ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ

ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN AR-
CHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET
cylindro, atque alios quosdam, Commentaria, nunc primum &
Græce & Latine in lucem edita.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio,
ad quinquennium.

BASILEAE,
[illegible] nnes Her[illegible] [illegible] [illegible]dit.
A[illegible]

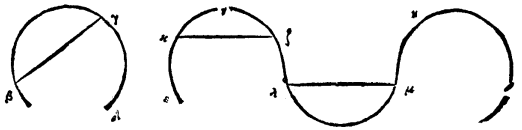
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρεῖν σύνταξιν καταβεβλημένον. καὶ κατανοήσας μὴ δὲ δυμάρειαν τῶν θεωρημάτων τοῦτο παροραθῆναι, ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ δυσεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ᾽ ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω δοκεῖν ἐπιβαλεῖν εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλους ἡμᾶς τοῦ σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τρίων δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ παράμενος διὰ νεότητα φθέγξομαι τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς περὶ τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκα σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ᾽ ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεμιαῖον δόξῃ τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντῃ διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχει περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι.

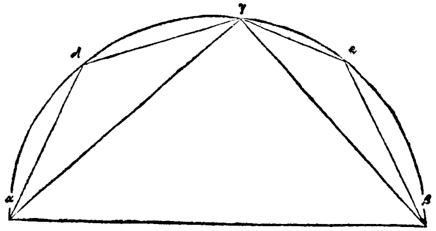
† δυσθεώρητα

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

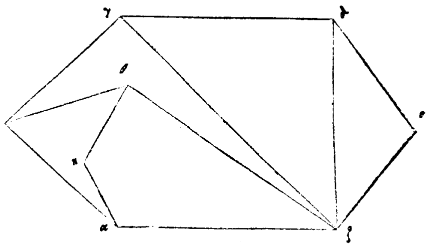
Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ᾽ αὐτοῦ θεωρήματα, τοῦ συνήθους πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ᾽ ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶν πρῶτον εἶναί τινας ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἳ πρὸς τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δ᾽ ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁποσοῦν συναπτομένην, ὥς τε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται * τῇ α β γ δ. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων ἣν ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥς τε τὴν ἐπ᾽ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ᾽ αὐτὴν ἐφαρμόζειν. διὸ φησὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἤ τινες μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία τῶν δὲ αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.



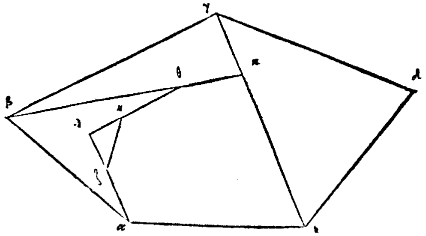
Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματα τινὰ λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν καθ᾽ αὑτὰ τῆς αἰσθήσεως ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β. τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ᾐτήσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί. πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ ταῖς α γ β γραμμαῖς ἄλλα τυ χόντα σημεῖα τὰ δ, ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς εἶναι, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος καὶ ἐπὶ πᾶν αὐτῆς σημεῖον ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἷον αὐτὴν οὖσαν γραμμὴν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὲ τοῦτο φησὶν, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχει, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ α ζ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοι εἰσὶν αἱ προκείμεναι γραμμαί. καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ, ἐντὸς συνισταμέναι εἰσὶ αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶ αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ' αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ βγζ συνεστάμεναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ. μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ, αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγ, δεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



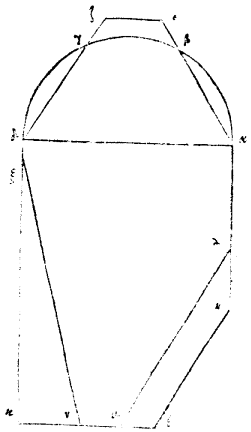
Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ' αἱ αλ, λθ, ἐλάττους τῆς αβθ, πολλῷ ἄρα αἱ αβθ μείζους τῆς αζηθ.



κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβθκ τῶν αζηθκ. ἀλλ' αἱ βθκ ἐλάττους τῆς βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῆς αζηθκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγκε μείζους τῆς αζηθκε. ἀλλ' αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδε, πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζηθκε.

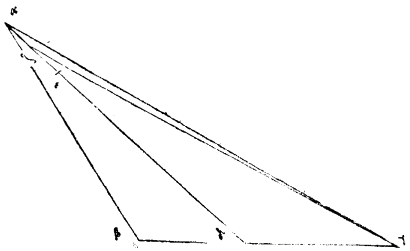
Καὶ διαφέρειν δὲ φησιν, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ ἔνεστι νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἐπὶ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἁρμόσει ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν περιφερειῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν κατὰ συνεχῆ σημεῖα τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοεῖσθαι. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμὰς, πάντη ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ βγδ γραμμὴ, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσὶ, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ αηθκλ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλον, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τὸ δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκλ, καὶ αλμνξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.



† νοεῖσθαι

† ἐπέθηκεν

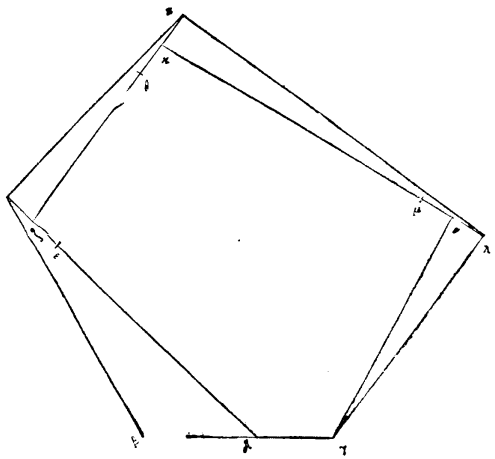
Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ' ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπ' ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ' ἐνίοτε ἴσαι. ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὥστε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης. ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.



Καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ τοῦτο ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θγ κατὰ τὸ

κ,

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζη ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ ηλ ἴση ἡ κμ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῆς αβ, ἡ δὲ ζη τῆς αη, ἡ δὲ κν τῆς ηλ, ἡ δὲ νγ τῆς λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῆς αβηλγ. καλῶς ἄρα προστίθησι τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα *



αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.

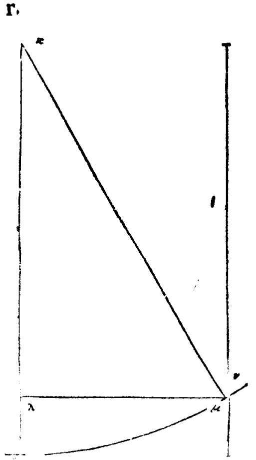
ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

Το δὴ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντεθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ, δηλαδὴ ὡς τοῦ αβ, ἤτοι ἐπιμορίου ἢ ἐπιμέρους τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ εἴη τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ αβ, ἴσου τῷ δ τοῦ βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τοῦ δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζη πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ, δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ αγ πρὸς τὸ γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τοῦ εδ, καὶ ὅλον τὸ θε τοῦ δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ᾽ ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συνθέντι, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τοῦ δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τοῦ δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς

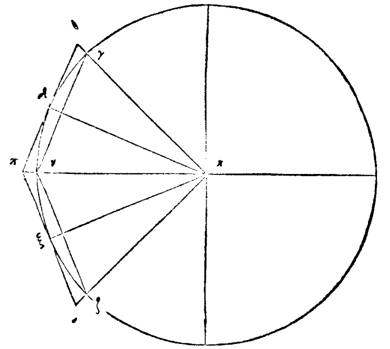
ἀνάπαλιν τὸ βγ πρὸς βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς εδ, καὶ συνθέντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κμ, δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κλ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κχ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τὸ κχ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χμν. ἐστὶ γὰρ ἡ κμ ἴση τῇ κχ, τουτέστι τῇ θ.



Η ἄρα νγ πολυγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς ἤδη τεταρτημορίου βεβηκίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ οπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξην γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ ωηδ, ἀπὸ τοῦ ω ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς ηθ ἴσην τῇ ὑπὸ πηδ, ἔσται ἴση ἡ ωθ τῇ πο, ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξη ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, κοινὴ δὲ ἡ ηω καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξω τῇ ωδ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ πξη ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ πδη. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δπ. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ πηδ, δηθ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δη, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ωδ τῇ θδ. ἀλλ᾽ ἡ ξπ τῇ πδ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θω ἄρα τῇ πο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις, ὥστε ἡ θπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θη τῇ ηω, τῆς δὲ γη τῇ ην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ οω τῇ γν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ωθ τῇ νκ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γνη τῇ ὑπὸ οπθ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



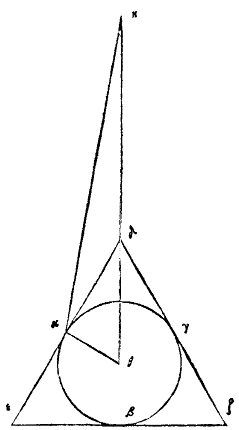
Η ἄρα μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τὸ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γητ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γητ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λκρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λμ νοουμένου, τὸ λκρ τρίγωνον τῷ γητ ὅμοιόν ἐστιν, ὡς ἡ ρκ πρὸς κλ, οὕτως ἡ γη πρὸς ητ, ὥστε καὶ ἡ μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσόν ἐστι τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ β χωρίου.

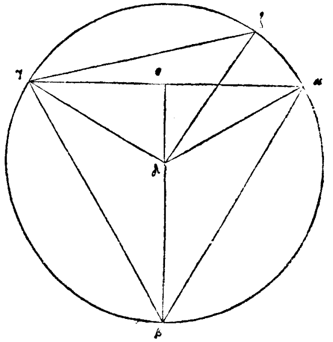
ΕΙΣ ΤΟ Η.

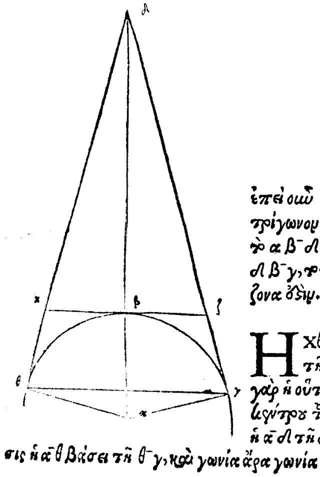
Αἱ γὰρ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ᾽ αὐτάς. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ κ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἡ κα. λέγω ὅτι ἡ κα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ κθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ κθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ κθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν κα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ ἐπὶ τὰς γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὰς δζ, ζε. ἐπισῆσαι δὲ χρὴ, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς πρόκειτο, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἐδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποία τις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονά ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

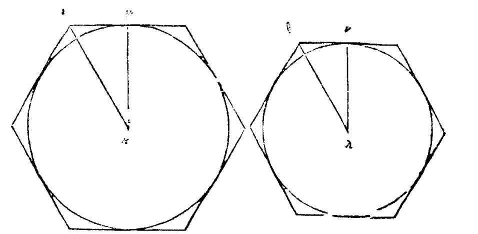
Ἤχθω γὰρ ἡ κζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται. ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ κβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ θβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δκβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζβ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ κδ τῇ δζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζκ τῇ αγ.

Περιγραφόντων δὴ πολύγωνα περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατόν ἐστι, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτό φησι, ὃ καὶ ἔστιν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ϛ θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ κδζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αδ, δγ, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβζ, μείζων ἐστὶν ἡ δζ τῆς βζ. ἡ δὲ ζβ τῇ ζγ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δζ ἄρα τῆς ζγ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δβζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βζγ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ βζγ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ δβκ τοῦ βκα μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δκζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αδγ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστὶν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκέτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοιοῦτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κε, κμ, λθ, λν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κε, λθ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὥστε τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κεμ, λθν ἡμίσειαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις

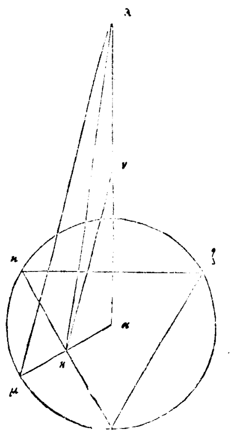


ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κεμ, λθν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κε πρὸς λθ, ἡ κμ πρὸς λν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ κε πρὸς τὸ ἀπὸ θλ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κμ πρὸς τὸ ἀπὸ λν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κτδ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ἡ δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ, ἴσον δὲ τὸ κτδ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κτδ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζθκ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θκ, κάθετος ἤχθω ἡ αη. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπεζευγμένη ἡ λη κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θκ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ' ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λη. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ αη. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λη, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ' ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ' αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ' ἑαυτὸ τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ αη πρὸς ηλ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς ην παρὰ τὴν μλ, ἔσται ὡς ἡ αμ πρὸς μλ, ἡ αη πρὸς ην. ἡ δὲ αη πρὸς ην μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ηλ. μείζων γὰρ ἡ λη τῆς ην. καὶ ἡ αμ ἄρα πρὸς μλ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αη πρὸς ηλ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ ΙϚ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δζ, αη, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δζ τῇ αη. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ αη, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αη, ἡ βδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βδ, αη. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, δζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αη ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ βδ, δζ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. κοινὸν προκείσθω τὸ ὑπὸ δα, αη, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ βα, αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βδ, δζ. καὶ τῷ ὑπὸ αδ, δζ. καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ αδ, αη.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αγ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς ἐπὶ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

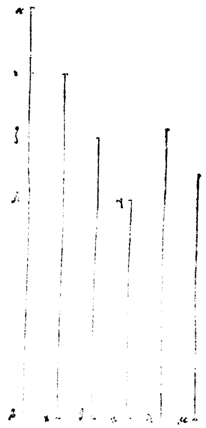
Ἡ δὲ κθ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ κξ τοῦ αβγδ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χκ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ χκ τῇ χζ, εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κμ τῇ μζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζχ τῇ χθ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χμ τῇ κθ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θζ πρὸς ζχ, οὕτως ἡ κθ πρὸς χμ. διπλῆ δὲ ἡ θζ τῆς χζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς χμ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ αβγδ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ελ πρὸς ακ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ηλ, γκ, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς κ, λ. καὶ παραλλήλου τῆς ακ τῇ λε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ ηλε τρίγωνον, τῷ γκα τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως ἡ γκ πρὸς κα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ηλ πρὸς λε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γκ πρὸς κα, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ αβγδ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ με πρὸς ελ, οὕτως ἡ μα πρὸς ακ. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ελ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ακ, ἀλλ' ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ελ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ελ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, τῆς ελ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν ακ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ακ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ακ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς ακ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ ελ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ ακ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ελ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν ακ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ελ πρὸς ακ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ελ πρὸς ακ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ προκείμενόν ἐστι, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὅ ταυτόν ἐστι τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ τοῦτο οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γκ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αβ ἴσης τῇ γκ, τῆς βδ, ἡ λοιπὴ ἡ αδ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν εβ ἴση κείσθω ἡ ι, τῇ δὲ βζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ι, η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ αβ πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ αβ ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τοῦ η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ αβ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ αβ, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογον εἰσίν, ἡ αβ πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς η. ὥστε ἡ αβ πρὸς τὴν γκ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ε θ, ἐπὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ ε ζ, γ δ, κ α, πρὸς τὴν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λ ε πρὸς ε θ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τῶν δὲ ὑπὸ ε λ, κ θ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ θ α. καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσον ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. ὥς ἐστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς α λ. καὶ διὰ τὸ ὁμοίου γινομένου τοῦ θ α κ τριγώνου τῷ θ α λ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ λ θ πρὸς θ α, ἡ α θ πρὸς θ κ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἕξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μ ζ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται κατὰ κωλούρου ἐπιφανείας ἐνεχθήσεται, ᾗ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ζ μ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζ η καὶ τῆς μ ν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μ α γενομένῃ κωλούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μ α καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς α β καὶ μ ν. καί ἐστιν ἡ μὲν ζ μ μείζων τῆς μ α, ἡ δὲ ζ η τῆς α β. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζ μ, ν η μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μ α, ν β ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπειδὴ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μ θ, ζ η, τὸ δὲ ὑπὸ μ θ, ζ η, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γ δ, δ ξ. ἡ μὲν γὰρ μ θ ἴση δέδεικται τῇ γ δ. ἡ δὲ ζ η μείζων τῆς δ ξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γ δ, δ ξ. τὸ δὲ ὑπὸ γ δ, δ ξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δ α. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ α.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δ λ κ, παραλλήλου οὔσης τῆς ε κ τῇ α λ, ἐστὶν ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ. ὡς δὲ ἡ ε δ πρὸς δ α, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ἡμίσεια τῆς ε ζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς α γ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ ε κ πρὸς α λ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ε κ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τοῦ μὲν τῆς ε κ πρὸς α λ λόγου διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς ε κ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καί ἐστιν ὡς ἡ ε κ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ α λ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ε κ, α λ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ε λ πρὸς δ α, τουτέστιν ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιος ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

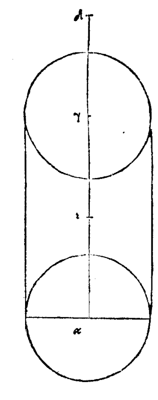
Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

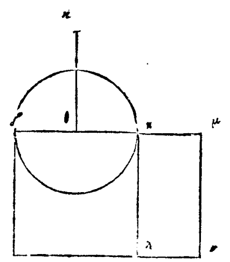
Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

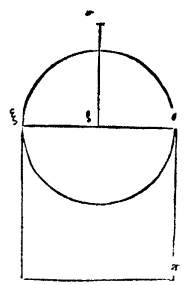
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθον καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι ποιῆσαι. φησὶ δὴ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιόλιά ἐστι τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ α γ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, γίνεται τὸ προτεθέν,



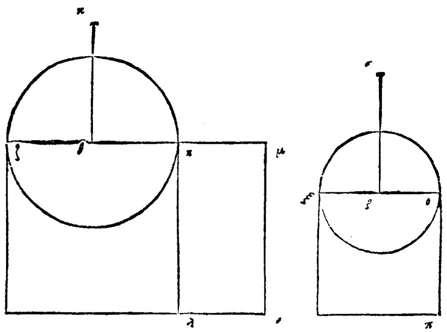


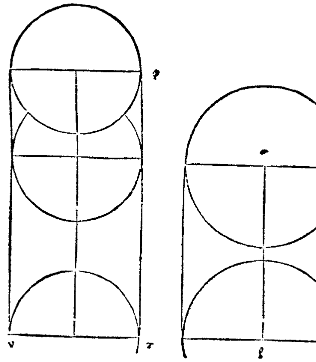


καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔνεστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος ἡ θ κ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ κ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν

παράλλη

παραλληλόγραμμον. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξω. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζη. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζη κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἕξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἐστὶ διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ζη κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ ποριζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο, βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ δεδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ προτεθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.





ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

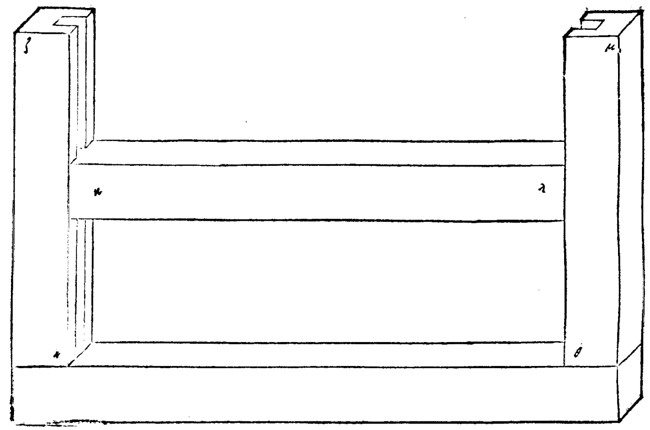
Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτῷ προῆκται τὰ τοῦ προβλήματος, λήξασης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὴ γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρών, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τί λέγω περὶ Εὐ-

δόξου,

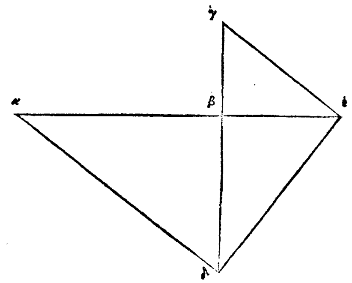
δόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζηθ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει οἷον τῷ ζη. κινείσθω κανὼν ὁ κλ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζη, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ηθ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θη, παράλληλον δὲ τῷ ζη, ὡς τὸ θμ. σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζη, θμ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κλ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κλ παράλληλος ἀεὶ τῷ ηθ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἓν σκέλος τῆς γωνίας

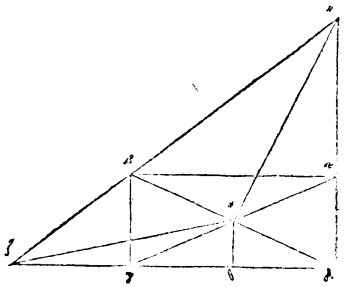


τυχὸν τὸ ηθ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥ τε γωνία καὶ ὁ κλ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς βδ εὐθείας ᾖ, τοῦ ηθ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κλ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς βε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γδε. τὸν δὲ κλ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ εα. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἔστιν ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα.



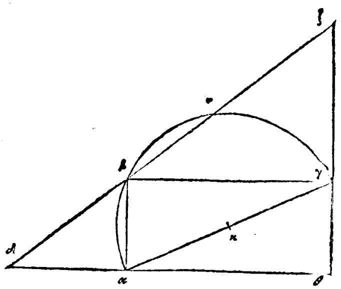
ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς Βελοποιικοῖς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βδ παραλλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β δ. φανερὸν δή, ὅτι ἴσαι εἰσὶ καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δ γ, δ α ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζ β η, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β. καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμνοι ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς ε η, ε ζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμὸν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζ β η, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν ε η, ε ζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γ δ κάθετος ἡ ε θ, δίχα δὴ τέμνει δηλονότι τὴν γ δ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γ δ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γ ζ, τὸ ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γ θ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θ ζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ε θ. τὸ ἄρα ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τῶν ἀπὸ γ θ, θ ε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζ θ, θ ε. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ γ θ, θ ε, ἴσον τὸ ἀπὸ γ ε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζ θ, θ ε, ἴσον τὸ ἀπὸ ε ζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δ ζ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ γ ε, ἴσον τῷ ἀπὸ ε ζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δ η α μετὰ τοῦ ἀπὸ α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ε η. καὶ ἔστιν ἴση ἡ μὲν α ε τῇ ε γ, ἡ δὲ η ε τῇ ε ζ. καὶ τὸ ὑπὸ δ ζ γ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δ η α. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζ δ πρὸς δ η, οὕτως ἡ α η πρὸς γ ζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζ δ πρὸς δ η, οὕτως ἡ ζ γ πρὸς γ β, καὶ ἡ β α πρὸς α η. τριγώνου γὰρ τοῦ ζ δ η παρὰ μίαν μὲν τὴν δ η, ἦκται ἡ γ β, παρὰ δὲ τὴν δ ζ ἡ α β. ὡς ἄρα ἡ β α πρὸς α η, οὕτως ἡ α η πρὸς γ ζ, καὶ ἡ γ ζ πρὸς γ β. τῶν ἄρα α β, β γ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α η, γ ζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

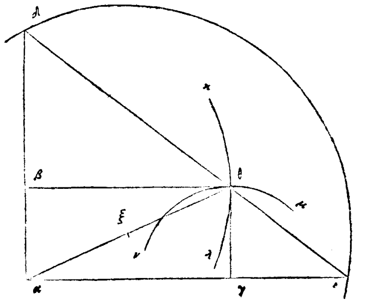
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς α γ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ α β ε γ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν β α, ἡ α δ. τῇ δὲ β γ ἡ γ ζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τὸ β, τέμνων τὰς α δ, γ ζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γ ζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἵαν ἔχει ἡ δ β ε ζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δ β τῇ ε ζ. λέγω ὅτι αἱ α δ, γ ζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν α β, β γ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δ α, ζ γ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν β α, ζ θ, ἡ πρὸς τὸ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ α ε γ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ, καὶ τὸ ὑπὸ ε δ β ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β ζ ε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ε δ β, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ δ α. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ β ζ ε ἴσον τῷ ὑπὸ θ ζ γ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θ δ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ ζ γ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς θ ζ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς δ α. ἀλλ' ὡς ἡ θ δ πρὸς θ ζ, οὕτως ἥ τε β γ πρὸς γ ζ, καὶ ἡ δ α πρὸς α β. τριγώνου γὰρ τοῦ δ θ ζ, παρὰ μὲν τὴν δ θ, ἦκται ἡ β γ. παρὰ δὲ τὴν θ ζ ἡ β α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β γ πρὸς ζ γ, ἡ γ ζ πρὸς δ α, ἡ δ α πρὸς α β, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.



Ἰστέον δὲ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδόν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῇ, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θ α, θ γ. καὶ ὁ πρὸς τῷ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς α γ, τουτέστι τοῦ κ ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνωνται πρὸς ταῖς θ δ, θ ζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κ δ, κ ζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δ β ἴση γένηται τῇ ε ζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δ β, ε ζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δ ζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνῳ διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

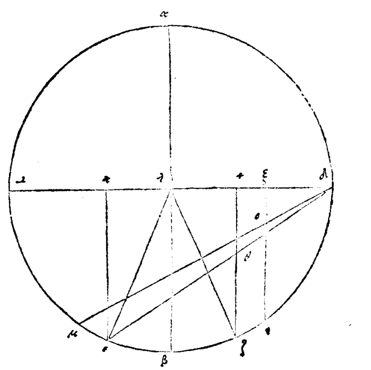
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ α β γ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ α γ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κ θ λ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ α β κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μ θ ν. καὶ τεμνέτω τὴν κ θ λ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ α, θ β, θ γ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ β γ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θ α. τετμήσθω δίχα ἡ θ α τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς α β, α γ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς α δ, α ε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευὴ ἐστὶ τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



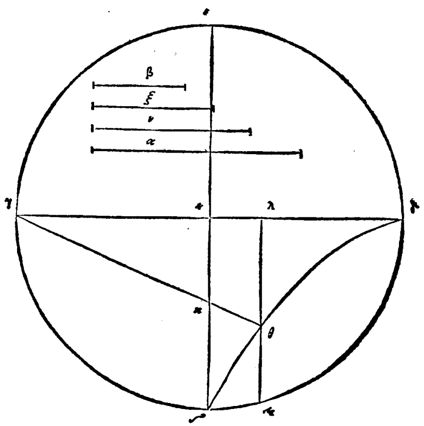
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ α β, γ δ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ ε β, β ζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ α β, ἤχθω ἡ ζ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δ ε. λέγω ὅτι τῶν γ η, η θ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζ η, η δ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ α β παράλληλος ἡ ε κ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ε κ τῇ ζ η, ἡ δὲ κ γ τῇ η δ. ἔσται γὰρ δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γ λ ε, ζ λ δ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσι διὰ τὴν λ ε τῇ λ ζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γ κ τῇ η δ, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ δ κ πρὸς κ ε, ἡ δ η πρὸς η θ, ἀλλ' ὡς ἡ δ κ πρὸς κ ε, ἡ ε κ πρὸς κ γ. μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ ε κ τῶν δ κ, κ γ. ὡς ἄρα ἡ δ κ πρὸς κ ε, καὶ ἡ ε κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ δ η πρὸς η θ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ μὲν δ κ τῇ γ η, ἡ δὲ κ ε τῇ ζ η. ἡ δὲ κ γ τῇ η δ. ὡς ἄρα ἡ γ η πρὸς η ζ, ἡ ζ η πρὸς η δ, καὶ ἡ δ η πρὸς η θ. ἐὰν δὲ ληφθῶσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β ἴσαι περιφέρειαι αἱ μ β, β ν. καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ α β ἡ ν ξ. ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δ μ, ἔσονται πάλιν τῶν γ ξ, ξ ο μέσαι ἀνάλογον αἱ ν ξ, ξ δ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ



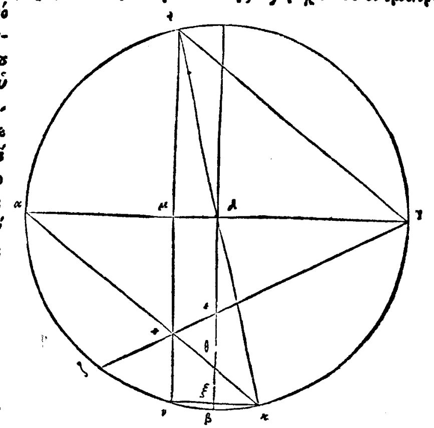
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων τεθεισῶν ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπὶ τὰ γενόμενα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ, καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, μέσαι ἀνάλογον τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατασκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν α, β, ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

Προύθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον, ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προσκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατασκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς

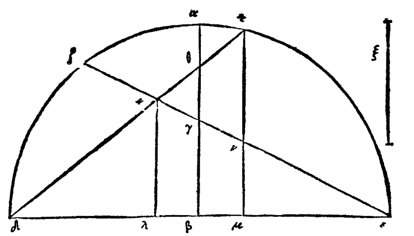


δε.

δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ηθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη εὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα, τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστι, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως. ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ κν τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δέ ἐστιν ἡ ημ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογόν εἰσι αἱ λμ, μα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ,

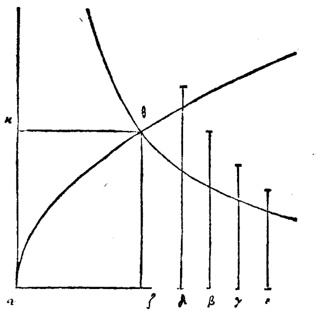


τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ τῇ βα.

τῇ βα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ ηλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ ηλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κμ πρὸς ηλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ' ὡς ἡ κμ πρὸς ηλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ βθ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὕτη ἡ αὐτή ἐστιν, τῇ τε ὑπὸ πάππου καὶ διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

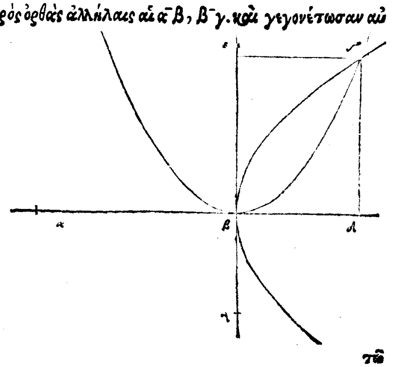
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ. τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τῆς θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥς τε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως.



ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή. ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δε, τέμνει δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ, ἴσον τῷ ὑπὸ δγ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον εἰσίν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥς τε εἶναι, ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῆς εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ



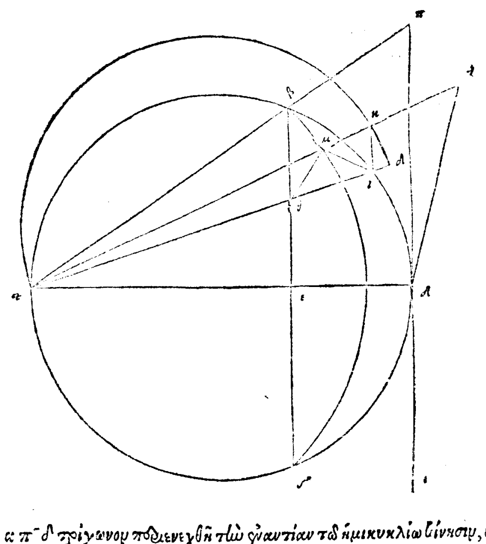
τῷ

τῷ ἀπὸ εβ, τουτέστι τῆς δζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βδ. ἅπτεται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν βε. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζδ, ζε. δοθεῖσαι ἄρα τὰ δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, βδ, βε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν βε παραβολή, ὥς τε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν βε, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν βγ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δβ παραβολή, ὥς τε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αβ. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζδ, ζε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζε, τουτέστιν ἡ δβ, τὸ ἄρα ὑπὸ γβε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζδ, τουτέστιν ἡ εβ, τὸ ἄρα ὑπὸ δβα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βα. ἀλλ' ὡς ἡ δβ πρὸς βε, οὕτως ἡ γβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ βδ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗμος ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αδ, γ. δεῖ δὴ τῶν αδ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν αδ κύκλος, ὁ αβδζ. καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ αβ. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ, ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν πδο ἤχθω ἡ βεζ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ αβδ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς αδ ἡμικύκλιον ὀρθόν, ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου, τέμνει τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς αδ



μενούσης τὸ απδ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ απ εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δκα. τὸ δὲ

αὐτὸ

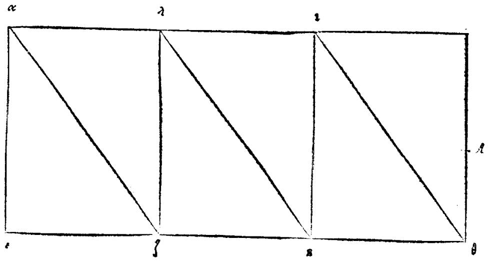
αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τῆς δλα. τὸ δὲ διὰ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔσω τὸ κ. ἔσω δὲ καὶ τὸ διὰ τῆς β γεγραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ βμζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ βδζα κύκλου ἔσω ἡ βζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ βδα ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔσω ἡ κι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ βζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ αλ τῷ βμζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κδ, μι, μθ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δκα, βμζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μθ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν βζ ὀρθή ἐστιν ἡ μθ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θβ, θζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θα, θι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μθ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ αμι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μιθ, μαθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ιμα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δκα ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κδ, μι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δα πρὸς ακ, τουτέστιν ἡ κα πρὸς αι, οὕτως ἡ ια πρὸς αμ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δα, ακ, αι, αμ ἑξῆς ἀνάλογον εἰσί. καὶ ἔστιν ἡ αμ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ αβ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν αδ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ ακ, αι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

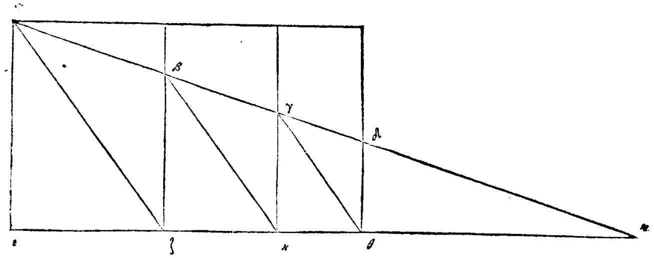
Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασίν, εἰσαγαγεῖν τὸν μίνω τῷ γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ᾽ ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιος ἔσω. τοῦ δὲ τοῦ κύβου μὴ σφαλῇς, διπλασίαζε ὦν ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος ἱπποκράτης ὁ χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασιν δηλίους ἐπιβαλλομένους νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ πλάτωνι ἐν ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, ἀρχύτας μὲν ὁ ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ᾽ ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι᾽ ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ᾽ ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμούς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν ἢ μέδιμνον εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθόβολα ὄργανα.

δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ αε, δθ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς εθ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ ἐπὶ τῆς εθ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ αζ, ζι, ιθ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ αζ, λη, ιθ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι, μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζι συνωσθήτω, τὸ μὲν αζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ιθ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἕως οὗ γένηται τὰ α, β, γ, δ κατ᾽ εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ εθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, ζβ παραλλήλοις, ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ ακ πρὸς κβ, ἡ εκ πρὸς κζ, καὶ ἡ κζ πρὸς κη. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βκ πρὸς κγ, ἐν μὲν ταῖς βζ, γη παραλλήλοις ἡ ζκ πρὸς κη. ἐν δὲ ταῖς βη, γθ παραλλήλοις ἡ ηκ πρὸς κθ. ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς κγ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ εκ πρὸς κζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ ζκ πρὸς κη, καὶ ἡ ηκ πρὸς κθ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ αε πρὸς βζ. ὡς δὲ ἡ ζκ πρὸς κη, ἡ βζ πρὸς γη. ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κθ, ἡ γη πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς βζ, ἡ βζ πρὸς γη, καὶ ἡ γη πρὸς δθ. ηὕρηνται ἄρα τῶν αε, δθ δύο μέσαι, ἥ τε βζ καὶ ἡ γη.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ᾽ αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ᾽ αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ᾽ αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

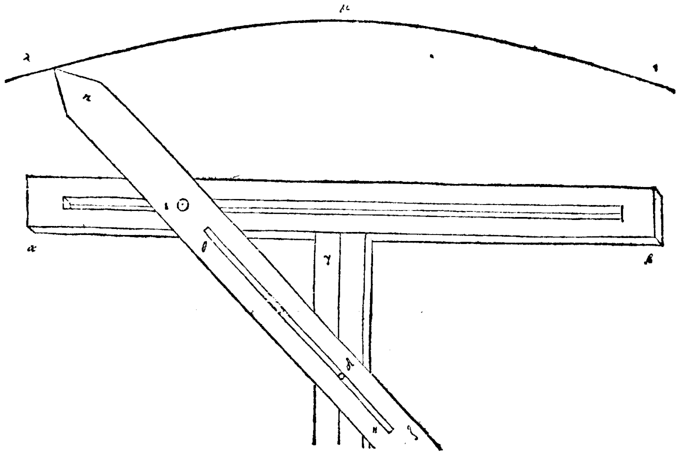


Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ αε, δθ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ᾽ εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχῃ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ακ πρὸς κβ, ἐν μὲν ταῖς αε, βζ παραλλήλοις ἡ εκ πρὸς κζ. ἐν δὲ ταῖς αζ, βη, ἡ ζκ πρὸς κη. ὡς ἄρα ἡ εκ πρὸς κζ, ἡ κζ πρὸς κη. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε αε πρὸς βζ, καὶ ἡ βζ πρὸς γη. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζβ πρὸς γη, ἡ γη πρὸς δθ. ἀνάλογον ἄρα αἱ αε, βζ, γη, δθ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς αε, δθ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς αε, δθ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ᾽ ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, ἀεὶ ἑνὶ πλείους πινακίσκους κατασκευασόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦ 'γαθὲ τεύχειν
Φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην
Ἢ τ' σεῖρον, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος. † σωρὸν
Τῇδ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μηδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
Μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι, μηδ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο
Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γ' ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
Ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων Πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε Ζεῦ,
Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὣς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
Τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένεος.

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓΧΟΕΙΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

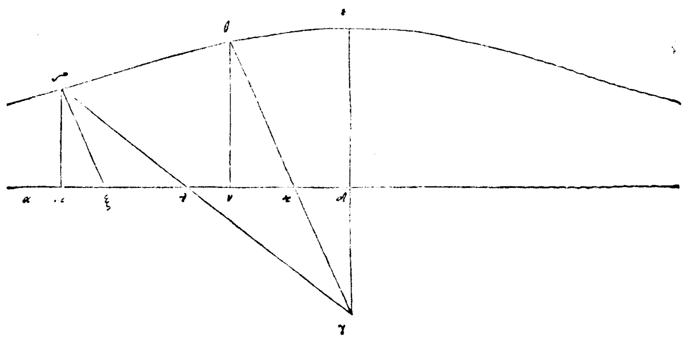
Γράφει δὲ καὶ Νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος. ἐφ' ὃ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς Ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, ὅτι τε ἐὰν ἐλλείποις. τῶν τοίνυν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων τῆς τε πρὸς Ἐρατοσθένην συγκρίσεως ἕνεκα, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάψομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως. Νοείσθω κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,



ὥστε μίαν ἀποσῴζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν, καθάπερ εἰσὶν οἱ α β, γ δ. ἐν δὲ τῷ α β σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γ δ κατὰ μὲν τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ε ζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν η θ, δυναμένην περιβαίνειν τὸ πρὸς τῷ δ κυλινδρίον. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκάσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυῆ τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ α β κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ε ζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν η θ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τῷ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ α β κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ η θ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ ε ζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρου νοουμένης. τῆς δὲ ἐκ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τῷ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ λ μ ν, ἥντινα καλεῖ Νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ κ ζ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

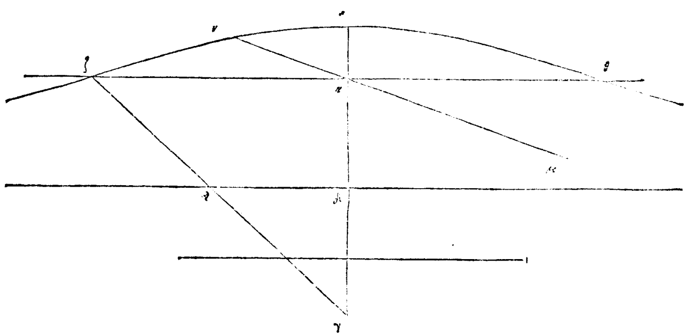
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαίνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ α β κανόνι. καὶ ἐὰν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ α β κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμήν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ α β. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος ἢ τοῦ δ ε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζ ε η. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γ θ, γ ζ ἴσων, δῆλον ὅτι γινομένων τῶν



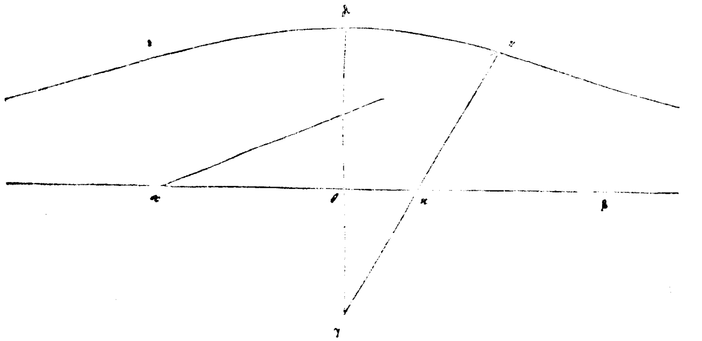
κ θ, λ ζ. λέγω ὅτι ἡ ζ μ κάθετος ἐλάττων τῆς θ ν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μ λ γ γωνίας τῆς ὑπὸ ν κ γ, λοιπὴ ἡ λοιπὴ δὲ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μ λ ζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ν κ θ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τῷ θ ἴσην συστησώμεθα τὴν ὑπὸ μ ζ ξ, ἡ κ θ, τουτέστιν ἡ λ ζ πρὸς θ ν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξ ζ πρὸς ζ μ. ὥστε ἡ ζ λ πρὸς τὴν θ ν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζ μ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θ ν τῆς ζ μ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε α β καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμήν, καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη ἤτοι παράλληλός ἐστι τῇ α β ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζ η θ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ δ ε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζ η κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. ἀλλ' ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἦν ἡ δ ε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γ ζ. ἴση ἄρα ἡ δ ε τῇ λ ζ ἀδιάφορον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἔστω ὡς ἡ μη ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ η παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζη. ἡ ἄρα ζθ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργανίου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς α, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι

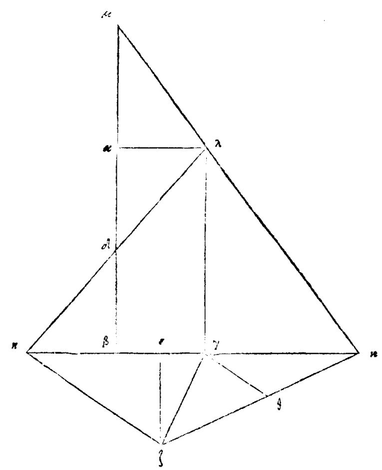


δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κοχλοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ, λέγω ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ γλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα,

καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε. καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γε, εζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κε, εζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ. ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῆς αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τὸ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.



ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ λδ, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

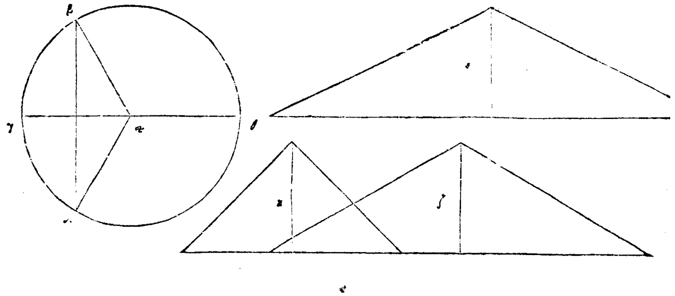
ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἶτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκθέμενος κῶνον τὸν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὅντινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ, τομέα δὲ στερεὸν καλέω, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τᾶς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τᾶς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

 ἐπιφα

ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νενοείσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶ-



νος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, ὥσπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ, η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β γ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν β γ δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν β γ δ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν β θ δ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ β θ ζ α τομεύς, τῷ β θ ζ κ σχήματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ε κ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ε θ. λοιπὸν τὸ β θ ζ κ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θ κ. τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ β α θ ζ τομεῖ.

Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ β α ζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ β κ ζ κώνῳ. καὶ προϊών φησιν ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ὅλη ἡ κ δ πρὸς δ θ ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς δ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ θ γ πρὸς γ δ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ δ πρὸς δ θ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. τουτέστιν ἡ κ θ πρὸς θ α. ἦν γὰρ ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. ἴση δὲ ἡ θ γ τῇ θ α. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς δ θ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε γ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κ δ, α γ. καὶ ἔστω ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κ δ, πρὸς τὸ ὑπὸ κ θ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ α γ πρὸς

τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ α ε γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κ δ πρὸς δ θ, οὕτως ἡ α γ πρὸς γ ε. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ἀπὸ θ δ, ὡς τὸ ἀπὸ α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ ε γ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. ἀλλ' ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, οὕτως τὸ ὑπὸ κ θ δ πρὸς τὸ ἀπὸ θ δ, κοινοῦ ὕψους τῆς θ δ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ α ε πρὸς ε γ, οὕτως τὸ ὑπὸ α ε γ πρὸς τὸ ἀπὸ ε γ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κ θ δ πρὸς τὸ ἀπὸ θ δ, οὕτως τὸ ὑπὸ α ε γ πρὸς τὸ ἀπὸ ε γ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θ δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ κ, οὕτως τὸ ε γ πρὸς τὸ ἀπὸ γ α. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κ θ δ πρὸς τὸ ἀπὸ κ δ, οὕτως τὸ ὑπὸ α ε γ πρὸς τὸ ἀπὸ α γ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β, τουτέστιν ἡ α γ πρὸς γ β. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ α δ β κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δ γ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ β γ πρὸς δ γ, ἡ β δ πρὸς δ α. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ β γ πρὸς τὸ ἀπὸ γ δ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ β γ πρὸς τρίτην τὴν γ α. καὶ ὡς ἄρα ἡ β γ πρὸς γ α, οὕτως τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ α. δοθεὶς δὲ λόγος τῆς α γ πρὸς γ β, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ α β. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς α γ πρὸς γ β. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ α γ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστι θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται, ἀρχὴ καὶ τὸ γ.

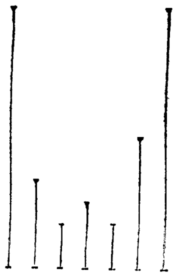
ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, ἡ κ β πρὸς β ρ. καὶ ἡ δ χ πρὸς χ β. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήχθη οὕτως. ἐπεὶ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κ δ, δ χ πρὸς δ χ, οὕτως ἡ ρ χ πρὸς χ β. διελόντι ὡς ἡ κ δ πρὸς δ χ, ἡ ρ β πρὸς β χ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ δ, τουτέστιν ἡ κ β πρὸς β ρ, ἡ δ χ πρὸς χ β. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λ χ πρὸς χ δ, οὕτως συναμφότερος ἡ κ β, β χ πρὸς χ β. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, ἡ δ χ πρὸς χ β, ἴση ἡ κ β πρὸς β ρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρ λ πρὸς ὅλην ἡ λ, ἐστὶν ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὥστε ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ κ δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρ λ πρὸς λ κ, ἡ κ λ πρὸς λ δ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ ρ λ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρ λ πρὸς λ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ κ δ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, οὕτως τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ κ δ. κείσθω τῇ κ β ἴση ἡ β ζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χ δ πρὸς χ β, οὕτως ἡ κ β πρὸς β ρ. μείζων δὲ ἡ δ χ τῆς β χ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κ β τῆς β ρ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ ρ πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δ λ πρὸς λ χ δοθείς, καὶ τῆς ρ λ πρὸς λ χ, καὶ τῆς ρ λ ἄρα πρὸς λ δ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κ β, β χ πρὸς χ β, τουτέστιν ἡ ζ χ πρὸς χ β, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ δ. καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χ ζ πρὸς ζ β, οὕτως ἡ χ λ πρὸς λ δ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ β ζ πρὸς ζ χ, ἡ δ λ πρὸς λ χ. δέδοται δὲ ὁ τῆς β ζ πρὸς ζ χ λόγος. ἐπειδὴ ἡ μὲν ζ β ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ β χ τῶν β χ περάτων αὐτῆς δεδομένων, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς α γ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δ β πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ α γ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χ ζ. καὶ διὰ τῆς χ ζ πρὸς ζ β. ὥστε καὶ ὁ τῆς λ χ πρὸς λ δ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λ α γ κώνου πρὸς α ρ γ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λ χ πρὸς χ ρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρ λ πρὸς τὴν λ χ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρ λ, λ δ πρὸς τὴν λ χ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρ λ ἄρα πρὸς λ δ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρ λ πρὸς λ χ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρ λ πρὸς λ δ, καὶ ἡ λ δ πρὸς λ χ. Ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λ δ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥστε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται,

Περὶ συνθέσεως λόγων.

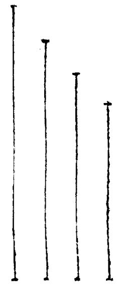
κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι καὶ Ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδένα τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τοῦ λόγου, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτε μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὥς φασιν ἄλλοι τε καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ μουσικῆς, καὶ Ἡρωνᾶς ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. τοῦτον δὲ εἰπεῖν καὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, ποιοῦντα τὸν ἡγούμενον. κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνειν, ἀδιαίρετον μενούσης τῆς μονάδος, ὥς τε ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς εἰς τὰ μέρη, ἢ τὰ μέρη ἀφ' ὧν ὀνομάζεται ὁ λόγος, ὥς τε εἶναι ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥς τε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ὅ ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛ ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β.



εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν α γ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γ β ὁ ε. ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλὰξ ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ' ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. καὶ ὡς ἄρα ὁ η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ' ὁ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν. καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου. καί ἐστιν ὁ ζ τοῦ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ α γ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ϛ πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προὔκειτο ἀποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἐκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου,
καὶ τοῦ

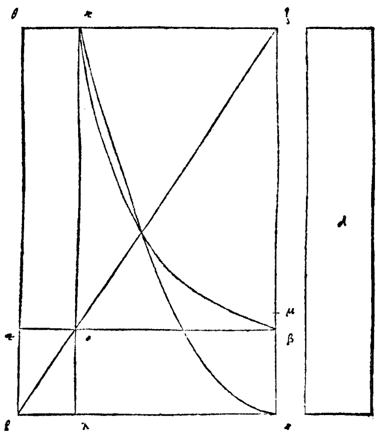
ἔτι τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ϛ. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ϛ ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥ τις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ϛ. ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ καὶ τοῦ ϛ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ϛ ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ τὸ συνεχόμενους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, ἔτι ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.



Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησίν, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ, διὰ τὸ συνθέντι. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ' οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ρ πίπτει οὕτω διάδηλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς θβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς θβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τῷ τῆς βζ πρὸς θζ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς χζ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τῶν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς χζ πρὸς ζθ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προἐνθὼν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβαλεῖν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ' ἑκατέραν δὲ ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸς ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδη, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλειμμένα λόγον, ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι' ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα. ἔν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ, οὐδὲ γὰρ τῆς πολλῆς ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐντετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο, τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς δὲ ἐκ τούτων ἐπινοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸς εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ τὸ πλῆθος, ὡς εἴρηται, τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας ἐπὶ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ ἐπὶ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμένων. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

† Διορισμῶν

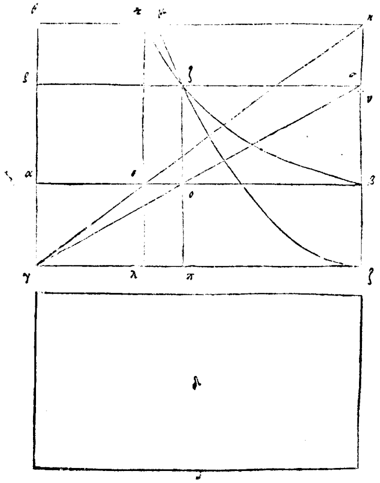
Εὐθείας δοθείσης τῆς α β, καὶ ἑτέρας τῆς α γ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς α β σημεῖον ὡς τὸ ε, ὥστε εἶναι ὡς τὴν α ε πρὸς α γ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἡ γ η, διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἡ ζ η β, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γ ε, γ η, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ η θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γ θ, η ζ παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ η μ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. ὡς δὲ ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η ζ. ὡς δὲ ἡ γ η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η ζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η ζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κ ζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γ η μ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ κ ζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ η πρὸς τὸ ὑπὸ γ η μ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ η πρὸς η μ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ κ ζ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η μ, τῆς η ζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ὑπὸ μ η ζ.



ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ὑπὸ μ η ζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μ η ζ τῷ ἀπὸ ζ κ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζ η, γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η μ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν η μ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς η γ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ η κ. πάλιν ἐπεὶ τὸ θ λ χωρίον ἴσον

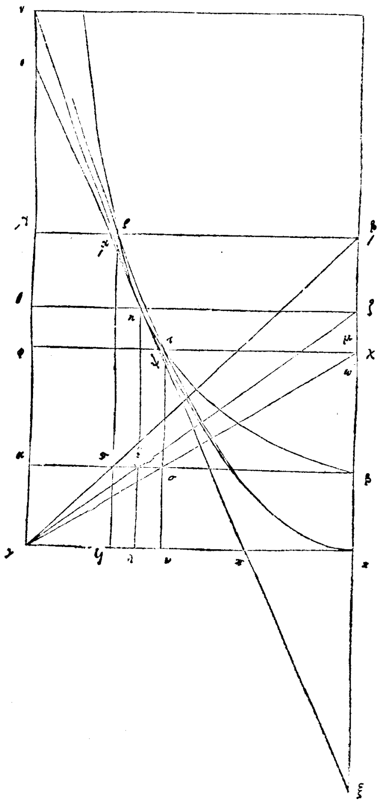
ἴσον ἐστὶ τῷ γ β, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β η. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ η γραφῇ ὑπερβολή, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θ γ, γ η, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κ β. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ, καὶ ἔστιν ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ κ ε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν α β. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ ε β, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ ε α, α γ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ ε β ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γ α. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ α β, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ α γ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν α β, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν α γ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς α β τρίτον μέρος ἡ α ε, τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν α γ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ α γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ γ ζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ α γ παράλληλος ἤχθω ἡ β ζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γ ε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ θ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζ η παράλληλος ἤχθω ἡ κ ε λ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν α γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ἔστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς β ε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς η κ. ἔστω οὖν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γ ζ ν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ η. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ η, οὕτως τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ ζ πρὸς τὸ ὑπὸ γ ζ ν, οὕτως ἡ γ ζ πρὸς ζ ν. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ ν, τῆς ζ η κοινοῦ ὕψους



λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ὑπὸ ν ζ η, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ η μ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ η μ τῷ ὑπὸ η ζ ν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζ η γράψωμεν παραβολήν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζ ν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μ ξ ζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θ λ τῷ α ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ κ λ τῷ ὑπὸ α β ζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θ γ, γ ζ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ βκ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξοπ. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ ρξσ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βκζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θγ, γζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρξ, ξπ, ταῖς αβ, βζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρξπ τῷ ὑπὸ αβζ, ὥστε καὶ τὸ ρο τῷ οζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γοσ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως ἡ οβ πρὸς βσ, τουτέστιν ἡ γζ πρὸς ζσ. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζσ, τῆς ζν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ὑπὸ σζν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γζν, τὸ δ χωρίον. τῷ δὲ ὑπὸ σζν, ἴσον τὸ ἀπὸ σξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ οα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

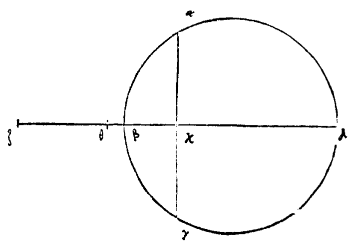
Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς βε τῆς εα, τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ αγ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ αβ ἤχθωσαν αἱ θζ, γη. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γα ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κελ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ γημ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. τὸ ἄρα ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν αγ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς βα λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζη παραβολή. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θγ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς νγη, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ βκ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζη ἴση κείσθω ἡ νξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξκ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς



διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ βε τῆς εα, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζκ τῆς κθ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ θκ τρίγωνον τῷ ξζκ τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξκ τῆς κο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξκ τῆς κω διπλῆ, διὰ τὸ καὶ τὴν ξζ τῆς ξη. καὶ παράλληλον εἶναι τὴν ωη τῇ κζ. ἴση ἄρα ἡ οκ τῇ κπ, ἡ ἄρα οκω ψαύουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ϲ, καὶ διὰ τοῦ ϲ τῇ κλ παράλληλος ἤχθω ἡ τϲυ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γη παράλληλος ἤχθω ἡ φτχ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φυ τῷ γβ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γϲ. ἴσον γὰρ τὸ φϲ τῷ ϲη, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ ϲ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γϲχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψχ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χημ διὰ τὴν παραβολήν, τὸ ἀπὸ τχ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ χημ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τχ ἴσον τὸ ὑπὸ χηω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ϲα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηχ. ἀλλ' ὡς ἡ γη πρὸς ηχ τῆς ηω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηω πρὸς τὸ ὑπὸ χηω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βϲ ἐπὶ τὴν ϲα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γηω ἐπὶ τὴν γα. τὸ δὲ ὑπὸ γηω ἐπὶ τὴν γα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γημ ἐπὶ τὴν γα, τὸ ἄρα ἀπὸ βϲ ἐπὶ τῆς ϲα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τῆς εα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ς. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ βς ἐπὶ τὴν ςα. τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ς τῇ κλ παράλληλος ἡ ϟςρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ, καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ αβ ἡ αρβ. συμβαλλέτω τῇ ηζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γϟ καὶ τῷ αη, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ς. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γςβ. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ αβ τῷ ὑπὸ βημ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρβ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βημ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρβ ἴσον τῷ ὑπὸ βηω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ςα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηβ. ἀλλ' ὡς ἡ γη πρὸς ηβ τῆς ηω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηω πρὸς τὸ ὑπὸ βηω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρβ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ βς. τὸ ἄρα ἀπὸ βς ἐπὶ τὴν ςα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γηω ἐπὶ τὴν γα. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γημ τοῦ ὑπὸ γηω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, τοῦ ἀπὸ βς ἐπὶ τὴν ςα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς αβ ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ὅταν ἡ διπλασία ἡ βε τῆς εα. ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ βϲ ἐπὶ τὴν ϲα, καὶ τὸ ἀπὸ βς ἐπὶ τὴν ςα ἔλασσον τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τῆς εα. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τῆς εα κατὰ δύο σημεῖα τῆς αβ τεμνομένης ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χθ γραφομένην παραβολήν. ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ηω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολή, πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γν παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρς τέμνει τὴν αβ κατὰ τὸ ς. ὥστε τὸ ς σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ βϲ ἐπὶ τὴν ϲα, τῷ ἀπὸ βς ἐπὶ τὴν ςα, ὡς ἐστι διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς βα δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολήν, τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ ϲ. τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ς.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντέθειται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς ἀρχι μήδειοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δ β. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ β ζ, καὶ ἡ διδομένη ἡ ζ θ. κατήντησαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δ ζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χ ζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ χ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δ β ἐπὶ τὴν β ζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δειχθήσεται. εἰ δὲ ἴσον, τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχον πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δ β τῆς ζ β, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν β ζ τῆς ζ θ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δ β τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζ θ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δ β ἐπὶ τῇ β ζ. διὰ τὸ τὴν β ζ τῆς ζ θ μείζονα εἶναι, ὅπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως προκεῖται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ' ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ὑμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δ ζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χ ζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ χ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δ β τῆς β ζ. καὶ μείζονα τὴν β ζ. τῆς ζ θ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καί φησιν· ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δ β, β ζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δ β τῆς β ζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς β ζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δ β κατὰ τὸ χ, οὐκέτι ὡς πρότερον τὴν δ ζ εἰπών, ἀλλὰ τὴν δ β δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτόν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δ ζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἐν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

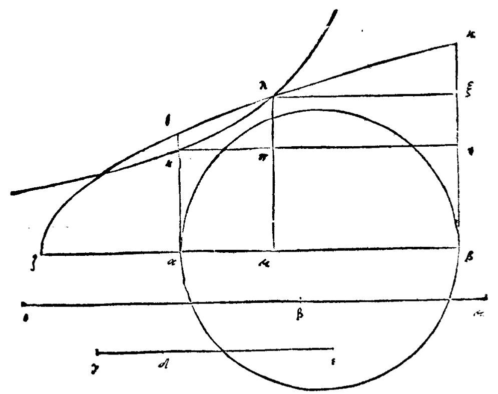


Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγράμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρὰ ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχών, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ἐπισυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐντετύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφέρετο.

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν α β, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. ἐκβεβλήσθω ἡ β α ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς α β ἡμίσεια ἡ α ζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γ ε πρὸς ε δ, ἐχέτω ἡ ζ α πρὸς α η, καὶ ἔστω ἡ α η πρὸς ὀρθὰς τῇ α β. καὶ τῶν ζ α, α η μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ α θ. μείζων ἄρα ἡ α θ τῆς α η. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζ β διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α η. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζ α η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ α θ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζ θ κ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ τὴν

τὴν α θ ἡ β κ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ η, περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζ β, β κ γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ, τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ λ μ. καὶ διὰ τῶν η, λ τῇ α β παράλλη-



λοι ἤχθωσαν αἱ η ν, λ ξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ η λ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ α β, β κ, καὶ παράλληλοι ταῖς α η ν, αἱ μ λ ξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α η ν τῷ ὑπὸ μ λ ξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν η ν τῇ α β ἴση ἐστίν, ἡ δὲ λ ξ τῇ μ β, τὸ ἄρα ὑπὸ λ μ β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ η α β. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λ μ πρὸς η α, οὕτως ἡ α β πρὸς β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ η α, οὕτως τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λ μ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζ μ α η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ λ, ἡ μ λ πρὸς α η. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζ μ πρὸς α η, οὕτως τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ η α. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ η α, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α η. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν α η, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν α η. ἐστὶν ὡς ἡ ζ α πρὸς α η, τουτέστιν ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. καὶ ὁ κῶνος ὁ ἄρα βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἐστὶν ὡς ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γ ε πρὸς ε δ. καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ α μ πρὸς τὸ τμῆ-

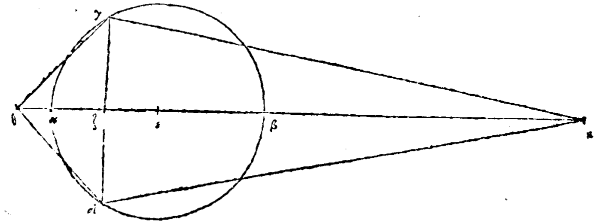
τμῆ

τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, τοῦτο ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. τὸ ἄρα διὰ τῆς λ μ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν α β, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ο μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ ο, οὕτως ἡ α μ πρὸς μ β, ἀλλ' ὡς ἡ α μ πρὸς μ β, οὕτως τὸ ἀπὸ π μ πρὸς τὸ ἀπὸ μ β. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, οὕτως ἡ μ ζ πρὸς μ ο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ π μ, ὕψος δὲ τὴν μ ο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

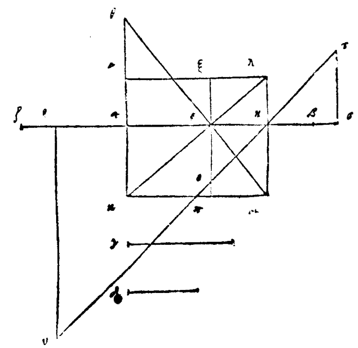
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, προλέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ἡ σφαῖρα ἡ α β γ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς α β, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν ε α, α ζ πρὸς ζ α, οὕτως τὴν η ζ πρὸς ζ β. ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν ε β, β ζ πρὸς ζ β, οὕτως τὴν θ ζ πρὸς ζ α, ἀποδέδει-



κται ὅτι τὸ μὲν γ β δ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ η. τὸ δὲ γ α δ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θ ζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ θ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζ η. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ ζ πρὸς ζ α, οὕτως συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς τὴν ζ β. διελόντι ὡς ἡ θ α πρὸς α ζ, οὕτως ἡ ε β πρὸς ζ β. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ η β πρὸς ζ β, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζ α. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει οὔσης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ δοθείσης τῆς ε β, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θ α, β η. ὥστε λόγον εἶναι τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θ α πρὸς α ζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζ β. ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζ α. τοῦτο δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐ παραδείκνυσιν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζ α, η β. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζ ε πρὸς τὴν ε η. ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζ α πρὸς α ε, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν β ε. ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ε α. γεγονέτω, καὶ τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θ α κ, λ β μ. καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν α κ, β μ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κ ε, μ ε, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κ μ. διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ α β ἡ λ ν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ ν κ ἡ ξ ε ο π. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ μ β πρὸς β ε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μ β πρὸς β ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε. ἴση ἄρα ἡ ζ α τῇ θ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ β η τῇ β λ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θ α ε πρὸς συναμφότερον τὴν μ β ε, οὕτως συναμφότερος ἡ κ α ε πρὸς συναμφότερον τὴν λ β ε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς α ε πρὸς ε β. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λ β ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θ α ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μ β ε. κείσθω τῇ κ α ἴση ἑκατέρα τῶν α ρ, β ς. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θ α ε ἴση ἐστὶ τῇ ζ ε, συναμφότερος δὲ ἡ λ β ε ἴση τῇ ε η, συναμφότερος δὲ ἡ κ α ε ἴση τῇ ρ ε, συναμφότερος δὲ ἡ μ β ε ἴση τῇ ς ε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λ β ε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μ β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ ζ ε η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρ ε ς. διὰ δὴ τοῦτο ὅταν τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτῃ, τό τε τὸ ς ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζ ε πρὸς ε η. ὡς δὲ ἡ ζ ε πρὸς ε η, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε η πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε η πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. τὸ δὲ ὑπὸ ζ ε η ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρ ε ς, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρ ε ς πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. κείσθω τῇ β ε ἴση ἡ ε ο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ β ο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν ς, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ς τ, ρ υ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν α β, ἦκται ἡ τ υ, δεδομένην ποιοῦσαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ε β ο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τ υ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν ς, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ ς τ, ρ υ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τ υ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν ε ο β, ς τ υ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τ β πρὸς β ο, οὕτως ἡ ς β πρὸς β ε. καὶ συνθέντι ἐστίν, ὡς ἡ τ ο πρὸς ο β, οὕτως ἡ ς ε πρὸς ε β. ἀλλ' ὡς ἡ β ο πρὸς ο υ, οὕτως ἡ β ε πρὸς ε ρ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τ ο πρὸς ο υ, οὕτως ἡ ς υ πρὸς ε ρ. ἀλλ' ὡς ἡ τ ο πρὸς ο υ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ο υ. ὡς δὲ ἡ ς ε πρὸς ε ρ, οὕτως τὸ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ρ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ο υ, οὕτως τὸ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ρ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ ς ε ρ, οὕτως τὸ ἀπὸ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ρ. τὸ δὲ ἀπὸ ο υ τοῦ ἀπὸ ε ρ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ ο β τοῦ ἀπὸ β ε. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα τοῦ ὑπὸ ς ε ρ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ε η ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ε η λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ ε η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξ ο. ἑκατέρα γὰρ τῶν ε η, ξ ο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λ β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τ υ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τ υ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξ ο β γίνεται, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τ υ φ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ



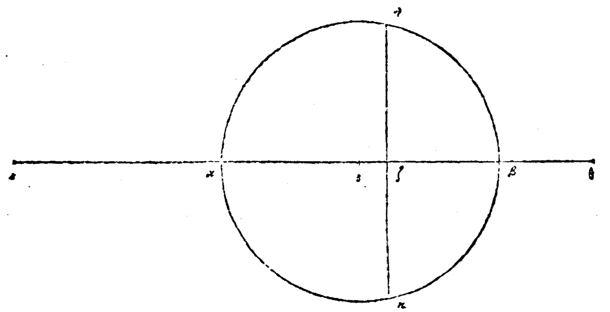
εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξτ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ ξκ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξω τῷ ὑπὸ αβμ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκμ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκμ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ τῆς ἐπὶ αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τεμεῖν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, τῇ δὲ ἡ βς. ἀπὸ τῶν ρ, ς πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, στ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς στ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τυφ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξπ τῷ ὑπὸ αβμ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ σε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ σερ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ὑπὸ σερ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ του ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ σερ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ του πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίσυ. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ επ, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ ες. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρες. ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ επ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ επ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ επ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμήματα

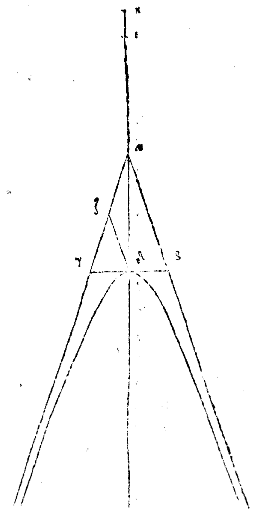
ματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν ηα πρὸς αζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλ-



ληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ ηζ πρὸς ζθ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δεη. καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν εη παραβάλλοντα, ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ δεη.



λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ γα, αβ, ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεκ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεκ εἴδους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

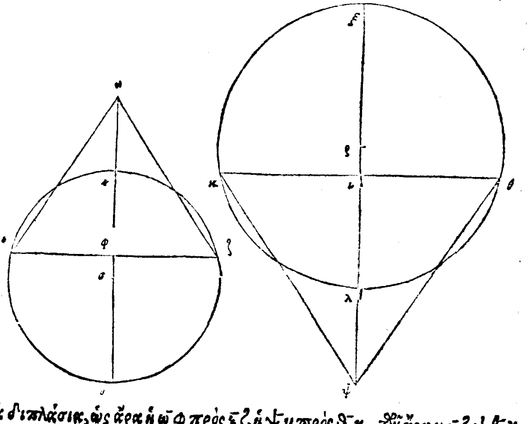
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀποθέμενος τῇ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἴσην τὴν ζβ, καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἔτι τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν θ, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσης πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ λέξις.

Καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ σο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς υκ. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ. τῶν ἄρα εζω, ψθκ



κώνων

κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τῆς ωφ πρὸς τὴν εζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῆς σφαίρας διῃρημέναι, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ εζ καὶ ἡ ηφ. καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς εζ ἡ εφ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ηφο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φο, ἀλλὰ καὶ ἡ φη. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἡ σο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οφ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς σο πρὸς οφ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς σοφ πρὸς τὴν οφ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ωφ πρὸς φη. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ωφ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ εζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ωφ πρὸς εζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χτ πρὸς αβ λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν αβ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χτ.

Ὅτι δ᾽ ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ εζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν εη δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ εηφ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς εφ πρὸς φη λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ εφ ἡμίσεια οὖσα τῆς εζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φη. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ εζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς εζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φη τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φη. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ κθ πρὸς δλ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψυ πρὸς θκ, ἡ χτ πρὸς δλ. ἐναλλὰξ ἡ ψυ πρὸς χτ, ἡ κθ πρὸς δλ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς τὴν δλ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δλ. ἐπεὶ δὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὁ αὐτὸς ἐλήφθη ὁ τῆς βα πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κθ πρὸς δλ. καὶ ὁ τῆς βα ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς δλ. ὥστε ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δλ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, θκ, ς, δλ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δλ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ᾽ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ μν, γθ. ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς βλ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βγ, οὕτως ἡ λν πρὸς μν. ἀλλ᾽ ὡς ἡ θγ πρὸς γπ, ἡ μν πρὸς νρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γθπ, μνρ τριγώνων. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς θπ, ἡ λν πρὸς νρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, οὕτως ἡ λρ πρὸς ρν. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς, δοθεῖσα ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ αγ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γπ. δέδοται δὲ καὶ ἡ βπ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ βγ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ εζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς βγ πρὸς εζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ϛ.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γθ, μν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γπ, μρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ βπ, πρὸς τὴν τρίτην τὴν πθ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς πβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λρ πρὸς ρν, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ρλ πρὸς ρν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς πλρ, πρὸς ρμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλασίους αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τμήματα.

ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδ, δζ πρὸς δζ. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδ, δζ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον. δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος. καὶ δέδοται ἡ εδ. δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος. δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ. λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ, τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ ὡς ἤτηται, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. δοθέντα ἄρα τὰ α, γ. καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσά ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδ, δζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ, δβ πρὸς δβ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἢ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδ, δζ τῆς δζ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιολία. συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιολία, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδ, δζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδ, δβ πρὸς δβ. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἄλλη δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς θζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ, δβ πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

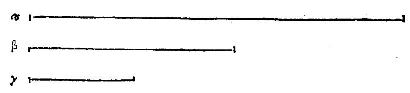
Ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ διίσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζδ, συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζβδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ δβζ ἴσον τῷ ἀπὸ βα. τῷ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τὸ ἀπὸ δα. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ θβ πρὸς βκ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ βε, δζ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Ἐλάττων ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζκ ἢ τὸ ἀπὸ ζκ, ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β,

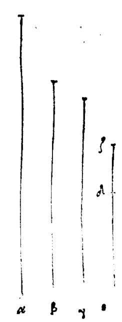
γ, ὥστε

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β.

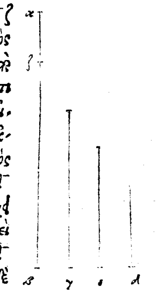


Τὸ ἄρα ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζη τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡς οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δ ε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ β γ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν β γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζε. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν εδ. καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε.



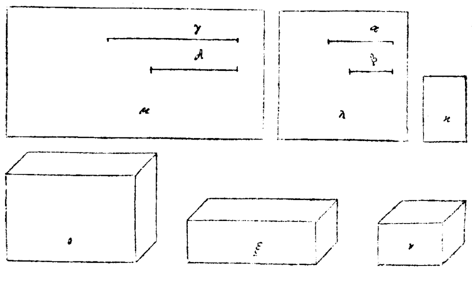
Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβκ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτως τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζκ πρόσκειται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς κζ πρὸς ζη. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιόν ἐστιν τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-



μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τοῦ β πρὸς δ. ὁ δὴ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω. ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω. τὸν δὲ δ πολλα-



πλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστίν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστίν, ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν, ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τοῦ κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τὸν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.

Φανερὸν δέ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ β, τοῦ β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸν α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσιν πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς η θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ

τῷ κῶνον.

τῷ κῶνον τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ β α δ κώνου πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, ὁ τῆς α θ ἐστὶ πρὸς θ γ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ β γ δ κώνου πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα, ὁ τῆς α θ ἐστὶ πρὸς θ ζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς η θ πρὸς θ γ, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ ζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς η θ πρὸς θ γ, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ ὁ τοῦ ὑπὸ η θ α ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ η θ α πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ ζ, ὁ τοῦ ὑπὸ η θ α ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ η θ α ἐπὶ τῆς θ α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τῆς θ ζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ β α δ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ β γ δ, τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ β. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β γ, οὕτως ἡ α θ πρὸς θ γ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τῆς θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τῆς θ ζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ. ἀλλὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τῆς θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τῆς θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ τῆς θ η κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν ζ θ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. τουτέστιν ὅτι μείζων ἡ ζ θ τῆς θ η. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς α θ, θ γ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζ α, γ η.

Ταῦτα εἰπών, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δ' αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζ θ τῆς θ η μείζων ἐστί, τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. ὥστε τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η, τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ α θ πρὸς θ γ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς α β πρὸς β γ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α β τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ β γ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον, ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς α β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ α θ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ β κύβον. ὡς γὰρ ἡ α β πρὸς τὴν β γ, οὕτως ἡ α θ πρὸς θ β, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν α β γ, α β θ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς α θ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ θ β κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α β τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς α θ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ β κύβον, τουτέστιν ὁ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β. καὶ ὁ τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β διπλασίων τῆς α θ πρὸς θ β, προσλαβὼν τὸν τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τοῦ α θ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον. ἑκατέρος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β προσλαβὼν τὸν τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ τοῦ ἀπὸ α θ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς α θ πρὸς θ β λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θ β πρὸς θ γ, τῆς β θ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης. ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β μετὰ τοῦ τῆς β θ πρὸς θ γ. ἀλλ' ὁ τῆς β θ πρὸς θ γ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ, τῆς β θ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β λόγος, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, μετὰ τοῦ ἀπὸ θ β πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ β θ, καὶ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ, τοῦ ἀπὸ β θ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ β θ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ ἐπὶ τὴν θ κ, τῆς θ κ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β ἐπὶ τὴν θ κ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ β θ γ ἐπὶ τὴν θ κ, τουτέστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ κ πρὸς θ ζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γ θ καὶ τὸ ὑπὸ γ θ β, καὶ ἡ θ κ καὶ θ ζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ἢ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρ' ἔχομεν δεῖξαι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γ θ β ἐπὶ τὴν θ κ. τοῦτο δ' ἔστι τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ κ πρὸς θ ζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β, ἡ γ θ πρὸς θ β. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γ θ πρὸς θ β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ κ πρὸς θ ζ. τουτέστιν ἡ κ θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ ε γ πρὸς ὀρθὰς ἡ ε κ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ β λ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ κ θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἴση δέ ἐστιν ἡ θ ζ συναμφοτέρῳ τῇ θ α κ ε. ἡ γὰρ α ζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ κ θ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α κ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς κ θ τῆς γ θ. ἀπὸ δὲ τῆς κ ε τῆς ε λ ἴσης τῇ β θ δεῖ ἔσται δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γ κ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν α θ κ λ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ κ θ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α κ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ κ θ πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θ α κ ε πρὸς θ β. τουτέστι πρὸς λ ε, καὶ διελόντι ἡ κ γ πρὸς γ θ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θ α κ λ πρὸς λ ε, τουτέστι πρὸς β θ. ἐναλλάξ, ὅτι ἡ κ γ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α κ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἀλλ' ὡς ἡ γ θ πρὸς θ β, οὕτως ἡ θ β πρὸς θ α, τουτέστιν ἡ λ ε πρὸς α θ. ὅτι ἄρα ἡ γ κ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α κ λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λ ε πρὸς α θ. καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ γ κ, τουτέστιν ἡ κ ε πρὸς ε λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ θ α πρὸς θ α, διελόντι ἡ κ λ πρὸς λ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κ λ πρὸς θ α. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λ ε τῆς θ α ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λ ε τῆς α θ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κ λ πρὸς λ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ λ πρὸς α θ. συνθέντι ἡ κ ε πρὸς ε λ μείζονα λόγον ἔχει. ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ α θ πρὸς α θ. ἡ δὲ κ ε τῇ β θ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα κ γ πρὸς β θ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ α θ πρὸς α θ. ἐναλλάξ, ἡ ἄρα κ γ πρὸς συναμφότερον τὴν κ λ α θ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ β θ πρὸς θ α, τουτέστιν ἡ γ θ πρὸς θ β. ἐναλλὰξ ἡ κ γ πρὸς γ θ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ α θ πρὸς θ β. συνθέντι ἡ κ θ πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ α θ μετὰ τῆς θ β, τουτέστι συναμφότερος ἡ α θ κ ε πρὸς β θ. ἴση δὲ ἡ κ ε τῇ α ζ. ἡ ἄρα κ θ πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζ θ πρὸς θ β. ἐναλλὰξ ἡ κ θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β, ὡς δὲ ἡ γ θ πρὸς θ β, οὕτως τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β. ἡ ἄρα κ θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β, καὶ διὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γ θ β ἐπὶ τὴν θ κ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β ἐπὶ τὴν θ κ, τουτέστι τὸ ἀπὸ

α θ ἐπὶ

α θ ἐπὶ τῆς θ κ, πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β, ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ γ θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ, τοῦ ἀπὸ β θ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ β θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς β θ πρὸς θ γ, τουτέστι τῷ τῆς α θ πρὸς β θ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τῆς θ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, μετὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ β, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς α θ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον. τουτέστι τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ θ ζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ α β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ κ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβου λόγον, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ β α τῆς μὲν α κ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς β α, τὸ ἀπὸ τῆς α β μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων οὐσῶν. ὥστε τοῦ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ α β ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ α κ, κ β. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ α κ τοῦ ἀπὸ κ β, τὸ ἀπὸ α β τοῦ ἀπὸ α κ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημεῖον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔστω τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ, ὕψος δὲ τὴν δ ε, τοῦ μὲν κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κύκλον. ὕψος δὲ τὴν λ ν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζ θ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λ ν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν α ρ γ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων κατὰ τὴν ἀπωτέρω. τοῦτο δὲ ἐστὶν εἰπεῖν. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α β. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ β γ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν β κ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι τῷ ὅλῳ, γίνεται τὸ ὑπὸ γ α κ ἴσον τῷ ἀπὸ α β, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γ α, καὶ α κ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γ ξ α κ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ α β, τουτέστι τῷ ἀπὸ α ρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α κ, γ ξ, τῷ ἀπὸ α ρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ α ρ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ α ρ γ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ α ρ, τῷ δὲ ὑπὸ α κ γ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ α ρ γ μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ, τοῦ ὑπὸ α κ γ, μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ α ρ γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ α ρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γ α ρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ α κ γ μετὰ τοῦ ὑπὸ α κ γ ξ ἴσον τῷ ὑπὸ α κ ξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γ α ρ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ α κ ξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῆς ξ κ α ἴσον ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῆς μ κ γ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξ γ πρὸς γ κ, ἡ μ α πρὸς α κ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξ κ πρὸς κ γ, οὕτως ἡ μ κ πρὸς κ α. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξ κ α ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ μ κ γ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ξ κ α μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γ α ρ. καὶ τὸ ὑπὸ γ α ρ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς γ κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς α ρ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι

εἰσὶν

εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση· τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αε, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης παρὰ τοῦ Μιλησίου μηχανικοῦ Ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πίνυτος γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ' ἐκεῖνος
Γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

Εὐτοκίου

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν.

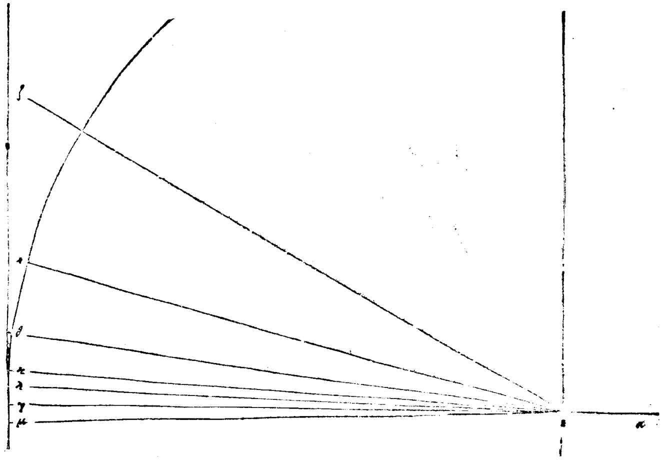
Ἑπόμενον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ Ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἔχης ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆναι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον Ἀρχιμήδει βιβλίδιον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τἀνδρὸς, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γὰρ ὅτι τί ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἱπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω. τούς τε τὴν Εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν Ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γὰρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησὶ συνεγγὺς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασαμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ Ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀνελλιπῶς ἁρμοζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησὶν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον ἐστὶν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπὸ ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρὴ, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπὸ Ἀρχιμήδους γράφεται. ἔστι γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πάντη που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διεστώτων. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφαίνη, δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ πρὸς Ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτόν ἐστιν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευρὰς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον καὶ τούτοις δόξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ πορ τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αζομ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δύναμιν πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς. εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνου ἀναλέγεσθαι, καὶ ἡ ὑπὸ γ ε ζ τρίτου ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν δίχα τεμόντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τὸ τρίτω ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν ε ζ, ἡ ὑπὸ γ ε ζ τρίτου ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τὸ γ ἀποληφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γ ε ζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ γ λόγον ἔχει, ὃν τ̄ς πρὸς ρ̄ν̄γ. ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ε ζ τῆς ζ γ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζ γ ἴσην θῶμεν τὴν γ μ. καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε. συναχθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου ἰσοπλεύρου. ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστὶ τὸ γ ε ζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ ε ζ δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ ε ζ τῆς γ ζ. ἡ δὲ ε γ πρὸς γ ζ λόγον ἔχει, ὃν σ̄ξ̄ε πρὸς ρ̄ν̄γ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ε ζ ὑπόκειται τ̄ς. ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν γενήσεται $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,γχ̄λς. ἡ δὲ γ ζ ἐστὶ ρ̄ν̄γ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ε ζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ε γ, γ ζ. ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ ε ζ ὄντος $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,γχ̄λς, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γ ζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ε γ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκ̄ζ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σ̄ξ̄ε. καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπεται γὰρ ἡ τῶν σ̄ξ̄ε δύναμις τοῦ ἀκριβοῦς μονάσιν β̄. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ε ζ τ̄ς	ἡ ζ γ ρ̄ν̄γ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ ε γ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκ̄ζ
ἐπὶ τ̄ς	ἐπὶ ρ̄ν̄γ	τὰ δὲ σ̄ξ̄ε $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ σκ̄ε
$\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,αω	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,ετ	ἐπεὶ ἐξελείπει ἄρα $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$ β̄
,αωλ̄ς	,ζχν	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,β ,α εἰς τὸ ἀκριβές
ὁμοῦ $\overset{\theta}{\mathrm{M}}$,γχ̄λς	ῡνθ	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,β ,γχτ
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ	,ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζ ε γ δίχα τῇ ε η. ἔστιν ἄρα ἡ ζ ε πρὸς ε γ, ἡ ζ η πρὸς η γ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζ ε, ε γ πρὸς ε γ, ἡ ζ γ πρὸς γ η. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζ ε, ε γ πρὸς ζ γ, ἡ ε γ πρὸς γ η. συναμφότερος δὲ ἡ ε ζ, ε γ μείζων ἐστὶν ἤπερ φ̄ο̄α. ἡ μὲν γὰρ ζ ε ὑπόκειται τ̄ς. ἡ δὲ ε γ σ̄ξ̄ε, καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζον εἰσὶν τῶν φ̄ο̄α. ἡ δὲ ζ γ ἐστὶ ρ̄ν̄γ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζ ε, ε γ πρὸς ζ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φ̄ο̄α πρὸς ρ̄ν̄γ. ὥστε καὶ ἡ ε γ πρὸς η γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ

ἤπερ φ̄ο̄α πρὸς ρ̄ν̄γ, ἡ η ε ἄρα πρὸς η γ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θῡν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ. συναχθήσεται δὲ οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ε γ πρὸς γ η μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φ̄ο̄α πρὸς ρ̄ν̄γ. εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν ε γ φ̄ο̄α. τὴν δὲ γ η, ρ̄ν̄γ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ε γ $\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ ςμ̄α. τὸ δὲ ἀπὸ γ η $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ ε η, ἔσται $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θῡν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φ̄ϟ̄α ἤ ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φ̄ϟ̄α ἴσον τετραγώνου εἰς τὸ ἀκριβὲς $\overset{o}{\mathrm{M}}$ κα ς' ιε' ἔγγιστα. ἡ ἄρα ε η πρὸς η γ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θῡν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ. μήκει δὲ ὃν φ̄ϟ̄α ἴσον ἔγγιστα πρὸς ρ̄ν̄γ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ε γ φ̄ο̄α	ἡ η γ, ρ̄ν̄γ	φ̄ϟ̄α ἤ
ἐπὶ φ̄ο̄α	ἐπὶ ρ̄ν̄γ	ἐπὶ φ̄ϟ̄α ἤ
$\overset{\kappa\epsilon}{\mathrm{M}}$ $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$,εφ	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,ετ	$\overset{\kappa\epsilon}{\mathrm{M}}$ $\overset{\delta}{\mathrm{M}}$,εφξβ<
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$,ε ,δλο	,ε ,β φ, ξν.	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$,ε ,ηρϟ̄ια δ'
φ̄ο̄α	τ ρ̄ν̄θ	φϟ̄α ἤ
$\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$,ςμ̄α	ὁμοῦ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γυθ	ξβζια δ' ηξ̄ δ'
	ὁμοῦ $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$	θ υκ̄ηζ δ' ξ̄ δ'
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ ε η		$\overset{o}{\mathrm{M}}$ κα ς' ιε' ἔγγιστα
$\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θῡν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ η ε γ τῇ θ ε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ε γ πρὸς γ θ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,αρξ̄β ἴδον πρὸς ρ̄ν̄γ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ η ε πρὸς ε γ, ἡ η θ πρὸς θ γ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ η ε, ε γ πρὸς ε γ, ἡ η γ πρὸς γ θ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ η ε, ε γ πρὸς η γ, ἡ ε γ πρὸς γ θ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ε γ, φ̄ο̄α, καὶ ἔτι μόριον τινός. ἡ δὲ ε η φϟ̄α. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσίν, ἤπερ ,αρξ̄β ἤ. καὶ ἔστιν ἡ η γ, ρ̄ν̄γ. συναμφότερος ἄρα ἡ η ε, ε γ πρὸς η γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αρξβ ἤ πρὸς ρ̄ν̄γ.

Ἡ θ ε ἄρα πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃ ,αξ̄β ἤ πρὸς ρ̄ν̄γ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ε γ πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ,αρ̄ξ̄β ἤ πρὸς ρ̄ν̄γ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ε γ $\overset{\rho\epsilon\lambda}{\mathrm{M}}$ φλδ<,ξ' δ''. τὸ δὲ ἀπὸ γ θ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γῡθ. τὸ ἄρα ἀπὸ ε θ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ ε γ, γ θ, ἔσται $\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$,γλ̄μγ<ξ' δ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,αρ̄οβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτῆς $\overset{o}{\mathrm{M}}$ ξ̄ς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ε γ ,αρξβ ἤ	ἡ θ γ ρ̄ν̄γ	,αροβ ἤ
ἐπὶ ,αρξβ ἤ	ἐπὶ ρ̄ν̄γ	ἐπὶ ,αροβ ἤ
$\overset{\rho}{\mathrm{M}}$ $\overset{\iota}{\mathrm{M}}$ $\overset{\varphi}{\mathrm{M}}$,βρ̄κε	μα ,ετ	$\overset{\rho}{\mathrm{M}}$ $\overset{\iota}{\mathrm{M}}$ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$,βρμ̄ς<
$\overset{\iota}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,ςσιβ<	,ε ,β φρν	$\overset{\iota}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ζσκ̄α<
$\overset{\varphi}{\mathrm{M}}$,ς ,γχρκζ<	,τρνθ	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ ζ δ'λρμη< δ'
,βσρκδ' δ'	ὁμοῦ $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γυθ	,βσρμ̄δ' δ'
ρμ̄ε δ' ξ' δ'		ρμ̄ς< ξ' δ'
ὁμοῦ $\overset{\rho\lambda\epsilon}{\mathrm{M}}$ φλδ<ξ δ'	ὁμοῦ $\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$,γλζ<ξ' δ'	
τὸ ἀπὸ ε θ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ ε γ γ θ ἐστὶ $\overset{\rho\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$,γλμ̄γ<ξ' δ.		$\overset{o}{\mathrm{M}}$ λ̄ς.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θ ε γ τῇ ε κ, ἡ ε γ ἄρα πρὸς γ κ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ,βτλδ' δ' πρὸς ρ̄ν̄γ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θ ε γ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θ ε πρὸς ε γ, ἡ θ κ πρὸς γ κ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θ ε, ε γ πρὸς ε γ, ἡ θ γ πρὸς γ κ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θ ε, ε γ πρὸς θ γ, ἡ ε γ πρὸς γ κ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θ ε ,αρ̄οβ ἤ, καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θ ε, ε γ μείζων ἐστί, ,βτλδ' δ'. καὶ ὑπόκειται ἡ θ γ ρ̄ν̄γ. συναμφότερος ἄρα ἡ θ ε, ε γ πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βτλδ' δ' πρὸς ρ̄ν̄γ.

Ἡ ε κ ἄρα πρὸς τὴν γ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,βτλθ δ' πρὸς ρ̄ν̄γ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ μὲν ἡ $\overset{ο}{Μ}$ ͵εγ, βτλδ δ', ἡ δὲ γκ ͵ρνγ. ἔσται τὸ $\overset{}{Μ}$ ἀπὸ ͵εγ $\overset{φνδκ}{Μ}$ ͵ψκγ ιϛ'. τὸ δὲ ἀπὸ γκ $\overset{β}{Μ}$ ͵γυθ. τούτοις δ' ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε. ἔσται ἄρα $\overset{φνϛ}{Μ}$ ͵βρα β ιϛ'. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵ϛτλθ δ'. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{ο}{Μ}$ μα ∠. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ͵εγ βτλδ δ'
ἐπὶ ͵βτλδ δ'
$\overset{υ}{Μ}$ $\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{ϛ}{Μ}$ ηφ
$\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{θ}{Μ}$ ͵θασοε
$\overset{ϛ}{Μ}$ ͵θλρκζ ∠
ηασρκιϛα
φπγ ∠ ιϛ
ὁμοῦ $\overset{φμδ}{Μ}$ ͵η ψκγ ιϛ'
ἐκ τούτων συνάγεται τὸ
ἀπὸ ͵εκ $\overset{φμϛ}{Μ}$ ͵βρα β ιϛ.

ἡ γκ ͵ρνγ
ἐπὶ ͵ρνγ
$\overset{α}{Μ}$ ͵ετ
͵εβφρν
͵τρνθ
ὁμοῦ $\overset{β}{Μ}$ ͵γυθ

͵βτλθ δ
ἐπὶ ͵βτλθ δ
$\overset{ν}{Μ}$ $\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{ϛ}{Μ}$ $\overset{α}{Μ}$ ηφ
$\overset{ξ}{Μ}$ $\overset{θ}{Μ}$ ͵θβψοε
$\overset{ϛ}{Μ}$ ͵θλϲοζ ∠
$\overset{α}{Μ}$ ͵ηβψϲοπαβδ'
φπδ ∠ δ' ιϛ.
ὁμοῦ $\overset{φμϛ}{Μ}$ ͵βϙ ∠ ιϛ'
ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
$\overset{ο}{Μ}$ μα ∠

Ἐπὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστὶν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ', καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ', καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ ∠'. καὶ ἔστιν ἡ κγ ͵ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ εκ, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κεγ, εἰκοστοτέταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὥστε μη ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϙϛ ἄρα ἐστὶ, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ, ρϙβ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϙϛ ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ ∠. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ $\overset{α}{Μ}$ ͵δχπη. ὁ γὰρ ϙϛ ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ $\overset{α}{Μ}$ ͵δχπη πρὸς ͵δχογ ∠. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει $\overset{ο}{Μ}$ χξζ ∠'. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν χξζ ∠, ἅπερ ἐστὶ ͵δχογ ∠', ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου $\overset{ο}{Μ}$ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστὶν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. καὶ τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται $\overset{σμγ}{Μ}$ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ $\overset{ξ}{Μ}$ ͵θυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ $\overset{ρπβ}{Μ}$ ͵εϲ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς

ἀκριβοῦς $\overset{ο}{Μ}$ α. διὸ φησὶν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ͵ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ͵αφξ
ἐπὶ ͵αφξ
$\overset{ρ}{Μ}$ $\overset{ν}{Μ}$ $\overset{ϛ}{Μ}$
$\overset{ν}{Μ}$ $\overset{κε}{Μ}$ $\overset{γ}{Μ}$
$\overset{ϛ}{Μ}$ $\overset{γ}{Μ}$ ͵γχ
ὁμοῦ $\overset{σμγ}{Μ}$ ͵γχ.
ἂν ἀφέλωμεν τὰ ἀπὸ βγ ἀπὸ τῆς αγ, καταλείπονται
$\overset{ρπβ}{Μ}$ ͵εϲ.

ἡ γβ ψπ
ἐπὶ ψπ
$\overset{μθ}{Μ}$ ͵ϛ
$\overset{ϛ}{Μ}$ ͵ϛυ
ὁμοῦ $\overset{ξ}{Μ}$ ͵θυ

͵ατνα
ἐπὶ ͵ατνα
$\overset{ρ}{Μ}$ $\overset{λ}{Μ}$ $\overset{ε}{Μ}$ ͵α
$\overset{λ}{Μ}$ $\overset{θ}{Μ}$ $\overset{α}{Μ}$ ͵ετ
$\overset{ε}{Μ}$ $\overset{α}{Μ}$ ͵εβφν
͵ατνα
ὁμοῦ $\overset{ρπβ}{Μ}$ ͵εϲα
περιττεύει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{ο}{Μ}$ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζ. καὶ ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ, καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γαβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἔστιν ἡ $\overset{α}{Μ}$ βα ἐλάσσων ἢ ͵ατνα. ἡ δὲ αγ ͵αφξ, ἡ δὲ βγ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ. καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. διὰ δὲ ταῦτα ἔσται τὸ ἀπὸ αη $\overset{υμδ}{Μ}$ ͵γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ $\overset{ξ}{Μ}$ ͵θυ. καὶ ἐστὶν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται αὖ τὸ ἄρα ἴσον $\overset{φδ}{Μ}$ ͵βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γιγ ∠ δ' ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως $\overset{}{Μ}$ τξηιϛ. διὰ ταῦτα οὖν φησιν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γιγ ∠ δ' πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵βϡια
ἐπὶ ͵βϡια
$\overset{υ}{Μ}$ $\overset{ρπ}{Μ}$ $\overset{β}{Μ}$ β
$\overset{ρπ}{Μ}$ $\overset{πα}{Μ}$ ͵θλ
$\overset{β}{Μ}$ ͵θσ
͵βϡια
ὁμοῦ $\overset{υμδ}{Μ}$ ͵γϡκα

ἡ ηγ ψπ
ἐπὶ ψπ
$\overset{μθ}{Μ}$ ͵ϛ
$\overset{ϛ}{Μ}$ ͵ϛυ
ὁμοῦ $\overset{ξ}{Μ}$ ͵θυ

͵γιγ ∠ δ'
ἐπὶ ͵γιγ ∠ δ'
$\overset{λ}{Μ}$ $\overset{α}{Μ}$ ͵θαφψ
$\overset{α}{Μ}$ ͵ρλε β ∠
͵θλθα ∠ ∠ δ'
͵αφς ∠ δ' η'
͵ψνγ δ' ιϛ'
ὁμοῦ $\overset{φδ}{Μ}$ ͵βχϡιϛ
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{}{Μ}$ τξηιϛ

τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηγ $\overset{υμ}{Μ}$ ͵βτκα

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ τὴν τῆς διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τῇ ὁμοιότητι τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ὑπόκειται ἡ $\overset{}{Μ}$ αη ἐλάσσων ἢ ͵βϡια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἢ ͵γιγ ∠ δ'. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ͵εϡκδ ∠ δ'. ἡ δὲ ηγ ἐστὶν ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵εϡκδ ∠ δ' πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵εϡκδ ∠ δ' πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵αωκγ πρὸς ξ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. καὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γάρ φησιν, ὅτι ἑκατέρα ἑκατέρας ἐστὶ δ' ιγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αθ ἐστὶν ͵αωκγ, τὸ ἄρα ἀπ' αὐτῆς ἐστὶ $\overset{τλβ}{Μ}$ ͵γλκθ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ θγ σμ. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς $\overset{ϛ}{Μ}$ ͵ζχ. ἔστι τὰ ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τῷ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα $\overset{τλη}{Μ}$ λκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αωλη θ' ια. τὸ γὰρ ἀπ' αὐτῆς ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς $\overset{}{Μ}$ τκα ἔγγυς. ὥστε καὶ ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωλη θ' ια πρὸς σμ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αθ ͵αωκγ   ἡ θγ σμ   ͵αωλη θ' ια

ὑπὸ ͵αω κγ
ρΜ πΜ βΜ γ
πΜ ξδΜ αΜ ϛρυ
βΜ αΜ ϛυξ
͵γβυξθ
ὁμοῦ τλβ Μ ͵γτκθ.
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ
τλη Μ ͵λκθ ἐστί

ἐπὶ σμ
δΜ η
ηαχ
ὁμοῦ εΜ ͵ζχ

ἐπὶ ͵αωλη θ' ια'
ρΜ πΜ γΜ ηρια θ' ⸓ ια'
πΜ ξδΜ λαΜ ͵αϛυπη θΜ οβ η.
γΜ βΜ δλσμγ θγ β ια
ηϛυσμξδ θη ιαη
ρια θ' πη θηγγ θγ θηπα ϛθ'
ϛιαδοβηα.
ηα αιηϛθρκα
ὁμοῦ β τλη Μ ͵ασναγοερεγγυς.
ὑπερέχει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς Μ ο
τκα ἐγγύς

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θαγ γωνία τῇ κα. πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θα αγ πρὸς γθ, ἡ ακ πρὸς κγ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ θα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵γχξα θ' ια'. ἐπειδὴ ἡ μὲν θα ὑπόκειται ͵αωκγ. ἡ δὲ αγ ͵αωλη θ' ια'. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ σμ. συναμφότερος ἄρα ἡ θα, αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξα θ' ια' πρὸς σμ, ὥστε καὶ ἡ ακ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵γχξα θ' ια' πρὸς σμ. καὶ ἐπὶ τῶν Μ ͵γχξα θ' ια' τοῖς ια' καὶ μ' ἐστὶν ͵αζ. τῶν δὲ σμ, ξς. ἡ ακ ἄρα πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αζ πρὸς ξς. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ακ ρα Μ ͵δμθ. τὸ δὲ ἀπὸ κγ ͵δτνς, οἷς ἴσον ὂν τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ ρα Μ ͵ηυνε. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αθς'' ἔγγιστα. ἡ αγ ἄρα πρὸς γκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αθς'' πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ακ ͵αζ
ἐπὶ ͵αζ
ρΜ ζ
ζμθ
ὁμοῦ ρα Μ ͵δμθ. ὁμοῦ ͵δτνς.
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ ρα Μ ͵ηυνε

ἡ κγ ξς
ἐπὶ ξς
͵γχ τξ
τξ λς

α θς'
ἐπὶ ͵αθς'
ρΜ θρξς ⸓ ς'
θπαας
ρξς ζ.ς.αγλ'ς
ὁμοῦ ρα Μ ͵ηυιζ.γ'.λς'.
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ ιβ.γ' λς.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ καγ γωνία τῇ αλ. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κα, αγ πρὸς κγ, ἡ αλ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ακ ἐλάσσων, ἢ ͵αζ. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἢ ͵αθς'. ἡ δὲ κγ, ξς. συναμφότερος ἄρα ἡ κα, αγ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιϛ ϛ' πρὸς ξς. καὶ ἡ αλ ἄρα πρὸς λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιϛ ϛ' πρὸς ξς. καὶ ἐπεὶ ἡ αλ ὑπόκειται ͵βιϛ ϛ'. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς νϛ Μ ͵δλκ ηλς'. ἡ δὲ λγ, ξς. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς ͵δτνς. ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα νϛ Μ ͵θcπ δλς'. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἐστὶ ͵βιζ δ' ἔγγιστα. ὑπερέχει τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς ο Μ ιγς κ'. ὥστε ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζ δ' πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αλ ͵βιϛϛ'
ἐπὶ ͵βιϛϛ'
νΜ βΜ αΜ ͵βτλρϛ'
βΜ ρξα ⸓ ϛ'
αΜ ͵βξλϛα
τλγγ α ⸓ ϛ' α λ' ϛ
ὁμοῦ νϛ Μ ͵δλκηλς'
τούτοις ἴσον τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ
νϛ Μ ͵θcπ δλς.

ἡ λγ ξς
ἐπὶ ξς
͵γχ τξ
τξ λς
ὁμοῦ ͵δτνς

͵βιζ δ'
ἐπὶ ͵βιζ δ'
νΜ βΜ αΜ δφ
βΜ ρο β ⸓
αΜ δομθ α ⸓ δ'
φβ ⸓ α ⸓ δ' ις'
θcϙζ ⸓ ις'
περιττεύει τοῦ ἀκριβοῦς
ο Μ ιγ ⸓ κ'

Ἐπεὶ οὖν ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βιζ δ' πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ξς πρὸς ξς πρὸς ͵βιζ δ'. καὶ ἐπεὶ ἡ γβ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἡ κγ ἄρα ιβ' μέρος ἐστὶν, ἡ δὲ θγ, κδ. ἡ δὲ κγ, μη. ἡ δὲ λγ, ϟς'. ὥστε ἡ λγ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ϟς' πλευρὰς ἔχοντος, καὶ ἐστὶν ἡ λγ, ξς. ἡ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ϛτλς πρὸς ͵βιζ δ'. ταῦτα δέ ἐστι τριπλάσια. καὶ ἔτι ὑπερέχει σπ δ

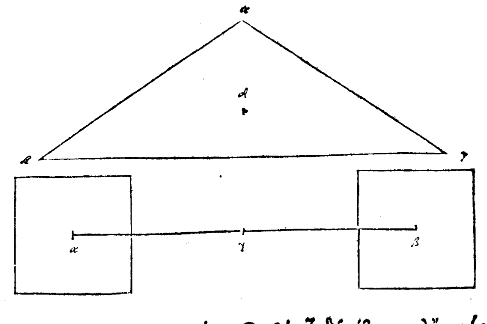
δ'

δ', ἅπερ ἐλάττονά ἐστι δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι ο Μ ͵κζ ⸓ ϛ' ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων σοζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνα. ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἱστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πόρος ὁ νικαεὺς εὔκαιρον εὑρεθήσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ' φημὶ καὶ τῶν ι θ'. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγνώκειν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

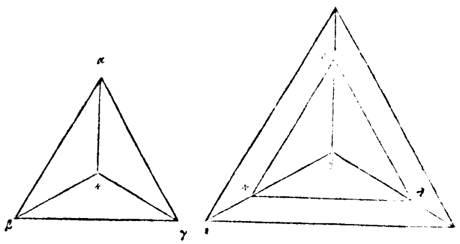
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ τοῦ κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

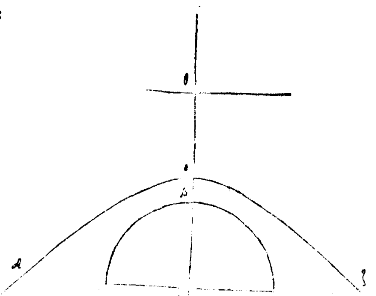
ΤΗΝ ῥοπὴν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἀπὸ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσιν ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τῷ πτολεμαίῳ συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν ταῦτα ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι. οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ αβγ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδὲ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α, β, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν, ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἀπὸ τοῦ γ ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.



Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ Γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὸ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν ἀξίωμά ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔστι ταῦτα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπεσκεμμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φησὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τοῦ μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι εἰς ἴσα διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν η θ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εθ πρὸς θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰ μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.



Παντὸς σχήματος οὗ ἡ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη ἐστί, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμάς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς προειρημένοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γάρ τινων σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματός ἐστι τὸ ε, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἀφ' οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλόν ἐστι τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Β.

Κέντρον τοῦ βάρους τὸ δ εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αβ δέδεικται. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστίν, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι, ὥστε ὂν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ἢ οὔ. τοῦτο τὸ ῥητὸν δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑποδεχομένου πάντως τοῦ αβ μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ κατὰ τὴν ἰσορροπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιοῦν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβ μεγέθους τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ κατὰ τὴν ἰσορροπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως Εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν Θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

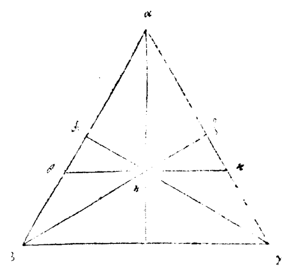
Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. παράλληλοι δὴ αὗται παρὰ τὴν βγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βο τῇ ψγ, καὶ ἡ δβ τῇ δγ. ἔσται ὡς ἡ δβ πρὸς οβ, ἡ δγ πρὸς ψγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δο πρὸς οβ, ἡ δψ πρὸς ψγ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ δο πρὸς οβ, ἡ αε πρὸς εβ. ἡ γὰρ εο παρὰ τὴν αδ ἐστιν. ὡς δὲ ἡ δψ πρὸς ψγ, ἡ αζ πρὸς ζγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς εβ, ἡ αζ πρὸς ζγ. παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ εζ τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ αδγ ποιεῖ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ αδγ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γα πρὸς αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ αδγ ασμ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αγ πρὸς αμ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ αγ τῆς αμ τετραπλασίων τὸ αδγ τρίγωνον πρὸς τὸ ασμ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ αμ, μκ, κζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ, ὅμοια τῷ αδγ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ ασμ, τουτέστιν ἡ γα πρὸς αμ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, καί εἰσι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἡ γα πρὸς αμ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τῆς αγ πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φρ πρὸς ρπ. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρφ, γδ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φρ πρὸς ρπ, ἡ γδ πρὸς δω. ἀλλ' ὡς ἡ γδ πρὸς δω, ἡ γα πρὸς αμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αμ, ἡ φρ πρὸς ρπ. ἡ δὲ φρ πρὸς ρπ μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. καὶ ἡ γα ἄρα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὴν δα ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσται πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ' ἐκεῖνο πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσορροπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΓΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐντὶ κείμενα τὰ θκ, λε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ αθε, κζα παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θλγ, θκβ αἱ αὐταί εἰσιν ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κδ, δλ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδη, ζεη, βαη, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβληθεισῶν γὰρ τῶν βαη, ζεη, καὶ συμπιπτουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ η. καὶ ἡ βδ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ ζη πρὸς ηε, καὶ ἡ βζ πρὸς αε, καὶ ἡ ζγ πρὸς εδ. καὶ δηλαδὴ ἡ δη πρὸς δς. ἔσται δὴ τοῦ μὲν βδγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἀβθ τὰς βδ. ἔσω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ αε, βζ, γδ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ αδ, βδ, βε, εγ, γζ, ζα, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η ση



μέσον, βάσις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ α η β τρίγωνον, τοῦ η β ε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ α η τῆς η ε. ἐὰν διὰ τοῦ η παρὰ τὴν β γ ἀγάγωμεν τὴν θ κ διπλασία ἐστὶν ἡ α θ τῆς θ β, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

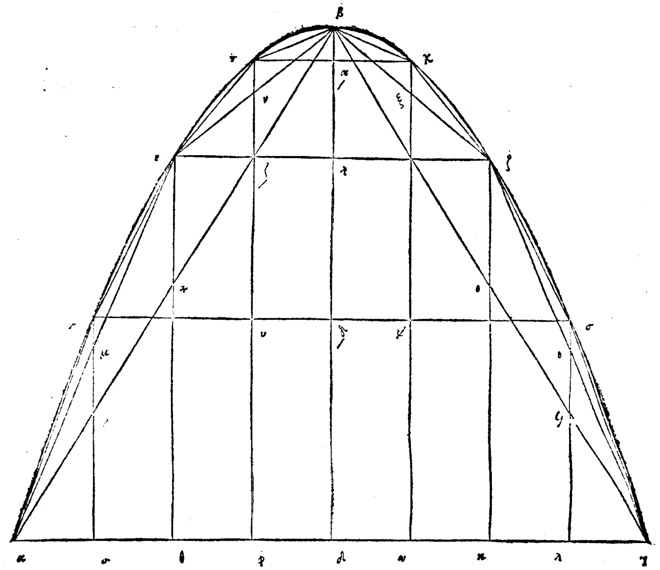
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ.

ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τῷ πρώτῳ, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ α β, γ δ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τοῦτο δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἶπεν, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ὑπὸ τρίτῳ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τὰ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλα ἐστι διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟΥ δευτέρου θεωρήματος προλέγει τινά, δηλοῦντα πῶς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καί φησι ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς α β γ, καὶ εὐθείας τῆς α γ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ β δ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς α β, β γ, ἔσται τὸ ἀπὸ α β γ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν α β κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ β δ. ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν α β, β γ τμημάτων τὰς ε, ζ δι' αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ β δ, ὡς τὰς ε η, ζ θ ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν α β, β γ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροι εἰσὶ τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς α β, β γ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ε λ ζ παρὰ τὴν α β γ. ἐπειδὴ αἱ ε θ, ζ κ παράλληλοι εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ς τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ ε θ η παράλληλός ἐστι τῇ β δ, ἐστὶν ὡς ἡ β η πρὸς η α, ἡ δ θ πρὸς θ α. ἴση δὲ ἡ β η τῇ α η. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ ε η διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ θ α, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δ κ τῇ κ γ ἴση ἐστι. ἴση δὲ ὅλη ἡ α δ τῇ δ γ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ δ κ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ε λ τῇ λ ζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ α ε, ε β, β ζ, ζ γ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν β δ, αἱ π μ ρ ς, τ ν υ φ, χ ξ ψ ω, ς ο ϛ λ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α π, π ε, ε τ, τ β, β χ, χ ζ, ζ ς, ς γ. καὶ αἱ τ α χ, καὶ π β γ δ ε ς. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τ χ καὶ ἡ ε ζ καὶ ἡ π ς παράλληλοι εἰσὶ τῇ α γ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τ α τῇ α χ. καὶ ἡ π δ τῇ δ ς. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν β δ εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἵων ἐστὶν ἑνὸς ἡ β α, τοιούτων τριῶν

τριῶν ἡ α λ, καὶ ἡ λ δ πέντε, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α θ τῇ η ε, καὶ παράλληλος ἡ ε θ τῇ β δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α θ τῇ θ δ, ἡ α δ ἄρα τῆς δ θ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τῆς ε λ, τὸ



ἀπὸ τῆς α δ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως δέδεικται ἡ β δ πρὸς β λ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δ β τῆς β λ. τριπλῆ ἄρα ἡ δ λ τῆς λ β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λ β, τοιούτων τριῶν ἐστὶν ἡ λ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἵων ἄρα ἡ λ β τεσσάρων, ἡ λ δ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ε ν τῇ υ β, καὶ ἡ ε ζ τῇ ζ λ, καὶ ἡ θ φ τῇ φ δ, διπλασία ἐστὶν ἡ ε λ τῆς λ ζ, τουτέστι τῆς τ α. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ε λ τοῦ ἀπὸ τ α, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λ β τῆς β α. ὥστε τριπλασία ἡ λ α τῆς α β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λ β τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α μ τῇ μ ε, καὶ ἡ α ρ τῇ ρ η, καὶ ἡ α ς τῇ ς θ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α ς, ς θ, θ φ, φ δ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ α δ τεσσάρων, τοιούτων ἡ ς δ τριῶν, τουτέστιν ἡ π δ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ α δ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ π δ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δ β δεκαέξ, ἡ β δ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ β δ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ β δ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμοὺς λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῆς διαμέτρου εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἷον γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τ α, τοιούτων δύο ἡ ε λ, τριῶν ἡ π δ, τεσσάρων δὲ ἡ α δ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὠνόμασθη ὑπὸ ἀρχιμήδους ὁ α π ε τ β χ ζ ς γ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΤΑ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ἐδείξατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαι εἰσί, τὸ δὲ γνώριμον ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρέσθαι τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστὶν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῆς στοιχειώσεως, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ θ ζ η ι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ κ ζ, λ η. ἴσων γάρ εἰσι τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ β δ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ ζ, ἡ λ ι πρὸς ι η, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θ ζ τῇ ι η, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γάρ εἰσι πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θ ζ η ι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Ἔστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θ μὲν ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς β δ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζ η, καὶ ἡ ι ν διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ β α γ τρίγωνον πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ α β κ, β λ γ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ α κ β λ γ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ τῆς τ ε τμηθείσης κατὰ τὸ ρ κατὰ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ α β γ πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ κ λ β, β λ γ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γάρ ἐστι τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ε τ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα ἀνωτέρω τοῦ ρ πεσεῖται τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Τὸ κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἔνεστι, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ α β γ τριγώνου κέντρου τοῦ βάρους ὄντος εἰ τύχοι τοῦ ε τῆς β δ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ε β τῆς ε δ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πεσοῦνται τῶν β ε σημείων. καὶ ὅσῳ δ᾽ ἂν πολυπλευρώτερον ᾖ, τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ β. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς ε β ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς β ε, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

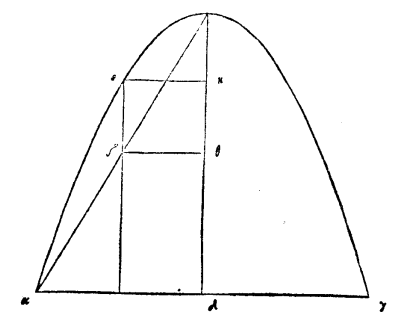
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Ἐγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ α β γ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δ ε ζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῆς α β γ παραβολῆς ἴσαι γίνωνται τῆς ε ζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ α β τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ ε ζ ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ δὴ κορυφαί εἰσι τὰ β ζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοιά ἐστι τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ β θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ κ μ πρὸς μ ζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα ἕξει κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β δ πρὸς δ θ, ἡ κ ζ πρὸς ζ μ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ β δ πρὸς κ ζ, οὕτως ἡ δ θ πρὸς μ ζ. τετραπλασία δὲ ἡ β δ τῆς κ ζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον θ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ α β γ, ἧς διάμετρος ἡ β δ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ α δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α β, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ α β κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ β δ παράλληλος ἤχθω ἡ ε ζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ α β τμήματος. καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ παρατεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ε η, ζ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ α ζ τῇ β ζ, διπλῆ ἐστὶν ἡ α β τῆς ζ β, καὶ ἡ δ β τῆς β θ, καὶ ἡ α δ τῆς ζ θ, τουτέστι τῆς ε η. ὥστε τὸ ἀπὸ α δ τοῦ ἀπὸ ε η ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δ β τῆς β η ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ β δ τῆς

μὲν



μὲν β θ διπλῆ, ἡ β θ τῆς β η ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἡ θ η τῇ η β ἴση, τουτέστι τῇ ε ζ. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ε η ζ θ. τετραπλασία ἄρα ἡ β δ τῆς ζ ε.

Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ β δ τῆς β ς. καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ β δ ἑκατέρας τῶν β η, ε ζ τετραπλασία, ὥστε ἡ β η τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐν τούτῳ ἡ β ς τῇ κ ζ ἴση, καὶ ἡ β δ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ β ξ ἄρα τῆς β δ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ β δ τῆς β ς. οἵων ἄρα ἡ β δ τεσσάρων, ἡ β ς ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ β δ δώδεκα, τοιούτων ἡ β ς τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ β ς τῆς ς ξ, οἵων ἄρα ἡ β ς τριῶν, ἡ ξ ς ἑνός. καὶ ὅλη ἡ β ξ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ β δ δώδεκα. ἡ β ξ ἄρα τῆς β δ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλοῦν δὲ τὸ α β γ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ α β γ τμῆμα τοῦ α β γ τριγώνου ἐπίτριτόν ἐστι, καὶ διελόντι τὸ α β γ τρίγωνον τῶν α κ β, β λ γ τμημάτων τριπλάσιόν ἐστι, καὶ ἐστὶ τῆς ε δ τριπλασία. ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ β θ τῆς θ δ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστὶν ἡ β δ τῆς δ ε. οἵων ἄρα ἡ β δ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ ε δ πέντε· οἵων δὲ ἡ δ ε πέντε, τοιούτου ἡ θ ε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θ ε, δ ε ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δ θ τῆς θ ε. οἵων ἄρα ἡ β δ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δ θ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θ β ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ β θ τῆς θ δ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Τὸ ἔνατον θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α β, β γ, δ β, β ε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ α γ, γ δ, δ ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ α β, β γ, β δ, δ ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ α γ, γ δ, δ ε, ἔστιν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ α γ, γ δ, τουτέστιν ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως συναμφότερος ἡ α β, γ β πρὸς δ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ α β, γ β πρὸς δ β, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῶν α β, β γ πρὸς τὴν β τῆς β δ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῶν α β, γ πρὸς τὴν β τῆς δ β. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γ β, β δ, β ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ α γ, γ δ, δ ε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως συναμφότερος ἡ γ β, β δ πρὸς β ε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ α δ πρὸς δ ε, ἡ β συναμφοτέρου τῶν α β, β γ πρὸς τὴν β τῆς β δ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β συναμφοτέρου τῶν α β, β γ, καὶ συναμφότερος ἡ γ β, β δ, τουτέστι δύο αἱ α β, καὶ τρεῖς αἱ γ β, καὶ μία ἡ β δ. ἑπόμενα δὲ ἡ β τῶν β δ, καὶ ἡ β ε μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ α δ πρὸς δ ε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῶν β τῆς α β, καὶ γ τῶν γ β, καὶ τῆς δ β μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῶν β τῶν β δ, καὶ μόνης τῆς ε β. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς α β, καὶ τῆς δ τῆς γ β, καὶ τῆς δ τῆς δ β, καὶ τῆς β τῆς β ε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β τῆς α β καὶ γ τῆς γ β, καὶ τῆς β δ μόνης. ἔξωθεν δέ ἐστιν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τῆς ε β. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δ β, καὶ τῆς ε β μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α β, καὶ τῆς γ τῆς γ β, καὶ μόνης τῆς δ β πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

 διπλῆς

διπλῆς τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς αβ, καὶ γ̄ τῆς γβ, καὶ τῆς βδ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ τῶν βδ, καὶ μόνης τῶν εβ, οὕτως ἐδείχθη ἡ αδ πρὸς δε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῶν β̄ τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αδ πρὸς δε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῶν αδ πρὸς ἄλλην τινά, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς δε. ἔστω ἡ δο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ πρὸς δο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ τῶν βδ, καὶ μόνης τῆς εβ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ οδ πρὸς δα, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ τῶν βδ, καὶ μόνης τῶν εβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ τῶν δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ οα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ τῶν αβ, καὶ δ̄ τῶν γβ, καὶ ϛ̄ τῶν βδ, καὶ γ̄ τῶν βε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ. ἥ τε γὰρ βδ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ βε τρεῖς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ αδ πρὸς ηθ τὸν αὐτὸν ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῶν αβ, καὶ δ̄ τῶν γβ, καὶ ϛ̄ τῶν βδ, καὶ γ̄ τῶν βε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ οα πρὸς ηθ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ ῑ τῶν γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ̄ τῆς γβ, βδ. τὸ γὰρ τῶν γεγραμμένης ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ οα, πρὸς ἑπόμενον τὴν αδ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ τῆς αβ, καὶ δ̄ τῶν γβ, καὶ ϛ̄ τῶν βδ, καὶ γ̄ τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, δβ. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ αδ πρὸς ἄλλο τι τὴν ηθ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς αβ, καὶ δ̄ τῆς γβ, καὶ ϛ̄ τῆς βδ, καὶ γ̄ τῆς βε. ἐπεὶ ἡ ε̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε πρὸς τὴν β̄ τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ῑ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ πρὸς τὴν δ̄ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ τῆς γβ, βδ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ αο πρὸς ηθ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ οδ πρὸς δα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ εβ μετὰ τῆς β̄ τῆς βδ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ αδ πρὸς ἄλλο τι τὴν δε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς αβ, καὶ γ̄ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς δβ πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς εβ, καὶ τῆς β̄ τῆς βδ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ οδ πρὸς δε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς αβ, καὶ τῆς γ̄ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ τῆς γβ, βδ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ εδ πρὸς δο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς αβ, καὶ γ̄ τῆς γβ, καὶ μόνης τῆς βδ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δε πρὸς εο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, μετὰ τῆς δ̄ τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γβ μόνης, καὶ γ̄ τῆς βδ, καὶ τῆς β̄ τῆς εβ. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ β̄ τῆς αβ, καὶ τῆς β̄ τῆς βε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β̄ τῆς αβ μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β̄ τῆς εβ. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ̄ τῆς γβ, καὶ ἡ βδ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γβ μόνη, καὶ ἡ γ̄ τῆς βδ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δε πρὸς εο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ, καὶ τῆς β̄ τῆς εβ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ὁ εο πρὸς εδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γβ, μετὰ τῆς γ̄ τῆς βδ, καὶ β̄ τῆς εβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δβ πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἡ αβ πρὸς βγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δε πρὸς εβ, ἡ αγ πρὸς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστιν ὡς ἡ γδ πρὸς δβ, οὕτως ἡ δε πρὸς εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̄ τῶν γδ πρὸς τὴν γ̄ τῶν δβ, οὕτως ἡ β̄ τῶν δε πρὸς τὴν β̄ τῶν εβ. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς εβ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ τῆς γ̄ τῶν γδ, καὶ ἡ β̄ τῶν δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς γβ, καὶ τῆς γ̄ τῆς βδ, καὶ τῆς β̄ τῆς εβ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ οε πρὸς ἑπόμενον τὴν δε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γβ, καὶ τῆς γ̄ τῆς βδ, καὶ β̄ τῆς βε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δε πρὸς ἄλλο τι τὴν εβ, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ ἡ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τῆς δε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ, καὶ β̄ τῆς βε. δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ οε πρὸς εβ, ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ ἡ β̄ τῆς δε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ οβ πρὸς βε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τῆς εδ, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς αγ, καὶ γ̄ τῆς γδ, καὶ β̄ τῆς δε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γβ, βδ, ἴση ἐστὶ τῇ συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς γ̄ τῆς αβ, καὶ ϛ̄ τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ. ἥ τε γὰρ αβ δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν αγ, καὶ ἐκ τῆς δ̄ τῆς γβ μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν αβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ τῆς γβ μίαν, γίνεται γ̄. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ̄ τῆς γδ, καὶ γ̄ τῆς δβ, ποιεῖ τὴν ϛ̄ τῶν γβ. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δβ, γ̄, μένει μόνη ἡ δβ. προσλαβοῦσα δὲ τήν τε β̄ τῶν δε, καὶ τὴν β̄ τῶν εβ, ποιεῖ τὴν γ̄ τῆς βδ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ οβ πρὸς εβ τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ τῆς αβ, καὶ ϛ̄ τῆς γβ, καὶ γ̄ τῆς δβ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβ, βδ. πάλιν ἐπεὶ αἱ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τῆς ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν εβ, βδ, δβ, βγ, βα. ἔσται ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δγ, γα, τουτέστι τὴν δα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βδ πρὸς συναμφότερον τὴν δβ, βγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβ, βα. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς εα πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἡ εβδ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δβγ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γβα, πρὸς συναμφότερον τὴν δβγ, μετὰ συναμφοτέρου τῶν γβα. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ εβδ μετὰ τῆς δβγ, καὶ τῶν γβα, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ εβα, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δβγ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι, συναμφότερος δὲ ἡ δβγ μετὰ τῆς γβα, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ αβδ, καὶ δὶς τῇ γβ, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῶν εβα, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῶν δβγ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν δβα, καὶ τῶν β̄ τῶν γβ. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ εα πρὸς αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῆς εβα, μετὰ τῶν δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῶν δ̄ τῶν γβ. ὥστε καὶ ὡς ἡ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν συγκειμένης ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ τῶν δ̄ τῶν γβ. ἀλλ' ὡς ἡ αε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῶν αδ, οὕτως ἐλήφθη ἡ βε πρὸς ζη. καὶ ὡς ἄρα ἡ εβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ τῶν δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γβ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ οβ πρὸς ἑπόμενον τὴν βε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ̄ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ μετὰ τῆς ϛ̄ τῆς γβ, πρὸς τὴν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ εβ πρὸς ἄλλο τι τὴν ζη, οὕτως ἡγούμενον ἡ β̄ συναμφοτέρου τῶν αβε, καὶ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γβδ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῶν συγκειμένης ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ τῶν δ̄ τῶν γβ. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι' ἴσου ἐστίν, ὡς ἡ οβ πρὸς ζη, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ϛ̄ τῆς γβ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν αβδ, καὶ δ̄ τῆς γβ. ἡ δὲ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ ϛ̄ τῆς γβ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς αβδ, καὶ δ̄ τῆς γβ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν τῆς τετραπλασίων ἡμιόλιά ἐστι. τὰ δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πεντεκαιδεκαπλάσιον. καὶ ἐστι τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων ἐστὶν ἔνατα. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν οα πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ οβ πρὸς ζη τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόριά ἐστιν ὅλη ἡ ζθ ὅλης τῆς αβ.

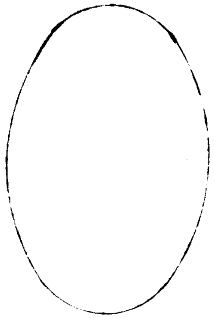
ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ αδεγ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζη. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζβ διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ αγ, δε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, κατὰ τὸ ζ, η, παράλληλοί εἰσιν τῇ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς βζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δβε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δεβ τμῆμα τοῦ δεβ τριγώνου, ἔστιν ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αβγ τρίγωνον, οὕτως τὸ δεβ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τρίγωνον. καὶ ἀναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν, ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τμῆμα, οὕτως τὸ αζβ τρίγωνον πρὸς τὸ δηβ τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δη αζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τῆς βζ πρὸς βη. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τοῦ τῆς ζβ πρὸς βη. ὁ γὰρ τῆς ζβ πρὸς βη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς ζα. ἐπὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ ξν πρὸς νμ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δη πρὸς αζ, ἡ β τῆς ξν πρὸς νμ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς νξ μετὰ τῆς νμ πρὸς νμ, ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς αζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως ὅτε ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, καὶ ἡ μν πρὸς ντ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δη κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην εὐθεῖαν ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη, οὕτως ἡ δη πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δη πρὸς τὴν β τῆς αζ μετὰ τῆς δη, οὕτως ἡ τν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς τν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ αζ πρὸς δη, ἡ μν πρὸς νξ, καὶ ἡ ον πρὸς ντ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ τν πρὸς νο. καὶ ὡς ἡ δη μετὰ τῆς β τῆς αζ πρὸς δη, οὕτως ἡ τν μετὰ τῆς β τῆς νο πρὸς νο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ. δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς αζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δη κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς νξ, καὶ μόνης τῆς μν, καὶ δευτέρα ἡ μν, καὶ τρίτη ἡ ντ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς ντ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δη, καὶ τῆς αζ μόνης, πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ μόνης τῆς δη, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. ἀλλ' ὡς τὰ εἰρημένα

εἰρημένα στερεὰ πρὸς ἄλληλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρου τῆς μν τ, ἐπὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς ξν ο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, ἐπὶ τῆς ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἡ ζ πρὸς κι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξν ο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς ζθ, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκάτερα γὰρ τῶν κθ ζκ δύο πεμπτημόριά ἐστι τῆς ζη. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξν ο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μν τ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς ξν ο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε τῆς μν τ, καὶ ι τῆς ξν ο, πρὸς τὴν β τῆς νο, καὶ μόνην τὴν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζκ πρὸς ζη, ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μν τ, καὶ ι τῆς ξν ο, πρὸς τὴν β τῆς μν τ, καὶ δ τῆς ξν ο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξν ο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς μν τ, καὶ δ τῆς ξν ο, ἥ ἐστιν ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῆς β τῆς μν, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ϛ τῆς νο, καὶ γ τῆς ντ. οὕτως γὰρ εἴληπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τμ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ζη, τουτέστι τῆς μο, καὶ δεδειγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίαι. ἔσται διὰ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τῆς μν, τουτέστι τῆς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ τῆς βζ. ἡ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὴ λάβωμεν τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ βχ τῆς βη. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλην τὴν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὴν τὴν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς ζη, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἔστι τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β̄ τῶν ἰσορροπικῶν Ἀρχιμήδους.

Ι 3



COMMENTARII EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM ARCHIMEDIS DE *Sphæra & cylindro.* In comensuratione Circuli, & in equiponderanti

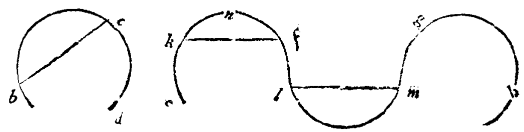
QVVM in Archimedis libro quem de ſphæra & cylindro cõfecit, eorum qui nos præceſſerunt neminem adhuc comperiſſem quippiam dignũ cõpoſuiſſe, idq́ ab eis prætermiſſum intelligerem non propter theorematum, quæ illic habentur, facilitatem, quæ uti noſtis doctrina indigent exquiſitiſſima, & inſtructiſſima in primis excogitatione, aggreſſus ſum pro uirib. ea quæ in illis obſcura & perſpectu difficilia continentur declarare. adductus ad hoc magis, quod neminem forte in hanc comprehenſionem deſcenſurum cernerem, quod rerum iſtarũ difficultate deterritus ſim. Simul etiam Socraticum illud mecum reputans, Deo coadiutore nos commodè admodum & ad perfectionem ſtudij noſtri peruenturos:

DECLARATIO TERMINORVM.

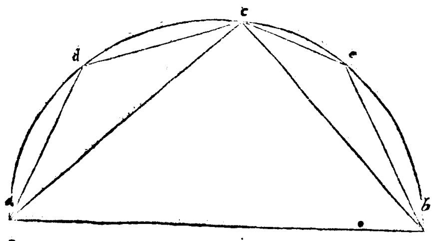
PRAENVMERANS ea quæ ab ipso exponenda sunt theoremata, ut consuetum est omnibus Geometris in expositione, seruans quoque appellationes quibus ipse per licentiã usus est: primò terminationes suppositionum, & ipsas quoque suppositiones in initio scribendi uult declarare. & ait primũ, Quasdam esse in plano curuas lineas, quę lineis rectis earum terminos iungentibus, uel omnis in eandem partem uergũt, uel aliquid in alteram habent. Hoc autem quod dictum est, planum erit, si intellexerimus quas appellat in plano curuas lineas. Quare aduertendum est, curuas ab eo lineas appellari non simpliciter circulares, aut conicas, aut eas quæ continuitatem habent non fractam: uerum eas omnis simpliciter, quæ in plano cum sint, nõ in directum producantur, curuas uocat. Vnam autem lineam in plano quocunque modo connexam, quãuis siue ex rectis pluribus connectatur, siue ex curuis, siue ex rectis & curuis, unam tamen eam ex ea connexione postulat appellari.

Hic deest una charta in exemplari græco.

ipsi a b c d. Verum quoniam uti suprà dictũ est, curuas lineas uocat non quæ circumferentiam habent solas, uerumetiam eas quæ ex rectis componuntur: ex his erat collectio earum quæ in eadem cauæ habentur. Continget enim in quadam linea, quæ in eadem caua sit, duo utcunque puncta notari, ita ut linea recta quæ illa puncta iunxerit, in neutram prioris lineæ partem cadat, sed ipsi coaptetur. Propterea dixit, lineam in eandẽ cauam esse uocari, in qua lineæ rectæ, per duo quæque eius puncta ductę, aut omnis in easdem partes cadant rectæ lineæ, aut earum quędam in easdem partes, quædam super eam, & nulla in alterã partem. Easdem uero licet interpretari, & in superficiebus.



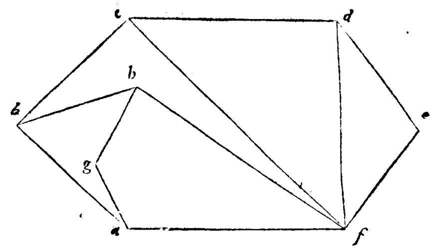
Deinde ex ordine nominat frustum solidum, & rhombum solidũ, aperte declarans significationem nominum. Post hęc petitiones quasdam sumit, quę sunt ei opportunæ ad demonstrationes sequẽtes, quæ quidem ex ipso sensu confessæ habentur: nihilominus tamen demonstrari ex communibus conceptionibus, & ex his quæ demõstrata sunt in Elementis, possunt. Est autem petitionum prima huiusmodi: Linearum omnium, quæ eisdem terminis continentur, rectam esse breuissimam. Esto enim in plano linea recta terminata hæc a b: & altera itẽ linea quædam a c b, eisdẽ contenta terminis a b, postulat sibi concedi ipsam a b minorẽ esse ipsa a c b. Dico igitur, quod hoc cũ uerum existat, petitũ est. notetur itaque in ipsa a c b, utcunque punctum c: & iũgantur a c, c b, constat ergo, ipsas a c, c b esse ipsa a b maiores. Item sumantur in ip



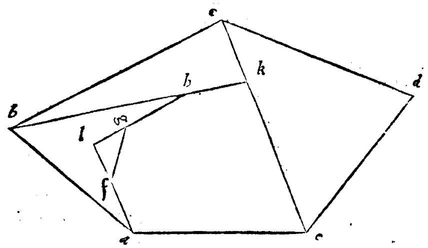
sis

sis a c, c b lineis alia utcunque puncta d e, & iungantur a d, d c, c e, e b. similiter iam hic cõstat duas a d, d c esse maiores a c. & duas c e, e b maiores c b. Quare hæ a d, d c, c e, e b multo maiores erunt ipsa a b. Similiter autem & si alia puncta intermedia sumpta notauerimus, & iunxerimus rectas ad puncta nunc sumpta, inuenemus ipsas item maiores a b. et hoc assiduè faciendo, quæ magis accesserint ad lineam a b rectę maiores inuenientur. quare constat ex his, eam a c b esse ipsa a b maiorem, cum possimus in tota ipsa punctum notare, & ipsam iungentes lineam ex rectis compositam, ut eam talem esse lineam ostendamus, quæ eadem ratione ipsa a b probetur maior. neque enim inconueniens est, in demonstrationibus eorũ quæ confessa habentur, huiusmodi assumere conceptiones.

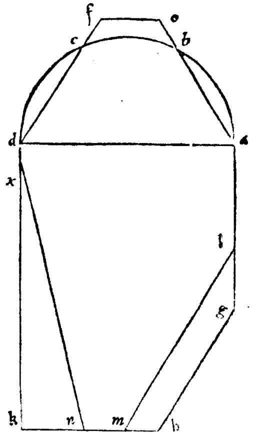
Post hæc dicit, se sumere hoc: earum quæ eosdem terminos habeãt linearum, illas esse inæquales, quæ in easdem cauas extiterint eo quo suprà dictum fuit modo. Non solum autem dixit in hoc inæquales esse, hoc quod est in easdem cauas esse: uerum etiam quum altera alteram, aut totam complectitur, aut eius partem complectitur: partem autem habet communem & complectentem complexa maiorem esse. Intelligantur autem, ut & hoc manifestum fiat, in plano duæ lineæ a b c d e f, & a g h f, eosdem terminos habẽtes hos a, f, & in eadem cauæ. & quoniam tota a g h f complexa est ab ipsa a b c d e f eosdem terminos habẽte hos a, f. dico istas inæquales esse, & quæ comprę hendit comprǽhensa maior est. Iungantur itaque b h, e f, d f. Quoniam igitur si intelligatur iuncta h a, ad unum laterum ipsius a b h, intus constitutæ sunt hæ a g, g h, his a b, b h, cõmuni posita h f. Hæ igitur a g, g h, h f, minores sunt his a b, b h, h f. Verum b h, h f minores sunt his b c, c f. nam sunt intus rursus super unam b f cõstitutæ. multo magis ergo a b, b c, c f maiores sunt his a g, g h, h f. Verum hæ c d, d f, maiores sunt hac c f. & hæ d e, e f, sunt ipsa d f maiores. multo magis ergo hæ a b c d e f, sunt his a g h f maiores.



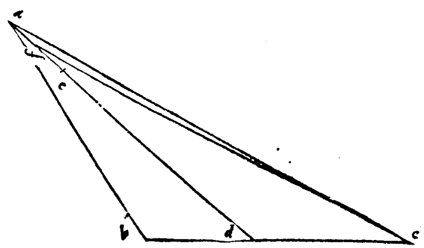
Declarationis enim gratia supponantur & aliæ lineæ similiter prædictis, uelu ti hæ a b c d e, a f g h k e. Dico compræhendentem esse maiorẽ. Intelligantur enim a f, g h erectæ in l. Quoniam igitur rursus f l, l g maiores sunt f g, adiectis communibus a f, g h, hæ a l, l h maiores sunt a f, f g, g h. Verum a l, l h maiores sunt his a b, b h. multo magis ergo a b, b h maiores sunt his a f, f g, g h. adiecta communi h k, erunt a b, b k maiores his a f g h k. Verũ b h, h k minores sunt b c, c k. Multo magis ergo maiores a b c k, his a f g h k, adiecta communi k e, erunt hæ a b c k e maiores his a f g h k e. Verum hę c k, k e minores sunt his c d, d e, multo magis ergo hæ a b c d e, maiores sunt a f g h k e.



Et si circumferentiæ sint uel comprendentes uel comprensæ, aut utrumque, idem licet inspicere. nam si puncta cõtinuata in eisdem notentur, & in eadem iungantur, recte: sumentur lineæ ex rectis compositæ, quibus accommodabitur prædicta demonstratio, his quæ ex rectis componuntur quales illæ fuerint factis adiectis. unde & omnem lineam in continuatione punctorum existentiã habentem notato. Quod aũt conuenienter inæqualitatem linearum non solum ex hoc quòd in eadem cauæ sint, denotauit: uerum addidit etiam hoc, oportere alteram ab altera compræhendi, & ab ea quæ eosdem habeat terminos recta. nam nisi hoc fuerit, nõ erit hoc utiq; uerũ, omnino lineas tunc inæquales esse: uti conspicere licet in figuris infrascriptis. nam linea a b c d. & a e f d, eosdem terminos habent, & in eandem cauæ sunt: nec tamen constat, utra earũ sit altera maior. nam potest esse ut æquales sint, & possint utræq; in eadem cauæ intelligi, & eosdem terminos habere. ambæ autem contraria inter se positione cõstitutæ, ut utrauis earum quæ sunt dictæ ipsi a g h k d: et ita incognitum est si inæqualitas aut æqualitas earum hoc pacto sequatur. quare opportunè adiectum est, aut totam alteram comprehendi ab altera recta oportere, quæ eosdẽ terminos habeat: aut partem quidem compræhendi, partem autem cum ea communem habere: sicuti in his a g h k d, & a l m n x d. in his enim quædam compræhenduntur, quædam communes sunt, uti a l m n.

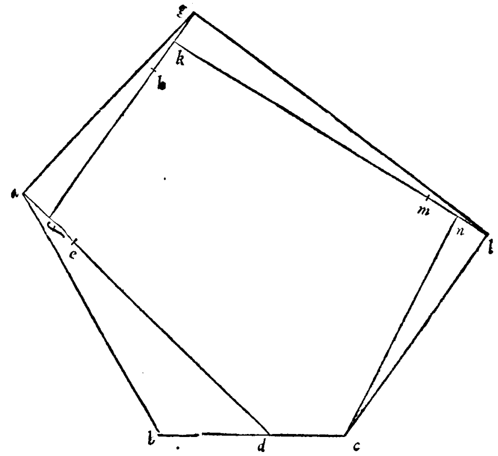


Opportunè autem admodum & illud ad inæqualitatis iudicium assumptum est, oportere lineas eosdem terminos habere. Si enim non fuerit illud, neq; altera alteram compræhendere poterit. Quomodo igitur inæquales erunt, nisi casu. nã quãdoq; erunt æquales. & contingit esse compræhensam aliquando cõprændente maiorem. Vt autẽ hoc declaretur, intelligantur in plano duæ rectæ, a b, b c, obtusum angulum ad b continentes: & sumatur in b c punctũ utcunq; d. iungantur a d, a c. Quoniam igitur a d, maior est ipsa a b, ponatur a b æqualis ipsi d e, & diuidat̃ ae in duo æqua puncto f, & iungatur f c. Quoniã igitur duæ a f, f c maiores sunt a c, & æqualis a f est ipsi f e, erit e f, f c maior ipsa a c, adiecta eorum a b, erunt hæ d f, f c maiores his b a, a c. quare linea b a c intellecta una esse, & in eadem caua, altera uero d f c compræhensa ab altera quæ eosdem terminos non habeat, non solum comprehendens non est maior cõpræhensa, uerum ostenditur minor esse.



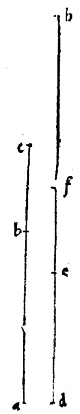
Et in lineis ex pluribus rectis compositis hoc idem licet inspicere. nam intelligantur in plano duæ rectæ hæ a b, b c: & pũctum d quodcunq; contingat, & iungatur a d. Rursus ponatur d e æqualis ipsi a b, & e a diuidatur in duo æqua puncto

cto f, & ducatur a g ad angulos rectos ad ipsam a d, & iungatur f g. & ponatur f h æqualis ipsi a g. & item diuidatur h g in duo æqua puncto k, & ducatur g l ad angulos rectos ad ipsam f g, & iungatur k l. item k m ponatur æqualis ipsi g l, & diuidatur m l in duo æqua puncto n. & item ducatur l c ad angulos rectos, ad ipsam k l, et iũgatur n c. Ex prædemonstratis igitur cõstat, d f maiorem esse ipsa a b, & f k ipsa a g, ipsam k n ipsa g l, ipsam n c ipsa l c. quare et totã lineã d f k n c, maiorem ipsa a b g l c. Opportunè ergo adiectũ fuit, eas oportere eosdem habere terminos, in his quæ esse debeant inæquales. Potest autem qui hæc considerarit, idem de superficiebus demonstrare omnibus, quando cum his quæ prædictæ sunt conditionib. superficies sumptæ, eosdem terminos cum planis habuerint.



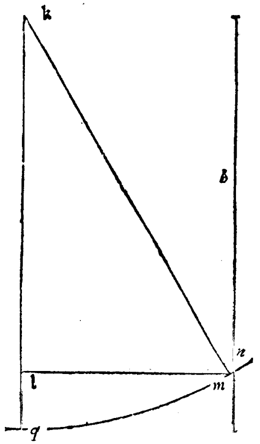
IN SECVNDVM THEOREMA.

At uero a c sibi ipsi supercompositum, excedet ipsum d, uidelicet sic: cum ipsum a b superparticulare aut superpartiens contigerit esse ipsius d. Si autẽ sit a b multiplex ipsius d, aut multiplex superparticularis, aut multiplex superpartiens, ablato ab ipso b c æquali d, reliquum c a superabit d, ita ut non amplius necesse sit sumi multiplex ipsi, uerum ut oporteat inde ponere a b æquale ipsi a c, & eandem accommodare demonstrationem. Et componenti ipsi f h ad f g minorem proportionem habet, quàm a b ad b c. nã si primum ad secũdum minorem habeat proportionem, quàm tertiũ ad quartum, componendo eadem proportio sequitur. Ostẽdetur autem sic. Sũto quatuor magnitudines a b, b c, d e, e f. & a b maiorem ad b c habeat proportionem, quàm d e ad e f. Dico igitur componẽdo, a c habere ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad e f. Fiat enim sicut c b ad b a, ita f e, ad f h. E cõuerso igitur, sicut a b ad b c, ita h f ad e f. maiorem aũt habet a b ad b c proportionẽ, quàm d e ad e f. igit̃ h f habet ad e f maiorem proportionem, quàm d e ad e f. quare h f maior erit ipsa d e, & totum h e maius toto d f. & propterea h e habet ad e f maiorem proportionem, quàm d f ad f e. Verũ sicut h e ad e f, ita a c ad c b, per compositionem. igitur a c ad c b maiorem habet proportionem, quàm d f ad e f. At uero a c habeat ad c b maiorem proportionẽ, quàm d f ad f e. Dico diuidendo, quod a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Rursus enim similiter, si faciamus sicut c b ad c a, ita f e ad e h, fiet ut h e sit maior d f. quare communi e f ablata, erit h f maius d e, quare h f habebit ad f e, quæ est sicut a b ad b c,



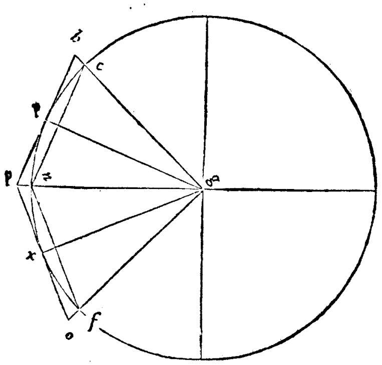
diuidendo maiorē proportionē, quàm d e ad e f. & cōponendo, & item diuidendo eadem proportio sequet. Ex eisdem aūt euersa proportio constat. habeat enim a c maiorem ad b c proportionem, quàm d f ad f e. Dico quod euertendo c a habebit ad a b proportionem minorem, quàm f d ad d e. Quoniā enim a c habet ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad f e: & diuidenti a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Econuerso b c ad b a habebit minorem proportionem, quàm f e ad e d: & cōponenti, c a ad a b minorem habebit, quàm f d ad d e.

IN TERTIVM THEOREMA.



It ab ipso k ducatur æqualis ipsi h, quæ sit k m hoc fieri potest producta k l ad q, & posita h æquali ipsi k q: & cētro quidem k, interuallo autem k q descripto, circulo uidelicet q m n, cōstat k m æqualem esse ipsi k q. hoc est ipsi h.

Latus ergo n c figuræ multiangulæ, & æquilateræ. Angulo enim recto in sesquiquartam proportionem adducto, & sectione per parem diuisionem facta à recto, constat quod circumferentia sesquiquarta in pariter pares numero distribuetur circumferentias. Quare recta quę uni ex illis circumferentijs subtensa fuerit, fiet figuræ multiangulæ & æquilateræ & parilateræ latus unum. Nam si angulo sub x g n, æqualem fecerimus angulum sub p g d, iungentes ab ipso p in g, & producamus usq; ad g h, ęqualem ipsi angulo sub p g d, constat p h esse æqualem ipsi p o, & attingere circulum. Quoniam enim ipsa x g æqualis est ipsi g d. nam ipsa g communis est: æquales enim complectuntur. Ergo basis x p æqualis est ipsi p d. & angulus sub p x g, rectus cum sit, æquatur angulo p d g. quare contingit ipsum p d. Quoniam enim qui ad d anguli recti sunt & qui sub p g d, d g h æquales: & est communis d g, quare g h æqualis est ipsi g p, & ipsa p d ipsi h d. Item ipsa x p ipsi p d ostēsa est esse ęqualis. quare ipsa h p existit figuræ multiāgulæ æquilateræ & parilateræ latus, descriptæ circa circulum. Quod autē similis figurę inscriptę fiat, inde constat. Cum enim ipsa h g sit æqualis ipsi g p, & ipsa c g ipsi g n, æquedistans est h p ipsi c n. eadem ratione & ipsa p o, ipsi n k. Quare angulus sub c n k, æqualis est angulo sub o p h. quare circūscripta figura est inscriptæ similis.



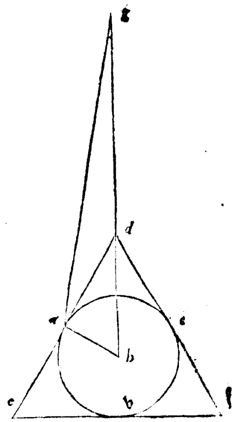
Cum enim angulus a d k c, maior sit angulo sub c g t, si angulo sub c g t constituamus æqualem angulum sub l k r, ipso k intellecto inter ipsa l m, triangulus l k r similis erit triangulo c g t. et erit sicut r k ad k l, sic c g ad g t. quare m k ad k l, maiorem proportionem habet, quàm c g ad g t.

IN SEXTVM THEOREMA.

PRopter hoc minus est circumscriptum utroq; simul. Quoniam enim circumscriptum, ad inscriptum minorem habet proportionem, quàm utrumq; ad circulum, multo magis ergo circumscriptum habet ad circulum minorē proportionem, quàm utrumq; simul ad circulum. quare circumscriptum minus est utroque simul circulo, communi ablato, erūt reliqua circum residua spacio b minora.

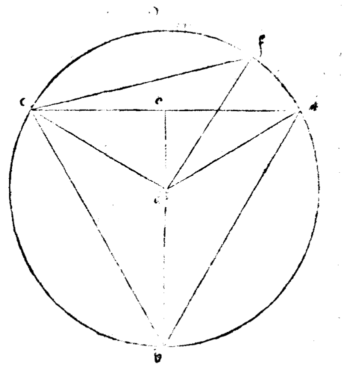
IN OCTAVVM THEOREMA.

PErpēdiculares igitur à uertice ad a b c ductæ sunt super eas. Intelligatur enim conus seorsum, & esto uertex eius g, centrū basis eius h, & ab h ad a iungatur h a, & a g, g h. Dico quod g a perpendicularis est ad ipsam d e. quoniam enim g h perpendicularis est ad circuli planum, & omnia secundū eam plana. quare triangulus g h a erectus est ad basim: & stat erecta super communem sectionem planorum h a, in uno planorum ipsa d e. quare ipsa d e, super ipsam g h a planū stat, ad angulos rectos: quare & super ipsam, g a. Similiter ostendentur illæ, quæ ad c, b, iunctæ sunt à uertice perpendiculares cū sint super d f, e f. Sciendum aūt, quod in præmissa opportunè additum fuit hoc, oportere omnino pyramidem inscriptam habere basim æquilateram. non enim aliter à uertice ad basis latera ductæ possent esse æquales. In pręsenti non est additum, esse basim æquilateram. propterea utcunq; fuerit, idem sequetur.



IN NONVM THEOREMA.

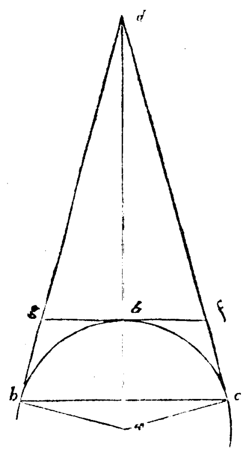
MAiores igitur sunt trianguli a b d, b d c, triangulo a d c. Quoniam enim angulus ad d, solidus est, anguli sub a d b, b d c maiores sunt angulo sub a d c, & si à uertice ad sectionem basis in duo æqua iunxerimus d e perpendicularem super a c, erit angulus sub a d b maior angulo sub a d e. Constituatur itaq; angulo sub a d b angulus, sub a d f æqualis: & postea d f æquali ipsi d c, iungatur a f. Quoniam igitur duæ duabus æquales, & angulus angulo, & triangulus a b d triangulo a d f æqualis, qui est maior ipso a d e: quare triangulus a b d ipso a d e maior est. Similiter quoq; triāgulus a b c, ipso d e c maior. Igitur duo a d b, d b c, ipso a d b maiores sunt.



IN DECIMVM THEOREMA.

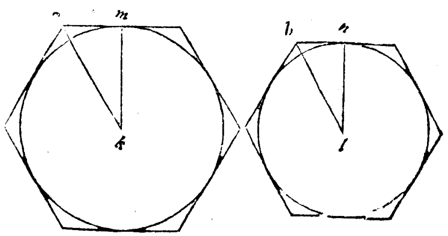
DVcatur enim g f e contingens circulum, & æquedistans ipsi a c, circumferentia a b c, in duo æqua diuisa puncto b. Quod enim sic ducta æquedistans fiat ipsi a c, ostendetur ductis à centro h, his h a, h d, h c. Quoniam enim a d est æqualis ipsi d c, & d h communis est, duæ duabus æquales, et basis a h basi h c, igitur & angulus angulo æqualis. Sunt autem anguli g b d, d b f recti. nam à centro ad contactum ducta est h b. quare reliquus angulus d g b, reliquo d f b æqualis est. idcirco ipsa g d, ipsi d f est æqualis: quare ipsa f g est æquedistans ipsi a c.

Circumscribentes itaque multiangula circa portionem, similiter circumferētijs circumceptis in duo æqua diuisis, ductis lineis cōtingentibus, sumemus quædam residua minora spacio h. de inscriptis quidem ostensum est in Elementis, triangulos portionibus inscriptos maiores esse dimidio portionum illarum. Idcirco possibile fuit, diuidendo in duo æqua circumferentias, & rectas ducendo, relinqui quędam residua spacio dato minora. In circumscriptis autem nondum hoc est ostensum, in Elementatione. Quoniā enim in præmissa hoc dixit, quod est ipsum collegisse per sextum Theorema, colligendum & ostēdendum quod contingens auferat triangulum maiorem dimidia ea in qua fit portione: ueluti in eadem descriptione, quod g d f triangulus maior est dimidio spacio compræhenso sub a d, d c, & circumferentia a b c. ductis enim eisdem, quoniam angulus d b f est rectus, erit ipsa d f maior ipsa b f, & ipsa b f æquatur ipsi f c. nam utraq; earum applicatur. Igitur d f maior est ipsa f c, quare triangulus d b f triangulo b f c maior existit. nam in eadem sunt altitudine. multo magis igitur maior est spacio b f c compræhenso. Eadem ratione & d b g maior est b g a. quare totum d f g, maius est dimidio spacio a d c compræhenso.



IN XIII THEOREMA.

Intelligatur itaq; circulo b circumscriptum, & inscriptum, & circulo a circūscriptum simile circumscripto ipsi b. quemadmodum autem circulo dato sit figura inscribenda polygonia, similis indescriptæ alteri circulo, à Pappo dictum fuit in Cōmentarijs elementorum. Circulo autem dato circumscribere figuram polygoniam, similem circumscriptæ alteri circulo, nondum habemus ab aliquo traditū: quod nunc dicendum est. Nam circulo b inscriptæ similis circulo a inscripta fuit, & circa a circumscriptæ similis inscripta fuit ipsi a, ueluti in tertio Theoremate. & est similis circumscriptæ ipsi b. Et quoniam figuræ rectilineæ circulis a, b circumscriptæ similes sunt, eandem habebunt proportionem, quam illæ quæ ex centris potentia. tale quidem de inscriptis ostensum est in Elementatione. de circumscriptis autem nondum. Ostendetur autem. sic intelligantur enim seorsum circumscriptæ & inscriptę figurę rectilineę, & à centris circulorum iūgantur k e, k m, l h, l n. Constat iā k m l n, ex centris esse circulorum circa circumscriptas figuras multiangulas descriptorum: & ad se inuicem haberi potentia, sicut figurę circumscriptæ. Et quoniam contenti sub k e m, l h n, sunt dimidij angulorum eorū qui sunt in polygonijs, cum ipsa

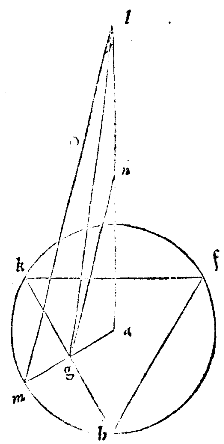


sint similia, constat ipsos quoque æquales esse. At uero qui ad m, n, habentur, anguli recti sunt: quare trianguli k e m, l h n sunt æquianguli. & est sicut quadratum k e ad quadratum h l, sic circumscriptæ inter se figuræ. Ergo sicut quadratum k m, ad quadratum l n, sic figuræ circumscriptæ inter se habent. Triangulus igitur k d t, eandem proportionem habet ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam triangulus k d t, ad triangulum f r a. Quoniam enim rectilineæ figuræ circulis a, b inscriptæ se habent ad inuicem, sicuti quæ ex centro potētia, hoc est ipsa t a ad g potentia, hoc est t d ad r f longitudine: hoc est sicut triangulus k d t, ad ipsum f r l. Est autem ipsum k t d æquale circumscripto ad circulū, ad circulum a. Est igitur sicut k t d, ad circa circulum b descriptum, ita triangulus k t d, ad triangulum f r l.

Igitur permutatim prisma habet ad cylindrum minorem proportionē, quàm multiangulum circulo b inscriptum ad circulum b: quod est inconueniens. nam si faciamus sicut superficies prismatis ad superficiem cylindri, sic inscriptum circulo b haberi ad quidpiam aliud, erit id minus circulo b, ad quod inscriptum habet maiorem proportionem, quàm ad circulum. hoc est superficies prismatis ad superficiem cylindri maiorem habet proportionem, quàm inscriptum ad circulum. & ostensum est habere minorem, quod admitti non potest.

IN XIIII THEOREMA.

Ipsa c ad ipsam d maiorem proportionem habet, quàm polygonium inscriptū circulo a ad superficiem pyramidis inscriptæ cono. nam quæ ex centro circuli ad latus coni maiorem habet proportionem, quàm quæ à centro ad unum latus polygonij ducta perpendicularis, ad perpendicularem ductam à uertice coni ad latus ipsius polygonij. Intelligatur enim seorsum descriptio in rationali, & polygonium f h k inscriptum circulo a, & à centro a ad unum latus h k polygonij ducatur perpendicularis a g. Constat iam quod superficies contenta sub perimetro polygonij, & sub a g, est dupla polygonio. Intelligatur item pūctum l uerticem esse coni, et ab ipso l ad g ducta l g est perpendicularis super h k, uti ostensum est, in limmate octaui Theorematis. Quoniam igitur inscriptum polygonium est æquilaterum, & conus est æquicruris, erunt omnis ductæ ab l ad unumquodque latus polygonij perpendiculares ipsi, æquales l g. nam unaquæq; earum potest quadratum axis, & quadratum a g. Et propter hoc contentum sub perimetro polygonij, & sub l g, est duplum superficiei pyramidis. quod enim sub unoquoq; latere, & sub perpendiculari ducta à uertice ad latus ipsum, quæ & æqualis ipsi l g, duplum est trianguli secundum ipsam. quare sicut a g ad g l, sic polygonium ad superficiem pyramidis, sumpta cōmuni altitudine perimetri ipsius polygonij ducta g n æquedistāte ipsi m l, fiet sicut a m ad m l, sic a g ad g n. Ipsa uero a g ad g n maiorem proportionem habet, quàm ad g l. nam l g maior est ipsa g n. igitur a m ad m l, hoc est c ad d maiorem proportionem habet, quàm a g ad g l, hoc est quàm polygonium ad pyramidis superficiem.



IN XVI THEOREMA.

ET quoniam contentum sub b a, a g, æquatur cõtento sub b d, d f, & contento sub a d, & sub utraq; simul d f, a g, cũ d f sit æquedistans ipsi a g. quoniã enim d f, est æquedistãs ipsi a g, est sicut b a ad a g, sic b d ad d f, atq; idcirco cõtentũ sub extremis b a, d f, æquatur contento sub medijs b d, a g. Verum cõtentum sub b a, d f, æquatur contento sub b d, d f, & cõtento sub a d, d f, per primum Theorema libri secundi Stoichioseos. Igitur contentum sub b d, a g, æquatur contento sub b d, d f. & contento sub a d, d f, adiecto communi contento sub d a, a g, erit contentum sub b d, & a g, cum contento sub a d, a g: quod est contentum sub b a, a g, æquale erit contento sub b d, d f, & contento sub a d, d f, & itẽ cõtento sub a d, a g.

IN XXIII THEOREMA.

MVltitudo autem laterũ polygonij mensuretur quaternario. Vult latera polygonij numerari quaternario, quia circulo moto circa diametrũ a c, latera omnia ferentur secũdum conicas superficies, cum hoc sit sibi usui in sequentibus. Nam si latera polygonij quaternario non mensurẽtur, quamuis parilaterum fuerit, non possunt omnia ferri secundum conicas superficies, uti percipi potest in lateribus hexagoni. duo enim ex opposito latera eius, inuicem æquedistãtia, contin get ferri secundum cylindricas superficies: quod quidem sibi non est usui ad sequentia, ut dictum est.

IN XXIX THEOREMA.

IPsa uero k h æqualis est diametro circuli a b c d. Si enim a puncto q iunxerimus ad punctum m, quo k f contingit circulum a b c d, quod sit m. similiter autem & ipsam q k: quoniam q k est æqualis ipsi q f, & anguli ad m sunt recti. namq; k m, est æqualis ipsi m f. item ipsa f k ipsi q h est æqualis: igitur q m æquedistans est ipsi k h. & idcirco est sicut h f ad f q, ita k h ad k m. uerum h f dupla est ipsius q f, igitur k h dupla est ipsius q m, quæ est ex centro circuli a b c d.

IN XXX THEOREMA.

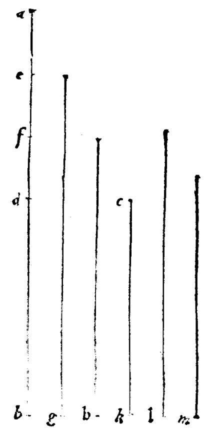
HAbet autem diameter circuli m, ad diametrum circuli ipsius n proportionẽ, quam habet e l ad a k. nam si iungãtur hæ g l, c k, angulis ad k l factis rectis, & ipsa a k æquedistans ipsi l e: triangulus enim g l e est æquiangulus. idcirco est sicut g l ad l e, ita c k ad k a. uerum sicut g l ad l e, sic omnis iungentes angulos circumscriptæ ad diametrum circuli circumscripti. Sicut autem c k ad k a, sic omnis iungentes angulos inscripti ad diametrũ circuli a b c d. Sicut autem diametros ad latus, sic diametros ad latus: quoniam & sicut m e ad e l, sic m a ad a k. & per æquã, sicut omnes iungentes angulos circumscripti ad e l, ita omnes iungentes angulos inscripti ad a k. uerum sicut omnes ad latus e l, sic contentum sub omnibus, & sub e l: hoc est quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratum e l, ipsa e l æqualem altitudinẽ sumente. sicut aũt omnes ad a k, sic contentũ sub omnibus, & sub a k, hoc est quadratum eius quæ ex centro n ad quadratum a k, communem altitudinem rursus sumente a k. Est igitur sicut quadratum eius quæ ex centro m ad quadratum e l: ita quadratum eius quæ ex centro n, ad quadratum a k. Igitur sicut ipsa quæ ex centro m ad ipsam e l, ita quæ ex centro n, ad ipsam a k. Et permutatim, sicut quæ ex centro m, ad eam quæ ex centro n, ita e l ad a k. Et duplæ antecedentium: sicut diametros ipsius m ad diametrum ipsius n, sic e l ad a k.

IN XXXII THEOREMA.

HAe autem i h sumptæ, sic ut æqualiter se superent ipsa k ipsam i, & ipsa i ipsam h, & ipsa h ipsam g, propositum est duabus rectis datis duas medias proportionales inuenire in Arithmetica analogia: quod idem est, ut sese æqualiter superent. Hoc autem fiet hoc modo. Sint duæ rectæ datæ a b, c k inæquales, et ablata ab ipsa a b æquali ipsi c k, quæ sit b d, residua d a diuidatur in tria ęqua punctis e, f. & ponatur g æqualis ipsi e b, & h æqualis ipsi b f. Erunt itaq; g h perficien

tes

tes, id quod propositum est. Dico quod a b, habet ad c k maiorem proportionem quàm triplam eius quam habet a b ad g. Fiat enim sicut a b ad g, sic g ad aliam quandam l. Et quoniam qua sui parte a b superat ipsam g: ipsa g superat eadem sui parte ipsam l. pars uero ipsius a b maior est parte illa ipsius g. Igitur a b maiori excedit ipsam g, quàm ipsa g ipsam l. Tanto autem ipsa a b superat ipsam g, quanto g ipsam h. Igitur ipsa g maiori excedit ipsam h, quàm ipsam l. quare l maior est ipsa h. Si rursus fecerimus sicut g ad l, sic l ad m, multo maior erit ipsa c k. Et quoniam sunt quatuor rectæ a b, g, l, m continuę proportionales, habebit a b ad m proportionem, a b ad g triplicatam. quare a b habet ad c k maiorem proportionem, quàm a b ad g triplicatam.



IN XXXV THEOREMA.

VErum contentum sub e h, & sub e f, c d, k a ostensum est æquale esse contento sub e l, k h. In uigesimo enim secũdo Theoremate ostensum est, quod e f, c d, k a ad h k eãdem proportionem habent, quam l e ad e h. quare contentum sub extremis est æquale contento sub medijs. cõtentum autem sub e l, k h minus est quadrato h a. Cum enim contentum sub l h, h k, sit æquale quadrato h a, uti constat, coniuncta a l: propterea quod triangulus h a k factus est similis triangulo h a l. Est enim sicut l h ad h a, sic a h ad h k, & ideo contentum sub extremis æquale quadrato mediæ.

IN XXXVII THEOREMA.

HAbebit iam idem centrum cum circulo a b. Si enim a d e iũgantur rectæ ad h e l, æquales erunt, proptera quod ductæ a d ad contactus rectæ sunt perpendiculares ad aptatas, & diuiduntur adaptatæ in duo æqua ad contactum. aut quando fiat maior enim est superficies superficie: quoniam enim m f secundum superficiem conicam fertur, secundum coluri coni superficiem feretur, quæ est æqualis circulo, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter f m, & dimidiã utriusque simul f g, & m n. Similiter & superficiei coluri coni factæ ab m a, æqualis est circulus, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter rectam m a, & dimidiam utriusq; simul a b & m n. Et ipsa quidem f m maior ipsa m a, & ipsa f g ipsa a b maior, igitur media, quare & superficies superficie. Superficies igitur contenta sub f m, m g, maior est superficie contenta sub m a, n b.

IN XXXVIII THEOREMA.

SVperficies igitur figuræ k f l maior est circulo, & cætera quæ sequũtur, obscure uidetur collegisse quod dictum est. Dicatur autem apertè hoc modo. Quoniam circulus n est æqualis superficiei figuræ. quæ autem ex centro ipsius n, potest contentum sub m h, f g: contentum autem sub m h, f g maius est cõtento sub c d, d x. nam m h ostensa est æqualis ipsi c d, & ipsa f g maior d x. Igitur circulus n maior est circulo cuius quæ ex centro potest contentum sub c d, d x. contentum autem sub c d, d x, æquatur quadrato d a. Igitur circulus n, hoc est superficies circumscripti, maior est circulo cuius quæ ex centro æqualis est ipsi d a.

IN XXXIX THEOREMA.

VErum spacia prædicta sunt ad inuicem, sicut quadratum lateris e k ad quadratum lateris a l. Si enim iungatur d l k, cum e k sit ęquedistans ipsi a l, erit sicut e d ad d a, ita e k ad a l. Sicut autem e d ad d a, sic e f ad a c. igitur sicut e k ad

Bb a al,

a l, ita e f ad a c, & dimidia ipſius e f ad dimidiam ipſius a c. Similiter & in omnib. iungentibus angulos polygonorum oſtendetur, quod eandem inter ſe habeant proportionem, quam e k ad a l. Igitur ſicut unum ad unum, ſic omnia ad omnia. quare ſicut e k ad a l, ſic omnis iungentes angulos polygoni circumſcripti, cum dimidia baſe portionis maioris, ad omnes iungentes, cum dimidia baſe minoris portionis. quare ſicut quadratum e k, ad quadratum a l, ſic contentum ſub e k, & omnibus, ad contentum ſub a l, & omnibus. Figuræ enim rectilineæ ſimiles ſunt dupla laterum ſimilium proportione, & proportionis e k ad a l dupla eſt quadrati e k ad quadratum a l proportio. Cõiungentium autem angulos maioris, ad cõiungentes angulos minoris dupla eſt ea quæ contenti ſub e k, & omnibus, ad cõtentum ſub a l, & omnibus. Similia enim & ipſa, cum habeant latera proportionalia. Et eſt ſicut e k, ad eam quæ ex centro minoris ſphæræ, ſic a l ad ductam à centro ad a l perpendicularem. Si enim à centro ad contactum iungatur, recta erit ducta perpendicularis ad utraſque e k, a l. & eſt ſicut e d ad d a, hoc eſt e k ad a l: ſic quæ ex centro ad contactum ducta, hoc eſt quæ ex centro minoris ſphæræ, ad eam quæ ex centro ad a l ducta eſt perpendicularis.

Oſtenſum eſt autem, ſicut e k ad a l, ſic quæ ex centro circuli m, ad eam quę ex centro circuli n. Quoniam oſtenſum eſt, ſicut polygonium ad polygonium, ſic circulus m ad circulum n: hoc eſt quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratũ eius quæ ex centro n.

IN XL THEOREMA.

VTraq; enim proportio dupla eſt eius quam habet latus circumſcripti polygoni ad latus inſcripti. Oſtenſum eſt enim in hoc, quod eſt ſicut quæ ex centro circuli æqualis ſuperficiei circumſcripti, ad eam quæ ex centro circuli æqualis ſuperficiei inſcripti: ſic latus circumſcripti polygoni, ad latus inſcripti. Circuli autem inter ſe ſunt in dupla proportione ſuarum ſemidiametrorum. Superficies igitur ad ſuperficiem, duplam habet proportionem eam, quã habet latus ad latus.

IN XLII THEOREMA.

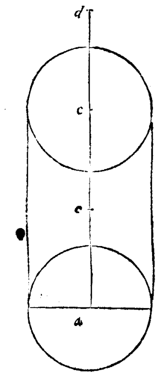
SOlidum igitur circumſcriptum, ad inſcriptũ, minorem habet proportionẽ, quàm ſolidum fruſtum ad conum h. Si enim circumſcriptum ſolidum ad inſcriptum minorem habet quàm triplicatam proportionẽ, eam quam habet b ad f, & ipſa d habet ad e minorem, quam eam triplicatam. circumſcriptum igitur habet ad inſcriptum minorem proportionem, quàm d ad e, & d habet ad e minorem proportionem, quàm fruſtum ad conum. Circumſcriptum ergo ad inſcriptum, minorem habet quàm fruſtum ad conum.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM, in primum traditionis Archimedis de Sphæra & cylindro, aſſcriptum Mileſio mechanico Iſidoro præceptori noſtro, finit.

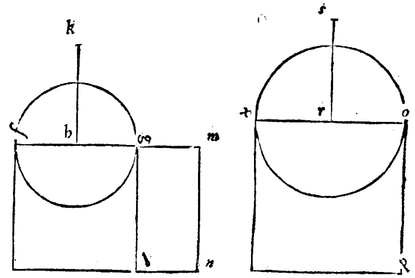
EVTO-

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM IN SECVNDVM *de Sphæra & cylindro.*

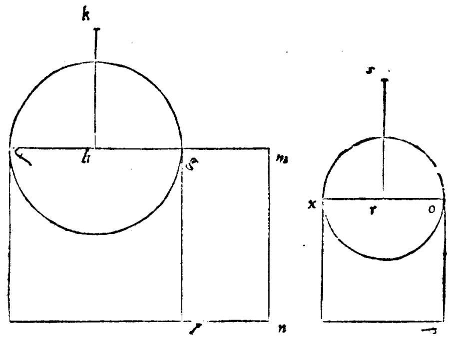
QVVM ea quæ in primo libro continentur Theoremata, ſatis ſint à nobis explicata: conſequens inde accedit, ut eodem modo his quę in ſecundo libro theoremata habentur explicandis, ſtudium adhibeamus. Dicit in primo Theoremate: Sumatur dato cono, uel cylindro, ſeſquialter cylindrus. Hoc autem dupliciter fieri poteſt, aut ſeruata in ambobus baſe eadem, aut altitudine. Et ut apertius fiat quod dictũ eſt, intelligatur conus, aut cylindrus, cuius baſis ſit circulus a, altitudo autẽ a c, & ſit inuenire eius ſeſquialterum cylindrum. Supponatur autem prius cylindrus a c, & educatur à c altitudo cylindri, & ponatur c d dimidia ipſius a c. igitur a d erit ſeſquialtera ipſius a c. Si iam intelligamus cylindrum habentẽ baſem circulum a, altitudinem uero rectam a d, ipſe erit ſeſquialter cylindri a c propoſiti. nam coni & cylindri in eadem baſe conſtituti, habent ſe ad inuicem, ſicut eorum altitudines. Si autem conus ſit a c, diuiſa a c in duo æqua puncto e: ſi rurſus intelligatur cylindrus, qui baſem habeat circulum a, altitudinem autem a e, erit ſeſquialter coni a c. Cylindrus enim qui baſim habeat circulum a, & altitudinem a c rectam, triplus eſt coni a c, & duplus cylindri a e. quare conſtat cylindrum a e ſeſquialterum eſſe coni a c: cuius eadẽ baſe ſaluata, & in propoſito & in ſumpto efficietur problema. Licet autẽ idem fieri, & ſi baſim contigerit diuerſam eſſe, axe manente eodem. Eſto enim rurſus conus, aut cylindrus, cuius baſis circulus f g, altitudo h k recta, cuius opus eſt inuenire cylindrũ ſeſquialterũ, qui habeat altitudinẽ æqualem ipſi h k, Deſcribatur quadratũ f l ab f g diametro circuli, & producta

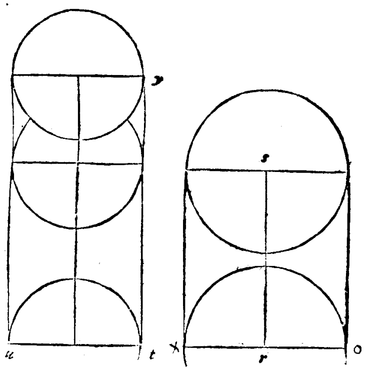


f g ponatur g m dimidia ipſius, & cõpleatur parallelogrãmũ f n. Erit igitur f n ſeſquialterum ipſi f l, & ipſa f m ipſi f g. Cõſtituatur enim parallelogrãmo f n, æquale quadratum x p: & circa diametrum, unum laterum eius x o deſcribatur circulus. Eſt itaq; x o ſeſquialter ipſi f g. nam circuli ſic ſe habẽt, ſicut quadrata ſuarum diametrorũ.



Item ſi intelligatur cylindrus, qui baſim habeat circulum x o, & altitudinem æqualem ipſi h k, erit ſeſquialter cylindri habentis baſim circulum f g, altitudinem uero h k. Si autem ſit conus, idem facientes, & conſtituentes quadratum x p, æquale tertiæ parti perallelogrãmi, & deſcribẽtes circa unũ latus eius x o circulum, intellexerimus ex ipso cylindrum habentem altitudinem h k: habebimus eum sesquialterum coni propositi. Quoniam enim parallelogrãmum f n est triplum quadrati x p, & sesquialterum ipsi f l, erit f l duplum ipsi x p. quare & circulus circulo duplus, & cylindrus cylindro. Verũ cylindrus habens basem circulum f g, altitudinem uero h k, triplus est cono circa eãdem basim & altitudinẽ cõstituto. Quare cylindrus basim habens circulum x o, altitudinem uero æqualem h k, sesquialter est proposito cono. Si autem oporteat neq; basem, neque altitudinem esse eandem, rursus hoc dupliciter fiet. aut enim basim habebit æqualem datæ, aut axem cylindrus propositus. Esto prius basis data circulus x o. Et opus esto cylindrum inuenire sesquialterum dato cono, aut cylindro à base x o, id est qui basim habeat x o. Sumatur ut prædictum est, cylindrus u y sesquialter cono, aut cylindro dato, eandem basim habens cum proposito: & fiat sicut quadratũ x o ad quadratum t u, sic altitudo u y ad ipsam r s. Erit igitur cylindrus ab x o base habẽs altitudinem r s, æqualis u y. nã bases se habent mutuò ut altitudines, & factũ erit imperatũ. Si autem basis non sit data, sed axis, eadẽ ratione prolato u y, fiet id quod proponit.





IN COMPOSITIONEM PRIMI.

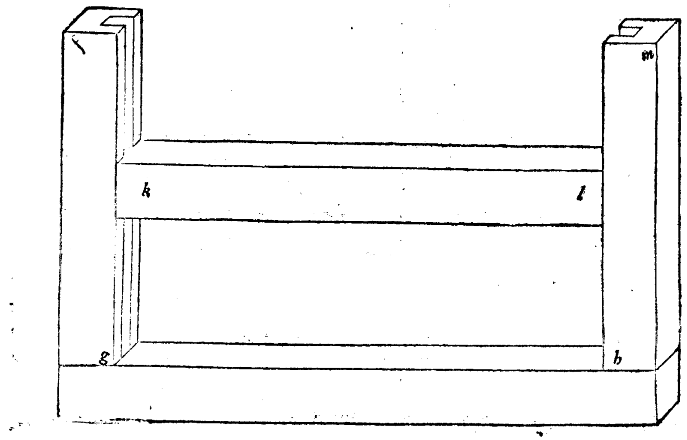
HOc sumpto, quoniam ad eius resolutionem proueniũt ea quæ in problemate sunt, resolutiõe ad hoc terminata, ut oporteat duab. rectis datis duas eis medias proportionales inuenire. dixit in cõpositione, inueniãtur. Harum aũt inuentionem ab eo traditam nusquã adhuc penitus inuenimus. multorum autem clarorum uirorum scripta in manus inciderunt, in quibus hoc problema tractatum inuenimus, ex quib. solam Eudoxi Cnidij descriptionẽ repudiauimus. Nam in proœmijs quidem dixit se per lineas curuas eam inuenisse. uerum in demonstratione, præter id quod non curuis lineis utatur, uerum & disiunctam proportionalitatem constituens, ea uti continua utitur, quod sanè absurdum est. Sed quid dico de Eudoxo, uerumetiam de quibusdã qui mediocriter in Geometria uersati sunt. Vt autem eorum quæ ad nos peruenerunt hominum sententiæ planè haberi possint, eorum uniuscuiusq; inueniendi modum istic deinceps describemus.

MODVS PLATONIS.

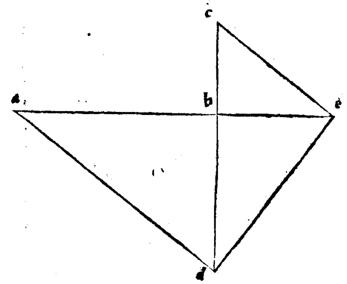
DVabus rectis datis, duas rectas medias illis proportionales in continua proportionalitate inuenire. Sint duæ rectæ datæ a b, b c inuicem perpendiculares,

res

res, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire. Producantur in directũ ad d, e: & paretur angulus rectus sub f g h: & in uno eius crure, puta f g, moueatur regula k l, in quodam constituto in f g, ita ut permaneat æquedistans



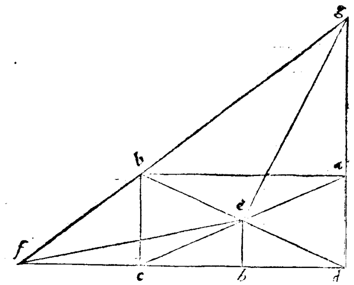
ipsi g h. Fiet autem hoc, si intelligamus alteram regulam confixam ipsi h g, æquedistantem ipsi f g, puta in Superioribus enim ipsarum f g, h m, superficiebus firmatis assialibus, & coaptatis ipsi k l, ad dictos erit tunc motus ipsius k, semper æquedistãs ipsi g h. His ita paratis, applicetur unum crus anguli quodcunq;, puta g h, cõtingẽs c: & regula attingat a, ita uti in descriptione habetur. fiat angulus rectus, portionem habens, puta c d e, & regula k l positionem habeat, puta e a. nam his ita confectis, propositum effectum est. Cum enim anguli ad d e, sint recti, erit sicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a.



MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRODUCTIONIBUS, & in telis fabricandis.

SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus sit duas medias proportionales cõstituere. disponantur ita, ut ambiant angulum rectum ad b, & compleatur b d parallelogrammũ, & iungantur a c, b d. constat eas æquales esse, & se mutuò per æqualia secare puncto e. nam circulus circa alteram earum descriptus, per terminos alterius transibit, cum perallelogrammũ sit orthogoniũ. producantur hæ d c, d a usque ad f g, & intelligatur regula, puta f b g, mota circa quendam clauum fixum in b: & moueatur, donec abscidantur æquales ab e ductæ: hoc est e g, e f. & intel-

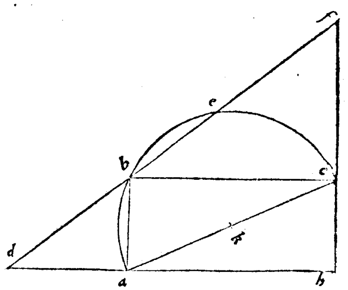
intelligatur ſectio poſitionem habere, puta f b g, factis e f, e g æqualibus, ut dictũ eſt. Ducatur ab e perpendicularis ad c d, puta e h, conſtat eam ſecare ipſam c d in duo æqua. quoniam itaq; c d, in duo æqua ſecatur puncto h, & additur ei c f, fit ut contentum ſub d f, c f, cum quadrato c h, æquetur quadrato h f. quadrato e h communi adiecto erit cõtentum ſub d f, f c: cum quadratis harũ c h, h e, æquale quadratis f h, h e. quadratis autem f h, h e æquatur quadratum f e. Igitur contentũ ſub d f, f c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e f. Similiter autem oſtendetur, quod cõtentum ſub d g, g a, cũ quadrato a e, æquat̃ quadrato e g, & a e eſt æqualis ipſi e c, & ipſa g e ipſi e f. Igitur contentum ſub



d f, f c, æquatur contento ſub d g, g a. Si aũt contentum ſub extremis fuerit æquale contento ſub medijs, erũt quatuor lineæ illæ proportionales. Eſt igitur ſicut f d ad d g, ita a g ad c f. Verum ſicut f d ad d g, ſic f c ad c b, & b a ad a g. nam in triangulo f d g ducta eſt c b, æquediſtans ipſi d g, item a b æquediſtans ipſi d f. Sicut ergo b a ad a g, ita a g ad c f, & c f ad c b. Igitur inter a b, b c ſunt factæ mediæ proportionales a g, c f.

MODVS PHILONIS BYSANTII.

Sint duæ rectæ datæ a b, b c, quibus opus ſit duas medias proportionales inuenire. Diſponantur ita ut ambiant angulum rectum ad b, & iuncta a c deſcribatur ſuper eam ſemicirculus a b e c: & ducatur a d ſecundum angulos rectos ad ipſam b a, & item c f ad ipſam b c. & applicetur regula mobilis ad b, ſecans a d, c f, & moueatur circa b, donec quæ ab ipſo b ad ipſum d ſit æqualis ei quæ ab e in f: hoc eſt, ei quæ eſt inter circumferentiam circuli, & ipſam c f. Intelligat̃ itaq; regula habere poſitionem, puta quam habet d b, e f. d b æquali ipſi e f, ut dictum eſt. Dico itaq;, a d, c f eſſe medias proportionales inter a b, b c. Intelligantur enim d a, f c protractæ & concurrentes in h. Conſtat itaq;, cum b a, f h ſint ęquediſtãtes, quod angulus ad h eſt rectus, & circulus a e c perfectus tranſibit per h. Quoniam igitur d b eſt æqualis ipſi e f, igitur contentum ſub

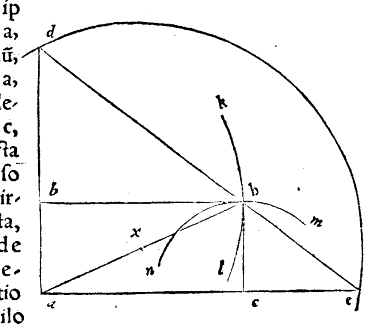


e d, d b eſt æquale contento ſub b f, f e. Verum contentum ſub e d, d b æquatur contento ſub h d, d a. nam utrũq; eſt æquale quadrato cõtingentis à puncto d ductæ. Contentum autem ſub b f, f e, æquatur contento ſub h f, f c. nam utrumque ſimiliter æquatur quadrato contingentis ductæ à puncto f. quare contentum ſub h d, d a, æquatur contento ſub h f, f c. Idcirco ſicut d h ad h f, ſic c f ad d a. Verum ſicut h d ad h f, ſic b c ad c f, & d a ad a b. nam in triangulo d h f, ducta eſt b c ęquediſtans ipſi d h, item b a æquediſtans ipſi f h. Eſt igitur ſicut b c ad c f, ita c f ad d a, & d a ad a b: quod erat propoſitum. Sciendũ eſt autem, quod huiuſmodi apparatus eſt idem ferè cum illo ſuperiori Heronis. nam parallelogramum b h, idem cũ eo quod ſumptum fuit in apparatu Heronis, & latera producta h a, h c eadem, & regu-

regula mota ad b. Hoc ſolum differunt, quod in illo quidem mouebatur regula donec ductæ à ſectione ipſius a c, per æqualia, puta ab ipſo k ſepararentur æquales coincidentes ad h d, h f, puta k d, k f. In hac uero mouetur, donec d b ſit æqualis e f. in utraq; autem figuratione idem ſequitur. Quod autem nunc dictum eſt, facilius in uſu ponitur. nam ipſę d b, e f ſeruabũtur æquales, diuiſa d f regula per æqualia & continua. hoc autem multo facilius eſt, quàm circino tentare eas quæ ab ipſo k ad d & f ductæ fuerint, æquales facere.

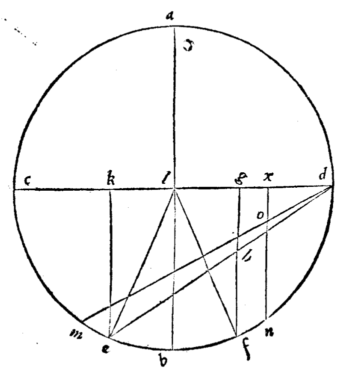
MODVS APOLLONII.

Sint duæ rectæ, quæ a b, a c: quib. opus ſit duas medias proportionales inuenire, quæ ita aptentur, ut ambiãt angulum rectũ ad a. & centro b, interuallo a c deſcribatur circumferẽtia circuli k h l. item centro c, interuallo a b, deſcribatur circumferentia circuli m h n, quæ ſecet ipſam k h l in puncto h. & iungãtur h a, h b, h c. Igit̃ b a c h eſt parallelogrãmũ, cuius eſt h a diametros. diuidatur h a, in duo æqua puncto x, & centro x deſcribatur circulus ſecans ipſas a b, a c, productas in punctis d e: ita ut puncta d e ſint in eadem linea recta cum ipſo h. quod utiq; fiet, cum regula mota circa h, & ſecãte ipſas a d, a e, & diducta, donec ductæ à puncto x ad puncta d e ſint æquales. Hoc enim facto habebimus quæſitum. Ita utique figuratio eadem eſt cum illa Heronis & Philonis, & conſtat eandem demonſtrationem adhiberi.



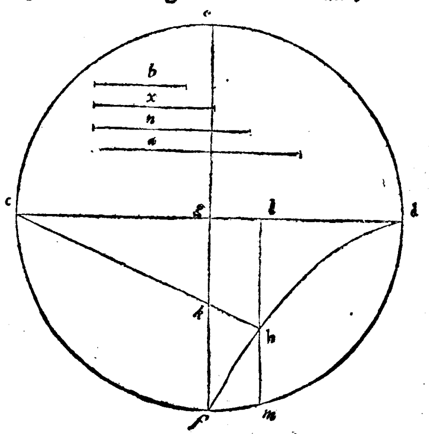
MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIrijs pulcherrimus.

In circulo ducantur duæ diametri ad angulos rectos a b, c d, & ſeparentur duæ circumferentiæ æquales utrinq; ad b, hæ e b, b f. & per f, ducatur æquediſtãs ipſi a b, quæ ſit f g, & iungatur d e. Dico quod inter c g, g h ſint duæ mediæ proportionales hæ f g, g d. Ducatur enim per e linea e k, æquediſtans ipſi a b. igitur e k æqualis eſt ipſi f g, & k c ipſi g d. Hoc autem conſtat, ductis à puncto l rectis a d e f. nã anguli c l e, f l d ſunt ęquales. & recti ad k, g. igitur omnia omnibus, propterea quod l e æquatur ipſi l f. igitur reliqua c k eſt ęqualis ipſi g d. Quoniam igitur eſt ſicut d k ad k e, ſic d g ad g h. item ſicut d k ad k e, ita e k ad k c. nã e k eſt media proportionalis harum d k, k c. Sicut ergo d k ad k e, ita e k ad k c: & ſic d g ad g h. & d k eſt æqualis ipſi c g, & ipſa e k ipſi f g, ipſa k c ipſi g d. Igitur ſicut c g ad g f, ita g f ad g d, & d g ad g h. Si item utrinq; ex b ſumantur æquales circumferentiæ hæ m b, b n, & per n ducatur n x æquediſtans ipſi a b, & iungatur d m, erũt rurſus inter c x, x o mediæ proportionales hæ n x, x d. Pluribus itaq; hoc



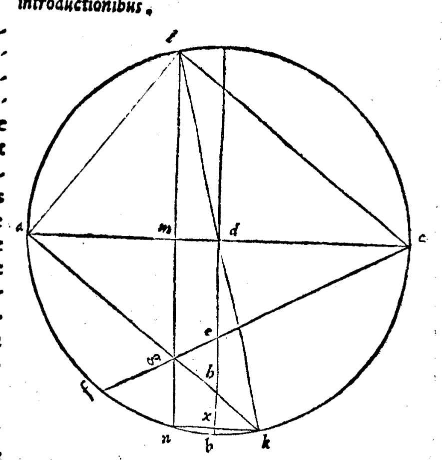
pacto æquedistantibus continuis, productis inter b d, & circumferentijs depræhensis ab illis uersus b, ponendo alias æquales uersus c, & ad puncta facta iungendo rectas lineas à puncto d, ita ut similiter fiant ipsis d e, d m: diuidentur parallelæ quæ sunt inter b d secundum quædam puncta, in proposita descriptione, puncta o h: quibus regula applicata iungentes rectas, habebimus quandam lineam in circulo descriptam. in qua si sumatur quodcunque punctum, & per ipsum ducatur æquedistans ipsi l b, erunt ipsa ducta, & illa quæ abscinditur ab illa, ex diametro uersus d, mediæ proportionales, inter lineam ab eadem ex diametro uersus c abscisam, & partem eius contentam à puncto in illa signato ad diametrum.

Istis ita constitutis, sint duæ rectæ a, b, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire: & sit circulus, in quo duę diametri se secent ad angulos rectos c d, e f. & describatur in ipso d h f linea, per puncta continua, uti prædictum est, & fiat sicut a ad b, ita c g ad g k: & iũcta c k, & producta diuidat lineam puncto h, & per h ducatur l m, æquedistans ipsi e f. per præscripta igitur inter c l, l h medię sunt proportiõales hæ m l, l d. Et quoniam est sicut c l ad l h, ita c g ad g k. Sicut autem c g ad g k, ita a ad b. Si autem in eadem proportione ipsarum c l, l m, l d, l h cõstituamus inter a b, puta istas n, x, illæ sumptæ erunt inter a b mediæ proportionales: quod erat inueniendum.



MODVS PAPPI IN MECHANICIS *introductionibus*.

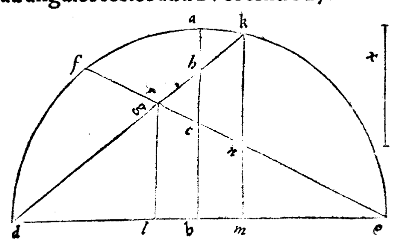
PRoposuit Pappus inuenire cubũ, qui haberet ad cubum datum proportionem datã: & si quæ ad huiusmodi proportionem demonstrandam requiruntur, inuenerimus, cõstat nos inuenisse propositũ. Duabus enim rectis datis, si ex illis duabus, quæ debent esse mediæ proportionales, secundam inuenerimus, tertiam quoque deinde facile deprehendemus. Describatur itaque, uti dicit ipse, semicirculus a b c, & à centro d ducatur d b ad angulos rectos, & moueatur regula circa a punctum, ita ut unus terminus eius quodam clauulo circumponatur pũcto a. Esto reliqua pars eius uti circa centrũ, circa clauulum moueatur inter b c. His constitutis, proponatur duos cubos



cubos inuenire, habentes inter se datam proportionem, & fiat proportio b d ad d e, qualis est proportio data & iuncta c e. producatur ad f. adducatur iam regula inter b c, donec pars eius intercepta inter rectas f e, e b, æqualis sit rectę quæ est inter rectam b e, & circumferentiam b k c. Hoc enim tentantes, & regulam dimouentes, facile assequemur. Fiat iam, et positionẽ habeat, puta a k, ita ut g h, & h k ęquales sint. Dico quod cubus ab ipsa b d, ad cubum ab ipsa d h, proportionem habet propositam: hoc est eam quæ b d ad d e. Intelligatur circulus perfectus, & iuncta k d protendatur ad l, & iungatur l g, cui est æquedistans ipsa b d, quia k h est æqualis ipsi g h, & ipsa k d ipsi d l. iungatur ipsa a l, & l c. Quoniam enim angulus a l c est rectus, quia est in semirculo, & l m est perpendicularis, erit igitur sicut quadratum l m ad quadratum m a, hoc est c m ad m a, sic quadratum a m ad quadratum m g. Proportione igitur ipsius a m ad m g posita cõmuni, erit proportio cõposita ex proportione c m ad m a, & ex proportione a m ad m g: hoc est proportio c m ad m g, eadem est compositæ ex proportione quadrati a m ad quadratum m g, & ex proportione a m ad m g, quæ est eadem ei quam habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Igitur proportio c m ad m g eadem est ei, quã habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Verum sicut c m ad m g, sic c d ad d e. sicut autem a m ad m g, ita a d ad d h. igitur sicut b d ad d e, hoc est sicut data proportio, ita cubus ex b d ad cubum ex d h. Earum igitur quas opus erat medias proportionales inuenire, secunda fuit d h. & si fecerimus sicut b d ad d h, ita d h ad aliam quandam, erit tertia inuenta. Est autem aduertẽdum, quod hæc descriptio eadem est ei quam Diocles suprà tradidit: hoc solum differens ab ea, quod ille solum lineam quãdam per continua puncta describit intermedia ipsi a b, in qua sumebat g producta c e, & diuidente dictam lineam. In hoc autem datur g, per regulam a k, motam circa a. quod enim g sit idem, siue sumatur ut hic per regulam motam, siue sicut Diocles, ita discemus: producta m g ad n, iũgatur k n. Quoniam igitur k h est æqualis ipsi h g, & g n est æquedistans ipsi h b, & k x æqualis est ipsi x n, & ipsa x b communis est & ad angulos rectos. nam k n in duo æqua diuiditur, & ad angulos rectos ab ea quæ per centrum. Igitur basis æqualis basi: idcirco & circumferentia k b, ipsi b n. Igitur g est id quod est in linea Dioclis, & demonstratio eadem. Dixit enim Diocles, quod sicut c m ad m n, ita m n ad m a, & m a ad m g. Est autem m n æqualis ipsi m l. nam diametros secat eam ad angulos rectos. Est igitur sicut c m ad m l, sic l m ad m a, & m a ad m g. Igitur harũ c m, m g, mediæ proportionales sunt l m, m a. Verum sicut c m ad m g, ita c d ad d e: sicut autẽ c m ad m l, ita a m ad m g: hoc est c d ad d h. & duarum mediarum, harum c d, d e secunda est d h, quàm Pappus efficiebat.

MODVS SPORI.

SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus est duas medias proportionales inuenire. Ducatur ex b ipsa d b e, ad angulos rectos ad a b: & centro b, interuallo autem b a describatur semicirculus d a e: & ab e ad c iũgatur recta, & ducatur ad f: & ducatur ab ipso d recta quædam ita, ut g h sit æqualis ipsi h k. Hoc enim fieri potest, & ducantur à punctis g, k, perpendiculares ad d e, istæ g l, k m. quoniã igitur est sicut k h ad h g, ita m b ad b l, & ipsa k h est æqualis ipsi h g, igitur ipsa m b est æqualis ipsi b l: quare & reliqua m e ipsi l d. Tota ergo d m, est

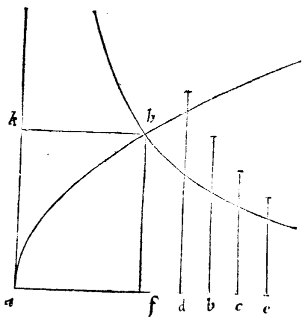


 æqualis

æqualis ipsi l e. et propter hoc sicut m d ad d l, ita l e ad m e. Verum sicut m d ad d l, ita k m ad g l. Sicut autem l e ad m e, ita g l ad m n. Rursus quoniam sicut d m ad m k, ita k m ad m e. Igitur sicut d m ad m e, ita quadratum d b, hoc est quadratum a b ad quadratum h b. nam d b est æqualis ipsi a b. Rursus quoniam sicut m d ad d b, ita l e ad e b. item sicut m d ad d b, ita k m ad h b. Sicut autem l e ad e b, ita g l ad c b. Igit̃ sicut k m ad h b, ita g l ad c b. & permutatim, sicut k m ad g l, ita h b ad c b. Verum sicut k m ad g l, ita m d ad d l, hoc est d m ad m e: hoc est, quadratum a b ad quadratum h b. Igitur sicut quadratum a b ad quadratum h b, ita b h ad b c. Sumatur harum h b, b c media proportionalis hæc, x. Quoniam igitur sicut quadratum a b ad quadratum b h, ita h b ad b c. Verum quadratum a b ad quadratum h b, habet proportionem a b ad b h duplicatam, & h b ad b c. habet proportionẽ h b ad x duplicatam. Igitur sicut a b ad b h, ita b h ad x. Verum sicut a b ad x, ita x ad b c. Igitur a b ad b h, sicut b h ad ad x, & x ad b c. Cõstat autem, quod hæc quoque eadem est illi quæ à Diocle dicta fuit, & Pappo.

MODVS MENECHMI.

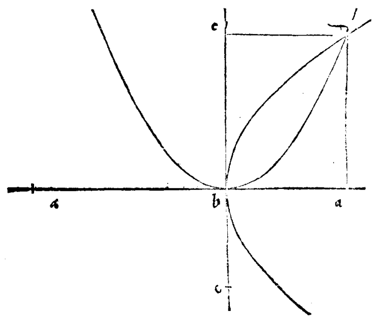
Sint duæ lineæ rectæ datæ a e, quibus iubemur duas medias proportionales inuenire. Esto hoc factum, & sint illæ b c. & ponatur recta positione hæc d g terminata ad d. & uersus d sumatur d f, æqualis ipsi c: & ducatur ad angulos rectos h f, quæ ponatur æqualis ipsi b. Quoniã igitur tres lineæ a b c rectæ sunt proportionales, contentũ sub a c æquatur quadrato b. Contentũ igitur d data, & c, hoc est a f, æquat̃ quadrato b, hoc est quadrato f h. quoniã rectãguli coni, in parabole. igitur punctum h, per punctum a d, secundum primam descripta ducãtur æquedistantes h k, a k. & quoniam contentum sub b c est datum, cum sit æquale contento sub d e: contentum igitur sub k h, h f datum, quoniam hyperbole, igitur ipsum h in non coincidentibus cum his k a, a f. igitur h datum: quare & f datum. Componetur autem sic. Sint duæ rectæ datæ hæ d e, & positione ipsa a g terminata ad a, & describatur per a sectio rectanguli coni, cuius axis est a g, & rectũ specie latus d. quæ autem ductæ sint ad ipsam a g ad angulos rectos possint spacia ipsi d, apposita latitudinẽ habẽtia abscisas ab eis uersus punctum a, describatur & esto a h, et erecta a k. & in non coincidẽtibus cum his k a, a f, describatur sectio obtusianguli coni: à qua ductę ęquedistãtes ipsis k a, a f. facient spaciũ ęquale spacio cõtẽto sub d e. Scindet aũt sectionem rectanguli coni. diuidat eam in puncto h, & ducãtur h k, h f perpendiculares. Quoniam igitur quadratum f h æquatur contento sub d a, a f, erit sicut d ad f h, ita f a ad e. Verum sicut d ad f h, ita f h ad f a, & f a ad e. Ponatur itaq; g b æqualis ipsi f h, & c æqualis ipsi a f. erit igitur sicut d ad b, ita b ad c, & c ad e. igitur d b c e sunt continuę proportionales, quod erat inueniendũ.



Aliter idem.

Sint duæ rectæ datæ ambientes angulum rectum a b, b c: & fiant earũ mediæ proportionales d b, b e, ita ut quæ c b ad b d, ea sit b d ad b e, & b e ad b a: & ducantur ad angulos rectos d f, e f. Quoniam igitur est sicut c b ad d b, ita b d ad b e. Contentum igitur sub c b b e, hoc est cõtentum sub data, & b e, æquatur quadrato b d: hoc est ipsius e f. Quoniam igitur contentum sub data, & b e, æquatur quadrato e f, igitur f applicatur sectioni rectanguli coni circa axem b e constitutæ. Rursus, quoniam sicut a b ad b e, ita b e ad b d. contentum igitur sub a b, b d, hoc est sub da-

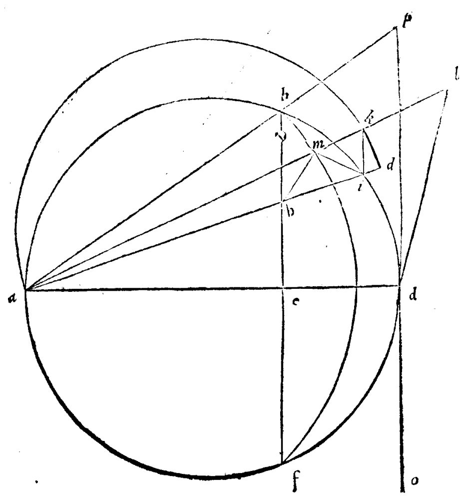
sub data, & b d æquat̃ quadrato e b, hoc est ipsius e f. Igit̃ f applicat̃ sectioni rectãguli coni circa axem b d constitutę. Erat etiam applicatum alteri datæ, circa b f constitutæ. igit̃ pũctum f datũ, et perpendiculares f d, f e. igitur pũcta d e data. Cõponetur aũt sic, sint duæ rectæ datæ angulũ rectũ ambientes a b, b c: & educantur ab ipso b in infinitũ, et describatur circa axem b c sectio coni rectanguli. Rursus circa axem d b describatur sectio rectãguli coni, ita ut ductæ possint iuxta ipsam a b, sectiones ductæ se mutuò secabunt. secent se in puncto f, & ab ipso f ducantur perpendiculares f d, f e. Quoniam igitur in sectione rectanguli coni ducta est f e, hoc est d b, cõtentum sub c b, b e erit æquale quadrato b d. Est igitur sicut c b ad b d, ita b d ad b e. Rursus quoniam f d ducta est in sectione rectanguli coni, hoc est ipsa b e: contentum igitur sub d b, b a, est æquale quadrato e b. Est igitur sicut b d ad b e, ita b e ad b a. Verum sicut d b ad b e, ita c b ad b d, est sicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a, quod erat inueniendum.



Descripta est autem sectio rectanguli coni cum diabeto, inuento à Milesio mechanico Isidoro magistro nostro, cum sit ab eo scriptum in Commentum camaricarum Heronis sibi factum. Diabetum instrumentum est simile elemento græco λ.

INVENTIO ARCHITAE, QVEMADMODVM *Eudemus tradit.*

Svnto duæ rectæ datæ a d, c: quibus oporteat duas medias proportionales inuenire. Describat̃ circa maiorem, puta a d, circulus a b d f, & applicetur a b ipsi c ęqualis, quę educta concurrat in puncto p, cum ea quæ contingit circulum in pũcto d. Ducatur autem b e f æquedistans ipsi p d o, & intelligatur semicylindrus erectus super a b d semicirculo, et super a d semicirculus erectus in parallelogrã mo cylindri descriptus. Hic itaq; semicirculus circumductus, ab ipso d in ipsum b, termino diametri a quiescente, diuidet superficiem cylindri-

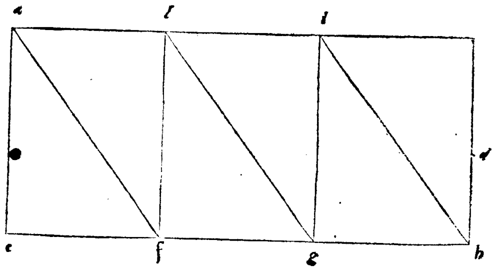


cam

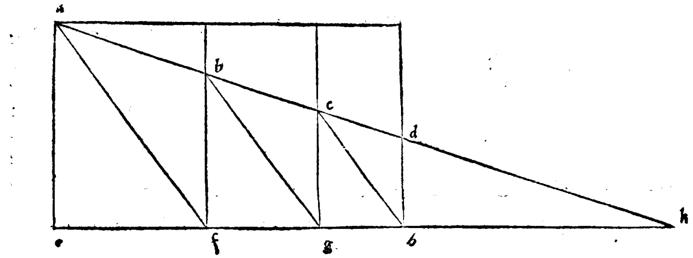
cam in circumuolutione, et in ea describet lineam quandam. Rursus si quiescente a d triangulus a p d circumferatur contrario semicirculi motu, faciet superficiē conicam. recta itaque a d circumuoluta concurrat cum linea cylindrica in quodam puncto, simul autem & ipsum b describet semicirculum in superficie coni. habeat iam positionem in loco cōcursus linearum semicirculus motus, hanc puta d k a, & triangulus in contrariū motus habeat hanc d l a. punctum dicti concursus esto k. Est item semicirculus descriptus per b, iste b m f: & esto b f communis sectio eius, & circuli b d f a, & ducatur ab ipso k ad planum semicirculi b d a perpendicularis: cadet itaq; ipsa in circumferentia circuli, cum cylindrus sit erectus. incidat, & sit k i: & ducta ab i ad a, incidat in b f in puncto h, & ipsa a l incidat semicirculo b m f in puncto m. iungantur autem k d, m i, m h. quoniam igitur uterque semicirculorum d k a, b m f, est erectus super subiectum planum, erit eorum communis sectio m h, ad rectos angulos super plano circuli. quare & ad ipsam b f erecta est ipsa m h. Igitur contentum sub b h, h f, hoc est sub h a, h i, est æquale quadrato m h. Igitur triangulus a m i, similis est utriq; horum m i h, m a h: & angulus i m a rectus, item angulus d k a rectus: igitur k d, m i, sunt æquedistantes. & erit sicut d a ad a k, hoc est k a ad a i, ita i a ad a m, propter triangulorum similitudinem. Igitur quatuor hæ d a, a k, a i, a m, sunt consequenter proportionales: & a m est æqualis ipsi c, quia & ipsi a b. Duabus igitur rectis a d c datis, duæ a k, a i mediæ proportionales inuentæ sunt.

MODVS ERATOSTHENIS.

REgi Ptolemæo Eratosthenes lætari. Vetustissimorū aiunt tragœdum quendam introduxisse Minoa, sepulchrum Glauco extruentem. Cum autem audisset illud centum undiq; pedum ambitu claudi, dixisse, Paruum utiq;. inde subiecisse, Regij ciron sepulchri duplū esto. Videbitur errasse. lateribus enim duplatis, planum fit quadruplum, et solidum octuduplum. Quærebatur autem iam à Geometris, quo'nā pacto solidum datū sub pristina figura ad duplum augeri posset. et appellabat hoc problema, cubi duplatio. Suppo nētes enim cubum, tentabant ipsum duplum reddere. Cunctis itaq; multo tempore dubitantibus, Hippocrates Chius primus inspexit, quod si duabus lineis rectis, quarum maior esset minoris dupla, duę mediæ proportionales inueniuntur, tunc duplare posse cubum. quare dubium eius in nō minus dubium uersum est. Tempore aūt quodā pòst ferunt Delios iussos per oraculum, duplare quandam aram, in hanc difficultatem incidisse. implorantes autem eos qui tunc apud Platonem erant in Academia Geometras, postulare, ut quæsitum ab eis inueniretur. Cum aūt illi diligenter sibi ipsis insisterent, & scrutarentur, quo pacto duabus rectis datis duas medias proportionales instituerent, Archita Tarentinus fertur eas per semicylindros inuenisse, Eudoxus autem per lineas quæ curuæ appellantur. Accidit autem omnibus his descripsisse demonstratiuè, uerum non posse, quæ inuenerant, manu efficere, & in usum deducere, præterquā in breuitate Menechmi:



mi: & hæc difficulter. Excogitata autem est à nobis quædam instrumenti structura facilis, per quam inuenire poterimus non solum duabus datis rectis duas medias, uerum quodcunq; quis iusserit. quo inuento, poterimus uniuersaliter solidum quodcunq; datum æquedistantibus lateribus contentum, in cubum reducere, aut ex altera in alteram figuram transformare, & similem ei facere, & ipsum augere retinendo similitudinem. quare & aras & templa poterimus, & humidorum & siccorum mensuras, puta medimnarū metrum in cubum reuocare, & per huius latus dimetiri uasa horum receptiua, quantum capere possint. Vtile autem est excogitatum istud, his qui student impulsiua & expulsiua lapidum instrumēta augere. nam oportet omnia illa proportionaliter augeri: & crassitudines, & magnitudines, & perforationes, & chienicidas, & neruos iniectos, si debeat & statuatur proportionaliter augeri. Hæc autem absq; mediarum inuentione fieri non possunt. Demonstrationem autem & structuram dicti instrumenti tibi descri-



psi. Dentur itaq; duæ rectæ a e, d h inæquales: quibus duas medias proportionales inuenire oporteat. & statuamus a e ad angulos rectos super aliquam rectam, puta e h: & super e h cōstituantur tria parallelogramma deinceps a f, f i, i h. & ducantur diametri in eis a f, l g, i h, quæ erunt æquedistantes. manente autem parallelogrammo medio f i, compellatur a f supra medium, & i h infra, ueluti in secunda figura, donec puncta a b c d fiant in una linea recta. & ducatur per puncta a b c d linea recta, quæ coincidat cū e h, educta ad k. Erit itaq; sicut a k ad k b, in parallelis a e, f b, ita e k ad k f. in parallelis autem a f b g, sicut f k ad k g. Sicut igitur a k ad k b, ita e k ad k f, & k f ad f g. Rursus quoniam b k ad k c in parallelis b f, c g, sicut f g ad k g: in parallelis autē b g, c h, sicut g k ad k h. Sicut ergo b k ad k c, ita f k ad k g, & g k ad k h. Verum sicut f k ad k g, ita e k ad k f. Igitur sicut e k ad k f, ita f k ad k g, & k g ad k h. Verum sicut e k ad k f, ita a e ad b f. Sicut autem f k ad k g, ita b f ad c g, & c g ad d h. Inuentæ igitur sunt duabus a e, d h, duæ mediæ b f, c g proportionales.

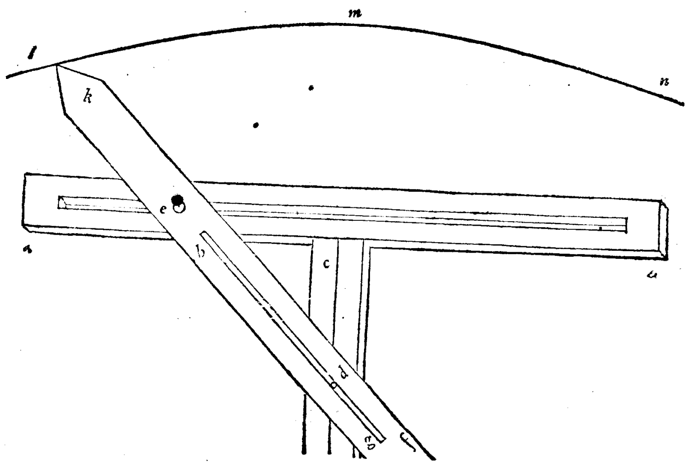
Hæc igitur in superficiebus Geometricis demonstrata sunt. Vt autem & instrumento possimus duas medias sumere, fabricetur plinthus ligneus, uel eburneus, uel æreus, habens tres tabellas æquales, & quàm leuissimas, quarum media confixa sit, reliquæ duæ pelli possint, αἷς magnitudinibus & commensurationibus omnes sibijpsis consentiētes. Demōstratio autem similiter perficietur. Ad lineas uero certius sumendas, arte incumbendum est, ut inducta tabellarum omnia retineantur parallela, & non hiantia, et regulariter inuicem coaptata. In anathemate autem est instrumentum æreum, & aptatum est sub coronam ipsius colū-

næ,

næ adnexum plumbo, ſub ipſo eſt demonſtratio compendioſius expreſſa, & figura, poſt ipſum uero ſuperſcriptio epigramma. Hęc autem tibi ſcribuntur, ut habeas ea ſicut in anathemate habentur. Duarũ aũt figurarum ſecũda eſt in columna deſcripta: duabus rectis datis, duas medias proportionales in proportione continua inuenire. Dentur duæ a e, d h. conduco itaq; tabellas in organo, donec pũcta a b c d ſint in recta una. intelligantur ſicut ſe habent in ſecunda figura. Eſt igitur ſicut a k ad k b, in parallelis a e, b f, ita e k ad k f. in ipſis uero a f b g, ita f k ad k g. igitur ſicut e k ad k f, ita k f ad k g. Sicut autem illę inter ſe, ita a e ad b f, & b f ad c g. Similiter autem oſtendemus, quod ſicut f b ad c g, ita c g ad d h. Igitur iſtæ a e, b f, c g, d h ſunt proportionales. Igitur duabus datis, duę mediæ inuentæ ſunt. Quod ſi datæ nõ ſint æquales ipſis a e d h, facientes illis proportionales has a e, d h, harũ medias ſumemus, & inducemus ad illas, & fecerimus illud quod imperatũ fuit. Si autem plures medias iubeamur inuenire, ubi tabellas cõſtituerimus in inſtrumento una plures, quàm ſint mediæ inueniendæ, idem conſequemur, & demonſtratio prorſus eſt eadem.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO *de lineis conchoidibus.*

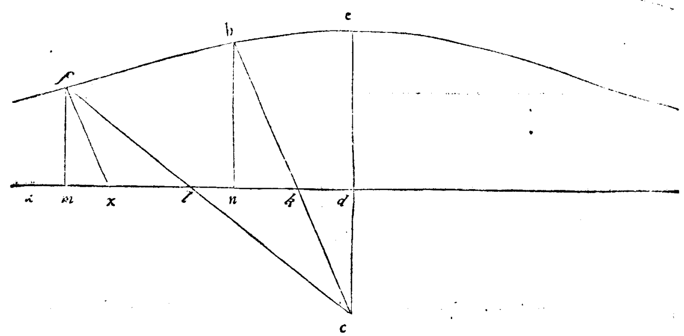
DEſcribit Nicomedes in lib. ſibi ſuperſcripto de Conchoidibus, talem inſtrumenti ſtructuram, quo eadem neceſſitas ſuppletur: in quo uir iſte uidetur ſupra modum gloriari, multumq; inuentis Eratoſthenis irridere, ueluti quæ fieri non poſſint, neq; imaginari, ac ſimul Geometrica doctrina priuata ſint. Hãc uero partim quòd explete quæ circa hoc problema elaborata ſunt, tradidit: partim, ut eius ad Eratoſthenem cõparatio haberi poſſit, inter iſta cõſcripſimus, quæ ſic ferè deſcribitur, Imaginari oportet regulas duas ad angulos rectos inuicem cõ-



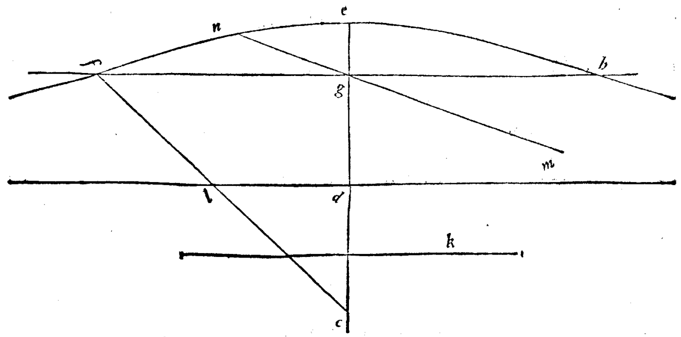
pactas, ita ut una ſit earum ſuperficies: ueluti ſunt a b, c d, & in a b in quem aſſialem, percurrere poſſit. in ipſa uero c d, ad partem d, ad rectam quæ diuidit latitudinem eius, cylindrulus configatur regulæ, & parum excedat ſuperficiẽ ſuperiorem regulæ. alterã item regulam, puta e f poſt breue quoddam interuallũ ad terminum f, inſecturam habentem, puta g h, quæ poſſit cylindrulo d inſerto circum

circumuerti. ad ipſum e uero quæ incumbat in axem confixum percurrenti in ſolmo aſſiali exiſtente in regula a b. inſita itaq; regula e f per inſecturã g h, in cylindrulo ad f ſtatuto, & per e in axe confixo ipſi chelonario, ſi quis comprendens k extremum regulæ ipſam mouerit in partes a, deinde in partes d, punctum e ſemper in regula a b continebitur. ac uero g h in ſectura mouebit̃, uerſus cylindrulum d, ſemper recta regulæ e f media in motu intellecta ſecũdum axem qui eſt ad cylindrum d, & ipſa c k ſupereminentia regulæ ſemper manente eadem. Si itaq; intelligamus ad k graphium quoddam attingens pauimentum, deſcribet̃ quædã linea qualis eſt l m n, quã Nicomedes appellat conchilem primã lineam. & interuallum quidẽ eius lineæ eſt e k, magnitudo regulæ, polus uero d.

Hac itaq; linea contingit oſtendere eam perpetuò minus accedere ad a b regulam, & quod omnis recta inter regulam a b, & ipſam lineam ſecat ipſam lineam. Primũ quidem accidens facile comprẹhenditur in altera deſcriptione, intelligendo regulam a b polo c, interuallo d e, linea cõchili f e h. procedãt ab ipſo c duæ c h, c f, æqualibus uidelicet factis his k h, l f. Dico quod f m perpendicularis minor eſt perpendiculari h g. Cum enim angulus m l c, ſit maior angulo m k c, reliquus relictus in duos rectos, puta angulus m l f, reliquo m k h minor eſt. Propterea cũ an-



guli ad m, g ſint recti, angulus ad f maior eſt angulo ad h conſtituto. & ſi angulus m f x, fiat æqualis angulo ad h, ipſa k h, hoc eſt ipſa l f ad h g, eãdem habebit proportionem, quam x f ad f m. quare f l ad h g, habet minorẽ proportionem, quàm ad f m. quare h g maior eſt ipſa f m.

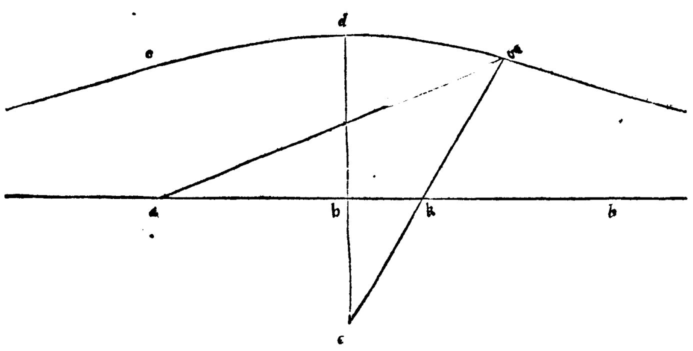


Secundum autem fuit, lineam rectam ductam inter a b & lineam ſecare ipſam

Dd

lineā. & hoc quoq; sic patebit. Ipsa enim ducta aut est æquedistās ipsi a b, aut non. Esto prius æquedistās, puta f g h: & fiat sicut d g ad g c, ita d e ad aliam quandā, puta k. & cētro c, interuallo k, circumferentia descripta secet f g, in puncto f, & iungatur c f. Est igitur sicut d g ad g c, ita l f ad f c, uerum sicut d g ad g c, ita erat d e ad k: hoc est ad ipsam c f. Igit̄ d e est æqualis ipsi l f, quod esse nō potest. oporteret enim f esse ad lineam. At uero non sit ipsa ducta æquedistans, puta m g n, & ducatur per g æquedistans ipsi a b, puta f g. ipsa igitur f g concurret cum linea: quare multò magis ipsa m n. Cū igitur hæc instrumento accidentia colligantur, eius ad propositum utilitas ita demonstrabitur.

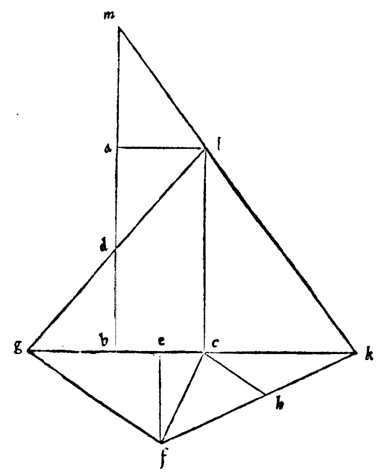
Rursus angulo a dato, & puncto extra c ducere c g, & facere eam ęqualem datæ. ducatur perpendicularis a puncto c ad ipsam a b, quæ sit c h. & educatur, & esto d h æqualis datæ, & polo c, interuallo d h dato. regula uero a b describatur



conchilis linea prima e d f. concurrit igitur ipsi a g, per prædemonstratum. cōcurrat in g, & iungatur c g. Igitur k g est æqualis datæ.

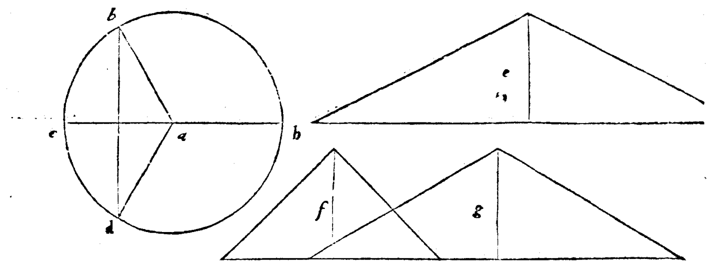
His demonstratis, dentur duæ rectæ c l, l a, ambientes angulum rectum, quibus oporteat duas medias continuè proportionales inuenire, & compleatur parallelogrammum a b c l, & diuidatur utraq; harum a b, b c in duo æqua punctis d, e. & iuncta d l educatur, & cōcurrat cum ipsa b c, educta in puncto g, & sit ipsi c b ad angulos rectos ipsa e f. & producatur ipsa c f, quæ sit æqualis ipsi a d, & iungatur ipsa f g, & ei ęquedistans ipsa c h, & angulo existente eo qui sub k c h a puncto f dato, deducatur ipsa f h k, faciens ipsam h k ad g k æqualem ipsi c f. Hoc autem quo modo fieri possit, ostensum est per lineam cōchilem, & ipsa k l iungatur, & educatur ut concurrat ipsi a b eductæ in pūcto m. Dico itaq;, quod est sicut c l ad k c, ita k c ad m a, & m a ad a l. Quoniam enim b c diuiditur in duo æqua puncto e, & additur ei k c: cōtentum ergo sub b k, k c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e k, quadrato e f communi adiecto, contentum sub b k, k c, cum quadratis e c, e f, hoc est quadrato c f, æquatur quadratis k e, e f: hoc est quadrato k f. Et quoniam sicut m a ad a b, ita m l ad k l. Sicut autem m l ad k l, ita b c ad c k. igitur sicut m a ad a b, ita b c ad c k. & est a d dimidia ipsius a b, & c g est dupla ipsius b c. quoniam & l c, ipsius a d. Erit igitur sicut m a ad d a, ita g c ad k c. Verū sicut g c ad c k, ita f h ad h k. cum g f, & c h sint æquedistantes. Igitur componenti sicut m d ad d a, ita f k ad k h. Supposita est autem ipsa d a æqualis ipsi h k, cum c f sit æqualis ipsi d a. Igitur ipsa m d æqualis est ipsi f k. quare quadratū m d est æqua

le quadrato f k. Est autem contentum sub b m, & m a, cum quadrato d a, æquale quadrato m d. quadrato autem f k ostensum est æquale esse contentum sub b k, k c, cum quadrato c f: quoniam quadratum a d, æquatur quadrato c f. nā ipsa a d supposita est æqualis esse ipsi c f. Igitur quod sub b m, m a æquatur contento sub b k, k c. Sicut ergo m b ad b k, ita k c ad a m. Verū sicut b m ad b k, ita c l ad c k. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m. Est autem sicut l c ad c k, ita m a ad a l. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m, & a m ad a l, quod erat demonstrandū. Duab. igitur rectis datis, duæ mediæ continuæ proportionales inuentæ sunt.

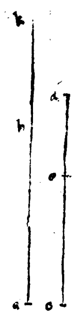


IN SECVNDVM THEOREMA.

ET componenti sicut ipsa d h ad h c, ita c a ad a e. hoc est quadratū c b, ad quadratū b e. Sicut enim in rationalis descriptione, quoniam in triangulo rectangulo c b a, ab angulo recto ad basem ducta est b e perpēdicularis, distincti trianguli ad perpendicularē sunt inuicē similes, & toti, icciirco sicut c a ad a b, ita b a ad a e, & c b ad b e. quare sicut quadratū c a ad quadratū a b, ita quadratū c b ad quadra-



tum b e. Verum sicut quadratū c a, ad quadratū b a, ita ipsa c a ad ipsam a e. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. Sicut ergo c a ad a e, ita quadratum c b ad quadratum b e. Eadem autem ratione ostenditur, quod sicut c a ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Propter similitudinem enim triangulorum est rursus, sicut a c ad c b, ita b c ad c e: hoc est, sicut quadratum a c, ad quadratum c b, ita ipsa a c ad ipsam c e. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, sic quadratum a b, ad quadratum b e. Igitur sicut a c ad c e, ita quadratum a b, ad quadratum b e. Postea deinceps tentās ostendere conū b k f, æqualem eſſe portioni ſphęræ b a f, exponens conũ n, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei portionis, & altitudinẽ æqualem ei quæ ex centro ſphæræ, dixit conũ n eſſe æqualem fruſto f a b h ſolido, ſicut oſtenſum fuit in primo libro. Verum ſciendum eſt, in primo libro non eſſe oſtenſum tale fruſtum eſſe æquale cono taliter ſumpto, ſed illi qui eſſet comprænhenſus à coni ſuperficie, & ſuperficie ſphęrica minore hæmiſphærio, quod proprie in Diffinitionib. uidebatur fruſtũ ſolidum appellare. Dixit enim: Fruſtum autẽ ſolidum uoco, cum ſphærã conus ſecet, qui habeat uerticem ad ſphæræ centrum, figuram comprænhenſam à ſuperficie coni intra conum. Figura enim nunc propoſita continetur à conica ſuperficie, habente uerticem ad centrum ſphæræ, & ſphærica ſuperficie, ſed non à comprænhenſa intus à cono. Quod autem & talis figura ſit æqualis cono habenti baſim æqualem ſuperficiei ſphæricæ complectenti portionem, altitudinem uero æqualem ei quæ ex centro ſphæræ, ſic demonſtrabitur per ea quæ in primo libro oſtenſa ſunt. Intelligatur enim ſeorſum ſphæra, & ſecetur plano quodam non per centrum circulo circa diametrum b d, centrum ſphæræ a: & intelligatur conus baſim habens circulum circa diametrum b d uerticem punctum a. Exponatur item conus e: cuius baſis, ſit æqualis ſuperficiei ſphæræ, altitudo ea quæ ex ſphæræ centro. Igiẽ conus ille eſt æqualis ipſi ſphæræ. nam quadruplus eſt coni baſem habentis maximum in ſphæra circulum, altitudinem uero eandem, cuius quidem ſphæra eſt oſtenſa eſſe quadrupla. Exponantur item alij duo coni hi f g, quorum f baſem habeat æqualem ſuperficiei portionis b c d, altitudinem uero eam quæ ex centro ſphæræ. g uero baſem habeat æqualem ſupęrficiei portionis b h d, & altitudinem eandẽ. Conus igitur f eſt æqualis fruſto cuius uertex eſt a, & ſuperficies ſphærica quę eſt ſecundum b c d. Quoniam igitur baſis e eſt æqualis baſibus conorum f g, & ſunt in eadem altitudine: igitur e conus, hoc eſt ipſa ſphæra, eſt æqualis conis f g. Verũ conus f oſtenſus eſt æqualis eſſe fruſto, quod eſt ſecundum b c d ſolido, uerticem habenti a. Igitur reliquus g conus æqualis eſt reliquæ portioni, baſem habenti ſuperficiem quæ ſecundum b h d portionęm, altitudinem uero eam quæ ex centro. Deinde rurſus dixit, Aequalis eſt igitur conus n, hoc eſt fruſtum b h f d, figuræ b h f d. quoniam enim adductus eſt conus n æqualis cono cuius baſis eſt circulus circa b f, diametrum & altitudo h k: conus autem cuius baſis eſt eadem, altitudo uero e k, æqualis eſt cono dicto, & cono habenti baſim eandem, altitudinem uero e h. Habent enim ſe ad inuicem, ſicuti eorum altitudines: ablato communi cono, eo qui baſim habet eandem, altitudinem uero e h, reliqua b h f k figura erit æqualis cono baſem habenti circulum circa diametrum b f, altitudinem autem h k: hoc eſt cono n, hoc eſt b a h f fruſto. Inducẽs itaq; ex collectis corolariũ, perficit Theorema. Deinceps per alterã demõſtrationem cõducit extremã partem theorematis, hoc eſt quod b a f portio ſphæræ eſt æqualis cono b k f. & procedens dicit, Sicut ergo k h ad h c, ita h d ad d c, & tota k d ad d h, ſicut d h ad d c. Quoniã enim ſicut k h ad h c, ita h d ad d c: & permutatim, ſicut k h ad h d, ita h c ad c d, & componenti. ſicut k d ad h d, ita h d ad d c, hoc eſt k h ad h a. Erat enim ſicut k h ad h c, ita h d ad d c. Eſt autem h c æqualis ipſi h a. Et parum pòſt: Sicut ergo k h ad h d, ita a e ad e c. Sicut ergo quadratum k d ad contentum ſub k h, h d: ita quadratũ a c, ad cõtentum ſub a e, e c. Intelligantur enim ſeorſum poſitæ hæ k d, a c: & ſit ſicut k h ad h d ita a e ad e c. Dico quod eſt ſicut quadratum k d, ad cõtentum ſub k h, h d, ita quadratum a c ad contentum ſub a e, e c. Quoniã enim eſt ſicut k h ad h d, ita a e ad e c. & componenti, ſicut k d ad d h, ita a c ad c e. quare eſt quadratum k d



ad

ad quadratum h d, ſicut quadratum a c, ad quadratum c e. Rurſus quoniam eſt ſicut k h ad h d, ita a e ad e c. Verum ſicut k h ad h d, ita contentum ſub k h, h d ad quadratum h d, ſumpta h d altitudine communi. Sicut autem d e ad e c, ita contentum ſub a e, e c, ad quadratum e c, ſumpta rurſus altitudine cõmuni e c. Sicut ergo contentum ſub k h, h d, ad quadratum h d, ſic contentum ſub a e, e c, ad quadratũ e c. Oſtenſum eſt autem, ſicut quadratum h d, ad quadratum d k, ſic quadratum e c ad quadratum a c. Igitur per æquam, ſicut contentum ſub k h, h d, ad quadratum k d, ſic contentum ſub a e, e c ad quadratum a c: & econuerſo, quod erat demonſtrandum.

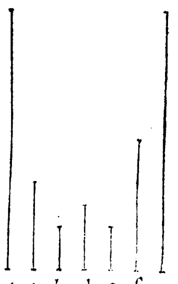
IN TERTIVM THEOREMA.

Sicut autem dicti circuli ad inuicem, ita quadratum a d, ad quadratum d b, hoc eſt ipſa a c ad ipſam c b. Sicut enim in ipſa rationalis deſcriptione, quoniã in triangulo rectangulo a d b ducta eſt perpendicularis, ab angulo recto d c media proportionalis, inter baſis partes & trianguli ad perpedicularem inuicẽ ſunt & toti ſimiles. quare ſicut b c ad c d, ita b d ad d a. igitur & earum quadrata. Verũ ſicut quadratum b c, ad quadratum c d, ita prima b c ad tertiam c a. Sicut ergo b c ad c a, ita quadratum b d ad quadratũ d a. Proportio autem a c ad c b eſt data, quare punctum c eſt datum. quoniam ſupponitur ſphæra, igitur diametros eius a b data, & proportio a c ad c b eſt data. Si magnitudo data in proportionẽ datam diuidatur, utraq; partium eſt data. quare ipſa a c data, & a datum. nam in communi ſectione lineis poſitione datis, datum eſt c punctum.

IN QVARTVM THEOREMA.

EAdẽ ratione qua ſuprà ex apparatu, ſicut l d ad d k, ita k b ad b r, & d q ad q b. in præcedenti enim collectũ fuerat hoc modo: Quoniã eſt ſicut utraq; ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b. & diuidenti, ſicut k d ad q d, ita r b ad b q: & permutatim, ſicut k d, hoc eſt k b ad b r, ita d q ad q b. Rurſus quoniam eſt ſicut l q ad q d, ita utraq; ſimul k b, b q ad q b. Diuidenti, & permutatim, ſicut l d ad d k, ita d q ad q b. Erat autem & ſicut d q ad q b, ita k b ad b r. Sicut ergo l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Tota igitur r l ad k l, ſicut k l ad l d. Sicut enim unum ad unum, ita antecedentia omnia ſimul, ad ſequentia ſimul omnia. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Quoniam enim eſt ſicut r l ad l k, ita k l ad l d. Sicut igitur prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad ſecundæ quadratum. Eſt igitur ſicut r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Verum ſicut quadratum r l ad quadratum l k, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sunt enim proportionales. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. ponatur b f æqualis ipſi k b. Quod enim extra r cadet, manifeſtũ eſt. Quoniam ſicut d q ad q b, ita k b ad b r. Eſt aũt d q maior ipſa q b. igiẽ ipſa k b maior eſt ipſa b r. igitur f extra r cadet.

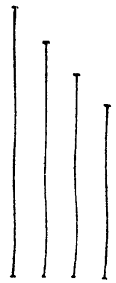
Quoniam autem proportio d l ad l q, & ipſius r l ad l q, & ipſius r l ad l d proportio data. Quoniam enim ſicut utraq; ſimul k b, b q ad b q, hoc eſt f q ad q b, ita l q ad q d: euertenti, ſicut q f ad f b, ita q l ad l d. Et econuerſo, ſicut b f ad f, ita l d ad l q. Proportio autem b f ad f eſt data, quoniam ipſa f b æqualis eſt ei quæ ex centro ſphæræ datæ. ipſa uero b q terminis eius b q datis, per ſuppoſitionẽ ſphæra diuiſa à plano per a c ducto, & ipſa d b ad angulos rectos ipſi a c exiſtẽte. Data eſt & idcirco tota q f, & proportio q f ad f b data, quare & proportio d l ad l q data. Rurſus quoniam proportio portionum eſt data, erit coni l a c, ad conum a r c proportio data. quare & proportio l q ad q r data. nam ſe habent inuicem, ſicut eorum altitudines. Totius ergo r l ad l q proportio eſt data. Quoniam igitur utriuſq; harũ r l, l d ad l q eſt proportio data, erit r l ad l d proportio data. nam quæ habent ad idem proportionem datam, habẽt quoque inter ſe proportionem datam. Quoniã igitur proportio r l ad l q coniungitur, ex proportione r l ad l d, & l d ad l q. quod quidem cõpoſitio proportionũ ſumatur, ſumpta media l d, ueluti & in Stoichioſi sumebatur, constat. Quoniam autem indearticulatè quodammodo, & non ita ut mentem expleat dictum est, uti comprachendi potest his qui in Pappum & Theonem & Archadium inciderunt, in multis compositionibus non demonstratiuè, sed inductione hoc dictum constituunt. Nullum igitur inconueniens, si perpaululum in ratione uersati hoc ipsum manifestius fecerimus. Dico igitur, quod si sumantur duo numeri, uel duæ magnitudines, quibus aliquis medius terminus cōstituatur, proportio prius sumptorum numerorum, uel magnitudinum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium proportione. Cōmemorandum tamē prius, quomodo proportio dicatur ex proportionibus componi. Sicut enim in libro Elementorum, quando quantitates proportionum in seipsas multiplicatę faciant quandam quantitatem, quātitate uidelicet dicta, secūdum eū numerū quo & denominatur proportio data, uti dicunt alij, & Nicomachus in primo de Musica, & Heronas in Commentario in Arithmeticam introductionem. Idem autem est, ac si dicatur eodem numero multiplicato in terminum sequentem proportionis produci antecedentem, & proprie magis in multiplicibus sumetur quantitas. In superparticularibus autem & superpartientibus non iam quātitatem sumi datur, cum sit unitas indiuisibilis. Quare in illis unitas est diuidenda. quanquā hoc minimè cōueniat Arithmeticæ, sed ratiocinatiuæ, & computatiuæ attribuatur. Diuiditur autem unitas in partem, aut partes, à quibus proportio denominabitur: quemadmodum fit, ut apertius dicatur, sesquialteræ quantitas ad unitatem addit unitatis dimidium, & sesquitertiæ ad unitatem tertiam. Quare sicuti suprà dictum est, constat proportionis quantitatem in terminū sequentem multiplicatā producere antecedentē. Nouem enim ad sex cum sit proportio sesquialtera, cuius quātitas est unitas & dimidium, hæc multiplicata in senarium, producit nouenariū. & in alijs quoq; licet hoc inspicere. His autem ita declaratis, redeundum est ad propositum. Sunto igitur duo dati numeri a b. sumatur medius inter eos c, ostendēdum quod proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & proportione c ad b. Sumatur enim quantitas a ad c, quæ sit d, & eius quæ est c ad b sit e. igitur c multiplicans d, producit a: et ipse b multiplicans e producit c. ipse uero d multiplicans e producat f. Dico quod f est quantitas proportionis a ad b: id est f multiplicans b producit a. nam b multiplicans f, faciat g. Quoniam igitur b multiplicans f facit g, & multiplicans e producit c: erit sicut f ad e, ita g ad c. Rursus quoniā d mulplicans e facit f, & multiplicans c facit a: erit sicut e ad c, ita f ad a. Igitur permutatim, sicut e ad f, ita c ad a: & econuerso sicut f ad e, ita a ad c. Verum sicut f ad e ostensum est esse, ita g ad c. Igitur sicut g ad c, ita a ad c. quare a est æquale ipsi g. Verum b multiplicans f producit g, igitur b multiplicans f producit a.



quare erit f quātitas proportionis a ad b. Et est f productus ex d in e multiplicato, hoc est ex quantitate proportionis a ad c, in quantitatem proportionis c ad b. Igitur proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & ex proportione c ad b. Quod erat demonstrandum. Vt autem exemplo quoq; hoc quod dictum est fiat manifestum, incidat inter duodenum & binū medius quaternus. Dico itaq;, quod duodecim ad duo proportio est composita ex proportione duodecim ad quatuor, & quatuor ad duo. Id est proportio sextupla componitur ex tripla, duodecim ad quatuor, & dupla quatuor ad duo. Si enim quantitates proportionum inuicem multiplicemus, hoc est tria in duo, fient sex, qui est quantitas duodecim

ad

ad duo proportionis quæ est sextupla, quod propositum fuerat declarare. Si autē qui incidit non fuerit maior minore, & minor maiore, sed aut econuerso, aut maior aut minor utroq;, & hoc modo prædicta compositio consequetur. Nam inter nouem & sex cadat medius duodecim, utroq; illorum maior. Dico igitur quod ex subsesquitertia, quæ est nouem ad duodecim proportione, & ex dupla quæ est duodecim ad sex, componitur sesquialtera, quę est nouem ad sex. Quantitas enim quæ est nouem, ad duodecim est tres quartæ, hoc est dimidium & quarta. Quātitas autem quæ est duodecim ad sex, est binarius. Si igitur multiplicauerimus binarium in dimidium & quartam, fit unitas & dimidium, quæ quantitas est sesquialterę proportionis, quam habent nouem ad sex. Similiter autem si inter nouē & sex quatuor medius incidat, ex dupla sesquiquarta & subsesquialtera componitur sesquialtera. Rursus enim quantitatem duplæ sesquiquartæ, quæ est nouem, ad quatuor multiplicemus, in quantitatem subsesquialteræ, quæ est duæ tertiæ, & habebimus unum & dimidium, quod est quantitas sesquialteræ, ut dictum est, & similiter in omnibus eadem ratio accommodatur. Constat autem ex dictis, quod si duorum numerorum datorū aut magnitudinum non fuerit unus medius, sed plures medij termini sumantur, extremorum proportio componitur ex omnium intermediorum proportionibus, incipiendo à primo, & procedendo ad ultimum, secundum ordinem se sequentium. Duobus enim terminis a b incidant plures uno c d. Dico quod proportio a ad b cōponitur ex proportione a ad c, & c ad d, & d ad b. Quoniam enim a ad b componitur ex a ad d, & d ad b, uti dictum est suprà: & a ad d componitur ex a ad c, & c ad d. Igitur a ad b, proportio componitur ex ea quæ est a ad c, c ad d, d ad b. Similiter autem & in reliquis ostendetur.



Item in rationali dixit: Verū sicut r l ad l d ostēsum est, ita esse quadratum b d ad quadratū d q. Quoniam enim ostensum est, sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sicut autem quādratum l k ad quadratum d l, sic quadratum b d ad quadratum b q. Ostensum est enim, sicut k l ad l d, ita b d ad d q, propter compositionem. Igitur sicut r l ad l d, ita quadratum b d ad quadratum d q. Fiat autem sicut r l ad l q, ita b f ad f h, utcunq; punctum h ceciderit, quomodocunq; quidem si positum sit, quantum ad consequentiam demonstrationis nullum affert rationi impedimentum. Quod autem si quemadmodum in descriptione fit ponatur, semper cadet inter b r, sic declaratur. Quoniam enim sicut l k ad d k, hoc est ad k b, ita k r ad r b. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia: sicut r l ad r k, ita k b ad r b. Maiorem autem proportionem habet r l ad r q, quàm r l ad r h. igitur l r ad r q maiorem habet proportionem, quàm k b ad b r, hoc est f b ad b r. Euertēti r l ad l q, minorem habet proportionem, quàm b f ad f r. Si enim fecerimus sicut r l ad l q, ita b f ad quandam aliam maiorem f r, manifestū inde est quod f h maior est ipsa h b. Quoniā enim ostensum est, sicut l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Est autem d q maior ipsa q b. igitur l d maior est ipsa d k, & k b ipsa b r. quare & l d ipsa b r. Tota igitur l q maior est ipsa q r. quare & h f maior ipsa h b.

Reliquum igitur est, sicut quadratum b d, quod est datum, ad quadratum d q, ita f q ad f h. Quoniam enim portioni b f ad f h ostensum est eandem proportionem componi ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ipsius b f ad f q. Eadem uero ei quæ est b f ad f h est, & composita ex proportione b f ad f q, & ex q f ad f h. Composita igitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ex b f ad f q, est eadem proportioni compositæ ex b f ad f q, & ex q f ad f h. Si igi

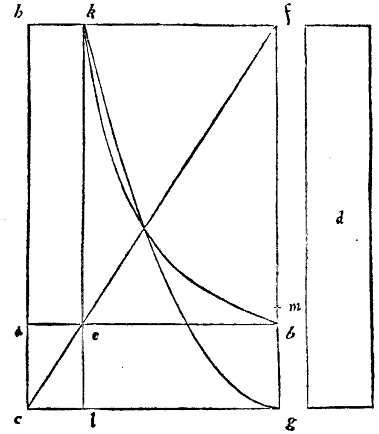
tur

tur communem in ambabus proportionem b f ad f q auferamus, reliqua quadrati b d ad quadratum d q proportio eadem eſt ei quæ eſt q f ad f h. & eſt datũ d f diuidere puncto q, & facere ſicut q f ad datam, hoc eſt ad f h, ſic datum, hoc eſt quadratum b d ad quadratum d q. Hoc autem ſic ſimpliciter dictum, habet determinationem, adhibitis quæ iſtic habentur problematis: hoc eſt, ipſam d b duplam eſſe ipſius b f, & ipſam b f maiorem eſſe ipſa f h. Quãtum autem ad reſolutionem, nõ habet determinationem, & eſt problema tale.

Duabus rectis datis d b, b f, & ipſa d b dupla ipſius b f, & puncto h ſumpto, in b f diuidere ipſam d b puncto q, & facere ſicut quadratum d b ad quadratum d q, ita q f ad f h. Vtraq; enim hæc in fine reſoluentur, & componentur. In fine quidẽ antedictum pollicebatur ſe oſtenſurũ, in nullis autem ſcriptis hoc promiſſum inueniri poteſt. Nihil etiam inuenimus Dionyſodorũ, ne quidpiam quidem horũ attigiſſe, uerum putare fieri non poſſe, ut in limma aſſumptum perueniatur, atq; idcirco alteram totius problematis uiam ingreſſum eſſe, quam deinceps conſcribemus. Diocles quidem & ipſe in libro de Pirijs confecto ab ipſo, pollicitum fuiſſe exiſtimans Archimedem non feciſſe pollicitationẽ, & ipſe perficere aggreſſus eſt, & eius epicherima deinceps deſcribemus. nam & ipſum nullum habet ad aſſumptã rationem. Similiter autem euenit Dionyſodoro, qui alia demonſtratione conſtruit problema. In quodam utiq; uetuſto libro (non enim à multorum abſtinuimus inquiſitione) incidimus in Theoremata ſcripta, quæ quidem ex ptesmatibus obſcuritate magna tenebantur: in figuratione errore multiplici conſtituta, quæſitorum quidem habebant ſuppoſitionem, in parte autem gratam Archimedi linguam doricam ſeruabant, & conſuetis Archeo rerum nominibus erant inſcripta, ubi parabole ſectio rectanguli coni nominata eſt, & hyperbole ſectio coni ambligonij, ita ut ex ipſis intelligatur. Non igitur ipſe fuerit, qui quæ in fine promiſſa ſunt, deſcribi ſit proſecutus. Vnde ſtudioſius incumbentes, ipſum quidem rationale, uti ſcriptum fuit, propter errorum multitudinem, ut ſuprà dictum fuit, difficile inuenientes, ipſam ferè mentem denudantes, communius & apertius quantum fieri potuit dictio, conſcripſimus. Vniuerſaliter autem primũ Theorema ſcribetur, ut quod de eo dictũ eſt, declarẽt circa diffinitiones. Deinde & his quæ in problemate reſoluta ſunt, accommodabuntur.

Recta data a b, item altera a c, & ſpacio d, proponatur in a b ſumendum punctum, puta e, ita ut ſit ſicut a e ad a c, ita ſpacium d ad quadratum e b. Factum ſit, & ponatur a c ipſi a b ad angulos rectos, & iuncta c e producatur in f, et ducatur per c æquediſtans ipſi a b, ipſa c g, & per b ducatur æquediſtans ipſi a c ipſa f b g, cõcurrens cum utraque harum c e, c g, & compleatur g h parallelogrammum. Et per e ducatur k e l, æquediſtans utriuis harũ c h, g f. Et ſit contentum ſub c g, g m æquale ipſi d. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum e b. Sicut autẽ e a ad a c, ita c g ad g f. Sicut autem c g ad g f, ita quadratum c g ad contentum ſub c g, g f. Igitur ſicut quadratum c g ad contentum ſub c g, g f, ita d ad quadratum e b, hoc eſt ad quadratum k f. & permutatim. ſicut quadratum c g ad d, hoc eſt ad contentum ſub c g, g m, ita contentum ſub c g, g f ad quadratum f k. Verum ſicut quadratũ c g ad contentũ ſub c g, g m, ita c g ad g m. Igitur ſicut c g ad g m, ita contentum ſub c g, g f ad quadratũ f k. Verum ſicut c g ad g m, ipſa f g ſumpta cõmuni altitudine, ita contentũ ſub c g, g f, ad contentũ ſub m g, g f. Sicut igitur contentũ ſub c g, g f ad contentũ ſub m g, g f, ita contentũ ſub c g, g f ad quadratum f k. Igitur quadratũ f k, eſt æquale contento ſub m g, g f. Si igitur circa axem f g deſcribatur parabole per g, ita ut ductæ æquediſtantes ipſi c g poſſint ſecundum g m, ipſa ibit per k: & erit poſitione data, cum g m ſit data magnitudine, quæ cum g c data continet datum d. Igitur punctum k aptatur poſitione datæ parabolæ. Deſcribatur igitur uti dictum eſt, & eſto ſicuti g k. Quoniam rurſus ſpacium h l, æquatur

tur ſpacio c b: hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b g. Si per b circa inconcurrentes has h c, c g deſcribatur hyperbole, tranſibit per k ex conuerſo octaui theorematis libri ſecundi Elementorum conorum Apollonij: & erit poſitione data, cum utraq; harũ h c, c g ſit data, amplius quidem, & b poſitione datũ eſt. Deſcribatur ut dictum eſt, & eſto ſicut b k. Igitur k aptatur hyperbolę poſitione datę. Item aptatum eſt parabolæ, poſitione datæ. igitur k datum eſt, & eſt perpendicularis ab ipſo k e ad datam poſitione a b. Igitur e datum. Quoniam igitur ſicut e a ad datam ipſam a c, ita d datum ad quadratum e b. Duorũ igitur ſolidorum, quorũ baſes hæ, quadratũ e b, & d: altitudines uero hæ e a, a c mutua proportione habent baſes cum altitudinibus. quare ſolida æqualia ſunt.

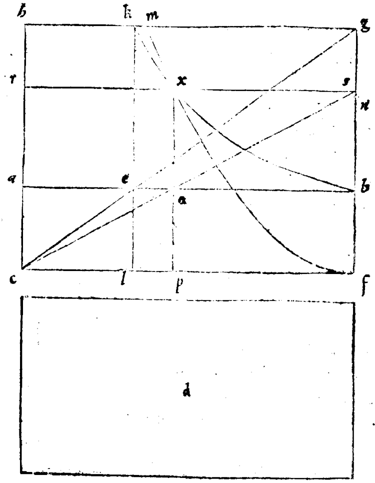


Igitur quadratũ e b ſuper ipſam e a, eſt æquale d dato ſuper ipſam c a. Verum quadratum b e, ſuper ipſam e a, eſt maximum omnium ſimiliter ſumptorum in ipſa b a. quando ipſa b e eſt dupla ipſi e a, uti demonſtrabitur. Oportet igitur datum ſuper datam non maius eſſe quadrato b e ſuper ipſam e a.

Componetur autem ſic. Eſto data recta a b, & alia item data a c. & ſpacium datum d, & opus ſit ſecare ipſam a b, ita ut ſicut una pars habeat ad datam a c, ita datum ſpacium d ad quadratum reliquæ partis. Sumatur ipſius a b tertia pars a e. Igitur d ſuper ipſam a c, aut maius eſt quadrato b e ſuper ipſam e a, aut æquale ei, aut minus eo. Siquidem igitur maius eſt, non componetur, ut in reſolutione oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum e, efficiet problema. nam ubi ſolida ſunt æqualia, baſes altitudinibus habent mutuæ: & erit ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum b e. Si autem minus eſt d ſuper a c, quadrato b e, ſuper e a componetur, hoc pacto. Statuatur a c ad angulos rectos ad ipſam a b, & ducatur per c æquediſtans ipſi a b ipſa c g. Et per b ducatur b f æquediſtans ipſi a c. educatur ad g, & compleatur parallelogrammum f h, & per e ducatur k e l æquediſtans ipſi f g. Quoniam igitur d ſuper ipſam a c minus eſt quadrato e b ſuper ipſam e a: erit ſicut e a ad a c, ita d ad minus quidpiam quadrato e b, hoc eſt quadrato g k. Eſto igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum g m, & ipſi d ſit æquale contentum ſub c f, f n. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d, hoc eſt contentum ſub c f, f n ad quadratum g m. Verum ſicut e a ad a c, ita c f ad f g. Sicut autem c f ad f g, ita quadratum c f ad contentum ſub c f, f g. Ergo quadratum c f, ad contentum ſub c f, f g, ita contentum ſub c f, f n ad quadratum g m: & permutatim, ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita contentum ſub c f, f g, ad quadratum g m. Verum ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita c f ad f n. Sicut autem c f ad f n, f g communi altitudine ſumpta, ita contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g. Sicut igitur contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g, ita contentum ſub c f, f g ad quadratum m g. Igitur quadratum g m æquatur contento ſub g f, f n. Si igitur per f circa axem f g deſcribamus parabolam, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam f n tranſibit per m, deſcripta ſit, & eſto puta m x f. Et quoniam

Ee am

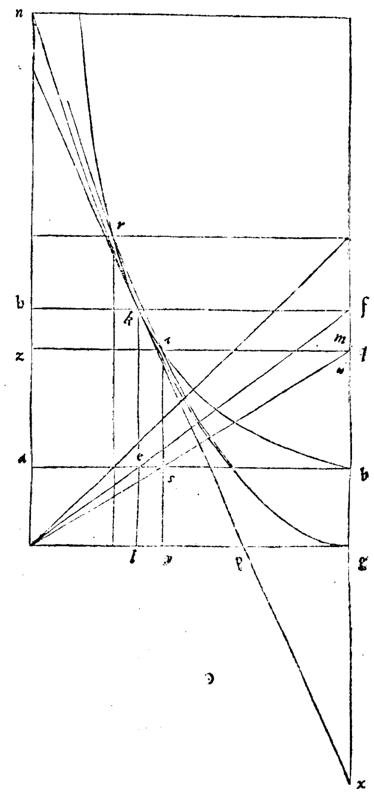
am h l æquatur ipſi a f, hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b f: ſi per b circa incoincidentes h c, c f deſcripſerimus hyperbolem, ipſa tranſibit per k, per conuerſionem octaui theorematis ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Deſcribatur, & eſto puta b k ſecans parabolem puncto x, & ab ipſo x ducatur x o p perpendicularis ad a b, & per x ducatur æquediſtãs ipſi a b, ipſa r x ſ. quoniã itaq; b x k eſt hyperbole, & ipſe h c, c f incoincidentes, & ductæ æquediſtantes r x, x p ipſis a b, b f: contentum ſub r x p eſt æquale cõtento ſub a b, b f. quare r o eſt æquale o f. Si igit̃ ab ipſo c iungatur ad s recta, tranſibit per o. peruenerit, & eſto c o ſ. Quoniam igitur ſicut o a ad a c, ita o b ad b ſ: hoc eſt c f ad f ſ. Sicut autem c f ad f ſ, ita f n cõmuni altitudine ſumpta contentum ſub c f, f n, ad contentum ſub ſ f, f n. Igitur ſicut o a ad a c, ita contentum ſub c f, f n ad contentum ſub ſ f, f n. Sed contentum ſub c f, f n eſt æquale ſpacio d, & cõtento ſub ſ f, f n æquatur quadratum ſ x, hoc eſt quadratum b o, propter parabolam. Vt igit̃ o a ad a c, ita ſpacium d ad quadratum b o. Sumptum eſt igitur punctum o, quo problema perficitur.



Quod autem ipſa b e exiſtẽte dupla ipſius a e, quadratum b e ſuper ipſam e a maximũ ſit omniũ ſimiliũ ſumptorũ ſuper ipſam b a, hoc pacto demonſtrabitur. Eſto enim ſicut in reſolutione rurſus recta data ad angulos rectos ipſa a c ipſi a b, & iuncta c e educatur, & concurrat lineæ æquediſtanti ductæ per b ipſi a c in pũcto f: & per puncta c, f ducantur h f, c g, æquediſtãtes ipſi a b: & producatur c a ad h, & huic ducatur æquediſtans k e l per punctum e, & fiat ſicut e a ad a c, ita contentum ſub c g, g m ad quadratum e b. Igitur quadratum e b ſuper ipſam e a erit æquale contento ſub c g, g m ſuper ipſam a c, eo quod duorum ſolidorum baſes altitudinibus mutuò afficiũtur. Dico igitur, contentum ſub c g, g m ſuper ipſam a c maximũ eſſe omnium ſimilium ſuper ipſam b a ſumptorũ. Deſcribatur enim per g, circa axem f g parabole, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam g m, ipſa tranſibit per k, ſicut in reſolutione oſtenſum eſt, & ipſa educta concurret ipſi h c æquediſtanti diametro ſectionis ex uigeſimoſeptimo theoremate primi libri Apollonij Elementorũ conicorũ. Educatur itaq;, & concurrat in puncto n, & per b circa incoincidentes has n c, c g deſcribatur hyperbole, quæ trãſibit per k, ſicuti in reſolutione dictum eſt. Peruenerit igitur, puta b k, & ipſi f g productæ ponatur g x æqualis, & iungatur x k, & producatur in o. Conſtat igitur, quod cõtingit parabolam ex conuerſione trigeſimi quarti theorematis primi libri Elementorum conicorum Apollonij: quoniam b e dupla eſt ipſius e a. ſic enim ſuppoſitum eſt: hoc eſt ipſa k f ipſius k h, & triangulus o h k ſimilis eſt triangulo x f k, & ipſa x k dupla erit ipſius k o, & eſt ipſa x k dupla ipſius k p: quia ipſa x f dupla ipſius x g. & quia

pg

p g eſt æquediſtans ipſi k f, igitur o k eſt æqualis ipſi k p. Igitur o k p contingens hyperbolem, & coniuncta & collibrata cum incoincidentibus in duo æqua diuiditur. applicatur igitur ipſi hyperbolæ, per conuerſionẽ tertij theorematis ſecundi libri Elementorum conicorũ Appollonij. Applicabatur autem & ipſi parabolæ ſecundum idem k. Igitur parabola applicatur ipſi hyperbolæ in pũcto k. Intelligatur igitur & hyperbole producta, puta ad r, & ſumatur in a b quodlibet punctum ſ, & ducatur per ſ ipſa τ ſ y æquediſtans ipſi k l, & concurrat cum hyperbole in pũcto τ, & ducatur per τ ipſa z τ q æquediſtans ipſi c g. propter hyperbolen igitur & incoincidẽtes, erit z y æquale ipſi c b: ablato c ſ communi, fit z ſ æquale ſ g: & idcirco recta ab ipſo c ad q producta permeabit per ſ. permearit, & ſit puta c ſ q: & quoniam quadratum u q eſt æquale contento ſub q g, g m propter parabolen: quadratum t q minus eſt contento ſub q g, g m. Fiat igitur quadrato t q æquale cõtentum ſub c g, g ω. Quoniã igitur eſt ſicut ſ a ad a c, ita c g ad g q. Item ſicut c g ad g q, ipſa g ω cõmuni altitudine ſumpta, ita cõtentũ ſub c g, g ω ad cõtentum ſub q g, g ω: & ad æquale illi quadratum q t, hoc eſt ipſius b ſ. Cõtentum ergo ſub q g, g ω ſuper ipſam ſ a, eſt æquale contento ſub c g, g ω ſuper ipſam c a. Cõtentum uero ſub c g, g ω ſuper ipſam c a, minus eſt contento ſub c g, g m ſuper ipſam c a. Quadratum igitur b ſ ſuper ipſam ſ a, minus eſt quadrato b e ſuper ipſam e a. Similiter autem oſtendetur in omnibus punctis ſumptis inter puncta, e, a. Verum ſumatur inter puncta e b punctum s. Dico quod & hoc modo quadratũ b e ſuper ipſam e a, maius eſt quadrato b s, ſuper ipſam s a. Eiſdem enim præparatis, ducatur per s ipſa s r æquediſtãs ipſi k l, & concurrat cum hyperbole in R. concurrit enim ei propterea, quod æquediſtans eſt incoincidenti: & ipſa r b ducta æquediſtans ipſi a b per r cõcurrat ipſi f g eductæ in pũcto b. & quoniã rurſus proptet hyperbolem ipſum c h eſt æquale ipſi a g, recta ab ipſo c ad b iuncta permeabit per s. Permearit, et ſit puta c s, b. Et quoniã rurſus propter parobolen quadratũ a b æquatur cõtento ſub b g, g m: erit quadratum r b minus contento ſub b g, g m. Fiat contentum ſub b g,

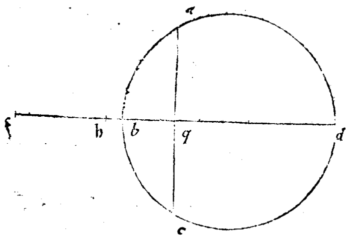


 gω,

g ω æquale quadrato r b. Quoniã igitur eſt ſicut s a ad a c, ita c g ad g b. Verum ſicut c g ad g b, ita communi g ω altitudine ſumpta, contentum ſub c g, g ω ad contentum ſub b g, g ω, hoc eſt ad quadratum r b, hoc eſt ad quadratũ b s. Igitur quadratum b s ſuper ipſam s a, æquatur contento ſub c g, g ω ſuper ipſam c a, & contentum ſub c g, g m maius contento ſub c g, g ω. Igitur quadratum b e ſuper e a maius eſt quadrato b s ſuper s a. Similiter autem oſtendetur in omnibus punctis inter e b puncta ſumptis. Oſtenſum eſt autem & in omnibus ſumptis inter e a, & in omnibus ſumptis inter e b. Omnium igitur in ipſa a b ſimiliter ſumptorum maximum eſt quadratum b e, ſuper ipſam e a, quando ipſa b e dupla ſit ipſius e a.

Cognoſcere aũt eſt opus, & ea quæ ſequuntur ſecundum dictam deſcriptionem. Quoniam enim oſtenſum fuit quadratum b f ſuper f a, & quadratum b s ſuper s a, minus eſſe quadrato b e ſuper e a, fieri poteſt, ut ſpacio dato, quod ſit ſuper datam minus quadrato b e ſuper e a, per duo puncta diuiſa ipſa a b, problema fiat ex principio. Hoc autem fiet, ſi intellexerimus circa diametrum q g deſcriptã parabolam, ita ut deductæ poſſint iuxta ipſam g ω. talis enim parabola tranſit omnino per r. & quoniam neceſſariò ipſam incidit in c n æquediſtãtem diametro, conſtat quod ſecat hyperbolen in alio puncto ſuperiore ipſo k, ſicuti iſtic in τ, & perpendicularis ducta ab ipſo r ad ipſam a b, uti iſtic r s ſecat ipſam a b puncto s, ita ut punctum s faciat problema, & fiat quadratum b s ſuper s a æquale quadrato b s ſuper s a ueluti ex prædictis demonſtrationibus patet. Quare cũ duo puncta poſſint in ipſa b a ſumi quibus perficeretur quæſitũ, licet utrum libuerit cuiqꝫ accipere, aut punctum inter e b, aut quod ſit inter e a. Siquidem enim quod inter e b, ut dictum eſt, parabola deſcripta per puncta g t in duobus punctis ſecante hyperbolen, id quod propinquius fuerit ipſi g, hoc eſt axi parabolæ, inueniet id quod eſt inter e b: ueluti iſtic r inuenit s. id quod remotius eſt, inuenit id quod eſt inter e a, ueluti iſtic ipſum t inuenit ipſum f.

Vniuerſaliter quidem igitur ſic reſolutum eſt, & compoſitum problema. Vt autem & uerbis Archimedis accommodetur, intelligatur ut in ipſa determinati deſcriptione diametros ſphæræ iſta d b, & quæ ex centro iſta b f, & data f h. Deſcendimus igitur in hoc, dixit, Secare ipſam d f ſecundum q, hoc pacto, ut ſicut q f ad datam, ita datum ad quadratum q d. Hoc autem ſimpliciter dictum, habet determinationem. Si enim datum ſuper datam maius fuerit quadrato d b ſuper b f, tunc fieri nõ poteſt problema, uti oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum b faciebat problema, & hoc modo nihil pertinebat ad Archimedis ex principio propoſitionem. Sphæra enim hoc modo non diuideretur in proportionem datam.



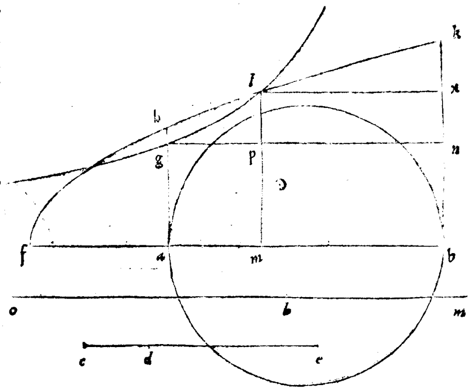
Simpliciter enim dictam habebat determinationem. Additis autem his problematibus iſtic exiſtentibus, ſcilicet duplam eſſe ipſam d b ipſius b f, & hoc, ipſam b f maiorem eſſe ipſa f h, non habet amplius determinationem. nam quadratum d b datum, ſuper f h datam, minus eſt quadrato d b ſuper b f, quia b f maior eſt ipſa f h. quod cum eſſet, oſtendimus tunc poſſe problema, & inde tunc prouenire. Animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt, conſonare his quæ nos reſoluimus. Primum quidem poſt ſuam reſolutionẽ uniuerſaliter id in quod incidit proferens, dixit, Oportet datam d f ſecare, & facere ſicut q f ad

ad datam, ita datum ad quadratum d q. Deinde dicens tanquam uniuerſaliter dictum habeat determinationem: adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam d b duplam eſſe ipſius b f, & ipſam b f maiorem ipſa f h, non amplius habet determinationem magis particularẽ. Reſumit problema, & dicit, quod eſt tale problema hoc: Duabus rectis datis his d b, b f, & ipſa d b dupla ipſius b f, & puncto in b f ipſo h, ſecare ipſam d b pũcto q, non iam ſicut prius ipſam d f dicens, ſed d b oportere diuidi, propter id quod nos ſuprà demonſtrauimus, quod ipſe inſpiciebat duo puncta ſumpta eſſe in d f, quæ facerent problema: unum quidem inter d b, alterum uero inter b f, quorum quod eſt inter d b ad propoſitionem ex principio pertinebat.

Hæc igitur conſentanea uerbis Archimedis, prout potuimus, apertè deſcripſimus. Quoniam autem, ut prędictũ eſt, Dionyſodorus nullo pacto deſcriptis in fine ab Archimede prænunciatis incidens: adnixus autem ad inuenienda, quæ non expoſita eſſent, aliam uiam ingreſſus totius problematis, conſcripſit haud indignum inuentionis modum neceſſarium: quem exiſtimaui oportere iſtis connectere fideliter, quantum potuimus. nam & ipſe nimia hominum negligentia magnam demonſtrationum partem multitudine errorum deletam habens, in omnibus quibus nos incidimus ſcriptis ferebatur.

MODVS DIONYSODORI.

DAtam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones eius habeant inuicem proportionem datam. Eſto data ſphæra, cuius diametros a b, & proportio data quam habeat c d ad d e. Oportet igitur ſphęram plano erecto ad ipſam a b ſecare, ita ut portio cuius uertex a, ad portionem cuius uertex b, habeat proportionem, quam habet c d ad d e. producatur b a in f, & ponatur a f dimidia ipſius a b. & quã proportionem c e habet ad d e, habeat eam f a ad a g, & ſit ipſa a g ad angulos rectos ad ipſam a b, & ſumatur a h media proportionalis iſtarum a f, a g. Igitur a h maior eſt ipſa a g, & circa axem f b per f deſcribatur parabole, ita ut deductæ poſſint iuxta ipſam a g, quæ ibit per h, quoniam contentum ſub f a, a g eſt ęquale quadrato a h. Deſcribatᷣ itaqꝫ, & ſit puta f h k, & per b ducatᷣ k b æquediſtans ipſi a h, & ſecet parabolam pũcto k, & per g circa incoincidentes has f b, b k deſcribatur hyperbole, quæ diuidet parabolen inter h k: ſecet in puncto l, &



ducatur ab l perpendicularis ad a b ipſa l m: & per puncta g, l ducantur ipſi a b æquediſtantes g n, l x. Quoniam igitur ipſa g l eſt hyperbole, & incoincidentes iſtę a b, b k, et æquediſtantes ipſis a g, g n, iſtæ m l, l x, erit contentũ ſub a g, g n æquale contento ſub m l, l x, ex octauo theoremate libri ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Verum ipſa g n eſt æqualis ipſi a b, & ipſa l x ipſi m b. Contentum igitur ſub l m, m b, eſt æquale contento ſub g a, a b. Et quia contentum

 ſub

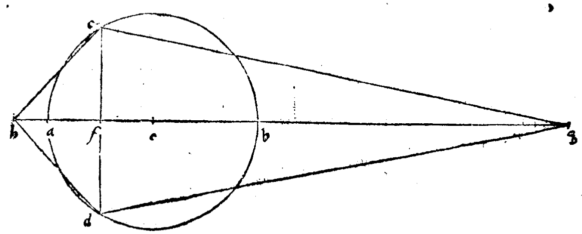
ſub extremis æquatur contento ſub medijs, quatuor rectæ proportionales ſunt. Erit igitur ſicut quadratum l m ad quadratū g a, ita quadratum a b ad quadratum b m. Et quoniam propter parabolen quadratum l m æquatur contento ſub fm, a g. erit ergo ſicut f m ad m l, ita m l ad a g. Sicut ergo prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, & quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ. Sicut ergo f m ad a g, ita quadratum l m ad quadratum g a. Verum ſicut quadratum l m ad quadratum a g, ita oſtenſum eſt quadratum a b ad quadratū b m. Igitur ſicut quadratum a b ad quadratum b m, ita f m ad a g. Verum ſicut quadratum a b ad quadratum b m, ita circulus cuius quæ ex centro eſt ęqualis ipſi a b ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m. & ſicut circulus cuius quæ ex centro eſt ęqualis ipſi a b, ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, ita f m ad a g. Conus ergo baſem habens circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi a b, altitudinem uero ipſi a g, æqualis eſt cono habenti baſem circulum, cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi b m, altitudinem uero ipſi f m. Nam coni quorum baſes contrario altitudinibus afficiūtur, ſunt æquales. Verum conus habens baſem circulum cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi a b, altitudo autem ipſi f a, ad conum baſim habentem eandem, & altitudinem ipſam a g, ſe habet ſicut f a ad a g, hoc eſt c d ad e d. Quoniam enim baſes eaſdem habent, ad inuicem ſe habebunt ſicut altitudines eorum. Conus igitur baſim habens circulum, cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi a b, altitudinem uero æqualem ipſi f a, ad conum habentē baſem circulum cuius quæ ex centro æquatur ipſi b m, altitudinem uero ipſam f m, eſt ſicut c e ad e d. Verum conus habens baſem circulum cuius quæ ex centro æqualis eſt a b, altitudinem uero ipſam f a, eſt æqualis ſphæræ: & conus baſim habens circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, altitudinem uero f m, eſt æqualis portioni ſphæræ cuius uertex eſt b: altitudo uero b m, ſicuti deinceps oſtendetur. igitur ſphęra habet ad dictā portionem, eam proportionē, quam habet c e ad e d. & diuidenti portio cuius uertex eſt a, altitudo autem a m, ad portionem cuius uertex eſt b, altitudo uero b m, eam habet proportionem, quam c d ad d e. Planum igitur perductum per ipſam l m erectum ad a b ſecat ſphæram in proportionem datam: quod erat faciendum.

Quod autem conus baſem habens circulum, cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, altitudinem uero ipſam f m, æquatur portioni ſphæræ cuius uertex b, et altitudo m b, hoc pacto demōſtrabitur. Fiat enim ſicut f m ad m a, ita o m ad m b. Igitur conus baſem habens eandem cum portione, altitudinem uero ipſam o m, æquatur portioni. Et quoniam ſicut f m ad m a, ita o m ad m b. & permutatim, ſicut f m ad m o, ita a m ad m b. Verum ſicut a m ad m b, ita quadratum p m ad quadratum m b: & ita circulus cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi p m, ad circulū cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi m b. Sicut igitur circulus cuius quæ ex cētro eſt æqualis p m, ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, ita m f ad m o. Sic igitur conus baſem habens circulum, cuius quæ ex cētro æqualis eſt ipſi m b, altitudinem uero ipſam m f, æquatur cono habenti baſim circulum, cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi p m, altitudinem uero ipſam m o. nam baſes eorum altitudinibus contrario afficiuntur. quare & portioni eſt æqualis.

MODVS DIOCLIS.

SCribit autem & Diocles in libro de Pirijs, primum hæc dicēs: In libro de ſphæra & cylindro Archimedes demonſtrauit, quod omnis ſphæræ portio æquatur cono baſem habenti eandem cum portione, altitudinem uero rectam quandā habentem proportionem ad perpendicularem ductam à uertice ipſius portionis ad baſem, quā utraq; ſimul ea quæ ex centro, & quæ permutatim habetur, ad portionem perpendicularis, ad perpendicularem permutatæ portionis. Vt ſi ſphæra ſit a b c, & ſecetur plano quodam circulo circa diametrum c d conſtituto, & diametro

tro a b, exiſtente centro e: & fecerimus ſicuti utraq; ſimul e a, f a ad f a, ita g f ad f b. Item ſicut utraque ſimul e b, b f ad f b, ita h f ad f a. Oſtenſum eſt portionem c b d ſphæræ, æqualem eſſe cono, cuius baſis quidem circulus circa diametrum c d con



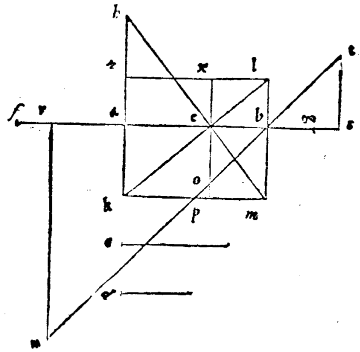
ſtitutus, altitudo uero ipſa f g. Et portionem c a d æqualem eſſe cono habenti eādem baſem, altitudinem uero h f.

Propoſito itaq; ſibi hoc, datam ſphæram plano ſecare, ita ut portiones ſphæræ ad inuicem habeant proportionem datam, cōſtruens ea quæ ſunt dicta, ait: Proportio igitur data eſt coni baſis, cuius eſt circulus circa diametrum c d, altitudo uero ipſa f h, ad conum cuius baſis eſt eadem, altitudo uero ipſa f g. Etenim hoc demonſtratum eſt: coni, qui in eadem baſe conſiſtunt ad inuicem ſe habent ſicut eorum altitudines: igitur proportio h f ad f g data. & quia eſt ſicut h f ad f a, ita utraq; ſimul e b, b f ad f b: diuidēti, ſicut h a ad a f, ita e b ad f b. Eadem ratione ſicut g b ad f b, ita ipſa eadem recta ad ipſam f a. Factū eſt igitur problema tale: Recta a b poſitione data, & duobus punctis a b datis, & data e b, ſecare ipſam a b pūcto f, & adijcere has h a, b g, ita ut portio h f ad f g ſit data. Item ſicut h a ad a f, ita data recta ad ipſam f b. Sicut autem g b ad b f, ita ipſa data recta ad ipſam f a. Hoc autem deinceps eſt demonſtratum. Archimedes enim longius hoc oſtendens, & ſic in alterum problema abigit, quod nō demonſtrat in libro de ſphæra & cylindro.

Recta a b poſitione data, & duobus punctis a b datis, & proportione quā habet ipſa c ad ipſam d, diuidere ipſam a b pūcto e, & adijcere ei has f a, g b, ita ut ſit ſicut c ad d, ita f e ad e g. Item ſit ſicut f a ad a e, ita quędam recta data ad b e: & ſicut g b ad b e, ita eadem recta data ad e a factum ſit. et ipſi a b ad angulos rectos addātur h a k, l b m, & ipſi rectæ datæ ponatur utraq; æqualis a k, b m, & iunctæ hæ k e, e m educantur ad l, h. Iungatur autem & k m, & ducatur per l ipſa l n æquediſtans ipſi a b, & per e ducatur x e o p, æquediſtans ipſi n k. Quoniam igitur eſt ſicut f a ad a e, ita m b ad b e, hoc enim ſupponitur. ſicut autem m b ad b e, ita h a ad a e, propter ſimilitudinem triangulorū. Sicut ergo f a ad a e, ita h a ad a e. Igitur f a eſt æqualis ipſi h a: eadem ratione & b g ipſi b l. Et quoniam eſt ſicut utraq; ſimul h a, a e, ad utrāq; ſimul m b, b e, ita utraq; ſimul k a, a e, ad utramq; ſimul l b, b e. utraque enim earum proportionum eadem eſt ei quę eſt a e ad e b. Contentum igitur ſub utraq; ſimul h a, a e, & ſub utraq; ſimul l b, e b, æquatur contento ſub utraque ſimul k a, a e: & utraq; ſimul m b, b e. Ponatur ipſi k a æqualis harū utraq; a r, b ſ. Quoniam igitur utraque ſimul h a, a e, æqualis eſt ipſi f e: utraq; autem ſimul l b, b e æqualis ipſi e g: & utraq; ſimul k a, a e æqualis ipſi r e: & utraq; ſimul m b, b e æqualis ipſi ſ e. Et oſtenſum eſt, contentum ſub utraq; ſimul h a, a e, & utraque ſimul l b, b e, eſſe æquale contento ſub utraq; ſimul k a, a e, & utraq; ſimul m b, b e. Contentum igitur ſub f e, e g æquatur contento ſub r e, e ſ. Propter hoc quando

r ea.

r cadit inter a f, tunc s exterius ipso g cadet, & ecõuerso. Quoniam igitur sicut c ad
d, ita f e ad e g. Sicut autem f e ad e g, ita contentum sub f e, e g ad quadratum e g.
Sicut ergo c ad d, ita contentum sub f e, e g ad quadratum e g. Contentum autem
sub f e, e g ostensum est esse æ-
quale sub r e, e s. Est igitur si-
cut c ad d, ita contentum sub
r e e s ad quadratum e g. Pona
tur ipsi b e æqualis ipsa e o, &
iuncta b o educatur utrinque,
& à punctis s, r ductæ ad angu
los rectos hæ s t, r y concur-
rant ei in pũctis y t. Quoniam
igitur per b datum, ad positio-
ne datam a b ducta est t y, faci-
ens angulum datũ hunc e b o
dimidium recti, ipsa t y erit po-
sitione data. Et à datis r s posi-
tione, hæ r y, t s ductæ secant eã
punctis t y. Igitur & puncta t,
y data. quare et ipsa t y data, po



sitione & magnitudine. & quia propter similitudinem triangulorum e o b, s t y
est, sicut t b ad b o, ita s b ad b e: & cõponenti, sicut t o ad o b, ita s e ad e b. Verum
sicut b o ad o y, ita b e ad e r. Igitur per æquam sicut t o ad o y, ita s e ad e r. Verum
sicut t o ad o y, & s e ad e r, ita contentum sub t o y, ad quadratum o y. Sicut au-
tem s e ad e r, ita contentum sub s e, e r ad quadratum e r. Sicut ergo contentum
sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub e s, e r, ad quadratum e r. Et sicut
ergo contentum sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub s e, e r, ad qua-
dratum e r. Et permutatim, sicut contentum sub t o, o y ad contentum sub s e, e r,
ita quadratum o y, ad quadratum e r. Quadratum autem o y duplum est quadra
to e r. quandoquidem & quadratum o b duplum ad quadratum b e. Igitur con-
tentum sub t o, o y, duplum est contento sub s e, e r. Contentum autem sub s e, e r
ostensum est habere ad quadratum e g eam proportionem, quam habet ipsa c ad
ipsam d. Et quadratum e g æquatur quadrato x o. nam utraq; e g, x o est æqualis
utriq; simul l b, b e. Igitur contentum sub t o, o y habet ad quadratum x o eã pro-
portionem, quam habet dupla ipsius c ad ipsam d. Proportio autem duplæ ipsius
c ad ipsam d data est. Igitur contenti sub t o, o y, ad quadratum x o proportio da-
ta. Si igitur fecerimus sicut d ad duplam ipsius c, ita t y ad aliam quãdam, puta u.
& circa ipsam t y describamus ellipsim, id est sectionẽ coni acutiãguli, ita ut dedu
ctæ in angulo sub x o b, hoc est in dimidio recti possint ea quæ iuxta u deficien-
tia, simili contento sub t y, & u transibit per x per conuersionem uigesimi theore-
matis primi libri Elementorũ conicorum Apollonij. describatur, & sit puta y x t.
Punctum igitur x applicatur ellipsi positione datæ. Et quoniam ipsa l k est dra-
gonialis ipsius n m, parallelogrammum erit contentum sub n x p æquale conten
to sub a b, b m. Si igitur per b circa incoincidentes has h k, k m descripserimus hy-
perbolen, ipsa transibit per x, & erit positione data, quia b punctum positione da
tum est. & utraq; harum a b, b m. Et quia hæ h k m incoincidentes descriptę sunt,
& esto puta x b. igitur punctum x aptatur hyperbolæ positione datæ. Aptabatur
autem & ellipsi positione datæ. Igitur punctum x datum, & perpendicularis ab
ipso x e. igitur e datum. Et quoniam est sicut m b ad b e, ita f a ad a e. & a e data est:
igitur a f data, & eadem ratione ipsa g b data.

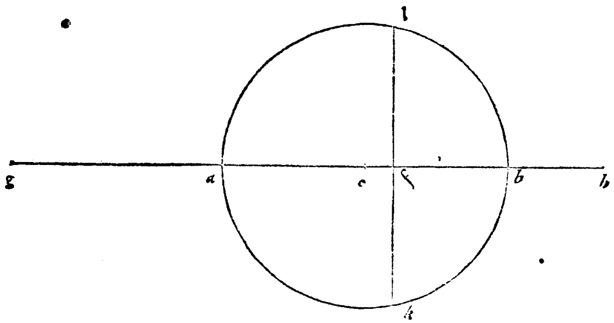
Componitur autem hoc modo. Sicut enim in eadem descriptione, esto data re
cta

cta a b, quam oporteat diuidere, et altera data a k: proportio data sit c ad d. ducatur
ipsi a b ad angulos rectos ipsa b m, æqualis ipsi a k: & iungatur k m, & ponatur u-
traq; a r, b s æqualis ipsi k a. à punctis r s ducantur ad angulos rectos hæ r y, s t. Et
ad punctum b constituatur dimidium recti anguli sub a b o, & educta b o in u-
trãq; partẽ, diuidat ipsas s t, r y, punctis t y: & fiat sicut d ad duplã ipsius c, ita t y ad
ipsam u. & circa t y describatᷣ ellipsis, ita ut eductæ in dimidio recti possint ea quæ
adiaceant ipsi u deficientia simili contento sub t y, & u. Et per b circa incoinciden
tes has a b, k m describatur hyperbole b x, secans ellipsim in x: & ducatur ab x per
pendicularis x e ad ipsam a b, & educatur in p, & per x ducatur æquedistans ipsi
a b ipsa l x n, & educantur k a, m b ad l, h: & ipsa m e iuncta, educatur & concur-
rat ipsi k n in h. Quoniam igitur b x est hyperbole, & incoincidentes hæ h k, k m,
contentum sub n x, x p æquatur contento sub a b, b m, per octauum theorema se-
cundi libri Elementorum conicorum Apollonij. Idcirco ipsa k e l recta est. Ponatᷣ
itaq; a f æqualis ipsi h a, & ipsa b g ipsi l b. Quoniã igitᷣ est sicut dupla ipsius c ad ip
sam d, ita ipsa u ad t y. Sicut autem ipsa u ad t y, ita contentum sub t o, o y ad qua-
dratum x o, per uigesimum theorema primi libri Elementorũ conicorum Apollo
nij. Et ideo sicut dupla ipsius c ad ipsam d, ita cõtentũ sub t o, o y, ad quadratũ x o.
Et quoniam est sicut t b ad b o, ita s b ad b e: & componenti, sicut t o ad o b, ita s e
ad e b. Verum sicut b o ad o y, ita b e ad e r. Per æquam igitur, sicut t o ad o y, ita s e
ad e r. Sicut ergo contentum sub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum sub s e,
r e ad quadratum e r: & permutatim, sicut contentum sub t o, o y ad contentũ sub
s e, e r, ita quadratum o y ad quadratum e r. Verum quadratum o y ad quadratum
e r duplum est, quia & quadratum b o ad quadratum b e. nam b e æqualis est ipsi
e o, quia uterq; angulorum ad b & o est dimidium recti. Igitur cõtentum sub t o,
o y duplum est contento sub s e, e r. Quoniam igitur ostensum est, sicut dupla ip-
sius c ad ipsam d, ita contentum sub t o, o y, ad quadratum x o, & antecedentium
dimidia. Sicut ergo c ad d, ita contentũ sub r e, e s, ad quadratũ x o, & ad quadratũ
e g, cum x o æqualis sit ipsi e g, quia utraq; earum est æqualis utriq; simul l b, b e.
Quoniam igitur est sicut utraq; simul h a, a e, ad utramq; simul m b, b e: sic utraq;
simul k a, a e, ad utramq; simul l b, b e. Vtraq; enim earum proportionum est ea-
dem proportioni a e ad e b. Contentum igitur sub utraq; simul h a, a f, & utraque
simul l b, b e æquatur contento sub utraq; simul k a, a e, & utraq; simul m b, b e.
Verum utriq; simul h a, a e æqualis est ipsa f e: & utriq; simul l b, b e æqualis est ip
sa e g. utriq; simul k a, a e æqualis est ipsa r e: utriq; simul m b, b e æqualis est ipsa
e s. Contentum igitur sub f e, e g æquatur contento sub r e, e s. Verum sicut c ad
d, ita contentum sub r e, e s ad quadratum e g. Et sicut c ad d, ita contentum sub
f e, e g, ad quadratum e g. Verum sicut contentum sub f e, e g ad quadratum e g,
ita f e ad e g, & ideo sicut c ad d, ita f e ad e g. Et quoniam est sicut m b ad b e, ita
h a ad a e, & h a æquatur ipsi f a. Sicut ergo m b ad b e, ita f a ad a e. eadem ratione
sicut k a ad a e, ita g b ad b e. Recta igitur data ipsa a b, & altera itẽ data k a, & pro-
portione c ad d, sumptum est in ipsa a b quoddam punctum, puta e, & adiectæ re
ctæ hæ f a, g b: & factą est f e ad e g in data proportione. Item sicut data m b ad b e,
ita f a ad a e. Sicut autem ipsa k a data ad a e, ita g b ad b e: quod fuerat faciendum.

His igitur ita demonstratis, potest data sphæra secari in proportionem datam,
hoc modo. Esto enim datæ sphæræ diametros a b, proportio autem quam o-
pus sit partes sphæræ inter se habere, sit c ad d, centrum sphæræ sit c: & sumatur
in a b punctum f, & adijciantur g a, h b, ita ut sicut c ad d, ita sit g f ad f h. Item ut sit
sicut g a ad a f, ita e b data ad b f. ut autem h b ad b f, ita eadem data e a ad a f. Hoc
autem quo pacto fieri possit, prius demonstratum est. & per ipsum f ducatur k f l
ad angulos rectos ipsi a b, & per k l planum perductum erectum ad ipsam a b se-
cet ipsam sphæram. Dico itaq; eas sphęræ portiones habere inuicem proportio-

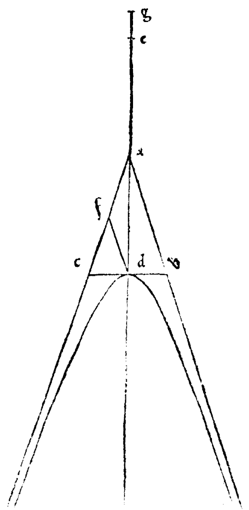
 nem

nem quæ est c ad d. quoniam enim est sicut g a ad a f, ita e b ad b f. componenti, sicut f g ad f a, ita utraque simul e b, b f, ad b f. Conus igitur basem habēs circulum circa diametrum k l, & altitudinem f g, æquatur portioni sphæræ basem eandem



habenti, altitudinem autem f a. Rursus quoniam sicut h b ad b f, ita e a ad a f. & componenti, sicut h f ad b f, ita utraqꝫ simul e a, a f ad a f. Igitur conus basem habens circulum circa diametrum k, altitudinem ipsam f h, æquatur portioni sphæræ eandem basem habenti, & altitudinem ipsam b f. Quoniam igitur dicti coni eadem in base constantes, habentur inuicem sicut eorum altitudines, hoc est sicut h f ad f g, hoc est c ad d. Portiones igitur sphæræ inuicem habent proportionem datam, quod initiò fuerat faciendum.

Quo autem pacto per punctum datum describi circa datas incoincidentes hyperbole debeat, hoc modo ostendemus: quoniā non inde ponitur in conicis Elementis. Sint duæ rectæ c a, a b complexæ quemcunqꝫ angulum ad a, & detur punctum quoddam puta d, & proponatur per d circa incoincidentes has c a, a b describere hyperbolen. iungatur a d, & ducatur a d e, & ponatur ipsa d a ęqualis ipsi a e, & educatur per d ipsa d f æquedistans ipsi a b, & ponatur f c æqualis ipsi a f, & iungatᷣ c d, & educatur ad b: & quadratū c b sit æquale contento sub d e, e g: & educta a d circa eam describatᷣ hyperbole per d, ita ut deductæ possint ea quæ iuxta e g addētia simile cōtento sub d e, e g. Dico quod hyperbolæ descriptæ sūt incoincidētes c a, a b. Quoniā eēm d f est æquedistās ipsi b a, & ipsa c f æqualis ipsi f a: igitᷣ c d est ęqualis ipsi d b. Igitᷣ quadratū c b quadruplū est quadrato d c, & quadratū c b æquatᷣ contento sub d e, e g. Igitᷣ hæ c a, a b sunt incoincidentes ipsi hyperbolæ, per primum theorema secūdi libri Elementorum conicorum Apollonij.



IN COMPOSITIONEM QVARTI.

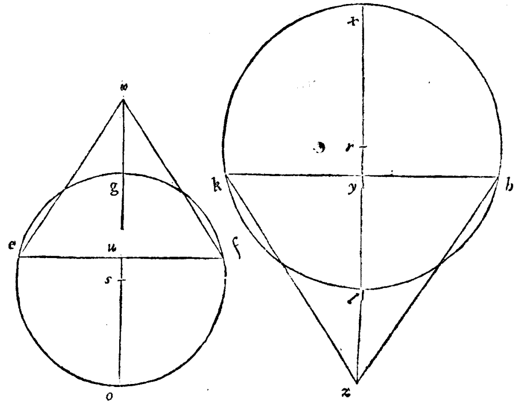
IN compositione autem producens diametrū sphæræ ipsam d b, & ponens dimidium eius æquale ipsi b f, & diuidens eam in datam proportionem puncto h, & in d b sumens

mens q, ita ut sit sicut q f ad h f, ita quadratum b d ad quadratum d q, & eadem apparans quæ prius dicit, quod fiat sicut utraqꝫ simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, & ponit ipsum r inter h f. Quod autem hoc sic habeatur, est ostendendum. Quoniam enim sicut utraque simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, diuidenti erit k d ad d q, sicut r b ad q b. Et permutatim, sicut k d ad r b, ita d q ad q b. Verum d q maior est ipsa q b. igitur k b maior r b, hoc est f b ipsa b r: quare punctum r inter ipsum b & f cadet. Quod autem & extra h, similiter ostendetur eis quæ in resolutione præcesserunt, in tota theorematis compositione. Colligitur enim, quod est sicut r q ad q l, ita f h ad h b. Quare componenti, & propterea fit consequens supradictis, & his quæ sunt istic dicta demonstratio.

Et per æquam in proportionalitate perturbata, &c. Perturbatā proportionalitatem in Elementis didicimus, quando tribus magnitudinibus, & alijs numero totidem sit, sicut antecedens ad consequens in primis magnitudinibus, ita in secundis antecedens ad consequens. Sicut autem consequens ad aliud quoddam in primis, ita in secundis aliud quoddam ad antecedens. & istic igitur ostensum est, sicut antecedens r l ad consequens l d, ita antecedens q f ad consequens f h. Sicut autem consequens l d ad aliud quoddam d q, ita aliud quoddam a f ad antecedens q f. Sequitur igitur, ut ostensum est per æquam in quinto Elementorum, sicut r l ad l q, ita b f ad f h.

IN QVINTO.

ET quoniam portio e f g est similis portioni h k l, conus igitur e f o similis est cono z h k. Intelligātur enim descriptiones seorsum positæ, & iunctæ e g, g f, e o, o f, h l, l k, h x, x k. Quoniam igitur portiones e f g, h k l similes sunt inter se, erūt anguli e g f, h l k æquales: quare & eorum dimidia. & recti sunt hi, qui ad u, y. Igitur reliquus reliquo æqualis. igitur triangulus g u f est æquiangulus triangulo l y k. & est sicut g u ad u f, ita l y ad y k. Eadem ratione cum trianguli u f o, y k x sint inuicem æquianguli, erit sicut f u ad k y, ita f o ad k x, & u o ad y x. per æquam igitur sicut g u ad u o, ita l y ad y x. & cōponēti, sicut g o ad o u, ita l x ad x y. & antecedentiū dimidia sūt s o, & r x. quare per ęquam. et cōponenti, sicut utraqꝫ simul s o, o u, ad o u, hoc est ω u ad u g: sic utraqꝫ simul r x, x y ad x y, hoc est z y ad y l. Verum sicut g u ad u f, ita l y ad y k. per æquam ergo, sicut ω u ad u f, ita z y ad y k: & consequentium dupla sunt e f, & h k. Sicut ergo ω u ad f e, ita z y ad h k. Conorum igitur ω e f, z h k axes sunt proportionales, et diametri basium. igitur coni sunt similes, quod fuerat demonstrandum.



Proportio autem ω u ad e f data. Quoniam enim portiones sphærarum datæ sunt, & diametri basium datæ, & altitudines portionum. quare e f data, & g u. Igitur

tur eorum dimidia data erunt: quare & quadrata earum, & quadratum e u æquatur contento sub g u, u o. Si autem datum iuxta datam applicetur, facit latitudinē datam. igitur u o data. Verum & u g, igitur tota diameter os sphæræ data: idcirco & eius dimidia s o data. uerum & o u data: igitur proportio s o ad o u data. & cōponenti utriusq; simul s o, o u ad ipsam o u, proportio data, hoc est ω u ad u g, & ipsa u g data. igitur & ω u data. Verum & e f data. quare & proportio ω u ad e f data. Eadem autem utiq; dicerentur in portione a b c, & colligetur proportio q t ad a b data. Et quia a b data est, igitur & q t data.

Quod autem si portiones datæ sunt, earum altitudines sint datæ, antea quidē constat. Verum ut hoc quoque coordinationi datorum consequenter colligi uideatur, dicetur. Quoniam enim portiones sunt datæ positione & magnitudine, & e f data, erit angulus in portione datus. Quare & eius dimidium. & si intelligamus iunctam e g, dato eo qui ad u recto, erit reliquus datus, & triangulus e g u datus specie. quare & proportio e u ad u g data erit. & e u data est, cum sit ipsius e f dimidia, igitur u g data. Licet autem & aliter dicere. quoniā e f est positione data, & a puncto u dato cum sit in duo æqua diuidens e f, educta est u g ad angulos rectos ipsi positione datæ, & circumferentia portionis positione data. Igitur g datū est. Erat autem & u datum. quare & ipsa u g data.

Quoniam est sicut z y ad q t, hoc est quadratum b a ad quadratum h k, ita k h ad ipsam d. Quoniam enim factum fuit, sicut z y ad h k, ita q t ad d: erit permutatim sicut z y ad q t, ita h k ad d. Verum sicut z y ad q t, ita quadratum a b ad quadratū h k. Conis enim existentibus æqualibus, bases eorum altitudinibus ecōtrario afficiunt. Sicut aūt bases ad inuicē, ita quadrata diametrorū. Sicut ergo quadratum b a ad quadratū h k, ita h k ad d. Et permutatim, sicut a b ad h k, ita ϑ ad d. Quandoquidem proportio b a ad ϑ, ostensa est eadem proportioni quadrati a b ad quadratum h k, et item k h ad d, et b a ad ϑ, eadem est proportioni k h ad d. Quare permutatim, sicut b a ad h k, ita ϑ ad d.

IN COMPOSITIONEM QVINTI.

Quoniam itaq; proportionales sunt a b, h k ϑ d. erit sicut quadratum a b ad quadratum h k, ita h k ad d. Vniuersaliter enim si sint quatuor rectæ continuē proportionales, erit quadratum primę ad quadratum secundæ, sicut secunda ad quartam. Quoniam enim sicut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, erit permutatim sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secūdæ. igitur sicut quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita secunda ad quartam.

IN SEXTVM THEOREMA.

Quoniam k l m portio similis est portioni a b c, erit sicut r l ad r n, ita b p ad p h. Si enim iungantur hæ m n, c h, quoniam portiones sunt similes, erunt anguli ad b & l æquales: & anguli ad m c sunt recti, igitur reliquus reliquo, & trianguli sunt æquianguli, & est sicut b h ad h c, ita l n ad n m. Verum sicut h c ad h p, ita n m ad n r, propter similitudinem triangulorum c p h, & m r n. per æquam igitur, sicut b h ad h p, ita l n ad n r. quare diuidenti, sicut l p ad p h, ita l r ad r n.

Proportio autem e f ad b c data, igitur utraq; earum data. Quoniam enim portiones sphærarum datæ sunt, & diametri basium datæ sunt, & altitudines portionum. quare ipsa a c data est, & eius dimidia p c data erit. & b p data est, & ambiunt angulum rectum: igitur b c data. Eadem ratione & e f data. quare & proportio b c ad e f data.

IN COMPOSITIONEM SEXTI.

Portiones ergo circulorum quæ in k m, a c insistunt, similes existunt. Si enim sicut in resolutione, iungantur hæc c h, m n, quia anguli ad c m sunt recti: & c p, & m r sunt perpendiculares: erunt mediæ proportionales inter partes basium. quare erit sicut prima b p ad tertiam p h, ita quadratū primæ b p ad quadratum secundæ c p. Eadem ratione sicut l r ad r n, ita quadratum l r ad quadratū r m. Sicut ergo b p ad p c, ita l r ad r m, & latera circa angulos æquales sunt proportionalia: igitur trianguli æquianguli. igitur anguli ad b l sunt æquales: & eorum dupli, qui sunt in portionibus. igitur portiones sunt similes.

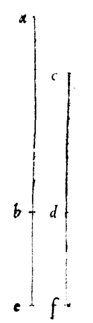
IN SEPTIMVM THEOREMA.

Proportio igitur utriusque simul e d, d f ad d f data. Quoniam enim proportio utriusq; simul e d, d f ad d f est data, si magnitudo data habeat ad aliquam sui partem proportionem datam, & ad reliquam habebit proportionem datam: quare utraq; simul e d, d f ad e d habet proportionem datam. Quoniam igitur utraque e d, d f ad utramq; simul e d, d f, habent proportionem datam, habebunt etiam inter se proportionem datam. Proportio igitur data e d ad d f, & e d data. quare reliqua f e dabitur. Quare & contentum sub d f, f b, hoc est quadratum a f. & ideo a f data erit. quare & tota ipsa a c. Aliter autem, dixeris ipsam a c datam esse. Quoniam enim diametros data est d b positione, & punctum f datum, ut petitū est: & a dato f ducta est a c ad angulos rectos, erit ipsa a c positione data. uerum & circuli circumferentia: quare ipsa a c puncta data, & ipsa a f c data est.

Et quoniam utraque simul e d, d f ad d f maiorem proportionem habet, quàm utraq; simul e d, d b ad d b. Quoniam enim e d maior est q̄ dimidia ipsius d f, erit utraque simul e d, d f, maior quàm sesquialtera ipsius d f. Verum utraque simul e d, d b est ipsius d b sesquialtera: igitur e d, d f ad ipsam d f maiorem proportionē habet, quàm e d, d b ad d b. Aut aliter, quoniam ipsa d b est maior ipsa d f, alia autem quædam e d: igitur e d habet ad d f maiorem proportionem, quàm e d ad d b. componenti utraq; simul e d, d f ad d f, habet maiorem proportionem, q̄ utraq; simul e d, d b ad d b. Cōpositio theorematis manifesta est per ea quę istic dicta sunt.

IN OCTAVVM THEOREMA.

Ipsa h f ad ipsam f g minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quā habet quadratum b a ad quadratum a d: hoc est ipsa b f ad f d. Quoniam enim in triangulo rectangulo ducta est ab angulo recto a f perpendicularis, cum trianguli ad perpendicularem similes existant, erit sicut f b ad b a, ita a b ad b d. Et sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, & quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, uti superius ostensum fuit. Sicut ergo f b ad b d, ita quadratum a b ad quadratum b d. Verum sicut b d ad d f, ita quadratum b d ad quadratum d a. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratū secundæ. Et per æquam sicut quadratum b a ad quadratū d a, ita b f ad f d. Colligetur autem idem & aliter hoc modo. Quoniam enim sicut b f ad f d, ita cōtentum sub f b, b d ad contentum sub b d, d f, ipsa b d cōmuni altitudine sumpta. Est autem contentum sub f b, b d æquale quadrato b a. Cōtento autem sub b d, d f ęquatur quadratum d a. Sicut ergo quadratum b a ad quadratum a d, ita b f ad f d. Et quoniam h f habet ad f k minorem proportionē, quàm h b ad b k. Vniuersaliter enim si sint duæ magnitudines inæquales, quibus aliæ æquales addantur, maior habet ad minorem maiorem proportionem, quàm compositum ad compositum. Sunt enim duæ rectæ inęquales a b, c d: quibus addantur b e, d f æquales. Dico quod a b ad c d maiorem proportionem habet, quàm a e ad c f. Quoniam enim maior est a b ipsa c d, a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm c d ad b e, hoc est ad d f. Igitur & componenti, a e ad e b maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, ex prædemonstratis.

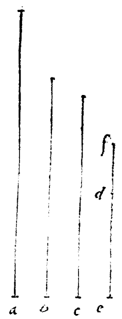


& euersim, a e ad a b minorem, q̄ c f ad c d. quare permutatim constabit res ipsa.

Contentum igitur ſub h f, f g minus eſt quadrato f k. Si enim ſint tres rectæ continuæ, ſicuti hæ a b c, ita ut a habeat ad b minorem proportionem, quàm b ad c, contentum ſub extremis minus erit quadrato mediæ. Si enim fecerimus ſicut a ad b, ita b ad quandam aliam, ipſa erit maior ipſa c, ſiquidem debeat ad eam habere minorẽ proportionem, quàm c: & tunc erit cõtentum ſub a, & ſub maiore ipſa c, æquale quadrato k. quare contentũ ſub a c minus eſt quadrato b.

Contentum igitur ſub h f, f g ad quadratum f g, minorem proportionem habet, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Sicut enim h f ad f g, ita contentum ſub h f, f g ad quadratum f g. Contentum autem ſub h f, f g, quadrato f g minus eſt: maius autem ad idem maiorem habet proportionem, quàm minus.

Et quoniam b e eſt æqualis ipſi d e, erit igitur contentum ſub b f, f d minus contento ſub b e, e d. contentum autem ſub b e, e d æquatur quadrato e d. contentum autem ſub b f, f d, cum quadrato e f, æquatur eidem. Et cõſtat, quod quanto abſuit à bipertitione ipſum f maiori minus eſt, contento ſub æqualibus. Cum maiore enim eo quod fit ab intermedia diuiſionum, æquatur cõtento ſub æqualibus. quare recta, & ſi per ęqualia diuidatur, per pũctum aliud atq; aliud, contentum ſub partibus propinquioribus bipertitioni, maius eſt cõtento ſub partibus remotioribus. Igitur f b ad b e minorẽ proportionem habet, quàm e d ad d f. Vniuerſaliter autem ſi ſint quatuor termini, puta a b, b c, c d, d e: et contentũ ſub a b, d e minus ſit cõtento ſub b c, c d. tunc a b ad b c habet minorem proportionem, quàm c d ad d e. Eſto enim contentum ſub b c, c d, æquale contẽto ſub a b, d f. Eſt igitur ſicut a b ad b c, ita c d ad d f: & d f eſt maior d e: igitur c d habet ad d e maiorem proportionem, quàm ad d f. Quare a b habet ad b c minorem proportionem, quàm c d ad d e.



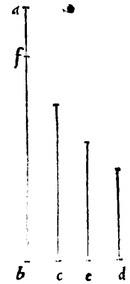
Eſt igitur ſicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k. Quoniam enim quadratum b n æquatur cõtento ſub h b, b k. erũt tres rectæ proportionales, ſicut h b ad b n, ita b n ad b k. & ſicut prima h b ad tertiam b k, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, hoc eſt quadratum b n ad quadratum b k, uti ſuperius demonſtratũ fuit. Rurſus quoniam eſt ſicut h b ad b n, ita b n ad b k. Componenti, ſicut h n ad b n, ita k n ad b k: & permutatim, ſicut h n ad n k, ita b n ad b k. Igitur ſicut quadratum h n ad quadratum n k, ita quadratum n b ad quadratum b k. Verũ ſicut quadratum n b ad quadratum b k: ita eſſe oſtenſum eſt h b ad b k. Igitur ſicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k.

Quadratum autem h f, ad quadratum f k, maiorem habet proportionẽ, quàm quadratum h n ad quadratum n k. Rurſus duabus inæqualibus h f, k f adijciatur n f, & per ſupradictum habet h f ad f k, maiorem proportionẽ, quàm h n ad n k. quare & earum duplæ. igitur quadratum h f ad quadratum f k, maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k, hoc eſt h b ad b k, hoc eſt h b ad b e, hoc eſt k f ad f g.

Igitur h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſeſquialteram eius, quæ eſt k f ad f g. Intelligantur enim ſeorſum poſitæ rectæ, puta a b, c, d: ita ut quadra-

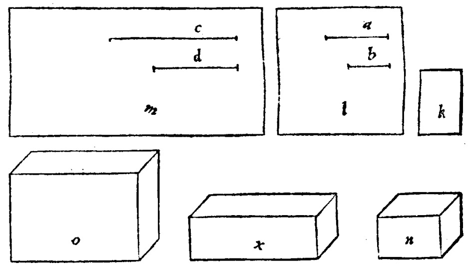
tum

tum a b ad quadratum c maiorem habeat proportionẽ, quàm c ad d. Dico quod a b ad d maiorem habet, quàm ſeſquialteram eius quam habet c ad d. Sumatur enim media inter c & d proportionalis e. Quoniam igitur quadratum a b ad quadratum c maiorem proportionem habet, quàm c ad d. Verum quadrati a b ad quadratum c, eſt proportio dupla, eius quæ eſt à b ad c. Illa uero quæ eſt c ad d, dupla eſt eius quę eſt c ad e. Igitur a b habet ad c maiorem proportionem, quàm c ad e. Fiat autem ſicut e ad c, ita c ad b f. Et quoniam quatuor rectæ conſequenter ſunt proportionales b f, c, e, d: igitur b f habet ad d proportionem, quæ eſt b f, ad c triplicatam. Idem eſt c ad e. Habet autem & c ad d proportionẽ, quæ eſt c ad e duplicatam. Igitur b f ad d habet proportionem ſeſquialteram, eius quæ eſt c ad d. Quare a b ad d maiorem proportionem habet, quàm ſeſquialteram eius, quam habet c ad d.



LIMMA AD SEQVENTIA.

SVnto quatuor termini, a b c d. Dico quod proportio compoſita ex his, ex contento ſub a b, ad quadratum c, & ex proportione b ad d, eadem eſt proportioni collectæ ex contento ſub a b, ſuper ipſam b ad quadratum c, ſuper ipſam d. Eſto itaque contento ſub a b æquale k, & quadrato c æquale l, & fiat ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur proportio k ad m componitẽ ex k ad l, hoc eſt contenti ſub a b ad quadratum c: & l ad m, hoc eſt b ad d. Etenim k multiplicans b faciat n, ipſa uero l multiplicans b faciat x, & multiplicans d faciat o.



Quoniam igitur contentum ſub a b eſt k, & k multiplicans b facit n: igitur n erit contentum ſub a b, ſuper b. Rurſus quoniam quadratum c eſt l, & l multiplicans d facit o, & multiplicans b facit x: igitur o eſt quadratum c ſuper d. quare proportio contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratũ c ſuper d, eadem eſt proportioni n ad o. Oportet igitur oſtendere, quod proportio k ad m eſt ſicut n ad o. Quoniam uterq; k l multiplicans b, produxit utrumq; n x. Eſt igitur ſicut k ad l, ita n ad x. Rurſus quoniam l multiplicans utrumq; b d produxit, utrumq; x o erit ſicut b ad d, ita x ad o. Verum ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur ſicut l ad m, ita x ad o. Igitur hi k l m ſunt bini, & bini cum his n x o, in eadem proportione. Per æquam igitur ſicut k ad m, ita n ad o. Et eſt k ad m proportio eadem compoſitæ ex cõtento ſub a b ad quadratũ c, & ex ea quam habet b ad d. Itẽ n ad o eſt eadem proportio proportioni contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratum c ſuper d. Igitur proportio compoſita ex proportione contenti ſub a b ad quadratum c, & ex b ad d, eadẽ eſt proportioni contenti ſub a b ſuper b ad quadratum c ſuper d. Manifeſtum autem eſt, quod cõtentum ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a. Quoniam enim ſicut a ad b, ita contentum ſub a b ad quadratum b, ſumpta b communi alti-

tudine

tudine: ſi quatuor termini fuerint proportionales, contentum ſub extremis æquatur contento ſub medijs. Contentum igitur ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a.

IN ALITER OCTAVI.

Dictum eſt in præaſſumptis, quod ſi duarum magnitudinũ medium quoddam ſumatur, proportio extremitatum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium. Similiter fiet, & ſi multa media ſumãtur extremitatum, proportio componitur ex proportionibus quas habent media conſequenter collecta inter ſe. Et iſtic dicit, quod proportio portionis b a d ad portionẽ b c d cõponitur ex ea quam habet portio b a d ad conũ cuius baſis circulus circa diametrum b d, uertex uero punctum a. Et idem conus ad conum baſem eandem habẽtem uerticem punctum c. Et dictus conus ad portionem b c d, portione uidelicet d a b, & ipſa d c b extremis, ſumptis medijs dictis conis. Verum portionis b a d ad conum b a d eſt proportio g h ad h c, per corolarium ſecundi theorematis ſecundi libri. Dicebatur enim, portionem ad conum in ſeipſa conſtitutum habere eã proportionem, quam habet utraq; ſimul quæ ex centro ſphæræ, & altitudo reliquæ portionis ad altitudinem reliquæ portionis. Proportio autem coni b a d ad conum b c d eſt, quæ a h ad h c. Quoniam enim eiuſdem baſis exiſtentes inuicem ſe habent ſicut eorum altitudines: coni autem b c d ad portionem b c d, ſicut a h ad h f, propter corolarium dictum conuerſim ſumptum. Quare proportio portionis b a d, ad portionem b c d, componitur ex proportione g h ad h c, & a h ad h c, & a h ad h f. Proportio autem compoſita ex g h ad h c, & a h ad h c, eſt ſicut proportio contenti ſub g h, h a ad quadratum h c. nam parallelogramma æquiangula habent inuicem proportionem compoſitam ex proportione laterum. Proportio autem compoſita ex proportione contenti ſub g h, h a ad quadratum c h, & ex proportione a h ad h f eadem eſt proportioni contenti ſub g h, h a in h a, ad quadratũ c h in h f, ut oſtenſum eſt in limmate præaſſumpto. Proportio autem contenti ſub g h, h a in h a, ad quadratum c h in h f, eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Et hoc quoq; demonſtratum fuit in præaſſumpto. Proportio igitur portionis ad portionem, eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Quoniam igitur oſtendere oportet, quod portio ad portionem minorem habet proportionem, quàm duplam eam quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem: oportet igitur oſtendere, quod proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quã habet ſuperficies portionis b a d ad ſuperficiem b c d, hoc eſt quam habet quadratum a b ad quadratum b c. Verum ſicut quadratum a b ad quadratum b c, ita a h ad h c. Oſtenſum eſt enim hoc in theorematibus præcedentibus. Oportet igitur oſtendere, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quam habet a h ad h c. Verum proportionis a h ad h c dupla eſt proportio quadrati a h ad quadratum h c. Oſtendere igitur oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratũ c h in h f, habet minorem proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h c. Verum ſicut quadratum a h ad quadratum h c, ſumpta h g communi altitudine, ita quadratum a h in h g ad quadratum c h in h g. Igitur oſtendere oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habeat proportionem, quàm idem quadratũ a h in h g, ad quadratum h c in h g. Ad quod autem habet idem minorem proportionem, ipſum eſt maius. Oportet igitur oſtẽdere, quod quadratum c h in h f, maius eſt quadrato c h in h g, hoc eſt quod maior ſit h f quàm h g. Eſt autem hoc manifeſtum. inæqualib. enim his a h, h c æquales ſunt additæ f a, c g. Hęc dicens ipſe quidem non induxit compoſitionem, nos autem eam apponemus. Quoniam f h maior eſt ipſa h g, erit quadratum c h in h f, maius eodem in h g. Quare quadra

ti

ti a h in h g ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm idem ad quadratum c h in h g. Verum ſicut quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h g, ita quadratum a h ad quadrarum h c. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem proportionem habet, quàm quadratũ a h ad quadratum h c. Verum proportio quadrati a h, ad quadratum h c, dupla eſt eius quæ eſt a h ad h c. Quadratum igitur a h in h g, ad quadratũ c h in h f minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quæ eſt a h ad h c. Verum portionum proportio eſt oſtenſa eadem ei quæ eſt quadrati a h in o g h, ad quadratũ c h in h f. Et proportio ſuperficierum ea eſt, quam habet a h ad h c. Portio igitur ad portionem habet minorẽ proportionẽ, quàm ſit ea duplicata, quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiẽ.

Deinceps autem reſoluens reliquam partem theorematis, inducit: Dixi iam quod portio maior habet ad minorem, maiorem proportionem, quàm ſeſquialteram eius quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem. Verum portionum quidem proportio oſtẽſa eſt eadem illi quam habet quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Proportionis igitur ſuperficiei ad ſuperficiem illa eſt ſeſquialtera, quã cubus a b habet ad cubum b c. nam eius quę eſt a b ad b c, illa dupla eſt quæ eſt quadrati a b ad quadratũ b c. tripla uero quę eſt cubi a b, ad cubum b c. Sicut enim a b ad b c, ita a h ad h b, propter ſimilitudinem triangulorum a h b, a b c. Si autem ſint quatuor proportionales rectæ, ſolida quoq; ab eis ſimilia inter ſe & ſimiliter deſcripta ſunt proportionalia. quare cubus a h ad cubum h b habet proportionẽ ſeſquialteram eius quam habet quadratum a b ad quadratum b c. hoc eſt ſuperficies ad ſuperficiem. Verum ſicut portio ad portionem, ita quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Dico igitur, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quàm quadrati a h ad quadratum h b, & ipſius a h ad h b. nam proportio quadrati a h ad quadratum h b, aſſumpta ea quæ eſt a h ad h b, eadem eſt ei quæ eſt cubi a h ad cubũ h b. nam utraq; eiuſdem eſt tripla. Proportio autem quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eſt ea quæ eſt quadrati a h ad contentum ſub c h, h b. Quoniã enim proportio a h ad h b eadem eſt proportioni b h ad h c, ipſa b h media proportionali exiſtente, proportio quadrati a h ad quadratum h b, cũ proportione a h ad h b eadem eſt proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum portione b h ad h c. uerum proportio b h ad h c eadem eſt proportioni quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, ſumpta b h communi altitudine. quare proportio quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eadem eſt proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione quadrati b h ad contentum ſub b h, h c. Verum proportio quadrati a h ad contentum ſub b h, h c, eſt compoſita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, quadrato b h ſumpto medio. quare proportio quadrati a h ad quadratũ h b, cum proportione a h ad h b, eadem eſt proportioni quadrati a h ad contentũ ſub b h, h c. quadrati aũt a h ad contentum ſub b h, h c, proportio eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad contentũ ſub b h, h c in h g, ſumpta cõmuni altitudine h g. Dico item, quod quadratũ a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorẽ habet proportionem, ꝙ quadratum a h in h g, ad contentũ ſub c h, h b in h g. Ad quod aũt idem maiorem habet proportionem, illud minus exiſtit. Oſtendendum igitur, quadratũ c h in h f eſſe minus contento ſub b h, h c in h g. Idẽ eſt ac ſi oſtendatur, quod quadratũ c h ad contentũ ſub c h, h b minorem habeat proportionẽ, ꝙ h g ad h f. Si enim fuerint quatuor termini, ueluti iſtic ſunt, quadratum c h contentum ſub c h, h b, & h g, et h f: & contentũ ſub extremis minus ſit contento ſub medijs, tunc primus ad ſecundũ minorem proportionem habet, quàm tertius ad quartum, uti ſuprà oſtenſum fuit. Rationabiliter autẽ oportuerat oſtendere, quadratum c h in h f maius eſſe contento ſub c h, h b in h g. quod idem eſt ac ſi demõ-

Gg ſtretur

ſtretur quod quadratum c h ad contentum ſub c h, h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f. Verum ſicut quadratum c h ad contentum ſub c h, h b, ita c h ad h b. Oportet oſtendere quod c h ad h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f: hoc eſt h g ad h f maiorem habet proportionem, quàm c h ad h b. Ducatur a b e k ad angulos rectos ipſi e c, & ab ipſo b perpendicularis ſupra eam b l. Reliquum nobis eſt oſtendere, quod g h ad h f maiorem proportionem habeat, quàm c h ad h b. Eſt autem ipſa h f æqualis utriq; ſimul h a, k e. nam a f ęquatur ei quæ ex centro. Oſtendendū eſt ergo, quod g h ad utramq; ſimul h a, k e maiorē habeat proportionem, quàm c h ad h b. Et ablata ab ipſa g h ipſa c h, & ab ipſa k e ipſa e l, æquali ipſi b h, oportebit oſtendere quod reliqua c g ad reliquam utrãq; ſimul a h, k l maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Quoniam enim oportet oſtendere, quod g h ad utramq; ſimul h a, k e maiorem proportionem habeat quàm c h ad h b. Et permutatim, g h ad h c maiorem habeat proportionem, quàm utraq; ſimul h a, k e ad h b, hoc eſt ad l e. Et diuidenti g c ad c h maiorem habet proportionem, quàm utraq; ſimul h a, k l ad l e, hoc eſt b h. Permutatim quoque g c ad utramq; ſimul h a, k l maiorem habet proportionem, quàm c h ad b h. Item ſicut c h ad b h, ita b h ad h a, hoc eſt l e ad a h. Quoniam igitur g c ad utramque ſimul h a, l k maiorem habet proportionem, quàm l e ad a h. Et permutatim, quoniam c g, hoc eſt k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a. diuidenti, k l ad l e maiorem proportionem habet, quàm ipſa k l ad h a, hoc eſt quod minor eſt l e ipſa h a.

Deinceps autem nos compoſitionem adijciemus. quoniam l e minor eſt a h, habebit k l ad l e maiorem proportionem, quàm k l ad a h. Componenti habet k e ad l e maiorem proportionem, quàm utraq; ſimul k l, h a ad h a. Ipſa uero l e eſt æqualis ipſi b h. Igitur g c ad b h maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, a h ad a h. Permutatim igitur, g c ad utramq; ſimul k l, a h maiorem proportionem habet, quàm b h ad h a, hoc eſt c h ad h b. Permutatim ergo g c ad c h maiorem proportionem habet, quàm utraq; ſimul k l, a h ad h b. Componenti igitur g h ad h c maiorem proportionem habet, quàm utraque ſimul k l, a h, h b ad h b, hoc eſt utraq; ſimul a h, k e ad h b. Eſt autem k e æqualis ipſi a f, igitur permutatim g h ad h f maiorem proportionem habet quàm c h ad h b. Sicut autem c h ad h b, ita quadratum c h ad contentum ſub c h, h b. Igitur ipſa g h ad h f maiorem habet proportionem, quàm quadratum c h ad contentum ſub c h, h b. Et per prius dicta quadratum c h in h f minus eſt cõtento ſub c h, h b. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm ipſum quadratum a h in h g, ad contentum ſub c h, h b in h g: hoc eſt quadratum a h ad contentum ſub c h, h g. Proportio autem quadrati a h ad contentum ſub c h, h b, ſumpto medio quadrato b h, cõponitur ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum ſub b h, h c. Proportio autem quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, eadem eſt proportioni b h ad h c, hoc eſt a h ad b h. Igitur quadratum a h in g h, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h b cum proportione a h ad h b. Proportio autem compoſita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & ipſa a h ad h b, eadē eſt proportioni cubi a h ad cubum h b, hoc eſt cubi a b ad cubum b c. Quadratū igitur a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm cubus a b ad cubum b c. Verum proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f, eſt oſtenſa eadem eſſe proportioni portionum. Proportio uero cubi a b ad cubum b c oſtenſa eſt eſſe ſeſquialtera proportioni ſuperficierū. Portio igitur ad portionem habet maiorem proportionem, quàm ſeſquialteram eius quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem.

IN NONVM THEOREMA.

Conſtat autem, quod ipſa b a minor eſt ipſa a k, quàm dupla potētia. ea uero quę ex centro, maior quàm dupla. Coniūcta enim ab ipſo b ad cētrum b o, & angulo ad centrum facto obtuſo b o a, erit quadratum a b maius quadratis laterum angulum obtuſum complexorum. cumq; ſint ęqualia, quadrato unius eorū, puta quæ ex centro eius, maius erit quàm duplum. Item cum quadratum a b ſit æquale quadratis a k, b b, & quadratum a k ſit maius quadrato k b, erit quadratū a b minus quàm duplum quadrati a k. Et hæc quidem in figura in qua eſt ſignū tale θ. In altera uero figura contraria iſtis conuenienter dicentur.

Eſto e n æqualis ipſi e l, & à circulo circa h f diametrū conus eſto uerticem habens punctum n. Iſte autem æquatur hemiſphærio ſecundum circumferentiam h e f. Quoniam enim cylindrus baſem habens circulum circa diametrum h f, altitudinem d e, eſt triplus coni baſim eandem & altitudinem æqualem habentis, & ſeſquialter hemiſphærij, erit tale hemiſphærium duplum eiuſdem coni. Eſt autē conus baſem habens circulum circa diametrum h f, et altitudinem l n, duplus eiuſdem coni. Igitur hemiſphærium ęquatur cono, baſem habenti circulum circa diametrum h f, & altitudinem l n.

Contentum autem ſub r c, a r, maius eſt contento ſub a k, k c, quia habet latus ſuum minus latere minore alterius maius. Dictum eſt enim ſuperius, quod ſi recta diuidatur in duo inæqualia, alio & alio puncto, contentum ſub partibus propinquioribus bipertitioni, maius eſt contento ſub remotioribus. Ac ſi dicat, quia latus minus ſuum habeat latere minore alterius maius. nam quanto minus habuerit, tanto diſcedet ab æquipartitione.

Quadratum aūt a r æquatur contento ſub a k, c x. nam dimidiū eſt quadrati a b. Si enim iungatur b c, quia in triangulo rectangulo ducta eſt à recto angulo perpendicularis b k, & trianguli circa cathetum ſunt ſimiles inuicem & toti, quod ſub c a, a k continetur, æquatur quadrato a b. quare & contentum ſub dimidia ipſius c a & a k, hoc eſt c x, a k, æquatur dimidio quadrati a b, hoc eſt quadrato a r. Maius eſt igitur utrumq; ſimul utroq; ſimul. quoniam contentum ſub c x, a k, æquatur quadrato a r: & contentum ſub a r, r c, maius eſt contento ſub a k, k c. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota fient inæqualia, & maius id quod antea fuerit maius. Contento igitur ſub a r, r c ſi addatur quadratum a r, & cõtento ſub a k, k c contentum ſub c x, a k: fiet contentum ſub a r, r c cum quadrato a r, maius contento ſub a k, k c, cum contento ſub c x, a k. Verum contentum ſub a r, r c cum quadrato a r, æquatur contento ſub c a, a r, per ſecundum theorema ſecundi libri Elementorū. Et contentū ſub a k, k c, cū contento ſub c x, a k, æquatur contento ſub a k, k x per primum theorema ſecūdi libri eiuſdem. Igitur contentum ſub c a, a r, maius eſt contento ſub a k, k x. Cõtento autem ſub x k, k a, æquatur contentū ſub m k, k c. Supponitur enim, ſicut x c ad c k, ita m a ad a k. quare componenti ſicut x k, k c ad k c, ſic m k ad k a: & contentum ſub extremis, æquatur contento ſub medijs. Cõtentum igitur ſub x a, a k, æquatur contento ſub m k, k c. Verum contento ſub x k, k a, maius eſt cõtentum ſub a c, a r. Igitur contentum ſub a c, a r, maius eſt contento ſub m k, k c. quare maiorem proportionem habet ipſa a c ad c k, quàm m k ad a r. Quoniam enim lineæ quatuor rectæ a c, c k, k m, a r ſunt, & contentum ſub prima c a, & quarta a r, maius eſt contento ſub ſecunda c k, & tertia k m: habebit prima a c, ad ſecundam c k, maiorem proportionem, quàm tertia k m ad quartam a r. Quam autem c a habet ad c k, hanc habet quadratum a c ad quadratum b c. iuncta enim b c. Quia itaq; in triangulo rectangulo ab angulo recto eſt ducta cathetus, fit ſicut a c ad c b, ita c b ad c k. Quare ſicut prima a c ad tertiam c k, ita quadratum primæ a c ad quadratum c b. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum a b ad quadratum b k. nam triangulus a b k similis est triangulo a b c. Est igitur sicut a c ad c k, ita quadratum a b ad quadratū b k. At uero a c habet ad c k maiorem proportionem, quàm m k ad a r, & antecedentium dimidia, dimidium quadrati a b, quod est quadratum a r, ad quadratum b k, maiorem habet proportionem quàm dimidia ipsius m k ad ipsam a r, hoc est ipsa m k ad duplam ipsius a r. Verū quadratum f l æquatur quadrato a r. quoniā ipsa a b posita est æqualis ipsi e f, & ipsa e f est ipsi r a potentia dupla. nam ipsa e l æqualis est ipsi a r. Et ipsa n l dupla est ipsius a r, quia & ipsius l f. Quare quadratum f l ad quadratum b k maiorem habet proportionem, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ est æqualis ipsi l n. maiorē ergo proportionē habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b k, quàm m k ad n l. quare conus habens basem circulum circa diametrum h f, uerticem uero pūctum n, maior est cono basem habente circulum circa diametrum b d, uerticem uero m punctum. Si enim fecerimus sicut circulus circa diametrum f h, ad circulum circa diametrum b d, ita ipsam k m ad aliam quandam, erit ad minorem ipsa l n. Et erit conus habens basem circulum circa diametrum f h, altitudinem uero rectam minorem inuentam, æqualis ipsi cono m b d: quia eorum bases altitudinibus contrà afficiuntur. Et erit minor cono n h x, quia in eadem base ambo constituti habentur inuicem, uti eorum altitudines. Constat igitur, quod hemisphærium quod est secundum circumferentiam e f h, maius est portione quæ est secundum circumferentiam b a d.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in secundum librum Archimedis de Sphæra & cylindro: expositione discursa Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII IN MENSVRATIONEM *circuli Archimedis.*

CONSEQVENS igitur fuit mihi, intentum meum prosequenti, qui ex his quæ ab Archimede scripta fuerūt, clarioribus & breuiori disciplina indigentibus inciderim, & ea quæ utcunque in eis discussione indiguerint, pro uirib. continua reddere eis, quæ à nobis in libro de Sphæra & cylindro scripta sunt. Cū uotum sanè dignū obtigerit, ut & maioribus, & quib. ampliori cura opus erit, nobis sit insistendū: erit utiq; propositus nobis deinceps Archimedis libellus, cuius inscriptio est Circuli mensuratio, in quo uiri propositionem ex ipsa superscriptione percipimus. Vult enim ostendere, cui spacio rectilineo sit circulus æqualis, rem longè ante ipsum à clarissimis philosophis quæsitam. Constat enim hoc, id quæsitum esse quod Hippocrates Chius, & Antiphon cum studiosè inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos illis exquisitè cognitos existimo qui Geometricam Eudemi historiam inspexerunt, & Ceria Aristotelica acceperūt. Verū est quidem hic libellus, uti ait Heraclides in Archimedis uita, ad usum uitæ necessarius. Ostendit enim circumferentiam diametro triplam & minus septima parte, plus uero quantum sunt decem septuagesimæprimæ. Hoc autem, dicit, proximè demōstratum est: inuenta quidem uera est talis per quasdam spirales recta linea, quæ sit æqualis circumferentiæ dati circuli.

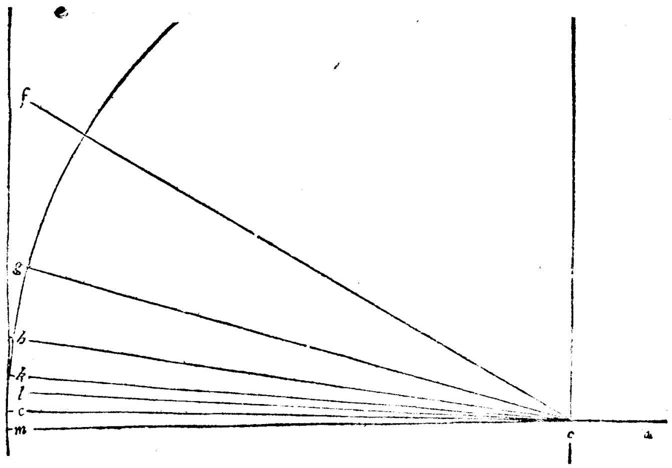
In

IN PRIMVM THEOREMA.

PRimum theorema his qui aliquantulum in mathematicis sint uersati, nullam uidetur habere difficilem perquisitionem, cum ipsa Archimedis uerba palàm exposita sint, & conclusionem propositioni restituant nulla parte neglecta parem. Videtur autem quadam re esse ad demonstrationem abusus, quę res nondum sit demonstrata. Nam exponens triangulum rectangulum, dicit: Habeat latus unum, ambiens angulum rectum, æquale ei quæ ex centro reliquum latus æquale circumferentiæ. Verum rectam circumferentiæ dati circuli æqualem sumere, neq; ante ipsum fuerat ostensum, neq; ab alio traditū. Considerare tamē oportet, nihil præter id quod deceat, ab Archimede scriptum esse. nam circuli circumferentiam esse quandam magnitudinem, nulli prorsus dubium est. Puto autem, & hoc eorum quæ ad unum distant. Est autem rectæ eiusdem speciei, quanquam non utiq; appareat, posse circumferentiæ circuli rectam æqualem præstare. Verumtamen esse rectam quandam ipsi æqualem, à nullo quæsitum est. Quod igitur et ab Archimede propositum est, tale est, triangulum rectangulum qui circa rectū angulum habuerit latus unum, circumferētiæ circuli æquale, uti dictum est. Quare propositum exponens, non ulla utiq; iudicabitur abusione. Admirabilis autē magis & istis uidebitur, quod ita supra magnitudinem quæsitorum claram & facilem inuentionem addiderit. Sicut autem dictum est, nulla inquisitione opus est primo theoremati. nam triangulus p o r, quod maior sit figura a f o m, et quod simpliciter circa datum circulum potest figura rectilinea describi, ita ut portiones quę inter circuli circumferentiam & latera circumscriptæ figuræ rectilineæ minores sunt spacio dato, apertè dictum est in his quæ in primo de Sphæra & cylindro conscripsimus.

IN TERTIVM THEOREMA.

IN hoc theoremate continenter iubemur, numero quocunq; dato radicem quadratam inuenire. Hanc autem in numero nō quadrato præcisam inueniri non est possibile. Numerus enim in se multiplicatus producit quendam numerū quadratum: partes autem in se multiplicatæ, non explent numerū, sed partes. Quemadmodum uero oporteat radicem proxime producentem datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum & à Pappo & Theone, & à multis alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem exposuerunt. Quare nō est opus in hoc nos laborare, cū liceat studiosis illud ab illis petere. Et angulus c e f, est tertia pars recti. Si enim hexagoni circumferentiā bipertientes, eius dimidium ad tertiæ separantes iunxerimus ipsam e f, erit angulus c e f, tertia recti. nam circū ferentia ad c assumpta, cum sit dimidia circūferentiæ hexagoni, est duodecima circuli pars. quare & angulus c e f, qui est ad centrum, est duodecima pars quatuor rectorum. quare est tertia unius recti. Igitur e f habet ad f c proportionem, quam 306 ad 153. Quod autem e f sit ipsius c f dupla, hinc manifestum est. Si enim exprò ducentes ipsam f c in c, & æqualem ei constituentes iunxerimus ab ipso e, erit angulus apud e duæ tertiæ recti, & angulus ad f duæ tertiæ recti. Igitur trianguli æquilateri est dimidium triangulus c e f, & quia basis æquilateri æquatur ipsi e f, bipertietur puncto c. igitur e f est dupla ipsius f c. Habet autem ipsa e c ad c f proportionem, quam 265 ad 153. quia enim e f ponitur 306. Si ipsa in seipsam multiplicetur, fient 93636. Ipsa autem c f est 153. quare quadratum eius erit 23409. Quoniam igitur quadratum e f æquatur quadratis harum e c, c f, si à quadrato e f quod est 93636. auferamus quadratum ipsius c f, 23409. relinquetur quadratum e c, quod est 70227. Cuius latus quadratum est 265. Et item pars quædam minima & insensibilis. Deficit enim potentia horum 265, à præciso duab. unitatibus. Multiplicationes autem subijciuntur. Diuidatur itaq; angulus e f c in duo æqua, ducta e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c, per tertium theorema sexti libri Elementorum lementorũ Euclidis: & cōponēti, sicut utraque simul f e, e c ad e c, ita f c ad c g. Et permutatim, sicut utraque simul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. Est autem utraque simul e f, f c maior, quàm 571. Est autem f c, 153. Igitur utraque simul f e, e c ad e c, maiorem ha



bet proportionem, quàm 571 ad 153. quare e c ad c g maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. Igitur e c ad g c potentia habet maiorem proportionem, quàm 349450 ad 23409. Concludetur autem hoc ita. quoniam enim ostensum est, quod e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm 571 ad 153. si quis posuerit ipsam e c esse 571, & ipsam c g 153, erit quadratum ipsius e c 326041. & quadratũ c g 23409, cum utraque simul sint æqualia, quadrato ipsius e g, quod est 349450. huius radix quadrata est 591, & $\frac{1}{8}$ proxime. nã quadratus huius 591 $\frac{1}{8}$ deest à præciso una & uiginti unitatibus & 59 sexagesimis quartis. Igitur e c ad c g habet potentia proportionẽ, quàm 349450 ad 23409. longitudine uero, quam 591, & $\frac{1}{8}$ proxime ad 153. Multiplicationes autem subijciuntur.

Rursus in duo æqua diuidatur angulus g e c ducta h e, eadem ratione ipsa e c habebit ad c h maiorem proportionẽ, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Fit enim per bipertitionem anguli, sicut e g ad e c, ita g h ad h c. Et componenti, sicut utraque simul g e, e c ad e c, ita g c ad c h: & permutatim, sicut utraque simul g e, e c ad g c, ita e c ad c h. Et est quidem e c, 571, & pars quædam. At uero e g 591, & amplius quædã pars maioris. igitũ sunt 1162 $\frac{1}{8}$. Est aũt g c 153. igitur utraque simul g e, e c ad g c maiorem proportionem habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.

Item h e, habet ad h c maiorem proportionem, quàm 1173 $\frac{1}{8}$ ad 153. quoniam enim ostensum est e c habere ad h c maiorem proportionem, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Si quis supposuerit eas sic habere, erit quadratum e c 1350534, & $\frac{33}{64}$. quadratum uero c h 23409. Quadratum ergo e h æquale quadratis harũ e c, c h erit 1373943, $\frac{33}{64}$ cuius latus est 1172 $\frac{1}{8}$ proxime. nam deest à præcisa potentia ipsius unitatibus 66, multiplicationes uero subijciuntur.

Item angulus h e c diuidatur in duo æqua, ducta e k. Igitur e c ad c k maiorem proportionẽ habet, quàm 2304 $\frac{1}{4}$ ad 153. Rursus enim propter bipertitionem an-

gu-

guli h e c erit sicut h e ad e c, ita h k ad c k. Et componenti, sicut utraque simul h e, e c ad e c, ita h c ad c k. Et permutatim, sicut utraque simul h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Et quia ostensum est ipsam h e esse 1172 $\frac{1}{8}$. utraque ergo simul h e, e c, maior erit isto 2334 $\frac{1}{4}$. & h c ponitur 153. Igitur utraque simul h e, e c ad h c maiorem habet proportionem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153. Igitur e k ad c k maiorem habet proportionem, quàm 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153. Item quoniam supponitũ e c 2334 $\frac{1}{4}$, erit quadratum ipsius e c 5448723 $\frac{3}{16}$. Quadratum uero ipsius c k 23409. Istis autem æquatur quadratum k e, quod erit 5472232 $\frac{3}{16}$. cuius latus quadratum est proxime 2339 $\frac{1}{4}$. deest ab eius præciso quadrato unitatibus 41 $\frac{1}{2}$. multiplicationes uero subijciuntur.

Item diuidatur angulus k e c in duo æqua, ducta e l. Igitur e c ad e l maiorẽ habet proportionem, quàm 4600 $\frac{1}{2}$ ad 153. Rursus enim propter bipartitionem anguli sicut k e ad e c, ita k l ad l c. Et componenti, sicut utraque simul k e, e c ad e c, ita k c ad l c. Et permutatim, sicut utraque simul k e, e c ad k c, ita e c ad l c. & k e est 2339 $\frac{1}{4}$. & pars insuper quædam. & e c, 2334 $\frac{1}{4}$, & particula insuper quædam. Igitur utraque simul k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Sicut autem utraque simul k e, e c ad k c, ita e c ad c l. Igitur e c ad c l maiorem proportionẽ habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Quoniam igitur angulus f e c existens tertia pars recti, est duodecima pars quatuor rectorum, eius dimidium erit g e c pars uigesimaquarta, cuius item dimidium h e c erit quadragesimaoctaua, atque item huius dimidium k e c erit nonagesimasexta. rursus huius dimidium centesima nonagesimasecunda. Ponatur, uti dicit, angulus c e m æqualis ei, & educatur f c ad m. Angulus igitur l e m existens duplus anguli l e c, erit nonagesimasexta rectorum quatuor. quare ipsa l m erit latus polygoni habentis latera 96 circa circulum descripti. Quoniam igitur e l ad c l ostensa est habere maiorẽ proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 253. & est ipsa a c dupla ipsius e c, & l m ipsius l c. Igitur a c ad l m habet maiorẽ proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Econuerso igitur l m ad a l minorem habet proportionem, quàm 153 ad 4673 $\frac{1}{2}$. Et quoniam l m est latus polygoni habentis latera 96, igitur ambitus polygoni erit 14688. nam 96 multiplicatus in 153 dictum numeri producit. Igitur ambitus polygoni habet ad diametrum a c minorem proportionem, quàm 14688 ad 4673 $\frac{1}{2}$. Ambitus ergo polygoni erit triplus diametro circuli, & insuper 667 $\frac{1}{2}$. hic autem minor est, quàm pars septima ipsius diametri. Hic enim septies sumptus producit 4672 $\frac{1}{2}$ qui minor est diametro unitate. Quoniam igitur polygoni ambitus minor est quàm triplus sesquiseptimus diametro, & circuli ambitus sit minor ambitu polygoni: multo magis igitur circuli circumferentia est minor, quàm tripla sesquiseptima.

Deinceps uero construens reliquam partem theorematis, dicit: Esto circulus circa diametrum a c, & tertia pars recti angulus b a c. Hoc autem erit, si à puncto c sumpta c b, æquali lateri hexagoni iungamus a b. Nam angulus in circumferentia hexagoni ad centrum factus est duæ tertiæ recti, in circumferentia uero trigoni est quatuor tertiæ recti. Quoniã igitur angulus a b c est rectus, & angulus b a c est tertia recti, erit angulus a c b duæ tertiæ recti. Si ergo educentes ipsam c b ad b, & æqualem ei sumpserimus, & ab a iunxerimus e a, fiet triangulus æquilaterus. Et quia a b cathetus est, & bipertitur basim, erit a c æqualis ipsi c b. Si rursus sumpserimus ipsam a c 1560, erit ipsa c b 780. Et quadratum a c 2433600. & quadratum ipsius c b 608400. Et si auferamus quadratum c b à quadrato a c, relinquetur quadratum a b 1826520. cuius latus quadratum 1351 proxime. excedit enim præcisum sola unitate. propterea dixit ipsam a b minorẽ habere ad b c proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes uero subijciuntur.

Diuidatur in duo ęqua angulus b a c, angulo a f g. Quoniã igitur angulus b a g

æqua-

æquatur angulo g c b, nam in eadem circumferentia consistunt: item æquatur angulo g a c: igitur angulus g c b est æqualis angulo g a c. & angulus a g c communis est rectus: igitur reliquus g f c, reliquo a c g æqualis. igitur triãguli a g c & c g f sunt inuicem ęquianguli, & similes. Igitur sicut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. Nam triangulorum similiũ latera æquos angulos complexa, sunt proportionalia. Verum sicut a c ad c f, ita utraque simul c a, a b ad c b, & a g ad g c. quia enim angulus b a c in duo æqua diuiditur, ducta a f erit sicut b a ad a c, ita b c ad c f. Et permutatim, sicut utraq; simul b a, a c ad b c, ita a c ad c f. Et est a b minor q̃ 1351, & a c 1560, & b c 780. igitur utraq; simul a b, c b minorem habet ad b c proportionem, quàm 2911 ad 780. igitur a c ad c f habet minorem proportionem, quàm 2911, & 780. sicut autem a c ad c f, ita a g ad g c. igitur a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780. Ex his igit̃ erit quadratum a g 8473921. quadratum g c, 608400. Et quadratum a c est eis æquale. Erit igitur ipsum 9082321, cuius latus est tetragonicum proxime. nam excedit præcisum quadratum unitatibus $368\frac{1}{6}$. Eadem ratione dicit a c ad c g minorem habere proportionem, quàm $3390\frac{1}{4}$ ad 980. multiplicationes autem subijciuntur.

Diuidatur in duo æqua angulus c a g, ducta a h. propter bipartitionem igitur anguli & similitudinem triangulorum, & proportionalitatem laterum & componenti, & permutatim, sicut utraq; simul g a, a c ad g c, ita a h ad h c. & supponebatur a c minor quàm 2911. & ipsa a c minor quàm $3013\frac{3}{4}$. igitur utraq; simul g a, a c minor est quàm $5924\frac{3}{4}$. ipsa uero g c est 780. igitur utraq; simul g a, a c ad g c minorem habet proportionẽ, quàm $5924\frac{3}{4}$ ad 780. quare & a h ad h c minorem proportionem habet, q̃ $5924\frac{3}{4}$ ad 780. quare a h ad h c minorẽ proportionem habet quàm $455\frac{3}{4}$ ad 60. nam utraq; utriusq; est pars, & horum quadrupli ipsa a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 1823 ad 240. propter hoc enim dicit, quod utraque utriusq; est $\frac{4}{13}$. Et quoniam a h est 1823, erit quadratum eius 3323429. Est autem h c 240, & eius quadratum 57600. & est istis quadratis a h, h c æquale quadratũ a c. Erit igitur 3380429, cuius latus quadratum est $1838\frac{9}{11}$. nam huius quadratum excedit, uerum quadratum unitatibus 321 propè. quare a c ad h c minorẽ habet proportionem, quàm $1838\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes uero subijciuntur.

Item in duo æqua diuidatur angulus h a c ducta k a. Rursus propter bipartitionem anguli, & similitudinẽ triangulorũ, & proportionalitatem laterũ, et componẽti, & permutatim, sicut utraq; simul h a, a c ad c h, ita a k ad k c. Verũ utraq; simul h a, a c minor est, quàm $3661\frac{9}{11}$. Quoniam enim h a supponit̃ 1823, & a c $1838\frac{9}{11}$. Est autem h c 240. Igitur utraq; simul h a, a c ad h c habet minorem proportionem, quàm $3661\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet proportionem, quàm $3661\frac{9}{11}$ ad 240.

igitur a k ad k c minorem proportionem habet, quàm 1007 ad 66. & quadratum a k 1014049. quadratum uero k c est 4356: quibus æquatur quadratum a c. igitur erit 1018405, quorum latus quadratum est $1009\frac{1}{6}$ proximè. nam eius quadratum superat præcisum unitatibus 12 & $\frac{3}{63}$. Igitur a c ad c k minorem proportionẽ habet, quàm $1009\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

Item diuidatur in duo æqua angulus k a c ducta a l eadem ratione, sicut utraq; simul k a, a c ad k c, ita a l ad c l. & est a k minor quàm 1007, & a c minor quàm $1009\frac{1}{6}$, & k c 66. Igitur utraq; simul k a, a c, ad k c minorem proportionẽ habet, q̃ $2016\frac{1}{6}$ ad 66. Igitur a l ad l c minorem proportionem habet, quàm $2016\frac{1}{6}$ ad 66. Et quoniam a l supponitur esse $2016\frac{1}{6}$ erit eius quadratum $4064928\frac{1}{36}$. Et ipsa l c est 66, cuius quadratũ est 4356: æquale uero ipsis ambobus simul quadratum

a c

a c $4069284\frac{1}{36}$. cuius radix quadrata est $2017\frac{1}{4}$ proximè. nam quadratum eius excedit præcisum unitatibus $13\frac{6}{20}$. quare a c ad c l habet minorem proportionem, quàm $2017\frac{1}{4}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

Quoniam igitur a c habet ad c l minorẽ proportionem, quàm $2017\frac{1}{4}$ ad 66. Ecõuerso igitur c l ad c a habet maiorem proportionem, quàm 66 ad $2017\frac{1}{4}$. et quoniã circũferẽtia c b est sexta pars circuli: erit igit̃ ipsa g c pars duodecima, et ipsa h g uigesimaquarta, & ipsa k c quadragesimaoctaua, & ipsa l c nonagesimasexta. Ambitus ergo polygoni ad diametrum circuli maiorem proportionem habet, quàm 6336 ad $2017\frac{1}{4}$. Hæc autem sunt tripla. etiam supererant $284\frac{1}{4}$, qui quidem minor est decem septuagesimis primis, quarum una est $27\frac{2}{3}$ pròximè. Harum decuplus est 277 multo magis ergo circumferẽtia circuli maior est diametro sua, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Quemadmodum igitur numeri ab eo pòsiti partiuntur, mediocriter declarati sunt. Sciendum quod Apollonius Pergęus Mocyntocio demonstrauit idẽ, per alios numeros ducens ad maiorem propinquitatem. id quidem diligẽtius factum & exquisitius uidetur, nihil autem confert ad Archimedis propositum. Diximus enim, eum in hoc libello proposuisse, se inuenturum propè propter uitæ utilitates. Quare neque Sporus Nicenus percipitur opportunè Archimedem accusare, quod non exquisitè ab eo traditum sit cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis. Ex quib. ipse in Cerijs dicit, præceptorem suum Philonem Apogadarum ad numeros diligentiores rem hanc adduxisse quàm Archimedes. Omnes enim ex ordine habentur, & uidentur eius propositum nõ cognouisse. Vtuntur tamẽ multiplicationibus myriadũ, & diuisionibus, quibus non est facile assequi inductum, & rationibus magnis. Si quis uero uoluerit omnino ad minuta magis hãc rem adducere, utatur licet his quæ in compositione mathematica à Claudio Ptolemæo tradita sunt, uel quæ sequuntur ex illis per partes & minutissimum calculum, & per rectas in circulo sitas. Et ego utiq; hoc iam fecissem, nisi quod sæpe dixi, intellexissem, quòd per ea quæ dicta sunt, non potest ad exquisitissimũ perueniri, ut inueniatur recta linea, quæ sit circũferentiæ circuli dati ęqualis. Quanquam proximè quis ac ferè habuerit eam. Et quæ ab Archimede sunt hic dicta, sufficiant.

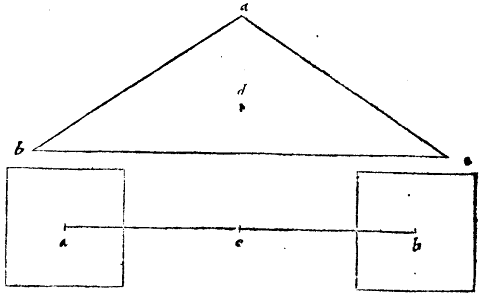
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in Circuli mensurationem, editione asscripta Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori.

EVTOCII IN PRIMVM THEOREMA AEQVEPONDERALIUM *Archimedis.*

MOMENTVM ipsum, ô generosissime Petre, commune grauitatis & leuitatis esse genus, & Aristoteles asserit, & Ptolemęus eum sequutus. Timæus uero apud Platonem, momẽtum omne dicit grauitate produci. nã existimat leuitatem priuationẽ quandam esse. quorum opiniones licet disciplinarũ studiosis legere, & ex Ptolemæi libro quem de Momentis conscripsit, & ex naturalibus negocijs Aristotelis, & ex Timæo Platonis, & ex his qui illos exposuerũt. Archimedes uero in hoc libro cẽtrum ponderis figuræ planæ existimat id, ex quo

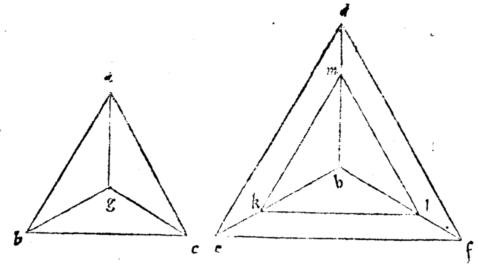
Hh suspensa

suspensa manet æquedistãs horizonti, duorum uero uel plurium planorũ centrũ ponderis, hoc est grauitatis, à quo libra suspensa stat horizonti æquedistãs: ut puta sit triangulus a b c, & in medio eius punctum quoddam d, à quo suspensum maneat æquedistãs horizonti. Constat igit̃ quod partes a b c sibi ipsis æquepõderabunt, & nulla tẽdit altera magis ad horizõtem. Similiter autem & posita libra a b, & suspensis ex ea magnitudinib. a b, si suspẽsa libra ex c habeat partes a b æqueponderantes, manebit æquedistãs horizonti, & erit centrum suspensionis magnitudinum a b pũctum c.



Bene uidetur Geminus de Archimede dicere, quod dignitates petitiones appellat. nam æqualia grauia ex æqualibus distantijs aut lõgitudinibus æqueponderare dignitas est, & quæ sunt conuenienter. Et sunt clara omnia, his qui ea moderatè inspiciunt.

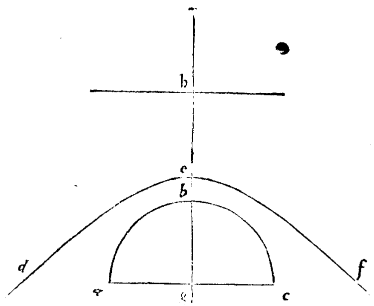
Aequalibus inquit, & similibus planis inuicem coaptatis, & eorũ centra grauitatis inuicem coaptabuntur. Omnes enim eorũ partes coaptabũtur: inæqualiũ uero & similium centra grauitatis erunt similiter sita. Intelligantur autem, uti in subiecta descriptione trianguli a b c, d e f inæquales & similes. & centrum grauitatis ipsius a b c sit g, ipsius uero d e f sit h: & iungantur a g, b g, c g, d h, e h, f h. Dico igitur, quod per æqualia diuidant angulos lineæ ductæ ab ipso g uel h puncto ad angulos. Fiat enim sicut e f ad b c, ita e h ad h k, & f h ad h l, & d h ad h m. Et iungãtur m k k l l m. erit iam k l m triangulus similis triangulo d e f. Quoniam enim est sicut e h ad h k, ita h f ad h l: erit e f æquedistans ipsi k l, & similiter m k ipsi e d, & ipsa d f ipsi l m.



Igitur triangulus d e f similis est triangulo k l m. Est igitur sicut d e ad m k, ita e f ad k l, & f d ad l m. Supponitur autem propter similitudinem triangulorũ, esse sicut d e ad a b, ita e f ad b c, & d f ad a c. Sunt igit̃ latera a b c æqualia lateribus k l m. quare aptatur unumquodq; unicuiq;. Igitur triangulus a b c, est similis & æqualis triangulo k l m. quare coaptabitur centrum ipsius a b c, in centrũ ipsius k l m. Ipso autem g coaptato in h, & latera a b c coaptabuntur in k l m, & ipsæ a g, b g, c g in ipsas h k, h l, h m: & facient angulos ad k l m æquales angulis in triangulo a b c. quare & in ipso d e f. Sunt enim eædem rectæ, quæ à puncto h ad d e f, & ad k l m iunctæ fuerunt.

Cuiuscunq; figuræ cuius ambitus in eadem caua consistit, centrum grauitatis intra figuram contineri necesse est. Quas appellat in eadem cauas lineas, iam dictum est à nobis in procemijs de Sphæra & cylindro. Quoniam enim figura quæ ha-

habet ambitum in eadem cauum, partes omnis plani inter ambitum suum complectitur, & angulos. Constat quod & centrum grauitatis intra ipsam figuram continetur. in quibusdam enim figuris centrum est extrà, in quibusdam in limbo. In semicirculo enim a b c centrum figuræ est g. in hyperbole autem d e f, cẽtrum figuræ est extrà, ubi diametri concurrunt inuicem, sicut habet h. Hęc enim dicta sunt in secundo libro Conicorum Apollonij. Verũtamen et in figura a b c, & in d e f, centrum grauitatis, à quo uidelicet figura suspensa maneat æquedistans horizõti,



est intra ambitum. nam si foret in ambitu, aliquid extrà in alteram partem tenderet, quod non supponitur.

IN SECVNDVM.

ESto cẽtrũ grauitatis d, si esse potest. Quod enim sit in a b, ostensum est. nam suprà dictum est, quod duarum magnitudinum centrum est, à quo libra suspensa partes habet ęqueponderantes: & æquedistãs manet horizonti, quare centrum magnitudinum a b est in ipsa a b.

IN QVINTVM.

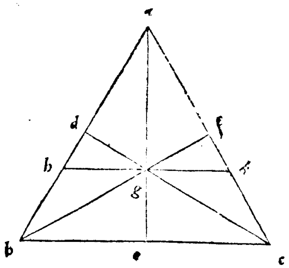
AVt enim quod ab ipso a b maius est ipso c, ita ut æqueponderet, aut non. Hoc dictũ rectè intelligere oportet, non utputa quod magnitudo a b sit omnino maior c: sed posita maior, aut secundum æqueponderãtiam. Potest enim fieri, quod minor magnitudo magis ponderet quàm maior, per longitudinem libræ quæ maior admodum existat, & proportionem faciat inæqualem. Et auferatur ab ipso a b minus excessu, quo a b maius est ipso c, ita ut æqueponderent: ita ut reliquum, puta a sit cõmensuratum ipsi c. Oportet, inquit, auferre ab ipso a b magnitudinem quandam b: puta quod faciat reliquum a commensuratum ipsi c, & maius ipsum a ipso c secundum æqueponderationem. Hoc autem fieri potest per ea quæ in principio libri decimi Elementorum Euclidis dicta fuerunt, & in tertio Sphæricorum Theodosij.

IN VNDECIMVM.

ET iungantur hæ, e f, g k, l m. cadent iam ipsæ iuxta ipsam b c. Quoniã enim ipsa b o est æqualis ipsi z c, & ipsa d b ipsi d c, erit sicut d b ad o b, ita d c ad z c. & diuidenti sicut d o ad o b, ita d z ad z c. Verum sicut d o ad o b, ita a e ad e b. nã e o est iuxta ipsam a d. Sicut autem d z ad z c, ita a f ad f c. Igitur sicut a e ad e b, ita a f ad f c. Igitur e f est æquedistans ipsi b c. Similiter autem ostendẽtur & reliquæ.

Ipse a d c ad omnis triangulos ab ipsis a m, m k, k f, f c descriptos, similes ipsi a d c eam habent proportionem, quam habet c a ad a m. eoq; rectæ sunt æquales. Quoniam enim trianguli a d c, a f m sunt similes, habebunt inuicem proportionem a c ad a m duplicatam. Quoniam uero nunc supponitur, ipsam a c ipsius a m quadruplam esse, triangulus a d c habebit ad triangulum a f m, sicut sexdecim ad unum, & ad triangulos omnis ab a m, m k, k f, f c descriptos, proportionẽ habet, quam sexdecim ad quatuor. Igitur proportionaliter est, sicut triangulus a b c, ad triangulos ab a m, m k, k f, f c, similes ipsi a d c, ita ipsi trianguli ad ipsum a f m. Hoc est c a ad a m. Sunt enim similes, & in basibus æqualibus, & propterea inuicem æquales, quia habent ad inuicem sicut eorum bases. Verum c a ad a m maiorem proportionẽ habet, quàm u r ad r h. Proportio enim a c ad a m eadem est proportioni u r ad r p. Si enim intelligantur u r, c d eductæ & concurrentes in parallelas, erit sicut u r ad r p, sic c d ad d ω. Verum sicut c d ad d ω, ita c a ad a m. sicut ergo c a ad a m, ita u r ad r p. Habet autem u r ad r p maiorem proportionẽ, quàm u r ad r h. Igitur c a ad a m habet maiorem proportionem, quàm u r ad r h. Quod sanè esse non potest. nam lineæ rectæ ductæ per q iuxta ipsam d a, in eadem erunt centra hęc scilicet in alterã partẽ, & tendẽt uidelicet in illud omnis magnitudines, & non æqueponderabunt: quod est commune positum. nam centrum parallelogrammorum positum est r, & triangulorum q.

Si enim educas istas c d g, f e g, b a g, constat quod in idem punctũ ueniunt. eductis enim b a g, f e g, & concurrentibus inuicem in puncto g, & ipsa c d concurret in idem. Est autem sicut b g ad g a, ita f g ad g e, & b f ad a e, & f c ad e d, & c g ad d g. Erit iam trianguli b d c centrum grauitatis in ipsa h m. quoniam ipsa a b est tertia pars b h. Esto triangulus a b c, & iũgantur ab angulis ad bipartitiones laterũ rectæ a e, b f, c d. Igitur centrum grauitatis trianguli a b c est g. Et manifestũ, quod omnes trianguli sunt inuicem æquales. quoniam omnes rectæ ab angulis ad bipartitiones laterum iunctæ per g transeunt, ne eiusdẽ plura centra existant. Quoniam autem a d, d b, b e, e c, c f, f a ęquales sunt, trianguli erunt æquales, qui habent uerticem punctum g, bases uero dictas rectas. Quare a g b triãgulus, duplus est triangulo g b e. quare & a g ipsius g e. Si igitur per g iuxta ipsam b c duxerimus ipsam h k, erit a h dupla ipsius h b. Quare uniuersaliter, si unũ latus trianguli secetur, ita ut portio ad uerticem sit dupla portioni ad basim, & per sumptum punctum ducatur æquedistans ipsi basi: in ipsa ducta erit centrum grauitatis trianguli illius.



FINIS PRIMI EVTOCII.

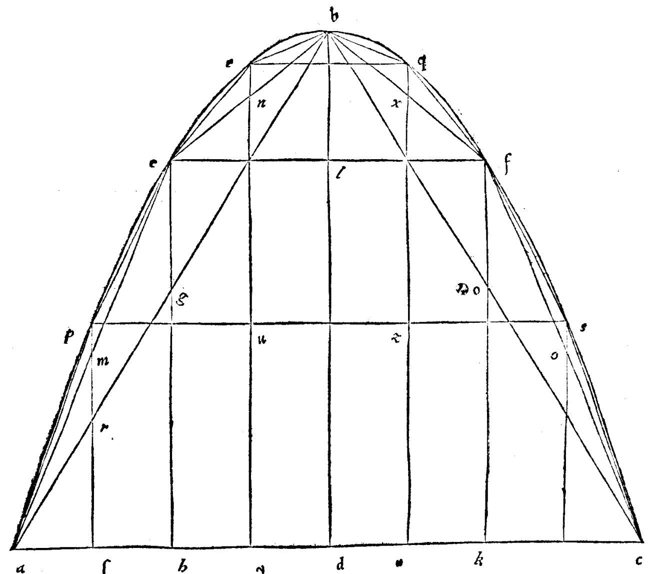
EVTOCII IN SECVNDVM AEQVEPONDERANTIVM *Archimedis*.

CVM diligenter ea quæ in primo libro habentur percurrimus, & inspectu difficilia satis declarauerimus: necessariũ duximus, & quæ in libro secũdo obscurè dicta sunt, pro modo explicare. Dicit itaq; in propositione primi theorematis: Supponãtur spacia a b, c d contenta à recta & sectione rectanguli coni, quæ possimus iuxta rectam datam applicare. hoc aũt non licet inde per ea quæ istic demonstrata sunt inuenire. Quoniã aũt ostensum est sibi, ueluti in libro de Sphęra & cylindro dixit, quod figura huiusmodi est sesquitertia triãgulo habẽti basem, & altitudinem cum portione eandem: plano uero existẽte rectilineo sesquitertio, trianguli æquale possumus iuxta rectã datam applicare, constat quod & figuris huiusmodi. Quæ uero in apparatu dicta sunt, omnia clara per quartum theorema primi istorum libri.

In

IN SECVNDVM.

IN secundo theoremate prædicit quædam declarantia, quo pacto in sectione rectanguli coni figura cognitæ possit inscribi. Et dicit, hæc ostendenda sunt in ordinibus. Quoniam igitur dictum obscurũ est, necesse est pauca quædam de eo dicere ex Conicis Apollonij inuẽta. Esto figura cõtenta sub parabola a b c, & recta a c, cuius sit diameter b d. Constat quod uertex portionis est punctum b. Vertices uero appellat Apollonius, terminos, qui sunt ad rectas diametrorum. Si iam iunxerimus has a b, b c, erit triãgulus a b c, qui basem habeat cũ portione eandẽ, & altitudinem æqualem: ductã à puncto b ad ipsam a c perpendicularẽ. Sic enim omnino b d est axis, si sumentes uertices portionũ a b, b c, ipsos e, f, & per ipsos duxerimus parallelas ipsi b d, puta e g, f o, erũt ipsę diametri portionũ a b, b c. Ostẽsum est enim in parabola, quod omnes ductæ æquedistãtes iuxta diametrũ sunt diametri sectionis. erũt iam e, f uertices portionũ: & quæ per e, f applicatę æquedistãtes ipsis a b, b c: erit & e l f iuxta ipsam a c. Quoniam itaq; e h, f k sunt inuicẽ æquedistãtes, & existentes diametri æquales æqualiũ portionũ, & coaptatæ inuicẽ uti in sexto Conicorũ ostẽsum est: & quoniã e g h est æquedistãs ipsi b d, erit sicut b g ad g a, ita d h ad h a. Est aũt b g ęqualis ipsi g a. nã e g secat eã in duo æqua æquedistãtem applicatę cõtingenti. igitur d h est ęqualis ipsi h a. Et eadem ratione d k ipsi k c est æqualis. Tota uero a d est æqualis toti d c. igitur d h est ęqualis ipsi d k: et ex hoc e l ipsi l f. Quare uerissimè dictũ est, quod recta iũgẽs uertices portionũ, æquedistãs erit basi portionis, & in duo æqua diuidetur à diametro portionis. Iungãt



quoq; a e, e b, b f, f c. & diuidãtur in duo æqua pũctis m, n, x, o, & ducanẽ per pũcta m, n, x, o iuxta ipsam b d istæ p m r f, t n , q x z ω s o iungãtur a p, p e, e t, t b, b q, q f, f s, s c: & hę t a q, p b c d z s. Cõstat iã ex istis ante demõstratis, quod t q et e f, & p s sunt æquedistantes ipsi a c: & quod t a est qualis a q & p d ipsi d s. Dico quod hæ secãt ipsam b d in numeros consequenter impares: hoc est, cuius b a sit unum,

unum, eius erit a l tria, & l d quinque, & d d ſeptem: quoniam a g eſt æqualis ipſi g b, & e h eſt æquediſtans ipſi b d, erit a h æqualis h d. igitur d a dupla eſt ipſius d h: quare & ipſius e l. Igitur quadratũ a d quadruplum erit quadrato e l. Sicut autem quadratum a d ad quadratum e l, ita oſtenſum eſt eſſe b d ad b l. quare b d quadrupla eſt ipſius b l. igitur d l tripla eſt ipſius b l. Cuius igitur b l eſt unum, eius erit d l tria: & eadem ratione cuius b l fuerit quatuor, eius erit ipſa d l duodecim. & quoniam e n eſt æqualis ipſi n b, & e f ipſi f l, & h u ipſi u d, igitur e l dupla eſt ipſius l f, hoc eſt ipſius t a. igitur quadratum e l quadruplum eſt quadrato t a. igitur b l quadrupla eſt ipſius b a. quare l a tripla eſt ipſius a b. quorum igitur ipſa l b eſt quatuor, erit ipſa b a unum: et quorum ipſa l a tria, erit ipſa l d duodecim. Rurſus quoniam a m eſt æqualis ipſi m e, & a k ipſi k g, & a ſ ipſi ſ h: erũt igitur a ſ, ſ h, h u, u d inuicem æquales: quorum igitur a d eſt quatuor. eorum ſ d eſt tria, hoc eſt ipſa p d. quorum igitur quadratum a d eſt ſexdecim, horum quadratum p d eſt nouem: quorum igitur b d eſt ſedecim, eorum eſt nouem b d, & reſidua d d ſeptem. Quoniã igitur oſtenſum eſt, quorum b d eſt ſedecim, eorũ b a eſſe unum, & a l tria, & d d ſeptem: erit igitur reſidua l d quinqꝫ. Diuiditur ergo ipſa b d ab æquediſtantibus in numeros conſequenter impares, ea quæ ad uerticem portionis eſt parte ab unitate denominata. Cõſtat igitur ex deſcriptione, quod ductæ à diametris in numeros ab unitate cõſequenter diſpoſitos excreſcunt. Cuius enim eſt t a unum, eius eſt e l duo, & p d tria, & a d quatuor. Cum enim ſint omnes æquediſtantes, ſecãtur in æqualia. Appellatur autem ab Archimede figura a p e t b q f s c, cognitæ inſcripta.

IN TERTIVM.

SImiles portionum ſectiones coni Apollonius diffiniuit in ſexto libro Conicorum illas, in quibus ſi ducantur in unaquaque æquediſtantes baſi æquales numero æquediſtantes, & baſes ad abſciſas ab ęquediſtantibus uerſus uerticem partes diametrorum in eadem proportione erũt, & abſciſæ ad abſciſas, & quod parabolæ omnes ſunt ſimiles inuicem. Figura uero cognitæ inſcripta, quid ſit, dictũ eſt in præſumpto limmate. Hoc autem ſimiliter diuidere diametros eſt, ut portiones earum eandem habeant proportionem. Reſiduum uero theorematis eſt clarum ex prædicta figura.

IN QVARTVM.

INſcribatur rectilinea figura cognitæ in portione, ita ut circumciſæ partes ſint minores ipſo k. hoc autem manifeſtum eſt ex prædictis, in ſecundo Stichioſis ordinationis, & in primo de Sphæra & cylindro.

IN QVINTVM.

ET quoniam h f g i eſt parallelogrammum, &c. quoniam enim hæ k f, l g ſunt æquales. Sunt enim portionũ æqualium diametri, & æqualiter ab axe diſtãtes a b d, & ſimiliter diuiduntur à centris h i, erit ſicut k h ad h f, ita l i ad i g, & permutatim. & idcirco h f eſt æqualis ipſi g i. eſt autem & æquediſtans ei. nã omnes diametri parabolæ ſunt æquediſtantes: igitur ipſum h f g i eſt parallelogrammũ.

IN SECVNDAM PARTEM QVINTI.

ERit itaqꝫ magnitudinis compoſitæ ex utriſqꝫ a k b, b l c portionibus centrum grauitatis q. & compoſitæ ex utriſqꝫ a k b, b l c triangulis, eſt centrum c, &c. Oſtenſum eſt enim in præſumpto, quoniam h m iungens centra portionum, bipartitur ab ipſa b d puncto q, cum ſit ipſi f g æquediſtans: & g h bipartitur puncto t. quare t eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex triangulis a k b, b l c. Quoniam igitur triangulus b a c maiorem proportionem habet ad triangulos a k b, b l c, ꝙ ad portiones, & reliqua. Quoniam enim oſtenſum eſt, trianguli a b c centrum grauitatis eſſe e: & triangulorum a b k, b l c centrum t, manifeſtũ eſt quod rectilinei a k b l c centrum grauitatis eſt in t e, diuiſa puncto R ſecundũ mu-

mutuam proportionẽ, quam habet triangulus a b c, ad triangulos a k b, b l c. quoniam aũt triangulus a b c maiorem proportionẽ habet ad triangulos a k b, b l c, ꝙ ad portiones: nam portiones ſunt triangulis maiores: cõſtat quod ſi ſecuerimus ipſam et in proportionẽ quam habet triangulus ad portiones, punctũ ſectionis cadet ſuperius ꝙ ſit R: quod erit centrũ totius portiõis, propter mutuã affectionẽ.

IN SEXTVM.

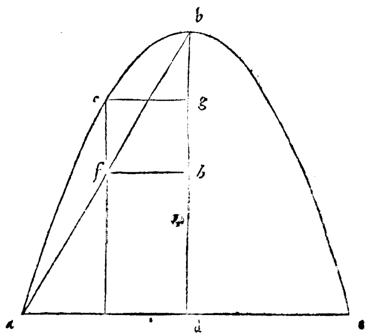
CEntrum portionis eſt omnino unum, & propinquius uertici portionis, ꝙ centra inſcriptarum rectilinearum. Nam trianguli a b c centrum grauitatis eſt, ſi contingat e, ipſa b d, ita diuiſa ut e b ſit dupla ipſius e d. Cõſtat quod omnia centra inſcriptarum rectilinearum cadent inter puncta h e. & quanto plurium laterum fuerit inſcriptum cognitæ, tanto magis ipſi h appropinquat. Conſtat itaqꝫ quod eſſe non poteſt, ut linea inter centrum inſcripti cognitæ rectilinei, & centrũ portionis intercepta ſit maior e h. poteſt autem minor eſſe non ſolum ipſa h e, uerum omni alia data.

IN SEPTIMVM.

INſcribatur itaqꝫ in portione a b c rectilineũ, ſimile ei quod eſt in portione d e f, hoc eſt ſimiliter cognitæ. Similiter enim cognitæ inſcribitur, quando ſectiones parabolæ a b c æquales fiant ipſi e f g, ita ut latera cognitæ inſcripti ipſi portioni a b c, ſint numero æquales rectilinei laterib. inſcripti ipſi e f g. quoniam enim puncta b & f, ſunt uertices ſimilium portionum, erunt ita cognitæ inſcripta ſimilia.

IN OCTAVVM.

ET quoniam eſt ſicut b h ad h d, ita k m ad m f. nam portiones cum ſint ſimiles, habebunt centra diuidentia diametros in eaſdem portiones. & componẽti, ſicut b d ad d h, ita k f ad f m: & permutatim, ſicut b d ad k f, ita d h ad m f. Eſt autem b d quadrupla ipſius k f. hoc enim in fine oſtenditur, ubi eſt ſignum hoc ✐. Cõſequenter autẽ illud nos oſtendemus. Eſto parabola a b c, cuius diametros b d, & ducatur ordinate a d, & iungatur a b: & diuidatur a b in duo æqua puncto f, & ducatur per f æquediſtans ipſi b d ipſa e f. igitur ipſa e f eſt diametros portionis a b: & à punctis e f ducantur ordinate hæ e g f h. Quoniam itaque a f eſt æqualis f b, erit a b dupla ipſius f b, & a d ipſius f h: hoc eſt ipſius e g. Quare quadratum a d eſt quadruplum ad quadratum e g:



quare d b quadrupla eſt ipſius b g longitudine. Quoniam igitur b d eſt dupla ipſius b h, erit b h dupla ipſius b g, & ipſa h g æqualis ipſi g b: & ipſa h g æqualis etiam ipſi e f. quia ipſum e g f h eſt parallelogrammum. Igitur ipſa b d eſt quadrupla ipſius f e. & quoniam ipſa b d eſt quadrupla ipſius b ſ, etenim hoc eſt oſtenſum. nam oſtenſum eſt in ſumpto, ipſam b d utriqꝫ harum b g, e f eſſe quadruplam: quare b g eſt æqualis ipſi e f: & idcirco iſtic ipſa b ſ ipſi k f æqualis, & b d utriqꝫ earum quadrupla: igitur ipſa b ſ eſt tertia pars ipſius ſ d. quoniam enim b d eſt quadrupla ipſius b ſ. Quorum igitur ipſa b d eſt quatuor, eorum ipſa b ſ eſt unum: & quorum b d eſt duodecim, eorum ipſa b ſ eſt tria. Eſt autem b ſ tripla ipſius ſ x. quorum igitur b ſ eſt tria, ipſa ſ x eſt unum. Tota igitur b x eſt quatuor: horum autem erat b d duodecim: igitur b x eſt tertia pars ipſius b d. Triplus autem tri-

triangulus a b c portionum. Ostensum enim est ab eo, in eo quod scripsit de Coni rectanguli sectione quod omnis figura cōtenta à recta, & sectione rectanguli coni, est sesquitertia trianguli basem eandem habentis, & altitudinē æqualem. quare portio a b c, est sesquitertia triāguli a b c: & diuidenti, triangulus a b c est triplus portionū a k b, b l c. & est d b tripla ipsius e d. igitur ipsa b h est sesquitertia ipsius h d, quod erat demostrandum. quoniam enim b d est tripla ipsius d e. Quorum igitur b d est quindecim, eorum e d est quinq; : quorum uero d e est quinq;, eorum h e est unum : & tota h d sex, scilicet sexcupla ipsius h e. Quorū igitur b d quindecim, eorum d h est sex: & reliqua h b, nouem. quare b h est sesquialtera ipsius h d.

IN NONVM THEOREMA.

NOnum theorema ualde obscurū, exponemus iuxta loquentes quàm clarè poterimus. Quoniam enim istæ a b, b c, b d, b e sunt proportionales, & diuidenti, & permutatim, erūt a c, c d, d e in eadem proportione. Quoniam igitur a b, b c, b d, b e in eadem sunt proportione, & istæ a c, c d, d e. est sicut in primis magnitudinibus antecedens, & medium ad sequens: ita in secundis magnitudinib. antecedens, & medium ad sequens. Sicut ergo utreq; simul a c, c d: hoc est, d a ad d e: ita utraq; simul a b, b c ad d b. Sicut aūt utraq; simul a b, b c ad d b: ita dupla utriusque simul a b, b c ad duplam ipsius b d: quia partes eandem suis multiplicibus habent proportionem. Sicut ergo a d ad d e, ita duplum utriusq; simul a b, b c ad duplum d b. Rursus quoniam istæ c b, b d, b e in eadem sunt proportione & iste a c, c d, d e. est autem per prædicta sicut a d ad d e, ita utraq; simul e b, b d ad b e. Erat autē sicut a d ad d e, ita duplum utriusq; simul a b, b c ad duplum ipsius b d. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia. Sicut ergo a d ad d e, ita antecedētia ad sequentia. Sunt autem antecedentia duplū utriusq; a b, b c: et utraq; c b, b d, hoc est duæ a b, tres c b, & una b d: sequētia uero duplum, b d, & sola b e. Est igitur sicut a d ad d e, ita recta composita ex dupla ipsius a b, & tripla c b, & sola d b ad compositam ex dupla b d & sola b e. Et quoniam composita ex duplo a b, & quadruplo c d, & quadruplo d b, et duplo b e, maior est composita ex duplo a b, & triplo c b, & sola d b: maius autem habet ad idem maiorem proportionem, quàm minus: maiorem ergo proportionem habet composita ex duplo utriusque simul a b, b e, & quadruplo utriusque simul c b, b d, ad compositam ex duplo d b, & sola e b, quā composita ex duplo a b, & ex triplo c b, & sola d b, ad compositam ex duplo b d, et sola e b. Verum sicut cōposita ex duplo a b, & tripla c b, & sola b d, ad compositā ex duplo b d & sola e b: ita ostēsum est esse a d ad d e. Igitur cōposita ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla b d, & sola e b, maiorē proportionem habet, quā a d ad d e. Si igit̄ uoluerimus facere eādem proportionē ipsius a d ad quandā aliam, erit illa minor quā d e. sit aūt d o. Est igit̄ sicut a d ad d o, ita composita ex dupla a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla b d, & sola e b. Et ecōuerso, igitur est sicut o d ad d a, ita composita ex dupla b d, & sola e b, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d: & componēti, sicut o a ad d a, ita composita ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexcupla ipsius b d, & tripla ipsius b e, ad cōpositā ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Ipsa enim b d sexies sumpta est, quater in primis, bis in secundis, & ipsa b e ter sumpta: bis inter primas, semel inter secundas. Supponitur autem & a d habere ad g h, eam proportionem, quam habet composita ex quincupla utriusque simul b e, & decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, sexcupla b d & tripla b e, & est proportionalitas indirecta. Per æquam igitur, sicut o a ad g h, ita cōposita ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Huius autem descriptæ proportionalitatis conditio sic fiet manifesta. Quoniam enim in primis ma-

magnitudinibus sicut antecedēs o a, ad consequens a d, ita in secundis magnitudinibus antecedēs composita ex dupla a b, & quadrupla b c, & sexcupla b d, & tripla b e, ad consequentem compositam ex dupla utriusq; a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinibus consequens ipsa a d, habet ad quoddam aliud, ad ipsam g h: ita in secundis magnitudinibus aliud quid composita ex quincupla utriusq; a b, b e, & decupla utriusq; simul c b, b d ad cōpositam ex dupla a b, & quadrupla c b, et sexcupla b d, & tripla b e. Quoniam autem quincupla utriusq; simul a b, b e ad duplam eiusdem, eam habet proportionem quam quinq; ad duo: habet autem et decupla utriusque simul c b, b d ad quadruplam eiusdem proportionem, quam quinq; ad duo: quandoquidē decem ad quatuor habeāt eam proportionem quam quinq; ad duo. Cōposita igit̄ ex quincupla utriusq; simul a b, b e, & decupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, proportionem habet quam quinq; ad duo. Quare a o ad g h proportionē habet, quam quinq; ad duo. Rursus quoniā ostensum est superius, quod o d ad d a proportionem habet, quam e b cum dupla d b ad æqualē compositæ ex dupla utriusq; a b, b e, cum quadrupla utriusq; c b, b d. Est autem sicut cōsequens in primis magnitudinibus d a, ad aliud quid d e: ita in secundis magnitudinibus aliud quiddā cōposita ex dupla a b, tripla c b, & sola d b, ad antecedēs, cōpositam scilicet ex e b, & dupla b d. dissimiliter indirecte proportio, hoc est proportionalitate indirecta. Igitur sicut o d ad d e, ita composita ex dupla a b, tripla c b, & sola b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Quare & exconuerso sicut e d ad d o, ita composita ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositā ex dupla a b, & tripla c b, et sola b d. & euertenti, sicut d e ad e o, dico antecedens ad excessum, ita cōposita ex dupla utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla b c, b d, ad compositā ex c b sola, & tripla b d, & dupla e b. In antecedēte enim est dupla ipsius a b, & ipsius e b: in cōsequēte uero dupla ipsius a b sola. quare superfluit in excessibus dupla ipsius e b. Rursus in antecedēte quadrupla utriusq; simul c b, b d: in consequente uero tripla ipsius c b, & sola b d: quare superrelicta fuit in excessibus sola c b, & tripla ipsius b d. Bene igitur dictū est quod est euertēti sicut d e ad e o, ita composita ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad cōpositā ex c b, & tripla ipsius b d, & dupla ipsius e b. Quare ē cōuerso sicut o e ad e d, ita cōposita ex c b & tripla d b, et dupla e b, ad compositā ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Est aūt sicut d b ad aliud quiddā ad ipsum e b ita a b, ad b c, et diuidēti sicut d e ad e b, ita a c ad c b. Eadē aūt ratione sicut c d ad e b, ita d e ad e b. Sicut ergo tripla ipsius c d, ad triplā ipsius d b, ita dupla ipsius d e, ad duplā ipsius b e. Partes eīn eā inuicē habent proportionē, quam earū æquemultiplicia. Igitur sicut unū ad unū, ita omnia antecedentia ad omnia sequentia. Est igitur sicut d e ad e b, ita composita ex a c, & tripla c d & dupla d e, ad cōpositam ex c b, & tripla ipsius b d, & dupla ipsius b e. Quoniam enim ostensum est, sicut in primis magnitudinibus antecedens o e ad sequens d e, ita in secūdis magnitudinibus composita ex c b, & tripla ipsius b d, & dupla ipsius b e, ad sequens cōpositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. Sicut autem in primis magnitudinib. sequēs d e ad aliud quiddam ad ipsam e b: ita in secundis magnitudinibus aliud quiddam composita scilicet ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad antecedens compositam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Per æquam igitur in proportionalitate indirecta, sicut o e ad e b, ita composita ex a c, tripla c d, & dupla d e, ad cōpositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. & componenti sicut o b ad b e, ita composita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, & dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad compositam ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Verum compoſita ex a c & tripla c d & dupla d e, & dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, æqualis eſt cõpoſitæ ex tripla a b, & ſextupla c b, & tripla d b. Ipſa enim a b bis aſſumpta eſt, inde & aſſumens ipſam a c, & ex quadrupla ipſius c b, unam facit tertio ipſam a b. Rurſus ablata à quadrupla ipſius c b, una manet tripla ipſius c b. Aſſumens autem triplam ipſius c d, & triplam d b, facit ſextupla ipſius c b. Rurſus ea ablata à quadrupla ipſius d b, remanet ſola d b: quę aſſumens duplã ipſius d e, & duplã ipſius e b, facit triplã ipſius b d. Bene igitur dicit quod o b ad e b eam habet proportionẽ, quam compoſita ex tripla a b & ſextupla c b, & tripla d b, ad compoſitã ex dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d. Rurſus quoniam hæ e d, d c, c a ſunt in eadem proportione, & per conuerſum ſuppoſitionis utraq; ſimul, unaquęq; harum e b, b d, b c, b a erit ſicut e d ad mediam, & ſequentẽ ipſas d c, c a, hoc eſt ad ipſam d a, ſic utraq; ſimul e b, b d ad utranq; d b, b c, cum utraq; ſimul c b, b a. & componenti ſicut e a ad d a, ita utraq; ſimul e b, b d, cum utraq; ſimul d b, b c, & cũ utraq; ſimul c b, b a, ad utrãq; d b, b c, cum utraque ſimul e b, b a. Verum utraq; ſimul c b, b d, cum utraq; ſimul c b, b a, æqualis eſt utriq; ſimul e b, b a, & bis utriq; ſimul d b, b c. Semel enim extremæ ſumũtur, & mediæ bis. At uero utraq; ſimul d b, b c, cum c b, b a, æqualis eſt utriq; ſimul b d, b a, & bis c b, eadem cauſa. Quare eſt ſicut e a ad d a ita compoſita ex e b, b a & dupla utriuſq; ſimul d b, b c, ad compoſitam ex utraq; ſimul d b, b a, & dupla ipſius c b: quare & dupla ad duplam habet eandem proportionem. Sicut ergo e a ad d a, ita cõpoſita ex dupla utriuſq; ſimul, e b, b a cum quadrupla utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla utriuſque ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. quare ſicut e a ad tres quintas ipſius d a, ita compoſita ex dupla utriuſque ſimul e b, b a, & quadrupla utriuſque ſimul c b, b d, ad tres quintas cõpoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. Verũ ſicut a e ad tres quintas ipſius d a, ita ſumpta eſt b e ad f g. Sicut ergo e b ad f g, ita compoſita ex dupla utriuſq; ſimul e b, b a, et quadrupla utriuſq; ſimul c b, b d, ad tres quintas cõpoſitæ ex dupla utriuſque a b, b e, & quadrupla ipſius c b. quoniã igitur oſtenſum eſt, ſicut antecedens o b ad conſequens b e, ita antecedens tripla utriuſq; ſimul a b, b d, cum ſextupla ipſius b c ad duplam utriuſq; ſimul a b, b e, et quadruplam utriuſq; c b, b d. ſicut autem conſequens ipſa e b ad aliud quiddam, id eſt ad f g, ita conſequens dupla utriuſq; ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſq; ſimul d b, b c, ad tres quintas ſequentis, hoc eſt ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. In directa igitur proportionalitate per æquam, ſicut o b ad f g, ita compoſita ex tripla utriuſque ſimul a b, b d, & ſextupla c b ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b. Compoſita uero ex tripla utriuſque ſimul a b, b d, & ſextupla c b, ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſq; ſimul a b, b d, & quadrupla ipſius c b, proportionẽ habet quam quinq; ad duo. Nam tripla utriuſque ſimul a b, b d, ad duplam utriuſq; ſimul a b, b d, proportionem habet ſeſquialterã: ſed & ſextupla c b ad quadruplam c b, eandem habet proportionem ſeſquialteram. Quoniã uero antecedentia ad conſequentia ſeſquialtera ſunt, & proportionẽ habent eã quam tria ad duo, igitur habebunt ſicut quadragintaquinq; ad triginta. utrunq; enim utriuſque eſt quindecuplum. Sunt autem decem octo tres quintæ de triginta. igitur quadraginta quinq; ad decem octo habent proportionem, quam compoſita ex tripla utriuſq; ſimul a b, b d, cum ſextupla c b ad tres quintas compoſitæ ex dupla utriuſque ſimul a b, b d cum quadrupla c b, qualis eſt etiam proportio o b ad f g. ſed quadraginta quinq; ad decem octo eam habent proportionẽ, quam quinque ad duo: nam quinque & duo ſunt utriuſque nonæ, quare & o b ad f g eã habet proportionem, quam quinque ad duo. Quoniam igitur oſtenſum eſt, quod

o a ad

o a ad g h proportionem habet eam quam quinq; ad duo, & o b ad f g eandẽ proportionem, erit ipſa f h duæ quintæ ipſius totius a b.

IN DECIMVM THEOREMA.

Conſtat iam quod fruſti a d e c diametros eſt ipſa f g,,. quoniã enim ſupponitur ipſa f b diametros ipſius portionis, & iſtæ a c, d e bipartitæ ab ea punctis f g ſunt æquediſtantes ei quæ in b contingit ſectionem, conſtat quod omnes ſimiliter ab illis ductæ æquediſtantes ſiue inter illas, ſiue inter ipſam d e, & uerticem b bipertientur ab ipſa g f. & ideo dixit ipſam f g eſſe diametrum fruſti.

Verũ ſicut cubus a f ad cubũ ipſius d g, ita portio a b c ad portionẽ d e b,,. Quoniã eñ oſtẽſum eſt, ab eo quod portio a b c eſt ſeſquitertia triãgulo a b c. et portio d e b eſt trinagulo d e b. itẽ ſeſquitertia erit ſicut portio a b c ad triangulũ a b c, ita portio d e b ad triangulũ d e b. & permutatim ſicut portio ad portionem, ita triangulus ad triangulũ, & ita quoq; dimidia eorũ: ſicut portio a b c ad portionẽ d e b, ita triãgulus a f b ad triãgulũ d g b. quare ſi deſcribamus parallelogrãma, erũt dupla triangulorũ æquiangula, propterea quod d g & a f ſunt ęquediſtantes. quare & pro portionem habebunt compoſitam ex proportione laterũ a f d g, & f b ad b g. eadem aũt proportio triangulorum & portionũ. Portio igitur habet ad portionem proportionem compoſitã, ex proportione a f ad d g, & ex f b ad b g. Proportio autem f b ad b g eſt eadem ei quæ eſt quadrati ex a f ad quadratum ex d g. Proportio igitur portionis ad portionem, componitur ex proportione quadrati ex a f ad quadratum ex d g, et ex a f ad d g. proportio quoq; cubi ex a f, ad cubum ex d g, componitur ex eiſdẽ, uti oſtenſum eſt in expoſitionibus de Sphæra & cylindro. Eſt ergo ſicut portio ad portionem, ita cubus ex a f ad cubũ ex d g. Et quoniam ſolidum quod baſim habet quadratum ex a f, altitudinem uero lineam cõpoſitam ex dupla ipſius d g, & ipſa a f habet eam proportionem ad cubum ex a f quam dupla ipſius d g cum ipſa a f habet ad f a,,. Nam in eiſdem baſibus exiſtentia habent inuicem ueluti altitudines. Eſt autem ſicut d g ad a f, ita x n ad m n. & ſicut dupla ipſius b g ad a f, ita dupla ipſius n x ad n m: & cõponenti, ſicut dupla n x cum n m, ita dupla d g cum a f ad a f. Oſtẽſum eſt autem, ſicut cubus ex a f ad cubum ex d g, ita cubus ex m n ad cubum ex n x. & m n ad n t, ſunt quatuor proportionales. & ſicut prima ad quartam, ita ſolidum ex prima ad ſolidũ ſibi ſimile ex ſecunda & ſimiliter figuratum. Sicut autem cubus ex d g ad ſolidũ quod baſim habeat quadratum ex d g, altitudinẽ uero rectam, compoſitam ex dupla a f, & ipſa d g, ita d g ad compoſitam ex dupla ipſius a f & ipſa d g. Rurſus enim habentur inuicem ſicut eorum altitudines. Sicut autem d g ad duplam ipſius a f, cũ ipſa d g: ita t n, ad compoſitam ex dupla ipſius o n cũ ipſa t n. eſt enim ſicut a f ad d g, ita m n ad n x, & o n ad n t. & è conuerſo ſicut d g ad a f, ita t n ad n o. Factę igitur ſunt quatuor magnitudines continenter inuicem poſitæ: prima quidem ſolidum quod habet baſim, quadratum ex a f, altitudinem uero rectam compoſitã ex dupla d g & ipſa a f, & ſecunda cubus ex a f, tertia cubus ex d g: quarta ſolidũ quod habet baſim quadratum d g, altitudinem uero rectam compoſitam ex dupla a f & ex ipſa d g. & aliæ quædam rectæ in eadem proportione binæ & binæ ſumptæ, ipſa compoſita ex dupla n x, & ſimpla m n, & ſecunda m n: & tertia n t, & quarta compoſita ex dupla o n & ex n t. igitur per æquam fiet ſicut ſolidum baſim habens quadratum ex a f, & altitudinem rectam compoſitam ex dupla d g & ipſa a f, ad ſolidum baſim habens quadratum ex d g, & altitudinem compoſitam rectam ex dupla a f & ſimpla d g: ita ipſa compoſita ex dupla n x, cum m n, ad cõpoſitam ex dupla n o cum ſimpla n t. Verum ſicut ſolida prædicta inuicem, ita oſtenſum eſt eſſe h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, ita compoſita ex dupla x n, & ſimpla m n, ad duplam n o, & ſimplum n t. & componenti, ſicut h k ad k i, ita compoſita ex utraq; ſimul m n, n t, & dupla utriuſq; ſimul x n, n o, ad compoſitam ex dupla ipſius n o, & ſimpla n t. Sicut autem f g, ad f k, ſcilicet duas eius quintas: utraque enim harum g h, f k, eſt duæ quintæ ipſius g f, quoniam media quinta ponitur ipſa h k: ita compoſita ex quincupla utriuſq; ſimul m n, n t, & decupla utriuſque ſimul x n, n o, ad duplam utriuſq; ſimul m n, n t, et quadruplam utriuſq; ſimul x n, n o. duo enim ex quinq; & quatuor, ex decem duæ quintæ exiſtunt. Quoniã igitur oſtenſum eſt, ſicut f g ad i k, ita quincupla ipſius m n, n t, & decupla ipſius x n, n o, ad duplam ipſius n o & ſimplam n t. Rurſus oſtenſum eſt, quod ſicut f g ad f k, ita quincupla utriuſq; m n, n t, & decupla x n, n o ad duplã ipſius m n, n t, & quadruplam ipſius x n, n o: erit ſicut antecedẽs ad duo ſequentia, ita antecedens ad duo ſequentia: ſicut f g ad f i, ita compoſita ex dupla ipſius o n, & ſimpla n t, et dupla utriuſq; ſimul m n, n t, & quadrupla ipſius x n, n o: quæ eſt ęqualis compoſitę ex dupla m n, et quadrupla x n, et ſexcupla ipſius n o, & tripla ipſius n t. ſic enim ſumptum eſt ſuperius. Quoniam igitur quatuor rectę ſunt cõtinuę proportionales hę m n, n x, o n, n t: & eſt ſicut n t ad t m, ita quædam ſumpta, hoc eſt r i ad f h, hoc eſt ad tres quintas ipſius g f, hoc eſt ipſius m o, & oſtenſæ ſunt in rationali proportionalitate proportionales, erit per prædictũ r f duæ quintæ ipſius m n, hoc eſt ipſius f b. igitur b r eſt tres quintæ ipſius b f. igitur b f ad r f proportionem habet, quam quinq; ad duo. quare punctum r eſt centrum grauitatis portionis a b c. Si iam ſumpſerimus centrũ grauitatis portionis b d e in puncto q, erit b q tres quintæ ipſius q g. Factum eſt itaq; ſicut tota f b ad totam b r, ita ablata b g ad ablatam b q. utraque enim earum ad utramque proportionem habet, quam quinq; ad tria. Igitur reſidua f g ad reſiduam q r proportionem habebit, quam quinq; ad tria. Quoniã igitur ſupponitur, ſicut fruſtũ a d, e c ad portionẽ d e b, ita m t ad t n: & ſicut m t, ad t n, ita tres quintę ipſius f g, hoc eſt ipſa f h uel q r ad r i. erit ergo ſicut fruſtum ad portionem, ita q r ad r i. & mutuo afficiuntur, & r eſt centrum totius portionis, igitur ipſum id eſt centrum fruſti.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in ſecundum æquelibrantium Archimedis Finis.

SERIES CHARTARVM.

∗ α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ. †† a b c d e f g h i k l m n o p q r ſ t u. Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii. Omnes duerniones, præter ρ & u terniones.

BASILEAE, PER IOANNEM HERVAGIVM, ANNO AB ORBE REdempto, M.D.XLIIII. menſe Martio.