti, saliranno prossimamente fino all' orizzon-

 tale

tale tirata per la superficie dell' acqua, che rimane ancora nel vaso. Se il getto non è assai grande la differenza non è sensibile. Il Mariotte non ne ha trovata nessuna qnando l'altezza dell' acqua era di 7, o di 8 pollici. Quando il fluido nel vaso si alzava 16 pollici sopra l'apertura del tubo, l'altezza del getto mancava solamente di una linea, cioè di $\frac{1}{192}$: e quando l'altezza dell' acqua era di due piedi, tutto il divario non arrivava ad $\frac{1}{144}$. Nei getti maggiori, come vedremo, la differenza non è grandissima. Qualunque sia la ragione, e la serie degl' impedimenti esteriori, che tengono i getti più grandi al disotto delle altezze delle conserve, del che tratteremo nell' altro capitolo susseguente, deve però valutarsi la sicura sperienza, che nei getti di un' altezza sensibile, per esempio d'un piede, le prime gocciole egualmente, che le ultime escono dall' apertura inferiore colla velocità, che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza dell' acqua, che preme. E ancora nei getti maggiori la continuazione del tempo non ne diminuisce punto l'altezza. Questo è il più sicuro riscontro, che possa somministrare la Fisica, dell' eguaglianza della pressione, e nello stato di moto, e nello stato di quiete.

Pol. 16 X [illegible] $\frac{1}{192}$ [illegible] 16 Pollici [illegible] 24 [illegible] $\frac{1}{144}$ [illegible]

Un altro genere di sperienze ha lungamente occupato i più celebri Idraulici intorno alla quantità dell' acqua somministrata in egual tempo da eguali aperture sotto altezze differenti: e la quantità istessa s'è ritrovata sempre proporzionale alla radice delle altezze. Il Mariotte nel discorso secondo della terza parte osservò, che sotto l'altezza di 16 pollici da una data apertura usciva precisamente la metà dell' acqua, che veniva somministrata in egual tempo sotto l'altezza di 64 pollici. In altezze anche maggiori le sperienze del Mariotte corrispondevano tanto bene a tutt' i principj antecedenti, che sotto 35 piedi d'altezza tutto il divario non arrivava ad $\frac{1}{17}$, o ad $\frac{1}{18}$ di tutta la quantità d'acqua. Questo fatto è

[illegible] 16 : [illegible] 64 [illegible] = 4 : 8 = 1 : 2

[illegible]

poi

poi stato generalmente verificato, e confermato da tutti gli altri più celebri sperimentatori. Ma ultimamente il Sig. Bossut a Parigi, e il Sig. Michelotti a Torino hanno avuto tutt' i comodi, e i mezzi di fare le sperienze più in grande, e con tante cautele, che non occorre più di pensare a ripeterle. L'esito è stato sempre lo stesso. Per esempio nelle sperienze riferite nel Cap. IV. della Par. II. dell' Idrodinamica del Sig. Bossut la quantità d'acqua somministrata in un minuto ~~secondo~~ da un foro circolare di un pollice di diametro sotto l'altezza di piedi 4 era di 5436 pollici cubi, e sotto l'altezza di piedi 9 era di pollici 8135: i quali numeri sono prossimamente tra loro come 2 : 3. Lo stesso deve dirsi delle sperienze fatte con altre aperture, e fino sotto l'altezza di piedi $11\frac{3}{4}$. Ed è singolare la diligenza con cui l'Autore ha cercato di mantenere il vaso costantemente pieno, e di ovviare qualunque altra irregolarità in tutto il tempo delle sperienze. Il Sig. Michelotti ha arricchito l'Idraulica con 130 altre sperienze fatte sotto l'altezza di 7, 12, e fino di 21 piedi, ed ha ancora diligentemente notato le più piccole differenze, che nascono, o dalla grossezza delle lastre, in cui si scolpiscono i fori, o dai cannelli, che vi si adattano esteriormente, o da qualche specie d'imbuto, che termini interiormente nel foro. Ma poste pari tutte le altre circostanze, e dividendo la quantità d'acqua uscita in un dato tempo per la velocità corrispondente alle altezze delle conserve, ha egli trovato in tutte le combinazioni assai prossimamente lo stesso numero: e così la quantità d'acqua era sempre proporzionale alla velocità misurata dalla radice dell' altezza.

X [illegible] 4 e 9

2 : 3 = 5436 : 8135 [illegible] = 16306

Ciò è quanto basta per gli usi pratici del calcolo della quantità d'acqua, che può abbisognare nei nostri paesi. Mentre tra di noi non trattandosi della quantità assoluta dell' acqua, ma solamente della proporzione dell' acqua somministrata in un dato tempo da una bocca proposta alla quantità somministrata da un' altra bocca,

che

che pigliaſi per l'unità, per gli elementi di tutto il calcolo baſta ſapere, che le velocità ſono ſempre proporzionali alle radici delle altezze; ſenza cercare ſe ſiano di quella iſteſſa quantità, che ſi acquiſterebbe cadendo da tutte le altezze corriſpondenti. Per avere non ſolamente la proporzione, ma ancora la quantità aſſoluta dell' acqua nelle ſperienze accennate biſogna fare un' altra importante avvertenza intorno alla ſezione, che ſi può prendere per il vero foro del vaſo. Facendo entrare nel calcolo l'apertura iſteſſa del vaſo, la quantità d'acqua ſomminiſtrata in un dato tempo ſi troverebbe ancora proporzionale alla radice dell' altezza, ma riuſcirebbe ſenſibilmente minor di quella, che potrebbe uſcire con tutta la velocità dell' attuale diſceſa. Per eſempio ſuppoſta l'altezza di piedi 4, oſſia di pollici 48, la velocità della caduta ſarebbe quella, con cui in egual tempo ſi ſcorrerebbero equabilmente 96 pollici. Suppoſta in oltre, che l'apertura circolare del vaſo ſia d'un mezzo pollice di diametro, ſarebbe l'area intera del foro di pollici quadrati $\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times 3.14159$. E finalmente, ſuppoſta la velocità uniforme in tutto il foro, ſarebbe di pollici cubi 6×3.14159 la quantità d'acqua uſcita nel tempo, che s'impiega da un corpo nella caduta libera dall' altezza di piedi 4. Ma in un minuto ſecondo cade un corpo dall' altezza di piedi 15.1: la cui radice eſſendo 3.886, ed eſſendo i tempi delle cadute libere proporzionali alle radici delle altezze ſarà $2 : 3.886$ come 6×3.14159 al numero dei pollici cubi dell' acqua uſcita in un ſecondo dal detto foro. Onde moltiplicando lo ſteſſo numero per 60, la quantità d'acqua, che dovrebbe uſcire in un minuto primo ſi troverebbe di pollici cubi 2197, quando nelle ſperienze del Sig. Boſſut s'è ritrovata ſolamente di 1553, cioè minore in ragione di $5 : 7$, ch'è la ragione aſſai proſſima di $1 : \sqrt{2}$.

Queſta appunto è la ragione ritrovata dal Newton tra l'area del foro aperto nel vaſo, e la ſezione della vena contratta alla diſtanza di un mezzo pollice, come ſi è detto nel Cap. II., e ciò baſta per far vedere che tutto il divario delle ſperienze, e dei calcoli non è che un riſultato di tutti gli altri principj antecedenti. Cioè l'obbliquità delle direzioni, e la convergenza dei moti, con cui le particelle del fluido d'ogn' intorno affacciandoſi al foro ſi avvicinano tra di loro, e ſi diminuiſcono d'area, e di ſezione, produce lo ſteſſo effetto, come ſe il fluido uſciſſe da un foro più anguſto, o come ſe in poca diſtanza dal primo foro ne foſſe adattato un altro ſimile, e di un' area minore nella ragione di $5 : 7$. Lo ſfregamento del fluido contro gli orli del foro, l'adeſione di tutte le particelle, e la reſiſtenza dell' aria non poſſono avere che una parte aſſai piccola in tutto queſto fenomeno. Mentre qualunque ſia lo ſfregamento antecedente, ciaſcuna particella ſi affaccia veramente al foro con tutta la velocità corriſpondente all' altezza, ed alla preſſione del fluido, che reſta ancora nel vaſo. E poi gli impedimenti accennati ſono tutti realmente aſſai piccoli, come vedremo. I tubi adattati eſteriormente al foro di un vaſo, o interiormente a forma d'imbuti, facendo variare le obbliquità delle direzioni, e la contrazione della vena portano ancora qualche variazione ſenſibile nella quantità d'acqua, che ſorte in un dato tempo. Ma eſſendo pari tutte le circoſtanze degl' imbuti, e dei tubi, le quantità d'acqua ſomminiſtrate in egual tempo da fori eguali in diverſi vaſi ſono ſempre proporzionali alle radici delle altezze, e nello ſteſſo vaſo la quantità d'acqua, ch'eſce dal foro, ha ſempre una data ragione a quella, che uſcirebbe in egual tempo colla velocità corriſpondente a tutta l'altezza nella ſuppoſizione che per l'obbliquità delle direzioni non veniſſe a variarſi l'area del foro vero.

Le ulteriori ricerche, che ſi ſono fatte in queſta materia appartengono più toſto alla Fiſica eſperimentale, che all' Architettura Idraulica, ed alla Idrometria: come che ſi ha la minima quantità d'acqua, quando l'apertura del vaſo è fatta in una laſtra ſottile: che ſi accreſce la quantità d'acqua, adattando all' apertura un cannello

nello di una certa lunghezza, oltre la quale la quantità d'acqua di nuovo ſi fa minore: ch'eſſa ſi accreſce ancora di più adattando interiormente nel vaſo innanzi all' apertura una certa forma d'imbuto: che più dei tubi cilindrici, o priſmatici ſi accreſce la quantità d'acqua nei tubi fatti a piramide, o a cono troncato: e che gli imbuti cicloidali l'accreſcono più degli altri, nei quali ſi è fatta ſinora l'eſperienza. Intorno a ciò il Sig. Michelotti ci ha laſciato una ſerie di belle, e intereſſanti eſperienze. Il Sig. Boſſut in un foro circolare di un pollice di diametro, con un tubo cilindrico di 4 pollici di lunghezza, ſotto l'altezza di piedi $11\frac{2}{3}$ d'acqua, trovò che la quantità effettivamente ſomminiſtrata era alla quantità calcolata come $10:13$. Rimoſſo il tubo, con altri fori di un mezzo, di uno, e di due pollici di diametro, ſcolpiti in una ſemplice laſtra, ſotto la ſteſſa altezza d'acqua, riſultò la proporzione di $5:8$, o ancora più proſſimamente di $5:8\frac{1}{10}$. Tutto ciò, che ſi è qui riferito, baſtava per il noſtro preſente aſſunto. In ſeguito quando occorrerà di trattare non della ſemplice proporzione, ma della quantità aſſoluta dell' acqua ſomminiſtrata in un dato tempo da una bocca, in cui abbia luogo la contrazione della vena, e che ſi poſſa raſſomigliare alle aperture delle laſtre dei vaſi, riterremo il principio di fare il calcolo come ſopra per tutta l'area dell' apertura, e poi di prendere nelle altezze più piccole $\frac{5}{7}$, e nelle altezze maggiori $\frac{5}{8}$ della quantità calcolata per approſſimarſi meglio alla vera.

CAPO

CAPO QUINTO.

Delle ſuppoſte, e delle vere cagioni delle differenti altezze dei getti d'acqua.

CHe i getti d'acqua non tanto piccoli reſtino ſempre al diſotto delle altezze delle conſerve, è un fenomeno già oſſervato anticamente. Il Torricelli ſul fine del ſecondo libro intorno al moto dei corpi gravi ne addusse due ragioni differenti: la reſiſtenza, che le particelle dell' aria preſentano a quelle dell' acqua: e l'azione delle particelle ſuperiori dell' acqua, che, ritardandoſi nel ſalire, devono in qualche maniera impedire il moto delle altre, che ſeguono a sboccare dal foro con una maggiore velocità. Il Mariotte nella quarta parte del ſuo trattato ſul movimento delle acque, ricercò con diverſe ſperienze tutte le variazioni di queſto così curioſo fenomeno. Ritrovò egli in primo luogo che dando al getto una inclinazione anche piccola ſi otteneva un' altezza ſenſibilmente maggiore che nel getto verticale: in ſecondo luogo che dalle aperture di maggiore diametro ſi avevano ancora dei getti più alti: e in terzo luogo che quando le aperture dei tubi non erano tanto piccole, lo ſpazio che mancava all' elevazione del getto per arrivare ſino all' orizzontale tirata per la ſuperficie delle conſerve riuſciva proſſimamente proporzionale ai quadrati dell' elevazione medeſima. Onde avendo trovato che nell' altezza di piedi cinque il difetto era di circa un pollice, diede per regola generale che il numero dei pollici, per cui qualunque altro getto deve reſtare al diſotto del pelo d'acqua del vaſo, è il quadrato del numero di piedi dell' altezza totale diviſo per 25.

Le principali ſperienze del Mariotte ſi poſſono mettere più preciſamente ſott' occhio colla tavola ſeguente.

Eſpe-

Esperimenti.	*Altezza dell' acqua nella conserva.*		*Apertura del tubo.*	*Altezza del getto quasi verticale.*	
I.	piedi 5.,	pollici 0.	linee 6.	piedi 4.	poll. 11.
II.	5.	6.	6.	4.	3.
III.	12.	4.	4.	12.	$\frac{1}{2}$
IV.	24.	5.	6.	22.	10.
V.	24.	5.	3.	22.	2.
VI.	26.	1.	10.	23.	9
VII.	26.	1.	3.	22.	0.
VIII.	34.	$11\frac{1}{2}$	6.	31.	9.
IX.	34.	$11\frac{1}{2}$	3.	28.	0.

che per avere la man[illegible] canza del getto bisogna fare il quadrato de' piedi indi dividerlo per 25 [illegible] il quoto è eguale ad un numero di pollici che mancano si vede che facendo il quadrato di 26 si ha 676 che diviso per 25 = 27.[illegible] cioè in piedi 2 pollici 3 che levato dai 26 piedi si ha il getto = 23 piedi e 9 pollici non [illegible] alcuna [illegible] non [illegible] capo delle linee

Lo stesso Autore dando assai poco allo sfregamento delle particelle dell' acqua contro gli orli del foro, e ad altre cause consimili, credette di ritrovare nella resistenza dell' aria la ragione principale, per cui, restando pari tutte le altre circostanze, le differenze delle altezze dei getti debbano essere come i quadrati delle altezze totali delle conserve. Il ragionamento del Mariotte è assai vago, e inconcludente, e si potrebbe più precisamente ridurre a questi termini. Sia z l'altezza che manca ad una data particella d'acqua per salire fino al livello della conserva. La velocità sarà proporzionale alla radice dell' altezza z. Ora la resistenza dell' aria dev' essere come la stessa velocità, e come il numero delle particelle d'aria urtate, e smosse in un dato tempo dalla particella d'acqua, che sale: il qual numero essendo proporzionale alla semplice velocità, sarà la resistenza come il quadrato della velocità istessa, cioè come l'altezza z. Onde nell' elemento dz della colonna d'acqua, che sale, sarà l'elemento della resistenza zdz, e la somma sarà $\frac{1}{2}z^2$: e così la resistenza totale, che si oppone dall' aria all' elevazione del getto, restando pari la larghezza del foro, sarà proporzionale al quadrato dell' altezza dell' acqua nella conserva.

Lo

La stessa conclusione si potrebbe cavare più esattamente dalle formole generali, che il Sig. Daniello Bernoulli ci ha dato per calcolare la resistenza di un corpo, che sale, o scende nell' aria, come vedremo a suo luogo. Ma in seguito faremo ancora vedere che applicando le formole generali ai casi particolari già conosciuti, risulterebbero nelle altezze dei getti d'acqua delle differenze molto maggiori di quelle che si conoscono di fatto colle sperienze. Onde siccome tutte le altre cagioni fin ora indicate possono bensì contribuire ad accrescere le differenze medesime, e non già a diminuirle, ciò basta per far sentire che, non essendovi errore nel calcolo, ve ne dev' essere certamente qualcuno nei dati, e nelle ipotesi. E l'errore non si riduce solamente alle generali difficoltà dei problemi della resistenza, e del moto de' fluidi, o di qualunque altro sistema di un infinito numero di particelle, che agiscano, ed influiscano le une sulle altre, ma è ancora principalmente perchè tutto ciò che può dirsi dell' azione dell' aria sulle gocciole d'acqua, che sono le prime a slanciarsi in alto, non si può in modo alcuno applicare alla colonna intera del getto.

Incominci una gocciola sola a salire da O in T, *fig. 75*. Dovrà essa mover di luogo tutte le particelle d'aria, che sono nello spazio OT, e perdere tutto il moto, che vi comunica. Ma fatta che sia una volta la divisione dell' aria, e incominciato il getto $OQPT$, le particelle d'acqua, che salgono consecutivamente da Q in P, e che sono contigue alle altre di già salite più in alto, non devono già movere di luogo altrettante particelle d'aria, e perdere altrettanto d'impeto, e di forza. Questo semplice ragionamento è confermato ancora dalle sperienze replicate diligentemente dal Wolfio, e da lui riferite al §. 51. dell' Idrostatica. Mentre in un getto di circa un piede d'altezza, che già nell' aria restava sensibilmente più basso del livello della conserva, fatta l'esperienza nel vuoto non si ottenne un' altezza maggiore, e solamente il getto restò più unito, e non diviso in tante gocciole, e spruzzi come nell' aria libera.

Y

bera. Ed a questa esperienza si può aggiugnere anche l'altra riferita dal medesimo Autore, che le differenze delle altezze dei getti sono maggiori nel mercurio che nell' acqua, quantunque la resistenza di un corpo più denso nello stesso mezzo debba essere necessariamente minore di quella di un altro corpo specificamente più leggiero, e più raro.

Io dunque non crederei che la resistenza dell' aria potesse avere gran parte nel fenomeno, di cui si tratta. Il Grandi, il Bossut, ed altri Autori fecero ancora poco caso della resistenza che nasce dal semplice sfregamento dell' acqua sugli orli delle aperture. Ma i due Autori delle Dissertazioni ultimamente stampate in Mantova sopra questo soggetto credettero che la forza di sfregamento contribuisse di più a tenere le altezze dei getti d'acqua al disotto dell' altezza delle conserve: e nella prima di esse il Chiar. P. Fontana ha dato ancora le formole analitiche della resistenza dell' aria, e della forza dello sfregamento, che deve aversi e nei tubi di condotta, e nelle aperture dei vasi. Ma io per me continuando ad esporre il mio sentimento intorno alla differenza delle altezze dei getti d'acqua incomincierò a dire che risguardo siccome estranea al presente soggetto la considerazione delle resistenze, che nascono dall' irregolarità, e dalle asprezze dei tubi adattati in qualunque modo o interiormente, o esteriormente alle semplici aperture. Egli è vero che i tubi di condotta quando sono troppo ristretti, o irregolari possono lasciare i getti più scarsi, e meno alti. E' vero ancora che secondo le diversità dei tubi adattati esteriormente alle aperture delle conserve si hanno dei getti meno alti. Per esempio nelle sperienze del Sig. Bossut il tubo cilindrico, o conico lasciava il getto meno alto: e la maggiore altezza si aveva aprendo il foro in una laminetta piana, e ben liscia. Ma indipendentemente dal condotto, e dal tubo si cerca adesso perchè aprendo di fianco alla conserva un foro qualunque, l'acqua, che sale, non arrivi mai all'altezza di quella, che seguita a premere.

Gene-

Generalmente parlando le asprezze dei fori, dei condotti, e dei tubi devono ritardare le prime gocciole d'acqua, che incominciano a scorrervi sopra. Ma continuandosi il moto, e riempite, che siano d'acqua le piccole cavità dei condotti, e dei tubi, allora non vi sarà più altra resistenza da vincere se non quella di uno strato d'acqua che passa sopra di un altro: e così pure nel foro si avrà la sola resistenza di un cilindro d'acqua, che passa per l'anello cilindrico delle altre particelle d'acqua, trattenute, e stagnanti tra i risalti del foro medesimo. Onde quando i tubi non siano o troppo angusti, o irregolari, e quando il foro non sia tanto piccolo, che asprezze abbiano una proporzione sensibile a tutto il diametro, tutte queste resistenze non potranno portare un divario sensibile nell' altezza del getto. E appunto se i fori non hanno meno di una linea di diametro, i getti di due, o tre piedi, comunque o più grossi, o sottili, riescono tutti egualmente alti. Nel Cap. III. del Libro susseguente faremo generalmente osservare, che ancora nella teoria dei Fiumi, eccettuando *i* casi, che *i* risalti maggiori del fondo, e delle ripe abbiano una proporzione sensibile a tutta l'area delle sezioni, non se ne ha da tener conto se non al principio del moto: e che poi continuato il corso, e riempite d'acqua le cavità del fondo, e delle ripe, avanza la sola resistenza, che nasce dalla piccolissima adesione delle particelle d'acqua, che scorrono le une sulle altre.

Gli Autori delle due Dissertazioni indicate, attribuendo in questo fenomeno una gran parte a quelle resistenze, che qui risguardo come più piccole, credettero poi che la resistenza delle particelle superiori del getto contro le inferiori, e più celeri si dovesse limitare al solo caso del getto esattamente verticale. E ciò appunto perchè nel getto verticale le particelle arrivate fino alla cima ricadono sulla stessa linea delle altre, che seguitano ancora a salire, e così vi oppongono un impedimento, che non può più aver luogo quando inclinando un poco il getto le particelle arrivate al vertice

 decli-

declinino nell' altro ramo della parabola. Il Sig. Boſſut nella Sez. I. del Cap. V. della Par. II. aveva prevenuto queſt' avvertenza, replicando le antiche ſperienze, colle quali già ſi ſapeva che inclinando un poco il getto veniva a creſcerne ſenſibilmente l'altezza. Per eſempio reſtando l'acqua nella conſerva invariabilmente all' altezza di piedi 11, ed eſſendo la larghezza del condotto di 3 pollici, e 8 linee, le altezze del getto verticale, e inclinato, ſecondo le diverſe aperture, erano come ſegue.

Diametro del foro.	*Getto verticale.*			*Getto inclinato.*		
lin. 2.	piedi 10.	poll. 0.	lin. 10.	10.	4.	6.
4.	10.	5.	10.	10.	7.	6.
8.	10.	6.	6.	10.	8.	0.

Ma io poi non vedo come ſi poſſa chiamare in dubbio che le altre particelle ſuperiori, quantunque non arrivate ancora alla cima, eſſendo meno celeri di quelle, che incominciano a ſortire dal foro, non debbano ritardarle, e, reſtando tutto il getto continuo, non debbano tenerlo ſempre meno alto, comunque il getto o ſia eſattamente verticale, o s'inclini un poco all' orizzonte. Mentre nell' intera colonna $OQPT$, *fig.* 75., eſſendo minore la velocità in P, e maggiore in Q, queſta non può più eſſere tutta quella, con cui una gocciola ſola, e iſolata, ſenz' alcun altro impedimento eſteriore, arriverebbe da O in Q. Nè qualche picciola inclinazione del getto deve variare la reſiſtenza, e l'azione degli ſtrati ſuperiori, e più lenti ſugli altri ſtrati contigui, inferiori, e più celeri. E così appunto quando il getto rinchiudaſi in qualche tubo, tutta la preſſione, e la forza degli ſtrati ſuperiori ſu gl' inferiori ſi fa egualmente riſentire inſino al fondo, comunque il tubo ſi tenga, o verticale, o inclinato all' orizzonte. La differenza del getto rinchiuſo, e libero ſi è, che nel tubo OT la preſſione di una parte qualunque QT nel punto Q viene continuamente bilanciata dalla forza dell' acqua, che reſta ancora nella conſerva all' altezza OC: laddove nel getto libero ciaſcuna particella ſi ſcaglia dal foro O con tutta la velocità corriſpondente all' altezza medeſima, ſenza poterne più riparare ſucceſſivamente le perdite.

Io credo adunque che il Torricelli, e gli altri, che lo hanno ſeguitato, s'Graveſand, Boſſut, e Kaeſtner, aveſſero tutta la ragione di attribuire il difetto delle altezze dei getti all' impedimento che dalle gocciole ſuperiori ſi oppone alle inferiori. Ma poi non vedo come queſt' impedimento ſi poſſa in qualche maniera applicare col calcolo ai varj riſultati delle ſperienze. Riguardo la regola già riferita dal Mariotte come un' approſſimazione, che non ſi accorda interamente colle ſperienze, come può rilevarſi paragonando le differenze dei getti più alti coi quadrati delle altezze delle conſerve. In oltre non vorrei dare all' adeſione delle particelle dell' acqua, e allo sfregamento ſulle aſprezze dei fori, che quelle piccole differenze, che ſi oſſervano nei fori più piccoli. E finalmente limitarei la reſiſtenza intera dell' aria alle gocciole iſolate, che vi ſi devono aprire la ſtrada. Le particelle d'aria, che qualche volta ſi uniſcono inſieme al didentro della conſerva, e ſi arreſtano innanzi al foro, qualche volta fanno un effetto tutto contrario. Mentre eſſendo le prime a sboccare impetuoſamente dal foro, e rarefacendoſi con una forza eguale a quella, con cui erano compreſſe nel vaſo, laſciano che le particelle d'acqua le ſeguano con tutta la velocità corriſpondente alla preſſione dell' acqua reſidua nel vaſo, e della colonna d'aria che vi ſta ſopra: e queſto è quello che chiamaſi ſalto momentaneo, in cui al principio del getto ſi ſpingono qualche volta le gocciole ad un' altezza molto maggiore di quella delle conſerve.

CAPO SESTO.

Dei tubi di condotta, e delle ſoluzioni di alcuni Problemi analoghi.

VI è ancora un altro effetto, che nei tubi di condotta, quando s'incurvano variamente nelle ſalite, e nelle ſceſe, dipende

pende dalle particelle d'aria mescolate insieme coll' acqua. Poichè ammucchiandosi qualche volta le particelle medesime negli angoli più rilevati delle condotte, possono rallentare il corso dell' acqua, e lasciare il getto interrotto: e negli acquedotti maggiori l'aria rinchiusa in maggior copia può eccitare ancora dei venti. Vitruvio nel Cap. VII. del Lib. VIII. ne insegnò i rimedj prescrivendo che il ventre dell' acquedotto si tenesse a livello per il più lungo tratto possibile, e che vi si aprissero a distanze proporzionate dei pozzi, e delle colonne che servissero di sfiatatoj. L'Ingegnere Fontana nel Cap. IX. del suo Trattato sopra le acque correnti disegnò i sfiatatoj a tutta l'altezza della caduta, e assicurò che tali erano appunto gli antichi acquedotti dell' acqua Paola verso il lago Alseatino, e dell acqua Marzia nel lago di Subjaco. Nella semplicità, e perfezione, a cui ora è portata l'Architettura Idraulica si ottiene lo stesso effetto con far sortire dagli angoli dell' acquedotto dei piccoli tubi terminati superiormente con delle valvole da aprirsi in fuori, o con delle chiavi da aprirsi pure nel caso di dar esito all' aria rinchiusa. Gli Autori Francesi chiamano questa sorte di tubi col nome di ventose.

Gli Autori medesimi, e massime il Mariotte, il Couplet, il Parent ci hanno lasciato delle opere classiche intorno ai condotti artefatti, come in Italia il Guglielmini, e molti altri si sono profondamente occupati intorno agli alvei naturali dei Fiumi. Particolarmente il Couplet negli Atti dell' Accademia di Parigi del 1732 ci ha lasciato delle sperienze originali intorno alla quantità d'acqua somministrata da cinque fontane di Versaglies. Noi qui non ci estenderemo di più in questa parte dell' Idraulica, ch'è meno interessante nel nostro paese, e in vece nel libro susseguente cercheremo di dare una maggiore estensione ai calcoli delle portate dei Fiumi, e delle bocche d'irrigazione. E siccome le sperienze del Couplet possono servire di norma in altri casi consimili, ci accontenteremo qui di soggiugnere, che ne' suoi calcoli pare che si combinino

binino insieme due cose a dare le quantità d'acqua l'una in più, e l'altra in meno. La prima si è che nella sperienza fondamentale il Couplet ha tenuto conto della diminuzione della vena, che si ha nei fori aperti nelle laminette sottili, e che non deve aver più luogo egualmente, quando l'acqua esce dai tubi ad orificio libero, e pieno, come nei condotti di Versaglies. L'altra si è che lo stesso Autore non ha poi fatto gran caso degl' impedimenti degli angoli rettilinei, con cui si univano i tubi sotterra. Si è già prevenuta generalmente quest' avvertenza negli elementi della Meccanica. Qui non si deve ommettere il caso più celebre, seguito già nel giardino di Herenhausen nel Ducato di Hannover, e ricordato dal Desaguliers nelle note alla lezione duodecima. Mentre ivi essendosi uniti i tubi sotterra quasi ad angolo retto, si sono avuti a principio dei getti di soli piedi 10, quando l'altezza calcolata era di piedi 100, nè si sono toccati i limiti di quest' altezza, se non quando si sono corretti gli angoli rettilinei delle diverse direzioni dei tubi.

Le regole del Couplet, e del Parent intorno al rapporto dei diametri delle aperture, delle grossezze dei tubi, e delle altezze delle conserve, si sono già spiegate nel Cap. I. del Lib. III. Cioè in diversi tubi formati della stessa materia, acciò le resistenze siano egualmente proporzionate alle forze, che devono sostenere, bisogna che le grossezze siano in ragion composta delle altezze delle conserve, e dei diametri dei tubi, e che i diametri siano in ragion diretta delle grossezze, ed in ragion reciproca delle altezze. Il Belidor, che nel Cap. III. del Lib. III. ha rapportata, ed ampliata la tavola delle grossezze, e dei diametri dei tubi di rame, e di piombo, ricavata già dal Parent dai principj indicati, vi ha aggiunto l'importante avvertenza, che quella tavola, e tutto il calcolo è limitato all' ipotesi del preciso equilibrio tra la pressione dell' acqua, e la resistenza dei tubi, e per ogni maggiore sicurezza ha suggerito di accrescere in ogni caso della metà la grossezza calcolata. La stessa avvertenza si deve estendere ancora alle grossezze, che si potrebbero simil-

ſimilmente calcolare per i tubi di ferro: tanto più, che il ferro è ſempre meſcolato con altre parti eterogenee, e di minore conſiſtenza. Io ho avuto occaſione di far uſo di tutti queſti principj, mentre ſono ſtato interpellato pochi anni fa, ſe il nuovo acquedotto di Genova ſi doveſſe portare dal poggio detto di Moreſana ſino al poggio di Pino ſotto il letto del torrente, che ſcorre nella valle di mezzo, o ſe conveniſſe di farvelo paſſar ſopra con un ponte. La groſſezza dei tubi di ferro doveva eſſere di linee $9\frac{3}{5}$ di Parigi, e il diametro di circa pollici $14\frac{2}{5}$: e i tubi dovevano reggere all' altezza di circa 197 piedi d'acqua nel primo caſo, e ſolamente di piedi 161 nel ſecondo. La maggiore ſicurezza dell' opera, il più facile riſarcimento dei tubi, e il corſo più libero dell' acqua rendeva preferibile il partito del ponte, ch' è poi ſtato fabbricato in cinque archi.

Il Belidor nel Cap. II. del Lib. IV. ſi eſteſe ancora a trattare più particolarmente dell' azione dell' acqua ſui tubi di condotta. Ma queſt' Autore; che ci ha laſciato un' opera molto inſtruttiva in tutto ciò che riſguarda la pratica delle trombe, dei mulini, delle fontane, e dei lavori più importanti per i canali navigabili, e per i porti di mare, ordinariamente non è felice nelle più ſottili ricerche dell' Architettura, o Meccanica, o Idraulica. Ne abbiamo già dato un cenno trattando dell' azione delle trombe, della ſpinta delle volte, e della reſiſtenza de' piè diritti. Dobbiamo dire altrettanto di tutto il calcolo delle velocità dell' acqua ne' tubi, che chiamanſi di ſpinta, e di fuga. Sia la conſerva *D A B M*, *fig.* 76., e il tubo di condotta *M K*, che termini nel tubo *K E*, verſando l'acqua dalla ſezione *G E*. La velocità in *E* corriſponderà all' altezza *F A*, per cui la ſuperficie della conſerva *A B* s'alza ſull' orizzontale tirata dal punto *E*. Ciò è manifeſto nel caſo, che tirata la *E B* ſi proponeſſe un vaſo ſolo della figura *K D A B E*: ed è manifeſto

nifeſto ancora, che levando di mezzo qualunque porzione *C M B G*, e reſtando l'altezza maſſima *D A*, non ſi variarebbe punto la preſſione nel punto *E*. Da ciò ne ſegue evidentemente, che, quanto ſarà più corto il tubo *K E*, tanto ſarà maggiore la velocità e la quantità dell' acqua, che ſi verſerà in un dato tempo dall' apertura *G E*: e però il getto ſarà ſempre più copioſo quando ſarà più corto il tubo, che chiamaſi di fuga. La ſola avvertenza da aggiugnerſi ſarà di non aprire il foro in una ſemplice laſtra ſenz' alcun tubo, nel qual caſo ſarebbe maggiore, come ſi è detto, la contrazione, e la diminuzione della vena. Queſta è la ſemplice regola da ſoſtituirſi a tutte le analogie eſpoſte dal Belidor nel capo ſopraccitato.

Così pure in qualunque punto del tubo *M K* la velocità, che dipende dalla preſſione, corriſponderà alla differenza *F A* delle altezze delle due colonne *D A*, *K E* che premono in ſenſo contrario. Però ſe dentro i tubi *M K*, *K E* s'intendeſſe continuato un altro tubo, che aveſſe dappertutto delle ſezioni eguali a quella del foro *G E*, eſſendo eguale dappertutto la differenza *F A* delle altezze ſi avrebbe pure in ogni punto un' eguale velocità. Che ſe poi tutto il moto s'intendeſſe diffuſo, e diſtribuito per tutta la capacità interna dei tubi *M K*, *K L*, le velocità vere, e reſidue, come tante volte ſi è detto, riuſcirebbero in ragione ſemplice inverſa delle ſezioni, oſſia in ragione inverſa duplicata dei diametri. Ma qualunque ſia la diſtribuzione del moto per tutta la capacità interna dei tubi, quand' eſſi non ſiano o tanto anguſti, o tanto irregolari, che ſi abbia da tener conto del ſoffregamento, delle riperoſſe, e delle altre reſiſtenze, la velocità nel foro *G E* ſarà ſempre in ragione ſudduplicata dell' altezza *F A*, e la quantità d'acqua ſomminiſtrata in un dato tempo x ſarà in ragion compoſta della ſudduplicata di *F A*, e della duplicata del diametro *G E* del foro. Ciò pure è manifeſto al principio del moto: ed a getto continuato non vi può eſſere variazione alcuna, ſe non per cagione di tutte le reſiſtenze, delle quali qui non s'intende di tener conto. Preſcindendo adunque da tutte,

x mentre la ragion [illegible]

x siccome per egualiarsi l'abbondanza del getto bisogna la radice dell'altezza corrispondente alla velocità moltiplicata per l'area del foro in un vaso si eguagli [illegible] del [illegible] in un altro vaso moltiplicata per l'area del suo foro onde esprimendo colle lettere N, n li due diametri ossia l'area del foro [illegible]

$\sqrt{A} \cdot N^2 = \sqrt{a} \cdot n^2$ acciò li due getti siano egualmente abbondanti ossia

$\sqrt{A} : \sqrt{a} = n^2 : N^2$

$A : a = n^4 : N^4$

tutte, o supponendo la capacità interna dei tubi di condotta di tale ampiezza, e di tal figura, che non vi sia da considerare che quella di uno strato di acqua, che passa sopra di un altro, e che per conseguenza è piccolissima, perchè due getti riescano egualmente alti bisognerà eguagliarvi le altezze delle conserve, e perchè riescano egualmente abbondanti, x bisognerà che le altezze delle conserve sulle aperture siano in ragione inversa quadruplicata dei diametri delle aperture medesime. E questa è l'altra regola, ch'io vorrei sostituire a quella, che ha dato il Sig. Bossut nella Sez. I. del Cap. V. della seconda Parte.

Ma giacchè siamo entrati in queste ricerche non sarà fuor di proposito di aggiugnere la soluzione di un problema, che mi è stato comunicato da Marsiglia quindici anni fa, e che vi ha tutta l'analogia. Si tenga l'acqua nel vaso $ABMD$, *fig. 76.*, all'altezza costante DA: vi si adatti il tubo MKH, e in esso si apra il foro N: si cerca a quale altezza NE resterà l'acqua sopra del foro. Nella soluzione, che mi è stata allora mandata, si supponeva che la pressione nel centro del foro N dovesse corrispondere all'altezza NE, e che solamente nel condotto orizzontale MK la pressione corrispondesse alla differenza FA delle altezze DA, KE. Se ciò fosse vero, sarebbe il quadrato della velocità in N al quadrato della velocità in M, come $NE:FA$: ed essendo le velocità in ragione inversa duplicata dei diametri delle sezioni, per cui deve passare nello stesso tempo la stessa quantità d'acqua; chiamando n il diametro del foro, ed m il diametro del tubo orizzontale, si avrebbe $NE:FA = m^4 : n^4$, e per conseguenza $NE:LA = m^4 : m^4 + n^4$, ossia $NE = \frac{m^4 . LA}{m^4 + n^4}$. Ma quest' equazione presenta subito all' occhio varie incongruenze: come che posto n maggiore di m l'acqua debba ancora salire al disopra del foro: e che posti eguali i diametri m, ed n, comunque il foro si collochi nello stesso tubo orizzontale MK, l'acqua in vece di uscirne nella stessa quantità, che

vi

vi arriva, debba salire verticalmente, e sostenersi all'altezza $\frac{1}{2} DA$.

Nella soluzione, che fino d'allora ho comunicato co' miei amici, io supponeva che la pressione nel foro N dovesse corrispondere all'altezza massima LA dell' acqua sopra del foro. E ciò mi pareva manifesto, perchè quando sia NE l'altezza, a cui l'acqua si sostiene sopra del foro N, e s'intenda turato il foro N, e il tubo KE in GE; la pressione nel punto N corrisponderà certamente all' altezza LA: e restando le altezze LA, NE, non può variarsi la pressione, quando s'intenda riaperto in seguito il foro N. Ciò posto sarebbe l'analogia del problema $LA:FA = m^4 : n^4$, ed $LA:FL = m^4 : m^4 - n^4$, donde si caverebbe $FL = NE = LA - \frac{n^4}{m^4} . LA$. In questa formola, supposti eguali i diametri m, ed n, sarebbe $NE = 0$, cioè l'acqua non potrebbe salire al disopra del foro, e supposto n maggiore di m, l'altezza NE diverrebbe negativa, cioè l'acqua non arriverebbe a coprire tutta la sezione del foro. Io riguardo la formola come rigorosamente vera al principio del moto, e in seguito come vera prossimamente, cioè in quanto vi si trascurano le resistenze dei lati, le obbliquità dei moti, e tutti gli altri impedimenti. Se il foro non fosse più tanto piccolo che si potesse trascurare la differenza delle velocità corrispondenti ad altezze differenti, e fosse LA l'altezza corrispondente alla sommità del foro, a l'altezza del foro istesso, e b la larghezza uniforme, l'equazione da risolversi sarebbe $m^2 \sqrt{FA} = \frac{2}{3} b (\overline{LA + a}^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}})$.

Potrei soggiugnere diversi altri problemi di questo genere. Ma adesso per terminare le ricerche già incominciate intorno alle differenze dei getti d'acqua, e per far vedere, che non vi si possono altrimenti applicare le formole generali della resistenza dell' aria, bisognerà premettere le idee più generali delle resistenze di tutt'i fluidi.

CAPO

CAPO SETTIMO.

Dei principj generali della resistenza dei fluidi, e dell' azione dell' aria sui getti d'acqua.

SE un fluido si potesse riguardare come composto di corpicelli duri, ed eguali, e posti ad egual distanza tra loro, che subito dopo l'urto sparissero, secondo le prime leggi del moto, un cilindro solido, che vi si movesse equabilmente nella direzione istessa dell' asse, nel tempo di trascorrerne tutta la lunghezza perderebbe una porzione della sua propria velocità, che starebbe alla velocità primitiva come la densità del fluido alla densità del solido. Supposte le particelle del fluido perfettamente elastiche, la quantità del moto perduto sarebbe doppia, come succede nell' urto di tutt' i corpi d'una perfetta elasticità. Però supposto che $D:1$ esprima la ragione delle densità del cilindro, e del fluido, e che la velocità primitiva si prenda per unità, sarà $\frac{1}{D}$ la velocità perduta nel suddetto tempo, e nella prima ipotesi: e sarà nella seconda $\frac{2}{D}$. Variandosi la velocità, e in un caso, e nell' altro la quantità del moto comunicato, e perduto dev' essere come il numero delle particelle da moversi in un dato tempo, e come la velocità, con cui si movono, congiuntamente: e poichè il numero delle particelle da moversi dev' essere proporzionale allo spazio da scorrersi in un tempo dato, cioè alla semplice velocità; la quantità del moto comunicato, e perduto nel detto tempo, e però ancora la resistenza sarà generalmente proporzionale alla densità del fluido, ed al quadrato della velocità del solido, che vi si muove.

[illegible] cilindro D : [illegible]
[illegible] velocità primitiva
[illegible] : velocità perduta
$= \frac{1}{D}$ [illegible]
[illegible] $\frac{2}{D}$

Nelle medesime ipotesi si può ancora dimostrare assai facilmente ciò che ha asserito il Newton nella Propos. XXXVI. del Lib. II., che, essendo pari le velocità, la resistenza di un globo è la metà di quella di un cilindro. Si conduca un piano parallelo alla direzione del moto, che taglj nella base del cilindro la retta GH, *fig.* 77., e nella superficie sferica il semicircolo DCE, e sia KBF perpendicolare al diametro DE, e KL al raggio prolungato AB. Immaginiamoci ancora, che il moto si riferisca alle particelle del fluido, e che, restando immobile il cilindro, ed il globo, vi vengano esse ad urtare con una velocità eguale, e contraria. Sarà la forza totale di ciascuna particella del fluido in M, o in B alla forza perpendicolare al semicircolo nel punto B, come $KB:LB = AB:BF$, e la forza perpendicolare sarà alla forza risultante secondo BF istessamente come $AB:BF$. Però la forza intera dell' urto nel punto M sarà alla forza, che ne risulterà in B secondo la comune direzione del moto, come $AB^2:BF^2$, e tirata la fbm parallela ad FBM, essendo eguale il numero dei filamenti, e delle particelle del fluido, che urtano in Mm, e in Bb, sarà tutta la forza del fluido, e tutta la resistenza in GH alla resistenza in DCE come la somma di tutt' i quadrati del raggio AB alla somma di tutt' i quadrati dei seni BF, che si possono prendere nel semicircolo, cioè come $2:1$. Mentre essendo sempre $AB^2 = BF^2 + FA^2$, e la somma di tutt' i quadrati dei seni in ciascun quadrante, essendo manifestamente eguale alla somma dei quadrati di tutt' i coseni; la somma dei quadrati dei seni sarà la metà della somma dei quadrati dei raggi corrispondenti.

Ciò posto tirando tant' altri piani paralleli al primo si dividerà la base del cilindro in tanti rettangoletti, e la superficie dell' emisferio in altrettanti anelli circolari: e per il parallelismo dei piani saranno sempre eguali le altezze, e in ciascun rettangoletto, e nell' anello corrispondente: e sarà eguale per conseguenza il numero dei filamenti, e le particelle del fluido urtate, e smosse, e dall' uno, e dall' altro. Onde essendo in ciascuna divisione le resistenze nella ragione di due ad uno, sarà pure tutta la resistenza nella base del cilindro doppia, che nella superficie della sfera. Anzi in questa maniera

niera si potrà ancora generalizzare il teorema di Newton, estendendolo a tutt'i solidi generati dalla rivoluzione di qualsivoglia figura piana intorno a un asse. Mentre collo stesso discorso si proverà che la resistenza in ciascuno di essi dev'essere la metà del rettangolo circoscritto alla base, e mosso con una direzione perpendicolare. Nel caso di una sfera, e del cilindro circoscritto, e mosso con un' eguale velocità secondo la lunghezza dell'asse, essendo $2:3$ la ragione delle solidità, e delle quantità del moto nella sfera, e nel cilindro, $D:1$ la ragione della quantità del moto del cilindro alla quantità del moto perduta nell'avanzarsi di tutto il diametro, $2:1$ la ragoine delle resistenze del cilindro, e della sfera; componendo insieme le ragioni, la quantità del moto nella sfera, sarà alla resistenza incontrata per tutta la lunghezza del diametro, come $1:\frac{3}{4D}$. Cioè la resistenza della sfera, paragonata all'intera quantità di moto, sarà $\frac{3}{4}$ della resistenza del cilindro: e la sfera dovrà trascorrere $\frac{4}{3}$ del suo diametro per perdere quella quantità di moto, che stia alla quantità totale come la densità del fluido alla densità della sfera.

Seguitando i principj medesimi si potrebbe dare un' intera, e rigorosa teoria della resistenza de' fluidi, supponendoli tutti composti di corpicelli isolati, indifferentemente o duri, o elastici. Ma considerando i fluidi come sono composti di parti unite, e contigue, che ricevono, e trasfondono il moto dalle une alle altre, dalle più prossime alle più rimote, la teoria della resistenza presenta subito una difficoltà insuperabile alla Geometria, ed al calcolo. Questo nuovamente si è il caso d'un infinito numero di particelle, che agiscono le une sulle altre. Il Newton dopo di avere mostrato, che supponendo le particelle dure si ha una resistenza minore della metà, che supponendole elastiche, aggiunse che la resistenza deve essere ancora la metà meno ne' fluidi continui, come l'acqua, l'olio, e il mercurio, nei quali il corpo mosso non cade immediatamente sopra

sopra tutte le particelle, ma preme soltanto le più prossime, e queste arrivano a premere successivamente sino le più remote. Cercò ancora di dimostrarlo nella Propos. XXXVI. con un lungo ragionamento intorno alla natura della cateratta formata dai fluidi nell' uscire dalle aperture dei vasi: ipotesi sulla quale abbiamo già rilevate tant'altre difficoltà. Il Sig. Daniello Bernoulli nel secondo tomo degli Atti di Pietroburgo, considerando che in un mezzo elastico la velocità deve passare immediatamente dal primo al secondo strato, come risulta dalle prime formole dell'urto dei corpi elastici, calcolò la resistenza come se alternativamente sparisse la metà degli strati del fluido. Ma poi nei §. VI., e VII. della sua Dissertazione, volendo diminuire la resistenza ancora della metà, aggiunse alcune altre considerazioni assai vaghe, e successivamente appoggiò questa ipotesi alla corrispondenza colle sperienze.

Siccome sarebbe inutile di ricercare nell'intima tessitura dei fluidi la legge, e l'economía, con cui il moto, e la pressione si deve propagare dalle parti più prossime alle più rimote, seguitiamo le tracce, e il metodo del Bernoulli, e supponiamo che essendo g la forza della gravità, x l'altezza della caduta corrispondente alla velocità del cilindro, la velocità istessa $\sqrt{2gx}$, ed essendo in oltre $D:1$ la ragione della densità del cilindro a quella dell'aria, o dell' acqua, o di qualunque altro fluido, sia $\frac{\sqrt{2gx}}{2D}$ la velocità perduta nel percorrere la lunghezza dell'asse, e finalmente chiamando b l'asse del cilindro, e dx l'elemento dello spazio percorso, sia $\frac{\sqrt{2gx}}{2D}\cdot\frac{dx}{b}$ la velocità perduta nello scorrere il suddetto elemento. Poichè la resistenza cresce come il quadrato della velocità, e la gravità poi agisce sempre egualmente nei corpi che incominciano, ed in quelli che continuano a muoversi, ed è sempre costante l'elemento dv della velocità v, che si aggiugne dalla gravità g nell'elemento dt del tempo; continuandosi la caduta libera di un corpo, si si arriverà una volta a quel grado di velocità, in cui si eguaglieranno le azioni e della gravità, e della resistenza, e tutto il moto sarà ridotto all' equabile. Allora sarà $dv = g\,dt = g \cdot \frac{dx}{v} = \frac{g\,dx}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{2gx}}{2D} \cdot \frac{dx}{b}$: e però si troverà $x = Db$, cioè il cilindro continuerà a moversi equabilmente dopo di essere caduto per un' altezza eguale a Db. Nella sfera l' altezza della caduta dovrà essere $\frac{4}{3} Db$.

Posta la gravità $g = 1$, sarà $2Db$ il quadrato della velocità corrispondente all' altezza Db: e poichè dopo tale caduta si eguagliano tra di loro la gravità, e la resistenza, e generalmente la resistenza dev' essere proporzionale al quadrato della velocità; chiamando v la velocità in qualunque altro caso, sarà la resistenza assoluta $\frac{v^2}{2Db}$. Adunque nella discesa libera sarà la forza acceleratrice $1 - \frac{v^2}{2Db}$, e nella salita verticale sarà la forza ritardatrice $1 + \frac{v^2}{2Db}$. Poichè adunque il prodotto della velocità nell' elemento, per cui cresce, o scema, si eguaglia sempre al prodotto della forza acceleratrice, o ritardatrice nell' elemento dello spazio, chiamando lo spazio x, e prendendo i segni superiori per la discesa, e gl' inferiori per la salita, si avrà

$$\left(1 \mp \frac{v^2}{2Db}\right) \cdot dx = \pm v\,dv$$

$$dx = \frac{\pm v\,dv}{1 \mp \frac{v^2}{2Db}} = \pm v\,dv + \frac{v^3\,dv}{2Db} \pm \frac{v^5\,dv}{4D^2b^2} + \text{ec.}$$

Riducendo adunque la somma della prima formola ai logaritmi, e della

e della seconda ad una serie infinita, prese M, ed N per costanti sarà

$$x = M - Db \,.\, \log.(2Db \mp v^2) = N \pm \frac{1}{2} v^2 + \frac{v^4}{8Db} \pm \frac{v^6}{24D^2b^2} + \text{ec.}$$

Per determinare le quantità M, ed N nella discesa, bisognerà avvertire che quando il moto incominci dalla quiete, posta $v = 0$ dev' essere ancora $x = 0$, $N = 0$, ed $M = Db \,.\, \log.\, 2Db$, e però $x = Db\,(\log.\, 2Db - \log.\, \overline{2Db - v^2}) = \frac{Db \,.\, \log.\, 2Db}{\log.\,(2Db - v^2)}$. Nel caso della salita, posto che la velocità iniziale corrisponda all' altezza a, e sia per conseguenza al principio $v^2 = 2a$, ed $x = 0$; sarà $M = Db \,.\, \log.(2Db + 2a)$, ed $N = a - \frac{a^2}{2Db} + \frac{a^3}{3D^2b^2} - \text{ec.}$: onde al fine della salita, quando diverrà $v = 0$, sarà ancora $x = Db \,.\, \log.\left(1 + \frac{a}{Db}\right) = a - \frac{a^2}{2Db} + \frac{a^3}{3D^2b^2} - \text{ec.}$

L' espressione logaritmica conviene con quella, che già ci ha dato il Sig. Daniello Bernoulli nel secondo tomo degli Atti di Pietroburgo. La serie è quella stessa, che ne ha dedotto il Chiaris. P. Fontana nella Dissertazione premiata a Mantova sulla differenza delle altezze dei getti d'acqua. In essa si avrebbe $a - x = \frac{a^2}{2Db} - \frac{a^3}{3D^2b^2} + \text{ec.}$, e prendendo l'altezza delle particelle cilindriche della stessa larghezza b delle aperture fatte nei vasi, e nei vasi non tanto alti trascurando il secondo termine della serie, le differenze delle altezze dei getti riuscirebbero prossimamente in ragione diretta duplicata delle altezze dei vasi, e in ragione reciproca semplice dei diametri delle aperture.

Ma per giudicare più rettamente di queste formole bisogna farne l'applicazione a qualche caso particolare. Si prenda l'altezza a dell' acqua nella conserva di piedi 11, ossia di linee 1584, si prenda il diametro b dell' apertura del vaso di linee 4, e sia $D : 1 = 850 : 1$, ch' è la ragione delle densità dell' acqua, e dell' aria. Sarà $\frac{a^2}{2Db}$ di di linee 369, e $\frac{a^3}{3Db^2}$ di linee 114: e però la differenza dell' altezza dell' acqua nella conſerva, e dell' altezza del getto x ſarebbe maggiore di piedi 1 poll. 9 e lin. 3. Secondo le ſperienze del Sig. Boſſut nel getto verticale la differenza era ſolamente di 6 pollici, e di 2 linee: e inclinando un poco il getto non era la differenza che di pollici $4\frac{1}{2}$. Iſteſſamente poſto $b = 8$, ſi troverà nella prima formola $x = 6800 . \log. (1 + \frac{1584}{6800})$: onde prendendo i logaritmi dalle tavole ordinarie, e dividendoli per 0.4343 per la ſolita riduzione dei logaritmi iperbolici, ſi troverà $x = 1424$, e la differenza del getto ſarà di linee 160, cioè di un piede, e di un pollice, e un terzo, quando nelle ſperienze del Boſſut non riſultava che di 4 pollici. Applicando le ſteſſe formole a qualunque altro caſo ſi troveranno ſempre delle differenze conſimili.

Poichè adunque lo sfregamento nei contorni del foro, l'adeſione delle particelle d'acqua tra loro, la reazione delle particelle ſuperiori, non poſſono contribuire ſe non a rendere ancora maggiori le differenze delle altezze dei getti; è manifeſto che le formole precedenti non ſi poſſono applicare al caſo, di cui trattiamo. Volendo da eſſe paſſare al caſo dei corpi ſlanciati in un mezzo reſiſtente non ſi avrebbero che dei riſultati puramente ipotetici. Mancano i primi dati del problema, e tutta l'Algebra non ha metodi per determinare in che modo le particelle di un fluido immediatamente urtate da qualche ſolido incomincino a mettere in moto le altre particelle, che ne ſono ancora lontane, e ſi dividano ſucceſſivamente dai lati per laſciare, che il corpo ſi avanzi, e ne facciano ricorrere dalla parte oppoſta delle altre, e tutte inſieme agiſcano, e reagiſcano. Onde eſſendo per l'altra parte più eſtranee queſte ricerche al ſoggetto delle preſenti Inſtituzioni, paſſeremo ora a quelle che vi appartengono direttamente.

DELL'

DELL' IDROMETRIA
DEI FIUMI, E DEI CANALI.
LIBRO QUINTO.

CAPO PRIMO.

Dei primi teoremi del Caſtelli, e del Galileo intorno alla velocità delle acque correnti.

IL Galileo, e il Caſtelli furono i primi, che incominciarono a portar qualche regola nella miſura delle acque correnti ſino allora abbandonata alle incerte, e fallaci pratiche degl' Ingegneri. Sino a quei tempi le quantità dell' acqua ſi miſuravano dalla ſemplice ampiezza delle bocche, ſenza combinare inſieme colla larghezza, e coll' altezza delle ſezioni ancora l'elemento delle velocità. Grandiſſimi erano gli errori, che in conſeguenza ſi commettevano nel riparto delle acque, ed erano ſingolari i paradoſſi, che dappertutto ſi riſcontravano nei fenomeni delle piene, delle confluenze, e delle diramazioni dei Fiumi: come, per eſempio, che la ſomma delle ſezioni di tutti gl' influenti ſia tanto maggiore della ſezione del recipiente comune, in cui ſi uniſcono, e che la ſezione di un ſolo recipiente ſia tanto minore della ſomma delle ſezioni preſe in tutt' i diverſi rami, nei quali qualche volta ſi divide. I primi teoremi, che il Caſtelli ha eſpoſti nel piccol libro ſulla miſura delle acque correnti, ſono affatto elementari, e ne ricercano molti altri per poter eſſere applicati a qualche caſo particolare. Ciò non oſtante meritano ſempre di eſſere ricordati i primi paſſi, che ſi ſono fatti in ciaſcuna ſcienza, e prima di entrare nelle teorie più ſublimi biſogna ſempre premettere le verità più ſemplici, che vi hanno ſervito di baſe.

Se