

FA 7 B 60

DE' CALCOLI
Differenziale, e Integrale,
MEMORIE ANALITICHE
DI DOMENICO
DE' CORRADI D' AUSTRIA

PATRIZIO MODENESE

COMMESSARIO GENERALE DELLE MUNIZIONI DA GUERRA,

E COLONNELLO DEL REGGIMENTO DI ARTIGLIERIA

DI S. A. S. IL SIGNOR DUCA DI MODENA

A Sua Eccellenza

LA SIGNORA CONTESSA

D. CLELIA
GRILLA-BORROMEA

IN MODENA,

PER FRANCESCO TORRI)(1743. X

Con Licenza de' Superiori.

I. 360

ECCELLENZA.



ON crederei, che alcuno mi chiedeſſe mai conto, perch' io abbia oſato di dedicare a VOSTRA ECCELLENZA *queſto Trattato del Signor Corradi a Lei ben noto, e ſcritto col linguaggio dell' Algebra più aſtruſa, quaſi che mal conveniſſero ad una gran Dama materie tanto ſottili: Pure ſe taluno di ciò ſi maravigliaſſe, io bruſcamente gli riſponderei, aver egli da condennare, non la riverente riſoluzione mia, ma la propria ignoranza ſua. Imperciocchè chi c' è fra gli amanti delle Lettere, il quale non ſappia fin dove arrivi il feliciſſimo ingegno, e ſtudio dell' E. V., e qual ſia la celebrità del ſuo Nome in Italia? Superiore Ella al ſuo Seſſo, niuna Arte, niuna Scienza può contare, che ſia a Lei foreſtiera: tanta è la penetrazione della ſua mente, tale è ſtata ſempre l' applicazione, e il pia-*

cer ſuo nell' arricchirſi di nuovi lumi, o faticando ſu i Libri, o converſando, e quiſtionando colle perſone in ogni ſorta di Letteratura eſperte. Le medeſime Matematiche, le quali pure ſembrano riſerbate a i più ſpeculativi ingegni, le ha Ella trovate un paſcolo degno del ſuo vigoroſo Intelletto. A queſti bei pregi ſi aggiunga l' innata ſua gentilezza, con cui ſa cattivarſi la venerazione, e l' affetto d' ognuno; di maniera che non ſolo in Milano, ma per quante Città d' Italia Ella è paſſata, dapertutto ha raccolto tributi di lodi, ed applauſi. Nè minori ſon quelli, che ha ricevuti da tanti Letterati, i quali han reputata lor ſomma gloria il dedicare a Lei le erudite loro fatiche, riconoſcendo in V. E. non meno una Protettrice delle Lettere, che un Giudice competente in ogni ſorta di ſapere. Il perchè queſto Libro ornato del celebre ſuo Nome vien con fiducia a preſentarſi al ſuo Tribunale, luſingandoſi di un benigno gradimento da chi più che l' illuſtre ſua Nobiltà, e più che le tante prerogative della Caſa ſua Paterna, e Maritale, ſtima, ed ama i parti dell' umano Ingegno. Dègniſi ancora V. E. di ricevere con eſſo le proteſte più umili di quel ſingolare oſſequio, col quale io mi glorierò ſempre, s' Ella mel permetterà, di proteſtarmi

Di VOSTRA ECCELLENZA

Modena li 15. Marzo 1743.

Umiliſſimo, Divotiſſimo, ed Obbligatiſſimo Servidore
Francesco Torri

TAVOLA
Delle Sezioni, e de' Capi della Prima Parte.

SEZIONE I.	*Della natura de' Problemi.*	Pagina 3.
SEZIONE II.	*Delle quantità variabili, onde ne naſcono le Differenziali.*	Pag. 6.
SEZIONE III.	*De' modi di ritrovare le Differenziali delle Variabili.*	Pag. 16.
CAPO I.	*Di quelle Differenziali, che ſi ritrovano per mezzo del ſolo Calcolo.*	Pag. 56.
CAPO II.	*Delle Differenziali, che la Geometria ci ſomminiſtra.*	Pag. 30.
CAPO III.	*Della linea Logoritmica, e ſue Differenziali.*	Pag. 48.
CAPO IV.	*Delle quantità eſponenziali, e loro Differenziali. De' Logoritmi elevati a qualunque dignità, e delle Differenziali di queſti.*	Pag. 70.
APPENDICE	*Nella quale pel biſogno delle preſenti Memorie ſi tratta dell' uſo delle quantità Logoritmiche, ed eſponenziali.*	Pag. 74.
SEZIONE IV.	*Delle cognizioni, che il Calcolo Differenziale da ſe ſolo ci ſomminiſtra.*	Pag. 120.
SEZIONE V.	*Delle Differenziali, che oltreppaſſano il primo grado.*	Pag. 124.

Die 18. Novembris 1741.

IMPRIMATUR.

F. CAROLUS HYACINTHUS BELLIARDI S. T. M.
ET VICARIUS GENERALIS S. O. MUTINÆ.

VIDIT.

BORSIUS COMES SANTAGATA.

PARTE PRIMA.

Del Calcolo Differenziale.



OPO d' avere, a gloria di noſtra Italia, l' Inſigne Geometra *Buonaventura Cavallerio* ſvegliata l' idea degl' *Indiviſibili*, e felicemente adoperatela nella Geometria, e dopo d' aver ſuſſeguentemente preſa a conſiderare queſta medeſima idea, ma veduta per altre facce, i due primarj Maeſtri delle Matematiche diſcipline il *Newton*, e il *Leibnizio*, i quali ben toſto inventarono un calcolo a tali quantità appropriato; è vantaggioſamente ſucceduto, che la Geometria non ſolo, ma le Matematiche Miſte abbiano fatti progreſſi, che con tutta ragione dir ſi poſſono inaſpettati. Molti Valentuomini però, provveduti fuor di dubbio di gran talento, e ſapere, non ſanno [e con detrimento non picciolo delle Matematiche] acquetarſi all' uſo di queſti calcoli, parendo loro, che manchino di quella certezza, che mai da tali Scienze dee ſtar diviſa; laonde piuttoſto che far viaggio per iſtrada sì piana, ma che eſſi hanno in ſoſpetto, vogliono ſalire alla gloria di ſublimi ſcoperte per l' erta, ma ſicuriſſima via

Sintetica. Alcuni poi guarniti pure di buon talento, ma quasi Principianti, non ſanno in eſſi calcoli far progreſſi per mancanza d' ajuto.

Le coſe, che finora a me è avvenuto di veder pubblicate intorno a queſti due Calcoli, ſono per verità non poche, ed ottime; non tutte però a mia notizia ſono giunte. Sono dunque perſuaſo, che tali coſe, per quanto io ſappia, non ſieno ſtate per anche compilate da Autor veruno tanto metodicamente, che pe' Principianti vi ſia baſtevole iſtradamento, e che per que' Dotti, i quali ſoſpettano della loro certezza, ſieno ſufficienti a quetarli.

Preſo io dunque per tanto dalla fecondità di tali due Calcoli, ho fatto intorno ad eſſi qualche ſtudio; ma benchè le mie continue incumbenze, le quali mi hanno obbligato a paſſare la maggior parte del viver mio viaggiando, e penſando ad altro, non mi abbiano permeſſo, ſe non di andare notando ſopra di tale argomento alcune Memorie, e l' età mia ormai avanzata, non mi laſci ſperanza, ancorchè ora goda una vita meno diſtratta, di potere ad eſſe memorie dare tal finimento, che poſſa farle comparire un Opera in qualche modo compiuta; ciò non oſtante mi riſolvo a pubblicarle, perſuaſo che a' Principianti poſſano preſtar quell' ajuto, di cui hanno biſogno, ed a i Dotti, i quali diffidano della certezza di amendue i nominati Calcoli, poſſano levare lo ſcrupolo.

Il mio ſtudio dunque ſarà di dare alle Memorie medeſime la maggiore chiarezza, che io ſaprò, ed inſieme un tal ordine, e legamento, onde riſulti nel ſuo vero eſſenzial lume la vera, ed eſſenziale eſſiſtenza delle *Quantità Differenziali*, ed entrando nell' intima loro natura, renderla manifeſta, e diſtinguendo la diverſità individuale delle loro varie ſpecie, render facile, e piano il ſapere applicare a dovere, e ſenza errore, alle medeſime il proprio loro algoritmo.

Così facendo verrò pure a largamente facilitare i Metotodi tanto utili, e neceſſarj per iſtendere oltre a' confini preſenti il Calcolo Integrale. Non pretendo però di portarli al ſommo, anzi forſe ſcoprirò le individuali difficoltà, che ſi oppongono a potervi riuſcire, ma ſpero ben certamente di oltreppaſſare quanto io ſo eſſere fin ora ſcoperto. Anzi qui è per

per l' appunto, ove queſta mia Operetta ſe ne ſtarà ne' limiti di pure Memorie; imperocchè aprirò quanto baſta i medeſimi Metodi, ma laſcierò poi, che chi vorrà in eſſi eſercitarſi, e far viaggio, ſi avanzi, ed altre utili ſcoperte ci dia. Manca a me il tempo, e l' ozio di ſfruttare i Campi, che avrò ſcoperti, e però, laſciando tal Meſſe a' miei corteſi Lettori, li pregherò a conſiderare, che intanto per queſto capo quest' Operetta mia ſarà mancante, in quanto mi vi coſtringe la riferita neceſſità; ſtimando pur meglio il tentare di giovare al Pubblico con delle Memorie non affatto compiute, che per la delicatezza di non darle tali, partirmi inutile da queſto Mondo.

Del Calcolo Differenziale.

SEZIONE PRIMA.

Della Natura de' Problemi.

PEr rintracciar dunque, e ſtabilire i ſodi fondamenti del Calcolo Differenziale, e Integrale, mi ha paruto, dopo un maturo eſame di queſto argomento, neceſſario ricercarli nella natura de' Problemi, e che di altronde aver non ſi poſſano. Vedremo ſe ciò ſuſſiſta in fatto da quanto andrò brevemente eſponendo. Saranno coſe veramente note, e comuni, ma mi biſogna rammentarle per utile de' Principianti. I Dotti potranno ſcorrerle, ſe così loro piacerà, laſciando a chi ne ha biſogno il trarne vantaggio.

Num. 1. Tutti i Problemi dunque, nel riguardo, che io eſporrò, debbono dividerſi principalmente in due Claſſi. L' una è de' Problemi, che ſi chiamano *indeterminati*, e l' altra di quelli, che *determinati* ſi appellano. In ogni Problema ſi cerca una, o più coſe incognite (lo ſteſſo a proporzione ſi dee intendere de' Teoremi.)

Num. 2. Se la coſa, o coſe incognite nel Problema, ſieno tali, laonde ſciolto il Problema, e ridotto in quella *finale equazione*, che contiene tutte le di lui condizioni, o le eſprime, e per la preciſa loro relazione, e non già per ſuppoſto noſtro ar-

bitrario, rimangano cognite; tale Problema ſi chiama *Determinato*. Mi ſpiegherò a comodo de' Principianti con un eſempio. Due Giucatori hanno portato al Giuoco cadauno di loro cento Doppie. Il primo ha guadagnato tre volte tanto, quanto ha perduto il ſecondo, e trovaſi in oltre, che tra il ſuo capitale, e il denaro vinto, ha il doppio del denaro reſtato al ſecondo. Si domandano la perdita di queſto, e la vincita dell' altro. Sia x il denaro vinto dal primo, e y il perduto dal ſecondo, ſarà dunque $x = 3y$. Sarà ancora (nominando a le 100. Doppie) $a + x = 2a - 2y$, e ſoſtituendo in vece di x la ſua $= 3y$, ſarà $a + 3y = 2a - 2y$, laonde $y = \frac{a}{5} = \frac{100}{5} = 20$, e conſeguentemente $x = 60$: La vincita dunque del primo è ſtata 60. Doppie, e 20. è ſtata la perdita del ſecondo.

Num. 3. Qui è manifeſto, che tanto la vincita, quanto la perdita, che come ignote ſi cercavano in queſto Problema, divengono non ſolo cognite, ma talmente determinate, che (ſtando le date ſuppoſizioni) è impoſſibile, che il primo abbia vinto diverſamente da 60. Doppie, e il ſecondo perduto diverſamente da 20. Doppie. Così pure è chiaro, che veruna altra quantità potrà mai ſoddisfare alle poſte condizioni di queſto Problema. Ma ſe l' incognita di un Problema determinato, quando è giunta a reſtare finalmente eſſa ſola nel Problema, trovaſi allora elevata a qualunque dignità, può allora ammettere più di una ſoluzione, e tante per l' appunto, quante unità ſi contengono nel maſſimo grado della dignità perfetta, a cui, tolta che ſia ogni aſſimetria, ſale veramente l' incognita. Queſto accidente però non fa, che il Problema non abbia a reſtarſene *determinato*, eſſendo anche allora il numero delle ſoluzioni un numero aſſignabile.

Num. 4. Se poi le coſe incognite nel Problema ſieno tali, che avutane la ſoluzione, ciò non oſtante eſſe reſtinſi incognite, ma però con tal condizione, che eſponendoſi dall' ottenuta ſoluzione il riguardo, che fra di loro hanno le incognite, poſſa determinandoſene una, o più di loro, a miſura del biſogno rendersi cognite le altre, allora tale Problema ſi chiama *Indeterminato*. Sia di queſto il ſeguente eſempio. I due prementovati Giucatori hanno portato al giuoco, il primo la quantità incognita x di denaro, il ſecondo la quantità pure incognita y. Si ſa ſolamente, che la quantità x del primo è alla quantità y del ſecondo in ragione di m ad n. Si ſa pure, che il primo ha guadagnato t, che anche qui ſi finge tre volte tanto quanto u, che è la perdita del ſecondo, e trovaſi anche ora, che il primo ha tra il ſuo capitale, e la vincita $(x + t)$ il doppio del denaro $(y - u)$ reſtato al ſecondo. Per ſoluzione di queſto Problema viene l' equazione finale $u = y \times \frac{2n - m}{5u}$

Num. 5. Ed ecco come in queſto Problema per le condizioni ſue proprie non è poſſibile, che reſti mai una ſola delle incognite uguale a ſole cognite, ma per altro ſi manifeſta la relazione, che ha un incognita, per eſempio u, ad un altra, o y, o m, od n, la qual relazione reſta ſempre immutata, laonde determinatane poſcia da noi una, o più di queſte, ſecondo l' occorrevole, ſi giunge ad avere determinato tutto il Problema.

Num. 6. Accennerò qui di paſſaggio, che queſti Problemi *indeterminati* comprendono in loro un numero indefinito, o più tosto inaſſegnabile di ſoluzioni, concioſſiachè, ſecondo che noi andremo determinando, per eſempio u, o n, o &, nella quale determinazione poſſiamo adoperare un numero inaſſegnabile di quantità varie nella loro grandezza, ſia per averſene ſempre varia nella grandezza quella quantità, che reſta a determinarſi, laonde in ogni ſuppoſizione, che piaccia a noi di variare la grandezza di una di dette quantità (purchè la natura del Problema non repugni a tale particolare ſuppoſizione) può l' altra, o le altre ſoddisfare alle condizioni del dato problema, mutando anch' eſſe perciò la loro primiera grandezza.

Num. 7. Per quanto però ſia inaſſegnabile il numero di queſte ſoluzioni, ſi dà alle volte caſo, che reſtandoſene tale eſſo numero, egli ſia però entro certi limiti aſſegnabili. In fatti ſi oſſervi nel precitato eſempio, che noi potiamo variare m, ed n ſolamente fino a un certo ſegno, oltre al quale variandole, il problema diverrebbe aſſurdamente propoſto. Quando m arrivi ad eſſere maggiore di $2n$, la u, cioè la perdita del ſecondo, ſarebbe ſtata non più perdita, ma guadagno; il che avrebbe ripugnato alla ſuppoſizione, che abbiamo fatto, ch'egli abbia veramente perduto; ed il problema in tal caſo ſarebbe ſtato propoſto imma-

immaginariamente. I Problemi dunque, a' quali accadono tali accidenti, ſi chiamano limitati; e dove nel problema vi ſono condizioni, che ripugnino a tale limitazione, ſono allora *immaginarj*; ed immaginarj pure eſſer poſſono per altre cagioni, delle quali qui non è d' uopo di farne parola.

Num. 8. Un altro accidente accade pure alle volte a i Problemi, ed è di non riſpondere nella loro ſoluzione alla richieſta, laſciando ſvanire affatto le incognite. Queſti Problemi ſono detti *identici*, e naſcono dall' averſi bensì nell' intavolatura, e nelle calcolazioni loro aſſunte propoſizioni vere, e non repugnanri, e ben maneggiate, ma non contenenti le individuali proprietà loro. Altri Problemi poi vanno a finire in quantità impoſſibili. Queſti forſe finora non ſono ſtati baſtantemente avvertiti. Io li nominerò *erronei riſpetto alla ſoluzione*. Vengono queſti, non già perchè le propoſizioni, che li formano, non ſieno e vere, ed atte, ma perchè nel maneggiarle abbiamo inavvertentemente adoperato un metodo, che non conviene al loro algoritmo. Toccheremo con mano, allorchè nella ſeconda Parte di queſte Memorie tratterò del Calcolo Integrale, quanto di queſta ſorta di problemi erronei vi ſi ſia potuto meſcolare, e come ſieno apparſe forme, che a' Dotti più illuſtri hanno paruto quantità, e non le ſono.

Del Calcolo Differenziale

SEZIONE SECONDA.

Delle Quantità Variabili, onde ne naſcono le Differenziali.

Num. 9. LE Quantità incognite de' Problemi *indeterminati*, le quali poſſono (*Num.* 6.) inafſiginabilmente variarſi, ſono con tutta ragione nominate *Variabili*, a diſtinzione delle incognite de' problemi *Determinati*, le quali per natura del Problema, che le contiene, ſono invariabili, o *coſtanti*, come comunemente ſi appellano. Quelle, che entrano in que' Problemi,

mi, che ammettono più d' una ſoluzione, potrebbero dirſi bensì *diverſe*, ma non variabili.

Num. 10. Qui per tanto è d' uopo eſaminare attentamente la giuſta idea, che abbiamo, di queſte variabili. Si è già veduto, che la variabile y, per eſempio, d' un problema indeterminato può in qualunque ſuppoſizione di divenire più grande, o più picciola in qualunque miſura, che piaccia a noi, compoſſibile però colla natura del problema, e dentro i ſuoi limiti, ſe egli ne abbia, ſoddisfare alle di lui condizioni, forzando in tale occaſione l' altra correſpondente variabile u a ſcemare, o ad accreſcere la ſua antecedente grandezza.

Num. 11. S' intende pur chiaramente, che intanto la variabile y, o ſcema, o creſce, in quanto ad eſſa ſi accreſce, o toglie di mano in mano una quantità a lei omogenea, onde diviene una nuova variabile, e quanto alla grandezza, diverſa realmente da ciò, che era antecedentemente; e perchè ella dee poter paſſare ad eſſere una vera variabile in qualunque miſura, che piaccia a noi, come ſi è detto, reſta ancor chiaro, che qualunque variabile y nel paſſare, che fa, ad eſſere un altra, creſcendo, o calando, dee avere fra tutte le variabili del di lei ordine una variabile, dirò così, a lei *contigua*. Perchè o la y paſſi per ſalto ad eſſere l' altra variabile, o vi paſſi per qualunque altra maniera, s' intende ſempre, che fra tutte quelle, alle quali paſſerà ad eſſere, ve ne ſarà una, che ſarà la più vicina delle altre alla y, e queſta per tanto, oltre alla quale più vicina non poſſa mai darſi, o intenderſi, che ſi dia, eſsa è, che io intendo, e nomino, *riſpetto* alla y, la *variabile contigua*; e *reſpettivamente* pure a queſta, chiamerò la y *variabile primitiva*: e quando ſenz' altro aggiunto nominerò le variabili, per lo più intenderò le variabili primitive, ſe altrimenti alle occaſioni non mi ſpiegherò.

Num. 12. Semprechè una variabile contigua, per eſempio, di y, ſi riferiſca all' altra variabile contigua, per eſempio, di u, la quale naſce al naſcere della contigua di y, queſte due variabili contigue le chiamerò *correſpondenti*, come pure così proporzionalmente poſsono dirſi le variabili primitive $y \cdot u$.

Num. 13. Quanto poi a quel minimo accreſcimento, o decremento (ſia egli per ora quel, che ſi voglia) per l' aggiunta, o ſcemamento del quale la variabile primitiva paſsa ad eſsere la

ſua

ſua contigua, io la nominerò *elemento* di queſta variabile, e *riguardo* pure al proprio elemento, chiamerò variabile primitiva la y.

Num. 14. Queſti elementi per conſenſo de' Geometri ſono ſtati denominati *differenziali*, *fluſſioni*, *infinitamente piccioli*, e *indiviſibili*, e ſono nati tali diverſi nomi dalle diverſe apparenze, ſotto le quali gli Autori di tali nomi hanno appreſo lo ſteſſo oggetto. E' invalſo notarli preponendo un d alla variabile primitiva. Così dy ſarà l' *elemento*, la *differenziale*, la *fluſſione*, l' *infinitamente piccolo*, l' *indiviſibile* di y, e la variabile contigua y ſarà $y \pm dy$.

Num. 15. L' idea dunque delle variabili, per eſempio, $y.u.$ include principalmente, che eſse ſi conſiderino ſtanti nell' equazione finale di un problema variabile, perchè ſe diverſamente foſſero conſiderate, non ſarebbero eſse variabili in queſto ſenſo, ma ſarebbero quantità capaci di tutti quegli accreſcimenti, e decrementi, che matematicamente, e ſenza limite, e ſenza legge poteſſero ricevere, e perciò in tale ſtato incapaci d' algoritmo. Da queſta primaria modificazione delle variabili due altre ne derivano. La prima è, che paſſando l' una y per l' addizione, o ſottrazione del ſuo elemento dy ad eſſere la contigua variabile $y \pm dy$, paſſi contemporaneamente, e ſempre l' altra correſpondente variabile u per l' addizione, o ſottrazione del ſuo correſpondente elemento du ad eſſere la ſua correſpondente variabile $u \pm du$. E perchè in un Problema indeterminato al variarſi delle variabili correſpondenti, ciò non oſtante (*num.* 5.) reſta ſempre immutata la loro relazione, e le variabili ſoddisfan ſempre al problema; laonde la finale equazione niente perciò ſi muta: quindi ſegue la ſeconda modificazione, ed è, che ſe in vece delle correſpondenti $y.u.$, o loro dignità, ſieno per tutto omologamente ſoſtituite nel problema le variabili contigue correſpondenti $y \pm dy.\ u \pm du$, o loro correſpettive dignità, dovrà ſempre conſervarſi la ſteſſa finale equazione, e con eſſa, ſenza veruna eſſenziale alterazione del problema, tutte le ſue condizioni.

Num. 16. Queſta ſeconda modificazione fa conoſcere, che la grandezza degli elementi dy, du non può eſſere arbitraria, e illimitata, ma bensì eſſer tale, che dy abbia a du un obbligata ragio-

ragione: Laonde dover eſſer libero che dy, per eſempio, poſſa eſſere, e moltiſſime volte lo ſia in fatti, non uguale al ſuo corriſpondente du. Da ciò per tanto ſegue, che non poſſono mai prenderſi per *infinitamente piccioli in ſenſo aſſoluto* eſſi elementi, perchè eſſendo l' *infinitamente picciolo aſſoluto*, quell' ultima menomiſſima parte, in cui s' intende diviſa la quantità, ed oltre alla quale aſſolutamente più picciola non ſi può dare, ſiegue, che l' infinitamente picciolo aſſoluto non poſſa eſſere nè maggiore, nè minore, onde è ſempre della ſteſſa miſura. Laonde ſe gli elementi dy, du s' immaginaſſero infinitamente piccioli in queſto ſenſo, dovrebbero eſſere ſempre uguali fra loro, il che repugna alla loro neceſſaria poſſibile ineguaglianza pur ora dedotta chiaramente dall' idea delle variabili. Queſto medeſimo rifleſſo moſtra, che gli elementi non poſſono eſſere indiviſibili.

Num. 17. Ma ſe agli elementi dy, du non può convenire, che ſieno infinitamente piccioli aſſoluti, poſſono però in certo modo di dire nominarſi *infinitamente piccioli relativamente alle loro variabili*, e conſiderati ſempre nel loro problema, e vuol dire propriamente, che ogni elemento, riferito alla propria variabile primitiva, ſia quella minima quantità, di cui minore non poſſa accreſcerſi, o ſcemarſi dalla medeſima per formare la ſua variabile contigua.

Num. 18. Ma fuori di queſta conſiderazione, tanto ſe dy riferiſcaſi ad un altra variabile, o non variabile diverſa, e non per biſogno di doverne formare la ſua contigua; quanto ſe riferiſcaſi alla du ſua corriſpondente, o ad altra non corriſpondente, non è altrimenti la dy da conſiderarſi per infinitamente piccola in verun ſenſo, giacchè l' unica ragione di conſiderarla per tale conſiſtendo tutta nel biſogno di fare con eſſa la variabile contigua, ceſſando, o non eſſendovi queſto biſogno, o condizione, ceſſa anche ſubito il doverſi più conſiderare infinitamente piccolo tale elemento.

Num. 19. Anzi eſſi elementi pure poſſono eſſere alla loro maniera variabili, il che con un po' di attenzione chiaramente ravviſaſi. Paſſi una variabile y ad eſſere la ſua contigua $y \pm dy$, e queſta nuovamente paſſi ad eſſere un altra di lei contigua; e così ſenza retrocedere di mano in mano perverrà pu-

rà pure ad ogni cambiamento la variabile u ad eſſere di mano in mano la variabile corriſpondente $u \pm du$. Si finga pertanto, che gli elementi di y nella neceſſaria di lei variabilità ſieno tutti fra loro eguali, egli è però impoſſibile, che gli elementi corriſpondenti della u debbano eſſere ſempre uguali tutti fra di loro, altrimenti una ſola natura di problemi indeterminati avrebbe la Matematica; e in queſto caſo ella ſarebbe la eſprimibile dal ſolo triangolo. Dunque dimoſtrandoſi impoſſibile, che gli elementi, co' quali ſi va cambiando la variabile u, debbano eſſer tutti fra loro uguali, è pur certo, che gli elementi di una variabile poſſono anch' eſſi eſſere variabili, laonde la ragione di due elementi correſpondenti può eſſere diverſa dalla ragione di due altri elementi correſpondenti delle variabili dello ſteſſo problema; o, che in queſto caſo è lo ſteſſo, può eſſere eſpreſſa da una ragione variabile. Se poi gli elementi nella ſucceſſiva variabilità di y foſſero ſtati ſuppoſti diſuguali, ſarebbe ſtato, già ſenz'altro convenuto, che tali elementi poteſſero eſſere variabili.

Num. 20. Di qui naſce, che conſiderandoſi queſti elementi eſſere variabili, poſſono aver anch' eſſi i loro elementi; laonde ſi conoſce, che in queſto riguardo ſi può dare un' altro ordine di differenziali, alle quali eſſendo pure applicabile co' dovuti riguardi tutto ciò, che ho detto per moſtrare, che ancor queſti ſono variabili, naſce da loro pure un altro ordine di differenziali, e così di mano in mano. Le Differenziali, che naſcono dalle differenziali delle variabili aſſolute y, u ſi nominano *ſeconde Differenziali*; ed è coſtume di notarle premettendo due d alla variabile primitiva y, o u, onde la differenziale di dy, che è la ſeconda differenziale di y, ſi noterà per ddy; e così quella di u per ddu. La Differenziale poi di queſta ſi chiama la terza differenziale di y, o di u, e notaſi per $dddy$, o per $dddu$, premettendo a y, o a u tre d, e così ſi procede a nominare, e notare le altre differenziali degli ordini ſuſſeguenti, che ſi immaginano andar naſcendo; e le variabili contigue di tali differenziali ſono anch' eſſe, per eſempio $dy \pm ddy$, &c.

Num. 21. Ecco dunque in qual ſenſo ſi debba intendere, che gli elementi delle variabili ſieno *infinitamente piccioli*. Da queſto

queſto ſenſo non veggo, che poſſa conchiuderſi ciò, che altri, ſeguendo altre idee, ſono ſtati forzati ad ammettere: cioè che tali elementi ſieno un nulla, e da conſiderarſi tali in riguardo ad ogni quantità aſſoluta; la qual conchiuſione, oltre all' involgere l' idea delle differenziali, e il calcolo di queſte in una caterva di contraddizioni, ripugna poi manifeſtamente all' idea chiara, che abbiamo delle variabili de' problemi indeterminati, mentre così la variabile contigua $y \pm dy$, quando dy ſi ſupponga Zero, dovendoſi reſtare la ſola ſteſſa variabile y, che era per prima, eſſa variabile ſarebbe allora non più variabile, ma coſtante.

Num. 22. Altri poi hanno avuto penſiere, che la variabile contigua, o piuttoſto l' elemento, che la fa eſſere, ſia non mai fatto, ma che ſtia ſempre per farſi. Non veggo, che vi ſia biſogno di concepire la coſa per queſto verſo. Avvertirò ſolo fra molte altre coſe, le quali intorno a ciò potrei notare, che qualunque variabile conſiderata in un problema, che da noi venga aſſunta, può con tutta verità dirſi una variabile contigua riguardo alla ſua primitiva: Lo che eſſendo così di fatto, reſterebbe a concordare, come ſi abbia in fatti da noi una variabile contigua, che altri s' immagina, che non ſia per anche fatta.

Num. 23. Sono dunque le Differenziali una vera parte, ed aſſoluta, ed eſiſtente (in quell' eſſere, che compete alla quantità conceputa), e veramente fatta della variabile contigua, e non già zero, o in atto di farſi, ma però, riguardo ad eſſa variabile, poſſono conſiderarſi, ſe vogliamo dirlo, infinitamente picciole. (*num.* 17.) Lo che importa ſolo, che in tal riguardo niuna altra quantità più picciola poſſa *omologamente* per cadauna di loro aſſegnarſi.

Num. 24. E di qui naſce, e deeſi a queſta coſa diligentemente avvertire eſſendo queſta uno de' principali fondamenti per le pratiche del Calcolo differenziale, che queſti elementi ſono, per rapporto alle loro primitive, una vera frazione minore dell' unità. Imperocchè ſiccome la dy è quella, per eſempio, che riguardo alla y è la minima quantità, che dar ſi poſſa; così ſe divideremo y per dy, il quotiente ſuo, che dirò q, ſarebbe la maſſima grandezza, che riſultar potrebbe da

be da ogni altra divisione di y per ogni altra grandezza, che assegnar si potesse, diversa da dy. Suppongasi ora, che dy abbia la forma $\frac{b}{c}$, e vedremo in appresso, se questa forma sia d'intero, o di rotto, e di qual rotto. Sarà dunque $\frac{y}{\frac{b}{c}} = q$, e però $\frac{y}{q} = \frac{b}{c}$. Siccome dunque egli è notissimo, che sempre che in tali forme la quantità da dividersi è minore del dividente, tal forma è una vera frazione, che in oltre è minore dell' unità, essendosi mostrato, che q è la massima possibile grandezza, y sarà certamente di lui minore, e perciò la forma $\frac{1}{q}$ e conseguentemente la $\frac{b}{c}$, che le è uguale, e che è la stessa dy; è innegabilmente quale si assunse di dimostrare, una frazione, e questa minore dell' unità.

Num. 25. Essendo pertanto notorio, che o moltiplicando insieme frazioni minori dell' unità, o elevandone una a dignità intera, il prodotto nel primo caso è sempre minore di qualsivoglia una di loro, e nel secondo altresì è minore di quella, che viene elevata; seguirà manifestamente, che, per esempio, $dy\,du$, o dy^m, supposto, che m sia numero intero, sarà sempre minore, questo di dy, e quello tanto di dy, quanto di du. E perchè nella considerazione delle Differenziali, per esempio, dy, du, si è dovuto giustamente convenire, che di esse Differenziali non possa darsi quantità minore; quindi è, che sempre che in calcolando tali quantità differenziali venga somministrata dal calcolo qualunque quantità $dy\,du$, o dy^m, o simile quantità, che certamente in seguito dell' essere le Differenziali una frazione minore dell' unità, sia essa minore di dy, o di du, tali quantità somministrate dal calcolo non sono, nè possono essere: e però per questa *formal ragione* tali quantità debbono cancellarsi, e computarsi per niente, stante l' essere impossibile, che elleno esistano, ripugnando all' esistenza loro la certa, e necessaria supposizione già fatta, che niuna quantità minore di dy, o du esservi possa nella considerazione delle due variabili contigue $y \pm dy$, ed $u \pm du$. Ho detto per questa *formal ragione*, imperocchè si pratica nel Calcolo differenziale, quando arrivi, che ne' termini di qualche equazione

zione oltre alle differenziali vi sieno i loro prodotti, e le loro dignità intere; si pratica, dico, di cancellar tali termini; ma la ragion formale di tale pratica non viene forse fondatamente capita, perchè comunemente ella si crede, e si assegna il supporsi tali grandezze, per esempio $dy\,du$, infinitamente picciole di un ordine inferiore alle dy, du, e però non poter esistere per rapporto alle primitive y, u, e doversi perciò cancellare. Questo discorso non mi pare affatto stringente, perchè è bensì manifesto per se medesimo, che ddy, come differenziale di dy, è di questo minore; perocchè per rapporto a y, ned è, nè può essere; ma non costa già senza prova, che dy, du, o dy^m sieno essi minori di dy, o di du, è tanto meno, che sieno d' un ordine inferiore di queste. Siccome dunque la ragione, per cui ddy dovrebbe cancellarsi da un equazione, quando in essa si ritrovassero delle dy, sarebbe non già perchè assolutamente ddy fosse d' un ordine inferiore a dy; ma perchè essendo d' un ordine inferiore, egli è minore di dy, così la formal ragione di cancellare $dydu$, o dy^m, unicamente dal provarsi, che queste grandezze sono minori di dy, du, dee desumersi; e perciò affine di dare a questa necessariissima pratica del Calcolo differenziale la dovuta certezza, ho stimato necessario di provare (*num.* 24.) che esse sono veramente minori.

Num. 26. Anzi con questa riflessione potremo andar ora franchi nel cancellar quelle quantità, che saranno da cancellare; conciossiachè tali unicamente saranno quelle, le quali per rapporto alle altre, delle quali la condizione del Problema ci ha dato fondamento di conoscere, che minori essere non ve ne possano, ciò non ostante ci sieno somministrate dal Calcolo, benchè per la loro natura di frazioni, o per equivalente cagione sieno al certo minori di quelle, che per minime sono già state fissate. E qui bisogna dileguare uno scrupolo, che a taluno venir potrebbe in mente. La quantità dy^2, per esempio è un quadrato, e così $dydu$ un piano; ma un quadrato, ed un piano, e tanto più i solidi, e soprasolidi sono incomparabilmente maggiori de' loro lati, o radici: dunque per quanto dy, e du sieno frazioni minori dell' unità, non però siegue, anzi è evidente il contrario, che dy^2, e $dudy$ sieno minori di dy, o di du, come ho preteso, ed era di bisogno di dimostrare.

Vien

Vien queſto ſcrupulo dal non ben diſtinguere ciò, che diſtinguer ſi dee nell' idea, ed operazione della multiplicazione. Con queſta operazione alle volte conſervanſi le quantità, che multiplichiamo, nelle loro ſpezie, alle volte paſſano in un' altra; e tutto queſto, adoperandovi ſempre la ſteſſa maniera d' operazione, e conſervando per inavvertenza la ſteſſa idea. Nel primo caſo per altro non ſuſiſte già, che noi facciamo propriamente una multiplicazione, ma bensì una vera addizione, e ſolo nel ſecondo caſo è veramente allora, che moltiplichiamo. Per diſtinguere dunque, e riconoſcere qual ſia di queſti due effetti quello, che ne riſulta nella operazione ſempre immutata della moltiplicazione, noi non poſſiamo ricorrere all' operazione medeſima; ma deſumere ne dobbiamo la cognizione dal veder per appunto, ſe il prodotto conſerviſi, o conſervar ſi debba, o no, nella ſteſſa ſpezie de' ſuoi producenti; e allora nel primo caſo ſiamo certi di aver fatta una vera addizione, e nel ſecondo caſo una vera moltiplicazione. Ciò premeſſo, veniamo al caſo. Quando per avere la differenziale di $\overline{y+dy}^2$ io debbo multiplicare $y+dy$ per $y+dy$, io non cerco già il prodotto di queſte due quantità, ma cerco unicamente qual ſia l' aumento della variabile y paſſante nella ſua contigua $y+dy$ nel caſo che in vece di eſſerci ſtata propoſta la ſemplice y, ne ſia ſtata eſibita la ſua qualunque dignità y^m, e nel preſente caſo y^2. Ciò dunque, che da queſta multiplicazione mi riſulterà, dovrà mantenerſi nella ſua ſpezie, dovendo, come è viſibile, eſſere della ſpezie medeſima di y, giacchè dee eſſere il di lei aumento. Non abbiamo dunque qui fatta una multiplicazione, ma un addizione; e però non ſuſiſte, che dym, nè che $dym\,dum$ ſieno piani, o ſolidi, giacchè non poſſono mutare ſpezie; e quindi ſvaniſce l' obbietto propoſto.

Num. 27. Ed ecco come dalla conſiderazione de' Problemi ſiaſi avvertita la condizione, che hanno le variabili de' Problemi indeterminati, cioè di andar eſſe correſpondentemente creſcendo, o decreſcendo con leggi ſtabili, e le quali leggi per ciò fiſſano la quantità degli aumenti, o decrementi delle variabili, e li quali ſono vere quantità aſſolute, ed omogenee alle ſteſſe variabili, benchè per altro ſieno le minime quantità,

per

per cui ognuna delle due corriſpondenti variabili poſſa creſcere, o decreſcere per paſſare ad eſſere la ſua contigua variabile. Ecco come tali aumenti ſono neceſſariamente una frazione minore dell' unità, per la qual coſa ſe il Calcolo ci produce o un piano, o un ſolido fatto dalla multiplicazione di più differenziali, o la dignità intera di una di loro, queſte quantità dateci dal Calcolo, non però poſſono eſſere, e debbono perciò cancellarſi dall' equazione; da quella equazione cioè, che come moſtrerò in appreſſo, e ſempre il fondamento di ogni Calcolo differenziale, e integrale, benchè per ordinario non vi ſi avvertiſca.

Num. 28. Queſte coſe ci moſtrano dunque, che il ſoggetto del Calcolo differenziale, ſono eſſi incrementi, o decrementi, è realiſſimo, e neceſſariamente eſiſtente, e ce ne paleſano la ſua vera idea con renderci certi altresì, che quando il Calcolo cancella le quantità minori delle differenziali, lo fa con ſaldiſſimo fondamento, e dee farlo; ed in ſomma preſa la coſa da queſti fonti, e per queſto verſo, non hanno le quantità differenziali, nè il loro Calcolo coſa alcuna, che ſia inconcepibile, o contradditoria.

Num 29. Imperocchè non ſono già le quantità differenziali infinitamente picciole aſſolutamente, ma ſolo talmente minime, che *relativamente* a formare le due loro corriſpondenti variabili contigue nell' equazione del dato Problema non poſſono *omologamente* darſene delle minori. Quindi nè ſono eſſe il zero, nè ſono altrimenti uguali fra loro, nè ſtanno aſſolutamente per farſi, e tanto meno ſuſſiſte, che aggiunte a quantità aſſolute, e maſſime ſe ſia la ſua variabile primitiva, non l' accreſchino, e non la ſcemino. Così non regge, che i piani, o ſolidi delle differenziali, e le loro dignità intere ſieno da rigettarſi dal Calcolo, perchè di un ordine inferiore, ma perchè eſſendo neceſsariamente minore di quelle minime, che eſser poſſono, non poſſono eſſere.

Erano queſte molte di quelle difficoltà, e credo le principali, che tenevano ritroſi dottiſſimi Valentuomini dall' applicarſi a' Calcoli differenziale, e integrale. Toltele per tanto di mezzo, mi farò coraggio di andar ſtendendo le ſeguenti Memorie, nelle quali ſeguendo ſempre il Siſtema, o per più vero

dire

dire i principj ſtabiliti intorno l' idea delle Differenziali, ſpero mi ſarà agevole ſpianare, e avantaggiare la pratica de' medeſimi Calcoli.

Del Calcolo Differenziale

SEZIONE TERZA.

De' Modi di ritrovare le Differenziali delle Variabili.

CAPO PRIMO.

Di quelle Differenziali, che ſi ritrovano per mezzo del ſolo Calcolo.

VArie ſono le maniere di ritrovare le Differenziali delle Variabili, le quali andrò l' una dopo dell' altra eſponendo, collo ſcoprirne i fondamenti, e dimoſtrarne le pratiche.

Num. 30. La prima, e più nota, e neceſſaria maniera altro per giugnere al ſuo fine non richiede, che il ſolo Calcolo. Quindi è, che mi ha paruto di poter conſiderare le Differenziali, che per tal via ſi ritrovano, come trovate per *via aritmetica*. Queſta maniera di ricerca io imprendo di fare in queſto Capo. Andando avanti ſi ſpiegherà l' intelligenza di queſta mia diſtinzione, ed a ſuo tempo ſi conoſcerà, che il buon ordine richiedeva, ch' io così faceſſi. Vedraſſi pure nella ſeconda Parte di queſte mie Memorie, che ſe io non aveſſi avvertito a queſta diſtinzione, ſarebbe probabilmente ſtato impoſſibile, che mi riuſciſſe di dare al Calcolo Integrale quello, qualunque ſia per eſſere avanzamento, che gli darò.

Num. 31. E qui prima d' avanzarmi, avvertiſco i miei Lettori eſſer loro di biſogno ſaper il canone, o formola, colla quale generalmente ſi trova qualunque dignità d' un Binomio. Potranno vederlo diſteſamente nel *lib. 8. al num.* 203. *de l' Analyſe demontrée* dell' utiliſſimo P. Reyneau, ed in altri parecchj Autori. A me ſol balta raccor qui, che ſuppoſto che

che il Binomio ſia $y+dy$ (pretendo qui, che il Segno $+$ ſignifichi anche $-$), e che tal Binomio debbaſi elevare alla dignità qualunque, o intera, o rotta m, o negativa, o poſitiva, o razionale, o ſorda, purchè coſtante, eſſo Binomio $\overline{y+dy}^{m}$ ſarà $y^m + my^{m-1}dy + m \times \frac{m-1}{2} \times y^{m-2}dy^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times y^{m-3}dy^3$, e così di ſeguito, laonde egli avrà ogni termine, dal primo in fuori, multiplicato ſempre per una ſerie di dy, gli eſponenti della quale ſono la progreſſione aritmetica de' numeri interi cominciante dall' unità.

Num. 32. E perchè tutti queſti dy elevati così a dignità intere maggiori dell' unità, ſi ſono moſtrati [*Num.* 25.] nè eſſere, nè poter eſſere. Lo che vuol dire, che eſſi hanno la natura, e conſeguentemente gli effetti del nulla; quindi è, che quando la ſovreſpoſta formola generale ſi adoperi a ritrovare la dignità m di una variabile contigua $y+dy$, queſta di lei dignità, benchè in conſeguenza del calcolo ci comparisca nella ſovra ſteſa forma, ella però ſarà la ſola $y^m + my^{m-1}dy$, giacchè affine di ridurre il calcolo al vero, debbono cancellarſi tutti i termini multiplicati per dy elevati a dignità intera maggiore dell' unità, come moltiplicati per zero.

Num. 33. Per le medeſime la variabile contigua $u+du$ elevata alla dignità t ſarà la ſola $u^t + tu^{t-1}du$, e conſeguentemente, e per le medeſime ragioni il prodotto di due variabili contigue $y+dy \times u+du$ elevate queſta alla dignità t, e quella alla m, che in conſeguenza del calcolo ci comparisce nella forma $y^m u^t + my^{m-1}dy \times u^t + tu^{t-1}du \times y^m + tmy^{m-1}u^{t-1}dydu$, ſarà la ſola quantità $y^m u^t + my^{m-1}dyu^t + tu^{t-1}duy^m$, giacchè l' ultimo membro multiplicato per $dy\,du$ dee cancellarſi: così il prodotto delle tre variabili contigue elevate come ſopra $\overline{y+dy}^{m} \times \overline{u+du}^{t} \times \overline{x+dx}^{n}$, ſarà $y^m u^t \times {}^n + u^t x^n my^{m-1}dy + y^m u^t nx^{n-1}dx + y^m x^n tu^{t-1}du$.

Num. 34. Quindi avremo due regole generali: l' una per elevare una ſola variabile contigua a qualunque dignità m, e ciò ſi otterrà elevando la variabile primitiva ad eſſa dignità, ed a queſta aggiungendo col Segno $+$, o $-$ (e di que-

di queſti ſegni parlerò in appreſſo) la ſteſſa variabile primitiva elevata alla ſteſſa dignità meno uno, e multiplicata pel prodotto della ſua dignità nella ſua differenza. L' altra regola è per trovare il prodotto di più variabili contigue, elevate anch' eſſe alle loro dignità [e nelle dignità qui comprendo ſempre anche l' unità). Si ottiene queſto, elevando prima tutte le variabili primitive alle loro dignità, e facendo di queſte così elevate un prodotto: Indi ſi multiplichi alternativamente il prodotto di tutte le variabili primitive meno una, elevate alla lor dignità nella rimanente variabile primitiva elevata anch' eſſa alla ſua dignità, ma ſcemata di una unità, e multiplicata pel prodotto della ſua dignità nella ſua differenza, con che ſi avranno altrettanti di queſti prodotti, quante ſono le date variabili; e queſti prodotti ſi aggiungeranno co' Segni + , o − al prementovato primo prodotto di tutte le variabili primitive colle regole de' Segni, che ſeguono. Nel paſſare, che fanno gli eſponenti, o ſimboli indicanti le dignità delle variabili, ad eſſere coefficienti, ſi conſervino i Segni, che hanno. Così pure conſervinſi i Segni di tutte le altre quantità, che vengonſi a multiplicare inſieme, e prefigganſi a' prodotti que' Segni, che ſecondo le loro proprie regole riſultano. Se foſſe da rittovarſi la dignità di $\overline{y+dy}^{m} \times \overline{u-du}^{-i}$ ſarebbe ella $-y^{m}u^{-i}-my^{m-1}dyu^{-1}-tu^{-1-1}duy^{m}$.

Num. 35. Se ſi voleſſe la dignità della variabile contigua delle ſomme, o differenza di due, o più variabili elevate alla loro dignità, come ſarebbe $y^{m} \pm u^{t}$, è quaſi ſuperfluo l' avvertire, che queſta è $y^{m} \pm my^{m-1}dy \pm u^{t} \pm tu^{t-1}du$.

Num. 36. E' altresì ſuperfluo l' avvertire, che in tutti i premeſſi caſi, cominciando dal *Num.* 30., ſe la variabile primitiva foſſe ſtata eſſa o multiplicata, o diviſa per qualunque coſtante g, con queſta medeſima coſtante dee pur ſimilmente eſſere o multiplicata, o diviſa la ſua variabile contigua; laonde della variabile primitiva gy^{m}, che è elevata alla dignità m, la medeſima dignità della ſua variabile contigua ſarebbe ſtata $gy^{m}+gmy^{m-1}dy$. Così della variabile primitiva $gy^{m}pu^{t}$ la variabile contigua ſarà $gpy^{m}u^{t}+gpmy^{m-1}dyu^{t}+gptu^{t-1}duy^{m}$, e così pure nello ſteſſo ſenſo della variabile

bile primitiva $gy^{m}+pu^{t}$, la contigua ſarebbe $gy^{m}+pu^{t}+gmy^{m-1}dy+ptu^{t-1}du$.

Num. 37. Ma ſe poi le variabili primitive foſſero in oltre accreſciute, o ſcemate ancora da coſtanti; comechè le coſtanti non poſſono aver differenziali, altrimenti ſarebbero anch' eſſe variabili, ſi dovrà, per aver le variabili contigue, ſcrivere tali coſtanti, come ſono, ſenza notare per loro conto veruna differenza, cioè: ſe per eſempio ſia data $a+gy^{m}$, la dignità della ſua variabile contigua ſarà $a+gy^{m}+gmy^{m-1}dy$, e così la dignità della variabile contigua di $a+gy^{m} \times b+pu^{t}$ verrà ad eſſere $ab+bgy^{m}+apu^{t}+gpy^{m}u^{t}+bgmy^{m-1}dy+pgmu^{t}y^{m-1}dy+aptu^{t-1}du+gptuy^{m}u^{t-1}du$, come riſulta dal multiplicare fra loro le effettive variabili contigue delle due propoſte variabili primitive.

Num. 38. Ritrovate ora le dignità delle variabili contigue (eſſendoſi però finora conſiderate incompleſſe le loro variabili primitive, lo che è baſtante per iſpiegare ciò, che debbo dire) è da moſtrarſi, che ſe nell' equazione finale di un problema indeterminato, che per modo d' eſempio eſporrò per $A=B$, ſi ſoſtituiranno omologamente in luogo delle variabili y, u, che compongono eſſo problema, le loro variabili contigue correſpondenti $y+dy$, $u+du$, e in luogo delle dignità di quelle, le dignità di queſte, onde ne naſca un' altra equazione $C=D$, nel che fare è evidente (*num.* 10.) che ſi conſerva anche equazione, e ſi conſervano ſenza veruna eſenziale alterazione tutte le condizioni del problema; è, dico, da moſtrarſi in primo luogo, che da queſta nuova equazione $C=B$ potrà ſempre torſi l' equazione finale $A=B$, e in ſecondo luogo, che ciò, che reſterà, ſarà pure un' equazione. Proſeguendo queſte mie Memorie vedremo, che queſto teorema è il fondamento, ſu cui poggia, e ſi ſtabiliſce tutto l' uſo del Calcolo Differenziale aritmetico. E' pertanto neceſſario, che i Principianti ſeriamente vi avvertiſcano.

E quanto al primo, eſſendo la variabile contigua un binomio, in cui la variabile primitiva è totalmente ſeparata dalla ſua differenziale, così pure per le leggi del Calcolo ordinario, e come lo moſtrano ocularmente le pre-

meſſe pratiche, reſterà ſempre eſſa *e* la ſua dignità ſeparata in una porzione ſenza miſcuglio della differenziale; e lo ſteſſo pure ſuccederà, ſe l' una variabile ſia coll' altra o multiplicata, o diviſa, laonde la ſoſtituzione da farſi porterà nella nuova equazione $C = D$ totalmente ſeparata da tutte le altre parti tutta l' equazione $A = B$, onde reſtando ſeparata, potrà ſempre torſi dall' equazione $C = D$ l' equazione $A = B$, che era il primo, che proponevaſi.

Quanto poi al ſecondo è eſſo per ſe manifeſto, perchè ſe i due membri C D ſieno eguali, tolti da queſti i due eguali A B, quello dal primo, e B dal ſecondo, reſta evidente ancora la ſeconda propoſta.

Num. 39. Queſta nuova equazione $C = D$, dalla quale è ſtata tolta l' equazione finale $A = B$, che era fatta dalle ſole variabili primitive, è detta *equazione differenziale* del Problema.

Num. 40. Data dunque l' equazione finale di un Problema indeterminato, può ottenerſi un' altra equazione fatta dalle differenziali delle variabili primitive di eſſo Problema; Comechè ſi è ſcoperto, che le differenziali hanno certe proporzioni, o abitudini con altre quantità, ecco il primo uſo, e vantaggio, che dalle coſe premeſſe può trarſi: imperocchè ove dalla equazione $C = D$ rieſca di avere, per eſempio, la ragione $\frac{dy}{du}$ uguale alla ragione, che fra loro abbiano le reſtanti grandezze non differenziali, che compongono eſſa equazione, queſta ragione delle quantità non differenziali può ſomminiſtrarci la notizia di altre quantità, che ad eſſe differenziali ſieno proporzionali. Ma l' utile maggiore, e in varj caſi da non ottenerſi forſe per altro modo, ſi trae dal poterſi, data una equazione differenziale, trovare la ſua finale, e così la ſoluzione del problema; il che col Calcolo integrale in molti caſi ſi ottiene. I Principianti vedranno queſte coſe a' loro luoghi: ſolo qui opportunamente ſoggiugnerò eſſer paleſe dalle coſe dette, che i Problemi determinati non hanno che fare col Calcolo differenziale.

Num. 41. Se dunque ſi voglia ottenere dall' equazione finale di un problema $A = B$, rappreſentata particolarmente per

per eſempio dell' equazione $ax^m + by^n + cx^r y^s = f$ l' equazione differenziale giuſta il *Num.* 38., trovate che ſieno le variabili contigue, come ſopra, e ſoſtituite, ſi avrà l' equazione $C = D$, ch' è nel preſente caſo $ax^m + by^n + cx^r y^s + amx^{m-1}\,dx + bny^{n-1}\,dy + crx^{r-1}\,dxy^s + csy^{s-1}\,dyx^r = f + df$, ſuppoſto che f ſia variabile, o ſe coſtante, come più abbaſſo ſpiegherò, $= f + o$. Levando per tanto da queſta tutta la primiera equazione $A = B$, reſterà l' equazione differenziale $dA = dB$ eſpoſta per $amx^{m-1}\,dx + bny^{n-1}\,dy + crx^{r-1}\,dxy^s + csy^{s-1}\,dyx^r = df$, ovvero $= o$, ſe f foſſe ſtata coſtante. E perchè queſta ſteſſa equazione (e tanto dee dirſi in ogni altra equazione, che foſſe data) potrebbe ottenerſi in ſeguito del dimoſtrato al *Num.* 35., ſe in vece di ritrovare le variabili contigue, e farne la ſoſtituzione, ſi piglino i ſoli membri meſcolati colle differenziali, omettendo le variabili primitive, così è invalſo, e con maggior comodo, l' uſo di prendere eſſi membri, multiplicati però, o diviſi colle coſtanti, che accompagnano le loro variabili, e ſenza fare attento rifleſſo a tutti i paſſi della noſtra mente, è ſtato detto, che il fare brevemente tal coſa, ſia *prendere l' equazione differenziale*, ed anche più ſuccintamente, *prendere la differenziale* di una data variabile. Se queſte pratiche finiſſero in prendere ſolamente le differenziali, non può già moſtrarſi a coſa giovar potellero, e ſe pur ſi pigliaſſero per indi fare un' equazione, non coſtarebbe già, che tal pratica aveſſe fondamento di verità, ſe queſto fondamento non ſi foſſe ſcoperto al *Num.* 38. Un altra coſa degna pure di attenzione ſuccede in queſto propoſito. Dovendoſi levare dall' equazione $C = D$ tutta l' equazione $A = B$, affinchè la reſtante $dA = dB$ ſia veramente anch' eſſa una equazione, è manifeſto, che ſe nella $A = B$ vi ſieno de' membri fatti di ſole coſtanti, queſti pure levar ſi debbono dall' equazione $C = D$. Nella pratica dunque ſopraccennata, di prendere cioè le ſole differenziali, ſe la data equazione abbia de' termini coſtanti è invalſo il credere, che le pure coſtanti debbano anch' eſſe conſiderarſi avere le loro differenziali, ma che però queſte ſieno zero. Laonde per avere compiutamente l' equazione differenziale di quelle equazioni, che abbiano de' termini puramente coſtanti debba pre-

ba prenderſi, e notare il zero a conto delle loro differenziali. Queſto ripiego fortunatamente produce lo ſteſſo effetto, che ſi avrebbe, ſe ſi faceſſero le ſoſtituzioni, e la ſottrazione di tutta l' equazione $A = B$ dalla $C = D$; ma ſembra aſſai certo dalle coſe dette, ch' egli non ſia ſtato conceputo ſul ſodo fondamento del vero. L'idea giuſta delle coſtanti non può certamente ammettere l' idea, che ſieno aventi delle differenziali, onde ſopra di una tale contraddizione non poteva fondarſi quel ſuppoſto. Non è però, che io biaſimi in conto alcuno l' uſo introdotto, anzi per ciò che riguarda queſta pratica, ed altre ſimili, e riſpettivamente al comodo, che eſſe ſomminiſtrano, è neceſſario l' adoperarle. Può pur ſervir queſto caſo a convalidar ſempre più, quanto in ordine al doverſi cancellare da' reſultati del Calcolo quelle quantità, che non ſono, e che non poſſono eſſere, ho detto al *Num.* 27. Sempre dunque che nella data equazione ſieno termini interamente coſtanti, ſe da eſſa debbon prenderſi le differenziali, notiſi pure per differenziale di eſſe il zero, che così ſi ottiene l' iſteſſo intento, in luogo della ſua finta differenziale.

Num. 42. Da queſto doverſi levare i termini fatti da ſole coſtanti, e dal non comparire nell' equazione differenziale veruna differenziale di eſſi termini, laonde niun ſegno di eſſe coſtanti, trarrò poi a ſuo luogo la manifeſta ragione, per cui quando eſſendo data l' equazione differenziale di un problema ſi vuol cercare mediante il calcolo integrale la notizia dell' equazione finale, accade allora, che ſovente l' equazione, che per l' artifizio di eſſo calcolo ſi ritrova, ha d' uopo, che alcuna coſtante le venga aggiunta: Ma di queſto parlerò a ſuo luogo, eſſendo ſolo ſtato a propoſito di avvertir qui il fonte, dal quale deriva eſſa neceſſità.

Num. 43. Premeſſe pertanto le regole de' *Numeri* 33., e 34. atte a ritrovare le differenziali (e così parlerò da qui avanti, accomodandomi all' uſo, dopo la ſpiegazione di queſte coſe) a ritrovar, dico, le differenziali delle forme incompleſſe in eſſi numeri eſpoſte, paſſerò a ſpiegar l' artifizio di ritrovare le differenziali di ogni altra forma compleſſa, e per trovar le quali è giovevole l' adoperarvi il Calcolo Analitico, la di cui certezza in queſte pratiche richiedeva, come ſi vedrà, che foſſe prima dimoſtrato quanto ſi è eſpoſto nel *Num.* 35. Ma prima farò avvertire, che le differenziali delle forme premeſſe ſono il ſolo ſecondo termine del binomio eſprimente la variabile contigua elevata alla dignità, cui è elevata la variabile primitiva, ovvero il prodotto, o la ſomma di eſſi ſecondi termini, compoſti poi, ove ne ſia di biſogno, colle quantità coſtanti, colle quali erano compoſte le variabili primitive, o le loro dignità.

Num. 44. Quindi è, che la differenziale di fx^n è $fnx^{n-1}dx$: La differenziale della coſtante fa^n (quando pure vogliaſi immaginare differenziali delle coſtanti) è $fna^{n-1}da = 0$. La differenziale di $fx^n gy^t$ è $fgnx^{n-1}dxy^t + fgty^{t-1}dy\,x^n$, e di qui è manifeſta la differenziale di una variabile primitiva, che ſia il prodotto di quante variabili mai ſi vogliono. La differenziale di $fx^n \pm gy^t$ è $fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy$. Su tutte le notate differenziali deeſi ſempre avere il dovuto riguardo a i Segni.

Num. 45. Sia ora data la dignità della variabile primitiva compleſſa $\overline{fx^m + gy^t}^{r}$, di cui ſi cerchi la differenziale. Suppongaſi, che $\overline{fx^n + gy^t}^{r}$ ſia $= u$; la onde $fx^n + gy^t = u^{\frac{1}{r}}$, e differenziando, avremo $fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy = u^{\frac{1-r}{r}}\,du$. (*Num.* 41.) e perchè $u^{\frac{1-r}{r}}$ è $= \overline{fx^n + gy^t}^{1-r}$, fatta queſta ſoſtituzione, e la riduzione opportuna del calcolo, riuſcirà $r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1} \times \overline{fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy} = du$, che è la cercata equazione differenziale a norma dello ſteſſo Numero 41.

Num. 46. Se la propoſta dignità delle variabili primitive aveſſe avuto anche altri termini ſotto al ſegno, come ſe foſſe ſtata $\overline{fx^n + gy^t + bz^c + \&c.}^{r}$, collo ſteſſo modo s' avrà la ſua differenziale, perchè ſuppoſtala $= u$, ſe n' avrà

$$du = r \times \overline{fx^n + gy^t + bz^c + \&c.}^{r-1} \times \overline{fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}\,dy + bcz^{c-1}dz + \&c.}$$

Num.

Num. 47 Sia proposta la $bp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^r$: Suppongasi $fx^n + gy^t = u$, la onde la proposta potrà acquistare la forma $bp^e \times u$, la di cui differenziale (*Num.* 44.) è $ube\,p^{e-1}dp + bp^e du$, e perchè (*Num.* 45.) si ha $du = r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1} \times fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy$, fatte le debite sostituzioni avremo $\overline{fx^n + gy^t}^r \times bep^{e-1}\,dp + rbp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1} \times fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy$, che è la cercata differenziale.

Num. 48. Che se la parte sotto al segno avesse più termini de i due supposti, e fosse per esempio $bp^e \times \overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^r$, collo stesso artifizio si troverà essere la sua differenziale $bep^{e-1}dp \times \overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^{r-1} + rbp^e \times \overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^{r-1} \times fnx^{n-1}dx \times gty^{t-1}dy + bez^{e-1}dz + \&c.$

Num. 49. E' facile ora ritrovare la differenziale di $\overline{bp^e + eb^i + \&c.}^s \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^r$, scuoprendosi per li *Numeri* 44., e 45. esser ella $bep^{e-1}dp + eib^{i-1}db + \&c. \times s \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^{s-1} \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^r + fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy + \&c. \times r \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{r-1} \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^s$

Num. 50. La proposta $aq^m \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^s \times lz^n \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^r$, si troverà, mediante i Numeri 44., e 47., avere la differenziale $amq^{m-1}dq \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^s \times lz^n \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^r + saq^m \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^{s-1} \times bep^{e-1}dp + eb\,i^{-1}db + \&c. \times lz^n \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^r + lnz^{n-1}$

$\overline{lnz^{n-1}dz \times fx^n + gy^t + \&c.}^r \times aq^m \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^s + rlz^n \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{r-1} \times fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy + \&c. \times aq^m \times \overline{bp^e + eb^i + \&c.}^s$

Num. 51. Debbasi ritrovare la differenziale di $\overline{bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r}^i$: Suppongasi dunque uguale a z, la onde $z^{\frac{1}{i}} = bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r$, e però per li *Numeri* 35. 36., e 44. si avrà $\frac{z^{\frac{1}{i}-1}}{i}\,dz = bcp^{e-1}\,dp + \overline{fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}dy}^{i-1} \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1}$, e sostituita la uguale di $\frac{z^{\frac{1}{i}-1}}{i}$ si otterrà $dz = i \times \overline{bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r}^{i-1} \times bcp^{e-1}\,dp + \overline{fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy}^{r-1} \times r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1}$

Num. 52. Cerchisi la differenziale di $aq^e \times \overline{bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r}^i$. Suppongasi $z = bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r$; onde la proposta pigli la forma zaq^e Essendo la differenziale di questa (*Num.* 44.) $aqedz + aezq^{e-1}dq$, fatte in questa le dovute sostituzioni di z, e dz ritrovate secondo il *Numero* 51. avrassi la cercata differenziale $= \overline{aeq^{e-1}dq \times bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r}^i + \overline{aiq^e \times bp^e + \overline{fx^n + gy^t}^r}^{i-1} \times bcp^{e-1}\,dp + nfx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy \times r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1}$

Num. 53. Si voglia la differenziale di $\overline{fx^n gy^t + bp^e aq^i}^{r}$. Suppoſto, che ſia $= z$, onde $fx^n gy^t + bp^e aq^i = z^{\frac{1}{r}}$, avremo pel *Numero* 44. $nfx^{n-1}\,dx gy^t + gty^{t-1}\,dyfx^n + bep^{e-1}\,dpaq^i + aiq^{i-1}\,dq\,bp^e. = z^{\frac{i-r}{r}}\,dz$, che colla ſoſtituzione dovuta ſi riduce a $dz = r \times \overline{fx^n gy^t + bp^e aq^i}^{r-1} \times nfx^{n-1}\,dx\,gy^t + gty^{t-1}\,dyfx^n + bep^{e-1}\,dpaq^i + aiq^{i-1}\,dqbp^e$.

Num. 54. Si crede baſtevoliſſimo il fin qui eſpoſto per ritrovare qualunque differenziale di primo grado incompleſſa, o compleſſa, purchè di quella maniera, per ottener la quale altro non v' interviene, che il ſolo calcolo. Stimo bensì opportuno il ridurre le premeſſe differenziali tutte qui una dietro all' altra, come in una liſta, e ricavarne di mano in mano altre differenziali. Ciò facendo, credo, che due vantaggi trar ſe ne poſſano. Il primo: che così i Principianti avranno come un regiſtro di tante formole per ritrovar prontamente, e con ſicurezza, le differenziali, che loro foſſero per occorrere. L' altro vantaggio riguarda il calcolo integrale; e reſterà paleſe, allorchè ne avremo l' occaſione.

Num. 55. La variabile $fx^n gy^t$ (Num. 44.) ha la ſua differenziale $fnx^{n-1}\,dxgy^t + gty^{t-1}\,dyfx^n$.

Num. 56. Se y, per eſempio, non foſſe ſtata variabile, ma una coſtante a, ella non avrebbe data che la differenziale $fnx^{n-1}\,dxga^t$.

Num. 57. Della $\overline{fx^n + gy^t}^{r}$ (Num. 45.) la differenziale è $r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1} \times fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy$.

Num. 58. Se y non foſſe ſtata variabile, e però la propoſta aveſſe avuta la forma $\overline{a + fx^n}^{r}$, ella avrebbe la differenziale $r \times \overline{a + fx^n}^{r-1} \times fnx^{n-1}\,dx$. (Num. 44.)

Num. 59. La variabile $\overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^{r}$ ſomminiſtra [*Num.* 46.] la differenziale $r \times \overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^{r-1} \times fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy + bez^{e-1}\,dz + \&c.$

Num. 60. Se per eſempio z foſſe ſtata coſtante, onde $bz^e = a$, la ſua differenziale ſarebbe ſtata (Num. 44.) $r \times \overline{a + fx^n + gy^t + \&c.}^{r-1} \times fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy + \&c.$

Num. 61. Di $bp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^{r}$ la differenziale (*num.* 47.) è $bep^{e-1}\,dp \times \overline{fx^n + gy^t}^{r} + rbp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1} \times fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy$.

Num. 62. Se y foſſe ſtata coſtante, onde $gy^t = a$, avremmo avuta la differenziale $bep^{e-1}\,dp \times \overline{a + fx^n}^{r} + rbp^e \times \overline{a + fx^n}^{r-1} \times fnx^{n-1}\,dx$ (num. 44.)

Num. 63. Queſta differenziale può ridurſi tutta alla ſteſſa denominazione, e ciò ſi ottiene ſvolgendo la $\overline{a + fx^n}^{r}$. Queſto vuol dire, che eſſa $\overline{a + fx^n}^{r}$ ſi multiplichi per $\frac{a + fx^n}{a + fx^n}$ che è la ſteſſa unità, la onde le ſi muta bensì la forma, ma non il valore. Fatta l' operazione riſulta $\overline{a + fx^n}^{r-1} \times a + fx^n \times bep^{e-1}\,dp + rbp^e fnx^{n-1}\,dx$.

Num. 64. Di $bp^e \times \overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^{r}$ ſi ha (Num. 48.) la $\overline{fx^n + gy^t + bz^e + \&c.}^{r} \times bep^{e-1}\,dp + rbp^e \times \overline{fx^n + gy^t + bz^e}^{r-1} + fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy + bez^{e-1}\,dz + \&c.$

Num. 65. Anche qui può ſupporſi, che una, o più delle variabili ſieno coſtanti, e ritrovarſene le proprie differen-

ferenziali, ed ifvolgerle, ſe così piaccia.

Num. 66. La differenziale di $\overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{r} \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{s}$ è (Num. 49.) $\overline{bcp^{c-1}dp + eib^{i-1}db + \&c.}^{r} \times \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{s-1} \times \overline{fx^n + gy^t + fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy + \&c.}^{r-1} \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{s} + \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{s} \times r \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{r-1}$

Num. 67. Della $aq^m \times \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{r} \times lz^u \times \overline{fx^n + gy^t}^{s}$, la differenziale (*Num.* 50.) è $amq^{m-1}dq \times \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{s} \times lz^u \times \overline{fx^n + gy^t}^{r} + saq^m \times \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{s-1} \times \overline{bcp^{c-1}dp + eib^{i-1}db + \&c.}^{r} \times lz^u \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{s} + luz^{u-1}dz \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{r} \times aq^m \times \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{s} + rlz^u \times \overline{fx^n + gy^t + \&c.}^{r-1} \times \overline{fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy + \&c.}^{s} \times aq^m \times \overline{bp^c + eb^i + \&c.}^{s}$

Num. 68. Di $\overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{s}$ la differenziale (*num.* 51.) è $i \times \overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{s-1} \times \overline{bcp^{c-1}dp + fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy}^{r} \times r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1}$

Num. 69. Di $aq^e \times \overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{r} \times \overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{i}$ ſi ha [*num.* 52.] la differenziale $a^e q^{e-1}dq \times \overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{i-1} \times \overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{r} + iaq^e \times \overline{bp^c + fx^n + gy^t}^{r} \times \overline{bcp^{c-1}dp + nfx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy}^{r} \times r \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1}$.

Num.

Num. 70. Finalmente di $\overline{fx^n gy^t + bp^e aq^i}^{r}$ la differenziale è (*Num.* 50.) $r \times \overline{fx^n gy^t + bp^e aq^i}^{r-1} \times \overline{nfx^{n-1}dxgy + gty^{t-1}dyfx^n + bep^{e-1}dpaq^i + aiq^{i-1}dqbp^e}$.

Num. 71. In propoſito de' *Numeri* 67. 68. 69., e 70. hanno luogo riſpettivamente le coſe dette al *Num.* 65.

Num. 72. Per ritrovare le Differenziali fin qui regiſtrate, e quelle pure, che, ſeguendo il metodo qui indicato, potranno facilisſimamente trovarſi, d' altro ſoccorſo non ſi è avuto di biſogno, fuori che del puro calcolo. Paſſerò ora a ricercar quelle, per le quali, oltre al calcolo, ſi richiede l' ajuto della Geometria, vale a dire della conſiderazione delle linee, della ſimilitudine delle figure, e diverſe abitudini, che le grandezze hanno fra di loro. Siccome dunque per verità le prime naſcono, o per meglio dire, vengono a noſtra notizia differentemente da queſte, che ora m' accingo di rintracciare, ho creduto, per ſalvar l' ordine, di dover diſtinguere queſte loro diverſità, trattando di eſſe per capi ſeparati. Nè il ſolo motivo di ſalvar l' ordine mi ha moſſo a ciò fare, ma una ragione più intrinſeca, che a ſuo tempo farò paleſe. Non è già per queſto, che le Differenziali della prima maniera, e le quali da qui avanti per facilità di diſtinguerle mi farà conceduto, che io le chiami *Differenziali Aritmetiche*, giacchè dal ſolo calcolo le abbiamo, debbano perciò eſſere, riguardo all' eſſenza, di natura diverſa dalle Differenziali della ſeguente maniera, che a diſtinzione delle antecedenti mi ſarà permeſſo di nominarle *Differenziali Geometriche*, giacchè la Geometria ce le ſomminiſtra; laonde, che tali Differenziali non ſieno ſempre gli aumenti, o decrementi delle vere variabili contigue, ma perchè eſſendo la maniera di tali ricerche veramente diverſa, così pure voleva il buon ordine, e lo voleva più intrinſeca ragione, che ſeparatamente ſi trattaſſero.

Del

Del Calcolo Differenziale.

SEZIONE TERZA.

CAPO SECONDO.

Delle Differenziali, che la Geometria ci ſomminiſtra.

Num. 73. SIA la curva *A B* [*Figura* 1.], in cui l' aſciſſa *A C* ſia detta *x*, e *y* l' ordinata *C B*. E' noto, che qualunque ſia la lunghezza di *A C*, dovrà ſempre la ſua correſpondente *C B*, che ſi ſuppone inſiſtere alla *A C* colla ſteſſa invariata inclinazione, avere alla *A C* la ſteſſa abitudine, dimodochè eſprimendoſi per una equazione la natura dalla curva *A B*, e nella quale equazione entrino per incognite le coordinate *x*. *y*, in qualunque miſura ſi aſſuma in tale equazione una di loro, per eſempio l' aſciſſa *x*, dovrà, ſe ha a mantenerſi la ſteſſa equazione, aſſumerſi per *y* la ordinata corriſpondente di *x*.

Num. 74. Naſce di qui, che qualunque curva è ſempre come una immagine viſibile, o per modo di dire, come una ſcala di un Problema indeterminato, compoſto di due variabili, e ſono queſte le coordinate *A C*. *C B* della curva. Queſte due coordinate dunque ſono eſſe le variabili correſpondenti, e queſte variabili hanno perciò giuſtamente le loro variabili contigue.

Num. 75. Sieno dunque queſte le due *Ac*. *cb*. Sia ora condotta la retta *Bg* paralella all' aſciſſa *Ac*, ed in oltre pel punto *B* condotta la *B D* tangente alla curva in *B*, e che tagli l' aſciſſa prolongata in *D*, e ſia pure eſſa tangente prolongata in *f*, e così pure la *cb*. Verrà con ciò fatto neceſſariamente il picciolo triangolo *g Bf*, giacchè non può a meno, che il punto *f* non ſia in diverſo ſito dal punto *B*, eſſendo quel punto nella *cbf*, e queſto nella *CB*, le quali due linee, quantunque contigue, una però non è confuſa coll' altra. Tale triangolo *g Bf* fatto dalla differenza dell' aſciſſa

aſciſſa *Bg* (*Cc*), dalla porzione *gf* dell' ordinata, e dalla porzione intercetta *Bf* della tangente, ſi dimoſtra nelle preſenti conſiderazioni eſſere lo ſteſſo, e coincidere col triangolo, che ſembra miſtilineo *g Bb*, fatto dalla differenza *Bg* dell' aſciſſa, dalla differenza *g b* dell' ordinara, e dalla porzione *Bb* della curva intercetta fralle due ordinate contigue. In fatti prolunghiſi la *g B* a piacimento in *h*. Per *h* ſi conduca la paralella *hl* alla *BC*, e termini alla tangente in *L*. Dividaſi la *hl* per mezzo in *i*, e per *i*, e *B* ſi tiri la retta *iBa*. E' manifeſto, che queſta non potrà eſſere anch' eſſa tangente della curva, ma entro di eſſa dovrà ſcorrere, almeno per qualche lunghezza, alla parte *bg*. Potrebbe certamente darſi caſo, che eſſa *Ba* prolungata tornaſſe ad uſcire dalla curva; ma ſiccome nel preſente caſo il punto *b* ſi conſidera talmente vicino al punto *B*, che altro punto più vicino, e intermedio non poſſa aſſegnarſi; di qui ſi deduce, che il punto *a* ſarà neceſſariamente fra il punto *b*, e il punto *g*: imperocchè ſe cada fuori, o anche nello ſteſſo punto *b*, dunque la *Ba* avrà ſegato un arco della curva, dunque in quest' arco vi ſaranno più punti, dunque il punto *b* non era, come ſupponevaſi, il più vicino fra gli aſſignabili al punto *B*. Veduto pertanto, che il punto *a* è neceſſariamente entro alla curva, comechè il triangolo *Bhl* è fatto ſimile al triangolo *Bgf*, e queſti due triangoli ſono pure tagliati ſimilmente dalle rette *iBa*, ſarà il punto *a* nel mezzo della *fg*, come il punto *i* ſi è poſto nel mezzo della *hl*, e perchè il punto *b* cade fra i punti *fa*, così *bf* ſarà minore di *fa*, e perciò *bf* ſarà minore di *gb*, giacchè *gb* è maggiore di *ga*. Ma ſiccome in riguardo al fare, che la *cb* divenga la variabile contigua di *CB*, non può darſi, nè vi è quantità minore di *gb*, dunque la diſtanza *bf*, che ſe ſi daſſe, ſarebbe minore di *gb*, non è veramente, nè qui può eſſere; la qual coſa eſſendo così, è pur forza, che il lato *Bf* coincida coll' arco *Bb*, e così il triangolo *Bgf* al triangolo *Bgb*, come ſi era propoſto.

Num. 76. Da queſta verità molte altre feconditſime ne derivano, alcune delle quali, ſecondo il biſogno, andrò eſponendo. Segue dunque chiaramente, che tutte le porzioni,

o ar-

o archetti Bb di qual ſi voglia curva, quando ſi conſiderino intercetti da due ordinate contigue, ſono tante lienee rette, onde qualunque curva in queſta conſiderazione è un vero poligono di tanti lati, quanti ſono gl' intervalli delle ordinate contigue, che la natura di eſſa curva permette, che eſiſtano.

Num. 77. E perchè quando le ordinate CB ſtanno rettamente poſte all' aſciſſa AC, il triangolo Bgb è rettangolo in g, laonde il picciol lato Bb viene eſpoſto per $\sqrt{Bg^2+bg^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$, quindi è, che da qualunque curva, ſe noi vorremo gli accreſcimenti Bb contigui anch' eſſi del contorno di eſſa curva, correſpondenti agli accreſcimenti delle coordinate contigue della medeſima, ed eſpreſſi tali accreſcimenti per mezzo di una delle variabili, e coſtanti della curva medeſima, di qui ne viene pianamente la regola generale.

Num. 78. Imperocchè ſi prendano dall' equazione della data curva le differenziali delle due variabili, che la compongono. Si ſepari una di dette differenziali, per eſempio dx, dimodochè nella equazione la dx faccia un membro da ſe. Queſta equazione ſi elevi al quadrato. Si ſepari ancora dall' equazione della curva la medeſima variabile x, di cui nell' altra equazione ſi è ſeparata la differenziale, onde anche x faccia da ſe un membro dell' equazione. Con queſte quantità così ſeparate ſi facciano nella formula generale $\sqrt{dx^2+dy^2}$ le ſoſtituzioni opportune, onde queſta formola non contenga piucchè una ſola variabile, e la ſua differenziale, e coſtanti. Così avremo eſpreſſi gli accreſcimenti di qualunque curva in particolare per mezzo di una delle coordinate, o variabili, e ſue coſtanti, come era ſtato propoſto.

Per facilitare l' intelligenza, e per iſpiegare la dimoſtrazione delle coſe dette a i Principianti, ſia la curva AC la prima parabula, la di cui equazione ſia $px = yy$. La differenziale di queſta equazione è $pdx = 2ydy$ (*Num.* 38) Si ſepari per eſempio dy, onde $dy = \frac{pdx}{2y}$, e quadrando $dy^2 = \frac{ppdx^2}{4yy}$ ſeparaſi altresì y dalla prima equazione, onde $y = \sqrt{px}$: Soſtituendo dunque nella $\sqrt{dx^2+dy^2}$ la $\frac{ppdx^2}{4yy}$ in vece di dy^2, e px in luogo di y^2, cambieraſſi in $x - \frac{1}{2}dx \times \sqrt{p+4x}$, e queſta ſenz' altro ulterior rifleſſo ſi ſcorge eſſere l' accreſcimento, che va facendo l' arco della parabola correſpondentemente agli accreſcimenti, che vanno facendo le di lei coordinate, ed eſpreſſo per la ſola variabile x, e coſtanti. Se aveſſimo ſeparato x, e dx, lo che è indifferente di fare, onde $dx = \frac{2ydy}{p}$, avremmo avuto il medeſimo accreſcimento eſpoſto per $\frac{dy}{p} \times \sqrt{pp+4yy}$, ma eſpreſſo per l' altra variabile y.

Num. 79. E' per ſe manifeſto, che la ſomma di tutte quante le piccole rette, o lati Bb della curva, uguaglia giuſtamente tutta la lunghezza AB della medeſima, la onde ſe avremo modo di calcolare la ſomma di tutti i piccioli lati variabili, eſpoſti cadaun di loro indeterminatamente per una delle due trovate eſpreſſioni, avremo altresì nota tutta la lunghezza AB della curva dalla ſua origine A fino a quel punto B, a cui corriſponde l' aſciſſa, che ſi è determinata AC. Con tutta ragione dunque la formula $\sqrt{dx^2+dy^2}$ è detta la formula per la rettificazione delle curve.

Num. 80. Premeſſa queſta pratica, colla quale ho cominciato a moſtrare, come per mezzo della Geometria ſi trovino delle differenziali, cade in acconcio, prima di avanzarſi a deſcrivere altre ſimili pratiche, eſporre quell' intrinſeca ragione, che al *Num.* 72. ho accennata, per cui di due diverſi metodi di ritrovare le differenziali ho duvuto far diſtinzione. Procederò così a ſtabilire la ſicurezza del metodo geometrico, ed a mio credere, anche più all' avanzamento del Calcolo integrale. Suppongaſi adunque, che l' arco AB della curva eſſo ſia variabile, e nominiſi u, e che l' archetto Bb ſia il ſuo elemento, onde du. S' intende facilmente, che in due maniere fra loro diverſe può ottenerſi il valore di du. L' una farebbe l' eſpoſta già per via

aritmetica, cioè se noi avessimo il problema indeterminato, una delle variabili primitive del quale fosse u, e la sua corrispondente fosse un altra, per esempio z, onde dalla equazione finale di esso problema se ne venisse a poter ritrarre il valore di du, mediante l' equazione differenziale, giusta il *Num.* 38., esposto per la differenziale di z. Se il valore di du si trovi in fatti per questa maniera, segue poi necessariamente ciò, che notai al *Num.* 43., cioè che essendo allora du, e dz i secondi termini de i loro rispettivi binomj, o variabili contigue, può, e deesi dall' equazione di questi secondi termini, per tal maniera trovati, risalirsi all' equazione finale in quel modo, che fin' ora è stato usato nel Calcolo integrale. Ma queste cose non seguono già necessariamente, e se seguono alcuna volta, è per mero accidente, se il valore di du sia ritrovato per maniera diversa dalla prenotata. Tale maniera, considerando ciò, che abbiam fatto nel *Num.* 78. per ritrovare il valore di du, consiste tutta nell' avere bensì ricavato aritmeticamente i valori delle delle due linee Cc (dx) gb (dy), ma susseguentemente per via totalmente geometrica si è indagato il valore della linea Bb. Fin qui niun problema noi abbiamo avuto, in cui intervenga per variabile primitiva la u, nè la sua propria corrispondente z, onde niuna notizia ci è fin' ora insorta, che Bb sia, o non sia il secondo termine della variabile, o binomio $u + du$, anzi di tale notizia noi non abbiamo bisogno alcuno per giungere a quella cognizione, che noi cerchiamo, perchè basta unicamente a noi, e precisamente in questi limiti si tiene tutta la nostra presente ricerca, il sapere esprimere per un elemento dx, o dy delle coordinate della data curva, il valore di Bb, e questo valore noi lo esprimiamo sinteticamente con tutta certezza. E' vero per tanto, che sussiste bensì, ed è certissima l' equazione per esempio $du = dy\sqrt{pp + yy}$, ma questa equazione intrinsecamente è assai diversa da quello, che sarebbe, se ella fosse stata trovata per via aritmetica, mentre essa equazione denota piuttosto, ed unicamente poi, e nient' altro se non che solo l' espressione di du viene rappresentata per l'

per l' espressione $dy\sqrt{pp + yy}$, cioè per una relazione ad una, dirò così, terza variabile x, o y, diversa da quella z, che comporrebbe ella, se noi la sapessimo, il vero problema, onde trarne aritmeticamente la equazione di du. Se avessimo potuto trovare per una tal via essa espressione, ella non solo denoterebbe la medesima rappresentazione, ma inoltre ci farebbe sicuri, che i due membri di tale equazione sono i secondi termini de' loro rispettivi binomj, e che da essa può risalirsi coll' ordinario, e noto metodo del Calcolo integrale, alla cognizione de i primi termini di tali binomj, e conseguentemente per tale strada all' equazione finale del Problema. Quindi per tanto pare a me, che nasca, e spero dar conferme evidenti di fatto di questa mia credenza, allorchè nella seconda Parte di queste Memorie tratterò del Calcolo integrale, che il metodo fin' ora usato di questo Calcolo, incontrando moltissime differenziali si arena, e certamente le differenziali, che non hanno potuto nascere per altro modo, che per pura via geometrica, non possono da quel metodo integrarsi, perchè esso cerca unicamente il primo termine del binomio, notizia, ed uso del qual primo termine nelle differenziali geometriche non interviene. Siccome dunque passa questa sì essenzial differenza fra i nominati due metodi in ritrovare le loro differenziali, così credo indispensabile una corrispettiva differenza fra i metodi di integrare, e siccome per le differenziali aritmetiche il metodo di risalire al primo termine del binomio è quello, che conviene al loro appropriato calcolo integrale, così son persuaso, che alle differenziali geometriche convenga (a suo luogo mi spiegherò più chiaro, e diffuso) un metodo, che dirò *Sommatorio*. In fatti l' occhio stesso ci mostra, come nel Numero antecedente abbiamo avvertito, che tutto l' arco Ab [u] altro non è che la somma di tutti i piccioli archetti Bb [du], onde lasciando da parte in questa ricerca, che u sia, o non sia il primo termine d' un binomio, lo che ci è superfluo di ricercare, basta a noi per ottenere la cercata variabile u, avere un metodo, che ci dia la somma di tutti i variabili du, che capiscono nell' arco u.

Queſto metodo nel progreſſo di queſte Memorie io mi sforzerò di andarlo appianando, baſtandomi per ora di avere ſeparate queſte fin' ora reſtate confuſe notizie, onde i miei Lettori fatti avvertiti camminino per iſtrade ſicure, e non s' aggirino ſenza far viaggio.

Num. 81. Proſeguiamo ora a ſcuoprire altre differenziali per via geometrica. Non è per altro nè facile, nè poſſibile ridurre il metodo geometrico di ritrovare le differenziali ad una preciſa regola generale, dipendendo eſſo dalle varie abitudini particolari, o geometriche, o meccaniche, o &c., che eſſe variabili, per la natura de' problemi, che conſtituiſcono, conſervan fra loro. Quindi è che ſtenderò ſolo alcune maniere particolari di ritrovare ſimili differenziali.

Num. 82. L' area ABC (*Fig.* 1.) contenuta dal contorno AB della curva, e delle ſue coordinate AC CB, allorchè inſiſtono l' una all' altra rettamente, può intenderſi diviſa in tanti trapezj $CBbc$ quanti formar ne poſſono ogni pajo di ordinate contigue, e la ſomma di tutti queſti trapezi uguaglia viſibilmente l' area predetta. Ogni trapezio però $CBbc$ uguaglia veramente il ſolo rettangolo $BCcg$, imperocchè non ſuperando il trapezio $CBbc$ il rettangolo $BCcg$ fuorichè per l' area del triangolo $Bbg = Bg + \frac{bg}{2}$ la grandezza $\frac{bg}{2}$ è innegabilmente minore di bg, e perchè nella conſiderazione preſente, grandezza minore di bg nè è, nè può eſſere, ſiegue ancora innegabilmente, che l' area del triangolo Bbg non è, nè può eſſere nella preſente equazione, laonde, come ſi diceva, il trapezio $CBbc$ adegua veramente il ſolo rettangolo $BCcg$. Queſto rettangolo è poi generalmente ydx ($BC \times Cc$), e però l' eſpreſſione ydx ſarà l' aumento contiguo dell' area ABC della curva, correſpondente agli aumenti contigui delle coordinate della medeſima, onde ſe vorremo in particolare tale accreſcimento, il quale è pure la differenziale, o aumento dell' area della curva altresì particolare, eſpreſſo per mezzo di una delle variabili, e coſtanti della curva medeſima, faremo come ſiegue.

Num. 83. Dall' equazione della data curva ſi ſepari la y, onde ella reſti in un ſol membro, l' altro membro ſi multiplichi per dx, e ſi avrà la differenziale cercata. Può pure, ſe così occorra, prenderſi la differenziale dell' equazione della propoſta curva, indi ridotto dx in un ſolo membro, multiplicar l' altro per y. Faciliterò pure coll' eſempio della parabola l' intelligenza di queſta regola. Dall' equazione $px = y^2$ abbiamo $y = \sqrt{px}$, e multiplicando queſto membro per dx, ſi ottiene $dx \times \sqrt{px}$, che eſprime indeterminatamente la differenziale, o accreſcimento contiguo dell' area in particolare della parabola, e ciò per mezzo della ſola variabile x, e ſue coſtanti. Può pure trarſi la differenziale dx dall' equazione della curva, onde avuto $pdx = 2ydy$, e però $dx = \frac{2ydy}{p}$, e multiplicato queſto ſecondo membro per y, l' eſpreſſione $\frac{2y^2dy}{p}$ denoterà anch' eſſa indeterminatamente la ſteſſa differenziale in particolare dell' area della parabola, e che uguaglia preciſamente il valore dell' altra differenziale $dx\sqrt{px}$, ma ne eſpone l' elemento per y.

Num. 84. E perchè, come ſi è detto [*Num.* 82.], la ſomma di tutte le differenziali del preſente Numero uguaglia l' area della curva, ſe aveſſimo modo di calcolare tal ſomma, avremmo altresì l' area ricercata. Vedremo a ſuo luogo, che la ſomma delle differenziali $dx\sqrt{px}$ della parabola è $\frac{2x\sqrt{px}}{3}$, onde ſoſtituendo in queſta in vece di $\sqrt{px}$, la ſua uguale y, ella ſi riduce a $\frac{2xy}{3}$. Queſto valore dell' area della parabola è ſtato trovato tale, com' è notiſſimo, per altre maniere puramente geometriche. Lo ſteſſo valore pure ſi ricava, adoperando l' altro elemento $\frac{2y^2dy}{3}$, la ſomma de' quali è, come vedremo poi, $2y^3$, e ſoſtituito $\sqrt{px}$ in vece di y^2, ſe ne reſtituiſce la ſteſſa area $\frac{2xy}{3}$.

Num. 85. Sia la curva AB [*Fig.* 1.]; s'intenda girar queſta intorno all' aſſiſſa AC, conſiderata in queſto caſo come l' aſſe della rivoluzione. E' viſibile, che girandoſi la curva intorno a

no a tal asse si produrrà un solido conoideo. In questo solido per tanto potiamo considerare e la sua superficie, e la sua solidità, e conseguentemente, considerando esso solido variabile corrispettivamente al variare delle coordinate della curva, che lo genera, potiamo avere la differenziale tanto della superficie, quanto della solidità del medesimo. Per la differenziale della superficie si osservi, che nella rivoluzione della curva il picciol lato Bb descrive una fascia sopra la superficie del conoide, e che questa fascia è la differenziale di tutta la superficie. Questa fascia, come è noto dalla Geometria, adegua il prodotto del lato Bb in quella circonferenza, che fosse descritta dal punto L, che è nel mezzo del picciol lato Bb. Sia dunque la ragione del raggio alla circonferenza esposta generalmente per $\frac{r}{c}$, e siccome il raggio competente alla circonferenza descritta dal punto L è $IL = y + \frac{du}{2}$ (si pone, che l'arco della curva sia u, onde che du sia l'archetto Bb), fatto $r . c :: y + \frac{du}{2} . \frac{2cy + cdu}{2r}$, questa sarà la circonferenza descritta dal punto L, e però la cercata differenziale sarà $\frac{2cy + cdu}{2r} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}$, giacchè pel *Num.* 84., si è veduto, che Bb è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ma perchè in questa espressione trovasi $\frac{c}{r} \times \frac{du}{2}$, e $\frac{du}{2}$, essendo manifestamente minore di du. è una grandezza, che nella presente equazione non è, nè può essere, quindi la vera cercata differenziale resta la sola $cy \times \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{r} = du$.

Num. 86. Per l'equazione differenziale poi della solidità del conoide si osservi, che nella rivoluzione il trapezio $BCcb$ descrive un tronco di cono, il qual tronco è la differenziale di tutto il conoide. Questo tronco dunque, come è noto dalla Geometria, è il prodotto dell'altezza Cc nell'area di quel cerchio, che ha per raggio la IL, terminato dal punto I nel mezzo del picciol lato Bb. Sia dunque

dunque la ragione del raggio all'area del cerchio esposta generalmente per r, onde fatto $r . a :: y + \frac{du}{2} (IL) . 2ay + adu$, questa sarà l'area del cerchio passante pel punto L, la onde avremo $dx \times \frac{2ay + adu}{2r}$, che per la ragione esposta nell'antecedente Numero si riduce a $\frac{dxay}{r} = ds$, supposto, che s sia la solidità del conoide.

Num. 87. Volendosi poi in particolare l'equazione differenziale della superficie, o della solidità di un determinato conoide. Per la superficie è d'uopo prendere le differenziali della curva generatrice, e porre dx, o dy in un membro solo, e quadrar l'equazione, onde nella formula generale si possa sostituire il quadrato dell'altro membro in luogo di dx^2, o dy^2. E' ancora necessario separare nell'equazione della curva o la x, o la y, secondo che si è sostituito o dx^2, o dy^2, onde possa sostituirsi ancora, occorrendo, in luogo di x il membro a questa uguale. Con queste sostituzioni la formula generale passerà a darci l'equazione differenziale della proposta curva, ed espressa con una sola variabile, e sua differenziale, e costanti. Sia per esempio da ritrovarsi l'equazione differenziale della superficie di una sfera, solido formato dalla rivoluzione di un mezzo cerchio attorno al suo diametro. Comechè l'equazione esprimente la natura del mezzo cerchio è $y^2 = 2fx - xx$, in cui f denota il raggio del cerchio, sarà l'equazione differenziale $ydy = fdx - xdx$, e perchè $y \sqrt{2fx - xx}$, avremo $dy^2 = \frac{dx^2}{2fx - xx} \times \overline{f - x}^2$. Sostituita ora questa in luogo di dy^2 nella premessa formula generale, si avrà l'equazione differenziale, e particolare della superficie s della sfera esposta per $ds = \frac{cfdx}{r}$, da cui, come a suo luogo vedremo, si ha l'equazione finale $s = \frac{cfx}{r}$ corrispondente all'ascissa x, e per la superficie di tutta la sfera $\frac{2cff}{r} = s$, giacchè allora x diviene $2f$.

Num.

Num. 88. Volendo poi la ſolidità della ſfera, eſſendo $y = \sqrt{2fx - xx}$, multiplicata queſta per $\frac{vdx}{r}$, ſi otterrà la ſua equazione differenziale, detta u tale ſolidità, per la $du = adx \times \sqrt{2f - x}$, e da eſſa, ſe potrà averſi l' equazione finale, ſi otterrà la cercata ſolidità u.

Num. 89. Sia [*Fig.* 2.] la curva AG ſopra di un piano. A queſto piano inſiſta rettamente il piano di una altra curva AC, di modo che l' aſciſſa AB ſia comune ad ambedue le curve. La prima curva la nominerò la *baſe*, e la ſeconda la *generatrice*. Sia ſul piano della baſe la retta AF paralella all' ordinata BG, indi s' intenda moverſi la generatrice, conſervandoſi però ſempre paralella a ſe medeſima, di modo che il punto B, che è comune all' aſciſſa, ed alle due ordinate dell' una, e l' altra curva, cammino ſempre ſulla coordinata BG della baſe, e l' apice A della generatrice ſempre ſulla paralella AF. Compito il viaggio della generatrice per fin che dura l' ordinata BG della baſe, s' intenda quetarſi eſſa generatrice, e concepiſcaſi che la baſe BAG cominci anch' ella a muoverſi nello ſteſſo modo, che ha fatto la generatrice, tenendoſi ſempre a ſe medeſima paralella, ſcorrendo col ſuo punto B tutta l' ordinata BC. Col moto della generatrice ſarebbe nato il priſma miſtilineo $AFECBG$, dal quale priſma poi, col ſecondo moto, viene ad eſſere tagliata fuori l' unghia $ACEGB$. Si propone di ritrovare le equazioni differenziali della ſuperficie s di quest' unghia, e della ſolidità u.

Num. 90. E per la ſuperficie ſi vede doverſi prendere la ſomma delle quattro differenziali delle quattro facce di queſto ſolido, e che però dee prenderſi partitamente la differenziale di cadauna faccia. Due di queſte facce ſono piane, cioè ACB, ed AGB, le due altre ACE, AGE ſono curve. Quanto alle prime le loro differenziali ſono le differenziali medeſime dell' aree della curva, onde detto $AB = x \cdot Bc = y$. $BG = z$, ſarà la differenziale $BCcb = ydx$, e la $BGgb = zdx$ (*Num.* 86.). Quanto alle differenziali

delle ſuperficie curve la $CEec$ è il prodotto di Cc per BG, e così quella di $GEeg$ è il prodotto di Gg per BC, onde queſta è $y \times \sqrt{dx^2 + dz^2}$, e quella è $z \times b\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e però la cercata equazione differenziale, e generale per ritrovare la ſuperficie dell' unghia propoſta è $ds = y \times dx + \sqrt{dx^2 + dz^2} + z \times dx + \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Num. 91. Quanto alla ſolidità ſi vede ſenz' altro farſi ella dal prodotto di Bb in BC, onde eſſere l' equazione differenziale la $du = yzdx$.

Num. 92. Sia per eſempio la baſe la parabola $px = zz$, onde $dz = \frac{dx\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$, e $dx^2 = \frac{pdx^2}{4x}$. Sia la generatrice l' altra parabola $fx = yy$, onde $dy^2 = \frac{fdx^2}{4x}$. Fatte le opportune ſoſtituzioni avremo $ds = dx \times \sqrt{fx} + \sqrt{px} + \sqrt{4fx + pf} + \sqrt{4px + pf}$, e come vedremo a ſuo luogo l' equazione finale $s = \frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{f}}{3} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{p}}{5} + \frac{\overline{4fx + pf}^{\frac{5}{2}}}{24f} - \frac{\overline{4px + pf}^{\frac{3}{2}}}{24p}$.

Num. 93. Per la ſolidità avremo $du = xdx\sqrt{pf}$, e per la ſua equazione finale $u = \frac{x^2\sqrt{pf}}{2}$.

Num. 94. Le differenziali fin' ora ſcoperte per via geometrica ſono prodotte dalla ſola conſiderazione, che l' archetto di una curva intercetto fra due variabili contigue ſia una linea retta. Conſiderando altre paſſioni del triangolo rettangolo fatto da eſſo archetto, e dalle differenziali delle coordinate, ſempre più creſce il capitale per iſcoprir altre differenziali; e però anche di queſte paſſioni in grazia de' Principianti è d' uopo toccar qualche coſa.

Num. 95. Nella curva AG (*Fig.* 3.) ſia l' ordinata bg contigua alla BG, e ſia condotta la GH tangente la curva nel punto G; e la Ge paralella alla Ab. Si è già veduto (*Num.* 75.) che il piccol lato Gg coincide colla detta tangente GH prolongata in g. Queſta verità non repugna, ſe non apparentemente, all' altra verità, certa anch' eſſa nella Geometria ordinaria, cioè che le tangenti non tocchino le curve ſe non in un punto, e pur qui ſi moſtra, che le tocchino almeno in due, mentre il punto g è innegabilmente nella curva, ed è diverſo dal punto G. In queſto ſecondo caſo la conſiderazione della curva è particolarizzata ad eſprimere gli aumenti delle coordinate contigue, e però in ſeguito neceſſario di queſta conſiderazione, per l' ipoteſi certa, neceſſaria, ed intrinſeca alle coordinate contigue, che niuna quantità nell' equazione, che ne eſprime la relazione poſſa darſi minore del loro aumento, ſiccome è ſeguito, che la curva abbia dovuto conſiderarſi come un poligono (*Num.* 76.), così pure ugualmente ſeguir dee, che la tangente ſi adatti a due di lei punti contigui, laddove nel primo caſo non conſiderandoſi, che il continuo indefficiente piegarſi della curva, ſegue da tale generale idea, che la tangente in un ſolo punto la tocchi.

Num. 96. Eſſendo dunque la Gg continuazione in diretto della HG, e ſenz' altro manifeſto, che, ſtando qualſivoglia l' angolo ABG, i due triangoli Geg. HBG ſono ſimili, e che ſtando retto l' angolo ABG, e condotta la AC tangente all' apice A della curva, e la GF perpendicolare alla tangente in G, i triangoli Geg. GBF. HAC. GLC ſono ſimili. Riſerberò alla proſſima Sezione il toccar qualche poco gli uſi, e le fertiliſſime notizie, che raccolgonſi dalla ſimilitudine de' notati triangoli.

Num. 97. Se col raggio qualunque AB (*Fig.* 4.) ſi ſegni l' arco Bb; e ſerva il cerchio di quest' arco alla conſiderazione, di cui trattiamo, onde anch' eſſo cerchio debba conſiderarſi come un poligono, e quell' archetto uno de' ſuoi lati, l' angolo ABb fatto dal raggio AB, e dal piccolo archetto Bb ſarà retto, perchè ſe ſia condotta nel punto B la tangente EF al cerchio, come è noto in Geometria, fa col

col raggio AB l' angolo ABE retto: Ma come veniamo di vedere, l' archetto Bb coincide colla tangente BE, dunque tal angolo è retto. E perchè eſſo triangolo ABb è iſocele, eſſendo $AB = Ab$, così pure l' angolo AbB è retto.

Num. 98. Sia la curva AB (*Fig.* 5.), ed in eſſa tagliato dalla retta AB, che cominci dal vertice A, il ſettore $ABA = s$. Si vuol l' equazione differenziale di eſſo ſettore, correſpondentemente alle coordinate della curva. Sia l' ordinata contigua del ſettore la Ab; col centro A, ed intervallo AB ſi tiri l' arco Be. La AC è generalmente x, e la CB generalmente y. Dunque $AB = \sqrt{x^2+y^2}$, quindi eb ſarà $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. L' angolo Aeb è retto (*Num.* 97.), e però anche l' angolo Beb; onde $\sqrt{be^2 + Be^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = Bb$. Naſce per tanto da quell' equazione $Be^2 = dx^2 + dy^2 - be^2 = dx^2 + dy^2 - \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2dy^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2dx^2}{x^2+y^2}$, e comechè la differenziale del propoſto ſettore ABb è la metà del prodotto di $Ae = AB$ in eB, congiuntamente colla metà altresì del prodotto di eb nello ſteſſo eB; il qual ultimo prodotto, eſſendo una grandezza fatta dalle pure differenziali eb. eB; che eſſendo frazioni minori dell' unità, rendono eſſo prodotto minore di cadauno di loro, fanno che egli nè è, nè può eſſere, quindi la richieſta equazione differenziale rimane la ſola $ds = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$, ovvero $ds = \frac{y\,dx - x\,dy}{2}$. Queſta varietà de' ſegni meno, e più, che ha queſta formula, è neceſſaria ſe ha da ſoddisfare alle due forme di ſettori, che poſſono darſi in ſeguito dell' avere la curva la ſua ſottangente, o maggiore, o minore della ſua aſciſſa, cioè termina-

ta, o dentro, o fuori dell' ambito della curva. Sia per tanto eſpreſſa generalmente per $x+p$. la ſottagente HB [*Fig* 3.] cadente fuori della curva, è ciò manifeſto ſuccedere quando le curve ſono concave verſo le proprie aſciſſe, e giacchè (*Num.* 96.) abbiamo veduto (*Fig.* 1.) eſſere dy (gb) dx (gB) :: y (BC). $x+p$ (CD) $=BH$ (*Fig.* 3.) onde riſulta $ydx = \overline{x+p} \times dy$., reſta chiaro, che nella curva concava verſo l' aſſe è ydx maggiore di xdy. Nella curva conveſſa poi verſo l' aſſe, eſſendo la ſottangente BH minore di x, ella dee eſprimeſi per $x-p$; dalla qual coſa riſulta, che ydx ſia in queſto caſo minore di xdy. Siccome poi la differenziale del propoſto ſegmento dee eſſere certamente una quantità poſitiva, tale eſſer pur dee neceſſariamente l' eſpreſſione per cui ſi denota, per ottener la qual coſa è però d' uopo, che per le curve della prima forma ſi dia la formula $\frac{ydx-xdy}{2}$, e per quelle della ſeconda la $\frac{xdy-ydx}{2}$.

Num. 99. Spianerò al ſolito con un eſempio il modo di far uſo di queſte formule. Sia la parabola $px=yy$, onde $dy = \frac{\overline{V}\overline{p}dx}{2\overline{V}\overline{x}}$. Fatta la ſoſtituzione nella prima formula, che è la ſua convenevole, otteremo $\frac{dx\overline{V}\overline{px}-\frac{xdx\overline{V}\overline{p}}{2\overline{V}\overline{x}}}{2} = \frac{dx\overline{V}\overline{px}}{4} = ds$. Da cui ſi ha, come lo vedremo a ſuo luogo l' equazione finale $s = \frac{x^{\frac{3}{2}}\overline{V}\overline{p}}{6}$. In fatti unita queſta quantità al triangolo $CAB = \frac{x^{\frac{3}{2}}\overline{V}\overline{p}}{3}$ ſe ne fa $\frac{2x^{\frac{3}{2}}\overline{V}\overline{p}}{3}$, che è

che è l' area già nota della parabola. Per uſare della ſeconda formola, ſia (*Fig.* 6.) l' iperbola ordinaria $xy=aa$, laonde $dy = \frac{-aadx}{x^2}$. Fatte le ſoſtituzioni nella ſeconda formula, otteremo $-\frac{aax^{-1}dx-aax^{-1}dx}{2} = ds = \frac{-aadx}{x}$. Troveremo a ſuo luogo la ſua equazione finale, o piuttoſto la ſomma di tali elementi, non eſſendo qui preparate le coſe per anche, onde io poſſa eſſere inteſo da' Principianti.

Num 100. Non aveva fin qui fatto motto nella ricerca delle differenziali geometriche, delle differenziali negative. Ho avuto in mira di non iſturbare i miei Lettori, i quali ſuppongo bensì principianti nel Calcolo differenziale, ma non già nell' ordinario, la onde che ſenz' altro ſaper debbano il maneggio delle quantità negative. Per ajutare per tanto la loro fantaſia, oltre a ciò, che procede immancabilmente nel Calcolo ordinario relativamente a' Segni negativi, oſſervino, che nelle curve conveſſe contro l'aſſe, al creſcere l' elemento, per eſempio $gB = cC = dx$, decreſce l' elemento $bg = -dy$ della variabile y, e per lo contrario; la onde queſto accidente degli elementi negativi nelle curve di queſta natura è ſempre inevitabile, e perciò ſonovi certamente nel calcolo gli elementi negativi; ed alcuni, come i preſenti, naſcono dall' avvertita ragione. Di più ſi oſſervi, che l' elemento dell' area della ſteſſa iperbola, come dal *Num.* 83., è $\frac{aadx}{x}$, il qual elemento non è diverſo dall' altro ora ritrovato del ſettore, che pel ſolo ſegno negativo, che lo accompagna, e pure il ſettore non adegua certamente l' area della ſteſſa iperbola correſpondente alla medeſima aſciſſa. E' neceſſario per tanto far ſeria rifleſſione a queſte certiſſime verità, ed accidenti, e badarvi attentamente alle occaſioni. Vedremo altrove, ove ne tratteremo di propoſito, come dottiſſimi Valentuomini, per non badarci, ci hanno ſomminiſtrate ſoluzioni di problemi, che alla propoſta de' problemi medeſimi non corriſpondono.

Num.

Num. 101. Ho posto ne i *Numeri* 77., 83., 85., 86., 90., 91., e 98. alcune di quelle maniere, per le quali trovasi parte della vastissima moltitudine delle differenziali geometriche; e questo è quello, che da me può farsi, non avendo io in queste Memorie avuto altro in animo, se non che di far riflettere, che per due modi potiamo ottenere delle differenziali, e di scuoprire l' artifizio, e l' uso de i modi medesimi. Per perfezionare al possibile il modo geometrico parmi, che sarebbe d' uopo compilare una *Geometria Elementare intorno alle figure differenziali, e loro abitudini*, a quel modo che il Chiarissimo Euclide la unì già a comodo della Geometria ordinaria. Questa fatica, che sarebbe di un utile grandissimo, non sarebbe già troppo dificile, anzi ella sarebbe per l' appunto da farsi da qualche Giovane principiante, cui basterebbe in leggendo le Opere de' Maestri di questi Calcoli andar notando tutte quelle proposizioni geometriche, e quelle abitudini, che leggesse aver fra di loro tali Figure; indi usando di un buon discernimento, dare alla sua Raccolta quell' ordine, che meglio conducesse alla facile intelligenza, e maggior evidenza di tali proposizioni, alle quali con molta facilità potrebbe aggiugnere molto di suo. Non è già questa una fatica, che richiegga forze robuste, anzi attissima sarebbe per farle guadagar tali a chi l' imprendesse. Non domanda che un po' di pazienza, ed un buon discernimento. Per altro non è da sperare, che una tal opera, di cui però bisogna confessare, che l' argomento delle differenziali con suo non picciolo detrimento ne manca; venga mai fatta da chi è già in tali Studj avanzato, mentre questi riputerebbe perder tempo, e tornar addietro, se si ponesse a compilare le cose degli altri. Oltre poi alla necessità di tal Opera, affine di potersi render padroni di un capitale sì necessario relativamente alle differenziali geometriche, mi si permetta di far riflettere ad un altro non picciol bene, che si trarebbe. Dopo la scoperta de' nuovi metodi certo è, che la Matematica ha acquistata una facilità incredibile di far viaggio. Lasciata quasi da parte affatto l' erta, e spinosa via sintetica, in pochi passi, e quasi senza fatica, con poche righe di calcolo giunge al suo

suo termine, e alcune volte quasi anche non curandolo vi giunge con tanta dovizia, che in una sola formula si vede ricca d' una intera scienza. Parmi però di vedere, che un vantaggio tanto preggevole venga decimato da uno svantaggio di qualche peso. La via Sintetica, che ora resta solinga, fortificava a maraviglia la mente de' Matematici nel giusto, ed ordinato discorso, per la qual cosa essa mente riusciva e robusta, e fatta al faticare. Se ne traeva altresì oltre all' assuefazione di sodamente discorrere, il capitale più pregevole di facilmente inventare. Questi vantaggi di tanto pregio per la facilità dell' altra strada forse che da parecchj presentemente si perdono, la onde lo Studio Sintetico, che in un tal qual modo verrebbe a farsi nell' aprendere le cose geometriche delle differenziali, che ho di sopra insinuato, conpenserebbe forse parte delle avvertite perdite. Ma meglio però di tutto io crederò sempre, che chi vuole applicarsi alle Matematiche non manchi di fare le sue prime fatiche sopra di Euclide, indi sopra gli sferici, e le sezioni coniche considerate nel cono. Con ciò fortificherà la sua mente, e la sua fantasia, ed allora poi corra per le strade più agevoli, e più maestre, e schivi le più disastrose.

Num. 102. Ma dove mi lascio io trasportare. Torniamo alle differenziali. Oltre dunque al potersi elleno ottenere per due modi, debbo aggiugnere esservi una razza di differenziali, la quale è impossibile di ottenere per via aritmetica, supponendole derivate dall' equazione primitiva di due variabili contigue, sempre che queste due primitive esser debbano quantità, o non immaginarie, o per altro modo non impossibili. Per questo capo ancora cresce quel motivo, che accennai al *Num.* 72.; o quella ragione più intrinseca, per cui ho dovuto mettere in campo la distinzione delle differenziali aritmetiche dalle geometriche. Mi farò dunque nel seguente Capo III. a mostrare l' esistenza, e i caratteri di questa sorta di differenziali, e il modo di ottenerle. Due classi, e forse anche tre di tali differenziali mi è avvenuto fin ora di riconoscere. Qui tratterò solo di una di loro, e riserberò alla seconda Parte di queste mie Memorie il trattare dell' altre classi, parendomi, che così farò e

rò e più intelligibile, e meglio ſia per riuſcirmi di ſtabilire tal diſtinzione, ſenza la quale io ſono perſuaſo, che il calcolo Integrale ſi rimarrebbe, nè dallo ſtato ſuo preſente farebbe notabile avanzamento. Moſtrato poi nel prenomato Capo III. l' eſiſtenza, e caratteri di queſta ſorta di differenziali, e ciò più individualmente riſpetto a que' della prima claſſe, dimoſtrerò come, e con tutta certezza poſſa ricavarſi, mediante il calcolo integrale, adoperatovi però con modo particolare, e convenevole a queſte differenziali un equazione aſſoluta, ed eſprimente la ſoluzione del dato problema, e ſpiegherò quanto il modo di ritrovare queſta equazione finale ſia diverſo dal modo, per cui ſi trovano le equazioni finali delle differenziali aritmetiche. Nella ſeconda Parte poi di queſte Memorie ſtabilirò le medeſime coſe per le differenziali, e loro riſpettive integrali delle altre claſſi.

Del Calcolo Differenziale

SEZIONE TERZA.

CAPO TERZO.

Della Linea Logoritmica, e ſue Differenziali.

Num. 103. LA prima claſſe per tanto di queſte differenziali, delle quali imprendo ora a trattare, è quella delle differenziali, che ſono notiſſime ſotto il nome di Logoritmiche. Quindi è, che in grazia de' Principianti mi è d' uopo ſpiegar prima, quanto baſte all' intento, la natura della Linea Logoritmica, e ſuſſeguentemente compirò a quanto ho propoſto.

Num. 104. Sia dunque la retta PQ (*Fig.* 7.) ſopra di queſta, cominciando dal punto per ora arbitrario A, procedendo verſo Q ſi pongano quante parti ſi vogliano AC. CE. EG. &c. tutte fra loro uguali, e così pure, procedendo da A verſo P; quante altre parti ſi vogliono AI. IM, &c., purchè uguali alle prime, e grandi per ora arbitrariamente. Da tutti i termini di tali parti ſi alzino le perpendicolari AB. CD. EF. GH. IL. MN., &c. Queſte perpendicolari ſieno tutte fra di loro in una ſerie geometrica, laonde fiſſate per eſempio le longhezze di AB, e CB. ſieno. AB. CB. EF GH &c., e così CD. AB. IL. MN. &c. continuamente, e geometricamente proporzionali.

Num. 105. Intendaſi preſentemente una curva NBO (*fig.*7) nella quale al paſſare, che fanno le di lei aſciſſe $AE = x$ ad eſſere le contigue AG, gli aumenti di queſte EG ſieno tutti coſtantemente fra loro uguali, ma gli aumenti bH delle ordinate GH (y); cioè nel paſſare, che fa l' ordinata EF ad eſſere l' ordinata contigua GH, ſieno tutti continuamente in una ſerie geometrica, le quali coſe ſi ottengono, ſemprechè ſtando gl' intervalli AC. CE. EG. &c. tutti fra di loro uguali, e ſieno queſti gli aumenti co' quali paſſano a produrre la variabile contigua, e che poi le coordinate AB. CD. EF, &c.; ovvero CD. AB. IL &c. ſieno fra loro continuamente in una ſerie geometrica, perchè, come è noto nella geometria, le differenze bB. cD. eF *&c.* de' termini di una ſerie continua geometrica, ſono anch' eſſe in continua proporzione geometrica. Queſta tal curva NBO è quella, che chiamaſi *curva Logoritmica*.

Num. 106. Le aſciſſe dunque di queſta curva, in cui per ora figuriamo l' origine in A, ſaranno, procedendo verſo P, le AC, AE. &c. $= +x$. Ma procedendo verſo Q, ſaranno $-AI$ $-AM$ &c. $= -x$. In fatti, comechè la Logoritmica dalla parte O ſempre ſi ſcoſta dall' aſſe, e dalla parte P. mai con eſſo ſi uniſce, non può ad eſſe darſi origine veruna dalle nominate parti. Quini è neceſſario figurare la ſua origine in un punto A, ed indi conſiderare la Logoritmica come due tronchi della ſteſſa curva, conneſſi aſſieme nel punto B, e ſcorrenti amendue a parti oppoſte, la onde viene la neceſſità di diſtinguere queſta coſa colla diverſità de' ſegni, eſſendo piacciuto di dare il ſegno poſitivo a quelle ordinate, che ſonoſi deſtinate nella ſe-

rie creſcente, e il negativo a quell' altre, che nella ſerie decreſcente ſonoſi collocate.

Num 107. Quanto all' origine *A*, o termine, che ſparte i due tronchi, egli è, riguardo alla natura della Logoritmica, totalmente arbitrario il fiſſarlo ovunque ci piaccia, coſa per ſe medeſima manifeſta. Fiſſato però, che ſia, non può più mutarſi per quanto duri la conſiderazione, e l' uſo di una tal Logoritmica. Se per altro queſta curva, in vece che colle ſue ordinate eſprima delle linee, eſponga de' numeri, allora l' unità ſi conſidera ella con ſufficiente ragione cadere ſul termine *A*, o corriſponderci, onde così nelle Logoritmiche numeriche le frazioni vengono ad eſporſi per le aſciſſe $-x$ negative, e i numeri maggiori dell' unità per $+x$ poſitive.

Num. 108. Segue per tanto manifeſtamente, che in tutte le Logoritmiche quanto ſi voglia fra loro diverſe, purchè nello ſteſſo ordine, è totalmente libero l' aſſumere, che l' ordinata *y* dell' origine ſia ſempre la ſteſſa.

Nelle numeriche la coſa è per ſe ſteſſa evidente, perchè tutte hanno l' unità per eſſa loro ordinata, benchè poi la ſerie omologa delle ordinate dell' una ſia quanto ſi voglia diverſa dalla ſerie omologa delle ordinate dell' altra. Quanto alle Logoritmiche dell' ordine geometrico, eſſendo, come abbiamo veduto, libero lo ſcierre in qualſivoglia Logoritmica qualſivoglia *y* per l' ordinata dell' origine, è altresì affatto libero il dare a tutte le Logoritmiche di quest' ordine la medeſima *y* per ordinata della loro origine.

Num. 109. Ha piacciuto di nominare le aſciſſe x, o $-x$ *Logoritmi delle loro correſpondenti ordinate* y. *AE* è il Logoritmo di *EF*; $-$ *AM* è il Logoritmo di *MN*. E' viſibile, che il Logoritmo di quell' ordinata, la quale è ſtata figurata eſſere nell' origine della curva, è ſempre Zero, e che i Logoritmi delle ordinate ſono le aſciſſe, che cominciano dall' origine della curva, e terminano alle loro coordinate. Ha piacciuto di notar queſte aſciſſe, prefigendo un *l* al ſimbolo, che eſprime l' ordinata. Così $l\,y$, ſuppoſto che per eſempio *GH* denoti *y*, e l' aſciſſa $AG : -\,ly$, ſuppoſto che *y* denoti *MN*, è l' aſciſſa *AM*.

Num.

Num. 110. Ciò premeſſo, ſia l' ordinata *A B* dell' origine detta *c*, la *C D* detta *a*, la *E F* detta *b*, e la *G H* detta *d*. Moſtrerò, che ſe l' ordinata $GH = d$ uguagliaſſe il prodotto delle due ordinate *a b* diviſo per *c*, onde $d = \frac{ab}{c}$, la ſomma $la + lb$ ſarà $= ld$; imperocchè l' equazione $\frac{ab}{c} = d$ produce $ca :: b.d$, e perchè alle ordinate in queſta analogia corriſpondono nella ſua Logoritmica lc, $la \div lb : ld$, e perchè altresì lc, eſſendo il Logoritmo dell' ordinata per l' origine, è zero (*Num.* 109.), avremo, come ſi era propoſto, $ld = la + lb$.

Num. 111. Che ſe l' ordinata $GH = d$ foſſe il quotiente del prodotto dell' ordinata *t* per l' origine nell' ordinata *a*, il qual quoziente *a c* foſſe diviſo per l' ordinata *b*, avremo allora *l d* uguale a $lb - la$, giacchè dall' equazione $d = \frac{ca}{b}$ avendoſi $b.c :: a.d.$, ſi ha ancora $lb.\ lc \div la.\ ld$, cioè $ld = lb - la$, eſſendo $lc =$ al Zero.

Num. 112. E' viſibile, che ſe in ambedue i predetti caſi la *c* ordinata per l' origine ſi fiſſaſſe eſſere in qualſivoglia logoritmica l' unità, allora ſi avrebbero in tutte quante le Logoritmiche le proprietà ſeguenti. Il Logoritmo di qualunqe ordinata *GH*, la quale uguagli il prodotto di due altre ordinate *CD* in *EF*, ſarebbe uguale alla ſomma di due Logoritmi di queſta, mentre all' ora l' equazione $d = \frac{ab}{c}$ ſi cambia in $d = ab$.

Num. 113. Così pure il Logoritmo *l d* del prodotto $abc = d$ di quante ſi vogliono quantità ſarebbe uguale alla ſomma di tutti i Logoritmi de' producenti, cioè $labc = ld = la + lb + lc$.

Num. 114. Il Logoritmo di qualunque ordinata *GF*, che ſia la dignità qualunque *m* di un altra ordinata *CD*, è il prodotto del numero eſprimente la medeſima dignità in *LCD*, cioè $ld = mla$, e perchè $d = a^m$; ſegue pure che le due eſpreſſioni *m la*, e la^m in queſto caſo ſono una ſola eſpreſſione.

Num. 115. Il Logoritmo di qualunque ordinata GH, la quale uguagli il quoziente di due altre ordinate CD per EF, ſarebbe uguale alla differenza de' due Logoritmi di queſte, giacchè allora l'equazione $d = \frac{ac}{b}$ ſi cambia nell' altra $d = \frac{a}{b}$. Quindi ſeguirebbe, che il Logoritmo del quoziente di due ordinate foſſe uguale al Logoritmo del numeratore ſcemato dal Logoritmo del numeratore, onde $la - lb = L\frac{a}{b} - lb - lb$, e così pure tanto è dire $la + lc - lb - ld$, quanto $L\frac{ac}{bd}$.

Num. 116. Queſte conſeguenze, che ſono una parte di quegli utili, che la linea Logoritmica ci ſomminiſtra, hanno obbligato a fiſſare, che l' unità ſia in qualunque linea Logoritmica l' ordinata per l' origine, giacchè dalla parte di eſſa linea non vi è ripugnanza. Se per altro piaceſſe a tal uno di fiſſare nella Logoritmica, di cui vuol ſervirſi, un ordinata diverſa dell' unità, gli reſterà certamente libero il farlo, ma volendo uſare delle conſeguenze ſopra dedotte, gli occorrerà avvertir pure a quelle modificazioni, che la quantità c vi introduce.

Num. 117. Si è detto (*Num.* 174.) che mla è la^m. L' eſponente m può denotare o una coſtante, o una variabile. In quest' ultimo caſo m può conſiderarſi tale, o perchè ſia veramente variabile, o perchè, eſſendo coſtante, ſia però elevato ad una variabile, e così di ſeguito. Queſte variabili poſſono eſſere, o compleſſe, o incompleſſe. Quanto agli eſponenti coſtanti, benchè elevati ad altre dignità, purchè queſte anch' eſſe coſtanti, non producon coſa, che eſprimere non ſi poſſa da una ſola coſtante. Pe' veramente variabili adunque i Logoritmi, che hanno tali eſponenti, e molto più le quantità aſſolute, che li hanno, chiamanſi *quantità eſponenziali*. Queſte ſi riducono a calcolo mediante i Logoritmi. Data per eſempio y^x, ſe queſta ſia, o poſſa ſupporſi $= b$, comechè in due Logoritmiche perfettamente ugnali le ordinate ugua-

uguali hanno i Logoritmi uguali, avremo pur anche $ly^x = lb$, e però $xly^x = lb$, e nuovamente $Lxly^x = llb$; onde $ulxly = llb$, ed $ulx + lly = llb = l^u$. Ma di queſte coſe riparlerò altrove.

Num. 118. Sieno ora delle ordinate AB. CD. (*Fig.* 7.) le differenze Dc, $Fe = dy$, o delle $-IL$, $-MNle - aL$, $-fN = -dy$. Abbiamo avvertito (*Num.* 105.) che queſte differenze ſono tutte fra loro nella ragione medeſima, in cui ſono le loro proprie ordinate, onde farà ſempre $\frac{AB}{Dc} = \frac{CD}{Ee} = \frac{AB}{Bb}$, &c. Quindi è manifeſto, che la relazione di qualunque differenza alla ſua ordinata, cioè $\frac{y}{dy}$, o $-\frac{y}{dy}$ è ſempre la ſteſſa, e però queſta tal relazione è coſtante.

Num. 119. Sia dunque dal punto qualunque H condotta alla Logoritmica la tangente HR. La ſottangente GR ſi dica s. Comechè [*Num.* 56.] è $dy.dx :: y.s$ [dx è l' aumento coſtante delle aſciſſe AE. AG; che ſi ſuppongono nominate x], farà $s = \frac{ydx}{dy}$, onde s anch' eſſa coſtante, quindi è che, la Logoritmica ha queſta eſſenziale proprietà, che tutte le ſottangenti di ogni ſuo punto ſono ſempre fra loro uguali.

Num. 120. Dall' analogia poi $dy.y :: dx.s$ (*Num.* 109.) ne riſulta $\frac{sdy}{y} = dx$, che è l' equazione differenziale della linea Logoritmica.

Num. 121. Segue dal *Numero* 104., che nella Logoritmica non può mai darſi una ordinata y, che ſia zero, o infinita. Pretendaſi che l' ordinata per eſempio Qo ſia infinita. Dividaſi l' aſciſſa AQ per mezzo in E. Dunque il quadrato di EF farà = al rettangolo di AB in GO, cioè il quadrato di EF farà infinito, coſa impoſſibile, giacchè avea o, figura contenuta fra lati, o termini tutti finiti. Collo ſteſſo diſcorſo ſe l' ordinata per P foſſe zero, ſe M ſia nel mezzo della diſtanza AP, il quadrato di MN farà nullo,

nullo, cosa molto più palpabilmente impossibile. Ma perchè taluno imbevuto d' idee diverse del nulla, e dell' infinito, potrebbe pure pretendere, che questo quadrato fosse nullo, e quella infinito, dimostrerò l' esposta verità dalla natura del soggetto.

Nella Logoritmica non può non essere la ragione di una ordinata primitiva alla sua contigua uguale direttamente alla ragione di qualunque altra primitiva alla sua contigua. Se dunque si dà nella logoritmica una ragione fra tali ordinate, che sia da finito a finito, la qual ragione essenzialmente si dà, non è mai possibile, che si dia fra verun' altra ordinata primitiva, e la sua contigna, ragione veruna di finito a infinito, e di nulla a finito, e però che si dia veruna ordinata, che sia o zero, o infinita.

Num. 122. Anzi or resta pure evidente, che nè l' asse della Logoritmica, e tanto meno lo spazio logoritmico sopra di esso, possono mai divenire infiniti (cosa per altro da Chiarissimi Valentuomini creduta possibile.) Crescono le ordinate in progressione geometrica, e le ascisse nell' aritmetica; laonde incomparabilmente quasi più crescono le ordinate di quanto mai possano farlo le ascisse. Giugneranno dunque immancabilmente le prime ad essere maggiori delle seconde, e non potendo mai le prime divenire infinite, da questo troppo ampio termine si terranno di sotto le ascisse. Che se esse debbonsi rimaner lontano dal divenir infinite, nè multiplicar si possono che col finito, onde un finito rettangolo è forza che generino, il quale è sempre maggiore, e non poco dello spazio logoritmico, che è sola parte di tale rettangolo, questo spazio non può non essere finito.

Num. 123. Segue pur anche, che quando le ordinate di una Logoritmica sono positive, e vogliasi, che sussista il calcolo logoritmico secondo il detto al *Numero* 116., la minima ordinata di questa logoritmica è necessariamente uguaall' unità o numerica, o lineare, e per lo contrario quando esse ordinate sono negative, la massima ordinata è anch' essa l' unità. Nel maneggio di que' Problemi, la soluzione de' quali vien mescolata di logoritmi, vedremo fra poco quanto sia necessario por' mente a queste minute avvertenze.

Num.

Num. 124. Ma l' essere finito, o l' essere più del nulla, o l' essere l' unità, cose, che riguardo alle vere ordinate della Logoritmica hanno sempre luogo, in proposito delle ordinate complesse, ammettono, e vogliono alcune spiegazioni. Quando dunque le ordinate sono complesse, all' ora non serve al problema tutto l' ambito della Logoritmica, ma solo una sua parte, essendo all' ora, a propriamente parlare, la Logoritmica limitata. Per ordinate incomplesse possonsi senza pregiudizio intendere non solamente se sieno la sola y, ma ancora se abbiano la forma fy^m, giacchè lfy^m è $lf + mly$, ed è perciò la sola y, che è l' ordinata variabile della sua Logoritmica, e la f è un' ordinata costante nella medesima Logoritmica, onde il Logoritmo di y^m resta costantemente accresciuto, o scemato dal lf. La forma dunque delle ordinate complesse sarà per esempio $a + fx^m$, che somministra $rla + fx^m$; e se il segno $\pm$ già adoperato, e sottinteso si faccia significare anche $-$, avremo tutte le forme di questa sorte di complesse. Su questa forma dunque la y, cioè una parte dell' ordinata, ma non giammai l' ordinata intera, e vera, può alle volte, e dee divenir Zero.

Num. 125. Per ispiegar tal cosa è necessario ispiegare come nascano le ordinate complesse della Logoritmica. Al di lei asse MQ (*Fig.* 7.) sia condotta una paralella. Questa può cadere in quattro diversi siti. Sia il primo per l' origine B della Logoritmica, e tale è la TS. Il secondo esternamente al punto B, come in q, e tale è la ts. Il terzo fra esso punto B, e l' asse, come in V, e sarà la ur, e l' ultimo per di sotto all' asse in k, e sarà l' XZ. Le distanze per tanto costanti dalle paralelle all' asse sono AB. Aq. AV. AK, e queste si nominino b. Nel primo caso b. sarà uguale all' unità: Nel secondo sarà maggiore, minore nel terzo, e nell' ultimo potrà essere in tutti i modi, ma in questo solo caso dovrà essere negativa, ove ne' tre precedenti casi dovrà sempre essere positiva. Tre sole forme di ordinate complesse per ora esporrò, e sono $b+y$. $b-y$. $y-b$. Comechè la forma $b+y$ denota, che l' ordinata è la costante b accresciuta dalla variabile y, onde le ordinate insistono

ſiſtono ſopra di una delle tre prime paralelle, ſecondo la grandezza di b, non potendo inſiſtere ſopra la quarta, perchè b è poſitivo, naſcono per queſta forma tre caſi.

Primo caſo. Se $b = AB$ ſia uguale all' unità, ſerve per le ordinate $b+y$, il ſolo tronco BO. Secondo caſo; ſe $b = aq$ ſia maggiore dell' unità, ſerve per eſſe ordinate $b+y$ il ſolo tronco FO; e ſe $b = AV$ ſia minore dell' unità, che è il terzo caſo, ſerve per eſsa il ſolo tronco NO. In tutti, e tre queſti caſi la y dee potere divenir zero, e ciò nel preſente caſo in B, nel ſecondo in F, e nel terzo in N. Eſſa y in tutti e tre queſti caſi può bensì creſcere, ma non mai divinire infinita, ella ſi ſcoſta ſempre dall' aſſe QM. Quanto a $la+y$ egli è ſempre quell' aſciſſa, che comincia dall' origine A, e va all' ordinata $b+y$.

Num. 126. Per la forma $b-y$, che rappreſenta la coſtante b ſcemata della variabile y, naſcono allora le y ſu di una delle notate tre prime paralelle, ma ſcorrono verſo l' aſſe. Ancor qui ſi hanno tre caſi. Se $b = AB = c$. ſerve il tronco BP.. Se $b = Aq$ maggiore dell' unità, ſerve FP.; E ſe $b = AV$ ſia minore dell' unità, ſerve NP. Anche in queſti tre caſi la y dee poter divenir zero, o in B, o in F, o in N, ma non può non ſolo divenire infinita, ma nè pure giugnere creſcendo ad uguagliare la b., mentre avremo allora $b-y=0$, onde un ordinata nella logoritmica, che ſarebbe zero, coſa impoſſibile (*Num.* 121.) così pure $lb-y$ è quell' aſciſſa, che comincia da A, e va all' ordinata.

Num. 127. Quanto alla terza forma $y-b$, che rappreſenta la variabile dD ſcemata della coſtante $dC=b$ dee ſempre eſſere y maggiore di b, altrimenti avremo $y-b=o$. coſa impoſſibile [*Num.* 121.]. Se y ſia $= b+1$ il Logoritmo di $y-l$ ſarà Zero, ſe y ſia maggiore di $b+1$, ſerve il tronco BO, ſe y ſia minore di $b+1$, ſerve il tronco BP. Le ordinate ſi ſcoſtano ſempre dall' aſſe, e $ly-b$ è quell' aſciſſa; che comincia da A, e va alle ordinate.

Num.

Num. 128. Dopo queſte tre forme di ordinate compleſſe, altre tre ne eſporrò. Sia la prima $\frac{b+y}{b-y}$, ovvero $\frac{b-y}{b+y}$, i Logoritmi delle quali ſono $lb+y-lb-y$, ovvero $lb-y-lb+y$. In queſte ordinate, per cagione di ritrovarviſi $b-y$, non può (*Num.* 126.) la y creſcer tanto, che divenga $= b$. Se $b=AB=1$ ſerve per la $b+y$ il tronco per eſempio BD, dovendo eſſere cD per una minima differenza minore di $AB=b$. Per la $b-y$ ſerve il tronco BP. Se $b=Aq$ ſuperi l' unità, ſerve per la $b+y$ il tronco per eſempio FO tale che bO non giunga ad eſſere $=Aq=b$. Per la $b-y$ ſerve il tronco FP. Se $b=AV$ non ſuperi l'unità, ſerve per la $b+y$. per eſempio NL tale, che Vb ſia inſenſibilmente minore di $AV=b$. Per la $b-y$ ſerve il tronco NP.

Num. 129. La ſeconda forma di queſte ordinate compleſſe ſarà $\frac{b+y}{y-b}$, ovvero $\frac{y-b}{b+y}$, i logoritmi delle quali ſono $lb+y-ly-b$, ovvero $ly-b-lb+y$. In queſte ordinate, a cagione del ritrovarviſi $y-b$, la y non ſolo non può divenir Zero, ma dee in tutti i caſi eſſere maggiore di b (*Num.* 127.) Se $b=AB=1$., ſerve per la $b+y$ il tronco per eſempio DO, ſuppoſto cD maggiore di AB. Per la y per eſempio DO, ſuppoſto cD maggiore di AB. Per la $y-b$ ſerve BP., o BO ſecondo i tre caſi per eſſa notati (*Num.* 127.) Se $b=Aq$ ſuperi l' unità, ſerve per la $b+y$ il tronco HO., ſuppoſto EH maggiore di $Aq=b$. Per la $y-b$ ſerve BP, o BO ſecondo i ſuoi tre caſi, e ſe $b=AV$. ſia minore dell' unità, ſerve per la $b+y$, per eſempio BO, ſuppoſto VR maggiore di $AV=b$, e per la $y-b$ ſecondo i ſuoi tre caſi.

Num. 130. La terza forma di ordinate ſarebbe $\frac{b-y}{y-b}$, ovvero $\frac{y-b}{b-y}$, ma queſta non ha altro luogo che il punto B; nè altro logoritmo, che il Zero, perchè eſſendo tali frazioni uguali ad 1, ovvero -1. il loro logoritmo è il Zero.

Num. 131. Spiegate queſte forme di ordinate compleſſe, e loro accidenti, biſogna procedere ſuccintamente a far lo ſteſſo di altre di mano in mano più compleſſe. Sieno le tre forme di ordinate $\overline{a+fx^n}^r$. $\overline{a-fx^n}^r$. $\overline{fx^n-a}^r$. Queſte tre forme a dir vero ſono le medeſime, che antecedentemente ſi ſono conſiderate, ma con qualche accidente di più, ed è, che i logoritmi loro debbono poi multiplicarſi per r. La a è dunque la diſtanza coſtante, che nelle paſſate forme nominammo b, delle rette pararelle dall' aſſe. Il Logoritmo di $\overline{a+fx^n}^r$ è $rla+fx^n$, e comechè la variabile fx^n può attamente eſprimerſi per y, avremo $rla+fx^n = rlb+y.$, e però ſenza più fermarmi ſopra di queſte paſſerò avanti.

Num. 132. Le ordinate $\overline{a+fx^n+gx^t}^r$, e le altre due forme vogliono qualche maggior eſame. Qui le diſtanze dall' aſſe perſeverano coſtanti, ma le ordinate vengono tagliate in due parti amendue variabili da una curva, come ora lo ſpiegherò. La parte $\overline{a+fx^n}^r$ può dirſi attamente z, laonde le tre forme di ordinate, che qui ho propoſte, poſſono aver le forme $\zeta+y$, $z-y$, $y-z$. L' equazione $\overline{a+fx^n}^r = z$ è l' equazione di una curva, laonde per la natura di queſta curva potremo avere ζ data per a, ed x (ſuppoſta la ſeparazione delle indeterminate), e conſeguentemente avere, e come collocare queſta curva, e il punto, nel quale ella ſepara l' ordinata, per eſempio ζ^r+y, nelle ſue due parti z^r, e y. Aggevolerò l' intelligenza di queſte conſiderazioni ſu un ordinata particolare. Sia $n=1.$, $f=4$, $g=2$, $r=1$, $t=2$. Avremo $\overline{a+4x}^1 = z$, equazione di un tronco di parabola, che ha per parametro l' unità, e le di lei ordinate variabili z cominciano a naſcere ove termina ſul di lei aſſe la $\sqrt{a}$, eſſendo la ſua prima variabile ζ la contigua di $\sqrt{a}$. Suppongaſi dunque dato $L\,\overline{a+4x+2\sqrt{x}}^1$. Intenderemo le affezioni della di lui

lui ordinata così. Suppongaſi in primo luogo che $\sqrt{a}$ ſia $= 1 = AB$ [*Fig.* 11.] Sopra dell' aſſe QM della logoritmica ſi deſcriva la parabola $\overline{a+4x}^1 = z$, in modo che il punto B corriſponda all' eſtremo di $\sqrt{a} = AB$. Per queſto caſo il tronco Bc della Parabola divide le ordinate nelle loro due parti, e tali ordinate hanno luogo nel ſolo tronco BO della logoritmica. L' ordinata $Cc = z$ ſarà la porzione $\overline{a+4x}^1$, e la reſidua cD ſarà $2\sqrt{x}$. Se in ſecondo luogo ſia $\sqrt{a}$ maggiore di 1, onde $= EF$. per queſto caſo ſi deſcriva la medeſima parabola RFg ſopra l' aſſe QM, ma in modo che $\sqrt{a}$ convenga colla EF prima ordinata della parabola. Il tronco Fg divide le ordinate nelle loro due parti. Hanno quelle luogo nel ſolo tronco FO della logoritmica, eſſendo $Gb = \overline{a+4x}^1$, ed $bH = 2\sqrt{x}$. Sia in terzo luogo $\sqrt{a}$ minore di 1. $= AV$. Si collochi all' ora la parabola col ſuo aſſe ſull' aſſe medeſimo QM, e che $\sqrt{a}$ convenga colla $Ia = AV = \sqrt{a}$. Il tronco aN della parabola ſeparerà le due parti dell' ordinata, e per queſta ſervirà il tronco Ba, o Bo della Logoritmica.

Num. 133. Se ſia propoſto $l\,\overline{a+4x}^1 2\sqrt{x}$; Se $\sqrt{a} = 1$ la parabola ſarà MBo [*Fig.* 12.], e il tronco della logoritmica ſarà BP. Se $\sqrt{a}$ ſia maggiore di 1. la parabola ſarà RFH, e il tronco della logoritmica ſarà FBP, e ſe $\sqrt{a}$ ſia minore di 1, la parabola ſarà Aaq, e il tronco della logoritmica aP. La $\overline{a+4x}^1$ non potrà creſcendo giugnere ad uguagliare $2\sqrt{x}$, ſecondo il detto al *Num.* 126.

Num. 134. Se finalmente ſia $L\,2\sqrt{x} - \overline{a+4x}^1$. Per queſto caſo la parabola MBc dee aver per aſſe la paralella xz (*Fig.* 10.) diſcoſta dall' aſſe MQ per la diſtanza $AK = \sqrt{a}$, e dee paſſare pel punto B, e tagliarà le ordinate nelle loro due parti o in p, o in B, o in c ſecondo il *Num.* 127.

Num. 135. Poſſono pure averſi le forme $L\frac{\sqrt[r]{a+fx^n+gx^s}}{\sqrt[r]{a+fx^n-gx^s}}$, e ſimili. Per tutte queſte forme ha luogo, come conſiderandole è manifeſto, quanto abbiam detto reſpettivamente ne' Numeri antecedenti.

Le coſe fin qui eſpoſte baſtano a' Principianti per uſcire d' imbarazzo, capitando loro queſte, ed altre forme compleſſe di Logoritmi, onde io non v' impiegherò altro tempo, tanto più che forſe parrà a tal uno, che io troppo mi ſia perduto in queſte minute ricerche, e lo giudicherà forſe fatto a pompa. Soſpenda queſti il ſuo giudizio, e vedrà fra non molto, che per eſſere ſtate neglette queſte minute ricerche, ſono ſtate levate di mano a' valenti Maeſtri ſcoperte ricercatiſſime, o è ſtato dato l' eſſere nelle Matematiche Scienze ad erronei penſieri.

Num. 136. Dal *Num.* 120. abbiamo appreſo a ritrovare l' equazione differenziale della logoritmica nel caſo, che le ordinate ſieno incompleſſe, ma è faciliſſimo, e viene dallo ſteſſo diſcorſo, il ritrovarla quando eſſe ordinate ſieno compleſſe, imperocchè ſuſiſte ſempre, che ſtia la differenza dell'ordinata alla differenza dell'aſciſſa (dx) come ſtà l' ordinata alla ſottangente, e però detta Z^r l'ordinata compleſſa, ſi avrà ſempre l'equazione $dx = \frac{rSZ^{r-1}dZ}{Z^r} = \frac{rSdZ}{Z}$. In queſta equazione interviene indiſpenſabilmente la ſottangente, e l' eſponente dell' ordinate, quindi è, che il coefficiente (e queſto può eſſere anche l' unità), che accompagna il ſecondo membro della premeſſa equazione, non può ſervire a darci notizia nè della ſottangente, nè dell' eſponente. La nozione, che ho data al *Num.* 105. della natura della logoritmica ci rende evidente, che le logoritmiche poſſono eſſere indeffinitamente diverſe fra di loro, ſecondo che è diverſa la coſtante ragione delle proprie ordinate, e di qui ſegue pure neceſſariamente, che abbenchè nella ſteſſa logoritmica la ſottangente ſia coſtante, in ogni diverſa logoritmica però la propria

pria ſottangente è diverſa da quella di ogni altra logoritmica. Ciò però è vero quando ſi voglia, che l' ordinata per l' origine ſia, e ſi conſideri l' unità. Siamo però forzati a volere che così ſia, ſe vogliamo, che ſuſſiſta l' algoritmo de' Logoritmi, e con eſſo i deſcritti vantaggi. Che ſe di tanto privar ci voleſſimo, potremo figurar ſempre che la ſottangente della propria logoritmica ella foſſe l' ordinata per l' origine, ma troppo vi perderemmo, e ſenza verun guadagno, giacchè all' ora tal ſottangente non potrebbe figurare l' unità. Non la numerica, il che è evidente per ſe medeſimo, giacchè l' unità numerica non può mai eſſere uguale a quantità diſcrete varie fra loro; E neppure figurar potrebbe l' unità lineare, concioſſiachè fra quante linee rette ſieno mai poſſibili, ſe una ſe ne prenda per figurar l' unità, queſta ancor eſſa non può più figurarſi uguale ad altre fra tutte le poſſibili rette da lei diverſe. Le ſottangenti dunque delle Lagoritmiche lineari, le quali ſono tutte linee rette, e tutte ſecondo la diverſità delle proprie logoritmiche diverſe fra di loro, non poſſono figurare l' unità lineare. Ho notato tutto queſto, e vedremo alle occaſioni, che era ben neceſſario il farlo, benchè ora, per non eſſere baſtevolmente preparate le coſe per eſſere inteſo, ad alcuno poſsa parere diverſamente.

Num. 137. Nel ritrovare le equazioni differenziali di que' problemi, che ſono meſcolati per propria natura di Loritmi, ſuccede poco meno che ſempre, che a noi altro non ci riſulti, fuorchè la ſola ordinata, ma non già la ſottangente. Quindi è, che ſiamo forzati, non avendo noi queſta ſottangente, a paſſarſene nelle integrazioni di tali differenziali, e nelle differenziali medeſime, e in vece di ottenere per eſempio, come ſarebbe d' uopo $\frac{rSdZ}{Z} = dx$ ci conviene di contentarci della ſola $\frac{rdZ}{Z} = dx$. Alcuni dottiſſimi Maeſtri hanno creduto, che il non riſultare quaſi mai in tali equazioni la ſottangente, provenga dall' eſſer ella l' unità lineare, e che per tal cagione ſcompariſca. Era dunque neceſsario ſcoprire come tale idea non può ſuſſiſtere,

ed è

ed è ora d' uopo che io ſpieghi, e perchè ci manchi tal ſottangente, e ſe poſsa, e come rimediarſi a tale mancanza.

Quanto al perchè, uno ne ho di già accennato, ed è il non eſserci quaſi mai data la ſottangente nel maneggio de' problemi di queſta natura. L' altro sì è, che eſsendo queſta ſottangente coſtante, nelle operazioni del calcolo differenziale ella non ha modo di laſciare verun ſegno individuale di ſe medeſima. Ma quanto al rimediare a tale mancanza, dirò prima eſsere neceſsariſſimo il rimediarci; imperocchè certiſſima coſa ella è, che la ſuppoſta equazione, differenziale $\frac{r\,dz}{z} = dx$ non è mai vera equazione, quando vi manchi la ſua ſottangente, e che in oltre non avendoſi eſsa ſottangente, non ſi ha in ſenſo di verità logoritmica veruna. Che giova mai il ſapere che il luogo di un problema è per eſempio la prima parabola, quando ignorando il parametro proprio di tale parabola, non poſso prenderla frall' indiffinito numero delle prime parabole? La ſottangente della logoritmica fa qui proporzionalmente l' uffizio come di parametro, e finchè non abbiamo la individual ſottangente, giammai avremo la individual Logoritmica, e *confacente al Problema*, e queſto con tutto il noſtro operato ci rimarrà in ſenſo di verità non iſciolto. Come dunque, e per qual via potremo, allorchè le equazioni differenziali logoritmiche, paſsano mediante il calcolo integrale (e queſta è l' occaſione, nella quale abbiamo biſogno di avere la ſottangente) ad eſsere le equazioni primitive, ſoccorrere a queſto biſogno? Moſtrerò il come nell' Appendice del Capo VI. della corrente Sezione, e qui ſolamente dirò accadere in queſto propoſito, quanto accade frequentemente nelle equazioni integrali aſsolute, le quali per lo più non ci vengono ſomminiſtrate dal calcolo compiute. E' veriſſimo eſserci un metodo, e lo ſtabilirò nella Sezione VI. della Seconda Parte di queſte Memorie, di compiere in tali equazioni le coſtanti, che mancano: Così vi ha un metodo, e lo moſtrerò nella citata Appendice, di compiere nelle equazioni logoritmiche dateci dal Calcolo integrale anche le individuali ſottangenti; coſa che da altri non ſo ſe ſia ſtata per

ta per anche o ritrovata, o pubblicata.

Num. 138. Ripigliando ora ciò che ho detto al *Num.* 136., eſsendoſi ivi ſtabilito, che la differenziale logoritmica di qualſivoglia quantità è la differenziale preſa col metodo aritmetico di eſsa quantità, e diviſa per la quantità medeſima tal quale è data, reſta facile in qualunque caſo il ritrovare eſsa differenziale. Porrò dunque qui di ſeguito, a comodo de' Principianti, una liſta di differenziali logoritmiche, a quel modo, che praticai nel fine del Capo I. di queſta Sezione.

$alfx^m$ ha per differenziale $\frac{afnx^{n-1}\,dx}{fx^n} = \frac{audx}{x}$ (*Num.* 44., e 128.)

$alfx^n gy^t$ ha $afnx^{n-1}\,dxgy^t + agty^{t-1}\,dyfx^n = audx + atdy$ (*Num.* 44., e 128.)

$\overline{alfx^n + gy^t}^{r}$ ha $ar \times \frac{fx^n + gy^t}{fx^n + gy^t}^{r-1} \times fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dx =$

$ar \times \overline{\frac{fnx^{n-1}\,dx + gty^{t-1}\,dy}{fx^n + gy^t}}$ (*Num.* 45., e 128.)

$\overline{alfx^n + gy^t + hz^e + .}^{r}$ ha $ar \times \overline{fx^n + gy^t + hz^e}^{r-1} \times \overline{fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy + hez^{e-1}dz} = ar \times \frac{fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy + hez^{e-1}dz}{fxn + gy^t + bz^e}$ (*Num.* 46. e 128.

$Lbp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^{r}$. ha $rbp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^{r-1} \times \overline{fnx^{n-1}dx + gty^{b-1}dy} + bpey\overline{fxn + gy^t}^{r}$

$\overline{fx^n + gy^t}^{r} \times bep^{e-1}dp = r \times \frac{fnx^{n-1}dx + gty^{t-1}dy}{fxn + gy^t} + \frac{edp}{p}$ (*Num.* 47. e 128.)

$bp^e \times \overline{fx^n + gy^t}^{r}$

$lbp^c \times \overline{fx^n+gy^t+hz^c}^{r}$ ha $\frac{edp}{p} + r \times \frac{fnx^{n-1}dx+gty^{t-1}dy+hcz^{c-1}dz}{fx^n+gyt+hz^c}$

(*Num.* 48., *e* 128.)

$\overline{lbp^c+eb}^{s} \times \overline{fx^n+gy^t}^{r}$ ha $s \times \frac{bcp^{c-1}dp+eib^{i-1}db}{bp^c+eb^i} + r \times \frac{fux^{n-1}dx+gty^{t-1}dy}{fx^n+gy^t}$

dy (*Num.* 49., *e* 128.

$laq^m \times \overline{bp^c+eb^i}^{s} \times z^n \times \overline{fx^n+gy^t}^{r}$ ha $\frac{mdq}{q} + s \times \frac{bcp^{c-1}dp+eib^{i-1}db}{bp^c+eb^i} + \frac{ndz}{z} + r \times \frac{fux^{n-1}dx+gty^{t-1}dy}{fx^n+gy^t}$ (*Num.* 50., *e* 128.)

$\overline{lbp^c+fx^n+gy^t}^{i,r}$ ha $i \times \frac{bcp^{c-1}dp+fnx^{n-1}dx+gty^{t-1}dy}{bp^c+fx^n+gy^t} \times r \times \overline{fx^n+gy^t}^{r-1}$

(*Num.* 51., *e* 128.)

$\overline{laq^e \times bp^c+fx^n+y^t}^{i,r}$ ha $\frac{edq}{q} + i \times \frac{bcp^{c-1}dp+ufx^{n-1}dx+gty^{t-1}}{bp^c+fx^n+gy^t} \times dy \times r \times \overline{fx^n+gy^t}^{r}$ (*Num* 52., *e* 128.)

$\overline{lfx^ngy^t+bp^eaq^i}^{r}$ ha $r \times \frac{ufx^{n-1}dxgy^t+gty^{t-1}dyfx^n+bep^{e-1}dpaq^i}{fx^ngy^t+bp^eaq^i} + \frac{aiq^{i-1}dqbp^e}{}$ [*Num.* 53., *e* 128.]

Nella

Nelle premeſſe formole potranno ſempre reſpettivamente ſupporſi coſtanti quelle quantità, che ne ſarà in piacere, e così particolarizarle a que' caſi, che ci occorreranno.

Vogliam per eſempio, che la formula $lbp^c+\overline{fx^n+gy^c}^{i,r}$ eſprima $lb+\overline{a+fx^n}^{r}$, divenendo ora c, e $t=o$, onde dp e $dy=o$, ci riſulta la richieſta differenziale $irfnx^{n-1}dx \times \overline{a+fx^n}^{r-1}$.

Potremo pure ridurre reſpettivamente le ritrovate differenziali alla ſteſſa denominazione.

Num. 139. Moſtrati ora i modi di ritrovare le differenziali Logoritmiche, è ormai tempo di farvi ſopra le rifleſſioni, che ſono il principal ſoggetto di queſto Capo. E' già manifeſto, che le differenziali Logoritmiche ci vengono ſomminiſtrate dalla Geometria, mentre, benchè le differenziali delle ordinate *CB*, *EF* ci ſieno date dal modo aritmetico, e però la ſola Geometria, che ci dà le differenziali delle aſciſſe *AC AE*, le quali differenziali ſono eſſe quelle, che da noi ſi ricercano. Nè queſta ſola è la diverſità, che paſſa fra queſte differenziali, e le puramente aritmetiche. Hanno eſſe un altra ugualmente reale diverſità, che le diſtingue ancora da quelle medeſime differenziali, che abbiamo veduto eſſerci dalla Geometria ſomminiſtrate, e buona parte delle quali ho eſpoſta nel Capo antecedente.

Imperocchè fra le differenziali, che ci dà la Geometria, alcune ve ne ſono, e ſono non poche, le quali poſſono ugualmente eſſerci ſomminiſtrate dal modo aritmetico, potendo le altre dal ſolo Geometrico venirci date, e nella claſſe di quelle ſono ancora le Logoritmiche. Potrò moſtrare col fatto queſta verità, e lo farò a ſuo luogo, ma qui è neceſſario dedurne la pruova della natura del ſoggetto, onde trarre ſe ne poſſa vantaggio a' Calcoli differenziale, e integrale.

Per intender dunque queſta minuta, ed aſtruſa, ma realiſſima diſtinzione, mi farò a conſiderare ciò, che accade ne' Problemi, ne' quali entrano i Logoritmi. In tali Problemi ſi danno certamente due variabili aſsolute, una per eſempio u, e l' altra y, ma il compoſto di una di tali variabili, o ſua dignità con coſtanti non forma già un equazione coll' omologo compoſto dell' altra (coſa, che diverſamente accade ne' Problemi ordinarj.) Una poi di queſte variabili aſsolute, per eſempio $y = GH$ (*Fig.* 7.) dà l' eſsere relativo ad una terza variabile $ly = AG$, e quest' eſsere relativo importa preciſamente, che eſsa variabile AG ſia ſempre il Logoritmo dell' aſsoluta y. Tra il compoſto poi di queſto Logoritmo, e il compoſto dell' altra variabile u ſi dà l' equazione, onde queſta equazione ha l' eſſere non già fra due quantità aſsolute, che ſieno nel Problema, ma per una aſsoluta, che è in eſso, e per la relazione di un altra quantità aſsoluta sì, e che non è nel Problema, ma che viene indicata dalla nominata relazione. Ne' Problemi aſsoluti tutto diverſamente accade. Suſſiſtono in eſſi le due variabili aſsolute, e fra loro compoſte, ſenz' altro intermezzo ſi dà l'equazione. Di qui è dunque, che quanti Problemi vi ſieno, ne' quali intervengano le ſole due variabili aſsolute, e fra queſte, ſenza altro intermezzo, ſi dia l' equazione, ſieno le loro differenziali ſomminiſtrate per via aritmetica, o per geometrica, non paſsa fra eſſi eſenzial divario, nè ripugna in conto alcuno, che le differenziali di tali Problemi, le quali ſi ſieno ritrovate per la Geometria, ritrovar non ſi poſſano aritmeticamente. Quanto poi agli eſempj di fatto baſterà rammentar quello dell' elemento dell' arco della ſeconda parabola cubica, il quale, come è notorio, ſi ottiene, e differenziando aritmeticamente la di lui longhezza, e geometricamente, o ſervendoſi della formula del *Num.* 80., o anche della formula eſsa pur geometrica delle ſviluppate, eſsendo tale ſeconda parabola la ſviluppata della parabola ordinaria.

E per vero dire ſcorgeſi ben facilmente, che la coſa non può eſsere in altro modo, mentre ſtando ſempre ne' Problemi le due ſole variabili aſsolute, altro non può concepirſi,

cepirſi, ſe non che le ſole variabili contigue, e conſeguentemente che le loro differenziali ſieno il ſecondo termine del binomio, ed in ſomma tutta quella teoria, che ho eſpoſta ne' *Numeri* 28. fino al 44., e però la Geometria, la quale alle volte per mezzo delle abitudini delle Figure ci ſcopre le differenziali di tali variabili primitive, altre differenziali ſcoprir non ci può ſe non quelle vere, che hanno, e conſeguentemente quelle, che ſono il ſecondo termine del binomio.

Ma quando una delle variabili non iſtà a dir vero nel Problema, ma vi è piuttoſto, per dir così, indicata da un altra variabile, che per ſervirle d' indizio è ella nel Problema, è ben manifeſto, che la coſa non può procedere allo ſteſſo modo. La differenziale di queſta quantità indicata, (o del Logoritmo nel preſente caſo) non può allora eſſere il ſecondo termine del binomio, ma nel noſtro caſo è il quoziente del prodotto della medeſima differenziale aritmeticamente preſa, multiplicata per la ſottangente della medeſima logoritmica, diviſo per la variabile primitiva, e di queſta verità la Geometria ci ha aſſicurati, e fatta la ſcoperta, come ci aſſicurò, e fece la ſcoperta l' Aritmetica, o l' Algebra, che ne' Problemi dell' altra fatta, la differenziale è il prenommato ſecondo termine del binomio.

Num. 140. Ma per ſalire mediante il Calcolo integrale dall' equazione differenziale all' aſsoluta, neppure nelle equazioni Logoritmiche vi ha biſogno di ſcoſtarſi dal Siſtema, o per più vero dire, dalla teoria, che in tale propoſito fiſſai al *Num.* 38., e ſeguenti. Imperocchè eſſendo veramente la variabile u quella, che è correſpondente alla variabile ly, ed eſſendo fra compoſti omologhi di queſte due variabili ſempre equazione, cioè nel preſente caſo $u = ly$, così pure dovrà eſſere equazione fralle due variabili contigue $u + du = ly + dly = ly + \frac{dy}{y}$., e reſtando ancor qui ſeparate ſempre le variabili primitive u, e ly dalle loro differenziali, ed in oltre tutte le altre coſe, che ho ſteſe in iſtendendendo la teoria degli accennati Numeri, dovrà

pure essa teoria convenire affatto anche a questo caso, che in altro non varia, se non che nella forma della differenziale Logoritmica.

Num. 141. Mostrata per tanto la vera esistenza di queste differenziali, le quali unicamente si ottengono, ed ottener si possono dalla Geometria, e spiegato il perchè, e come nascano, credo bene distinguerle con una loro particolare denominazione. Se di tal sorta di differenziali non vi fossero che le Logoritmiche, sarebbe ciò superfluo, ma comechè ve ne ha certamente un altra classe, e probabilmente delle altre, che nasce per le stesse formali cagioni, per le quali abbiamo veduto nascere le Logoritmiche, e con queste ha una pienissima analogia, benchè sieno di natura diversa, e di queste mi riserbo a parlarne nella Sezione I. del Calcolo integrale; così la denominazione di Logoritmiche non può comprenderle, ne rischiarare le cose abbastanza. Mi piglierò dunque la libertà di nominare tali differenziali *Differenziali relative*, giacchè ne' Problemi, ne' quali esse si meschiano, sonovi sempre due variabili assolute, i composti omologhi delle quali non sono uguali, ma una di queste due variabili dà l' essere relativo ad una terza variabile, il di cui composto poi è egli, che è uguale al composto dell' altra variabile.

Num. 142. Sia $\frac{s\,dy}{y}$. Se noi vorremo integrare questa differenziale, servendoci del metodo, col quale integriamo le differenziali aritmetiche, ce ne risulta, come è noto, e i Principianti il vedranno al *Num.* 201., ce ne risulta dico $\frac{sy^o}{o}$. Dottissimi Maestri del Calcolo hanno desiderato d' intendere che razza di quantità sia questa, che il Calcolo ci somministra. Le cose qui premesse svelano chiaramente questo mistero. E' notissimo, che se calcolando un Problema, s' introducano da noi ne' dati del medesimo Problema proposizioni false, o non coerenti, o non al caso, o se supporremo potersi fare il calcolo di esso Problema con un metodo non confacente, ne risultano sempre, e debbono per necessità risultarne quantità o immaginarie, o per altro modo

modo impossibili, o non coerenti, o identiche. La supposta quantità dunque $\frac{sy^o}{o}$, nel presente caso, è quella incoerente, ed impossibile, che risultar debbe per essersi da noi fallato, adoperando nel Calcolo un metodo non confacente. E' visibile, che integrando un equazione logoritmica, dovrebbe ottenersi un Logoritmo, che fosse una quantità e variabile, e finita. Tutto al contrario vediamo saltarne fuori una, che è costante, giacchè y^o è l' unità, e che sembra infinita (se pure $\frac{s}{o}$ denota l' infinito, ed esamineremo nell' Appendice della Sezione VI. del Calcolo integrale, se lo denoti, o no), onde affatto incoerente al Problema. Questa quantità dunque, o figmento di quantità, è nel presente caso [mi sia permesso di così esprimermi] un ente di ragione, e ben lontano che fondi una salda grandezza, che si dia una quantità infinita, non altro denota colla sua forma, se non che l' errore, che abbiamo fatto, supponendo confacente al bisogno una maniera di Calcolo, che non lo è. Vedremo ai *Numeri* 332, e 333, in proposito dell' altra classe delle differenziali relative, che se voglia anche per loro adoperarsi il metodo loro non confacente, saltano sempre fuori quantità impossibili, o immaginarie. Aprirò all' ora l' occulto mistero delle integrazioni immaginarie, o per altro modo impossibili, che sovente si ottengono, e mostrerò la cagione di questo intoppo, onde resti facile il deviarlo. Nell' Appendice poi della mentovata VI. Sezione tratterò più di proposito di queste svisate forme di quantità, che non pochi, e lievi equivoci nelle scienze Matematiche tanto miste, che pure hanno introdotti.

Num. 143. La forma per altro $\frac{sy^e}{o}$ ci somministra un picciol vantaggio, ed è di darci le vere differenziali Logoritmiche, e come esser debbono, servendoci, senza veruna mutazione, del modo confacente a ritrovare le differenziali assolute. Vogliasi per esempio la differenziale di $\overline{alfx^n + gy^t}^r$. A questa quantità diasi la forma $^{a}\!\times\! f$

$a \times f x^n + g y^t$; cioè si supprima la caratteristica l, l' esponente r si multiplichi per Zero, e per Zero dividasi tutta questa quantità così ridotta. Questa così preparata si differenzj col modo aritmetico, e ne verrà $a r \times f x^n + g y^t \times f n x^{n-1} dx + g t y^{t-1} dy$, che è veramente $a r \times \frac{f n x^{n-1} dx + g t y^{t-1} dy}{f x^n + g y^t}$, vera differenziale Logoritmica della proposta, e ritrovata senza partirsi dal modo aritmetico.

Num. 144. Accennai al *Num.* 117. cosa erano le *quantità esponenziali*, e dissi, che altrove ne parlerei di proposito. Qui però debbo farlo.

Del Calcolo Differenziale

SEZZIONE III.

CAPO IV.

Delle Quantità esponenziali, e loro Differenziali. De' Logoritmi elevati a qualunque dignità, e delle Differenziali di questi.

Num. 145. SONOSI fin ora considerate le ordinate y della Logoritmica; e respettivamente alle varie forme, che esse ricevono, come ho descritto, ho mostrato il modo di trovare le equazioni differenziali di esse ordinate. Fatto ciò resta a considerare, che i Logoritmi medesimi, vale a dire l' ascissa medesima della Logoritmica, non rispettivamente alle loro ordinate, ma in riguardo di loro stese hanse, hanno anch' esse varie forme, e però per tal cagione richieggono particolare maniera per ritrovare le loro equazioni differenziali coerentemente a tali loro forme.

Num. 146. Sia dunque per esempio l' ascissa AG (*Fig.* 7.) la quale finora si era considerata espressa per ly. Può esser ella elevata a qualuuque podestà, laonde può darsi che a noi si appresenti nel Calcolo, non già la AG, ma come qualunque podestà AG^m della medesima. Per denotare logoritmicamente tale espressione ha piacciuto di adoperare la forma $l^m y$., dando alla caratteristica l l' esponente m, che designa la podestà di AG, significandosi con ciò attamente, che non già y (GH), ma bensì il Logoritmo di essa (AG) egli è la quantità, che è elevata ad m.

Num. 147. La differenziale per tanto di $l^m y$ così si trova. Suppongasi $l^m y = x^m$, onde $dl^m y = m x^{m-1} dx$. Questa supposizione dà pure $ly = x$, onde $\frac{dy}{y} = dx$. Date per tanto nella $m x^m dx$ le opportune sostituzioni ella diviene $\frac{m dy l^m y}{yly} = \frac{m dy l^{m-1} y}{y} = dl^m y$. Si avrà per tanto di qui la seguente regola generale per ritrovare la differenziale di qualunque Logoritmo elevato a qualunque dignità. Prefiggasi al dato Logoritmo l' esponente della dignità. Questo esponente si minori di un unità nell' espressione del dato Logoritmo, e tutta questa espressione si multiplichi per la differenziale Logoritmica del Logoritmo dato, considerato come lineare. Così se sia proposto $l^m g y^r \times a + f x^n$ la differenziale di questo sarà $m l^{m-1} \times g y^r \times a + f x^n \times \frac{e dy}{y} + \frac{f a r x^{n-1} dx}{a + f x^n}$.

Num. 148. Possono le coordinate GH (*Fig.* 7.) esser elleno quantità Logoritmiche, e però la corrispondente ascissa AG essere Logoritmo di un Logoritmo. Mi è piacciuto di notare questa forma per esempio $l ly$. Le differenziali di questa e-

ſta eſpreſſione ſi trovano così. Suppongaſi $ly = x$, onde $dx = \frac{dy}{y}$. Comechè le quantità uguali hanno in due Logoritmiche uguali, uguali pure i proprj Logoritmi, ſarà $lly = lx$, onde avemo $dlly = dlx = \frac{dx}{x}$, e fatte le opportune ſoſtituzioni, avremo $dlly = \frac{dy}{y\,ly}$. E qui ſimilmente naſce la regola generale per ritrovare l' equazione differenziale di qualunque Logoritmo di Logoritmo. Pigliſi la differenziale logoritmica del Logoritmo ſemplice, e dividaſi pel proprio Logoritmo. La differenziale di $llgy^e$ $\frac{e\,dy}{\overline{a+fx^n}^r}$ è $ylgy^e \times \frac{-fnrx^{n-1}\,dy}{\overline{a+fx^n}^{r+1}} + lgy^e \times \frac{-fnrx^{n-1}\,dy}{\overline{a+fx^n}^{r+1}}$.

Num. 149. In terzo luogo anche la quantità lly può eſſa pure volerſi elevata a qualche dignità, laonde eſſere $l^m ly$. Per ottenerne la differenziale ſuppongaſi $ly = x$, e però $\frac{dy}{y} = dx$. Sarà pur anche $l^m ly = l^m x$, e però $dl^m y = ml^{n-1}x\,\frac{dx}{x}$ (*Num.* 147.,) che è $m\,dy\,\frac{l^{m-1}ly}{y\,ly}$, e qui naſce la regola generale per le differenziali della propoſta forma. Alla data eſpreſſione ſi prefigga l' eſponente m, e queſto eſponente nell' eſpreſſione ſi ſcemi di un unità, ed eſſa poi ſi divida pel ly, e ſi multiplichi pel differenziale Logoritmico del dato ly.

Num. 150. Finalmente amendue le caratteriſtiche Logoritmiche potrebbero elleno eſſer elevate a qualche dignità, onde proporſi $l^n l^m y$ da ritrovarſene la differenziale. Sia $l^m y = x^m$. e però $ly = x$, e $\frac{dy}{y} = dx$. Sarà pure $l^n l^m y = l^n x^m$, e $dl^n l^m y = dl^n x^m = nl^{n-1}x^m \times \frac{m\,dx}{x}$ (*Num.* 147.), e però $\frac{n\,ml^{n-1}l^m y\,dy}{y\,ly}$. E di qui pure naſce la regola generale per queſta forma.

Num.

Num. 151. Poſſono tutte le eſpoſte quantità Logoritmiche andar ſempre pigliando nuove caratteriſtiche Logoritmiche, ed eſſer pure elevate alle loro dignità. Così ſarebbe $l^m l^m l^n y^t$. Le coſe fin ora chiaramente eſpoſte daranno tutto il comodo a' Principianti di ritrovare le proprie differenziali, quando loro ne venga biſogno, che però io tralaſcio di più diffondermi ſopra di queſte, ſtimando meglio laſciar tali ricerche a' Principianti medeſimi, onde coll' eſercizio guadagnino l' abito, e la deſtrezza in queſti Calcoli. Così pure laſcio loro il calcolarſi le formule generali a ſimilitudine di quelle, che io ho poſte nel fine de' Capi I., e III. di queſta Sezione.

Num. 152. Giacchè le quantità eſponenziali, come ſi è veduto al *Num.* 117. pigliano la forma di Logoritmi, anche dei Logoritmi nati per queſta conſiderazione, e conſeguentemente delle quantità eſponenziali troveremo ora le differenze. Sia dunque data la y^t in cui t è variabile. Suppongaſi eſſa $y^t = x$, onde $dy^t = dx$. Avremo ancora $dx = ly^t = t\,ly$. laonde $\frac{dx}{x} = dt\,ly + \frac{t\,dy}{y}$, e ſoſtituendo y^t in vece di x, e riducendo riſulterà $dy^t = dx = y^t\,dt\,ly + ty^{t-1}\,dy$. Di qui ſarà facile eſporre la regola generale, ſia qualunque la forma della y, ed anche della t, e ſe in oltre y foſſe coſtante.

Num. 153. Se foſſe propoſto y^{t^n} anche di queſta, e ſimili troveremo le equazioni differenziali. Fatto $y^{t^n} = x$, ſarà $dy.^{t^n} = dx$. Sarà ancora $t^n ly = lx$. Preſa per tanto, ſecondo il numero antecedente, la differenziale di t^n, che è $dut^n lu + nt^{n-1}\,dt$, ſarà la differenziale di $t^n ly$ la $dut^n lt\,ly + ut^{n-1}\,dt\,ly + t^n\frac{dy}{y}$, che eſſendo $= \frac{dx}{x}$, ſoſtituendo in queſta y^{t^n} in vece di x, e riducendo, avremo finalmente $dx = y^{t^n} \times dut.^n l\,t\,ly + y^{t^n} \times nt^{n-1}\,dt\,l$

$dtly + y^{t^n} \times \frac{t^n dy}{y}$. Se ſia la y in qualunque altra forma compleſſa, e così l' eſponente t^n, ſarà facile eſporre la regola generale, e così pure ſarà facile trovare le differenziali di quantità eſponenziali, anche più elevate, onde ſopra di queſto non ſarò più lungo. Mi fermerò bensì prima di terminar queſto Capo a riſchiarare in grazia de' Principianti alcune coſe circa l' uſo, tanto delle quantità eſponenziali, quanto delle Logoritmiche, e così alla brevità di queſto Capo ſupplirò forſe con eccesſo colla ſeguente

Appendice,

Nella quale pel biſogno delle preſenti Memorie ſi tratta dell' uſo delle quantità Logoritmiche, ed Eſponenziali.

Num. 154. CHE l' uſo de' Logoritmi nelle operazioni Matematiche ſia d' un ſommo giovamento, non vi è, chi inſtrutto un poco di loro, non ne ſia convinto. Le coſe moſtrate a' *Numeri* 112., e tre ſuſſeguenti fanno vedere, come le multiplicazioni, le diviſioni, e le eſtrazioni delle radici de' Numeri, e lo ſteſſo pure ſuccede analogamente nella quantità concreta, facilisſimamente ottener ſi poſſono, mediante la ſola addizione, e ſottrazione, coll' ajuto de' medeſimi Logoritmi, ſopra di che ſarebbe ſuperfluo ſpendervi più parole. Giovamenti aſſai maggiori producono. L' uno è il ſoggettare a calcolo le eſpreſſioni eſponenziali, che ſenza l' opera de' Logoritmi ſi rimarrebbero intrattabili. L' altro è l' ottenere la ſoluzione di parecchj Problemi. Vi hanno de' Problemi, l' equazione finale de' quali riſulta meſcolata di Logoritmi, riprova certiſſima, che la ſoluzione aſſoluta, e perfetta di eſſi, ſenza il ſoccorſo de' Logoritmi, non può ottenerſi. Circa a' Problemi di queſta fatta non mi è per anche accaduto di vedere nelle Opere de' Maeſtri di queſte coſe, o almeno non lo ho

lo ho ſaputo oſſervare, come poi le equazioni di tali Problemi poſſano veramente renderſi utili, riducendoli in quantità o aſſolute, o almeno determinabili, liberandole da' Logoritmi, che hanno meſcolati. Quest' argomento principalmente ſarà il ſoggetto di queſta Appendice.

Num. 155. E' reſpettivamente alle quantità eſponenziali, data l' equazione $ax = byy$, nella quale ſuppongo a, e b coſtanti, è facile il darle forma, o apparenza di aſſoluta, mentre eſſendo pure $la = lbyy$, ſi ha ancora $xla = yylb$, la quale equazione, eſſendo la, e lb, quanto a ſe, quantità aſſolute, ci appare non più eſponenziale, ma anch' eſſa aſſoluta, ed eſſere un equazione alla Parabola ordinaria, il di cui parametro è $\frac{la}{lb}$. Quest' equazione per altro non è fin ora baſtevolmente ſciolta, ſe per iſciolto intendiamo, come veramente accade d' intenderlo, che non reſti in eſſa altro di incognito, che le due variabili, imperocchè, quando non ci ſia noto in quale, fra la moltitudine indefinita delle Logoritmiche diverſe, che ſono poſſibili, debbano prenderſi i Logoritmi di a, e di b; mai coſtruiremo la determinata Parabola della premeſſa equazione rappreſentata. Il dato Problema dunque, perchè dall' eſſere eſponenziale ſiaſi traſportato ad un apparenza di aſſoluto, non per tanto può dirſi ſciolto a baſtanza, ſe non ſi abbia il metodo di ritrovare la ſua Logoritmica confaccente. Queſto metodo io rintraccierò dopo aver poſti alcuni eſempj circa alla ſeparazione degli eſponenti variabili.

Num. 156. Sia propoſta l' equazione $a^x = c \times b^{x+z}$, e vogliaſi ſeparato il valore di x. Eſſendo $xla = lc + x + z\,lb$, ſarà parimenti $x = \frac{lc + zlb}{la - lb}$. Sia $n\,\frac{cx}{a} = \frac{x}{z}$, che dirò equazione A, avremo $\frac{cx}{a}\,lz = lx - lz$. Su queſta equazione x è un incognita diverſa dall' incognita lx: Laonde quando l' equazione A ſia ella la finale di un Proble-

ma, ne diasi altra atta equazione, non può separarsi la x. Che se poi fosse data altra equazione, qual sarebbe $lx = x + z$, che dirò equazione B, allora sarà facile ottenere $x = \frac{a \times \overline{z - lz}}{-a + clu}$. Sia da trovarsi un Numero x, che elevato ad x sia $= a$, e che elevato $a\ \frac{c}{x}$ sia $= b$. Sarà dunque $\frac{c}{x} lx = la$: Così pure sarà $\frac{c}{x} lx = lb$, e però $lx = \frac{c}{lb}$. Dunque $x = \frac{\sqrt[2]{c\ l^{\frac{1}{2}} a}}{l^{\frac{1}{2}} b}$ Debbasi ritrovare x, supposto che esser debba $x = b^{x+1}$, e $x^{x+1} = c$. La prima equazione da $lx = \frac{\overline{x+1} \times lb}{x}$. La seconda $lx = \frac{lc}{x+1}$, onde risulta $\overline{x+1}^2 = \frac{lc}{lb} \times x$, e detto $\frac{lc}{lb} = a$ avremo $\overline{x+1} = ax$, onde $x = \frac{a - 2 + \sqrt{a \times a - 4}}{2}$.

Potrebbe darsi caso, che in qualche Problema si manifestasse l' analogia $a^m . b^n :: c . d$. stando incogniti gli esponenti $m . n$. Comechè tale analogia produce $da^m = cb^n$., avremo pure $ld + mla = lc + nlb$., onde $ld - lc = mla - nlb$; e però $m = \frac{ld - lc + nlb}{la}$. Se il Problema, che ci ha somministrata tale analogia è stato condotto bene, egli probabilmente darà pure qualche equazione, da cui potrà separarsi la m; e però in tal caso, non restando più che l' incognita n, essa pure si farà nota, e conseguentemente la m. Se m fosse $= n$, all' ora avremo $m = \frac{ld - lc}{la - lb}$.

Perchè

Perchè poi queste, e simili separazioni, e determinazioni degl' esponenti possano ridursi al loro pieno effetto, può darsi caso, e per lo più si dà, che vi sia bisogno di determinare la Logoritmica confacente.

Num. 157. E' stato creduto di poter isfuggire l' imbarazzo de' Logoritmi, che s' incappano nelle equazioni coll' artifizio seguente. Su qualsivoglia Logoritmica (*Fig.* 7.) può senza dubbio darsi un ascissa, come AC, la quale sia uguale all' ordinata AB per l' origine, laonde, relativamente alle grandezze, che in essa Logoritmica sono state determinate, sia l' unità. A questa AC corrisponde la propria ordinata CD. Ponghiamo dunque, che questa si nomini n. Su questi supposti, essendo AC il Logoritmo di CD, sarà $AC = ln = 1$, giacchè ln si è posto $= 1$. Ciò premesso sia proposto il seguente Problema.

Nell' iperbola $aa = xy$ (*Fig.* 6.) prendere lo spazio $CBED$. che sia sempre uguale alla data costante C. Sia $AD = x$, ed $AC = z$, avremo $DE = \frac{aa}{x}$, e l' elemento dello spazio $DEFA$ sarà $\frac{aadx}{x}$ (suppongo F per ora in capo all' assintoto AF). Così avremo $CB = \frac{aa}{z}$, e l' elemento dello spazio $CBFA = \frac{aadx}{z}$. Mostrerò fra poco, che l' integrale compita del primo elemento è $\frac{aa}{z} \times 1 + lx$, e del secondo $\frac{aa}{z} \times 1 + lz$, donde risulta l' equazione finale del proposto Problema $c = \frac{aa}{z} lx$. Da questa equazione può farsi sparire il Logoritmo così. Comechè c è lo stesso che $1 \times c$. Se noi nella Logoritmica piglieremo $ln = 1$, come si è spiegato di sopra, avremo pure anche l' equazione $clu = \frac{aa}{z} L \frac{x}{z}$, e però $u^{\frac{c}{aa}} = \frac{x}{z}$ ovvero $u^{\frac{c}{aa}} z = x$; laonde il Problema ci sembra sciolto in quantità tutte assolute, ed è veramente un semplicissimo Pro-

blema

blema alla linea retta. Ma nulla giova tutto queſto, quando non ſi ſappia quale è la Logoritmica da cui deeſi prendere l' aſciſſa AC, la quale in eſſa Logoritmica ſia l' unità, nella ſcelta della qual Logoritmica conſiſte tutto il difficile.

In fatti, quanto al ritrovare in ogni Logoritmica quell' ordinata, la di cui aſciſſa correſpondente ſia l' unità, potiamo in due modi faciliſſimi ritrovarla. Primo modo. Qualunque grandezza u ſi elevi ad $\overline{l u}^{1}$, cioè a quella dignità, che ha l' unità per numeratore, e il proprio Logoritmo per denominatore; ſarà ſempre $u = u^{\overline{l u}^{1} \times l u}$, giacchè queſta equazione dà l' altra $\overline{l u}^{1} \times l u = l n = 1$. Anzi queſto metodo è generale, potendoſi così ritrovare in ogni Logoritmica quell' ordinata, la di cui aſciſſa ſia quaſilvoglia numero m, e tale ordinata ſarà $u^{\overline{l u}^{m}}$.

Secondo modo. Conſiſte queſto in ritrovare due grandezze A. B., i Logoritmi delle quali ſieno fra loro diverſi ſolo di un unità della propoſta Logoritmica. Pigliamo dunque la Logoritmica delle tavole di otto Numeri, e ſupponiamo, che il Numero A ſia $= 10000001$, e il Numero $B = 10000000$. Il Logoritmo del primo è $70000000 + \frac{4341.}{10000}$, e il Logoritmo del ſecondo è 70000000. La differenza dunque è $\frac{4341}{10000}$, la quale dovrebbe eſſere l' unità. Il Numero dunque A è ſtato aſſunto minore del biſogno, e però doveva aſſumerſi non ſolo maggiore di B per l' unità, ma anche per più; dirò x queſto di più, e ſiccome uno mi ha data la differenza $\frac{4341}{10000}$, così $1 + x$ mi darà la differenza $\frac{4341 + x \times 4341}{10000}$, la quale differenza dovendo eſſere $= 1.$, mi ſomminiſtra x

$= \frac{5659.}{4341}$ Il Numero dunque A doveva eſſere 10000001

$+ \frac{5659.}{4341}$, e conſeguentemente i due Numeri A. B, i Logoritmi de' quali nella predetta Logoritmica abbiano 1 per differenza, ridotti alla ſteſſa denominazione, ſaranno per A. 43410010000, e per B 43410000000, onde avremo $L \frac{4341001}{4341000} = 1$ nella mentovata Logoritmica.

In fatti il Logoritmico di 4341001. è $6637589 + \frac{1000}{1000}(1)$., e quello di 4341000 è 6637589. fra quali due numeri vi è la differenza dell' unità, il che ci eravamo propoſti di ritrovare. Anche queſto ripiego può renderſi generale.

Num. 158. Trovato però un Logoritmo, che ſia l' unità, non rieſce già di ritrovare per ſuo mezzo, e ſenz' altro, l' intera ſoluzione del problema. Non pretendo io di ſcemare il pregio di tale invenzione, penſata, e praticata da dottiſſimi Maeſtri, e dalla quale altri utili poſſono derivarne. Solo avvertiſco eſſer ella inſufficiente a' biſogni ſimili a quello del Problema, che ho propoſto, il quale ridotto con tale artifizio alla trovata forma, o ci laſcierà le mani vuote, o ci condurrà all' errore. E in fatti tentiamo di ſervirci della Logoritmica, di cui abbiamo le Tavole calcolate con otto Zifre. (Mi accaderà da qui avanti ſervirmi in qualche frequenza di queſta Logoritmica, e però per brevità la nominerò ſempre *la Logoritmica delle Tavole*.) Servendoci dunque di queſta, avremo $n = \frac{4341001}{4341000}$, e comechè la quantità c ſarà ſempre data per aa, ſupponiamo $c = 2aa$, onde avremo la data equazione reſa particolare $\frac{4341001}{4341000}\Big| \frac{2aa}{aa} \times z = x$, e ſuppoſto ancora, che $z = AC$ ſia ora $= a$, lato della podeſtà dell' iperbola,

avremo

avremo $x = \frac{18844289682001}{18844281000000} \times a$. Risulta dunque da questo calcolo, che se sopra l'ordinata BC, correspondente al finire del lato AC, si volesse uno spazio $CEBD$, che fosse doppio del quadrato $AB = aa$, basterebbe, che l' ascissa $AB = x$ superasse la AC dell' insensibile frazzione $\frac{8628001}{18844281000000}$. Occularmente si vede, che un tal risultato è troppo lontano dal vero. Mostrerò a suo luogo, che la $AB = x$ dee superare la AC più di sei volte. La cagione dell' erroneità del calcolo sovrasteso si è, che il Numero n, al quale compete $ln = 1$, non dee esser preso indistintamente in qualunque Logoritmica, che a noi piaccia, ma precisamente nella confaccente al Problema. Tenteremo per tanto di stabilire il metodo di ritrovare le Logoritmiche confaccenti.

Num. 159. E qui brevemente procedendo, ed inerendo all' idea, che accennai al *Num.* 131., cioè, che per essere le sottangenti delle Logoritmiche costanti nelle differenziazioni, non potevano lasciar di loro alcun segno, e però accadere che nelle equazioni finali de' Problemi, che finiscono in Logoritmi queste non sieno, anche in riguardo alle sottangenti, compite. Per compirle adunque, il che è lo stesso, che trovare le opportune sottangenti, o per più vero dire (cosa, che meglio s' intenderà più avanti) trovare la relazione della sottangente della confaccente, alla sottangente dell' ausiliaria, procederò così. Sieno ridotte tali equazioni finali de' Problemi alla forma generale $lx = ir \pm c$; nella quale lx è la quantità logoritmica, che nel Problema si manifesta, e la quale può essere in qualunque modo complessa, ed elevata; r è la variabile correspondente assoluta, che anch' essa può essere in qualunque modo complessa, ed elevata; i è il suo coefficiente, e c è la porzione costante dell' equazione, e la quale equazione io suppongo, che sia compita, fuori che pel riguardo delle sottangeuti delle due Logoritmiche. Questo rapporto dunque delle due sottangenti io lo nominerò g, laonde l'

equazio-

equazione finale, anche per questo riguardo compiuta, io la figuro $glx = ir \pm c$. Ciò preparato mi pongo a considerare le condizioni del Problema, onde per esse possa venirmi fatto di conoscere, che essendo per esempio x una tale, e determinata quantità, e nota, in tale occasione la correspondente r sia anch' essa una determinata, ed a me nota, e vera quantità, laonde quando x per esempio sia f, r divenga b. Nella determinazione di x gioverà per riuscirvi aver in mente le cose, che ho notate a' *Numeri* 123., e 125. Trovate tali grandezze determinate, e note, avremo all' ora l' equazione cambiata in $glf = ib \pm c$, laonde $g = \frac{ib \pm c}{lf}$. e però avremo la cercata relazione g totalmente nota, giacchè lf è all' ora una quantità totalmente assoluta da prendersi dalla Logoritmica ausiliaria, o descritta, o calcolata, e dalla quale si dovranno prendere i Logoritmi di x giusta le determinazioni, che di questa variabile si faranno. L' equazione finale compiuta, anche riguardo alla relazione delle sottangenti, sarà dunque $\frac{ib \pm c}{lf} \times lx = ir \pm c$, ovvero $r = \frac{ib \pm c}{lf} \times lx \mp clf$. Non istarò a dimostrare la verità di questo metodo, e in vece di ciò fare ne confermerò la certezza per altro modo; e colla stessa occasione scoprirò alcune altre notizie intorno la teoria de' Logoritmi, che sono essenziali per utile de' Principianti.

Lemma.

Num. 160. Sieno le due progressioni geometriche, $\left.\begin{matrix} A.\ B.\ C.\ D.\ E.\ F. \\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g. \end{matrix}\right\} \div\!\div$ e diasi, che un termine B della prima sia uguale ad un termine c della seconda, e stando fra B, e qualsivoglia altro termine F della prima lo stesso intervallo, che fra c, e g della seconda, diasi ancora, che questi due termini F. g.,

corre-

correſpondenti allo ſteſſo intervallo, ſieno fra loro uguali; io dico che non ſolo la progreſſione prima è la medeſima della ſeconda, ma che ogni termine fra B, ed F della prima è correſpondentemente uguale al ſuo termine della ſeconda, cioè $C = d$, $E = f$, e così d' ogn' altro. La ragione B ad F è $= \frac{B}{c} + \frac{C}{D} + \frac{D}{E} + \frac{E}{F}$, &c., e così la ragione c à g è $= \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{f} + \frac{f}{g}$, &c. Le ragioni, che compongono la prima ſono tutte fra di loro uguali, e così lo ſono fra di loro quelle, che compongono la ſeconda, e perchè il numero delle prime è uguale al numero delle ſeconde, e la ragione $\frac{B}{F}$ è $= \frac{c}{g}$, giacchè ſi è poſto $B = c$, ed $F = g$., ſegue in oltre, che le dette ragioni ſono promiſcuamente tutte fra di loro uguali. Ciò poſto pigliamo per eſempio $\frac{D}{E} = \frac{e}{f}$, avremo dunque $D. e :: E. f.$ Avremo ancora $\frac{E}{F} = \frac{f}{g}$ laonde $E. f :: F. g. :: D. e$, e perchè $F = g$, dunque $D = e$, ed $E = f$. Così potremo dimoſtrare $C = d$, e l' uguaglianza di qualunque termine correſpondente, proſeguendo anche le date progreſſioni, quanto, e da qual parte ne piaccia; e però reſta chiaro quanto ho propoſto.

Segue di qui, che ſe aveſſimo due Logoritmiche $SA.$ sa (*Fig.* 8.), e ſi daſſe, che l' ordinata BA foſſe $=$ alla ba, e la $HG = hg$; e che l' intervallo BH foſſe $=$ all' intervallo bh, queſte due Logoritmiche ſarebbero una ſteſſa Logoritmica, talmentechè ſe una foſſe all' altra ſovrapoſta, coincidendo i punti $A. G. H. B.$ a' punti $a. g. h. b.$ tutta una Logoritmica coinciderebbe coll' altra.

Propo-

Propoſizione.

Num. 161. *SU due qualſivogliano Logoritmiche* (Fig. 8.) SGA. sga., *che abbiano la medeſima ordinata* PS = Ps *per l' origine, i Logoritmi* PH. Ph *correſpondenti a due ordinate uguali* HG, hg. *ſono proporzionali alle ſottangenti* BI(S). bi (S). *delle medeſime Logoritmiche.*

Sia la Logoritmica SGA, il di cui aſſe PB, e l'origine in P. Da queſto punto ſi tiri in qualſivoglia angolo BPb la retta Pb, che ſia $=$ al dato Logoritmo Pb, indi producaſi in b, onde ſia Pb a Pb :: $PH. PB.$ L' aſſe PB s' intenda diviſo in parti uguali indeffinitamente piccole, e le nominerò dz; gli eſtremi di queſte parti abbiano tutti le loro ordinate della Logoritmica. Si divida la retta Pb in altrettante parti, tutte anch' eſſe fra loro uguali, e quante ſono ſtate quelle, che ſonoſi poſte nell' aſſe $PB.$, e queſte le dirò du. Sopra gli eſtremi di queſte ſeconde parti uguali ſi alzino altrettante perpendicolari, cadauna delle quali ſi faccia uguale all' ordinata correſpondente della Logoritmica, cioè $ba = BA. de = DC. fe = FE$, &c. E' manifeſto in primo luogo, che tutti i punti così fiſſati ſopra Pb ſaranno in una Logoritmica, ed in ſecondo luogo, che ſe noi aveſſimo fatto l' aſſe Pb uguale all' aſſe della Logoritmica propoſta sa, ove eſſo Pb corriſponde in eſſa propoſta Logoritmica all' ordinata $ba = BA$, la Logoritmica, che ora abbiamo deſcritta, ſarebbe la medeſima, e coinciderebbe colla propoſta sa (*Num.* 160.), e però quanto dimoſtrerò della deſcritta, ſarà dimoſtrato della propoſta. Qualunque lunghezza per eſempio BH poſta fra due ordinate BA GH è la ſomma delle dz (BD); che concorrono a fare la $BH.$, e però detto M il numero delle dz ſarà $BH = Mdz$. Per le medeſime detto m il numero delle du, che concorrono a fare la bh, ſarà $bh = mdu$. Sempre poi, che la BH ſia frappoſta a due ordinate $BA.$

HG, e la bb fra due altre ordinate $ba.\ bg.$, che ſieno omologamente uguali, ſarà per la coſtruzione $M = m$. Sia AL la differenza fralle due ordinate contigue della prima Logoritmica, e dz (BD) la differenza delle aſciſſe di queſta. Sarà perciò $BI.\ AB :: dz.\ AL = \frac{AB \times dz}{BI}$.

[*Num.* 96.] Per le medeſime, poſta al la differenza neila ſeconda Logoritmica fralle ordinate, ſarà $al = \frac{ab \times du}{bi}$, e perchè eſſendoſi aſſunto $AB = ab$, dovrà eſſere $AL = al$, giacchè le quantità variabili uguali hanno le loro differenze uguali, avremo $\frac{AB \times dz}{BI} = \frac{ab \times du}{bi}$, e perchè nel caſo aſſunto è anche $M = m$, avremo pure $\frac{AB \times Mdz}{BI} = \frac{ab \times Mdu}{bi}$, e perchè Mdz è $= BH$, ed $mdu = bb.$, ed $AB = ab.$, reſterà finalmente $\frac{BH}{BI} = \frac{bb}{bi}$, e perchè eſſendo $RH.\ bb :: BP.\ bP$ per la coſtruzione, ed altresì $BH.\ bb :: PH.\ Pb$, avremo finalmente $BI.\ bi :: S.s :: PH.\ Pb$, come ſi era propoſto di dimoſtrare.

Num. 162. Raccoglierò occaſionalmente, che i Logoritmi $PB.\ PF$, preſi in una qualſivoglia Logoritmica, ſaranno ſempre proporzionali a Logoritmi $Pb.\ Pf$ di un altra Logoritmica, quando, eſſendo uguali le ordinate per l' origine delle medeſime, le ordinate altresì BA, FE de' primi ſieno correſpondentemente uguali alle ordinate $ba.\ fe$ de' ſecondi, giacchè eſſendo in tal caſo $PA.\ Pb :: S.s$, e $PF.\ Pf :: S.s.$, ſarà ancora $PB.\ Pb :: PF.\ Pf$.

Num. 163. Così pure raccoglierò eſſere faciliſſimo il deſcrivere una Logoritmica determinata as, ſemprechè ſe ne abbia un altra AS di già deſcritta [e queſta Logoritmica è quella, che io in queſto riguardo nomino *Logoritmica auſiliaria*), ſemprechè, e di queſta, e di quella ſieno date le ſottangenti. Imperocchè tirata dal punto $P.$, origine dell' auſiliaria, la retta indeffinita Pb, che colla PB faccia qualſivoglia angolo, e fatto PB a $Pb :: S.s.$, ſi tiri la Bb. A que-

A queſta retta ſi tirino quante pararelle ſi vogliano, come Ff, ed all' eſtremo f s' alzi la perpondicolare $fe =$ all' ordinata $FE.$ dell' altra Logoritmica, ed è viſibile, che il punto e ſarà nella Logoritmica richieſta.

Propoſizione.

Num. 164. *Trovare il valore della ſottangente della Logoritmica delle Tavole.*

SUppongaſi, che nella Logoritmica $AS.$ [*Fig.* 8.], che ora dee rappreſentare quella delle Tavole, l' origine ſia in D, ciò non mutando punto la verità di quanto dirò, e che l' ordinata DC ſia quella ſteſſa unità, che per rapporto a' Numeri delle Tavole ſi conſidera eſſere nell' origine. Sia l' ordinata BA maggiore per $\frac{1}{10000000}$ dell' ordinata DC, onde ſe queſta è 1, la AB ſia $\frac{10000001}{10000000}$, e però AL ſarà $\frac{1}{10000000}$. Il Logoritmo del Numero BA, che è $l\frac{10000001}{10000000} - l\frac{10000000}{10000000}$. ſi trova eſſere $\frac{4341}{10000}$ $= AB = LC.$ e però avremo l' analogia $\frac{1}{10000000}$ $(AL).\ \frac{4341}{10000}\ (LC) :: \frac{10000001}{10000000}\ (AB)$ a $BI = S = 43410000 + \frac{4341}{10000}$.

Suppongaſi ora, che AB conſiderata per eſempio in MN ſia $\frac{100000001}{100000000}$. Il Logoritmo di queſto Numero,

che qui

che qui può equivalere ad LC, si trova $\frac{4341}{100000}$, onde ora si ricava $S = 4341000 + \frac{4341}{100000}$. Suppongasi in terzo luogo, che AB sia maggiore di DC per $AL = \frac{1}{1000000000}$, onde ne venga $AB = \frac{1000000001}{1000000000}$, il di cui Logoritmo è $\frac{4341}{1000000}$; onde si ricava $S = 4341000 + \frac{4341}{1000000}$. Osservando pertanto come nascano questi tre valori di S., ed altri che susseguentemente calcolare si volessero, e la loro forma, si scorga essere eglino sempre lo stesso numero accresciuto di una frazione decimale, che ha costantemente lo stesso numero 4341 per numeratore, e pel denominatore l' unità susseguita da un numero di Zeri, il qual numero all' impiccolirsi di AL va sempre aumentandosi, onde se diremo n questo numero, il predetto denominatore si potrà esporre per $1..n.$, denotando n il numero de' Zeri, che susseguono all' unità. Se dunque vorremo esporre generalmente S in qualunque supposizione di AL, impiccioleudo questa quanto ne piaccia, sarà essa S generalmente $4341000 + \frac{4341}{1..n.}$ Ciò premesso, affinchè sussista in tutto rigore l' analogia $AL.LC :: BA.S.$ (BI); che fin ora abbiamo adoperata, bisogna che le due quantità $AL.LC.$ divengano minime quanto mai sia possibile. Ciò si otterrà quando il denominatore, o divisore $1...n$, che entra nell' espressione di AL, divenga quel massimo, che sia mai possibile, nel qual caso la frazione $\frac{4341}{1...n}$ sarà allora da contarsi per nulla. Quando dunque la sopradetta analogia debba sussistere in tutto rigore,

rigore, e allora trovarsi per di lei mezzo il valore della sottangente della Logoritmica delle Tavole, il che si propose di ritrovare, questa sottangente dovrà risultare la sola 4341000.

Propofizione.

Num. 165. *Determinare, secondo le condizioni del presente metodo, la sottangente della Logoritmica confaccente di un dato Problema, servendoci per ausiliaria della Logoritmica delle Tavole.*

Si riduca, come lo abbiamo detto al *Num.* 159., la proposta equazione alla forma $lx = ir \pm c.$, e stiano le altre cose respettivamente dette in quel numero. E' visibile per le cose premesse, che supposto essere la sa [*Fig.* 8.] la Logoritmica confaccente di questo Problema, semprechè la sua ordinata bg sia $= x$, il suo Logoritmo Pb dovra essere $= ir \pm c$, essendo questa l' espressione precisa di questa equazione. Dovrà dunque avere questa Logoritmica confaccente questa essenziale proprietà, che di ogni sua ordinata x il proprio Logoritmo sia $ir \pm c$. Cerchisi dunque per mezzo delle condizioni particolari del dato Problema, se fia possibile ottenere, che supposta nota la x, onde divenga per esempio f, abbiasi pur nota in tale stato la sua corrispondente r; onde divenga per esempio $b.$, il che ottenuto, la data equazione si cambierà in $lf = ib \pm c$; che è totalmente nota, laonde supposto, che la f sia ora l' ordinata bg; ci sarà pur noto il preciso valore del suo Logoritmo $Pb = ib \pm c$, e tanto l' ordinata fe, quanto il suo Logoritmo $ib \pm c$, saranno nella Logoritmica confaccente.

Sia ora la Logoritmica SA, che sia quella delle Tavole. Presa in questa l' ordinata $HG = f$, cioè preso nelle Tavole il numero equivalente ad f, pigliasi pur anche il suo Logoritmo PH, cioè il numero, che esprime tal Logoritmo, e comechè nelle due Logoritmiche è $bg = HG$, onde

onde tali Logoritmi ſtanno fra loro come le proprie ſottangenti (ſupponendoſi qui, che l' ordinata per l origine della confaccente ſia l' unità), avremo $ib \pm c$ (Pb . lf (PH). (Si avverte, che queſto lf non è il $lf = ib \pm c$, nè è il Logoritmo PH competente all' ordinata HG della Logoritmica delle Tavole) così s. S :: (4341000), onde $s = S \times \frac{ib \pm c}{lf} = \frac{4341000c \times ib \pm c}{lf}$, in cui, come ſi ſi è avvertito, lf è il Logoritmo del numero f preſo nelle Tavole, onde ſi ottiene l' eſpreſſione della ſottangente s liberata affatto da ogni Logoritmo, e in numeri totalmente aſsoluti, che ſervono come di coefficienti alla quantità nota $ib \pm c$. E' ſuperfluo l' avvertire, che tutto lo ſteſso ſi otterrebbe ſe la Logoritmica SA foſse ogn' altra Logoritmica di già deſcritta, e calcolata, e il valore della ſottangente della quale ci foſse noto.

Propoſizione.

Num. 166. *Data l' equazione finale* $lx = ir \pm c$ *liberarla da' Logoritmi, onde divenga un equazione fatta tutta di ſemplici quantità aſſolute.*

TRoviſi per la propoſizione antecedente la ſottangente della Logoritmica confaccente. Eſsendo [*Num.* 161.] nelle due Logoritmiche SA. sa i Logoritmi PF. Pf delle ordinate uguali FE fe nella ragione delle loro ſottangenti, avremo S (4341000) s ($\frac{4341000 \times ib \pm c}{fl}$) :: lx al Logoritmo di $fe = Pf$., laonde Pf riſulterà $\frac{ib \pm c \times lx}{lf}$. Queſto dunque è il Logoritmo della ora determinata fe nella ſua Logoritmica confaccente, e intorno al quale è da avvertire, che nella data equazione $lx = ir \pm c$, in vece di lx,

di lx deeſi porre il ſovratrovato Logoritmo $\frac{ib \pm c}{lf}$, giacchè queſto è il Logoritmo preſo nella Logoritmica confaccente, ed al quale ſi è venuto per le fatte operazioni a ridare quella ſua propria ſottangente, di cui parlammo al *Num.* 131. L' equazione per tanto propoſta aveva biſogno di eſſere compita anche in riguardo alle quantità Logoritmiche, che v' intervengono, onde farſi nel preſente caſo la $\frac{ib \pm c}{lf} \times lx = ir \pm c$. Da queſta equazione ſono in ſenſo di verità tolte tutte le quantità Logoritmiche, mentre qui lf è un numero aſſoluto, o equivalentemente, e lx lo dee divenire, laonde determinate l' una, o l' altra delle variabili x, o r, l' altra ſarà aſſolutamente nota.

Vediamo pur anche per queſta maniera dedotta dimonſtrativamente, e diverſa da quella adoperata nel *Num.* 159. ottenerſi la ſteſſa finale equazione, che in quel numero ſi ottenne, onde la di lui verità viene ſtabilita.

Reſta ora di agevolare la pratica delle premeſſe coſe con qualche eſempio. E' vero, che il metodo, che ho qui ſteſo, reſta obbligato a ritrovare quella condizione, che ho accennata. Se poſsa ottenerſi lo ſteſso per altro modo più agevole io non lo ſo; ſono però perſuaſo di no. Ma ſia comunque ſi voglia, ſpero, che i miei Lettori mi ſapranno grado, che io loro abbia offerto quel tanto, che mi è venuto fatto di ritrovare.

Num. 167. Sia dunque propoſto di liberare da' Logoritmi l' equazione $\frac{u}{aa} - 1 = lx$, ovvero $u = aa + aalx$.

Queſta equazione è l' equazione finale della quadratura dello ſpazio $ACILMNA$ (*Figura* 14.) dell' iperbola equilatera apolloniana, il quale ſpazio viene denotato per u, e l' aſciſsa x del quale è la AC, e ſta eſſo applicato a tutta quanta l' aſſintoto AM ſteſa per quanto mai è poſſibile, che ſi ſtenda. L' elemento di tale ſpazio (*Num.* 83.) è $\frac{aadx}{x}$, la di cui integrale, come lo vedremo a ſuo luogo, è $aalx = u$; ma perchè queſta

equazione non è compita, moſtrerò fra poco (*Num.* 168.) che ella dee eſsere la ſovrapoſta $aa \times 1 + lx = u$. Dalla natura dunque dell' iperbola è neceſsario ricavare la condizione occorrevole per liberare da' Logoritmi la data equazione.

E qui in primo luogo è da ſovvenirſi, che in queſta equazione meſcolata di Logoritmi, comechè la variabile, che ne forma l' aſciſsa è eſsa l' ordinata di un Logoritmo, ed è poſitiva, ed incompleſsa, allorchè tale variabile giunga ad eſsere la minima x, che preſa dall' origine A, poſsa aſsegnarſi, allora è neceſsariamente l' unità, nè può eſsere di queſta minore, e tanto meno il Zero (*Num.* 125.) E qui i miei Lettori potranno cominciar a vedere ſe le minute ricerche, le quali ſteſi già al *Num.* 135., ſieno inutili, e a pompa, come allora me ne ſpiegai. Nell' Appendice della Sezione VI. della ſeconda parte di queſte Memorie ritoccherò di propoſito come la predetta x non poſsa eſsere Zero, e debba eſsere l' unità. Solo qui, per non laſciare i Principianti ſoſpeſi, ne farò brevemente parola. E' notorio, che ſe nella preſente iperbola condurremo quante $BL.\ CI.\ DH.$ ne piaccia parallele all' aſſintoto AM, onde ſieno le ordinate variabili delle variabili aſciſse preſe ſull' altra aſſintoto AF, e dagli eſtremi di tali ordinate $L.\ I.\ H.$ tireremo le altre $NL.\ OI.\ PH.$ parallele all' aſſintoto delle aſciſse, i rettangoli $AL.\ AI.\ AH.$ ſaranno ſempre tutti fra loro uguali, e però tutti uguali al quadrato AH, podeſtà dell' iperbola. Gli ſpazj dunque iperbolici $AMLB.\ AMIC.\ AMHB$ ſaranno ſempre uguali alla ſteſsa podeſtà AH + il loro correſpondente trilineo $NML.\ OMI.\ PMH.$ Queſti trilinei all' impiccolirſi della x vanno ſempre, come è viſibile, decreſcendo, onde queſti ſoli poſsono, impiccolendoſi al ſommo la x, divenir Zero, ma reſterà però il rettangolo, per eſempio AL [ſuppoſto che AB ſia la minima aſciſsa] ſempre finito, e ſempre determinato uguale ad AH, i lati di un tal rettangolo non poſsono certamente eſsere un di loro o Zero, o infinito, perchè il Zero, anche multiplicato per l' infinito, non può fare ſpazio veruno, e quand' anche pure ſi voleſse fingere ſenza ragione, che lo faceſse,

faceſse, non può farlo determinato, coſa, che neceſsariariamente biſogna, che ſi adempia nel preſente Problema. E' dunque innegabile, che per quanto la x s' impiccioliſca, non può mai divenir Zero, e però reſtando ella una grandezza di ordine finito, neppure l' aſſintoto AM può ſtenderſi all' infinito, mentre nell' equazione $\frac{aa}{x} = y$ non potrà mai y eſsere infinita, quando x non ſia Zero. Dovrà dunque AM terminarſi, per eſempio, in N, cioè ove il trilineo NML correſpondente alla minima x dovrà farſi nullo.

Che poi eſsa minima x debba dirſi l' unità, è d' uopo diſtinguere. Se io conſidero la x come la minima x dell' iperbola, e niente altro, io confeſso difficiliſſimo ravviſar ragione, per cui debba nominarſi l' unità, e non piuttoſto qualunque altra quantità. Ma ſe la conſidero per ſervirmene alla quadratura di queſti ſpazj iperbolici, riferendo ad eſsa le medeſime quadrature, allora ſi fa manifeſtamente neceſsario di nominarla per l' unità, e conſiderarla tale, Comechè le x vengono a ſcoprirſi mediante il Calcolo integrale le ordinate di una Logoritmica, e però la minima x è altresì la minima ordinata di queſta Logoritmica, e per far uſo de' Calcoli Logoritmici è neceſsario, che tale minima ordinata ſi nomini l' unità, di qui reſta ſtabilita queſta denominazione.

Num. 168. Premeſse queſte coſe è poi manifeſto, che per compiere la ſuppoſta equazione $aa\,l\,x + q = u$. [Noto per q la quantità coſtante, che ſi dovrà aggiugnere, o levare per render compita l' equazione], comechè quando x divenga $= 1$. lo ſpazio u reſta il ſolo rettangolo $AL = aa$, avremo $q + aa\,l\,1\ (o) = aa$, e però l' equazione compita reſta quale l' ho detta $aa \times 1 + lx = u$.

Num. 169. Dopo il qui detto a quiete de' Principianti, facciamoci a rintracciare la condizione occorrevole per liberare da' Logoritmi la data equazione, e ſupponiamo di ſervirci della Logoritmica delle Tavole per auſiliaria. Sia BN [*Fig.* 9.] la prima x, e la minima, onde $= 1$. Potremo intendere tutta l' aſſintoto BC diviſo in parti tutte uguali

alla BN, ma ogn' una di queſte parti uguali potrà intenderſi diviſa in quanti, e quali frazioni ne piaccia, a riſerva della BN, che ſtarà coſtantemente l' unità. Così ſi fa in tutte le ordinate di tutte le Logoritmiche. Supponiamo dunque, che la prima x paſſi ad eſſere la BO, e che il di lei aumento ſopra la BN ſia $\frac{1}{1000000}$. Avremo dunque $BN + BO = \frac{1000001}{1000000}$, e giacchè la natura di queſta iperbola è $aa = xy$ avremo ne' fatti ſuppoſti $y = OG = aa \times \frac{1000001}{1000000}$. Per le medeſime, giacchè $BN = 1$., avremo $NE = BD = aa$. Aggiugnendo per tanto NE ad OG, e multiplicando queſta ſomma per NO, e dividendo per 2, avremo da queſto prodotto l' area del trapezio $NOGE$, la quale per verità, ſtantechè il lato GE, che qui ſi adopera come retto, ſcorre fuori del piccolo archetto GE, è qualche poco maggiore di queſto ſegmento iperbolico, il quale (ommeſſo quest' accidente) ſarà eſpreſſo preſentemente per $aa \times \frac{2000001}{2000002000000}$. Aggiungendo poi a queſto il rettangolo $BE = aa$, riſulterà in queſta ſuppoſizione tutto lo ſpazio iperbolico $BOGED$, ſteſo per quanto mai può ſtenderſi ſull' aſſintoto BD, ed applicato all' aſciſſa x (BO) $= 1 + \frac{1}{1000000}$, riſulterà dico pochiſſimo minore di $aa \times \frac{2000004000001}{2000002000000}$. L' aſciſſa poi $BO = \frac{1000001}{1000000}$ ha nelle Tavole il ſuo Logoritmo $= \frac{4341}{1000}$. Ripigliando ora la propoſta formola, giacchè per le fatte ſuppoſizioni quando $x = \frac{1000001}{1000000}$ lo ſpazio s ci riſulta quaſi $= aa \times \frac{2000004000001}{2000002000000}$ ricaveremo i ſimboli per ſoſtituirli nella formola del *Num.* 166., la quale è $\overline{ib \pm c} \times lx = iu \pm c$, ricaveremo dico $b = aa \times \frac{2000004000001}{2000002000000}$, $lx = lf = \frac{4341}{1000}$, $i = \frac{1}{aa}$, e $c = -1$. La premeſſa formola diverrà dunque $aa \times 1 + \frac{2000001}{2000000} \times \frac{1}{4341000} = V$. Il ſimbolo L è il Logoritmo da prenderſi dalle tavole, e competente a qualunque ſuppoſizione poſſibile di x, ed eſpoſto nella formola per lx.

Rifacciaſi ora gli ſteſſi computi, minorando unicamente la NO, che ora ſupporremo $= \frac{1}{1000000000000}$. Con queſta ſuppoſizione ci riſulta la formola premeſſa cambiata in $aa \times 1 + \frac{2000000000001}{2000000000000} \times \frac{L}{4341000} = s$.

Di bel nuovo ſi facciano le medeſime calcolazioni, ſupponendo $NO = \frac{1}{1000000000000000}$. Ci riſulterà la ſolita formola mutata in $aa \times 1 + \frac{2000000000000001}{2000000000000000} \times \frac{L}{4341000} = s$. Queſte calcolazioni, che ſi poſſono replicare, minorando la miſura di NO quanto ne piaccia, ci moſtrano ad evidenza, che al minorarſi di eſſa, ſempre più la frazione, che moltiplica l' altra $\frac{L}{4341000}$ ſi accoſta all' unità, di modo che, quando l' ordinata OG ſarà veramen-

ramente la contigua di NE., essa frazione, o sarà assolutamente l' unità, o da essa eccederà per una differenza, di cui non si potrà assegnar la minore, e però resta chiaro dal modo fin qui tenuto. In primo luogo, che quando la BO cresca $\frac{1}{1000000}$ sopra la minima ascissa BN, allora lo spazio iperbolico $BOGB$ risulta pochissimo minore di $aa \times \frac{2000004000001}{2000002000000}$, onde se ne trae una formola aprossimata per la richiesta soluzione, la qual formola poi, e questo in secondo luogo, viene a ridursi al giusto, conducendola ad esprimere il caso, nel quale l' ordinata OG divenga l' ordinata contigua della NE, che è la corrispondente alla minima x, e risulta questa formola ridotta al giusto la $u = aa \times 1 + \frac{L}{4341000}$.

Num. 170. Se presentemente vorremo la sottangente della Logoritmica confaccente, ci sarà facile ottenerla, e per rapporto anch' essa alla sottangente della Logoritmica delle Tavole. Dal *Num.* 165. abbiamo (*Fig.* 8.) $PH\ (lf)\ Pb\ [ib \pm c] :: S\ [4341000]\ s$, e siccome nella supposizione antecedentemente fatta, che BN sia $= \frac{1}{1000000}$ abbiamo avuto $b = aa \times \frac{2000004000001}{2000002000000}$, $lf = \frac{4341}{1000}$, $i = \frac{1}{aa}$, e $c = -1$., verrà in queste supposizioni a risultarci $s = \frac{2000001}{2000002}$.; E comechè quando la OG sia la contigua di NE questa frazione viene ad essere l' unità, siamo fatti certi, che la sottangente della Logoritmica confaccente per la quadratura delle proposte iperboli sta alla sottangente della Logoritmica delle Tavole presa per ausiliaria, come sta l' unità a 4341000.

Num.

Num. 171. E ritornando alla formula ritrovata, non sarà inutile, che io registri qui alcuni confronti della sua verità, il che facendo, non solo vieppiù la stabilirò, ma ne trarremo ancora altre non inutili notizie. Riflettendo all' equazione dell' iperbola $aa = xy$, e supponendo, che la minima x vada sempre uniformemente crescendo col ricevere menomissimi aumenti uguali, ne siegue poi, che l' ordinata y, nell' andar diminuendosi al corrispondente crescere della x, sia sempre una frazione multiplicata per aa, ed esprimibile per uno de' termini della progressione armonica cominciante dall' unità, e proseguente per ordine, corrispondentemente agli aumenti uniformi di x, oppure uno de' medesimi termini multiplicato in oltre per un numero costante, come esporrò. Imperocchè, supposto in primo luogo che gli aumenti della prima x sieno sempre l' unità, cioè la medesima prima x, a questa prima x corrisponderà $y = \frac{aa}{x} = aa \times \frac{1}{1}$.: Al secondo x corrisponderà $y = \frac{aa}{2x} = aa \times \frac{1}{2}$. Al terzo corrisponderà $y = \frac{aa}{3x} = aa \times \frac{1}{3}$., e così sempre di seguito.

Supposto poi in secondo luogo, che gli aumenti della prima x sieno sempre la medesima menomissima frazione $\frac{1}{n}$, che si vada uniformemente replicando, detta t la multitudine indeterminata di tali aumenti, che coll' unità compongono la x aumentata, esporremo questa generalmente in ogni suo stato per $1 + \frac{t}{n}$, laonde avremo altresì generalmente $y = \frac{aa \times n}{n + t}$, e comechè tanto n, quanto $n + t$ sono numeri intieri, la frazione $\frac{n}{n+t}$ sarà sempre in questo caso, come lo ho accennato di sopra, uno de' termini della serie armonica multiplicato pel costante numero n.

Tutte

Tutte le ordinate dunque, le quali ſuſſeguendoſi contiguamente ſtanno in uno ſpazio iperbolico, ſono tanti termini della ſerie armonica $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{3}$, &c. cominciante dall' unità, e finiente a quel termine, che nel ſuo poſto adegua la moltitudine degli aumenti, che nel modo detto formano la x, e il comune numeratore de' quali termini è multiplicato per aa, e per n. Ma comechè queſti termini della progreſſione ſono ſemplici lunghezze, e prive d' ogni larghezza, denotando eſſi le ſole ordinate y, la ſomma di tali ordinate cape bensì nello ſpazio iperbolico, ma non lo adegua; mentre ciò, che di mano in mano lo adegua, ſono i piccioli paralellogrammi, o più veramente trapezj, che ſono applicati agli accreſcimenti minimi della x, o ſuoi elementi, che ſono tutte larghezze eſpoſte per $\frac{1}{n}$, e tutte fra di loro uguali, e che per lunghezza hanno la metà della ſomma delle due ordinate contigue.

Spiegate queſte coſe, ſe noi (*Fig. 9.*) ſupporremo diviſo l' aſſe BC dell' iperbola nelle parti uguali NO. OP. PQ. QS, &c., e tutte altresì uguali alla prima parte BN, che è l' unità, le ordinate correſpondenti alle nominate parti ſaranno i termini della progreſſione armonica multiplicati per aa. Se in oltre ſupporremo, che gli eſtremi EG. GI IM. MR, &c. di tali ordinate ſieno uniti con linee rette, avremo un poligono, l' area del quale ſarà ſempre qualche poco maggiore dello ſpazio iperbolico ad eſſo correſpondente, e ſe noi ſommeremo i termini della predetta ſerie, queſta ſomma ſarà ſempre alcun poco minore dello ſpazio iperbolico, che ad eſſa corriſponde. Queſta conſeguenza ſi verifica perfettamente colla mia formola, come chiaro appare dalla ſeguente Tabella, nella quale la prima colonna moſtra il numero de' termini, la ſeconda la ſomma de' correſpondenti termini della progreſſione, la terza il valore degli ſpazj iperbolici, e la quarta quello de' poligoni circonſcritti, e da eſſa ſi vede ſempre, che gli ſpazj iperbolici ſtanno frammezzo alle ſomme de' termini correſpondenti della ſerie armonica, ed a' correſpondenti trapezj.

Numero de' Termini	*Somma de' Termini* Corrispondenti	*Spazj Iperbolici*	*Poligoni Circonscritti*
Num. 5.	$2 + \frac{17}{60}$	$2 + \frac{26487}{43410}$	$2 + \frac{41}{60}$
Num. 10.	$2 + \frac{2341}{2520}$	$3 + \frac{1318}{4341}$	$3 + \frac{191}{544}$
Num. 15.	$3 + \frac{114677}{360360}$	$3 + \frac{3078913}{4341000}$	$3 + \frac{56569}{72072}$
Num. 20.	$3 + \frac{9276623}{15519504}$	$3 + \frac{43283}{43410}$	$4 + \frac{5644417}{7759752}$
Num. 25.	$3 + \frac{7281378067}{8923714800}$	$4 + \frac{9564}{43410}$	$4 + \frac{2641046371}{8923714800}$
Num. 30.	$3 + \frac{2317414141747}{2329089562800}$	$4 + \frac{174821 2}{4341000}$	$4 + \frac{3342155602901}{6987268688400}$
Num. 35.	$4 + \frac{1632073397169523}{1111907357280 7200}$	$4 + \frac{141768}{434100}$	$4 + \frac{4922936392773 1141}{7783351500 9650400}$
Num. 40.	$4 + \frac{1489724601244022143}{5348274388520263200}$	$4 + \frac{29976}{43410}$	$4 + \frac{4097008365647650453}{5348274388520263200}$

pezj. Chi vorrà far pruova, ſe tal coſa perſeveri a ſuccedere, potrà farne il calcolo, ed io gli ofrirò un ripiego, che grandemente agevola il ſommare i termini della progreſſione armonica. Sia per eſempio propoſto di ſommare i primi 10. termini. Oſſervo eſſere fra queſti $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8}$, la ſomma de' quali ſi fa eſſere $1 + \frac{7}{8}$. vi ſono pure $\frac{1}{3} . \frac{1}{6} . \frac{1}{9}$., i quali tre termini ſono $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Avendo già fatte per prima le ſomme di alcuni termini conſecutivi della ſerie armonica, trovo, che la ſomma de' predetti tre termini è $1 + \frac{5}{6}$, che multiplicata per $\frac{1}{3}$ fa $\frac{11}{18}$. Vi trovo pure $\frac{1}{5} . \frac{1}{10}$ che ſono $\frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{2}$, che fa $\frac{3}{10}$, e finalmente vi trovo anche $\frac{1}{7}$., onde la ſomma de' propoſti 10 termini ſi riduce alla ſomma di $1 + \frac{7}{8} + \frac{11}{18} + \frac{3}{10} + \frac{1}{7}$., che ſommati effettivamente, danno la ſomma cercata $= 2 + \frac{2341}{2520}$.

Num. 172. Che ſe vorremo una ſomma, la quale è proſſimamente maggiore di qualunque data multitudine di termini conſecutivi della ſerie armonica, l'avremo con niuna fatica mediante la trovata formola. Vogliaſi la ſomma per eſempio di un decilione di termini, cioè di quella moltitudine, che ſarebbe deſignata da un unità ſuſſeguita da 60. Zeri. Comechè il Logoritmo di queſto numero è 60000000, la noſtra formola diverrà $1 + \frac{60000000}{434100}$ $= x = 139 + \frac{942}{4341}$. ed a meno di queſto numero monterà la ſomma di quella moltitudine sì ſterminata di termini della progreſſione armonica. Nomino ſterminata queſta multitudine, ed è opportuno darne qualche idea per le

coſe, che in queſto propoſito mi reſtano da dire. Suppo-
niamo, che queſti termini ſi doveſſero ſcrivere ſu di una
liſta di carta, e che ogn' un di loro occupaſſe il piccol
ſpazio di una linea del piè geometrico [ſuppoſizione per
ben 25. volte minore del vero] con queſta liſta, a farne
un calcolo rotondo, e aſſai minore del vero, cingeremo
l' equatore della noſtra Terra tante volte, quante unità con-
tiene un numero deſignato per l' unità ſuſſeguita da 49.
Zeri. Si degnino i miei Lettori oſſervar qui, come eſſendo
creſciuto il numero de' termini della ſerie armonica a tal
diſmiſura, la ſomma però fatta da tali termini ſe ne ſia
rimaſta, per rapporto a tal numero, piccola a diſmiſura,
ed inoltre, che ſe io pigliaſſi il numero de' termini eſpreſ-
ſo per l' unità ſuſſeguita da 120. Zeri, onde la loro mul-
titudine ſarebbe ſterminatamente ſterminata, la ſomma loro
però ſarebbe minore del doppio della già ritrovata.

Num. 173. Oltre la premeſſa riprova della verità del-
la mia formola addurrò ancora le due ſeguenti. È viſibile
(*Figura* 14.) che nella iperbola preſente tutto lo intero
ſpazio da eſſa contenuto adegua i due trilinei HPM,
HDF, che ſono uguali fra di loro, più il quadrato
HA poteſtà dell' iperbola. Vediamo ſe ciò ſi ottenga.
Comechè l' aſciſſa dell' intero ſpazio è $AF = aa$, ſarà
il di lui valore eſpreſſo per $aa \times 1 + \frac{laa}{4341000} = u$.

Per lo ſegmento poſcia $HMAD$, eſſendo la ſua aſciſſa la
$AD = z$ avremo $u = aa \times 1 + \frac{lz}{4341000}$. Levato da que-
ſto il quadrato $aa = HA$, reſterà il trilineo HMP
$= \frac{aalz}{4341000}$. Levato poſcia da tutto l' intero ſpazio, che
abbiamo trovato eſſere $aa \times 1 + \frac{laa}{4341000}$, il ſovratrovato
ſegmento $HMAD$, rimane l' altro trilineo HDF, che anch'
eſſo riſulta, fatto il calcolo, $\frac{aalz}{4341000} = HMP$, come ſi
era propoſto dover ſuccedere.

Num.

Num. 174. Il dottiſſimo *de l' Hôpital* nell' aureo ſuo Li-
bro delle Sezioni coniche ha dimoſtrato nella propoſizione
10. del V. Libro [*Fig.* 10.], che ſe ſieno alle ſteſſe aſſin-
toti le due iperboli SNV, FGH, e ſieno ovunque ſi vo-
glia condotte le due OH. QR normali all' aſſintoto AE,
lo ſpazio $OPXQ$ della prima iperbola allo ſpazio $OHRQ$
della ſeconda, contenuti dalle due dette normali, ſono
ſempre fra di loro nella ragione diretta bb ad aa delle
loro podeſtà. Queſto ſteſſo pur ſi dimoſtra colla mia for-
mola. Il ſegmento $AQXVK$ teſo ſu tutta l' aſſintoto AK,
detta z la AQ, ſarà $bb \times 1 + lz$ (ometto per brevi-
tà il coſtante denominatore 4341000), e detta $AO = x$,
ſarà il ſegmento $AOPVK = bb \times 1 + lx$, laonde, det-
tratto queſto da quello, rimane il ſegmento $OPXQ$
$= bb \times lz - lx$. Nello ſteſſo modo il ſegmento $AQRHI$
ſarà $aa \times 1 + lz$., ed il ſegmento $AOHI = aa \times 1$
$+ lx$, e reſterà il ſegmento $OHRQ = aa \times lz - lx$,
laonde anche la mia formola dimoſtra eſſere queſti ſegmen-
ti nella ragione $bb : aa$.

Num. 175. Non oſtante tutte queſte riprove di verità
ſono però da farſi alcune più minute diſquiſizioni, tanto
per ſapere fin dove queſta formola abbia potere di ſten-
derſi, quanto per ſaperla uſar ſenza errore. Queſte diſ-
quiſizioni domandano, che qualche coſa della teoria de'
Logoritmi ulteriormente ſi ſpieghi. Per rendermi più in-
telligibile porrò prima l' occaſione di tali diſquiſizioni, in-
di in eſſe m' inoltrerò. Finchè la trovata formola adope-
perar ſi voglia ad iſcoprire la relazione, che hanno fra
di loro ſpazj iperbolici della ſteſſa, o di diverſe iperbo-
li, ella ſta ne' limiti del ſuo potere, benchè in alcuni
caſi [non però per ſua colpa, ma per noſtra inavverten-
za] poteſſe ingannarci; Ma quando adoperar ſi voglia a
ritrovare gli ſpazj iperbolici in valore aſſoluto, ella per
ſe non giugne a tanto, e per giugnervi ha biſogno di
un maggior finimento. Supponganſi dunque le due iper-
boli della *Figura* 10., e in eſſa ſi conſideri tirata la ſola
normale QR, e però che gli ſpazj da compararſi eſſi ſie-
no i ſoli $AQXVK$ $AQRHI$. inſiſtenti nell' altra aſſinto-

to AKI, e detta x la AQ, il primo ſpazio riſulta per la formola $bb \times 1 + lx$, ed il ſecondo $aa \times 1 + lx$, laonde queſti due ſpazj ci compariſcono anch' eſſi nella ragione bb ad aa. Queſto riſultato però è falſo, e qui fa di meſtieri ſpiegare il come, e il perchè.

Num. 176. La Logoritmica, che ſervir dee alla coſtruzione della quadratura di queſti ſpazj ha due eſſenziali riguardi, i quali tutti e due debbono conſervarſi. Uno è, che in tutte quante queſte iperboli ella dee eſſere, quanto al numero, una ſola, ed unica Logoritmica; ma quanto alle linee, che la compongono, ella dee eſſere altrettante logoritmiche, quante ſono le diverſe iperboli, che voglionſi calcorare. In fatti ſiccome la minima x di qualunque iperbola ella è l' unità lineare della logoritmica confacente per la medeſima iperbola, ſe avvenga (come vedremo fra poco, che avviene) che le minime x delle diverſe iperboli, conſiderate come lunghezze, ſieno fra di loro diverſe, reſta ſenz' altro evidente, che le logoritmiche confacenti, conſiderate come lineari, debbano eſſere diverſe fra di loro. Se il Chiariſſimo *de l' Hôpital* non aveſſe dubitato, che le minime x delle diverſe iperboli foſſero ſtate diverſe, ed aveſſe avuto fondamento evidente di perſuaderſi, che le branche di tutte queſte iperboli ſi accoſtaſſero finalmente nella ſteſſa miſura alle loro aſſintoti, pare, che non avrebbe levata alla ſua dimoſtrazione quella generalità, che, ſtone un tal dubbio, le competeva. Ecco la faciliſſima, ed elegante ſua dimoſtrazione. L' ordinata qualunque y, per eſempio, QX della prima iperbola è $\frac{bb}{x}$: Così l' ordinata z correſpondente all' altra iperbola $= QR$ è $\frac{aa}{x}$, ed eſſendo queſte due eſpreſſioni generalmente di tutte le poſſibili ordinate correſpondenti delle due iperboli, ne viene, che tali ſpazj ſono nella ragione bb ad aa. Fin qui la dimoſtrazione del lodato Autore.

Ma ſupponendoſi, che le branche di tutte queſte iperboli ſi accoſtino finalmente nella ſteſſa miſura alle loro aſſintoti, reſtando in tale ſuppoſto in ogni ſegmento iperbolico le ordinate

dinate correſpondenti, anche quando l' aſſintoto divenuta, come credevaſi, infinita, toccava la ſua branca, vedeſi, che la ſteſſa dimoſtrazione darebbe anch' eſſa l' erronea conchiuſione, che i ſegmenti predetti foſſero nell' aſſegnata ragione. Sembra dunque aſſai fondato il credere, che quel dottiſſimo Maeſtro dubitaſſe, che le branche delle iperboli ſi accoſtaſſero tutte nell' iſteſſa miſura alle loro aſſintoti: vale a dire, che le minime aſciſſe delle diverſe iperboli foſſero fra loro uguali, e però volle troncare queſta diſquiſizione, e ſtare ſull' evidente, reſtringendo la ſua dimoſtrazione a due ſpazj determinati da due normali, che effettivamente tagliaſſero amendue le conſiderate iperboli ne' loro archi. Quando la diſtanza AO della normale OPH dall' origine A ſia minore della minima aſciſſa dell' iperbola maggiore; laonde ſe in vece di eſſere AO foſſe Ac, allora è bensì vero, che ſuſſiſte la ragione cV alla cd, ma queſta non è più la ragione $\frac{bb}{x}$ ad $\frac{aa}{x}$, perchè la x correſpettiva all' iperbola maggiore, e che dovrebbe in queſto caſo eſſere la Id, non è, nè può eſſere, perchè nella ſua iperbola non può eſſervi x, che ſia minore di IH.

Per lo ſteſſo diſcorſo poſto, che AD ſia l' intera aſſintoto dell' iperbola minore, ſe intendeſſimo la normale QR condotta non più in QR, ma fra DT ad EF, ſeguirebbe la ſteſſa impoſſibilità, laonde anche per queſta parte fa di meſtieri, che la propoſizione ſia limitata, ben intendendo, che le due paralelle OH. QR vadano a terminarſi ne' punti reſpettivamente P. H, ed X. R, i quali punti ſieno veramente negli archi delle iperboli loro riſpettive.

Num. 177. Facciamoci ora a vedere, come dar ſi poſſano Logoritmiche, le quali, riguardo alle linee, che le compongono, ſieno diverſe, ma relativamente al numero, ſieno una ſteſſa. Sieno dunque due Logoritmiche lineari SGA. sga [*Fig.* 8.] nelle quali trovandoſi, che qualunque ordinata GH ſia ad una correſpondente gh nella coſtante ragione $p.aq$, ſi dia altresì coſtantemente, che i logoritmi delle medeſime ſieno nella medeſima coſtante ragione, cioè $HP.bp :: p.q.$, io nominerò queſte due logoritmiche, che han-

hanno tal condizione, *Logoritmiche ſimili per rapporto alle loro linee*.

Queſte tali Logoritmiche, ſe ſi conſiderino ora come numeriche, cioè ſe ſi conſiderino non più le loro linee, ma i numeri eſprimenti quante delle loro unità lineari ogni loro linea contenga, eſſe ſono una ſola, ed unica logoritmica riſpettivamente all' eſſere numerica, imperocchè dovendo eſſer ſempre $HG . hg :: DC . dc :: PS . Ps$ la PS, che è l' unità nella ſua logoritmica, ſarà contenuta nella HG, o nella DC, o &c. quante volte la Ps, che è l' unità nella ſua logoritmica, è contenuta nella hg, o dc, o &c. laonde, quanto al numero eſprimente la contenenza delle unità nelle omologhe linee, egli ſarà ſempre un ſolo.

Conſiderate come numeriche hanno dunque tali logoritmiche le loro ſottangenti $BI . bi$ uguali, giacchè in queſto riguardo ſono una ſola. Conſiderate poſcia riſpettivamente alle loro linee, hanno eſſe loro ſottangenti $BI . bi$ nella medeſima aſſunta ragione $p . a\ q.$, giacchè eſſendo nell' una, e nell' altra di eſſe ſottangenti ugual numero delle unità proprie della loro logoritmica, e queſte unità ſono linee nell' aſſunta ragione; reſta manifeſto quanto ſi è detto.

Num. 178. Premeſſe queſte notizie, ritorniamo alla noſtra formola $aa \times 1 + lx = u$. E' viſibile, che lx è parte numerica di un coefficiente numerico, il quale multiplica aa, e però è neceſſario, che la logoritmica confacente abbia riguardo di una logoritmica numerica, e perchè la ſottangente della logoritmica confacente ci è riſultata per tutte queſte iperboli una ſola [*Num.* 170.], così è evidente, che una ſola logoritmica numerica dee ſoddisfare. Ma perchè l' unità lineare di qualunque iperbola è la minima di lei aſciſſa, reſta ora la neceſſità di ritrovare queſta minima aſciſſa, onde reſti paleſe, ſe queſta unità ſia in tutte le logoritmiche lineari confacenti la ſteſſa, o pur ſia diverſa.

Rappreſentandoſi dunque (*Fig.* 14.) qualunque ſpazio $AMLB$ di qualſivoglia di queſte iperboli per $aa \times 1 + \frac{lx}{4341000}$, ed eſſendo il rettangolo $ABLN = aa$ mi reſta paleſe, che il

che il trilineo NLM egli è, che è $= \frac{aalAB}{4341000}$. Ciò ſtante, quando la AB divenga la minima x, dovrà allora il trilineo NLM eſſere Zero, e però dovrà averſi $\frac{aalAB}{4341000} = o$; cioè l' equazione $\frac{aal1}{4341000} = o$, affinchè divenendo $l1 = o$, eſſa equazione ſuſſiſta, riſulterà dunque $\frac{1 \times aa \times o}{4341000} = o \times 1.$, e caſſando in amendue i membri la quantità Zero, ci riſulterà, quando x debba eſſere la minima aſciſſa, o l' unità della Logoritmica lineare confaccente, $aa = 4341000$.

Reſta dunque paleſe, che l' unità lineare della Logoritmica confaccente di qualſivoglia di queſte iperboli è una delle 4341000 parti uguali di tutta l' affintoto HN, ſemprechè per queſta coſtruzione vogliamo ſervirci per auſiliaria della Logoritmica delle Tavole, e però ſiamo ora certi, che le minime aſciſſe di queſte iperboli non ſono altrimenti uguali fra di loro, ma ſono in ragione delle loro affintoti intiere. Queſta ſcoperta ci riſchiara le coſe dette nel *Num.* 176., e ci pone in iſtato di avere le aſſolute quadrature di queſti ſpazj iperbolici.

Sono ſtato alcun tempo perpleſſo, ſe per coſtruire l' equazione $aa \times \frac{1 + lx}{4341000} = u$ io doveva divider l' aſſe AE dell' iperbola, affine di averne la x, pigliando arbitrariamente una menomiſſima parte di una grandezza aſſoluta, qual per eſempio ſarebbe una milioneſima parte di una linea del piè geometrico, e con eſſa, come unità ſempre invariabile, eſporre il numero delle unità contenute in qualunque aſciſſa AC, e di qualunque di queſte iperboli; o ſe pure doveva dedurſi dal problema il valore della opportuna unità. Queſta ſeconda ſtrada parevami la naturale, e metodica, ove la prima mi ſi manifeſtava aliena dal genio della Geometria, che niente ammette in ſimili condizioni di arbitrario, oltre di che, ed è facile farne pruova, ſe io fingeva l' unità un milioneſimo di una linea, otteneva per la formola un valore, che riuſciva grande-

grandemente diverſo dal valore, che io ritraeva, ſupponendo la figurata unità diverſa da un milioneſimo. Queſto ſolo era di troppo per conoſcere l' erroneità del ſuppoſto, onde ſenz' altro mi ſono rivolto alla ſeconda maniera, e per eſſa mi è riuſcito di determinare le unità confaccenti, nè altro più mi è reſtato da fare, ſe non che ſperimentando, aſſicurarmi ſe le note paſſioni di queſti ſpazj confrontavano colla mia formola.

Num. 180. E quanto alla propoſizione poco fa ſteſa al *Numero* 174., ſcoperta già *da l' Hôpital*, queſta pure conſegue facilmente, e libera da errore da quanto ora ho ſtabilito. Sia $bb . aa :: 1 . n$; Suppoſto a maggiore di b, reſta paleſe, che n dee eſſere maggiore dell' unità. La AO [*Figura* 10.] nella iperbola maggiore ſia denominata dal numero c. Queſta medeſima AO nella iperbola minore ſarà eſpreſſa dal numero nc, e certamente, ſuppoſto che aa ſia, per eſempio, triplo di bb, quella c, che nell'iperbola maggiore ſarà per eſempio 4, nella minore ſarà 12. unità della $bb.$, onde 3×4, cioè nc. Così ſe AC nell' iperbola maggiore ſarà denominata dal numero x, nella minore lo ſarà dal nnmero nx. Ciò premeſſo lo ſpazio $OQRH$ è $= AQRHI - AOHI$

$$= aa \times 1 + \frac{lx}{4341000} - aa \times 1 + \frac{lc}{4341000} = \frac{aa\, L\frac{x}{c}}{4341000}.$$

Lo ſpazio $OQXP$ è $= AQXVK - AOPVK$

$$= bb \times 1 + \frac{lnx}{4341000} - bb \times 1 + \frac{lnc}{4341000} = \frac{bb\, L\frac{nx}{nc}}{4341000},$$

e però i calcolati due ſpazj ſono anche qui fra loro come aa a $bb.$, con queſto vantaggio di più, che ſe voleſſimo levare nel Calcolo dell' iperbola maggiore lo ſpazio inſiſtente ſopra di Ac minore di IH, s' accorgeremmo allora dell' errore, perchè nelle preſenti calcolazioni, dovendo ſuſſiſtere l' analogia $bb . aa :: 1 . n$, e dovendo eſſere n maggiore dell' unità, e nel poſto caſo volendoſi aſſumere minore, giacchè Id è minore dell' unità rappreſentata per IH, vedremmo allora peder tempo ſopra di un caſo impoſibile, e repugnante, e ſchiveremmo l' errore, che ſenza un tal modo ci reſtava coperto. *Num.*

Num. 181. Dal *Num.* 169. ſiegue manifeſtamente, che l' aree compite di tutte quante queſte iperboli ſieno fra loro direttamente come le proprie podeſtà, poichè eſſendo tali aree compite le $aa \times 1 + \frac{laa}{4341000}$, e $bb \times 1 + \frac{lbb}{4341000}$, ed eſſendo nella propria Logoritmica laa, e lbb lo ſteſſo numero 4341000, reſta manifeſto ciò, che ho propoſto.

Dimoſtrerò queſta verità per altro modo. Si conſideri (*Figura* 10.) che la normale DT ſia condotta per l' eſtremo dell' aſſintoto AB dell' iperbola minore, onde AB ſia $= bb$, e ſiccome ſe il nnmero, che la eſpone in quest' iperbola ſia bb, il numero, che la eſporrà nella maggiore dovrà eſſere $\frac{aa}{n}$, ciò premeſſo, avendoſi già (*Num.* 180.) $CPSD$ ad $OHTD :: bb . aa$, ſe debba eſſer vero quanto ho propoſto, dovrà pur eſſere $AO\,PVK$ ad $AOHI + DTFE :: bb . aa$, giacchè la prima parte è quello, che manca a tutto lo ſpazio dell' iperbola minore, e la ſeconda alla maggiore. Dimoſtrerò dunque che tali parti ſono nell' aſſegnata ragione.

Il ſegmento $AOPVK$ ſarà $bb \times 1 + lnx$, il ſegmento poi $AOKI$ ſarà $aa \times 1 + lx$. Il ſegmento $DTEF$ ſarà $aa \times 1 + laa - aa \times 1 + l\frac{aa}{n}$, e la ſomma di queſti due ſegmenti, che è $aa + aalnx + aa + 2alx - aa - aal\frac{aa}{n}$, ſi riduce ad $aa + aalnx = aa \times 1 + lnx$, onde tali ſegmenti riſultano nell' aſſegnata ragione.

Num. 182. Ed ecco dato alla trovata formula quel finimento, che le occorreva per ſomminiſtrarci i valori aſſoluti di tutte queſte aree iperboliche intere, o parziali. Se ci piaccia di avere il valore dell' area di tutta l' iperbola ſteſa ſopra le proprie aſſintoti quanto mai ſtender ſi poſſa, egli è ſempre $aa \times 1 + \frac{l4341000}{4341000} = aa$

$\times 1 + \frac{66375898}{4341000} = aa \times 16 + \frac{630449}{2170500}$. Se ſi voglia qualunque porzione $AMIC$ (*Fig.* 10.), baſta fare AF ad AC :: 4341000 ad un quarto, e queſto ſarà il numero, il di cui Logoritmo dovrà prenderſi dalle Tavole, che però ſuppoſto che AC ſia per eſempio la quinta parte di tutta la AF, onde allora riſulterà $AC = 868200$, avremo il propoſto ſpazio $AMIC = aa \times 1 + \frac{59386198}{4341000}$ cioè $aa \times 14 + \frac{1476599}{2170500}$.

Num. 183. Dataci un iperbola, non ci è certamente data la lunghezza della ſua aſſintoto, e però non ci è obvio il poterci valere della ragione AF ad AC. Ci è però dato il lato $a = AD$ della podeſtà dell' iperbola, il quale è $\sqrt{4341000}$., che è pochiſſimo minore di $2083 + \frac{2111440498673 89}{4167013300000000}$. Se la Logoritmica auſiliaria aveſſe avuta la ſua ſottagente, che foſſe ſtata un numero quadrato, qui non incontraremmo queſta difficoltà delle incomenſurabili, e ſe eſſa Logoritmica auſiliaria foſſe ſtata più minuta, quale è quella, che per Logoritmo di 10 ha l' unità ſuſſeguita da 10 Zeri, avremo pure avute queſte calcolazioni più eſatte. Non eſſendomi mai capitate queſte ultime Tavole, per quanto io le abbia ricercate, mi è convenuto ſervirmi delle altre.

Quanto alla difficoltà delle incomenſurabili la leverò colla Geometria. Tiriſi una retta a piaccimento, e ſi divida in 4341000 parti uguali, ad eſſa retta ſi aggiunga una di dette parti uguali, e tutto queſto aggregato ſi divida per mezzo. Fatto centro in queſta metà, coll' intervallo della metà medeſima, ſi tiri ſopra tutta un mezzo cerchio. S' alzi poi al fine della prima parte una normale, che vada a terminarſi alla circonferenza. E' manifeſto, che queſta è $\sqrt{4341000}$, e però, per la nota proprietà del triangolo rettilineo, potrà ſempre trovarſi il numero

mero competente a qualunque aſciſſa di qualſivoglia di queſte iperboli relativamente al lato della ſua podeſtà, ed anche, ſe così piaccia, averſi tutta l' intera aſſintoto.

Num. 184. Io veggo beniſſimo, che le conſeguenze, che ſono andate venendo dalla mia formula, cioè che le aree dell' iperbola equilatera apolloniana, e le di lei aſſintoti ſieno finite, ſaranno, quali aeree fantaſie, ſtate guardate a prima viſta con ribrezzo da' Dotti, e probabilmente più da' non Dotti. Prego però li uni, e li altri a ſoſpendere il loro giudizio finchè abbia pubblicata l' Apendice della Sezione VI. della Seconda Parte di queſte mie Memorie. Non mi ſono ignote le dimoſtrazioni, che moſtrano tali aree, e tali aſſintoti eſſere iuſinite, e venero i dottiſſimi Autori delle medeſime. Darò i miei dubbj intorno a tali dimoſtrazioni nella nominata Apendice, e trattarò allora un pò più diffuſamente queſto argomento, e della quadratura generale degli ſpazj di qualunque iperbola. Per altro io non ho qui avuto per oggetto di ſtabilire queſte novità, nè ho queſto vano prurito di trar gloria dal farmi contro alla comune credenza. Ho unicamente avuto il buon animo di aprire nna ſtrada, per cui ſi giunga a poter trar utile dalle equazioni finali di que' Problemi, che rieſcono meſcolati di Logoritmi, vantaggio del quale finora la Matematica mancava, e mancherà ancora, ſe i miei tentativi ſieno ſtati fruſtranei. Mi è venuto per azzardo preſo per motivo di eſempio la quadratura di tali iperboli, Problema de' più obvj, che finiſcano in Logoritmi, ed applicatovi il metodo ritrovato, ne ſono venute le conſeguenze, che ho eſpoſte. Se da chi veramente amante la verità, e intendente di queſte coſe, elleno ſaranno giudicate fantaſie ſenza fondamento, io ben lontano di avermene a male, li prego, in punto maſſime di tanta importanza, a tener libera la Scienza Matematica da queſto errore, e a dar opera anch' eſſi al Metodo da me tentato. Pria però, che eſſi ne giudichino, mi permettano, che io loro eſponga, a difeſa delle mie fantaſie, due non lievi ragioni. La prima l' ho già accennata al *Num.* 167., ed è, che dovendo ſuſſiſter ſempre l' equazione *aa*

ne $aa = xy$ questa non può sussistere se x divenga Zero, perchè ne vien subito, che la costante aa debba passare dal essere al non essere, cosa certamente impossibile, nè giova per iscansare la difficoltà il pretendere, che allora y divenga infinita, laonde che sussista senza ripugnanza l'equazione $o = \frac{aa}{\infty}$, imperocchè, ciò non ostante, sussiste la medesima ripugnanza. In fatti tal equazione dà l' altra $o \times \infty = aa$. Ora egli è comun consenso de' Dotti, che l' infinito multiplicato per Zero fa Zero, e però supponga-si pure y infinita, che tanto e tanto sussiste lo stesso impossibile.

La seconda ragione si è, che essendo $\frac{aadx}{x}$ l' elemento certissimo dello spazio iperbolico u, io domando, o tale elemento è compito, onde è vera l' equazione $\frac{aalx}{x} = du$, o non è compito. Nel primo caso, ommesso ancora, che fra le x non possa mai esservene una, che sia minore dell' unità, perchè allora dovremmo avere avuto $u = \pm aalx$, ed omesso altresì, che se x fosse, o Zero, o infinita, tanto, e tanto lx sarebbe finito (*Num.* 122.), e però lo spazio intero iperbolico u, anche in questo caso sarebbe finito, e non giammai infinito, passo ad una riflessione più convincente. Possa dunque x essere una frazione minore dell' unità, e sia lo spazio iperbolico ad essa competente infinito. Certo è, che essa x all' andar crescendo, giugnerà ad essere l' unità, e all' ora avremo certamente $lx = l1 = o = u$. Mi si spieghi dunque, se si può farlo, come uno spazio infinito nell' andare vie più crescendo debba diventar Zero. Se poi l' integrale $aalx = u$ non era compita, mi si insegni come compirla, e provisi poi ciò, che dal compirla diversamente dal modo da me tenuto potrà ricavarsene. Prego i dotti, e sinceri Maestri a pesare queste verità prima di dare il loro giudizio, il quale sarà però sempre da me venerato, qualunque ei sia.

In tanto,

In tanto, per qualche quiete de' Principianti, dimostrerò, essendo facilissimo il farlo, che la somma di infiniti termini della serie armonica, la qual somma si tiene per indubbitato, che sia infinita, ben lontano, che sia tale, e grandemente minore di molti, e molti numeri assegnabili finiti.

E' visibile, che in qualunque termine di questa serie il denominatore è quel numero medesimo, che designa la moltitudine di tutti i termini, esso compreso, antecedenti. Così per esempio $\frac{1}{10}$ è il decimo termine nella serie, come lo indica il suo denominatore 10., laonde generalmente $\frac{1}{n}$ sarà il termine n della serie. E' altresì visibile, che la somma di tutti i termini antecedenti, compreso $\frac{1}{n}$ è grandemente minore del numero n, anzi quanto più n è grande, tanto più rispetto ad n essa somma è piccola. Le calcolazioni opportunamente stese al *Num.* 172. ci hanno fatto vedere, che se n fosse il diecilionesimo termine, la somma di tutti i termini, esso compreso, non giugnerebbe alla piccol somma di 140., e che se n andasse ad essere il vintilionesimo termine, la nuova somma non sarebbe doppia dell' altra. Finalmente la serie armonica giugnerà ad avere la somma de' suoi termini infinita solamente nell' atto, che n giunga ad essere infinito, giacchè solo in tal atto, e non prima, il numero de' termini può essere infinito. Allora dunque (seguendo io qui le idee, che si hanno comunemente ne' Calcoli dell' infinito) il termine, che avrà n divenuto infinito per denominatore sarà nullo, e nella serie non si potranno più dare altri termini oltre di questo. E' al certo se si volesse pur fingere (e sarebbe senza fondamento), che se ne dassero degli altri, non gioverebbero, giacchè essendo nulli anch' essi, anzi se si può dir più che nulli, niente aumenterebbero la somma della serie armonica, ancorchè per altre infinità di termini si andasse proseguendo. Premesse queste palpabili verità, non fondate sopra postulati, che possono essere non accetabili, resta

senz'

ſenz' altro paleſe, che nell' atto, che n arriva ad eſsere infinito, allora ſaranno poſti tutti i termini, che nella ſerie ſi poſsono porre, nè ulteriormente altri porre ſe ne potranno, e ſiccome la ſomma è ſempre grandemente minore di n, e da n ſempre più, e ſterminatamente ſi ſcoſta, quanto più n ſi fa maggiore, e fra n divenuto infinito, e la ſomma di tutti i ſuoi termini antecedenti, e di tutti i denominatori altresì antecedenti, ſono numeri tutti finiti, e una maſſima parte di queſti tutti ſono maggiori della ſomma degl' infiniti termini della ſerie, ſi fa chiaro, che queſta ſomma è ben lontano dall' eſsere infinita. Se il diecilioneſimo termine eſso foſse quello, che diviene infinito, eſsendo la ſomma di tutti queſti termini circa 140., e come la potremmo pretendere infinita, ſe ella è minore di tutti i numeri finiti, che ſtanno fra 140, e un diecilione. E ſe il centovilioneſimo termine eſso foſſe quello, che diviene infinito, e come potrebbe eſsere infinito il Numero 180, che ſarebbe più della ſomma di que' tanti termini della ſerie?

Ma vi ſarebbe anche di più, ſe n non poteſse mai divenire infinito (e che egli poſsa divenir tale biſognerebbe pure rigoroſamente provarlo), tanto più allora ceſserebbe ogni pruova, che la ſomma della ſerie armonica poteſſe mai eſsere infinita.

Num. 185. Ritornando ora alla maniera di trar utile dalle ſoluzioni de' Problemi, che finiſcono in Logoritmi, mi ſi permetta, che io azzardi qui un mio penſiere, circa alla cagione per cui neceſsariamente ſi dieno Problemi, che co' Logoritmi ſieno meſcolati. Le coſe da me dette moſtrano, che il Calcolo differenziale non può applicarſi ſe non che a' Problemi indeterminati, cioè a quelli, che hanno due, o più variabili. (*Num.* 40.) Certo è che le variabili di un Problema debbono eſsere omogonee nel riguardo, in cui entrano a comporlo, giacchè le coſe eterogenee comparar non ſi poſsono. Le variabili pertanto poſsono eſsere variabili in due maniere: Una è ſe per eſempio due quantità concrete, o due diſcrete eſse ſieno aſsolutamente variabili. L' altra è, ſe in due quantità concrete una ſia

ſia aſsolutamente variabile, e l' altra ſia aſsolutamente coſtante, ma ſia reſa variabile pel ſuo coefficiente numerico, che ſia eſso variabile. Queſto a mio credere è uno de' caſi, nel quale neceſsariamente intervengono i Logoritmi. La quadratura della propoſta iperbola è di queſta fatta. Lo ſpazio n è una quantità aſsoluta variabile, e concreta: la ſua omogenea è l' aſsoluta coſtante aa anch' eſsa concreta, ma reſa variabile pel coefficiente numerico $1 + \frac{lx}{4341000}$, che e ſempre variabile al variarſi della x, porzione variabile della aa. Quindi parmi che (almeno per ciò che riguarda la ſoluzione di queſti Problemi) i Logoritmi ſieno variabili di una quantità numerica, e però, che la natura delle loro differenziali ſia diverſa da quella delle differenziali della quantità concreta anche per queſto capo, laonde che ſempre più debba ſuſſiſtere la diſtinzione, che io ho poſta fra queſte due maniere di differenziali.

Num. 186. Sbrigatomi dalle quadrature di queſti ſpazj iperbolici, gioverà riprendere l' altro Problema propoſto già al *Num.* 157., cioè l' equazione $e = aa\, L\frac{n}{z}$, che ivi cambiamo bensì nell' altra $n^{\frac{e}{aa}} z = x$, ma fin o allora ſenza poter avere l' aſſoluto ſpazio iperbolico $CBED$ [*Fig. 6.*] che cercavamo. Stava la difficoltà nel ritrovare la Logoritmica confaccente per avere in queſta la n, tale che foſse $ln = 1$. Quanto alla logoritmica confaccente eſſendo il propoſto Problema attinente alle quadrature di queſti ſpazj iperbolici, egli ha per ſua Logoritmica confaccente la medeſima, che per eſſi ſi è ritrovata, onde tale, che ha la ſua ſottangente, che ſta alla ſottangente della preſa auſiliaria, come uno a 4341000. (*Num.* 170.) Occorre per tanto per trar utile da queſte coſe ſciorre il ſeguente Problema.

Proble-

Problema.

Num. 187. *Sia data* (Figura 8.) *la Logoritmica* s a, *e la ſua ſottangente* i b. *Sia data in oltre l' altra Logoritmica* S A, *e la ſua ſottangente* I B., *e ſieno* P s. P S *per l' origine uguali, trovare per mezzo della ſeconda nella prima Logoritmica* s a *l' ordinata* d c, *che abbia per logoritmo il dato logoritmo* P d.

SUll' aſſe *PB* della logoritmica *SA* ſi ponga *PH* = *Pd*. Facciaſi *ib*. *IB*:: *PH*. *PD*., Facciaſi *dc* = *DC*: ſarà *dc* la cercata nella logoritmica *sa*. Imperocchè eſſendo ora *dc* = *DC*, ſe *PD* è il logoritmo di *DC*, così *Pd* ſarà il logoritmo di *dc* (*Num.* 161.) giacchè ſta *IB*. *ib* :: *PD*. *PH* (*Pd*) per la coſtruzione.

Num. 188. Ciò premeſſo troveremo nella logoritmica confaccente l' ordinata *n*, che abbia per ſuo logoritmo *Pd* = all'unità. Eſsendo dunque *ib* [1] *IB* [4341000] :: *PH* (*Pd*, che qui ſi vuole che ſia l' unità) a *PD*., queſto ſarà = 4341000, la di cui ordinata nella medeſima logoritmica auſiliaria è un poco minore di $4317417\frac{1139417}{1589000}$ = $2+\frac{1139417}{1589000}$., e queſto è il numero *n*, che nella logoritmica confaccente ha il ſuo logoritmo uguale ad uno. Ripigliando dunque il detto, e i ſuppoſti dal *Numero* 158., avremo $n^2 a = x$, onde $x = \frac{1864008955 1889}{2524921000000} \times a = a \times 7 + \frac{955642551889}{2524921000000}$, e però, ſe vogliaſi un ſegmento della propoſta iperbola, che ſtia ſu di *CB* (*Figura 6.*] lato della ſua podeſtà, e ſtendaſi verſo *Q*, e debba queſto eſser doppio del quadrato *AB* della medeſima podeſtà, dovrà la *AD* = *x* eſser lunga ſette volte la *AC*, ed in oltre quanto importa il ſuddetto rotto.

Sarà

Sarà opportuno vedere ſe colla formola del *Num.* 169., allorchè la *AD* ſia quale ſi è ritrovata, ne rivenga il ſegmento *CBED*, che ſia doppio del quadrato *AB*. Per eſſa formola ſi aurà eſso ſegmento = $aa + \frac{aalx}{4341000} - aa - \frac{aala}{4341000}$, onde = $aaL\frac{x}{a}$, e comechè *x* è = $\frac{1864008955 1889}{2524921000900} \times a$, ſarà eſſo ſegmento $\frac{aa}{4341000} \times L\frac{1864008955 1889}{2524921000000}$, e giacchè tale Logoritmo riſulta $8681981+\frac{8156349481}{1000000000}$, diviſo queſto numero per 4341000, ne viene per quoziente un numero inſenſibilmente minore di 1, e procede il tenue divario dal non eſſerſi potuto trovare il numero eſatto competente al Logoritmo di 4341000.

Se per la medeſima formola aveſſimo voluto coſtruire l' equazione $c = aaL\frac{x}{z}$, faciliſſimo ſi ſarebbe ſtato. Sia nuovamente $c = 2aa$, e $z = a$, ed *x* ſi eſprima per un multiplice, o ſubmultiplice di *a*, onde per *ax*: Cambieraſſi la data equazione in $2 = \frac{lx}{4341000}$, e però avremo $8682000 = lx$; Il numero dunque competente nell' auſiliaria al Logoritmo 8682000 ſarà *x*, che denoterà quante lunghezze *a* (*AC*) debba eſſere lunga la *AD*. perchè il ſegmento *CBED* ſia doppio del quadrato *AD*. Il numero competente a tal Logoritmo ſi trova eſſere $7+\frac{303629}{794500}$, che è proſſimamente lo ſteſſo numero ritrovato per altro modo, e cagione della tenue diverſità è il non poterſi avere eſatti i numeri corrispondenti a' trovati Logoritmi.

Nella propoſta del preſente Problema è da avvertire ad una reſtrizione, che egli ha. Potrebbe lo ſpazio $CBED$, che ſi domanda volerſi o talmente grande, o poſto ſopra di un ordinata talmente vicina a Q, che egli ſuperaſſe la porzione di iperbola, che reſta oltre l' ordinata aſſignata. In tal caſo riſulterà tutta l' aſciſſa maggiore di 4341000, e queſto contraſegno moſtrerà, che il Problema è ſtato propoſto in termini impoſſibili.

Num. 189. I replicati confronti, che ho deſcritti, e ricavati dalla mia formola mettono in me un aſſai fondata perſuaſione della verità della medeſima, e del mio Metodo. Queſta perſuaſione mi ſi accreſce dallo ſperimento ſeguente. Ho ſuppoſto (*Fig.* 6.) che AD ſia quattro volte la AC, laonde il ſegmento $BCED$, che riſulta $\frac{aal4}{4341000}$ $= aa \times \frac{6020600}{4341000}$, viene a riuſcire $\frac{30103}{21705}$ di aa.

Ciò trovato ho ſcelto un foglio di carta unito, ed uguale, e colla maggiore poſſibile diligenza vi ho delineata ſopra un iperbola equilatera. Ho tagliato fuori da queſta il quadrato AB, ed il ſegmento $CBED$. Con un eſatta bilancia ho peſato l' uno, e l' altro, ed ho trovato il peſo del ſegmento parti 307., e il quadrato 212. di eſſe parti. Queſte parti ſono trentadueſimi di un grano. E' dunque riuſcito il ſegmento più grave di quello che porta il calcolo ſolo di quattro trenta dueſimi di grano, differenza imputabile alla diſuguaglianza della carta, e forſe più alla difficoltà di deſcriver giuſto, e tagliar fuori perfettamente un iperbola equilatera.

Num. 190. Oltre alla quadratura della prima iperbola, vediamo ancora di rettificare la prima parabola $ax = yy$, liberando ſimilmente la ſua equazione finale da' Logoritmi.

L' elemento BL dell'arco AB (*Fig.* 2.) è $x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx\sqrt{a+4x}}{2}$, e l' integrale di queſto elemento ſi moſtrerà [*Num.* 262.]

eſſere $n = \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{a+4x}}{2} + \frac{a}{8} L \frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}}$, e queſta equazione è completa a riſerva del ſuo eſſere Logoritmico. Ridotta dunque alla forma $g\,L\frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}} = \frac{8n}{a} - \frac{4\sqrt{x}\sqrt{a+4x}}{a}$, reſterà da determinarſi g. Oſſervando la forma di queſto Logoritmo veggo [ſecondo ciò, che ſi notò a i *Numeri* 126., e 133.], che ſtando $\sqrt{a+4x} - 2\sqrt{x}$, non può $2\sqrt{x}$, creſcendo, giugnere ad uguagliare la $\sqrt{a+4x}$. Ponghiamo dunque che $\frac{a}{n}$ (n denota un numero indeterminato) ſia quel minimo eccеſſo per cui la $2\sqrt{x}$ ſi rimane finalmente minore dell' altra parte. Laonde abbiaſi l' equazione $\frac{a}{n} = \sqrt{a+4x} - 2\sqrt{x}$. Queſta $\frac{a}{n}$ ſarà pur anche uguale alla minima x, che in queſto Problema, in riguardo ad a, aver ſi poſſa (per ora mi ſpiego così, ma nell' Apendice della VI. Sezione della ſeconda Parte mi ſpiegherò più intelligibilmente) laonde nella poſta equazione dovrà altresì porſi $\frac{a}{n}$ invece di x, e però ella diverrà $\frac{a}{n} = \frac{\sqrt{an+4a}}{\sqrt{n}} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$, e dividendo tutto per $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}}$ ci riſulta $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n+4} - 2$. Trattandoſi per tanto di avere da queſta equazione la ſola eſpreſſione di a quando n ſia noto, può metterſi per n qualunque numero, che ci comodi, laonde per comodo appunto della ſoluzione, porrò per n un numero, al quale aggiunto 4, dia numero quadrato. Suppoſto dunque $n = 5$ avremo

mo $\sqrt{n+4} = 3$. e però $\sqrt{a} - 2 = 1$. laonde $a = 5$. Risulta dunque, che quando n sia $= 5$, anche a dovrà essere $= 5$., e la minima $x = 1$. Se avessimo posto $n = 12$, onde $\sqrt{n+4} = 4$, avremo avuto $\sqrt{a} - 2 = 4$, e però $a = 48$., e la minima $x = 4$, e così potiamo trovare quante altre di queste determinazioni ne piaccia.

Fatta la determinazione, che ci farà in grado, osservo in appresso essere proprietà generale di tutte le curve AB, [*Figura* 1.] che sono concave verso l' asse, che la retta AB, la quale sottende qualunque di lei arco AB, che cominci dal vertice A, si esprime generalmente per $\sqrt{xx+yy}$, laonde, nel particolare della parabola, tale sottesa sarà $\sqrt{xx+ax}$. Quando questa sottesa sia quella minima, che esser può mai, ella diviene uguale al primo piccolissimo lato della medesima curva cnnsiderata come un poligono, e detto allora b questo lato, avremo $b = \sqrt{xx+ax}$, supposta x la minima possibile del Problema. E comechè questa minima si è trovata nella prima determinazione [alla quale nel presente calcolo io mi terrò] $= 1$., ed $a = 5$, avremo $b = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$.

Ripresa ora l' equazione $g\ L \frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}} = \frac{8n}{a} - 4\frac{\sqrt{x}\sqrt{a+4x}}{n}$, e sostituendo $\sqrt{6}$ in vece di n., ed 1 in vece di x, ci risulterà $g = 8\frac{\sqrt{6}-12}{5\,l\,5}$. $= 8\frac{\sqrt{6}-12}{34948500}$. Il Numero 34948500 è $5\,l\,5$., e l' equa-

l' equazione affatto compita per la rettificazione dell' arco della prima parabola cominciante dal vertice sarà $n = \frac{\sqrt{x}\sqrt{a+4x}+a}{2} \times \frac{2\sqrt{6}-3}{6989700} \times L \frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}}$;

E perchè $\sqrt{6}$ è prossimamente $\frac{244065}{100000}$, si avrà ancora prossimamente $n = \frac{\sqrt{x}\sqrt{a+4x}}{2} + \frac{6271}{23299000000000} \times a\ L \frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}}$. Supponiamo che x sia tre delle cinque parti di a, onde $x = \frac{3a}{5}$, avremo $n = \frac{3a}{5}\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{6271}{23299000000000} \times a\ L \frac{\sqrt{3}\,5+2}{\sqrt{3}\,5-2}$,

ed essendo $\sqrt{5}$ prossimamente $\frac{223607}{100000}$, avremo $3\sqrt{5} + 2 = \frac{870821}{100000}$, e $3\sqrt{5} - 2 = \frac{470821}{100000}$, onde risulta $L \frac{870821}{470821}$, che è $2670730 + \frac{17}{100}$., ed avendosi ancora prossimamente $\sqrt{3} = \frac{173205}{100000}$, e però $\frac{3a}{5}\frac{\sqrt{3}}{5} = a \times \frac{103923}{100000}$, ne viene finalmente $n = a \times \frac{103923}{100000} + \frac{167481489607}{23290000000000} = a \times \frac{4095181569607}{2239000000000}$.

Num.

Num. 191. Prima di terminare questa ormai troppo lunga Apendice, giudico necessario per meglio illuminare questo argomento, stendere un altro esempio. Propongasi di ritrovare una logoritmica *AGS* (*Figura* 8.), le ordinate *HG* della quale essendo $\sqrt{aa+xx}$, le di loro corrispondenti ascisse *PH* sieno x. Somministra dunque questo Problema l' equazione $x = l\sqrt{aa+xx}$, la quale equazione compita che sia non può non essere $x = \frac{1}{2} L \frac{aa+xx}{a}$, giacchè (*Num.* 125.) la x in questo caso dee potere divenir Zero. La condizione per ritrovare per mezzo di un ausiliaria la sottangente s di questa logoritmica, e conseguentemente essa medesima è obvia dalla data equazione, mentre supposta x uguale a qualsivoglia quantità nota b, avremo $b = \frac{1}{2} L \frac{aa+bb}{a}$, che può dirsi lf. Fatto per tanto, secondo il *Numero* 165., lf (preso ora dall' ausiliaria), $a\,b$, così S ad s, troveremo la cercata sottangente $s = \frac{bS}{lf}$, onde ci parrà di avere determinata la logoritmica, che ci è stata richiesta. Anderemo però errati, ma non già per mancanza del metodo, ma perchè il proposto Problema è di sua natura impossibile, essendo veramente impossibile che si dia una logoritmica, la quale avendo per ordinata $\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$, abbia x per suo Logoritmo. In fatti, suppongasi per esempio $x = 10 = b$, ed a qualsivoglia altro numero per esempio 5.; avremo dunque la proposta equazione mutata in $10 = L\sqrt{\frac{125}{5}} = l\sqrt{5} = lf$, e supposto $S = 4341000$, sottangente della logoritmica delle Tavole, ci risulterà $s = \frac{10 \times 4341000}{3494850}$, giacchè

giacchè 3494850 è nelle Tavole il $l\sqrt{5}$. Supponiamo nuovamente $x = 15$, avremo allora la proposta equazione cambiata in $15 = l\frac{250}{5} = l\sqrt{10} = lf$ onde $s = \frac{15 \times 4341000}{5000000}$. Queste supposte sottangenti della medesima logoritmica sono visibilmente fra di loro diverse, cosa che ad una logoritmica accader non può, laonde abbiamo di qui un contrasegno infallibile del non potersi dare una logoritmica, che abbia la supposta condizione, a quel modo medesimo, che una radice immaginaria è contrasegno del non potersi dare nelle proposte condizioni quel Problema, che va a finire in tale radice. Si dimostra pure generalmente, che la sottangente sopratrovata è variabile dalla forma medesima in cui è comparsa, mentre la quantità $\frac{bS}{lf}$ è veramente nel presente caso una quantità variabile, giacchè b è la medesima x del Problema, che non perciò ha diversa la propria variabilità.

Ma gioverà il ricavare dall' intrinseco della cosa medesima la cagione per cui ripugni il darsi la logoritmica, che si è proposta. E' proprietà immancabile della logoritmica, che le sue ordinate crescano con differenze sempre, e molto più grandi di quanto crescano le differenze delle proprie ascisse, le quali differenze sono sempre essenzialmente fra loro uguali. Nella proposta equazione $x = l\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$ ciò non può succedere, mentre x, che è l' ascissa, crescendo si accosta sempre, e poi sempre ad essere uguale alla $\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$, che è l' ordinata, ed ecco fatto palese il perchè la proposta equazione sia impossibile. Per la medesima cagione sono impossibili le equazioni $x = l$

$= l \sqrt{aa - xx}$, che completa è $l \frac{\sqrt{aa - xx}}{a}$, ed $x = l \sqrt{xx - aa}$, che completa è $a + 1 + l \sqrt{xx - aa}$. Questa completa si ottiene così. Quando x sia $= a + 1$ (*Num.* 127), allora $l \sqrt{xx - aa}$ è $= o$, e però riuscirà $a + 1\,[x] = q + o\,(l \sqrt{xx - aa})$, laonde come si è proposto, $q = a + 1$.

Le cose qui stese, e serviranno opportunamente al loro luogo, ci fanno conoscere, potersi alle volte ottenere finali equazioni de' Problemi, i quali, parendoci sciolti perfettamente, non lo sieno. La sottangente variante della trovata, o supposta logoritmica può essercene un sicuro indizio. Altre volte s' incontrano logoritmi immaginarj. Altri contrasegni avere si possono. Ma perchè l' argomento di questa Apendice, cresciutami ormai di troppo, richiederebbe un non piccol trattato, nè io ho qui nè tempo nè pensiere di soddisfarvi, mi contenterò di aver solo accennato, e di passaggio le poche cose, che la compongono, e ciò per utile de' Principianti, e per la necessità di tali notizie nell' argomento del Calcolo integrale, per l' intelligenza, ed util pratica del qnale ho intrapreso di stendere queste memorie.

Del Calcolo Differenziale

SEZIONE IV.

Delle cognizioni, che il Calcolo Differenziale da se solo ci somministra.

Num. 192. Si è veduto (*Num.* 84.) come trovata la differenziale dell' area della Parabola, per mezzo poi del Calcolo integrale giugnevasi ad avere nota l' area della Parabola medesima. Simili esempj si sono dati susseguentemente di altri Problemi. Senza però l' ajuto del Calcolo inte-

integrale, non mancano le quantità differenziali di darci da se medesime bellissime cognizioni, e di queste precisamente nella presente Sezione toccherò qualche cosa, e sol quanto basta per formare una distinta idea della maniera diversa, colla quale questi Calcoli ci portano a godere di tali vantaggi.

Ripiglisi dunque il detto al *Num.* 95., e giacchè il piccol triangolo *Geg* (*Figura* 3.) è simile al triangolo *HBG*, se nomineremo *S* la sottangente *BH*, avremo in ogni curva $ge\,(dy).\ eG\,(dx) :: GB\,(y)\ BH.\ [S.]$, laonde generalmente $S = \frac{ydx}{dy}$. Che però se vorremo trovare la sottangente di qualsivoglia curva in particolare, basta dall' equazione particolare della curva, e dalla sua equazione differenziale ricavare y, e dy, e sostituire le uguali di queste nella premessa formula. Per tal modo ci resterà $\frac{ydx}{dy}$ in sole x e costanti, e libera da dx, e dy, laonde otteremo la grandezza, che aver dovrà la sottangente x, espressa per sole quantità assolute.

Sia per esempiò da ritrovare la sottangente della Parabola esposta per $px = yy$. Comechè $y = \sqrt{px}$, e però $dy = \frac{dx\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$, fatte le sostituzioni, e riduzioni, avremo $S = 2x$, notizia comune nella geometria ordinaria, ma che col Calcolo differenziale si ha come semplice corollario di una generalissima proposizione, e con incomparabile facilità. Anzi se assumeremo l' equazione $fx^n + gy^m + bx^r y^s + a = o$, dalla quale equazione si esprime generalmente la natura di tutte quante le curve possibili geometriche, mutando opportunamente i segni, e determinando gli esponenti, potremo avere la formula generale in termini assoluti della sottangente di qnalsivoglia curva, giacchè differenziando la proposta equazione, e se-

parando, traeſi. $\frac{dx}{dy} = -\frac{ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}}{mfx^{m-1} + rhy^s x^{r-1}}$, e ſo-

ſtituita nella $\frac{ydx}{dy}$ ſi avrà $S = \frac{-ngy^n - shx^r y^s}{mfx^{m-1} + rhy^s x^{r-1}}$,

nella quale equazione generale, per renderla particolare ad una curva data, altro più non reſta da farſi, ſe non che ſoſtituire la y in x, e coſtanti preſa dall' equazione particolare di eſſa curva.

Accade alle volte che trovata l' equazione aſſoluta, che eſprimerò per $S = \frac{b}{c}$, nella quale ſuppoſto tanto b, quanto c eſſere quantità fatte di coſtanti, e di x, e che S uguagli la frazione fatta da tali quantità, accade dico, che nel determinare la x, onde abbiaſi un tale determinato punto della curva, alla quale, e dal quale ſi vuol tirare la tangente, tanto il numeratore, quanto il denominatore di eſſa frazione divengono uguali a Zero, onde manca allora la notizia della cercata ſottangente pel dato punto. In tal caſo, differenziata già l' equazione della propoſta curva, e per la quale differenziazione ſi era ottenuta in termini aſſoluti l' uguale alla frazione $\frac{dx}{dy}$, deeſi eſſa differenziale differenziar di nuovo, come moſtrerò nella Sezione ſeguente, e ſoſtituendo in queſta differenziale in vece di x, e di y i loro valori pel punto ricercato, e ſeparati i ddx, ddy, vedere, ſe il membro $= \frac{dx}{dy}$ ſia per anche Zero. Se non ſia Zero, queſta differenziazione baſterà per darci la cercata ſottangente pel dato punto, ma ſe ſia Zero è d' uopo paſſare alla terza differenziazione, e fare le medeſime ſoſtituzioni, e ſeparazioni, e non baſtando, biſogna paſſare alla quarta, e così di ſeguito, finchè ſi venga a ſchivare il Zero. Non accade, che qui io ſpieghi la cagione di tale accidente, nè che mi diffonda in eſempj. Pe' Principianti arriſchierei di non eſſere inteſo. Pe' Dotti ſarebbe ſuperfluo. Sarà però bene,

che

che i primi a ſuo tempo ne intendano la ragione, la quale è eſpoſta da varj Autori, ma ſegnatamente, e da Maeſtro da *Monſieur Saurin* nelle dottiſſime Memorie dell' Accademia di Parigi del 1716., ed altrove.

Num. 193. Se voleſſimo ſapere la lunghezza AH intercetta fralla tangente, ed il vertice della curva, è viſibile eſprimerſi queſta per $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$.

Num. 194. La ſimililudine de' triangoli Geg. GBF, ci dà $dx.\ dy :: y.\ BF = \frac{ydy}{dx}$, e queſta è la formula generale per trovare la ſuperpendicolare BF.

Num. 195. La medeſima ſimilitudine allorchè l'angolo e è retto, ci dà altresì $dx.\ \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y.\ GF = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, e queſta è la formula generale per trovare la perpendicolare alla curva in G. Dalle tre ſovrapoſte formule, mediante la ſoſtituzione delle differenziali, e variabili da prenderſi dalle equazioni particolari, come ſi è fatto (*Num.* 192.) poſſono averſi le aſſolnte quantità eſprimenti le cercate linee.

Num. 196. Ho riferite qui queſte poche coſe intorno a' vantaggi, che da ſe medeſime danno le differenziali, perchè ſcoperto il lume a' Principianti, poſſano renderſene richi, legendo i dottiſſimi Autori, che di propoſito ne hanno trattato. Va avanti a tutti il Marcheſe de l' *Hôpital* nell' incomparabil ſuo Libro de l' *Analyſe des infiniments petits*, a cui ſi accompagna il *Varignon* co' *Riſchiaramenti* da eſſo fatti ſopra un tal Libro. Dopo queſti ſeguono altri chiariſſimi Autori. Fra queſti non laſcino il dottiſſimo *P. Reyneau*. Queſti Autori dunque dovranno eſſer letti a ſuo tempo da' Principianti, e vi vedranno le regole generali per ritrovare i maſſimi, ed i minimi, i centri di gravità, di percoſſa, e di oſcillazione, ed altre regole generali, le quali tutte col ſolo puro Calcolo dif-

ferenziale, ci somministrano per mezzo di quantità assolute la soluzione di un infinità di Problemi.

Solamente mi restringerò a fare una riflessione intorno al perchè in tutti gli enumerati, e simili argomenti il Calcolo differenziale dia da se solo le ennunziate notizie. E' facilissimo ravvisare, che quando, per esempio, cerchiamo la sottangente S, e così è da dire delle altre ricerche, non si pretende già di avere precisamente l' espressione differenziale di essa sottangente, il che se si cerchasse, allora essa non potrebbe già ritrovarsi in termini assoluti, se non coll' opera del Calcolo integrale. Si considera dunque essere la sottangente S il quarto termine di una proporzione geometrica, e comechè i due primi termini di questa proporzione, essendo amendue multiplicati per dx, passano in quantità assolute, quindi è, che essendo il terzo termine grandezza meramente assoluta, tale pure debbe esserlo il quarto, che si ricercha. Quindi è che quando le quantità differenziali possono compire le ricerche, le quali si fanno per loro mezzo, senza che a compirle altro vi intervenga, che proporzione, e che la ragione fatta da' termini differenziali possa passare in ragione assoluta, tali ricerche hanno il loro compimento senza bisogno veruno del Calcolo integrale.

Del Calcolo Differenziale

SEZIONE V.

Delle Differenziali, che oltreppassano il primo grado.

Num. 197. Spiegato il nascimento delle differenziali di primo grado, le diverse maniere, e la certezza di ritrovarle, ed accennata piccol parte di que' vantaggi, che ci compartono, debbo pur dire succintamente molte delle cose medesime in proposito delle differenziali, che superano il prmo grado, e salgono a' gradi superiori. Mostrai già [*Num.* 19., e 20.] la verissima esistenza di queste differenziali

renziali, onde di loro solamente mi resta a parlare per quanto importa la maniera di ritrovarle, e di notare qualche d' uno di que' vantaggi, che ci somministrano.

Quanto al ritrovare queste differenziali, se parliamo di quelle, che per via aritmetica si ritrovano, (giacchè anche per queste differenziali procede la medesima distinzione avvertita in quelle di primo grado), niuna diversità dall' usato per le quantità assolute vi è in ritrovare queste differenziali, mentre in tal caso, le differenziali di primo grado onninamente consideransi come se anch' esse fossero allora variabili assolute. E così vuol ragione, perchè in tal caso niente da noi si bada che esse sieno, o nò i minimi accrescimenti delle variabili nel loro ordine, si bada solo a ritrovare i minimi accrescimenti di quelle differenziali considerate allora come pure variabili. Quindi è che la seconda differenza per esempio di xdx sarà $dx^2 + xddx$. La seconda differenza di $xdy + ydx$ sarà $2dxdy + xddy + yddx$, e in questi casi, tanto dx^2, quanto $dxdy$ non sono già nulli, nè da cancellarsi, perchè essi non nascono già in quella che si consideri, che niuna quantità dar si possa, che sia minore di dx, e dy. Restano bensì cancellate ne' premessi esempj, e non vi compariscono quelle quantità, le quali nell' ordine delle differenziali di secondo grado sarebbero minori di quelle, oltre le quali non è possibile, che se ne diano. Per meglio essere inteso riflettasi, che xdx è il prodotto di x in dx, laonde le variabili contigue di queste due quantità, che poi, per averne la differenziale, sono multiplicate insieme, sono $x+dx$, e $dx + ddx$, laonde la differenziale di xdx sarà il prodotto di esse due veriabili contigue purgato da ciò, che il Calcolo ci potrebbe dare di non dovuto, e scemato del prodotto xdx delle variabili primitive (*Num.* 32., e 33.) Il prodotto dunque delle due variabili contigue, secondo che il Calcolo lo esibisce è $xdx + dx^2 + xddx + dxddx$. Quest' ultimo membro non è, nè può essere, perchè minore di ddx, giacchè tanto dx, quanto ddx sono frazioni minori dell' unità. Il membro poi xdx è il prodotto delle variabili primitive, e però anch' esso da cancellarsi.

Laonde

Laonde reſta per la differenziale di xdx la già notata $dx^2 + xddx$. Quanto alla differenziale di $xdy + ydx$ ella è la ſomma de' prodotti di $x + dx$ in $dy + ddy$, e di $y + dy$ in $dx + ddx$, laonde ella ſi calcola $xdy + dxdy + dxddy + xddy + ydx + dxdy + yddx + dyddx$, la quale purgata, e ſcemata come ſi dee, reſta quale ſi è notata $2dxdy + xddy + yddx$.

Num. 198. Le differenziali dunque del grado antecedente, ſia eſſo o ſecondo, o terzo, o qualſivoglia, ſi conſiderino pure come quantità aſſolute, e le differenziali del dato grado, che ſi ricercano, ſi conſiderino eſſer eſſe le differenziali, e piglinſi al modo di già moſtrato, le differenziali ricercate, onde ſopra di ciò ſtimo ſuperfluo il dar qui una liſta, che ſerva per formarle, eſſendo facile non ſolo, ma utile a' Principianti, che eſſi ſe la formino da loro ſteſſi.

Num. 199. E' ben neceſſario di avertire, che quando le variabili propoſte da ritrovarſene la differenziale ſono un compoſto di diverſe variabili ſi uſa di ſupporre, che una delle differenziali, diſegnata da una delle dette variabili, ſia coſtante. Sia per eſempio data $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ da ritrovarſene la differenziale. Laſciando tutto variabile ella è $\frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; ma ſuppoſto per eſempio dx coſtante ella ſarà $\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, la qual ſuppoſizione ordinariamente ſi pratica.

Queſta ſuppoſizione agevola per lo più le fatiche del Calcolo, e la ſeparazione delle incognite, e tutto queſto ſenza levar niente della certezza, e verità del diſcorſo. Imperochè è bensì neceſſario, che paſſando in un Problema una delle variabili primitive ad eſſere la contigua, la ſua correſpondente paſſi anch' eſſa ad eſſere la ſua correſpondente contigua, e che perciò naſcano neceſsariamente le due

due differenziali, o aumenti, che abbiano fra di loro una determinata ragioue, ma non per queſto coſa alcuna vi è, che obblighi, che una delle differenziali, per eſempio dx, non ſia ſempre a ſe ſteſſa uguale. Potiamo beniſſimo intendere, che la variabile x nel Problema vada ella ſempre uniformemente creſcendo, nè ciò toglierà, che non creſca, o non cali ſempre la correſpondente y, ſerbando ferma la relazione, che aver debbono fra di loro le variabili in qualunque ſtato ſieno paſſate, ſalvandoſi la qual condizione, ſi ſalva tutto quello, che è neceſſario. Quindi è, che utiliſſimo è l' uſo ſopravertito, intorno al quale due coſe ſole reſtano da notare. L' una è, che fiſſata che ſia per coſtante quella differenziale, che ſi è giudicata più al caſo, è poi neceſſario di ſtar coerente a tale ſuppoſto. La ſeconda ſi è, che alle volte non è libero di far coſtante una piuttoſto delle differenziali, che l'altra. Se foſſe dato $\sqrt{dx^2 + dy^2} \times dxddy$ da ritrovarſene la differenziale, certamente il ſupporre dy coſtante ci farebbe ſcorgere che ddy, la quale è la differenziale di dy, ſarebbe Zero, laonde che tutta la propoſta quantità ſarebbe anch' eſſa Zero. E' dunque d' uopo riflettere, ſe il ſupporre coſtante una delle differenziali repugni alle condizioni del Problema, toltone il quale impedimento, ſarà allora da penſarſi ſolo alla maggiore facilità del Calcolo.

Num. 200. Quanto alle differenziali, che per via geometrica ſi ritrovano, dipendon queſte, e dalle abitudini delle figure, e di altre quantità, e naſcono per la ſteſſa maniera avvertita in propoſito delle differenziali geometriche di primo grado. Ameitono anch' eſſe, e con profitto, la ſuppoſizione, che una differenziale del grado antecedente ſia coſtante, adoperandovi però le dovute rifleſſioni.

Così pure ſuccede delle differenziali logoritmiche, quando paſſino il primo grado, laonde ſopra di queſte ricerche delle differenziali di grado ſuperiore al primo, non iſpenderò più tempo.

Bensì dirò brevemente qualche coſa de' vantaggi, che anch' elleno da ſe medeſime areccano. Nè parlo già del darci le

ci le equazioni finali di qualſivoglia grado inferiore al loro, ſuppoſto che elleno poſſano integrarſi; onde per tal via alla notizia delle equazioni aſſolute poſſa pervenirſi. Parlo preciſamente di que' vantaggi, che ſenza l' ajuto del Calcolo integrale eſſe ci ſomminiſtrano. Sono queſti il farci ritrovare nelle curve i loro punti di inflеſſione, e di ritorno, i raggi delle ſviluppate, e coſe ſimili. I Principianti potranno vedere queſte coſe ne' prelodati Autori, ed in tanto paſſerò alla Seconda Parte di queſte mie Memorie, nella quale per loro inſtruzione tratterò del Calcolo integrale, e ſpero, che ſia per farſi paleſe, che le coſe fin ora dette, e dette nell' ordine, che vi ho tenuto, non ſolo erano neceſſarie per inſtruire i Principianti nel Calcolo differenziale, ma ugualmente per promovere l' aumento tanto giovevole, e neceſſario del Calcolo integrale.

FINE DELLA PRIMA PARTE.

NOn avendo potuto l' Autore, obbligato a ſtare aſſente per lungo tempo, aſſiſtere alla ſtampa della preſente Edizione, ed eſſendo perciò ſcorſi in eſſa non pochi errori di conto; ſi pregano i corteſi Lettori a farne le opportune correzioni ſecondo la Liſta ſeguente, rimettendoſi pure alla corteſe loro diſcrezione il correggerne altri di minor conto, che in eſſa forſe incontreranno.

ERRORI.	*CORREZIONI,*
Pagina 8. linea 11. y	di y
pag. 13. l. 11. dy, du	$dy\,du$
pag. 13. l. 13. ſono	, e ſono
pag. 17. l. 5. $m-2$	$m-1$
pag. 17. l. 30. $y^m u^t \times^n$	$y^m u^t x^n$
pag. 18. l. 26. $t u^{-1} du$	$t u^{t-1} du$
pag. 20. l. 1. e	, e
pag. 23. l. 22. $\frac{u^{\frac{1}{r}}}{r}$	$\frac{u^{\frac{1-r}{r}}}{r}$
pag. 23. l. 22 $\sqrt[s]{fx^n+gy^t}$	$\sqrt[r]{fx^n+gy^t}$
pag. 24. l. 12. $\sqrt[r-1]{fx^n+gy^t+hz^t+\&c.}$	$\sqrt[r-2]{fx^n+gy^t+hz^t+\&c.}$
pag. 24. l. 21. $anq^{m-1}dq \times \sqrt[s]{bp^c+eb^i+\&c.} \times lzu \times \sqrt[r]{fx^2+gy^t+\&c.} + s\,aq^m \times \sqrt[s-1]{bp^c+eb^i+\&c.}$	$amq^{m-1}dq \times \sqrt[s]{bp^c+eb^i+\&c.} \times lzu \times \sqrt[r]{fxu+gy^t+\&c.} + lnz^{n-1}dz \times \sqrt[s]{fx^n+gy^t+\&c.} \times aq^m \times \sqrt[s]{bp^c+eb^i+\&c.}$
pag. 27. l. 21. $+fnx^{n-1}dx$	$\times fnx^{n-1}dx$
pag. 31. l. 8. L	l
pag. 31. l. 25. dalle rette	dalla retta
pag. 32. l. 10. da	in

ERRORI.		CORREZIONI.
pag. 32. l. 33.	parabula	parabola
pag. 36. l. 22.	$Bg + \frac{bg}{2}$	$Bg \times \frac{bg}{2}$
pag. 38. l. 17.	$+ \frac{du}{2a}$	$\pm \frac{du}{2}$ à
pag. 41. l. 11.	dx^2	$dz.^2$
pag. 41. l. 16.	$\frac{\overline{4pu+pf}^{\frac{3}{2}}}{12p}$	$\frac{\overline{4px+pf}^{\frac{3}{2}} - \sqrt{pf} \times p+}{12.}$
pag. 41. l. 18.	$x\frac{\sqrt{pf}}{2}$	$x^2\frac{\sqrt{pf}}{2}$
pag. 49. l. 6.	CB	CD
pag. 49. l. 7.	CB	CD
pag. 51. l. 12.	t	c
pag. 51. l. 30.	LCD	lCD
pag. 52. l. 8.	$-lb-lb$	ſi ometta
pag. 53. l. 26.	Qo	QO
pag. 53. l. 30.	avea o	area, o
pag. 56. l. 6.	aq	Aq
pag. 56. l. 10.	nel preſente	nel primo
pag. 56. l. 18.	$AB = c$	$AB = 1$
pag. 56. l. 32.	$- l$	$- b$
pag. 57. l. 11.	FO tale che bO	FH tale che bH
pag. 57. l. 24.	EH	GH
pag. 58. l. 25.	z^r	z
pag. 58. l. 26.	z^r	z
pag. 59. l. 17.	aN	AN
pag. 59. l. 19.	Bo	BO
pag. 59. l. 20.	$l\sqrt{a+4x}\,2\sqrt{x}$	$l\sqrt{a+x} - 2\sqrt{x}$
pag. 59. l. 24.	Aaq	$- Naq$
pag. 59. l. 28.	MBc	mBc
pag. 59. l. 29.	(*Fig.* 10.)	(*Fig.* 13.)
pag. 60. l. 24.	ordinate	ordinata
pag. 64. l. 10.	$\times \overline{fx^2+gy^2}^{r}$	$\times \overline{fx^n+gy^2}^{r-2}$

ERRORI.		CORREZIONI.
pag. 69. l. 14.	grandezza	pruova
pag. 69. l. 26.	ſvilate	ſguiſate
pag. 71. l. 16.	Date	Fatte
pag. 71. l. 27.	$far x^{n-1} dx$	$fnr x^{n-1} dx$
pag. 71. l. 30.	Mi è	Ha
pag. 73. l. 28.	$dut^n lu + nt^{n-1} dt$	$dut^n lt + nt^{n-1} dt$
pag. 75. l. 20.	della	dalla
pag. 75. l. 30.	Su	In
pag. 76. l. 4.	$- a + c l u$	$- a + c l n$
pag. 79. l. 23.	in qualche	con qualche
pag. 79. l. 28.	$\frac{4341001}{4341000} \Big\| \frac{2aa}{aa} \times 2$	$\frac{4341001}{4341000} \Big\| \frac{2aa}{aa} \times 2$
pag. 80. l. 5.	AB	AD
pag. 83. l. 2.	Su due	In due
pag. 83. l. 6.	bi [S]	bi [s]
pag. 84. l. 12.	$\frac{ab \times Mdu}{bi}$	$\frac{ab \times mdu}{bi}$
pag. 85. l. 18.	$= AB$	$= AD$
pag. 86. l. 8.	ſi ſcorga	ſi ſcorge
pag. 87. l. 32.	pigliaſi	pigliſi
pag. 88. l. 5.	ne è	ma è
pag. 88. l. 23.	$FEfe$	FE, fe
pag. 89. l. 15.	dimonſtrativamente	dimoſtrativamente
pag. 90. l. 35.	i lati	I lati
pag. 93. l. 6.	$x \overset{1}{=} 4341000$	$x \overset{L}{=} 434100$
pag. 101. l. 23.	ad	ed
pag. 108. l. 14.	$\frac{aalx}{x}$	$\frac{aadx}{x}$
pag. 111. l. 6.	concreta	concreta

DEL CALCOLO INTEGRALE

MEMORIE ANALITICHE

DI DOMENICO

DE' CORRADI

D' AUSTRIA

PATRIZIO MODENESE

Commeſſario Generale delle Munizioni da Guerra, e Colonnello del Reggimento di Artiglieria

DI SUA ALTEZZA SERENISSIMA

IL SIG. DUCA DI MODENA.

PARTE SECONDA.

IN MODENA,

Per Franceſco Torri)(1744.)(*Con licenza de' Superiori.*

TAVOLA

Delle Sezioni, e de' Capi della Seconda Parte.

DEL CALCOLO INTEGRALE. *Sezione Prima. Delle Differenziali, che contengono una ſola Variabile. Capo Primo. Delle Differenziali incompleſſe Aritmetiche.* Pag. 140

CAPO II. *Delle Differenziali di una ſola Variabile incompleſſe, e relative della prima claſſe.* Pag. 142

SEZIONE II. *Articolo Primo. De' Binomj differenziali Aritmetici, che contengono una ſola Variabile. Capo Primo. Del Metodo proveniente dalla conſiderazione, che eſſi Binomj ſieno ſtati formati.* Pag. 143

ARTICOLO II. *De' Binomj Differenziali Geometrici. Capo Primo. Della naſcita de' Binomj relativi della ſeconda Claſſe, che contengono una, o più Variabili, e loro Integrazione.* Pag. 167

ARTICOLO II. *Capo Secondo. Della Naſcita de' Binomj relativi della prima claſſe, che contengono una ſola Variabile, e loro integrazione, e parlaſi pure occaſionalmente de' loro Multinomj.* Pag. 189

ARTICOLO III. *De' Binomj Differenziali, tanto Aritmetici, che Relativi di una ſola Variabile. Del Metodo delle Trasformazioni.* Pag. 190

LISTA *delle Integrali de' Binomj ſcoperte nel preſente Tergo Articolo.* Pag. 213

ARTICOLO IV. *Degli ajuti, che dà la Geometria nelle Integrazioni de' Binomj di una ſola Variabile, ed occaſionalmente della Integrazione di alcuni Multinomj.* Pag. 226

SEZIONE III. Articolo unico. Dell' integrazione de' Binomj Compleſſi, ſi Aritmetici, che Geometrici. Pag. 161.

SEZIONE IV. Articoli primo De' Trinomj differenziali Aritmetici, che contengono una ſola variabile. Capo unico. Del metodo proveniente dalla conſiderazione come eſſi Trinomj ſiano ſtati formati. Pag. 188

ARTICOLO Secondo. De' Trinomj di una ſola Variabile, tanto Artmetici, che Geometrici. Capo unico. Del Metodo delle Trasformazioni. Pag. 305.

SEZIONE Quinta. Delle Differenziali, che contengono due, ed anche maggior numero di Variabili. Pag. 323.

SEZIONE Seſta. Della regola, e modi per rendere compiute le Integrali. Pag. 344.

APPENDICE. Nella quale, per occaſione delle preſenti Memorie, ſi tratta delle Quantità variabili, le quali decreſcendo al poſſibile vanno, o no, a terminare nel nulla, ed occaſionalmente pure ſi parla dell' Infinito, e in riguardo al produrſi alle volte da tali Variabili, e trattaviſi degli Spazj iperbolici di ogni genere. Pag. 368.

SUCCCNTE Memorie. Intorno alla Quadratura degli Spazj Iperbolici Aſſintotici Rettangoli di qualunque genere, così intieri, che parziali, e loro Settori. Pag. 391.

DEL-

PARTE SECONDA

Del Calcolo Integrale.

SCoperti ne'la Prima Parte di queſte mie Memorie i veri fonti, da' quali le Quantità Differenziali ſcaturiſcono, e moſtrata la reale, ed eſſenziale eſiſtenza, e la diverſità delle medeſime, onde colla loro certezza ho pure ſtabilita la pratica ſicura di calcolarle, ed accennata non poca parte di que' vantaggi, che eſſo Calcolo ci ſomminiſtra; tempo è ormai di paſſare a raccogliere più copioſi vantaggi, e di pregio maggiore Si ottengono queſti mediante il Calcolo Integrale, del quale ora a trattare mi accingo.

Sovvengaci addunque di quanto diſſi a' *Num.* 38., e 43. Moſtrai nel primo, che avendoſi un' equazione finale di un Problema indeterminato, può da eſſa ottenerſi, e ciò mediante il Calcolo Differenziale, un' altra equazione, che null' altro contenga, ſe non che le differenziali medeſime delle variabili, che ſono contigue alle variabili della propoſta equazione. Stabilii nel ſecondo, che tali differenziali, quanto agli Aritmetici, altro non ſono, riſpetto al calcolo, ſe non che il ſecondo termine reſpettivamente di un binomio eſprimente la variabile

bile contigua, ovvero il prodotto, o la ſomma d' eſſi ſecondi termini, come in tal luogo eſpreſſi, e quanto alle differenziali relative, ſono anch' eſſe, e lo moſtrai al *Num.* 140., una grandezza, che ſenza error veruno ci viene ſomminiſtrata dalla Geometria, e che altresì ſenza errore ſi calcola al modo ſteſſo, ma colle proprie avvertenze, dal Calcolo Integrale.

Queſto Calcolo dunque altro non ha per oggetto, ſe non che data un' equazione differenziale, ritrovare il primo termine di quel binomio, di cui la data equazione è il ſecondo termine, e per le relative ritrovare quella grandezza, che è la ſomma di quelle grandezze, una delle quali la Geometria con tutta certezza ci ha manifeſtato, e trovate queſte coſe, è poi per ſe manifeſto, che l' equazioni di tali due primi termini, o di tali due ſomme, è l' equazione medeſima delle due variabili primitive del propoſto problema, che per tale artifizio mediante il Calcolo Integrale viene ad eſſere ſciolto.

Il Calcolo dunque Integrale ci ſerve collo ſteſſo fondamento a riſalire dalle equazioni differenziali, tanto aritmetiche, quanto relative, alle equazioni finali delle variabili primitive, e ſolo procede nelle ſeconde con avvertenze diverſe dal procedere nelle prime. La Geometria però venendo alle volte in ſoccorſo del medeſimo Calcolo Integrale, ci rende più ampie le di lui ſcoperte: lo che ora come accada in qualche parte ſuccintamente accennerò, per iſpiegarne poi più diffuſamente le pratiche a' loro luoghi.

Accade pertanto alle volte, che un' equazione differenziale può dividerſi, e ne moſtrerò il come nella ſeguente prima ſezione, e come ſvilupparſi in varie parti. Alcune di queſte parti ſono integrabili, ed una ne reſta, che co' modi uſati per l' altre non può integrarſi, anzi niuna integrazione ſi avrebbe ſaputo ottenere delle nominate parti, ſe eſſe non ſi foſſero ſapute ſviluppare. Può però alle volte ſaperſi, e tal notizia per lo più è nell' ordine geometrico; ed ecco una delle maniere, per cui la Geometria ne ſoccorre, che le rimaſte differenziali, che integrar non ſappiamo, ſono la differenziale dell' arco di qualche curva, o dell' area, o di un ſolido, che noi poſſiamo aſſegnare determinatamente, qual ſarebbe per eſempio, ch' egli è la differenziale di un arco, o di un' area di un cerchio, di cui ſappiamo

ſappiamo aſſegnare e il raggio, e le coordinate. Quando la coſa così ſucceda, benchè integrar non ſappiamo tutte le parti, nelle quali ſi è ſviluppata tutta l' equazione differenziale, poſſiamo però dire, che la ſua integrale è quella, che ci viene compoſta dalle integrali delle parti integrabili, più, o meno l' area, o l' arco, ſeguendo il premeſſo eſempio, del tal cerchio, e determinato alla tale coordinata. Quando il Calcolo Integrale ſi riduce a queſto biſogno, è invalſo di dire, che egli perviene al ſuo intento mediante il *Metodo delle quadrature*. Per altri modi la Geometria ci da delle integrazioni e totalmente note, e non già ridotte, come le antecedenti, alle quadrature. Non è qui luogo di ſpiegarli, onde li ſerberò a' loro luoghi.

Le premeſſe pertanto pare a me, che ſieno le diſtinzioni più generali da farſi per ciò, che riguarda immediatamente i metodi pratici del Calcolo Integrale. Reſtano da farſi ancora le debite diſtinzioni per ciò, che riguarda la forma delle differenziali medeſime. Sono queſte compoſte o di una ſola variabile, o di più. Sono eſſe nell' uno, o nell' altro caſo, o compleſſe, o incompleſſe. Le Compleſſe hanno la forma o di Binomio, o di Trinomio, o di altro multinomio; e finalmente queſte medeſime forme poſſono eſſere o compleſſe, o incompleſſe.

Ma perchè ommiſi nella prima Parte di queſte mie Memorie la naſcita, e forma delle Differenziali relative della ſeconda claſſe, eſporrò queſto nella *Sezione II. al Capo I. dell' Articolo II.* S' intenderà allora, che io non poteva fare altramente. Hanno queſte per tal modo congiunta con eſſoloro la propria integrazione, che ove non aveva io impreſo di trattar d' altro, che del Calcolo Differenziale, troppo ſarebbe ſtato fuor di luogo il farne allora parola. Eſpoſta che l' avrò, proſeguirò a moſtrare come le Differenziali, che hanno una ſola variabile, in parecchj altri caſi ſi integrino. Per quelle, che ſono compoſte di due, o più variabili, ne farò parola nella *V. Sezione*. Per quelle dunque, che hanno una ſola variabile, porrò per ordine prima le incompleſſe, ed in ſeguito, paſſando alle compleſſe, ſeguirò co' Binomj. Parlerò indi de' Binomj compleſſi, e in quarto luogo tratterò de' Trinomj, e qui mi fermerò, ſupponendo, che le coſe, che avrò dette, ſieno per eſſere baſtevoli per chi voleſſe fare qualche utile ricerca delle integrazioni de' Multinomj ſuperiori

riori, i quali per altro rariſſimi capiteranno da integrare.

Queſta diviſione darà luogo a cinque diſtinte Sezioni; e perchè, trovate le Integrali, accade ſovente, che ad eſſe debbanſi aggiungere delle coſtanti, affinchè le trovate integrali formino veramente equazione, e quella preciſa delle variabili primitive del problema, darò nella *VI. Sezione* il metodo di ritrovare le opportune preciſe coſtanti. L' argomento di queſta VI. Sezione darà motivo ad un' Appendice, nella quale tratterò di quelle grandezze variabili, che decreſcendo poſſono, o non poſſono divenir zero. Dirò in eſſa qualche coſa dell' infinito, e degli ſpazj iperbolici aſſintotici di qualunque grado, ed in tale occaſione renderò più ſalde, ed intelligibili le coſe, che ho poſte nell' Appendice della *Sezione III. Capo IV.* del Calcolo differenziale.

I Metodi di approſſimazione ſono, come è noto, utiliſſimi nelle Matematiche. Coſa ſimile ſi pratica pure nel Calcolo Integrale per mezzo delle ſerie. Di queſto argomento, che a mio credere ha non poco di biſogno di eſſere più intimamente eſaminato per evtiar gli errori, ne' quali alle volte conduce, ſe avrò tempo, e vita, o ne compileròla ſettima Sezione, o lo differiò ad altro tempo.

Del Calcolo Integrale.

SEZIONE PRIMA.

Delle Differenziali, che contengono una ſola Variabile.

CAPO I.

Per le Differenziali Incompleſſe Aritmetiche.

Num. 101. SIccome nel formarſi le Differenziali incompleſſe Aritmetiche abbiamo veduto tutte le operazioni, che ha fatto il Calcolo per fare, che le equazioni primitive paſſino in equazioni differenziali; così il metodo più naturale per ottenere, che le equazioni differenziali ci reſtituiſcano le equazioni primitive, è certamente il disfare le operazioni, che fatte ſi erano differenziando. Così per l' appunto ſe ſapendo noi eſſere ſtata una grandezza a diviſa per un' altra b, onde ne è nato il quoziente $\frac{a}{b}$, ci veniſſe ingiunto di ritrovare da queſto quoziente la prima grandezza a, che fu diviſa; noi ſicuri di ottenere l' intento altro non faremo, che, multiplicando eſſo quoziente per la grandezza b, disfare quello, che la diviſione aveva fatto. La conſiderazione dunque del modo, con cui le equazioni primitive hanno ſomminiſtrate le equazioni differenziali aritmetiche, ci da meritamente il primo metodo, e in ſenſo di verità il fondamentale, con cui ritrovare aritmeticamente le equazioni primitive.

Siccome dunque allorchè ci fu data la variabile primitiva ax^m, per ottenere l' aumento, o decremento della variabile ſua contigua $amx^{m-1}dx$ (*Num.* 44.) fu eſſa multiplicata per l' eſponente m della variabile, e per la ſua differenza dx, e l' eſponente m di eſſa variabile fu ſcemato di una unità; così la regola generale per integrare una differenziale aritmetica incompleſſa $amx^{m-1}dx$, e fatta di una ſola variabile, ſarà *Di accreſcere un' unità all' eſponente della variabile propoſta, indi con queſto eſponente così accreſciuto, multiplicato per la differenza* dx, *dividere la propoſta differenziale*, ed il Quoziente ſarà la cercata Integrale. In fatti facendo le preſcritte operazioni, la propoſta differenziale ripiglia la forma ax^m, che era la variabile primitiva, da cui eſſa differenziale ſi ottenne. Così, ſe foſſe data generalmente la differenziale $px^m dx$, la ſua integrale ſarebbe $\frac{px^{m+1}}{m+1}$, e così d' ogn' altra differenziale di queſta forma.

L eſponente m può eſſere qualunque quantità, o numero intero, o rotto, poſitivo, o negativo, razionale, o irrazionale, purchè coſtante, e che non ſia -1. In queſto caſo troveremo l' integrale nella famiglia de' Logoritmi, come ſuſſeguentemente eſporrò.

Debbo in tanto prima ſoggiungere, che l' operazione qui fatta per ritrovare l' integrale della data differenziale, è quella medeſima, come è viſibile, che far dovremo, ſe dato il ſecondo termine di un binomio, voleſſimo con eſſo trovare il ſuo primo termine.

Capo

Capo Secondo.

Delle Differenziali di una ſola variabile incompleſſe, e relative della prima claſſe.

Num 202. VEdemmo già (*Num.* 120.) che dato qualſivoglia Logoritmo fatto da una variabile incompleſſa, per eſempio, glx^m, ſi ha la ſua differenziale, dividendo la differenza di eſſo per la medeſima ſua variabile a niuna dignità elevata [eſcludo qui l' unità] Quindi chiaramente ne naſce, che le differenziali incompleſſe di queſta fatta hanno neceſſariamente -1 per eſponente della loro variabile. Per ottener dunque le integrali di queſte differenziali, baſta *poſporre al coefficiente coſtante della data differenziale la caratteriſtica* 1, *ed a queſta la variabile medeſima ſenza altro eſponente, e cancellare la differenza.* Così della $\underset{x}{gmdx}$ l' integrale ſarà $gmlx = glx^m = lx^m g$.

Se ci piaceſſe di fingere integrata la medeſima differenziale col metodo aritmetico, come lo accennai al *Num.* 143., otterremo $\frac{gmx^{-1+1}\,dx}{-1+1} = \frac{gmx^0}{0}$, e tornerebbe il calcolo, ma immaginariamente, anche per queſto verſo, e alla trovata $\frac{gmx^0}{0}$ dovrebbe darſi l' uſitata forma $gmlx$.

Nella prima delle qui fatte operazioni non cerchiamo già di ottenere dalla data differenziale il primo termine di un binomio, perchè queſto ſia la cercata integrale. Quando ci viene in penſiere di cercar tutto queſto, e ciò ſi è fatto nella ſeconda operazione, il calcolo medeſimo col darci quantità impoſſibili, ci fa vedere, che lo cercavamo impoſſibilmente. La prima operazione dunque ci da il Logoritmo indicatoci dall' ordinata x, il qual Logoritmo è veramente la ſomma, o che è lo ſteſſo nel preſente caſo, la integrale della differenziale logoritmica, che è ſtata propoſta da integrare.

Sezio-

Sezione Seconda.

Del Calcolo Integrale.

Articolo Primo.

De' Binomj Differenziali Aritmetici, che contengono una ſola Variabile.

CAPO PRIMO.

Del Metodo proveniente dalla conſiderazione come eſſi Binomj ſieno ſtati formati.

Num. 203. SIccome dunque l' aver oſſervato come le Differenziali incompleſſe ſieno nate differenziando, ci ha dato il comodo di ritrovare le loro integrali; così oſſervando come le Differenziali compleſſe binomie, benchè alle volte ſieno molte, reſtringanſi però in un Binomio ſolo, ci darà alcune integrazioni de' Binomj medeſimi. E' vero, e lo vedremo all' *Articolo Terzo* della *Seconda Sezione*, che il metodo delle trasformazioni è incomparabilmente più fertile, e ci da con altre aſſai di più tutte le integrazioni, che in queſto Capo ritroveremo, ma per due fortiſſimi motivi ho creduto di por' queſto metodo, e porlo in quest' ordine. Si è il primo di queſti motivi, che da queſto metodo un' altro ne trarremo, per cui ſi ſaprà preparare i binomj a poter eſſer ſoggetti con utile al metodo delle trasformazioni, ſenza la quale preparazione molte volte queſto metodo rimarrebbe inutile. Il ſecondo poi è, che il metodo di queſto Capo farà paleſe buona parte de' naſcondigli del Calcolo Integrale, dalle quali notizie illuminati potremo andar più cauti, e ſicuri in rintracciare altri metodi pel ſuo avanzamento.

Num. 204. In grazia de' Principianti premetterò qui coſa notiſſima a i Maeſtri. I Binomj di una ſola variabile tutti ridur ſi poſſono ad una delle due ſeguenti forme, mediante le note

prepa-

preparazioni, che esporrò. Sono esse Forme $gdx \times \overline{a+fx^n}^{t}$, e $gx^e dx \times \overline{a+fx^n}^{r}$. La g è una costante indeterminata, che figura il coefficiente di tutto il binomio, e il Segno $+$ significa qui ancor $-$. Ciò dunque si ottiene levando di sotto al Segno di un moltinomio, o aggiungendovi quella quantità, che a noi piace, senza che muti il valore, onde viene a potersi fare, che un membro della parte complessa resti sempre senza variabile.

Sia dunque dato il binomio $\overline{ax^e+fx^n}^{r}$, e vogliansi scemare per x^t le variabili, che sono sotto al segno, dovrà scriversi $x^{tr} \times \overline{ax^{e-t}+fx^{n-t}}^{r}$. Se si volesse levare x^{-t}, scriveremo $x^{-tr} \times \overline{ax^{e+t}+fx^{n+t}}^{r}$. Se ci piacesse di levare y^t, avremmo dovuto scrivere $y^{tr} \times \overline{ax^e y^{-t}+fx^n y^{-t}}^{r}$. Se avessimo levata la a avremmo scritto $a^r \times \overline{x^e+fx^n a^{-1}}^{r}$. Se nella prima delle premesse quattro forme fosse stato $t=e$, ella sarebbe $x^{er} \times \overline{a+fx^{n-e}}^{r}$, la onde nel proposto binomio si sarebbe per tal modo ottenuto uno de' suoi membri sotto al segno libero da variabile, e sarebbe stato ridotto alla forma $x^e \times \overline{a+fx^n}^{r}$.

Num. 205. Se poi sia dato il Binomio $x^b \times \overline{ax^e+fx^n}^{r}$, e volessimo scemare la x^b dalla quantità x^t, scriveremmo $x^{b-t} \times \overline{ax^{e+\frac{t}{r}}+fx^{n+\frac{t}{r}}}^{r}$. Se fosse x^{-t}, scriveremo $x^{b-t} \times \overline{ax^{e-\frac{t}{r}}+fx^{n-\frac{t}{r}}}^{r}$. Se volesse scamarsi di y^t, scriveremmo $x^b y^{-t} \times \overline{ax^e y^{\frac{t}{r}}+fx^n y^{\frac{t}{r}}}^{r}$, e se volesse scemarsi a, avremmo posto $x^b a^{-1} \times \overline{a^1+\frac{1}{r}x^1+a\frac{1}{r}fx^n}^{r}$. Se nella prima di queste ultime quattro forme

forme fosse stato $b=t$, avremmo avuto $\overline{ax^e+\frac{b}{r}+tfx^n+\frac{b}{r}}^{r}$, e se in oltre fosse stato $e+\frac{b}{r}=0$, avremmo avuto $\overline{a+fx^{n-e}}^{r}$, onde lo avremmo ridotto all' altra forma del *Num.* 204.

Num. 206. Per accrescere al x^b la x^t dovremo fare il contrario di quello abbiam fatto nel Numero antecedente, onde scrivere $x^{b+t} \times \overline{ax^{e-\frac{t}{r}}+fx^{n-\frac{t}{r}}}^{r}$, e così del resto.

Num. 207. Se finalmente volessimo accrescere una data quantità ai membri, che sono sotto al segno, per esempio, x^a scriveremmo $x^{b-tr} \times \overline{ax^{e+t}+fx^{n+t}}^{r}$, e così pure del resto.

Num. 208. Accade pure alle volte di dare a' Binomj un' altra preparazione senza mutar loro il valore. E' certo, che multiplicando qualunque grandezza per l' unità, ella non si muta, ed è altresì vero, che qualunque grandezza divisa per se medesima è l' unità. Se dunque dato il Binomio $x^e \times \overline{a+fx^n}^{r}$ lo multiplicammo, per esempio, per $\overline{\overline{a+fx^n}^{t}}^{t}$, otterremo il medesimo binomio colla forma $x^e \times \overline{\frac{a+fx^n}{\overline{a+fx^n}^{t}}}^{r+t}$. Se $r+t$ ugagliasse l'unità, o altro numero intero positivo, il dato binomio, conservando il suo primiero valore, passerebbe nel primo caso ne i due binomj $\frac{ax^e}{\overline{a+fx^n}^{1-r}} + \frac{fx^{e+n}}{\overline{a+fx^n}^{1-r}}$, e in molti più, se $r+t$ passi l' unità, e saranno altrettanti, e uno di più, quante unità contiene $r+t$. Giova alle volte dare a' binomj, o multinomj questa preparazione; e il far tal cosa è stato nominato *Svolgerli*.

Num. 209. Ma un' altra preparazione di maggior conseguenza per l' ampliazione del Calcolo Integrale si da a i binomj

differenziali. Dato dunque $gx^e\,dx \times \overline{a+fx^n}^r$, che nominerò A, può ſcemarſi, od accreſcerſi al medeſimo l' eſponente r della parte compleſſa di quante unità ne piaccia. Così pure può ſcemarſi, od accreſcerſi l' eſponente e della variabile incompleſſa di tante n, eſponente della variabile ſotto al ſegno, quante a noi ne ſieno in grado. Vi ſono alcune contingenze, nelle quali queſta preparazione reſta ſturbata. Con queſta preparazione ſi riduce non poca parte de' binomj differenziali ad eſſere integrabili, i quali ſenza di queſto artifizio ſi rimarrebbero non integrati. Sviluppa queſta preparazione il binomio A in varie parti, e come a dire lo ſcevera in varie claſſi, onde una claſſe integrar ſi può col proprio ſuo metodo, e l' altra coll' altro: ove non fatta tale ſeparazione, niun metodo avrebbe luogo. Il dare a i Binomj queſta preparazione, io lo nominerò *Spoſtarli*, giacchè in certo modo, e relativamente a' loro eſponenti, ſi levano dal loro poſto, e vi ſi levano in modo eſſenzialmente diverſo da quello, pel quale ſvolgendoli vi ſi levano. Non mi è avvenuto di veder poſta in uſo queſta preparazione, e perciò non ſo, che alla medeſima ſia ſtato impoſto nome. Paſſerò dunque a ſtabilirne il modo, e nella ſteſſa occaſione moſtrerò i caſi, ne' quali, mediante queſta preparazione, s' integrino i Binomj aritmetici.

Num. 210. Sia la quantità aſſoluta $B = bx^{e+1} \times \overline{a+fx^n}^{s}$ E queſta da qui avanti la nominerò Integrale. Si pigli la ſua differenziale, e ſecondo il *Numero* 61., e collo ſvolgerla ſarà $\overline{e+1} \times ba \times x^e\,dx \times \overline{a+fx^n}^{r} = C + \overline{e+1} \times n+ur \times bf \times x^{e+n}\,dx \times \overline{a+fx^n}^{r} = E$. Sia ora dato il ſolito binomio A da integrarſi. Egli è viſibile, che ſe nella ſopra trovata differenziale foſſe $e+t \times ba = g$, onde ſe ne trae $b = \frac{g}{a \times \overline{e+1}}$, ed in oltre $e+1+n+nr$ foſſe zero, la differenziale dell' aſſunta integrale non ſarebbe ſe non che il propoſto binomio A, il quale per ciò nel preſente caſo di $\overline{e+1+n+nr} = 0$, avrebbe per integrale $\frac{gx^{e+1} \times \overline{a+fx^n}^{r+1}}{a+e+1}$. Ecco dunque finora, non ſolo la integrale di A

di A nel preſente caſo, ma il come, e il perchè le due differenziali dell' aſſunta integrale ſi terminino in un ſolo binomio, ſvanendone una pel ſuo coefficiente, che è zero.

Num. 211. Sia un' altra integrale $F = b \times x^{\overline{e+1+n}} \times K^{r+1}$. Noto per brevità K in vece di $a+fx^n$, e così ſeguiterò a fare da qui avanti. La di lei differenziale ſarà $ab \times \overline{e+1+n} \times x^{e+1}\,dxK^r = G + hf \times \overline{e+1+2n+nr} \times x^{e+2n}\,dxK^r = H$. Uniſcaſi ora il coefficiente della G con quello della E trovata nel numero antecedente; e ſi ſupponga nulla la loro ſomma, la onde ne riſulti $-ab \times \overline{e+1+n} = bf \times \overline{e+1+n+nr}$. Queſta equazione determina $b = \frac{-ab \times \overline{e+1+n}}{f \times \overline{e+1+n+nr}}$. Suppongaſi ancora, che il coefficiente della C trovata nel numero antecedente, e che è $ab \times \overline{e+1}$ ſia $= g$, laonde riſulti di bel nuovo $b = \frac{g}{a \times \overline{e+1}} = \frac{-ab \times \overline{e+1+n}}{f \times \overline{e+1+n+nr}}$. Queſta equazione ci ſomminiſtra $b = \frac{-gf \times \overline{e+1+n+nr}}{aa \times \overline{e+1} \times \overline{e+1+n}}$. Finalmente ſuppongaſi, che il coefficiente di H, che è $e+1+2n+nr$ ſia zero. Non reſterà allora fra le quattro ottenute differenziali dalle due poſte integrali B. F., ſe non che la ſola differenziale C, e queſta, che ſola ſi laſcia vedere per l' equazione $b = \frac{g}{a \times \overline{e+1}}$ viene ad eſſere il ſolito binomio A, e le due integrali, che fanno queſto gioco, debbono avere, la prima B. $\frac{g}{a \times \overline{e+1}}$ in vece di b; e la ſeconda F, $\frac{-gf \times \overline{e+1+n+nr}}{aa \times \overline{e+1} \times \overline{e+1+n}}$ in vece di b. Ecco per tanto che il binomio A, quando abbia $e+1+2n+nr$ uguale a zero ha per integrale le due aſſunte $B-F$, ed ecco come accozzandoſi inſieme due differenziali affatto compagne, una della prima integrale, e l' altra della ſeconda, ma con ſegno contrario, ed avendo la quarta il coeffi-

coefficiente, che è zero, viene in questo caso a comparire il solo binomio A.

Num. 212. Sia un' altra integrale $I = px^{e+1+2n} \times K^{r+1}$. La sua differenziale sarà $ap \times e+2n+1 \times dx\, K^r = L + pf \times e+1+3n+nr \times x^{e+3n}\, dx\, K^r = M$. Le somme de i coefficienti $E+G$. $H+L$, ed il coefficiente di M si suppongono nulle, e il coefficiente di C al solito $= g$. Queste quattro suppozioni ci determinano $b = a \times \frac{g}{e+1}$, $h = \frac{-gf \times e+1+n+nr}{aa \times e+1 \times e+1+n}$, $ep = \frac{gff \times e+1+n+nr \times e+1+2n+nr}{a^3 \times e+1 \times e+1+n \times e+1+2n}$. Sempre dunque che il binomio A abbia $e+1+2n+nr$ uguale a zero, egli ha per integrale $B - F + I$, alle quali sono da darsi i coefficienti ora determinati, ed ecco anche qui come accozzandosi assieme quattro differenziali, due a due, affatto compagne, ma con segni contrarj, ed avendo la quinta differenziale il coefficiente, che è nullo, non può in questo caso comparire se non una sola differenziale, uguale alla proposta A.

Resta altresì ora manifesto come della proposta differenziale A possa andarsi accrescendo alla x fuori del segno quante n piaccia di aggiungervi di mano in mano, dimodochè per tutte le antecedenti differenziali resta a noi nota la integrale, laonde può darsi caso, che la rimanente differenziale (e vedremo, che parecchie volte si dà) può essa pure, condotta ad avere un tale esponente, integrarsi per altro modo, onde ottenersi dalla proposta differenziale, mediante questa preparazione, che sto esponendo, una compita integrazione.

Num. 213. Le cose ne' tre premessi numeri esposte sono più che bastanti a farci conoscere, che ogni binomio A, che abbia $e+1+in+nr = 0$. (ed i è qualunque numero intero positivo) è sempre integrabile, e ci somministra facilmente la propria integrale. Conciossiachè questa è sempre fatta da tante integrali, quante unità continue la i. Queste integrali sono sempre altrettanti termini consecutivi della serie, che esporrò, quante unità contiene

tiene la i; i quali termini sono poi tutti multiplicati per $gx^{e+1} K^{r+1}$. Resta per tanto a mostrare il modo facile di comporre questa serie. La $e+1$ dicasi q, e p la $e+1+nr$. Sarà questa serie $\frac{1}{a^2 q} - x^n f \times \frac{p+n}{a^2 \times q \times q+n} + x^{2n} ff \times \frac{p+n \times p+2n}{a^2 \times q \times q+n \times q+2n} - x^{3n} f^3 + \frac{p+n \times p+2n \times p+3n}{a^4 \times q \times q+n \times q+2n \times q+3n}$ + . - . &c.

I Numeratori dunque di questa serie sono, il primo l'unità, il secondo è x elevato ad n, e multiplicato per f, e per $p+n$, il terzo è x elevato a $2n$, multiplicato per f^2, e per $p+n$, e $p+2n$, e così di seguito. I Denominatori sono, il primo a multiplicato per q, il secondo è a^2 multiplicato per q, e per $q+n$; il terzo è a^3 multiplicato per q, per $q+n$, per $q+2n$, e così di seguito. I Segni poi de' termini sono consecutivamente alternati, conservate però le regole ordinarie de' Segni, che competono, ed accompagnano quelle quantità, le quali compongono essi termini. Se volessimo, per esempio, il decimo termine, egli sarebbe $\frac{-gx^{9n} f^9 \times p+n \times \cdots\cdots p+9n}{a^{10} \times q \times \cdots\cdots q+9n}$.

Num. 214. Sia nuovamente un' altra integrale $B = bx^{e+1-n} K^{r+1}$. La sua differenziale sarà $ab \times e+1-n\, x^{e-n}\, dx\, K^r = E + bf \times e+1+nr \times x^e\, dx K^r = C$. Se sia $e+1-n = 0$, e $b = \frac{g}{f \times e+1+nr}$, rimane dalle due differenziali il solo proposto A, che ha per integrale la B. Assumasi la seconda integrale $F = h \times x^{e+1-2n} \times K^{r+1}$, e questa produce le due differenziali $ab \times e+1-2n \times x^{e-2n}\, dx K^r = G$, $+ bf \times e+1+nr \times x^{e-n}\, dx K^r = H$. Se ora sia $e+1-2n = 0$, e la serie de i coefficienti $E+H$ altresì nulla

sì nulla, e il coefficiente di $C = g$, avremo $b = \frac{g}{f \times \overline{e+1+nr}}$ ed $h = \frac{-ag}{\overline{ff \times \overline{e+1+nr} \times \overline{e+1+nr-n}}}$, e delle due assunte integrali altra differenziale non comparirà, che la A. Si prenda ancora la terza integrale, e così di seguito, e succederanno proporzionalmente le cose tutte del Numero antecedente, laonde il binomio A, quando abbia $e+1-in=0$, sarà sempre integrabile, e la serie opportuna a questo bisogno sarà $\frac{1}{x^n fp}\, a^2$

$$\frac{a \times \overline{q-n}}{x^{2n} ff \times \overline{p \times \overline{p-n}}} \times \frac{n^2 \times \overline{q-u} \times \overline{q-2u}}{x^{3n} f^3 \times \overline{p \times \overline{p-u} \times \overline{p-2n}}} - \frac{a^3 \times \overline{q-1} \times \overline{q-2n} \times \overline{q-3n}}{x^{4n} f^4 \times \overline{p \times \overline{p-n} \times \overline{p-2n} \times \overline{p-3n}}} + . - .$$ &c. la formazione, e continuazione della quale è tanto facile, che non accade spendervi intorno più tempo.

Num. 215. Passerò intanto a spiegar la pratica di servirci delle premesse due formule, o serie, per integrare i proposti binomj, ne' quali si trovi uno de' notati contrassegni. Per ciò eseguire comodamente ho stesa la seguente Tavola, nella quale ho poste le prime cinque Integrali, e le ho distinte, segnandole *Primo Ordine*. Sotto di esse ho posto nel *Secondo Ordine* le Differenziali, che procedono correspondentemente dalle prime integrali. Col comodo di questa Tavola, data una Differenziale, che abbia uno degli opportuni contrassegni, troveremo subito nella Tavola la propria integrale. Sia per esempio $gx^{\frac{1}{2}}dx \times \overline{a+fx}^{-\frac{9}{2}}$, alla quale compete il contrassegno $e+1+in+nr=0$, ovvero $\frac{-e-1-nr}{n} = i = \frac{-\frac{1}{2}-1+\frac{9}{2}}{1} = 3$. Dovranno dunque prendersi le tre prime integrali nella prima formula, giacchè i è $=3$, e siccome q è $=\frac{3}{2}$, e $p=-3$, ed $u=1$, fatte le opportune sostituzioni, esse 3 integrali, cioè l' integrale cercata di A sarà

$\frac{2gx^{\frac{3}{2}}}{3a} K^{-\frac{7}{2}} + \frac{8fx^{\frac{5}{2}}}{15aa} K^{-\frac{7}{2}} + \frac{1bffx^{\frac{7}{2}}}{105a^3} K^{-\frac{7}{2}}$. Sia ancora per esempio $gx^3\,dx \times \overline{a+fx^2}^{r}$, nella quale essendo $\overline{e+1-in}=0$, ovvero $\frac{e+1}{u} = i = \frac{3+1}{2} = 2$, dovranno prendersi le due prime integrali della seconda serie, giacchè i è $=2$, ed essendo $q=4$, $p=5$, ed $n=2$, fatte le sostituztoni, sarà l' integrale di A la $\frac{gx^2 K^{\overline{r+1}}}{5f} - \frac{2gaK^{\overline{r \times 1}}}{15H}$.

Num. 216: Queste due formule, a dir vero, sono più note, e per altre maniere le ha dedotte il Dottissimo *P. Regner* nell' utilissima sua *Analyse demontreè Num.* 680., 684. Ho creduto per altro doverle io por' qui, e dedurle nella maniera della quale mi sono servito per le cagioni seguenti. La prima è stata il pensiere di penetrare al possibile ne' nascondiglj del Calcolo Integrale, e farmi strada a sempre più perfezionarlo. Abbenchè dunque ogn' integrale binomia in senso di verità ci dia sempre per legge del Calcolo differenziale due differenziali binomie, almeno equivalentemente, ecco come esse scompariscano, una occultando l' altra co' segni contrarj, e svanendone una di loro per essere zero il proprio coefficiente. Perchè poi tali coefficienti non possono farsi che dalle due esposte combinazioni $\frac{e+1}{n} = i$, ovvero $\frac{-e-1-nr}{n} = i$, così veniamo in secondo luogo a conoscere, che il metodo di queste due serie altre integrazioni aritmetiche del binomio A non può darci, se non di quelli che abbiano uno de' due esposti contrassegni. In terzo luogo poi si stabilisce, che essendo per lo più i binomj differenziali una somma, o un residuo di più binomj, che pe' scoperti accidenti vengono ad acquistare la forma di un solo binomio, è troppo difficile, se non anche impossibile, il formare anche per questo sol capo una differenziale indeterminata, che possa servir di modello, o formula generale per l' integrazione di tutti i binomj.

Num. 217. Nè solo per l' indicato accidente è reso come impossibile il formar tale modello, cresce molto più questa di-

ficoltà per un altro più recondito naſcondiglio, che ha il Calcolo integrale. Non è qui luogo di ſvelarlo: lo farò alla ſua opportunità nell' Appendice della ſeſta Sezione di queſte Memorie. Torniamo pertanto alla pratica delle due ſerie. Se dunque il binomio A propoſto da integrarſi ha uno de i due contraſſegni, ſiccome [ed è ciò faciliſſimo da ravviſarſi, oſſervando le medeſime ſerie] è ſempre in uno de' termini della ſerie, e nel ſuo numeratore, la medeſima quantità $e+1+in+nr$, $(p+in)$, ovvero $e+1-in$ $(q-in)$, e queſta quantità ſi replichi poi ne i numeratori di tutti i termini ſuſſeguenti della ſerie; così è neceſſario, che il termine, che ha tale quantità, e tutti i ſuoi ſuſſeguenti ſieno zero. Quando ciò accade, ed è per l' appunto allorchè il binomio è integrabile per una di loro, ſi pratica di dire, che tal ſerie ſi *rompe*, e forſe più giuſto ſarebbe il dire, che ivi ella finiſce. Vi è però un caſo, che non mi è avvenuto veder notato da chi che ſia, che abbia con queſta ſerie integrato, nel quale, ſtando uno de' due notati contraſſegni, nè la ſerie ſi rompe, nè ſi ha integrazione. Occorre dunque ſcoprire queſto accidente, e rimediarvi.

Num. 218. Sia $gx^{-1}\,dx \times \overline{a+fx^n}^{-1}$. Avremo $-1+1-n+n=0$, e perciò il contraſſegno opportuno per la prima formula. Volendoſene dunque ſervire ci verrebbe per integrale $\frac{gx^0K^0}{a\times 0}$, ed in oltre la ſerie non ſi romperebbe altrimenti, poichè ſi avrebbero le differenziali $gx^{-1}\,deK^{-1}\times 1-\frac{nfx^n}{a\times 0}$. Sia altresì $gx^{-1+s}\,dx\times\overline{a+fx^n}^{-2}$, avremo pure $-1+1+2n-2n=0$, onde nuovamente il contraſſegno per la medeſima prima formula, e ne otteremo inutilmente per integrali $gx^0k^0+\frac{fgx^nk^0}{a^2\times 0}$, e per differenziali $gx^{-1}\,dxk^{-1}\times 1+\frac{sfx^{2n}}{a^2}$. In queſti, e ſimili caſi dunque ſi danno gli opportuni contraſſegni, e pure nè ſi rompe la ſerie, nè ſi ha integrazione. E così in fatti ſucceder dee. Le differenziali qui propoſte o ſono totalmente

mente logoritmiche, e tale è la prima, o meſcolate co' logoritmi, come lo è la ſeconda. Le ſerie preſenti non ſono nate differenziando ſecondo l' eſigenza de' Logoritmi, ma ſecondo quella delle grandezze aſſolute, e di qui procede tutto il miſtero. Se formaſſimo altre ſerie ſecondo l' eſigenza de' Logoritmi, o de' compoſti loro con quantità aſſolute, tali ſerie integrerebbero allora le propoſte differenziali, e al loro modo romperebbonſi. E' ſuperfluo il calcolarle per tali caſi, mentre col metodo delle trasformazioni, che ſtenderò a ſuo luogo, ſi avrà più facilmente, e con più ampia generalità il modo di integrar queſti caſi. Quando dunque, in propoſito delle date ſerie, naſcono accidenti tali, è ſegno certo, che il propoſto Binomio non è puramente aſſoluto, e che per integrarlo biſogna ricorrere alla ſua claſſe, ed applicarvi il proprio metodo.

Num. 219. La terza cagione poi di porre in queſte mie Memorie le due deſcritte ſerie, e nella maniera, che le ho poſte, è quella di ſtabilire l' utiliſſima, e neceſſaria maniera di ſpoſtare i Binomj differenziali: preparazione, che accenai al *Num.* 209. Per ottener queſto intento è neceſſario ſtabilir prima le altre due ſerie, che ho poſte nella Tavola. Suppongaſi dunque anche ora $e+1=q$, ed $a+fx^n=K$. Sia l' integrale gx^qK^r. La ſua differenziale, non ſvolgendola, ſarà $gx^e\,dx\,K^r=C+\frac{g}{q}fnrx^{e+n}\,dx\,K^{r-1}$. Sia l' altra integrale $-gx^{q+n}K^{r-1}=-E$. La ſua differenziale ſarà $-gfnr\frac{x^{e+n}\,dxK^{r-1}}{q\times q+n}=-D-\frac{gffn^2r\times nr-n}{q\times q+n}\times x^{e+2n}\,dxK^{r-2}=-F$. Sia la terza integrale $\frac{gffnr\times nr-n}{q\times q+n\times q}\times x^{q+2n}K^{r-2}=G$, e la ſua differenziale ſarà $gff\frac{nr}{+2n}\times\frac{nr-n}{q\times q+n}\times x^{e+2n}\,dxK^{r-2}=F+\frac{gf^3nr\times n-r\times n-2r}{q\times q+n\times q+2n}\times x^{e+3n}\,dxK^{r-3}$. Queſte tre integrali, e loro differenziali ſono piucchè baſtevoli a moſtrare e la naſcita di queſte ſerie, e

come facilissimamente proseguir si possa; nè io vi spenderò altre parole.

Num. 220. Sia l'integrale $g x^{q-n} K^{r+1} = B$. Le sue differenziali sono $g \times \frac{\overline{q-n} \times x^{e-n} dx K^{r+1}}{f \times \overline{nr+n}^{f}} = D + g x^{e} dx k^{r} = C$. La seconda integrale $-g \times \frac{\overline{q-n} \times x^{q-2n} K^{r+2}}{ff \times \overline{nr+2n}^{n}} = E$. dà le differenziali $-g \times \frac{\overline{q-n} \times x^{q-2n} \times x^{e-2n} dx k^{r+2}}{ff \times \overline{nr+n} \times \overline{nr+2n}} = -F. -g \times \frac{\overline{q-n} \times x^{e-n} dx k^{r+1}}{f \times \overline{nr+n}} = -D.$, e dalla terza integrale $g \times \frac{\overline{q-n} \times \overline{q-2n} \times x^{q-3n} K^{r+3}}{f^{3} \times \overline{nr+n} \times \overline{nr+2n} \times \overline{nr+3n}} = G$ ne provengono le differenziali $\frac{g \times \overline{q-n} \times \overline{q-2n} \times \overline{q-3n} \times x^{e-3n} dx K^{r+3}}{f^{3} \times \overline{nr+n} \times \overline{nr+2n} \times \overline{nr+3n}} = H + \frac{g \times \overline{q-n} \times \overline{q-2n} \times x^{e-2n} dx K^{r+2}}{ff \times \overline{nr+n} \times \overline{nr+2n}} = F$. Anche queste tre integrali sono più che bastanti a far comprendere quanto occorre per questa serie.

Num. 221. Le quattro premesse serie sono dunque poste nella Tavola, che per maggiore comodità si porrà in ultimo colle figure. Ogni primo ordine contiene le integrali, e sotto di ogni integrale stanno nel secondo ordine le proprie differenziali distinte due a due da un numero fra parentesi, il quale mostra, che esse due differenziali, e tutte le antecedenti provengono dalle integrali, che nel primo ordine precedono lo stesso numero, il quale nel primo ordine è anche esso posto fra le parentesi. Sia presentemente dato il Binomio A, nella forma particolare $x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{a + 4x}$. Questo Binomio non ha veruno de' contrassegni delle due serie, onde queste, quanto a loro non possono certamente integrarlo. Mostrerò però (*Num.* 263.), che se egli, in vece di avere l'esponente della parte complessa $= \frac{1}{2}$ lo avesse $= -\frac{1}{2}$, egli, restando tutte le altre cose come sono, sarebbe integrabile pel modo che al citato numero mostrerò. Per ridurlo dunque a tal segno mi occorre minorare di un' unità l'Esponente r, e però ricorro alla terza serie, che è atta a questo; e giacchè è $q = \frac{1}{2}$, $f = 4$, $n = 1$. $r = \frac{1}{2} g = \frac{1}{2}$

Piglio la prima integrale, la quale mi riesce $x^{\frac{1}{2}} \sqrt{a + 4x} = B$, e le sue differenziali sono $x^{-\frac{1}{2}} dx \frac{\sqrt{a + 4x}}{2} = A + \frac{2x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + 4x}} = C$. E perchè se ora minorassi l'esponente e $(\frac{1}{2})$ di un n (1) ridurrei la C alla forma richiesta, ricorro alla seconda serie, che è atta a questo. Essendo dunque ora $g = 2$, e $p = 1$, piglio la prima integrale, che è $D = -x^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{a + 4x}}{2}$, e la pongo negativamente per ottenere l'effetto, che se ne vedrà. Le sue differenziali sono $\frac{-2x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a + 4x}} = -C - \frac{ax^{-\frac{1}{2}} dx}{4\sqrt{a + 4x}} = -E$. Dalle due integrali dunque $B - D$ ho le quattro differenziali $x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{a + 4x} = A + C - C - \frac{ax^{-\frac{1}{2}} dx}{4\sqrt{a + 4x}} = -E$. Siccome poi l'integrale di $-E$. (e lo vedremo al *Num.* 263.) è $-\frac{a}{8} L \frac{\sqrt{a + 4x} + \sqrt{x}}{\sqrt{a + 4x} - \sqrt{x}}$, così vien manifesto, che dalle tre integrali $B - D + \frac{a}{8} L \frac{\sqrt{a + 4x} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{a + 4x} - 2\sqrt{x}}$ procederanno le cinque differenziali $C - C - E + E + x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{a + 4x}$, vale a dire la sola proposta differenziale A.

Num. 222. Ecco dunque posto in chiaro cosa sia spostare i Binomj; come mediante le quattro poste serie ciò si eseguisca: l'utile che ne viene, e cosa operi, in riguardo al calcolo integrale,

grale, una tale preparazione. Scevera ella, come al *Num.* 209. lo accennai, da un binomio le parti, che ſono integrabili per un metodo, da quelle, che integrar ſi debbono per un altro, onde così ſi ottiene l'integrazione del binomio, che in tali caſi ſenza l'avvertita preparazione mai non s'integrerebbe; e queſto è l'utile preggievoliſſimo di queſto metodo. Circa all'eſeguirlo, parlandone materialmente, ſi vede ſenz'altro poter noi ſempre andar ponendo delle integrali, le quali per quante ſieno, non ci laſcieranno mai altro, che due differenziali: una che ſia il propoſto binomio, e l'altra che da eſſo differiſca nel coefficiente, e nell'aver gli eſponenti r, ed e, quello accreſciuto, o ſcemato di quante unità, e queſto di quante n ne ſia in piacere. Parlandone poi reſpettivamente al biſogno, ſiccome alcune differenziali, benchè integrar non ſi poſſano per le due prime ſerie, s'integrerebbero però per altri metodi, in ſeguito d'altri contraſſegni, a' quali ridur ſi poſſono, ſpoſtando i due eſponenti r, ed e, dovremo ſolamente oſſervare, come più compendioſamente procedere per iſcegliere le opportune integrali, che riduchino gli eſponenti del binomio ad eſſere i contacenti.

In grazia de' Principianti leverò qui un apparente difficoltà, che ſopra l'integrale $B-D$ s'incontra, e l'ho ſcelta a bella poſta per queſto. Eſſendo dunque $B = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{a+4x}$, e $-D = -x^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{a+4x}}{2}$, ſommate aſſieme queſte due integrali, non ſono che la ſola $x^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{a+4x}}{2}$, la di cui differenziale è $x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{4}\sqrt{a+4x} = H + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+4x}} = I$. la quale a prima viſta ſembra impoſſibile che ſia quella ritrovata per mezzo della ſerie, e che è $\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx\sqrt{a+4x}}{2} = A - \frac{ax^{-\frac{1}{2}}dx}{4\sqrt{a+4x}} = -E$. Succede però facilliſſimamente il moſtrarla la ſteſſa. Si oſservi dunque che la H è manifeſtamente la metà di A, dunque $I-H$ ſarà $= -E$, onde

onde fattone il calcolo ne riſulta $\frac{4x^{\frac{1}{2}}-ax^{-\frac{1}{2}}-+4x^{\frac{1}{2}}\times dx}{4\sqrt{a+4x}} = -E$.

Num. 223. V'ha però un caſo, nel quale non rieſce di ſpoſtare i Binomj a quel ſegno, che ne ſarebbe di biſogno. Quando il Binomio in vece di avere $\frac{e-1-nr}{n} = i$, ovvero $\frac{e+1}{n} = i$ abbia $-i$, cioè che ſtiino benſì le combinazioni ſovrapoſte degli eſponenti uguali ad un intero, ma negativo, all'ora è che lo ſpoſtare reſta impedito. Ciò accaderebbe nel Binomio $x^{\frac{1}{2}}dx\times\overline{a+fx}^{\frac{1}{2}}$, il quale ha $\frac{\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{2}}{1} = 3$; onde per eſsere integrabile altro non gli manca, ſe non, che la combinazione de' ſuoi eſponenti che è poſitiva, divenga negativa, la qual coſa ottener ſi potrebbe, ſe non ſi fraponeſſe difficoltà nello ſpoſtare in tali caſi, imperocchè quella integrale, che aſſumere ſi dovrebbe, perchè dall'eſsere poſitiva paſſi eſsa combinazione all'eſsere negativa, viene ſempre diviſa per zero, e però eſsendo ella un'integrale impoſſibile, ſi fa paleſe, che in queſto caſo il metodo di ſpoſtare non può convenire. I Principianti poſsono farne la pruova da loro medeſimi. Non è però in tali caſi inutile la pratica di ſpoſtate, anzi forſe è all'ora, che ve ne ha maggior biſogno, perchè accade per lo più, che tutte le integrali, precedenti a quella, che incontra il notato accidente, eſse competono alle parti aſſolute della differenziale, e ſono integrabili pel metodo di eſse ſerie, e quella, che rimane, è eſsa quella che ſceverar sì doveva, per eſsere poi integrata per altro metodo, ed a lei proprio. Tal coſa per l'appunto accade nella prima qui notata differenziale, perchè ridotta che ſia alla forma $\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{a+fx}}$, in queſto ſtato, nel quale ſarebbe in procinto di poter paſsare ad eſsere integrabile, ſe non oſtaſse il notato accidente, ella è poi integrabile per Logoritmi.

Num. 224. E' ſtato avvertito ad un vantaggio, che alle volte trar ſi può dalle premeſse ſerie. Quando i Binomj, mancando de' notati contraſsegni non poſsono per tali ſerie integrarſi, ſembra

bra però poſſibile l'approſſimarſi quanto ne piaccia alla loro integrale. Riflettendo alle medeſime ſerie non può non iſcorgerſi, che la prima loro integrale produce ſempre il dato Binomio A, e che ſuſſeguentemente l'altra differenziale ſi leva per cagione dal ſegno contrario dalla prima differenziale dalla ſuſſeguente integrale. Le integrali, che vanno aſſumendoſi, hanno ſempre i loro coefficienti che, vanno mutandoſi, e così accade agli eſponenti delle variabili, e però può avvenire, che eſſe ſuſſeguenti integrali, per cagione di tali mutazioni, vadano ſempre, e poi ſempre impiccolendoſi. Quando ciò ſucceda, è manifeſto, che proſeguendo così a prendere le integrali occorrevoli, viene ad ottenerſi dalla loro ſomma un' integrale, che finalmente giugnerebbe ad eſſere la vera del propoſto Binomio, ſe il coefficiente dell' ultima, non già pe' ſegni contrarj delle parti, che lo compongono, ma a forza di impicciolirſi ſi annientaſſe.

In propoſito però di queſto artificio, e per uſarne con regola, e per evitare ogni errore, ſarebbe d'uopo un non breve diſcorſo, che mi menerebbe lontano dalle coſe, che mi ſono propoſto di brevemente trattare in queſta Sezione. Lo ommetterò dunque, e ſe mai tratterò del metodo delle ſerie, all' ora ne parlerò. Ho per tanto dovuto far qui queſta annotazione, perchè non eſſendomi avvenuto di vedere negli Autori, che ne trattano, ſufficientemente ſmaltito queſto ſoggetto, i Principianti ſtiino cauti in abbandonarſi a tale approſſimazione, che per altro, quando anche fedelmente ci ſerva, ſempre però gl' invilupperà in una operazione di calcolo, che per la ſua vaſtità è quaſi impoſſibile di condurlo in fine.

Num. 225. Un altra maniera di approſſimazione, ed affatto diverſa dalla premeſſa ci viene pure ſomminiſtrata da queſte ſerie. Mi farò ſtrada con un eſempio alla chiara ſua eſpoſizione. Sia (*Fig.* 1.) la parabola ordinaria ABL; la di cui natura $\sqrt{px} = y$ Il parametro p è indeterminato. L' elemento dell' arco di queſta parabola ſarà [*Num.* 77.] $x^{-\frac{1}{2}} dx \times \frac{\sqrt{1+4px}}{2\sqrt{p}} = A$. Darò a queſto elemento il coefficiente indeterminato g per denotare con eſſo, o tutto, o parte, o anche un moltiplice dell' arco AB, al quale ſuppongo, che corriſponda l'aſciſſa $AC = x$. Ciò premeſſo ſia data la differenziale $b x^{\frac{s}{2}} dx \times \overline{1+fx^{\frac{t}{2}}}$. Tanto s, quanto t ſono numeri interi diſpari, ſieno poſitivi, o negativi che nulla importa. Collo ſpoſtare queſto Binomio ſecondo il biſogno può ridurſi ad avere gli eſponenti della A, onde ſe foſſe dato per eſempio la $x^{\frac{1}{2}} dx \times \overline{1+fx^{\frac{1}{2}}} = B$, poſta per la prima ſerie l'integrale $C = b x^{\frac{1}{2}} \times \overline{1+fx^{\frac{3}{2}}}$, otterremo le differenziali $B. = b x^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{1+fx^{\frac{1}{2}}} + B = b x^{\frac{1}{2}} dx \times \overline{1+fx^{\frac{1}{2}}}$. In queſto eſempio ſi cerca l' integrale della propoſta $B = v$. Dee per tanto eſſere $v = \int B$, e giacchè è $C = \int B + \int D$, avremo $C + \int D = v$. Come che dunque D può eſprimere l'arco AB della parabola, o una ſua parte, o una ſua moltiplice, paſſeremo ora a determinare e queſta parte, e il parametro della opportuna parabola. Per conto dell' ultimo, ponendo $fx = 4px$ avremo $p = \frac{f}{4}$, e riſpettivamente al primo, ponendo, $\frac{bx^{-1}}{2} = \frac{gx^{-1}}{\frac{2\sqrt{f}}{2}}$ avremo $g = \frac{b\sqrt{f}}{2}$ e però $\int D$ ſarà la parte dell' arco AB, che viene deſignata per $\frac{b\sqrt{f}}{2}$, la parabola del qual arco ha $\frac{f}{4}$ per ſuo parametro. Suppoſto dunque noto un tal arco, certo è che ſarebbe nota l' integrale della propoſta differenziale.

Queſto artificio dunque di ridurre le propoſte differenziali, ſpoſtandole, ad avere la forma dell' elemento di qualche curva, o di qualche ſolido, o di alcune altre quantità, che noi intendere, o moſtrare potiamo, è nominato (come già lo avvertj) il metodo delle quadrature. Sopra di queſto metodo però accade di fare alcune avvertenze. Parecchie volte, come ſegnatamente nel poſto eſempio, è inutile il ridurre le differenziali alle quadrature. Così la differenziale $bx^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{1+fx^{\frac{1}{2}}}$ $= D$, non ſolo colle reſtrizioni di $1 = a$. di $4p = f$, e di $g = 2\sqrt{f}$. è integrabile, ma lo è generalmente nella forma

$gx^{\frac{1}{2}}$

$g x^e dx \times \overline{a + f x^n}^r$. purchè abbia, o posſa ridurſi ad avere $\frac{e+1}{n} = 2$. e queſto, ſempre che vi ſi ſappia adoperare il metodo confacente. Quando poi la riduzione ſi faccia ad elementi che per modo alcuno non ſi ſappiano integrare, all' ora, parlando per altro con tutto il dovuto riſperto a' Maeſtri del calcolo, parmi che queſto poco ſignifichi di più, ſe non che noi ſapremmo, ſe ſapeſſimo. Che ſe in queſto caſo di non poter mai ſapere l'aſsoluto valore dell'arco, o &c. a cui è ridotta l' integrale, voleſſimo pur valerſi dell' equazione premeſsa per eſempio $v = C + fD$, la coſa all' ora anderebbe in peggio. E' d' avvertire prima di ogni altra coſa, che quando non ſiamo certi che l' integrale $C + fD$ ſia veramente completa, non ſuſſiſte l'aſsunta equazione, onde in tal caſo ſervendocene noi, caderemmo in errore. Che ſe ſia completa, noi però dalla poſta equazione niun' altra conchiuſione fuori che identica trar potremo, ſempre che in eſsa ſtar vi debba fD, come nel preſente caſo forza è che vi ſtia, giacchè ſupponiamo che il valore aſsoluto di fD ci debba rimanere incognito. Non oſtante però queſte coſe egli è certo, che il metodo delle quadrature ci ſomminiſtra una notizia, e vera che non avevamo, onde ha meritamente il ſuo pregio, ma dee ſtarſene nella ſua linea, onde per ampliarne l' uſo dirò, che qualſivoglia Binomio, ſenza veruna reſtrizione, può ridurſi faciliſſimamente, e ſenza pena di calcolo, all' elemento di un ſolido che potiamo intendere, e moſtrarlo. In fatti nel generale Binomio $g x^e dx \times \overline{a + f x^n}^r$ ſuppongaſi una curva la di cui natura ſia $x^e = y$, ed un altra che ſi eſponga per $a + f x^n = z$. Le y. z ſono le ordinate cadauna di loro delle proprie curve. Si generi poi ſecondo il ſenſo del *Num.* 89. dal movimento, ed atta poſizione di queſte due curve un ſolido, o un tronco. L' elemento di queſto ſolido è innegabilmente il propoſto generale Binomio, ovvero la ſua parte g, ed ecco ridotto ogni Binomio differenziale, ſenza fatica di calcolo, e ſenza veruna reſtrizione alle quadrature. A ſuoi luoghi moſtrerò altre ſimili riduzioni.

Num. 226. Oltre a' Binomj della forma fin ora propoſta ve ne ſono di un altra forma, che io per ciò nominerò *Replicati*. Tale ſi

ſe ſi è, ſe ci veniſſe un' equazione differenziale di un problema eſpoſta per $dv = g x^e dx K^r + b x^e dx K^t + \&c.$. Se due ſieno i binomj, lo dirò un binomio Duplicato; ſe tre, Triplicato, e così ſucceſſivamente. Accade alle volte, che prendendo ſeparatamente ognun di eſſi binomj, non ſono altrimenti integrabili, ma prendendoli inſieme, ſi ottiene d' integrarli. In queſta conſiderazione di prenderli aſſieme io ſtenderò dunque la ſuccinta preſente Ricerca, che ſarebbe inutile, ſe uno ad uno foſſero integrabili. Queſte integrazioni ſono frutto delle premeſſe ſerie.

Num. 227. Perchè di tali binomj poſſa averſi integrazione, fa di meſtieri, ch' eſſi poſſano eſſer rappreſentati da altrettanti binomj, quanti eſſi ſono, e che queſti binomj ſieno almeno in una delle premeſſe ſerie prima, e ſeconda, quando r, e t ſieno uguali; o delle due terza, e quarta, quando r, e t differiſcano fra di loro d' un numero intero. Perchè poi ciò accada utilmente, è d' uopo in ognun di eſſi caſi, che gli eſponenti delle variabili fuori del ſegno ſieno tali, che differiſcano fra di loro per n moltiplicato per un numero intero; e queſto Numero lo dirò i. Moſtra queſto Numero, che il binomio, ſe ſia integrabile per queſto metodo, dee neceſſariamente avere per integrale altrettante integrali quante unità egli contiene, e che eſſo binomio, ſe è duplicato, per eſempio, può rappreſentarſi dalle due differenziali reſtanti dalle predette integrali. Giova per facilitare l' integrazione oſſervare ſe la coſtante f, o ſue dignità ſieno nel numeratore del propoſto binomio, o ſe vi ſia la coſtante a, o ſue dignità, ovvero ſe in una parte del binomio ſiavi la f, e nell' altra la a, o loro dignità. Biſogna pure avvertire ſe n ſia poſitivo, o negativo, ed è ancor neceſſario diſtinguere il dato binomio in due parti, e ciò relativamente ad in, che ſi compone coll' eſponente e della variabile fuori del ſegno. Se n ſia poſitivo, quella parte di binomio, che ha l' eſponente della variabile fuori del ſegno maggiore dell' eſponente della ſteſſa variabile, ma della parte reſtante del binomio, la dirò la ſeconda parte, quando però il binomio abbia in tutte le ſue parti la f, o ſue dignità nel numeratore; in tal caſo debbono cercarſi le integrali nella prima ferie, e la prima parte corriſponderà all' antecedente integrale, e la ſeconda ad una integrale ſuſſeguente. Se in queſto caſo le dignità di f foſſero maggiori nella prima parte, ſareb-

be segno certo, che pel presente metodo tale binomio non è integrabile. Se poi n sia negativo denominerò le parti al contrario, e tutto pure succederà al contrario, toltone l' addotto contrassegno delle dignità di f. Che se essendo n positivo sia a, o le sue dignità nel numeratore, di tutte le parti del binomio all' ora la seconda parte sarà quella, che avrà minore l' esponente della variabile fuori del segno, e le integrali si otterranno dalla seconda serie, e la prima parte corrisponderà all' antecedente integrale, e la seconda ad una susseguente, ed essendo n negativo, e stando a nel numeratore, tutto si nominerà, ed andrà al contrario. Se le dignità di a non andranno crescendo colla seconda parte, è segno certo, che tale binomio per questo metodo non può integrarsi.

Tutte le parti del binomio debbono necessariamente avere la medesima parte complessa, a riserva del di lei esponente, il quale però nel presente caso, di cui trattiamo, dee essere in amendue le parti lo stesso. Quindi è, che se n sia o negativo, o positivo in una parte del binomio, così pure lo debbe essere nell' altra. Ma se una parte abbia nel numeratore la f, e l' altra vi abbia la a, all' ora l' integrale dovrà prendersi parte dalla prima serie, e parte dalla seconda, e dalla prima quella, che ha f nel numeratore, e quella, che vi ha a dalla seconda.

Tutto ciò finalmente premesso agevolerò quanto ho detto con un esempio. Abbiasi l' equazione differenziale $dv = ff x^{\frac{3}{2}} dx \times \overline{a+fx}^{-1} + f^3 x^{\frac{5}{2}} \frac{dx \times \overline{a+fx}^{-1}}{3}$. Essendo diversi i due coefficienti della variabile fuori del segno per $1 \times n$, scorgesi subito che se sia integrabile, aver non dee che una sola integrale. Comechè n è positivo, e che essendo f nel numeratore, la seconda parte, che è quella che ha $x^{\frac{5}{2}}$, ha anche con se la dignità maggiore della f, resta esclusa questa impossibilità di integrarlo. Mi faccio dunque alla prima serie, giacchè questa è quella che conviene al caso, e determinato $e = \frac{3}{2}$, onde $q = \frac{5}{2}$, e $p + n = \frac{1}{2}$, e sostituite queste quantità nella prima integrale della

la prima formula, ci danno per coefficienti delle loro integrali 1, ed $\frac{f}{5a}$, e scorgendosi, che questi coefficienti, mlutiplicati per $\frac{ff}{3}$ sono i coefficienti medesimi del dato binomio, resta palese, che l' integrale cercata è $2ff x^{\frac{5}{2}} \times \frac{\overline{a+fx}^{-1}}{1.5.a}$.

Sia ancora $dv = 36ff x^{\frac{1}{2}} dx \times \frac{\overline{a+fx^{-1}}^{-2}}{5.a} - 4a x^{\frac{5}{2}} dx \times \overline{a+fx^{-1}}^{-2}$. Qui gli esponenti della variabile fuori del segno sono diversi per $2 \times n$, onde vi occorrono due integrali. La n è negativa, ed essendo f nel numeratore, la seconda parte è quella che ha $x^{\frac{1}{2}}$, cioè l' esponente della variabile fuori del segno minore, e giacchè la f, che accompagna questa seconda parte, è maggiore, si esclude anche qui questa impossibilità d' integrare. Prese dunque dalla serie prima, che è la confacente, le due sue prime integrali, e posto $e = \frac{5}{2}$, onde $q = \frac{7}{2}$, e così gli altri simboli, avremo i due coefficienti delle due differenziali, che non distruggonsi, l' uno $= 1$, e l' altro $= \frac{-9ff}{5aa}$, i quali trovandosi essere gli stessi, che que' del proposto binomio, ma solo moltiplicati per $4a$, e con segni omologamente contrarj, ci danno la cercata integrale $v = -8x^{\frac{7}{2}} \frac{\overline{a+fx^{-1}}^{-1}}{7} + 72 f x^{\frac{5}{2}} \frac{\overline{a+fx^{-1}}^{-1}}{3.5.a}$.

Sia $dv = x^{\frac{1}{1}} dx \times \frac{\overline{3+2x^{-1}}^{-2}}{2} + 135 x^{\frac{7}{2}} dx \times \frac{\overline{3+2x^{-1}}^{-2}}{176}$.

L' intervallo fra' due esponenti è $3 \times n = 3$, onde tre integrali occorrono, e perchè il coefficiente della seconda parte è divisibile per $27 = a^3$., può tentarsi di adoperare la seconda formula, ed essendo in questo supposto $e = \frac{1}{2}$, fatte le opportune sostituzio-

tuzioni ne'coefficienti delle differenziali, che non diſtruggonſi, queſti reſteranno 1, e $\frac{135}{88}$, i quali moltiplicati per $\frac{1}{2}$, reſtituiſcono i coefficienti omologhi, onde avremo $v = \overline{x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{42}x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{176}x^{\frac{9}{2}}} \times \overline{3 + 2x^{-1}}^{-1}$.

Sia finalmente $dv = 10x^{\frac{3}{2}}dx \times \overline{2 + 3x^{-1}}^{2} - 15x^{-\frac{1}{2}}dx \times \overline{2 + 3x^{-1}}^{-1}$. Un coefficiente $\frac{10}{7}$ è diviſibile per $2 = a$, l'altro $\frac{-15}{2}$ per $3 = f$, e però ſembra, che la differenziale reſtante della prima formula, e la ſua prima integrale poſſa darci il ſecondo termine, e quella della ſeconda il primo, giacchè eſſendo $2 \times n$ l'intervallo fra $-\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{2}$, ſi vede doverſi avere due integrali. Fatte per tanto le dovute ſoſtituzioni, e ſupponendo $e = \frac{1}{2}$, laonde poi $e + n$ diviene $-\frac{4}{2}$, ed $e - n$ riſulta $= \frac{3}{2}$, trovaſi il coefficiente dell'integrale, che reſta della prima ſerie $= -\frac{19}{6}$, e quello della ſeconda $= \frac{10}{25}$, i quali, moltiplicati per tre, divengono i due propoſti, ed è perciò $v = \overline{\frac{2x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{7}{2}}}{7} \times \overline{2 + 3x^{-1}}^{-1}}$.

Num. 228. La integrazione del binomio triplicato, e così que' di dimenſioni più alte, cammina proporzionalmente allo ſteſſo modo. Il triplicato non può mai avere meno di due integrali, il quadruplicato meno di tre, e così di ſeguito. Il triplicato può, e dee conſiderarſi come due binomj duplicati facendo la funzione di due termini, ciò è del medio, quello che ha l'eſponente della variabile fuori del ſegno, che ſia diverſo per in dall'eſponente di uno degli altri, e per cn dall'eſponente della reſtante (c ſi ſuppone altro numero intero), e la ſomma di $i + c$ moſtrerà quante integrali vi vogliano a dare il propoſto binomio triplicato. Oſſervando dunque quali poſſano eſſere le integrali atte al biſogno, ed eſaminando ſe i coefficienti convengano mediante le opportune ſoſtituzioni; ſervendoſi o di una ſola delle formule, e delle altre, troveremo, quando ciò ſia poſſibile, le integrali de' binomj triplicati, e ſeguendo la medeſima ſtrada, quella pure de' più alti, onde ſenza più diffondermi paſſerò a darne un eſempio.

Sia $dv = \overline{-\frac{40}{28}x^{\frac{3}{2}}dx + 8x^{\frac{1}{2}}dx - 10x^{-\frac{1}{2}}dx} \times \overline{2 + 3x^{-1}}^{-2}$. Ha queſto binomio triplicato diverſi gli eſponenti fra loro di un ſolo n, onde dovrà avere due ſole integrali, e ſiccome il termine $8x^{\frac{1}{2}}$ ha un eſponente, che frammezza gli altri due, così ſi conoſce, che queſto è il termine, che ſerve comunemente alle due integrali, e che la e ſi è $= \frac{1}{7}$, e perchè ſe tale binomio triplicato procedeſſe dalla ſola prima formula, facilmente ſi ſcorge, che dovrebbe eſſere $f \times \frac{p-n}{aq} = \frac{24}{10}$, o ſe procedeſſe dalla ſeconda, dovrebbe averſi $\frac{a \times q-n}{fp} = \frac{4}{10}$, le quali coſe non ſono, giova credere, che egli abbia le ſue integrali dall'una, e dall'altra formula. Fatte per tanto le opportune ſoſtituzioni ſu queſto penſiero, trovaſi che la differenziale della prima formula è $\overline{-\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \times dx \times \overline{2 - 3x^{-1}}^{-2}$ e quella della prima integrale della ſeconda formola è $\overline{-\frac{10}{25}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}} \times dx \times \overline{2 - 3x^{-1}}^{-2}$. Se la ſomma di queſte differenziali ſi mol-

moltiplichi per 4 ella reſtituiſce quella del dato binomio, e ſi ha $v = -\frac{8x^{\frac{5}{2}}}{21} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} \times \overline{2-3x^{-1}}^{-1}$.

Num. 229. Le coſe ſpiegate quanto baſta in propoſito di ſervirci delle due prime ſerie, allorchè i binomj replicati hanno ſempre l' eſponente r della parte compleſſa, che ſia lo ſteſſo, poſſono con tutta facilità, e debbono applicarſi a' binomj, che abbiano eſſo eſponente r diverſo per un numero intero poſitivo, e nel qual caſo è da ſervirſi della terza, e quarta ſerie. In un binomio triplicato, e così ne' più alti può accadere, che due parti abbiano lo ſteſſo r, e la terza, o le altre lo ſteſſo r, ma ſcemato, o accreſciuto di alcune unità. Allora dovrà ricorrerſi alla prima, ed alla ſeconda ſerie. In ſomma la coſa è per ſe talmente piana, che io ſtimo ſuperfluo il dilungarmi di più, parendomi aſſai l' avere aperto il fonte di queſte integrazioni. I principianti eſſi poſſono per loro eſercizio ſviluppare tutta queſta teoria, e ne farebbero un piccolo volumetto, a far la qual coſa le loro forze ſono certamente baſtanti.

Num. 230. Avvertirò ſolamente, che ſe in un binomio duplicato ſiavi una parte, che da ſe ſteſſa foſſe integrabile, pel preſente metodo, egli è aſſolutamente impoſſibile integrare il reſiduo per queſto metodo, onde all' ora è d' uopo vedere ſe abbia contraſſegni per eſſere integrato per altri modi. La ragione dell' addotta impoſſibilità è manifeſta, perchè non producendo la formula nel poſto caſo, altro che una ſola differenziale, giacchè l' altra, o le altre debbono, o diſtruggerſi pe' ſegni contrarj, o reſtar nulle pel proprio coefficiente, è aſſolutamente impoſſibile, che eſſa formulà con una ſola differenziale ne rappreſenti più d' una, e nella quale rappreſentazione conſiſte tutto l' artificio di queſto calcolo. Nel binomio poi triplicato una parte ve ne può eſſere integrabile, ma le altre due rimangono in ſenſo di verità un ſolo binomio duplicato, e lo ſteſſo è a proporzione de' binomj più alti.

SE-

Sezione Seconda.

Del Calcolo Integrale.

Articolo Secondo.

De' Binomj Differenziali Geometrici.

CAPO PRIMO.

Della naſcita de' Binomj relativi della ſeconda Claſſe, che contengono una, o più variabili, e loro integrazione.

Num. 231. Omiſi di eſporre nella prima parte di queſte mie Memorie la naſcita delle differenziali relative della ſeconda claſſe. Qui credo, che ſia il luogo di farla nota. S' intenderà eſponendola, che io non poteva fare altrimente, imperocchè è per tal modo congiunta con eſſoloro la propria integrazione, che ove non aveva io impreſo di trattare altro, che del Calcolo Differenziale, ſarebbe ſtato troppo fuor di luogo l' eſporla.

Sia dunque nell' Angolo retto A (*Fig.* 15.) formato dalle due rette indefinite EF. CD poſta la curva ABc, coll' origine ſua in A, e le ſerva d' aſſe la AF. Dal punto A, come centro, ſi tiri ſopra eſſa AF dalla parte oppoſta della curva il mezzo cerchio ECF. Il raggio AF, la di cui lunghezza è ora indeterminata, ſi nomini r. Pel vertice A ſi tiri la retta Bg, che ſeghi la curva in B, ed a queſta tiriſi la ſua contigua cf, paſſante anch' eſſa pel medeſimo vertice A. La AG ſia detta x, e la GB. y, onde AB ſarà generalmente $\sqrt{xx+yy}$, la di cui contigua Ac ſarà $\sqrt{xx+yy} + \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{xx+yy}}$. Queſta ultima parte, condotto col centro A l' archetto Bb, ſarà la differenziale bc.

Eſſen-

Eſſendo per tanto generalmente $Bc = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, onde $\overline{Bb}^2 = \overline{Bc}^2 - \overline{bc}^2$, avremo $Bb = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{xx + yy}}$, ovvero $\frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx + yy}}$;

Eſſendo poi ſempre $\sqrt{xx + yy} = AB$, a $\frac{ydx - xdy}{\sqrt{xx + yy}} = Bb :: r(Ag)$ ad fg, avremo queſto elemento $fg = \frac{r \times ydx - xdy}{xx + yy}$, ovvero $\frac{r \times xdy - ydx}{xx + yy}$, e queſta ſarà la formula generale eſprimente l'aumento, o decremento, col quale l'arco, o quadrante del cerchio, come una variabile correſpondente alla combinazione delle due coordinate della curva, allorchè tale combinazione paſſa nella ſua contigua, va creſcendo, o ſcemando. Moſtrerò a ſuo luogo come queſta formula generale ſia un caſo particolare di altra formula più generale. Se l'origine del quadrante ſi ponga in C, onde l'arco Cf eſſo ſia, che vada creſcendo, l'arco cf è fatto dagli archetti, che vanno da g verſo f, nel che farſi, i dx vanno creſcendo. Quindi è, che ſe ſi voglia, che l'arco da prenderſi per integrale (coſa che vedremo fra poco,) ſia l'arco, che comincia da C, dovrà adoperarſi la formula, nella quale dx è poſitiva. Per la medeſima ragione, ſe voleſſimo che l'arco, il quale dee ſervir di integrale cominciaſſe da E, e procedeſſe verſo C, nel qual caſo le dx vanno decreſcendo, all'ora dovrà prenderſi l'altra formula. E' ſempre neceſsaria queſta avvertenza per ben ſervirſene, come è neceſsario nella Logoritmica l'avvertire a' ſegni dell'integrale per prendere i Logoritmi dalla parte opportuna. Queſta formula generale contiene dunque una gran parte delle differenziali della ſeconda claſſe, e contenenti una ſola variabile, il che renderò chiaro nelle pratiche ſeguenti.

Num. 232. Ma prima proſeguirò a far paleſe la perfetta analogia, che paſsa fra queſte differenziali, e le logoritmiche. E in primo luogo, le logoritmiche hanno la loro variabile, eſpreſsa non già per l'aſse della Logoritmica, ma per la ſua coordinata, ed unicamente ſuſſiſtono, non per un' equazione fra le coordinate di eſsa Logoritmica, ma per un indicazione dell' ordinata.

dinata. Le relative della ſeconda claſſe, che ora (riſpettivamente alle qui notate), nominerò Circolari, hanno anche eſſe le loro variabili, eſpreſſe non già per le coordinate del cerchio di cui ſono eſſe gli elementi, ma vengono indicate dalle coordinate dell'altra curva AB. Le differenziali logoritmiche ſono tutte nella ſteſſa logoritmica fra di loro uguali, ed a qualſivoglia di loro corriſpondono poi coordinate variabili. Altrettanto è nelle circolari. Ogni minimo archetto è coſtante, ed altrimenti eſſere non può, atteſa la natura del cerchio, che è di poligono regolare di un numero indefinito di lati uguali: Ad ogn'uno poi di queſti corriſponde la ſotteſa variabile AB, laonde l'arco del cerchio è come l'aſſe di queſta, dirò così, nova ſpezie di logoritmica, le coordinate della quale ſono eſſa ſotteſa AB più il raggio coſtante r. La geometria è ſtata quella, che ci ha date le differenziali logoritmiche, ed è pur eſſa che le circolari ci ſomminiſtra. Per ottenere le integrali dalle differenziali logoritmiche altro non occorre, che prendere il logoritmo medeſimo della variabile, la quale ſecondo il preſcritto modo ha formata la differenziale. Così per la circolare altro non ſi può fare, che prender l'arco della differenziale, ſecondo il preſente modo trovata. Le integrazioni logoritmiche, ſi paſſano in integrazioni aſſolute, come lo moſtrai nell' *Appendice della Sezione* V. mediante le tavole de' Logoritmi. Le circolari, anche eſſe, e con maggiore facilità [non eſſendovi per loro riguardo l'imbarazzo di ritrovare il circolo confacente], ſi paſſano in integrazioni aſſolute, mediante le tavole de' ſeni, della qual coſa moſtrerò la pratica al *Num.* 238.

Finalmente le differenziali logoritmiche ricuſano l'integrazione col metodo aritmetico, e lo moſtrai, e ne ſpiegai il perchè al *Num.* 142. Nelle circolari, nelle quali ſi vede ricorrere la ſteſſa ragione, il ricuſano anch' eſſe, e rendono paleſe il loro rifiuto, producendo ſempre anch' eſſe, o logoritmi immaginarii, o quantità per altro modo impoſſibili, come andando avanti il vedremo.

Ma in tanta uniformità, che fra queſte due claſſi di differenziali ſi replicatamente mantienſi, ſta però ferma la invincibile diverſità della loro natura. Non può mai quella, che è logoritmica paſſare ad eſſere circolare, nè queſta ad eſſer l'altra; e ben

manifesta ora se ne ravvisa la cagione. E' bensì vero, che tanto i logoritmi, quanto gli archi del cerchio sono cadauno di loro una grandezza, che per rapporto a se è un composto di parti nella loro linea tutte necessariamente fra loro uguali, onde l'arco del cerchio per questo capo potrebbe figurare l'asse di una Logoritmica, o vincendevolmente, ma non corrispondendo poi le ordinate al bisogno, quelle del cerchio non possono mai figurare, per rapporto a tal cerchio, una logoritmica, onde delle due presenti differenziali diversissima necessariamente è la individuale natura.

Num. 233. Ma è tempo di chiudere questa digressione, e passare alle intenzionate pratiche. Sia l'equazione generale di tutte le parabole la $b^t x^c = y^{t+c}$, onde $y = b^{\frac{t}{t+c}} x^{\frac{c}{t+c}}$, e $dy = t\, b^{\frac{t}{t+c}} x^{\frac{-t}{t+c}} dx$. Sostituite queste grandezze nella formula, e fatte le debite riduzioni, e supponendo l'origine dell'arco in C, ritroveremo la differenziale indeterminata, e particolare a questo caso essere $\frac{r\, t\, b^{\frac{t}{t+c}} dx}{t+c \times x^{\frac{t}{t+c}} \times b^{\frac{2t}{t+c}} + x^{\frac{2t}{t+c}}} = A$. Questa differenziale dunque, ed ogni altra, che possa da essa rappresentarsi, ha generalmente per integrale l'arco Cg di quel cerchio, il quale avendo r per raggio, è determinato dalla linea BAg, la quale passando pel centro A comincia ove concorrono le due coordinate della parabola, che ha per parametro b, e la di cui natura è generalmente $b^t x^c = y^{t+c}$, e la variabile della differenziale è la x, ascissa dalla parabola medesima. Il parametro b, gli esponenti t, e c, ed il raggio r, ne' particolari binomj, che dalla trovata indeterminata differenziale possono rappresentarsi, possono facilissimamente determinarsi, e però con tutta analogia alle differenziali logoritmiche, potremo integrare tutte quelle differenziali, che sono gli elementi dell'arco del cerchio procreati nel descritto modo da qualsivoglia parabola, il che frà poco ci faremo a mostrare, come si faccia.

Num.

Num. 234. Sia dunque proposto di ricercare se il binomio $\frac{g x^c d x}{a + f x^n} = B$ sia integrabile per la trovata formula. Si pone la parte complessa tutta positiva; e l'esponente della medesima $= -1$ giacchè tutto questo lo ha essa formula. Ma siccome la variabile sotto al segno di questa ha per coefficiente l'unità, così bisogna preparare la B, levando un f di sotto al segno, onde si ottenga $\frac{g x^c d x}{f \times \frac{a}{f} + x^n}$. Ciò preparato, bisogna indagare le condizioni, che dovrà avere la c, esponente dalla variabile fuori del segno. Comechè la parabola procreatrice è $b^t x^c = y^{t+c}$. è manifesto, che se voglia aversi veramente una parabola, la c non può mai essere negativa. La t bensì lo può essere; ma con questo, che non sia maggiore di c. Questa avvertenza ci rende certi, che la differenziale indererminata A non può mai avere la x, che è fuori del segno, nel numeratore, la onde la c del binomio B dovrà anche essa in questo caso essere negativa, potrà, per altro essere o intera, o frazione. In questo secondo caso si esponga ella per $\frac{i}{m}$; All'ora dovendo essere $c = \frac{-c}{t+c}$ la c sarà $= -i$, ed $m = t + c = t - i$, e però t sarà $=$ alla somma del numeratore, e denominatore della frazione. Se poi c sia numero intero che dirò b, comechè dovrà essere $\frac{-c}{t+c} = b$, avremo pure $t = \frac{-c \times i + b}{b}$. Questa equazione, essendo di un problema indeterminato, ci permette di assumere liberamente per esempio c, ed indi determinare t, o vicendevolmente; e t, che in questo caso, che c sia intero, sarà sempre negativo, riuscirà in ogni assunzione qualsivoglia di c minore di questa. Può dunque assumersi per c l'unità, e all'ora t sarà $= \frac{-1-c}{c}$, Questa equazione però fa conoscere, che se c sia $= -1$ non può il proposto binomio B integrarsi per questo metodo, giacchè all'ora t riuscirebbe nullo, e la sua variabile, che è sotto al segno,

gno, ſvanirebbe. Non è però queſto per mancanza del preſente metodo, anzi di qui ſe ne conferma mirabilmente il valore. Il binomio B, che abbia $e = -1$ è una differenziale logoritmica, come a ſuo luogo il vedremo, e però come lo avertj *Num.* 232. non può integrarſi con un arco di cerchio.

Num. 235. Trovati c, e t, reſta ora da rintracciarſi il contraſſegno per riconoſcere quando B rappreſenti eſattamente A. Dovendo eſſere $e = \frac{-c}{t+c}$, avremo $t = \frac{-c \times 1-e}{e}$. Così l'equazione $\frac{2b}{t+c} = n$ ci darà $t = \frac{-c.n}{n-2}$, e queſte due equazioni producono $-2e-2+n=0$, la onde que' binomj, che avendo poſitiva tutta la parte ſotto al ſegno, e il di cui eſponente ſia -1., e la variabile fuori del ſegno nel denominatore, abbiano in oltre $-2e-2+n=0$, ovvero $\frac{e+1}{n} = \frac{1}{2}$, hanno per integrale quell'arco di cerchio Cg, che è terminato dall' ipotenuſa CA prolongata in g. di quel triangolo, che è fatto dalle due AL, LC, coordinate di una parabola, l' aſciſſa della quale è la x, che è pur la variabile del dato binomio B.

Num. 236. Reſtano ora da determinare, e il parametro b della parabola procreatrice, e il raggio r del cerchio, che dà l'integrale. Quanto al parametro, come che $b\frac{t}{t+c}$ è $= \frac{a}{f}$. ſarà $b = \sqrt{\frac{a}{f}}\frac{t+c}{2t}$, e però la parabola ſarà $\sqrt{\frac{a}{f}}\frac{t+c}{2t}\, x^e = y^{1+e}$. Se e ſia la ſuppoſta frazione $\frac{i}{m}$, la parabola diverrà $y^m = \sqrt{\frac{a}{f}}^{\frac{m}{2}} x^i$.; che ſe e ſia un numero intero, ſarà la parabola $\sqrt{\frac{a}{f}}^{\frac{1}{2e}} x = y^{\frac{1}{e}}$. Quanto al raggio, eſſendo $\frac{g}{f} = r\,t\,b\frac{e}{t+c} = r\,t\sqrt{\frac{a}{f}}^{\frac{1}{2}}$, riſulta $r = \frac{t+c \times g}{t\sqrt{af}}$. Se $e = \frac{i}{m}$ la parabola diverrà $\sqrt{\frac{a}{f}}^{\frac{m}{2}} x^i = y^m$; Che ſe e ſia un numero intero, ſarà la parabola $\sqrt{\frac{a}{f}}^{\frac{1}{2e}} x = y^{\frac{1}{e}}$ Quanto al raggio, eſſendo $\frac{g}{f} = r\,t\,b\frac{e}{t+c} = r\,t\sqrt{\frac{a}{f}}^{\frac{1}{2}}$, riſulta $r = \frac{t+c \times g}{t\sqrt{af}}$. Se $e = \frac{i}{m}$, diverrà $r = \frac{mg}{m-i \times \sqrt{af}}$, e ſe e ſia intero, ſi avrà $r = \frac{g}{1-e \times \sqrt{af}}$. Queſta equazione fa vedere, che nel caſo, che e ſia intero, il raggio del cerchio dovrà giacere non già da A verſo C, ma da A verſo D, il che per altro non muta il valore aſoluto di Cg.

Num. 237. Paſſiamo ora da queſto generale eſempio ad un particolare di queſta integrazione. Sia il Binomio $B = \frac{gdx}{x \times a+x}$. Siccome qui concorrono tutte le condizioni per eſſere rappreſentato dal binomio A, giacchè ha pure $e\frac{+1}{n}$, $= \frac{1}{2}$, il parametro della ſua parabola, giacchè $t = \frac{-1-e}{e}$, ſe $e = 1$ ſarà $\sqrt{\frac{a}{1}}^{\frac{1}{2-1}} = a$, e la parabola ſarà la $ax = yy$. Il raggio poi del cerchio ſarà $\frac{2g}{2-1 \times \sqrt{a}} = \frac{2g}{\sqrt{a}}$. Per ottener dunque l' integrale di B, deſcrivaſi la prima parabola $ax = yy$, e tirata la AC normale al di lei aſſe, ſopra di queſta normale col centro A ſi deſcriva il quadrante CE col raggio $\frac{2g}{\sqrt{a}}$; indi condotta la Lc normale all' AL, che ſia $=$ alla x, ſi conduca finalmente la retta cAg, che ci darà l' arco Cg integrale del propoſto B.

Num. 238. Ho deſcritto per ajuto de' Principianti minutamente queſta pratica: Per altro tirato unicamente il quadrante CE col raggio $\frac{2g}{\sqrt{a}}$, baſterà porre ſu di EAL la $AL = x$, ed in L cvi-

L eccitare la perpendicolare $Lc = \sqrt{x\,a}$, e pel punto c tirare la cAg. L'arco Cg sarà l'integrale della proposta differenziale esposto geometricamente a quel modo, che il logoritmo per esempio AQ (*Fig.* 7.) sarebbe l'integrale geometrica della propria differenziale. Ma se voleſſimo in numeri proſſimamente veri esso arco Cg, supposto che sieno altresì dati in numeri li $g.a.f.$, ed $x.$, onde possa aversi anche Lc, ed il raggio Ac; Per via di questi due lati noti del triangolo rettangolo ALc si ricavi, secondo che ne insegna la Trigonometria, l'angolo LAc, indi per la nota proſſima ragione del raggio alla circonferenza, si trovi la lunghezza dell'arco Cg, base di un tal angolo, e competente al raggio $\frac{2g}{\sqrt{a}}$, e così avraſſi in numeri proſſimamente veri la cercata integrale con non minore preciſione di quello, che si abbiano le integrazioni logoritmiche, e con molto maggiore facilità, non incontrandosi qui l'imbarazzo di dover ritrovare la logoritmica confacente.

Mostrerò ora in grazia de' Principianti, che la parabola $ax = yy$ da veramente la proposta $\frac{g\,dx}{\sqrt{x} \times a + x}$. Essendo dunque $y = \sqrt{ax}$, e $dy = \frac{\sqrt{a}\,dx}{2\sqrt{x}}$, la formula si cambierà in $\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{x}\,dx}{2 \times ax + x^2}$, che ridotta, e moltiplicata per $r = \frac{2g}{\sqrt{a}}$, restituisce il medesimo binomio $\frac{g\,dx}{\sqrt{x} \times a + x}$. Propongasi ancora $\frac{g\,dx}{x^2 \times a + fx^2}$; anch'essa integrabile per questo metodo. La sua parabola sarà $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{4}} x = y^{\frac{1}{2}}$, la onde $y = \left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{2}} x^2$, e $dy = 2\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{2}} x\,dx$, con che la formula si trasformerà in $\frac{-\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{2}} dx}{x^2 \times \frac{a}{f} + x^2}$, e comechè il raggio r è $\frac{-g}{\sqrt{a}\,f}$, avremo pure la proposta differenziale $\frac{g\,dx}{x^2 \times a + fx^2}$.

Num. 239. Se in vece di supporre la curva AI una delle parabole, la supporremo una curva assintotica (*Fig.* 16.) posta fra le assintoti AB, AF, e però rivolta colla convessità sua verso AF, e che l'angolo delle assintoti sia centro del cerchio, avremo collo stesso discorso fatto per le parabole l'archetto gf. Sia dunque l'equazione generale di tutte le iperboli la $b^t + c = x^t y^c$., avremo $y = b^{\frac{t+c}{c}} - \frac{t}{c} x$, e $dy = \frac{-t\,b^{\frac{t+c}{c}}}{c \times x^{\frac{t+c}{c}}}$;

e ne ricaveremo $fg = \frac{r \times c + t \times x^{\frac{t}{c}} b^{\frac{t+c}{c}} d\,x}{c \times b^{2\frac{t+c}{c}} + x^{2\frac{t+c}{c}}} = A =$ $\frac{g\,x^e\,dx}{f \times \frac{a}{f} + x^n} = B$. Non può la curva essere un iperbola quando c, e t non sieno amendue positivi, quindi è che nel binomio B, la xe nel presente caso non potrà mai essere nel denominatore. Potrà anche qui e essere intero, o rotto. La frazione, che esporrò per $\frac{i}{m}$, darà $t = i$, e $c = m$. Se sarà intero, allora come che $\frac{e}{1}$ è lo stesso che e, t sarà $= e$, $ec = 1$. Quanto al contrasegno per riconoscere se A sia rappresentato da B; l'equazione $\frac{t}{c}$ e dà $t = ce$. L'altra $\frac{2t+2c}{c} = n$ dà $t = \frac{cx\,n-2}{2} = te$, la onde ne proviene esso contrasegno $\frac{}{-2e-2+n}$ $=$ o che è $\frac{e+1}{n} = \frac{1}{2}$, e questo è pure lo stesso contrasegno occorso per la parabola, ma avvertir si debbe attentamente, che per l'iperbola e dee essere quantità positiva, e per la parabola, negativa. Il lato poi della podestà dell'iperbola avrà

dall'

dall' equazione $\frac{a}{f} = b^{\frac{2t+2c}{c}}$, onde b sarà $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{c}{2t+2c}}$, cioè $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{n}{2i+2m}}$, se e sia frazione, ovvero $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{2e+2}}$, se e sia intero. L' iperbola per tanto sarà $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{n}{2}} = x^i y^m$, ovvero $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{2}} = x^e y$. Finalmente il raggio r del cerchio si ricaverà dall' equazione $g = r \times c + t \times b^{\frac{t+c}{c}}$, che produce $r = \frac{mg}{i+m \times \sqrt{af}}$, ovvero $\frac{g}{e+1 \times \sqrt{af}}$.

Propongasi per tanto da ritrovare l' integrale di $\frac{g x^{\frac{3}{2}} dx}{f \times \frac{a}{f} + x^3}$, nella quale concorrono le condizioni di una differenziale, che potrà dirsi Iperbolo-circolare. Sarà l' iperbola $\frac{a}{f} = x^3 y^2$, onde $y = \frac{\sqrt{\frac{a}{f}}}{x^{\frac{3}{2}}}$, e $dy = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\frac{a}{f}} dx}{2 x^{\frac{5}{2}}}$, le quali cose trasformano la formula in $\frac{r \times 3 \sqrt{\frac{a}{f}} x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times \frac{a}{f} + x^3}$, e siccome $r = \frac{2g}{3\sqrt{af}}$, si restituisce la proposta differenziale.

Propongasi ancora di ritrovar l' integrale di $\frac{g x^2 dx}{f \times \frac{a}{f} + x^6}$.

L' iperbola procreatrice si troverà essere $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}} = x^2 y$. Il lato della sua podestà sarà $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{6}}$, e il raggio del cerchio $\frac{g}{3\sqrt{af}}$. L' integrale finalmente di $\frac{g x dx}{a^4 + x^4}$ avrà per iperbola procreatrice, l' iperbola apoloniana $aa = xy$. il lato della quale sarà a, ed $r = \frac{2a^2}{g}$.

Se in vece che la AB sia una curva, ella si supponga una retta (*Fig.* 15.) paralella all' asse AF, e sia l' origine sua sulla retta CD in D. La distanza costante AD si nomini b. In questo caso, giacchè b sarà $= y$, e perciò $dy = 0$, la formula si cambierà in $\frac{r b dx}{r b^e + x^2} = A = \frac{g dx}{f \times \frac{a}{f} + x^2} = B$. In questo caso si scorge senz' altro, che n non può essere altro, che 2, laonde quando i binomj abbiano -1 per esponente della parte complessa tutta positiva, $n = 2$, ed $e = 0$, o vi si possano ridurre, sono integrabili per questo modo, ne resta più a ritrovare, che la distanza b, e il raggio r. Quanto alla distanza b, vediamo subito, che ella è $\sqrt{\frac{a}{f}}$, e quanto al raggio r, l' equazione $\frac{g}{f} = r \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}}$ ce lo somministra $= \frac{g}{\sqrt{af}}$. Se supporremo la distanza b uguale al raggio r, troveremo $g = a$, onde il proposto binomio B si cambierà in $\frac{a dx}{a + x^2}$, che è, come dee essere il preciso notissimo elemento del cerchio trovato per via della di lui tangente, supponendo $a = aa$.

Num. 241. Sia la curva AB un altro quadrante di cerchio posante col suo centro anch' esso nel punto A, ed avente il raggio b. Essendo in questo quadrante, che si considera contenuto nell'angolo DAF, $y = \sqrt{bb - xx}$, la formula diverrà $\frac{r dx}{\sqrt{bb - xx}} = A$

$= A = \frac{g\,dx}{\sqrt{f} \times \sqrt{\frac{a}{f} - xx}} = B$. L'equazione $\frac{a}{f} = bb$ ci darà $b = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}}$, ch' è il raggio del quadrante procreatore, e l'altra $r = \frac{g}{\sqrt{f}}$ ci darà r, che è il raggio del mezzo cerchio, che somministra l' integrale. Se questi due raggi sieno uguali, la differenziale acquista la forma $\frac{b\,dx}{\sqrt{bb - xx}}$, che è lo stesso noto elemento del quadrante, che si trova mediante la formula $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Num. 242. Sia pure essa curva AB un altro mezzo cerchio adattato col diametro all' asse AL, ma posante col suo vertice in A. L'equazione $y = \sqrt{2bx - xx}$ ci darà la formula cambiata in $\frac{r\,dx}{2\sqrt{2bx - xx}} = A = \frac{g\,dx}{\sqrt{f}\,\sqrt{\frac{ax}{f} - xx}} = B$. Ricaveremo dunque in questo caso $b = \frac{a}{2f}$, ed $r = \frac{2g}{\sqrt{f}}$. In amendue i casi di questi due numeri si ha sempre il contrassegno $\frac{e+1}{n} = \frac{1}{2}$.

Num. 243. Se la curva AB fosse un ellisse posante col suo asse maggiore sull' asse AF, e col suo vertice in A, essendo l' espressione dell' ellisse propria di questa posizione la $y = \sqrt{\frac{p}{a}}$ $\times \sqrt{bb - xx}$ otterremo l'elemento $\frac{r b^2 \sqrt{\frac{p}{a}}\,dx}{\sqrt{\frac{p}{a}} \times bb - xx + x\sqrt{bb - xx}}$.

Capitando una differenziale di questa forma, sapremo qual' è l' arco del cerchio che ne dà l' integrale, e determineremo ciò che occorre, e dell' ellisse, e del cerchio che la medesima forma ci debbe dare.

Num.

Num. 244. Oltre alle differenziali di semplice binomio, e quelle di altre forme, che per questo modo si sono avute, ed anderemo pure mostrandone delle altre molte, ne nascono pure altre che sono binomj complessi. Se in vece di supporre, che le ascisse x comincino nel centro A. abbiano questo principio in un punto qualsivoglia G dell' asse, onde le ordinate della porzione AB (*Fig.* 15.) o BH (*Fig.* 16.) non abbiano parte in questo problema; all' ora detta p la parte costante AG, L' ascissa x dovrà dirsi $p + x$, e questa, come è noto, dovrà sostituirsi nell' equazione della curva, e nella formula in luogo di x, e di essa dovrà prendersi la differenziale. Questa mutazione però cagiona, che l'arco del cerchio, che somministra l'integrale, non comincia più in C, ma in altro punto corrispondente alla coordinata di p. Se la curva HI sia l' iperbola apoloniana, ed x si dica $p + x$ otterremo $\frac{2 r b^2 dx \times p+x}{b^4 + \overline{p+x}^4} \cdot = A = \frac{g\,dx \times \sqrt{q+x}}{f \times \frac{a}{f} + q + x^4} = B$.

Sono obvie le equazioni per determinare le $b.\ p.\ r.$, e tutto questo dee intendersi di ogni altra curva HI, che si adoperi in questa composizione, Così può supporsi l'ascissa $x = p - x$, o $x - p$, ed ottenersi per tali modi copia maggiore di differenziali integrabili.

Se supporremo la HI essere una retta, e che x sia $p + x$ all' ora la formula diviene $\frac{r b\,dx}{b\,b + \overline{p+x}^2}$, anch' essa binomio complesso. Questi binomj complessi, a cagione dell' essere l' esponente della loro parte complessa per lo più intero, possono rappresentare de' multinomj. Il presente, avendo l' esponente 2, rappresenta il trinomio $\frac{r\,b\,d\,x}{pp + bb + 2px + xx} = \frac{g\,dx}{f \times \frac{a}{f} + \frac{cx}{f} + xx}$.

Le equazioni $\frac{a}{f} = pp + bb$. $\frac{c}{f} = 2p$, e $\frac{g}{f} = rb$ ci somministrano $p = \frac{c}{2f}$. $b = \frac{\sqrt{4af - cc}}{2f}$, ed $r = \frac{2g}{\sqrt{4af - cc}}$.

Ciò determinato descriveremo il cerchio col raggio r, e collo-

cheremo la DB nella distanza b, e scierremmo la parte utile dell'arco, determinando la sua origine corrispondente al punto p. Se in vece di porre $p+x$ avessimo posto $p-x$, e all'ora le x cominciano all'estremo di p, opposto al suo principio sulla DC, avremmo avuto il trinomio $\frac{r\,b\,dx}{pp+bb-2px+xx}$, e $b.p.r.$ sarebbero i medesimi, che ora si sono trovati.

Num. 245. L'equazione $\sqrt{4af-cc}$, che necessariamente viene in questo trinomio c'obbliga ad un'annotazione di conto. Se cc sia maggiore di $4af$, tale espressione è immaginaria. Non è però per questo, che il proposto binomio, o trinomio, che vogliamo dirlo, sia immaginario, nè che il problema, che lo ha prodotto sia immaginariamente sciolto. Non vi è altresì difetto nel presente metodo, anzi di qui se ne conferma la sua efficacia. Quando dunque la cc è maggiore di $4af$, all'ora tale trinomio si vedrà (*Num.* 307.) integrabile per logoritmi, pel metodo dell'insigne Bernoullio, e del qual metodo parlerò a suo luogo, ma quando cc sia minore di $4af$, questo metodo del Bernoullio all'ora non serve, e ci da egli quantità immaginarie. Sono tutte queste certissime conseguenze, e conferme di ciò, che ho avvertito, cioè, che quando noi vogliamo integrare delle differenziali con metodi, che alle loro nature non convengono, e ciò per non essere per anche stata fatta bastevole distinzione sulle diverse nature delle differenziali, troviamo sempre quantità impossibili, le quali non pongono già in essere tali quantità, ma solo ci rendono avvertiti del nostro errore.

Num. 246. Nè solo può collocarsi il mezzo cerchio col suo centro in A, e col suo diametro addattato sull'asse AF, potremo figurarselo collocato in altre molte diverse posizioni, e con ciò ottenere altre diverse forme tutte integrabili per lo stesso metodo. Sta tutto l'artificio in ritrovare l'archetto Bb espresso per le coordinate della curva, indi, mediante la ragione, che ha il raggio a se stesso protratto fino al medesimo archetto, trovare il suo elemento gf. Darò di questa pratica un solo esempio, e lascierò con questo assai largo campo, anche tutto l'altro, pel quale sono fin'ora scorso, ad altri che totalmente il coltivino.

Num.

Num. 247. Sia dunque (*Fig.* 17.) la curva AB sul suo asse AE, sia posto col centro in C il mezzo cerchio DFE, la AG sia x, la GBy; e p la costante AC. sarà $GC=p-x$, laonde $CB=\sqrt{y^2+p-x^2}$, e, $bc=\frac{y\,dy-dx\times p-x}{\sqrt{y^2+p-x^2}}$, e $Bb=\frac{y\,dx+p-x\times dy}{\sqrt{y^2+p-x^2}}$; E perchè $\sqrt{y^2+p-x^2}\cdot\frac{y\,dx+dy\times p-x}{y^2+p-x^2}$ :: $r.gf$, avremo $gf=\frac{r\times y\,dx+dy\times p-x}{y^2+p-x^2}$, che è la formula generale di questo caso. Se la vorremo rendere particolare a tutte le iperboli, ella si cambierà in

$$\frac{r\,dx\times b^{\frac{t+c}{c}}\times c\,x^{\frac{t}{c}}+\overline{p-x}\times -t\times x^{\frac{t-c}{c}}}{c\times b^{\frac{2t+2c}{c}}+\overline{p-x}^2\times x^{\frac{2t}{c}}}=A=$$

$$\frac{g\,dx\times b\times ix^e-mx^{e-1}\times\sqrt{q-x}}{f\times f+x^n\times q-x^2}=B.$$

Perchè questa sia $=A$, oltre al dover avere la stessa forma, e gli stessi segni, bisogna poi che sia $\frac{2t}{c}=n$. L'equazione $\frac{t}{c}=e$ determinerà t, ec: L'equazione $b^{\frac{2t+2e}{c}}=\frac{br}{f}$ determinerà b: Le equazioni $e=i$, e $t=m$ determineranno i, ed m, e finalmente l'equazione $\frac{r\,b^{\frac{t+c}{c}}}{c}=\frac{g\,b}{f}$ determinerà $r=\frac{c\,g\,b}{f\times b^{\frac{t+c}{c}}}$, e p sarà determinata dall'equazione $p=q$. Così se fosse proposta $\frac{g\,dx\times a^2x-a^2\times\sqrt{q-x}}{f\times\frac{a}{f}+x^2\times\sqrt{q-x}^2}$, la quale ha la forma opportuna,

e $2e = n$, troveremo per l'equazione $\overline{c} = e = 1.$, che t, e c sono $= 1.$, e così l'equazione $\frac{a}{f} = b^4 \frac{(b^2 t + 2c)}{c}$ ci darà $b = \left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{4}}$, onde l'iperbola sarà $\left[\frac{a}{f}\right]^{\frac{1}{2}} = xy$. La distanza AC sarà q, e il raggio del cerchio $\frac{g}{\sqrt{af}}$.

Num. 248. Rischiarate colle premesse cose le parti di questo metodo è ormai tempo di mostrarlo, come lo promisi, in tutta la sua estensione. In vece di porre un arco di cerchio EC col diametro sulla retta EF (*Fig.* 15., e 16.) si supponga qualunque altra curva AC posta col suo vertice, o coll'origine delle sue ascisse in A (*Fig.* 18.); e col suo asse AE sull'asse continuato AG dell'altra curva AB. Sieno $AG = x$, $GB = y$: $AE = z$. $EC = v$. L'archetto Bb è generalmente $\frac{ydx - xdy}{\sqrt{xx+yy}}$., ed essendo $AC = \sqrt{zz + vv}$, avremo

$$\sqrt{xx+yy}\,(AB).\frac{ydx - xdy}{\sqrt{xx+yy}}\,(Bb) :: \sqrt{zz+vv}\,[AC].\,Cc.$$

che sarà $\frac{\overline{ydx - xdy} \times \sqrt{zz+vv}}{xx+yy}$. E poi $cf = \frac{zdz + vdv}{\sqrt{zz+vv}}$, onde Cf sarà $\sqrt{\frac{\overline{ydx-xdy}^2 \times \overline{zz+vv}^2 + \overline{zdz+vdv}^2 \times \overline{xx+yy}^2}{\overline{xx+yy} \times \sqrt{zz+vv}}}$.

Mostrerò qui prima di ogni altra cosa, che la formula trovata già al *Num.* 231., e che fin ora abbiamo adoperata, è un semplicissimo caso particolare di questa. Imperocchè sia la curva AC un quadrante, le ascisse z del quale comincino in C. (*Fig.*

(*Fig.* 15.) L'equazione di questo quadrante, detto r il di lui raggio, sarà $v = \sqrt{rr - zz}$, onde $dv = \frac{-zdz}{\sqrt{rr-zz}}$, e però $vdv = -zdz$. E' altresì $vv + zz = rr$. Fatte le dovute sostituzioni, la formula presente diviene quella stessa $\frac{r \times ydx - xdy}{xx+yy}$ del *Num.* 231.

Num. 249. La trovata formula dunque generale dà modo a formare un'equazione differenziale, un di cui membro sia composto di due variabili, mentre le y possono sempre per x, e le v per z, o vicendevolmente ridursi ad esser date, [supposta la separazione delle indeterminate]. Con due sole variabili dunque in un sol membro può sempre esporsi, mediante questa formula, l'archetto Cf, e conseguentemente un'equazione differenziale di questa forma può sempre integrarsi, o assolutamente; se l'espressione differenziale dell'archetto Cf, che puole aversi per la formula generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ sia per qualche modo integrabile, o mediante le quadrature, giacchè l'integrale di esso archetto Cf è sempre l'arco AC della curva nota. Spero che i miei Lettori gradiranno questa scoperta, che io credo affatto nuova, e che altresì gradiranno l'altra seguente essa pur nuova a mio credere.

Non solo dunque può ridursi l'espressione differenziale dell'archetto Cf a due sole variabili, può pure condursi a contenerne una sola. Le condizioni di questa formula danno necessariamente l'analogia $AG.GB :: AE.EC$; E siccome AG è x, e GB, è data per x, e così AE è data per v, ed EC è v, potremo ridurre nel posto caso anche x data per v., e conseguentemente ridurre l'espressione di Cf tutta nella sola variabile v., o in quella delle altre tre variabili, che ne sia in piacere, onde avere quattro diverse espressioni dello stesso archetto, per quattro diverse variabili, ed ottenere l'integrazione, o assoluta, o per le quadrature di una ben grande quantità di espressioni differenziali di una sola variabile, che mai probabilmente s'integrerebbero. Per ispiegar meglio questa pratica, e farne vedere il vantaggio, darò l'esempio seguente. Sia (*Fig.* 18.)

la

la AB la parabola $xp = yy$, e la AC la $zz \cdot q = v^2$., avremo $dx \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}} = dy$, e $3 \frac{\sqrt{v}\, dv}{2\sqrt{q}} = dz$ fatte le ſoſtituzinni nella formula generale ella ſi cambia in $\frac{\sqrt{v^2 p\, dx^2 \times v+q^2 + x\, dv^2}}{2\sqrt{xq} \times x+p \times 3v+2q^2} \times x+p^2 \times \sqrt{v+q}} = dt = Cf$. Queſta equazione ha il ſuo primo membro compoſto di due variabili, ed eſſendo $= dt$, che in queſto caſo è $= dv \frac{\sqrt{9v+4q}}{2\sqrt{q}}$, quando queſto elemento colla formula $\sqrt{dv^2 + dx^2}$ ſi voglia eſprimere, ed eſſendo l' integrale di queſto elemento $\frac{9v+4q^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{q}}$, viene a ſcoprirſi, che queſta è l' integrale della ſovratrovata differenziale contenente due variabili in un ſolo membro, da determinarſi per altro dalla retta BC paſſante pe' comuni vertici delle due curve, e pel punto B, eſtremo della coordinata di x. Quella differenziale, per quanto io credo, reſtando in tal forma mai non ſi ſarebbe ſaputa integrare. Siccome poi è $x.\sqrt{px}(y) :: \sqrt{v^3}(z).v.$, avremo $x = \frac{vp}{q}$, e fatte ulteriormente queſte ſoſtituzioni nella ſovra ridotta eſpreſſione ſi otterrà $dv \frac{\sqrt{vq+3v+2q^2}}{2\sqrt{q}\sqrt{v+p}} = dt$, e queſta eſpreſſione contenente una ſola variabile, e che neppur eſſa ſaprebbe integrarſi, ha per ſua integrale la ſovraſcritta $\frac{9v+4q^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{q}}$.

Nè l'una, nè l' altra delle due premeſſe eſpreſſioni, e delle quali abbiamo ſcoperta la vera integrale, differenziando queſta loro integrale al modo ordinario, non però ſi riproduce, e così in fatti debbe ſuccedere, imperocchè niuna di loro è nata per

per via aritmetica, ma amendue per via geometrica, e la prima con manifeſta relazione ad altre curve. Quindi noterò, o replicherò, darſi delle differenziali, e ſono queſte nella claſſe delle preſenti relative, le quali è impoſſibile integrar giammai per via aritmetica, benchè ſi abbiano in termini aſſoluti le loro vere integrali. Non ſo, che veruno abbia peranche penſato, e tanto meno reſa chiara queſta notizia, eſſenziale però tanto al Calcolo Integrale.

Ed eccoci aperto un larghiſſimo campo, in cui raccogliere una larghiſſima meſſe d' Integrazioni affatto nuove, e che per altro modo aver non ſi potrebbero, tanto riguardo alle eſpreſſioni differenziali, che contengono una ſola variabile, quanto in quelle, che in un loro membro ne hanno due. Biſognerebbe [e quì non v'ha più biſogno dell'invenzione, ma meramente del la fatica del calcolo] combinare aſſieme varie curve, e trovare i valori dell'archetto Cf eſpreſſi per una, o per due, o anche per più variabili, e ridotti tali valori in una Tavola, porre loro di contro le proprie integrali aſſolute, o l' arco della determinata curva, che ne è l'integrale. Biſognerebbe ordinarle in varie claſſi, le quali foſſero diſtinte per la ſimilitudine, e l' ordine col quale vanno variando forma, onde poteſſero comodamente compararſi, ſecondo il biſogno, alle differenziali, che capitaſſero da integrarſi. A me manca, e l' ozio, e la pazienza di eſequirlo, onde baſtandomi di avere ſcoperta queſta vaſta Provincia, laſcerò, che qualche Giovine ſtudioſo la sfrutti, arricchendone il calcolo integrale.

Num. 250. E' ritornando alla formula meno generale del *Num.* 231., eſſa ſola può darci le differenziali relative di queſta claſſe in forma di binomio di una ſola variabile, anzi quando queſti binomj abbiano -1 per eſponente della parte compleſſa, o vi ſi poſſano ridurre, eſſi unicamente procrear ſi poſſono dalle due generali ſpezie, o delle parabole, o dalle iperboli incompleſſe, e queſte due ſpezie, quando le loro aſciſſe ſieno compleſſe, ci danno ſempre binomj anch' eſſi compleſſi, e che in oltre ſono replicati. Si eccettua il caſo de' binomj ſemplici quando n ſia $= 2.$, ed $e = o$ nel qual caſo è la linea retta, che procrea queſte differenziali. Se poſcia l' eſponente del binomio ſia $= -\frac{1}{2}$,

o vi sì possa ridurre, all' ora è il cerchio medesimo, che le procrea. Le altre curve poi ce li danno in altre forme più composte, e tutto questo, e molto di più, sarebbe da esattamente distinguere, e porre in buon ordine, da chi volesse fare un utile trattato di questa seconda classe delle differenziali relative.

Num. 251. Io per tanto, non inoltrandomi a queste ricerche, proseguirò a dire della natura, ed integrazione di queste differenziali. Ho già mostrato nell' Articolo primo di questa seconda sezione, che i binomj differenziali hanno sovente le loro integrali composte di più integrali. Qui è ora facilissimo ad intendere, che un binomio differenziale può essere composto di una, o più integrali assolute, alle quali debba aggiugnersene per compimento una circolare. In fatti se fosse proposto il binomio $g\,dx\sqrt{aa-xx}$, noi per integrarlo lo dovremmo spostare, e ridurlo alla forma $\frac{g\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$, che è quella del *Num.* 241. Qui per tanto accade di fare una essenzial riflessione in proposito di quest' ultima integrale, affine di non cadere in errore. L' integrale, che si ricava dal citato Numero, è un preciso arco di cerchio, vale a dire una mera quantità lineare. Se per tanto l' integrale somministrata dallo spostare fosse stata o piana, o solida, nulla gioverebbe aggiugnere a questa la trovata lineare, che essendole eterogenea, non può con essa comporsi. Nelle differenziali assolute, e nelle logoritmiche il calcolo integrale dà da se medesimo le integrali, che dee, ma nelle circolari non le dà da se stesso, vi vuole il discernimento dell' Operatore, il quale badando attentamente alla natura del Problema, che egli maneggia, conosca se è lineare, o piano, o solido, e secondo tale esigenza ricavi l' integrale circolare anche essa, o lineare, o piana, o solida, la qual cosa facilissimamente otterremo.

Imperocchè essendo il piccolo settore Agf l' elemento del settore ACg (*Fig.* 15. 16.), esso settore Agf sarà generalmente espresso per $\frac{rr\times y\,dx-x\,dy}{2\times xx+yy}$, conciosiachè, essendo i settori simili in ragione duplicata de' loro raggi, avremo (*Num.* 231.) l' analogia $AB^2.(xx+yy)\frac{AB\times bB}{2}$ (cioè il settore della curva procreatrice, che è $\frac{\sqrt{xx+yy}\times y\,dx-x\,dy}{2\sqrt{xx+yy}}$.) :: Ag^2 [rr] al settore Agf del cerchio integratore, che perciò sarà, quale si era asserito, e questa è la formula, che ne' problemi piani dee adoperarsi per ritrovare le integrali opportune pe' differenziali proprj di questa classe, e siccome questa formula non è in veruna sua parte diversa nelle variabili dall' altra, ma solo nel raggio, così convengono a questa tutte le cose dette per l' altra, a riserva del raggio, che dee determinarsi con questa formula. Colla medesima facilità provederemo la formula opportuna pe' problemi solidi, mentre figurando, che la curva procreatrice sia non più una sola linea, ma come una lastra perfettamente piegata sul contorno della curva, e che la descrivente Bg, sia non più una linea, ma un piano, longo quanto è la lunghezza del raggio, e che tanto la lastra, quanto il piano stieno sempre posanti a squadra su di un comun piano, nascerà così un cuneo, o settore cilindrico. Questo solido è visibilmente espresso per $\frac{r^3\times y\,dx-x\,dy}{2\times xx+yy}$, la qual formula, ne pur essa è diversa nelle variabili della prima, ma unicamente nel raggio. Differirò più avanti l' agevolare con qualche esempio la pratica della qui posta avvertenza, e all' ora si conoscerà quanto era necessario il farla. Intanto raccorrò dalle cose poste in questo Capo, quanto credo utile, ed opportuno per ciò, che ho in mente di andare stendendo.

Num. 252. Il binomio $\frac{g\,dx}{x^e\times a+f\,x^n}$, che abbia tutta la parte complessa positiva, e che abbia, o possa spostandolo, o come lo vedremo nel susseguente Articolo, trasformandolo, ridursi ad avere $r=-1$. ed x^e nel denominatore, e che ridotto a tal forma abbia pure $\frac{e+1}{n}=\frac{1}{2}$ ha per integrale un arco di

di cerchio determinato dalle coordinate di una parabola, la di cui aſciſsa è la variabile del binomio, e che ritrovaſi ſecondo le coſe eſpoſte al *Num.* 236.

Che ſe ſtando le medeſime coſe, ſalvo che x^e, la quale ora ſia nel numeratore, all'ora è nel modo ſteſso un iperbola, che determina la integrale, ſecondo il detto al *Num.* 239.

Ma ſe n ſia $= 2$, all'ora, ſtando ſempre le medeſime coſe (ed e ſarà all'ora neceſsariamente nullo), non è nè l'iperbola, nè la parabola, che determinino l'integrale, ma una retta paralella all'aſse del medeſimo quadrante, come dal *Num.* 240.

Quando poi il binomio poſsa ridurſi alla forma $\frac{g\,dx}{\sqrt{a-fx^n}}$, nella quale la variabile ſotto al ſegno è poſta negativamente, e il ſegno è $= -\frac{1}{2}$, ed $n = 2$, e ſia $e = 0$; Allora è un quadrante di cerchio, che ne determina l'integrale, come al *Num.* 241.

Che ſe ſtieno le medeſime coſe, a riſerva, che a ſia $= 1$. e ſia $\frac{e+1}{n} = \frac{1}{2}$, all'ora, come dal *Num.* 242. è il mezzo cerchio, che ne determina l'integrale.

E' neceſsario, che tutte le curve fin qui nominate, le quali determinano le integrali, abbiano le loro coordinate incompleſſe, altrimenti non darebbero binomj ſemplici.

La linea retta, la di cui coordinata ſia compleſsa, determina un binomio come dal *Num.* 244., il quale ſe ſi voleſse integrare per logoritmi, queſti ſarebbero immaginarj.

Altre divertiſſime integrali di binomj compleſſi, e di multinomj determinar ſi poſsono con queſto metodo *Num.* 247.

Somminiſtra ancora moltiſſime integrali compleſse compoſte di due variabili, come dal *Num.* 248.

Tutte queſte integrali finalmente debbon prenderſi colla dovuta avvertenza. Se i problemi, che in eſse finiſcono ſono lineari, gli archi ſoli del cerchio ſono le integrali. Se i problemi ſono piani, le integrali ſono i ſettori del cerchio; E ſe ſono ſolidi, prender ſi dee per integrale un cuneo cilindrico. Tutto il bi-

ſi bisogno per non errare in tali occaſioni è ſpiegato *Num.* 251.

Quanto poi a trovare queſte differenziali, biſogna ſervirſi della formula preſcritta, al modo medeſimo, che in trovare le differenziali logoritmiche, ci è d'vuopo ſervirci della formula, che per queſte la Geometria ci ha inſegnata.

Sezione Seconda.

Del Calcolo Integrale.

Articolo Secondo.

De' Binomj Differenziali Geometrici.

CAPO SECONDO.

Della Naſcita de' Binomj relativi della prima claſſe, che contengono una ſola variabile, e loro integrazione, e parlaſi pure occaſionalmente de' loro multinomj.

ESpoſto in parte come naſcano i binomj differenziali relativi della ſeconda claſſe, onde dal vedere come naſcono, ſi è tratto regola per integrarli, ſeguendo la ſteſsa traccia, dirò ora ſuccintamente de' binomj differenziali della prima claſſe, o logoritmici.

Num. 253. Sia dunque l'integrale $L\,\overline{a+fx^n}^{r+1}$. La ſua differenziale ſarà $\frac{f n \times \overline{r+1} \times x^{n-1}\,dx}{\overline{a+fx^n}}$. Se queſta rappreſenta il binomio $\frac{g x^e\,dx}{\overline{a+fx^n}}$, giacchè neceſſariamente l'eſponente della compleſſa è $= -1$., dovremo avere $n-1 = e$, ed $\overline{r+1} \times fn = g$,

onde

onde $r+1=\frac{g}{fn}$. Quando dunque un binomio di queſta forma abbia $e+1-n=o$ [e così viene da $n-1=e$], la ſua integrale ſarà $L\overline{a+fx^n}^{\frac{g}{fn}}=\frac{g}{fn}L\,a+fx^n$.

Num. 254. Sia l'integrale $L\,x^{t+1}\times\overline{a+fx^n}^{r+1}$. La ſua differenziale è $\frac{dx\times a\times t+1+dx\times f\times t+1+n+nr\times x^n}{x\times a+fx^n}$

Se debba rappreſentare $\frac{g\,x^e\,dx}{a+fx^n}$, dovremo avere $t+1+n+nr=o$, e all'ora pure $e=-1$., ed $a\times t+1=g$. onde $\overline{t+1}=\frac{g}{a}$, e dovendo eſſere $t+1\left(\frac{g}{a}\right)+n\times r+1=o$ avremo ancora $r+1=\frac{-g}{na}$. Siano dunque t, ed r quali ſi vogliano, ſemprechè un binomio abbia gli eſponenti della parte incompleſſa, e della compleſsa, che amendue ſiano $=-1$., egli ſarà integrabile per logoritmi, ſia n qualſivoglia, e l'integrale ſarà $L\,x^{\frac{g}{a}}\times\overline{a+fx^n}^{-\frac{g}{an}}$, e giacchè $\frac{g}{a}\times\frac{n}{n}$ è lo ſteſſo che $\frac{g}{a}$, avremo $L\,x^{\frac{gn}{an}}\times\overline{a+fx^n}^{-\frac{g}{an}}=-\frac{g}{an}Lx^{\frac{1}{n}}\times\overline{a+fx^n}=-\frac{g}{an}\times-lx^n+La+fx^n=-\frac{g}{an}L\frac{a+fx^n}{x^n}$. Se poi nomineremo b la $t+1$, e c la $t+1+n+nr$, avremo la forma generale di un binomio duplicato $g\,dx\times\overline{b+ix^n}\times\overline{a+fx^n}$. L'equazione $gb=ab$ ci darà $b=\frac{gb}{a}$, ed $fc=i$ ci darà $c=\frac{i}{f}=\frac{gb}{a}+n\times r+1$, ed $r+1=\frac{ia-fgb}{fan}$, e l'integrale ſarà $Lx^{\frac{gb}{a}}\times a+fx^n\overline{}^{\frac{ia-fgb}{fan}}$

Sia ancora l'integrale $L\frac{b+px^t}{b-px^t}$. Avremo $\frac{ptx^{t-1}dx}{b+px^t}+\frac{ptx^{t-1}dx}{b-px^t}=\frac{2bptx^{t-1}dx}{bb-ppx^{2t}}$. Se queſto debba rappreſentare $\frac{g\,x^e\,dx}{a-fx^n}$ dovrà eſſere $2t=n$, onde $t=\frac{n}{2}$, e però $\frac{n-2}{2}=e$, che ſomminiſtra $\frac{e+1}{n}=\frac{1}{2}$. Un Binomio dunque, che abbia la f negativa, $\frac{e+1}{n}=\frac{1}{2}$, e l'eſponente della compleſſa $=-1$, avrà per integrale $n\sqrt{a}f\,L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{f}x^n}{\sqrt{a}-\sqrt{f}x^n}$. Allo ſteſſo modo ſe il binomio abbia a negativa, ed f poſitiva, e il reſtante degli altri contraſſegni, ha per integrale $n\sqrt{a}f\,L\frac{\sqrt{f}x^n-\sqrt{a}}{\sqrt{f}x^n+\sqrt{a}}$

Num. 255. Sia l'Integrale $l\,x^{e+1}\times\overline{a+fx^n}^{r+1}+x^{e+1}\times\overline{a+fx^n}^{r+2}$ Si avrà $\frac{dx}{x}\times\overline{e+1}\times a\times\overline{a+1}+fx^n\times\overline{e+1}\times\overline{2a+1}+n\times\overline{r+1}\times\overline{a+1}+nar+ffx^{2n}\times\overline{e+1}+n\times\overline{r+2}$ diviſo tutto per $a\times\overline{a+1}+fx^n\times\overline{2a+1}+ffx^{2n}$.

Queſta differenziale può rappreſentarſi per $\frac{g\,dx}{x}\times\frac{b+cx^n+bx^{2n}}{p+qx^n+tx^{2n}}$. Se $p=a+1$ ſia zero, ſarà un binomio tri-

plica-

plicato, e potrà trovarsene l' integrale. Nella posta forma generale, che è di trinomio replicato, non possono mai annientarsi nè cx^n, nè hx^{2n}, nè tx^{2n}. Ben possono aversi le altre seguenti forme, delle quali le prime due sono di binomio replicato, e l' ultima di trinomio duplicato. Sono dunque le prime mentovate forme $\frac{g\,dx}{x} \times \frac{cx^n + hx^{2n}}{q + tx^{2n}}$, quando sia $e + 1 = 0$; $\frac{g\,dx}{x} \times \frac{cx^n + hx^{2n}}{p + tx^{2n}}$, quando $e + 1$, e $2a + 1$ sieno $= 0$. inoltre $\frac{g\,dx}{x} \times \frac{b + cx^n + hx^{2n}}{p + tx^{2n}}$, quando $2a + 1$ solamente sia $= 0$; finalmente $\frac{g\,dx}{x} \times \frac{cx^n + hx^{2n}}{p + qx^n + tx^{2n}}$, quando $e + 1$ solamente sia $= 0$.

Lascierò che i principianti per loro esercizio, e capitale prendano delle altre integrali logoritmiche, come sarebbe $Lx^{e+1-n} \times a + fx^n{}^{r+1}$, ed altre pure variatamente composte, onde ne traggono altre diverse formule di binomj, e multinomj replicati. Capitando loro nella soluzione de' Problemi differenziali, i quali sieno rappresentati dalle formate formule, avranno il vantaggio di saperli integrare. Passerò dunque a dir qualche cosa succintamente di alcune altre forme di differenziali logoritmiche, delle quali non m' è avvenuto di vederne da altri trattato.

Num. 256. Sia proposto d' integrare $g\,x^e\,dx\,lx$. Sia l' integrale $\frac{g\,x^{e+1}\,lx}{e+1}$, la sua differenziale sarà $g\,x^e\,dx\,lx + \frac{g\,x^e\,dx}{e+1}$. Sia l' integrale $-\frac{g\,x^{e+1}}{e+1}{}^2$, la sua differenziale sarà $-\frac{g\,x^e\,dx}{e+1}$, dunque della proposta differenziale l' integrale si è $\frac{g\,x^{e+1}\,lx}{e+1} - \frac{g\,x^{e+1}}{e+1^2}$. Nella proposta differenziale non può essere $e = -1$.

Sia

Sia data la differenziale $g\,x^e\,dx\,La + fx^n{}^r$ da trovarsene l' integrale. Sia dunque l' integrale $\frac{g\,x^{e+1}\,La + fx^n{}^r}{e+1}$, la sua differenziale sarà $gx^e\,dx\,La + fx^n{}^r + \frac{gfnr \times x^{e+n}\,dx}{e+1 \times a + fx^n}$. Quando questa seconda parte sia integrabile, è manifesto potersi avere la richiesta integrale. Nè pur qui e può essere $= -1$.

Num. 257. Trovar l' integrale dell' equazione $L\frac{dx}{x} = dv$. L' espressione $\frac{dx}{x}$ denota qualsivoglia differenziale logoritmica, o incomplessa, o complessa, purchè sia vera differenziale logoritmica, e se fosse fatta da più logoritmi, torna lo stesso. Perchè poi la proposta sia una vera equazione, comechè la differenziale logoritmica è la differenza dell' asse della logoritmica, la quale differenza è immutabile, così è necessario, che dv sia costante. Ciò osservato, dico, che la cercata integrale è $lx = v$ Questa equazione somministra $\frac{dx}{x} = dv$, e differenziando $\frac{ddx}{x} - \frac{dx^2}{x^2} = 0$, onde $\frac{ddx}{dx} = \frac{dx}{x}$, ed integrando, $ldx - lx = dv$, onde come era stato proposto $L\frac{dx}{x} = dv$. Così di $L\frac{x\,dx}{aa + xx} = dv$ l' integrale sarà $L\sqrt{aa + xx} = v$., e così sempre.



Sezione Seconda.

Del Calcolo Integrale.

Articolo Terzo.

De' Binomj tanto Differenziali, che Relativi di una ſola Variabile.

Del Metodo delle Trasformazioni.

LE integrazioni de' Binomj Aritmetici, che nell' *Articolo I.* di queſta Sezione ſi ſono ottenute, poſſono a dir vero ottenerſi con tutta facilità pel metodo delle trasformazioni, che ora imprendo a ſpiegare. Ben lungi per altro, che l'aver poſto quell' Articolo ſia coſa ſuperflua, ella è ſtata affatto neceſſaria. Una porzione del metodo delle trasformazioni ſe ne ſarebbe rimaſta inutile, ed inefficace, ſe in ſoccorſo ſuo non entraſſe il metodo di ſpoſtare i binomj, e queſto metodo non poteva, per quanto me ne pare, ne più chiara, ne più comodamente ſtabilirſi, che colle coſe, che formano quell' Articolo. I Binomj replicati non cadono ſotto il metodo delle trasformazioni. Quanto poi a i Binomj Relativi della ſeconda claſſe, de' quali ho trattato nel primo Capo del ſecondo Articolo, il metodo dello ſpoſtare a dir vero non gli integra già, ma unicamente viene, dirò così, a cavarli fuori, e ſepararli dalle altre parti, che compongono un binomio, onde renduti per un tal modo conoſcibili, poſſano indi integrarſi col metodo loro confacente. La ſteſſa coſa ſuccede nel metodo delle trasformazioni per riguardo a' Binomj logoritmici in alcuni caſi, onde per gli altri, ne' quali non ſuccede, è ſtato d'uopo trattare della loro integrazione, il che ho fatto nel Capo II. di eſſo ſecondo Articolo. Quindi è pertanto, che unendo al Metodo delle trasformazioni le coſe premeſſe, egli avrà un' eſtenſione molto più ampia, e ci ſomminiſtrerà delle integrazioni affatto nuove.

Num.

Num. 158. Sia dunque il ſolito binomio $A = gx^e dx \times \overline{a+fx^n}^r$. Suppongaſi $a+fx^n = y$ la onde $x = \frac{y-a}{f}^{\frac{1}{n}}$, e però $dx = dy \times \frac{y-a}{nf}^{\frac{1-n}{n}}$. Sarà pure $x^e = \frac{y-a}{f}^{\frac{e}{n}}$, ed $\overline{a+fx^n}^r = y^r$. Fatte queſte tre ſoſtituzioni nella A, ella ſi cambierà in $\frac{g}{nf^{\frac{e+1}{n}}} y^r dy \times \overline{y-a}^{\frac{e+1-n}{n}} = B$. Se per tanto foſſe $\frac{e+1-n}{n} = i$ (i è un numero intero poſitivo qualunque compreſo anche il zero), la B ſarebbe cambiata, o nella ſola $\frac{g}{fn^{\frac{e+1}{n}}} y^r dy$, ſe $i = 0$, o in altrettante differenziali incompleſſe, quante unità contiene $i+1$; onde tutte integrabili pel *Num.* 201., quando r non ſia $= -1$, mentre in queſto caſo ſpetterebbe al *Num.* 202. ſe i ſia zero, o vi avrebbe parte, quando r eſſendo numero intero negativo, che non ſuperi i di due unità, giacchè quando non lo ſuperi, fra le parti nelle quali A viene riſſoluta, una ve ne avrà ſempre, che ſarà logoritmica, ma niuna ve ne ſarà, quando r ſuperi i di due unità.

In queſto caſo dunque di r intero negativo, che non ſuperi i di due unità reſta reſo chiaro col fatto ciò che ho accennato di ſopra, cioè che il metodo delle trasformazioni cava fuori del binomio quelle parti, che lo compongono, e che ſono differenziali, o relativi, o uniti con aſſoluti, onde poi applicando a

tali parti i propri metodi, viene ad ottenerſi l' intera integrale del propoſto binomio.

L' integrale per tanto di A, che abbia $i = o$ ſarà $\frac{g y^{r+1}}{r+1 \times f^n}$, giacchè la ſuppoſizione di $\frac{e+1}{n} - n = o$ dà $\frac{e+1}{n} = 1$., e ſoſtituendo in queſta integrale la $a + f x^n$ in vece di y ci riſulta l' integrale di $A = \frac{g \times \overline{a+fx^n}^{r+1}}{nf \times r+1}$. Se r ſia $= -1$ ſi avrà $\frac{g}{nf} L\, a + f x^n$; e quando i ſia intero, ſi hanno allo ſteſſo modo tante differenziali incompleſſe, quante unità contiene $i+1$. L' integrale $g \times \frac{\overline{a+fx^n}^{r+1}}{nf \times r+1}$ ſopra trovata è quella medeſima $g x^{e+1+n} \times \frac{\overline{a+fx^n}^{r+1}}{f \times e+1+nr}$, che ritrovammo al *Num.* 214., giacchè eſſendo $e+1-n = o$, e da queſta $e+1 = n$ è evidente eſſere amendue la ſteſſa quantità.

Gioverà pe' Principianti ſtendere un eſempio. Sia $A = g x^{\frac{1}{3}} \overline{a+fx^2}^{r} d x \times a + f x^{\frac{4}{3}}$. Eſſendo per tanto $\frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} = o$ ſiamo nel caſo di queſta integrazione, e la premeſſa formula generale ci da ſubito la ſua integrale $3 g \frac{\times \overline{a+fx^{\frac{4}{3}}}^{r+1}}{4f \times r+1}$. Se r foſſe ſtato -1. l' integrale ſarebbe ſtata $\frac{3g}{4f} L\, a + f x^{\frac{4}{3}}$ Sia $A = g x^{\frac{1}{2}} d x \overline{a+fx^{\frac{1}{2}}}^{r} \times a + f x^{\frac{1}{2}}$, eſſendo $\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}$ diviſo per $\frac{1}{2} = 2$. viene la trasformata $\frac{2 g y^r d y}{f^2} \times \overline{y-a}^{2}$, la di cui integrale, ſoſti-

ſoſtituendo $a + f x^{\frac{1}{2}}$ in vece di y ſi è $2 g \frac{\times \overline{a+fx^{\frac{1}{2}}}^{r+3}}{f^3 \times r+3} - 4 g a \frac{\times \overline{a+fx^{\frac{1}{2}}}^{r+2}}{f^3 \times r+2} + 2 g a^2 \frac{\times \overline{a+fx^{\frac{1}{2}}}^{r+1}}{f^3 \times r+1}$. Se r foſſe ſtato $= -4$, onde ſuperaſſe $i = 2$ di due unità, niun logoritmo avrebbe luogo in una tale integrale, ma ſe foſſe ſtato $= -3$, la prima integrale ſarebbe ſtata logoritmica. Se r foſſe ſtato -2, la ſeconda ella ſarebbe ſtata la logoritmica, e lo ſarebbe ſtata la terza, ſe r foſſe ſtato -1.

Num. 259. Nel medeſimo Binomio A ſia $a + f x^n = y x^n$, laonde $x = a^{\frac{1}{n}} \times \overline{y-f}^{-\frac{1}{n}}$, e $dx = dy \times -\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n} \times \overline{y-f}^{-\frac{1-n}{n}}$.

E' altresì $x^e = a^{\frac{e}{n}} \times \overline{y-f}^{-\frac{e}{n}}$, ed $\overline{a+f^n}^{r} = a^r y^r \times \overline{y-f}^{-r}$; facendo queſte ſoſtituzioni la A ſi cambierà in $-g \frac{a^{\frac{e+1+nr}{nr}}}{n} y^r d y \times \overline{y-f}^{-\frac{e-1-n-nr}{n}}$. Se ancor qui ſia $-\frac{e-1-n-nr}{n} = i$, la propoſta A ha tutto ciò, che ſi è moſtrato nel numero antecedente. Nel caſo di $i = o$ ſarà l' integrale $-\frac{g y^{r+1}}{an \times r+1} = -\frac{g \times \overline{a+fx^n}^{r+1}}{an \times r+1 \times x^{nr+n}}$. Queſta integrale è la medeſima $g x^{e+1} \frac{\times \overline{a+fx^n}^{r+1}}{a \times e+1}$, che in queſto medeſimo caſo di $i = o$ ſi ritrovò al *Num.* 210., il che è paleſe dall' eſſere neceſsariamente $e+1 = -n-nr$. Se r foſſe $= -1$, l' integrale ſarebbe $-\frac{g}{an} \times L \frac{a+fx^n}{x^n}$ come trovoſſi già al *Num.* 254.

Semprechè il Binomio A abbia e, ed r, che ſieno $=1$, ſia n qual ſi voglia numero, avremo, come il trovammo al detto Numero l' integrale $-\frac{g}{an} L \frac{a+fx^n}{x^n} = \frac{-g y^{-1} dy}{an}$, giacchè allora $1-1+n-n=0$.

Num. 260. Semprechè il Binomio A abbia e, ed r, che ſieno $=-1$. l' eſponente $-e-\frac{1-n-nr}{n}$ ſarà zerò, e però ſia pure n qualunque quantità ſi voglia, La A, trasformata come nel numero antecedente, diverrà $-\frac{g\,dy}{any}$, che è una differenziale logoritmica, la di cui integrale [*Num.* 202.] è $-\frac{g\,ly}{an}$, e perchè y ſi è ſuppoſta $= \frac{a+fx^n}{x^n}$ riſulta, che il Binomio A, il quale abbia e, ed $r=-1$, o vi ſi poſſa ridurre e ha per integrale $\frac{-g}{an} L \frac{a+fx^n}{x^n}$ o pure $\frac{-g}{an} L \frac{a-fx^n}{x^n}$, o $\frac{-g}{an} L \frac{-a+fx^n}{x^n}$ ſecondo la forma, che avrà eſſo Binomio A.

Num. 261. Il metodo dunque delle trasformazioni ci ſomministra le medeſime integrali, che ne' due articoli antecedenti abbiamo ritrovate. Per le integrali di Binomio ſemplice meramente aſſolute, e che io ho diſtinte col nome di aritmetiche, e ſono quelle, che ſono il ſecondo termine di un Binomio, per quanti tentativi io abbia fatti, e moltiſſimi certamente ne ho fatti, non mi è mai riuſcito di poterne integrar altre, che quelle che abbiano i due contraſſegni $\frac{e+1-n}{n} = i$, ed $\frac{-e-1-n-nr}{n} = i$. Fuori di tali contraſſegni, mai ho potuto ottenere integrazioni di Binomj, le quali ſieno meramente aſſolute.

In altri contraſſegni poi, e queſti gli eſporrò ſuſſeguentemente, mi è bensì avvenuto di integrare de' Binomj per quantità, o relative, o dell' una, o dell' altra claſſe, o meſcolate aſſieme, o con aritmetiche. Quindi io ſono portato a credere fermamente, e alla occaſione ne anderò moſtrando i fondamenti, che fra Binomj ſemplici di una ſola variabile, i puri aritmetici ſieno riſtretti unicamente entro i due poſti contraſſegni. Comunque ſia, paſſerò alle integrazioni, che ſono, o hanno miſcuglio colle relative.

Num. 262. Per procedere con chiarezza in ricercare queſte integrazioni fa di meſtieri diſtinguere tre forme, che la parte compleſſa del Binomio può avere, ſono queſte $a+fx^n$. $a-fx^n$. $-a+fx^n$. La quarta forma $-a-fx^n$., ſe l'eſponente r ſia, o intero negativo, o frazione, il di cui denominatore ſia diſpari, ſi porta alla prima forma mutando a lei, ed al coefficiente i ſegni. Se poi eſſo denominatore ſia pari, ſi ſa, che ella ſarebbe immaginaria, ſembra, che la terza forma poteſſe ridurſi alla ſeconda mutando i ſegni, ma quando l' eſponente r ſia frazione, che abbia per denominatore un numero pari, all' ora ſe era reale la renderemmo immaginaria.

Num. 263. Dopo di queſto per preparare quanto occorre per la preſente ricerca, moſtrerò in primo luogo, che ogni Binomio $\frac{gx^e dx}{\sqrt{\pm a+fx^n}}$, il quale abbia $r=-\frac{1}{2}$, o vi ſi poſſa ridurre, e che la parte variabile ſotto al ſegno ſia poſitiva, ed abbia in oltre, o vi ſi poſſa ridurre $e=\frac{n-2}{2}$ ha per integrale $\frac{g}{n\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{a+fx^n}+\sqrt{f}x^n}{\sqrt{a+fx^n}-\sqrt{f}x^n}$, o $\frac{g}{n\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{-a+fx^n}+\sqrt{f}x^n}{\sqrt{-a+fx^n}-\sqrt{f}x^n}$ ſecondo la forma, che avrà avuto il Binomio.

In fatti queſto logoritmo è $L\sqrt{a\pm fx^n}+\sqrt{\ }$ (B) $-L\sqrt{a}$

$L\sqrt{a+fx^n} - \sqrt{fx^n}$. ($C$). La differenziale logoritmica di B è $\frac{nfx^{n-1}dx}{2\sqrt{fx^n}\times\sqrt{a+fx^n}}$., e quella di C è pur' essa $\frac{nfx^{n-1}dx}{2\sqrt{fn^n}\times\sqrt{a+fx^n}}$, e però unite assieme, e moltiplicate per $\frac{g}{n\sqrt{f}}$ riproducono la differenziale proposta $\frac{gx^{\frac{n-2}{2}}dx}{\sqrt{a+fx^n}}$, nella quale $\frac{n-2}{2}$ equivale ad e. Serva per ispiegazione di questa, e delle successive pratiche il seguente esempio.

Sia proposta la differenziale $x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx\sqrt{a+4x}}{2} = A$, alla quale, avendo $\frac{-\frac{1}{2}-2}{2} = e$, altro non manca per essere soggetta a questa integrazione se non che r, che nella proposta è $\frac{1}{2}$, divenga $-\frac{1}{2}$. Piglio dunque l' integrale $B = x^{-\frac{1}{2}}\times\frac{\overline{a+4x}^{-\frac{3}{2}}}{8}$. La sua differenziale è $x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx\sqrt{a+4x}}{2} = A - \frac{ax^{-\frac{3}{2}}dx\sqrt{a+4x}}{16} = -C$. Piglio l' altra integrale $-D = -ax^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{a+4x}}{8}$. La sua differenziale è $\frac{ax^{-\frac{3}{2}}dx\sqrt{a+4x}}{16} = C - \frac{ax^{-\frac{1}{2}}dx}{4\sqrt{a+4x}} = -E$. Dunque $dA - dD$ è $= A - C + C - E$

$-E = \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx\sqrt{a+4x}}{2} - \frac{ax^{-\frac{1}{2}}dx}{4\sqrt{a+4x}}$, e però $\int A = \int E + B - D$. Ma $\int E$, cioè l'integrale di E è secondo il presente numero $\frac{a}{8}L\frac{\sqrt{a+4x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{a+4x}-\sqrt{4x}}$, dunque sarà $\int A$, cioè l' integrale cercata di $x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx\sqrt{a+4x}}{2} = x^{-\frac{1}{2}}\times\frac{a+4x^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{ax^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a+4x}}{8} + \frac{a}{8}L\frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}}$ che si riduce a $\frac{\sqrt{x}\sqrt{a+4x}}{2} + \frac{a}{8}L\frac{\sqrt{a+4x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+4x}-2\sqrt{x}}$.

Num. 264. Sia ora l' ipotesi $a+fx^n = y^v x^n$. La v è una costante indeterminata. Con questa ipotesi il solito Binomia $A\ldots gx^e dx\times\overline{a+fx^n}^r$. se abbia $a+fx^n$. si cambierà nel B, $= -vga^{e+\frac{1}{n}+nr}\times y^{vr+v-1}dy \times y^v - f^{\frac{-e-1-n-nr}{n}}$, e in questa forma sarà $y^v = \frac{a+fx^n}{x^n}$. Se poi abbia la forma $a-fx^n$. all' ora B avrà sotto al segno y^v+f, è sarà $y^v = \frac{a-fx^n}{x^n}$, e finalmente se la forma sia $-a+fx^n$, la B avrà sotto al segno $f-y^v$., e sarà $y^v = \frac{-a+fx^n}{x^n}$.

Num. 265. Per la forma $a+fx^n$. ſuppongaſi $vr+v-1=\frac{v-2}{2}$, (equazione E) ., e $-e-\frac{1-n-nr}{n}=-\frac{1}{2}$ (equazione R) ., e la B con tali ſuppoſizioni piglierà la forma $\frac{-vgy^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{a}\sqrt{y^v-f}}$. Queſta, ſecondo il *Numero* 263., ha per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{-f+y^v}+\sqrt{y^v}}{\sqrt{-f+y^v}-\sqrt{y^v}}$ cioè $\frac{-g}{n\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{a+fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+fx^n}-\sqrt{a}}$ giacchè in queſta occaſione è $y^v=a+fx^n$. La forma dunque $\frac{a+fx^n}{x^n}$ avrà queſta integrale, ſemprechè abbia $r=-\frac{1}{2}$ come ricavaſi dell' equazione E, ed $e=-1$., come dall' equazione R.

Num. 266. Per la forma $a-fx^n$. ſia $vr+v-1=\frac{v-2}{2}$ $(E]$ e $-e-\frac{1-n-nr}{n}=-\frac{1}{2}$ (R) . la B diverrà $\frac{-vgy^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{a}\sqrt{f+y^v}}$, che pel *Num.* 263. ha per integrale $-\frac{g}{n\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{f+y^v}+\sqrt{y^v}}{\sqrt{f+y^v}-\sqrt{y^v}}$ cioè quando nella forma, $a-fx^n$ ſia $r=-\frac{1}{2}$, ed $e=-1$. ella hà per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-fx^n}}$.

Num.

Num. 267. In queſta medeſima forma $a-fx^n$. ſia $vr+v-1=\frac{v-2}{2}$ (E), e $-e-\frac{1-n-nr}{n}=-1$ $[R]$. La B diverrà $\frac{-vgy^{\frac{v-2}{2}}dy}{naxf+y^v}$. Queſta pel *Num.* 235. hà per integrale un arco di cerchio da determinarſi colla parabola ſe ſi pigli v minore di 2, o pel *Num.* 239. colla iperbola ſe v ſi pigli maggiore di 2. La forma dunque $a-fx^n$ ha la ſovra trovata integrale quando abbia ancora $r=-\frac{2}{2}$, ed $e=\frac{n-2}{2}$, ed è $y^v=\frac{a-fx^n}{x^n}$.

Num. 268. Nella medeſima forma $a-fx^n$. ſia $vr+v=0$ $[E]$ $-e-\frac{1-n-nr}{n}=-1$ (R), e $v=2$ (N). La B diverrà $\frac{-2gdy}{naxf+y^2}$. Pel *Num.* 240. queſta è un arco di cerchio da determinarſi da una retta paralella alla di lui tangente, ed è l'integrale della forma $a-fx^n$, che abbia $r=-\frac{1}{2}$. ed $e=\frac{n-2}{2}$., ed è $y^2=\frac{a-fx^n}{x^n}$.

Num. 269. Per la forma $-a+fx^n$ ſia $vr+v-1=0$ $[E]$ $-e-\frac{1-n}{n}-nr=-\frac{1}{2}$ (R), $v=2$ $[N]$. La B ſarà $\frac{-2gdy}{n\sqrt{a}\sqrt{f-y^2}}$, che pel *Num.* 241. dà un arco da determinarſi

con un quadrante, ed è l'integrale della forma $-a+fx^n$. che abbia $r=-\frac{1}{2}$ ed $e=-1$. essendo $y^2=\frac{-a+fx^n}{x^n}$.

Num. 270. Nella medesima forma $-a+fx^n$. sia $vr+v-1=-\frac{2}{2}$, $-e-1-\frac{n}{n}-nr=-\frac{1}{2}$ (R) $v=1$ (N). La B si cambierà in $\frac{-g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{y}\sqrt{f-y}}$ che pel *Num.* 242. è un arco di cerchio da determinarsi con un mezzo cerchio, e farà l'integrale della $-a+fx^n$ quando abbia $r=-\frac{1}{2}$, ed $e=-1$. ed è $y=\frac{-a+fx^n}{x^n}$.

Num. 271. Suppongasi ora $\frac{a+fx^n}{x^n}=\frac{1}{y^v}$. Nella forma $a+fx^n$ avremo il solito Binomio A tramutato nel $B=\frac{vga^{\frac{e+1+nr}{n}}}{n}y^{\frac{ve+v-n}{n}}dy\times\frac{-e-1-n-nr}{(1-fy^v)^{\frac{n}{n}}}$, e farà $y^n=\frac{x^n}{a+fx^n}$. Nella forma poi $a-fx^n$. La sotto al segno farà $1+fy^v$, e farà $y^v=\frac{x^n}{a-fx^n}$. E per la forma $-a+fx^n$ la sotto al segno farà $-1+fy^v$, e $y^v=\frac{x^n}{-a+fx^n}$. Per la forma dunque $a+fx^n$. sia $v\frac{e+v}{n}-n=0$ (E)

$-e=$

$-e-\frac{1-n-nr}{n}=-\frac{1}{2}$ (R). $v=2$ (N) La B diverrà $\frac{2g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{1-fy^2}}$, la quale pel *Num.* 241. è un arco di cerchio da determinarsi con un quadrante, e farà l'integrale della $a+fx^n$ quando abbia $e=\frac{n-2}{2}$. ed $r=-1$. ed è $y^2=\frac{x^n}{a+fx^n}$.

Num. 272. Nella medesima forma sia $ve+\frac{v}{n}-n=-\frac{1}{2}$ (E). $-e-1-\frac{n}{n}-nr=-\frac{1}{2}$ (R). $v=1$ (N) La B diverrà $\frac{g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{y}\sqrt{1-fy}}$ la quale pel *Num.* 242. è un arco di cerchio da determinarsi con un mezzo cerchio, e darà l'integrale della $a+fx^n$ quando abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-1$, ed è $y=\frac{x^n}{a+fx^n}$.

Num. 273. Nella stessa forma sia $ve+\frac{v}{n}-n=-1$ $[E]$, $-e-1-\frac{n}{n}-nr=-\frac{1}{2}$ (R). La B diverrà $\frac{vg\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{y}\sqrt{(1-fy^v)}}$, che col *Num.* 266. ha per integrale $=\frac{g}{n\sqrt{a}}L\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1-fy^v}}{\sqrt{1}-\sqrt{1-fy^v}}$, cioè $\frac{-g}{n\sqrt{a}}L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}-\sqrt{a}}$

giac-

giacchè $y^v = \frac{x^n}{a+fx^n}$, e questa è l'integrale di $a+fx^n$ quando abbia $e=-1$, ed $r=-\frac{1}{2}$.

Num. 274. Per la forma $a-fx^n$. Suppongasi $\frac{ve+v-n}{n} = \frac{v-2}{2}$ [*E*], $-e-\frac{1-n}{v}-nr = -\frac{1}{2}$ (*R*). La *B* sarà $\frac{vgy^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{a}\sqrt{1+fy^v}}$, la di cui integrale pel *Num.* 263. è $\frac{g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{1+fy^v}+\sqrt{fy^v}}{\sqrt{1+fy^v}-\sqrt{fy^v}}$, cioè per la forma $a-fx^n$, che abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-1$. la $\frac{g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx^n}}$, essendo $y^v = \frac{x^n}{a-fx^n}$

Num. 275. Per la forma $-a+fx^n$. sia $\frac{ve+v-n}{n} = \frac{v-2}{2}$ (*E*), e $-e-\frac{1-n}{n}-nr = -\frac{1}{2}$. La *B* sarà $\frac{vgy^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{a}\times fy^v-1}$, che secondo il *Num.* 263. ha per integrale $-\frac{g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{1+fy^v}+\sqrt{fy^v}}{\sqrt{1+fy^v}-\sqrt{fy^v}}$, che per la $-a+fx^n$, che abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-1$. dà l'integrale $\frac{g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx^n}}$, essendo $y^v = \frac{x^n}{-a+fx^n}$.

Num. 276. Suppongasi $a+fx^n = y^v$, ed otterremmo il solito Binomio *A* trasformato nel *B*.

$$g v y^{vr+v-1} \frac{dy \times \sqrt{y^v-a}^{\frac{e+1-n}{n}}}{nf^{\frac{e+1}{n}}}$$

, e nella forma $a+fx^n$ farà $y^v = a+fx^n$. Se la forma fosse stata $a-fx^n$. questa sarebbe stata $= y^v$, e la *B* avrebbe avuto sotto al segno $a-y^v$, e per la forma $-a+fx^n$ sarebbe pure stata $=y^v$, e la *B* avrebbe avuto sotto al segno $a+y^v$. Per la forma dunque $a+fx^n$. sia $vr+v-1 = \frac{v-2}{2}$ [*E*], ed $\frac{e+1-n}{n} = -\frac{n}{2}$ (*R*), e si diverrà $\frac{gvy^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{f}\sqrt{y^v-a}}$, che secondo il *Num.* 263. ha per integrale $\frac{g}{n\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{-a+y^v}+\sqrt{y^v}}{\sqrt{-a+y^v}-\sqrt{y^v}}$, e però la forma $a+fx^n$, che abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-\frac{1}{2}$ ha per integrale $\frac{g}{\sqrt{f}} L \frac{\sqrt{fx^n}+\sqrt{a+fx^n}}{\sqrt{fx^n}-\sqrt{a+fx^n}}$.

Num. 277. Per la forma $-a+fx^n$. ſia $vr+v-1=\frac{v-2}{2}$ (E). ed $\frac{e+1-n}{n}=-[R]$, e ſarà $B=\frac{g\,v\,y^{\frac{v-2}{2}}\,dy}{n\sqrt{f}\sqrt{a+y^v}}$, che ſecondo il *Num.* 263. ha per integrale $\frac{g}{n\sqrt{f}}L\frac{\sqrt{a+y^v}+\sqrt{y^v}}{\sqrt{a+y^v}-\sqrt{y^v}}$, onde la forma $-a+fx^n$, che abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-\frac{1}{2}$ hà per integrale $\frac{g}{n\sqrt{f}}L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-a+fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{-a+fx^n}}$.

Num. 278. Per la medeſima forma $-a+fx^n$. Sia $vr+v-1=-1$ [E], ed $\frac{e+1-n}{n}=-\frac{1}{2}$ (R) Avremo $B=\frac{g\,v\,dy}{n\sqrt{f}\times\sqrt{a+y^v}}$, che pel il *Numero* 265., ha per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}}L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+y^v}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+y^v}}$, che dà per integrale di $-a+fx^n$, quando abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-1$. la $\frac{-g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}}L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}$.

Num. 279. Sia $a+fx^n=\frac{1}{y^v}$, ed otterremo il ſolito Bino-

Binomio A cambiato nel $B=-\frac{v\,g\,y^{-vnr-ve-v-n}\,dy\,x^{\frac{e+1}{n}}}{nf^{\frac{e+1}{n}}}$ $\frac{e+1-n}{n}$ quando la forma ſia $a+fx^n$, e ſarà all' ora $y^v=\frac{1}{a+fx^n}$. Se la forma ſia $a-fx^n$, ſarà all' ora $y^v=\frac{1}{a-fx^n}$, e ſotto al ſegno vi ſarà ay^v-1., e nella forma $-a+fx^n$ ſarà $y^v=-\frac{1}{a+fx^n}$, e ſotto al ſegno ay^v+1. Sia dunque per la forma $a+fx^n$ $-vnr-\frac{ve}{n}-v-n=0$ (E). $\frac{e+1-n}{n}=-\frac{1}{2}$ (R) ed $v=2$ (N):, e la B diverrà $\frac{-2g\,dy}{n\sqrt{f}\times\sqrt{1-ay^2}}$, che pel *Num.* 241. hà per integrale un arco di cerchio da determinarſi con un quadrante, onde la forma $a+fx^n$ hà per integrale tale arco quando ſia $e=\frac{n-2}{n}$, ed $r=-1$ ed e $y^2=\frac{1}{a+fx^n}$.

Num. 280. Nella medeſima forma ſia $-vnr-\frac{ve}{n}-v-n=-$ [E] $\frac{e+1-n}{n}=-\frac{1}{2}$ (R). $v=1$ (N)., e B diverrà $\frac{-g\,dy}{n\sqrt{f}\sqrt{y}\sqrt{1-ay}}$. Se per tanto $a+fx$ aveſſe avuto $e=\frac{n-2}{2}$ ed

ed $r=-1$. ella pel *Num.* 242. avrebbe avuto per integrale un arco di cerchio da determinarsi con un mezzo cerchio, e sarebbe $y=\frac{1}{\sqrt[n]{a+fx^v}}$.

Numero 281. Nella medesima forma $a+fx^v$ sia $-vnr-ve-v-n=-1$ [*E*]. $e+\frac{1}{n}-n=-\frac{1}{2}$ (*R*). ed avremo $B=\frac{-vg\,dy}{n\sqrt{f}\times y\sqrt{1-ay^v}}$, che pel *Num.* 266. ha per integrale $\frac{g}{n\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1-ay^v}}{\sqrt{1}-\sqrt{1-ay^v}}$, e però la $a+fx^v$, che abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-\frac{1}{2}$ hà per integrale $\frac{g}{n\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{a+fx^v}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a+fx^n}-\sqrt{fx^n}}$.

Numero 282. Nella medesima forma $a+fx^v$, sia $-vnr-ve-v-n=\frac{v-2}{2}$, (*E*). ed $e+\frac{1}{n}-n=-1$ [*R*]. Sarà $B=\frac{-vg\,y^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\times 1-ay^v}$, che pel *Num.* 274. ha per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}}\,L\,\frac{\sqrt{1}+\sqrt{ay^v}}{\sqrt{1}-\sqrt{ay^v}}$, onde la forma $a+fx^v$, che abbia $e=-1$, ed $r=-\frac{1}{2}$ ha per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}}\,L\,\frac{\sqrt{a+fx^v}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+fx^n}-\sqrt{a}}$.

Num. 283. Per la forma $a-fx^v$. sia $-vnr-\frac{ve-v-n}{n}=v\frac{-2}{2}(E)$ e $\frac{+1}{n}-n=-\frac{1}{2}(R)$; sarà $B=\frac{-vg\,y^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{f}\,\sqrt{ay^v-1}}$, che pel *Num.* 277. ha per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{-1+ay^v}+\sqrt{ay^v}}{\sqrt{-1+ya^v}-\sqrt{ay^v}}$, e la forma $a-fx^v$, che abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-1$, avrà per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{fx^n}-\sqrt{a}}$.

Num. 284. Nella medesima forma $a-fx^v$. sia $-vnr-ve-v-n=\frac{v-2}{2}$ (*E*). $e+\frac{1}{n}-n=-1$ [*R*] Sarà $B=\frac{-vg\,y^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\times ay^v-1}$. la quale col *Num.* 275. hà per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}}\,L\,\frac{\sqrt{1}+\sqrt{ay^v}}{\sqrt{1}-\sqrt{ay^v}}$, onde la forma $a-fx^v$, che abbia $e=-1$, ed $r=-\frac{1}{2}$, ha per integrale $\frac{-g}{n\sqrt{a}}\,L\,\frac{\sqrt{a-fx^v}+\sqrt{a}}{\sqrt{a-fx^n}-\sqrt{a}}$.

Num. 285. Finalmente per la forma $-a+fx^n$ sia

$$-\frac{vnr-ve-v-n}{n}=\frac{v-2}{2}\ (E),\quad \frac{e+1-n}{n}=-\frac{1}{2}\ (R).$$

Sarà $B=\dfrac{-vgy^{\frac{v-2}{2}}dy}{n\sqrt{f}\sqrt{1+ay^v}}$, che hà per integrale pel *Num.* 263.

$$\frac{-g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{1+ay^v}+\sqrt{ay^v}}{\sqrt{1+ay^v}-\sqrt{ay^v}},$$ onde la forma $-a+fx^n$,

quando abbia $e=\frac{n-2}{2}$, ed $r=-1$, hà per integrale,

$$\frac{-g}{n\sqrt{a}\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{fx^n}-\sqrt{a}}.$$

Num. 286. Gioverà per tanto raccorre quì nella seguente Lista tutte le integrali in questo terzo articolo fin ora scoperte, onde proposti i Binomj differenziali, si potrà secondo i loro contrassegni, e colle semplici sostituzioni integrarli. Gioverà pure essa lista per ritrovare con più facilità altre integrali, che la scarsezza del tempo non mi ha permesso di rintracciare, e gioverà pure per potervi far sopra con maggior ordine, e chiarezza alcuna giovevoli riflessioni.

Lista

Lista delle Integrali de' Binomj scoperti nel presente III. Articolo.

SIA il Binomio generale $gx^e dx\times\overline{a+fx^n}^{\,r}$, sieno i Segni di g, di a, e di f quali si vogliano.

Se sia $\frac{e+1-n}{n}=i$, e supposto sempre, che i sia ridotto, mediante lo spostare, ad essere $=0$, l' integrale è

$$\frac{g\times\overline{a+fx^n}^{\,r+1}}{f^n\times r+1}\qquad \textit{Num. } 258.$$

Se sia $\frac{-e-1-n-nr}{n}=i=0$, l' integrale è

$$\frac{gx^{e+1}\times\overline{a+fx^n}^{\,r+1}}{a\times e+1}\qquad \textit{Num. } 259.$$

In oltre per la forma $a+fx^n$, se sia

$r=-1$, ed $e=-1$. si ha per integrale $\frac{-g}{an}\,L\,\frac{a+fx^n}{x^n}$ *Num.* 260.

$r=-\frac{1}{2}$, ed $e=-1$. $\frac{g}{n\sqrt{a}}\,L\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+fx^n}}$ *Num.* 265.

ed $e=-\frac{1}{2}$ $\frac{-g}{n\sqrt{a}}\,L\,\frac{\sqrt{a+fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+fx^n}-\sqrt{a}}$ *Num.* 282.

ed $e=\frac{n-2}{2}$ $\frac{g}{n\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{a+fx^n}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a+fx^n}-\sqrt{fx^n}}$ N. 263 & 281.

ed $e=\frac{n-2}{2}$ $\frac{g}{n\sqrt{f}}\,L\,\frac{\sqrt{fx^n}+\sqrt{a+fx^n}}{\sqrt{fx^n}-\sqrt{a+fx^n}}$ *Num.* 276

$r=$

$r = -1$, ed $e = n\frac{n-2}{2}$ dà un arco di cerchio da determinarsi

colla parabola se n sia minore di 2 *Num.* 235.

coll' iperbola se n sia maggiore di 2 *Num.* 239.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ dà $\frac{2g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{1-fy^2}}$, ed è

$y^2 = \frac{x^n}{a+fx^n}$ arco col quadrante *Num.* 271. e *Num.* 279.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ dà $\frac{g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{y}\sqrt{1-fy}}$, ed è $y = \frac{x^n}{a+fx^n}$ arco col mezzo cerchio *Num.* 272.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ dà $\frac{-g\,dy}{n\sqrt{f}\sqrt{1-ay}}$, ed è $y = \frac{1}{a+fx^n}$ arco col mezzo cerchio *Num.* 280.

ed $e = 0$, e $n = 2$. arco di cerchio colla retta pararelin alia tangente *Num.* 240.

PER LA FORMA $a - fx^n$, SE SIA

$r = -1$, ed $e = -1$ si ha per integrale

$\frac{-g}{an} L \frac{a-fx^n}{x^n}$ *Num.* 260.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{g}{n\sqrt{af}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx^n}}$ *Num.* 274.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{-g}{n\sqrt{af}} L \frac{\sqrt{fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{fx^n}-\sqrt{a}}$ *Num.* 283.

$r = -\frac{1}{2}$, ed $e = -1$ $\frac{-g}{n\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-fx^n}}$ *Num.* 266.

ed

ed $e = -\frac{1}{2}$ $\frac{-g}{n\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{a-fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a-fx^n}+\sqrt{a}}$ *Num.* 284.

$r = -\frac{1}{2}$, ed $e = 0$, $n = 2$ dà un arco da determinarsi col quadrante *Num.* 241.

ed $e = -\frac{1}{2}$, $n = 1$. col mezzo cerchio *Num.* 242.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ dà $\frac{-vg\,y^{\frac{v-2}{2}}\,dy}{a^n \times \overline{f+y^v}}$, ed è

$y^v = \frac{a-fx^n}{x^n}$, ed è un arco di cerchio da determinarsi colla parabola se v sia minore di 2, o coll' iperbola, se egli sia maggiore. *Num.* 267.

$r = -\frac{1}{2}$, ed $e = \frac{n-2}{2}$ dà $\frac{-2g\,dy}{a^n \times \overline{f+y^2}}$, ed è $y^2 = \frac{a-fx^n}{x^n}$ arco da determinarsi con una paralella alla sua tangente *Num.* 268.

PER LA FORMA $-a + fx^n$, se sia

$r = -1$, ed $e = -1$ si ha per integrale

$\frac{-g}{an} L \frac{-a+fx^n}{x^n}$ *Num.* 260.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{g}{n\sqrt{af}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx^n}}$ *Num.* 275.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{-g}{n\sqrt{af}} L \frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx^n}}$ *Num.* 278.

ed e

ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{-g}{n\sqrt{af}}$ $L\,\frac{\sqrt{fx^n}+\sqrt{a}}{\sqrt{fx^n}-\sqrt{a}}$ *Num.* 285.

$r = -\frac{r}{2}$, ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{g}{n\sqrt{f}}$ $L\,\frac{\sqrt{-a+fx^n}+\sqrt{fx^n}}{\sqrt{-a+fx^n}-\sqrt{fx^n}}$ *Num.* 263.

ed $e = \frac{n-2}{2}$ $\frac{g}{n\sqrt{f}}$ $L\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-a}+fx^n}{\sqrt{a}-\sqrt{-a}+fx^n}$ *Num.* 277.

$r = -\frac{r}{2}$, ed $e = -1$ dà $\frac{-2g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{f-y^2}}$, ed è $y =$

$\frac{-a+fx^n}{x^n}$ arco col quadrante *Num.* 269.

ed $e = -1$ dà $\frac{-g\,dy}{n\sqrt{a}\sqrt{y}\sqrt{f-y}}$, ed è $y =$

$\frac{-+fx^n}{x^n}$ arco col mezzo cerchio *Num.* 270.

Num. 287. Comechè qualunque Binomio può trasformarsi sempre con uno de' due numeri 258., o 259., onde cambia e forma, ed esponenti, è manifesto potersi dare de' casi, che così trasformato venga a soggettarsi ad alcune delle qui registrate forme, alle quali, non trasformato, non soggiaceva. Io lascerò, che qualche Studioso, esaminati tali casi, ce li renda palesi a maggior dovizia del Calcolo integrale.

Num. 288. Riandando ora sulle qui registrate formule si fa manifesto, che la stessa differenziale, quando che sia relativa, ammette alle volte più di un integrale, le quali incontrovertibilmente, quanto alla composizione da' proprj simboli, sono l' una dall' altra diverse. E' qui d' uopo spiegar la cagione di questo accidente, non solo per quiete de' principianti, ma per trarne vantaggio al Calcolo integrale, giacchè non mi è avvenuto di vedere in alcun Autore, nè pur notata tal cosa, non che spiegata.

gata. La prima volta, che io l' incontrai ne restai sorpreso, imperocchè, per quanto sia vero, che uno stesso problema possa avere alle volte diverse soluzioni, secondo i diversi elementi, che in isciorlo si adoperano, questo non fa al caso presente, nel quale, non cambiandosi li elementi, non può aversi mai, che una medesima soluzione. Una medesima soluzione per tanto si ha anche qui da queste, apparentemente, diverse integrali. Osservinsi le logoritmiche *S A. sa.* (*Fig.* 8.). Queste due logoritmiche possono aver benissimo le ordinate corrispondenti *GH. gh.* diversissime fra di loro, ma però i loro logoritmi *HP. hp.* perfettamente uguali. Ecco dunque levato tutto il mirabile di tale accidente. Le ordinate, che dalle equazioni integrali logoritmiche ci vengono mostrate diverse, ove abbiano le opportune sottangenti, producono lo stessissimo logoritmo. Lo stesso discorso e chiaro in proposito del cerchio, ne serve spendervi più parole.

Num. 289. Si scorge in secondo luogo darsi delle integrali logoritmiche, le quali compir non si possono supponendo $x = 0$. Quella per esempio del *Num.* 265. ridurrebbesi ad essere

$\frac{-g}{n\sqrt{a}}$ $L\,\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a}}$, cioè il logoritmo o dell' infinito,

o di zero, che sono logoritmi impossibili. Quindi ne viene, che se una differenziale sia composta di quantità assolute, e di una logoritmica di questa fatta, e che accada compire tale integrale, la supposizione di $x = 0$ ci porterebbe all' errore; ma di questo parlerò nell' Appendice della Sezione VI. di queste memorie.

Num. 290. Nella ricerca delle integrali relative, ne ho ommesse alcune, che dalle medesime trasformate si sarebbero potute ottenere, e ciò, perchè avrebbero prodotte le integrali medesime, o solo diverse ne' segni. Ho ancora ommesso di sperimentare le medesime trasformate co' contrasegni, che scoprirò al *Num.* 301. co' quali sperimentandole, altre integrali si possono ottenere, e dalle trovate assai diverse. A ciò mi vi ha obbligato la mancanza del tempo alla quale, qualche studioso potrà colla sola fatica del calcolo supplire.

Num. 291. Il ritrovarsi fralle premesse formule, e sotto gli stessi contrassegni due diverse integrali logoritmiche potrebbe forse in alcune occasioni aggevolare il modo di ritrovare la logoritmica confacente, o confrontare il risultato, e ridurlo al giusto.

Num. 292. Suppongasi nel Binomio $A.\ a+fx^n=2yx^{\frac{n}{2}}$, e questa ipotesi somministra $x^{\frac{n}{2}}=y+\frac{\sqrt{yy-af}}{f}$, onde $dx=\frac{dy+\frac{y\,dy}{\sqrt{yy-af}}}{nf^{\frac{2}{n}}}\times\left(y+\sqrt{yy-af}\right)^{\frac{2-n}{n}}$, e però la A diviene $2^r y^r\times\frac{dy+\frac{y\,dy}{\sqrt{yy-af}}}{nf^{\frac{2e+2+nr}{n}}}\times\left(y+\sqrt{yy-af}\right)^{\frac{2e+2-n+nr}{n}}=B$. Se per tanto sia $\frac{2e+2-n+nr}{n}=i$ la A sarà trasformata in tante differenziali qnante unità contiene $i+2$; e queste differenziali saranno miste di uninomj, e binomj, ed i binomj avranno l'esponente della parte complessa $=-\frac{2}{2}$. Ponghiamo in tanto, che i sia $=o$. laonde B sia $\frac{2^r y^r dy}{nf}+\frac{2^r y^{r+1}dy}{nf\sqrt{yy-af}}$. La prima parte è integrabile. La seconda lo sarà per logoritmi secondo i Numeri 263., o 267. se sia $r+1=\frac{2-2}{2}$, cioè se $r=-1$. Questa condizione sostituita nell'esponente di B, che si è supposto $=o$, produce $\frac{e+1-n}{n}=o$, onde fin qui niun vantaggio ritrae-

ritraesi, mentre la proposta A sarebbe stata integrabile pel *Num.* 258. Se poi porremo, che sia $r+1=-1$. secondo i Numeri 269., e 270. onde $r=-2$, e la sovratrovata acquista la forma $\frac{dy}{4nfy\sqrt{yy-af}}$, proviene l'esponente di $B=2e+2-3n=o$, e però la A sarà stata $x^{\frac{3n-2}{2}}dx+\left(a+fx^n\right)^{-2}$, la quale sposstando si può ridurre ad $x^{\frac{n-2}{2}}dx\times\left(a+fx^n\right)^{-2}$, che avendo $r=-1$, ed $\frac{n-2}{2}$, $=e$ ritorna integrabile pel cerchio per uno de' 6. numeri notati nella lista per questo contrassegno nella forma $a+fx^n$.

Num. 293. La trasformata dunque di A in B secondo il premesso numero non ci da in senso di verità un integrazione, che già non l'avessimo nelle scoperte notate nell'antecedente lista. Può bensì darci dalle integrazioni rispetto a' Logoritmi, che in alcuni casi sieno più facili, e più comode da rendersi compite, o che più facilmente ci somministrino la logoritmica confacente. Per questi motivi dunque dirò, potersi colle altre seguenti cinque diverse ipotesi farsi altre tante trasformazioni, e sono $a+fx^n=\frac{2x^{\frac{n}{2}}}{y}$; $\frac{yx^{2n}}{2}$; $\frac{x^{2n}}{2y}$; $\frac{y}{x^n}$; $\frac{x}{yx^n}$, e queste ipotesi applicar si possono alle altre due forme $a-fx^n$, $-a+fx^n$.

Num. 294. Quando i Binomj hanno una di queste due ultime forme, si possono pure ottenere altre trasformazioni, imperocchè la prima è per esempio $\sqrt{a}-\sqrt{fx^n}\times\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}$, onde può formarsene l'ipotesi per esempio $\sqrt{a}+\sqrt{fx^n}=y$, $o=y\sqrt{fx^n}$. Così la seconda forma è $\sqrt{fx^n}-\sqrt{a}\times\sqrt{fx^n}+\sqrt{a}$. Queste trasformazioni per altro, e parecchie, che far si possono, neppur' esse ci danno integrazioni, se non ne' ca-

ſi notati nella già poſta Liſta. Per altro potrebbe eſſere, che nè queſte, nè le antecedenti foſſero inutili.

Num. 295. Con tutte queſte diverſe trasformazioni dunque non è già da luſingarſi, che in propoſito del binomio A, ove ſi tratti di differenziali puramente aſſolute, ſia mai per ottenerſi altre integrazioni, ſe non che le due de' numeri 258, e 259. Per quelle poi, che contengono logoritmi, ſempre ſi avranno logoritmi, e per quelle che ſpettano al cerchio, ſempre circolari ci verranno date, ne mai paſſerà l'una nell'altra claſſe. E qui ſi rende manifeſto quanto era neceſſario di ravviſare queſte tre claſſi di differenziali, di ben diſtinguerle fra di loro, e di ordinatamente trattarne.

Num. 296. Se vi ſieno altre claſſi di differenziali io non lo ſo, inclino bensì grandemente a credere, che ſe ne dieno, e per certo tanti binomj differenziali, che ſono veraci ſoluzioni di problemi reali, e che pure per veruna maniera integrar non ſi ſanno, ne ridur ſi poſſono alle coſe fin qui ſteſe, fondano il mio ragionevol ſoſpetto, e parmi, che o qualche altra claſſe di differenziali ſi dia, o che il calcolo integrale abbia altri naſcondigli non per anche ſcoperti. A tali ſcoperte credo, che applicar ſi debba per rendere ſempre più avantaggiato eſſo calcolo.

Num. 297. Abbiamo veduto come le differenziali procedono alle volte da integrali aſſolute meſcolate con integrali relative, e quaſi tutta la poſta liſta ne è una palpabile ripruova. Ve ne poſſono eſſere, che ſieno meſcolate di amendue le claſſi relative.

Sia per tanto $\frac{b x^{\frac{n-2}{2}} dx}{a + f x^n}$, che è circolare [*Num.* 235., o ſeguenti] Sia ancora la $\frac{c x^{\frac{n-2}{2}} dx}{a - f x^n}$, che è logoritmica *Num.* 274.,

283. Sommate aſſieme queſte due differenziali producono

$x^{\frac{n-2}{2}} dx \times a \times b + c + x^n \times cf - bf$. Se ſupporremo $b - c = 0$, $a^2 - ff x^{2n}$

ci reſterà $\frac{2 b a x^{\frac{n-2}{2}} dx}{a^2 - ff x^{2n}} = F$. Suppongaſi ora $2n = t$, ed avremo $\frac{2 b a x^{\frac{t-4}{4}} dx}{a^2 - ff x^t}$, che però il binomio della ſeconda forma, che abbia $r = -1$, ed $e = \frac{t-4}{4}$, cioè $e = \frac{n-4}{4}$ ha la ſua integrale fatta da una circolare, e da una logoritmica. Si determina b per l'equazione $2 b a = g$, e le integrali potranno trovarſi pe' citati numeri.

Num. 298. Queſta ſcoperta ce ne porta due altre. Se trasformaremo F coll'ipoteſi $a^2 - ff^{2n} = y$, avremo la trasformata $-\frac{a b dy \times \sqrt{a^2 - y}^3}{ny} = G$, e però una differenziale della ſeconda forma, che abbia $e = -1$, $n = 1$, ed $r = -\frac{3}{4}$, o vi ſi poſſa ridurre, ha per integrale l'integrale di F.

Num. 299. Se trasformeremo F coll'ipoteſi $a^2 - ff x^{2n} = y x^{2n}$, avremo la trasformata $-\frac{b a^{\frac{1}{2}} dy \times \sqrt{y + ff}^{-\frac{1}{4}}}{ny} = H$; Onde una differenziale, che abbia $e = -1$, $n = 1$, ed $r = -\frac{1}{4}$, o vi ſi poſſa ridurre, e ſia della prima forma, ha per integrale quella di F.

Num. 300. Se in formare la differenziale F aveſſimo ſuppoſte $b = -c$, ce ne ſarebbe riuſcita la differenziale

$\frac{2bfx^{\frac{3n-2}{2}}dx}{a^2-ffx^{2n}} = I$. onde integrabile quando sia $r = -1$, ed $e = \frac{3n-4}{4}$. Trasformando questa coll' ipotesi $a^2 - ffx^{2n} = y$, avremo ottenuto una differenziale delle seconda forma avente $e = -1$. $n = 1$, ed $r = -\frac{1}{4}$, e trasformando la stessa I coll' altra ipotesi, la r sarebbe stata $\frac{1}{4}$, e la forma della differenziale sarebbe stata la prima.

Num. 301. Abbiano dunqne il modo di integrare tutti i binomj della seconda forma, i quali avendo $r = \frac{1}{4}$, o $-\frac{3}{4}$ abbiano $e = -1$ ed $n = 1$, ovvero che avendo $r = -1$; abbiano $\frac{e+1}{n} = \frac{1}{4}$, o $= \frac{3}{4}$. E così quelli della prima forma, i quali avendo $r = \frac{1}{4}$ o $= -\frac{3}{4}$ abbiano in oltre $e = -1$, ed $n = 1$.

Num. 302. Le integrazioni però de' binomj, che hanno $r = -i$ sono comprese tutte in un metodo più generale, che ora esporrò Il Chiarissimo, e da me stimatissimo Sig. Gabriele Manfredi ha dato il modo [*De Bononiensi scientiarum, & artium Instituto*] di integrare generalmente la forma $\frac{gx^4dx}{a^n+fx^n}i$ sieno e, ed n quali si vogliano interi, o rotti, negativi, o positivi, purchè i sia intero, e sieno i segni della parte complessa quali si vogliano. Quindi è, che tutti i binomj, che abbiano $r = -i$, o vi si possano ridurre per le trasformazioni, benchè pe' modi precedenti da me esposti, e per altri ancora, che poirei dare, sieno in alcuni casi forse più facilmente integrabili,

li, lo sono però generalmente per l'accennato metodo. Potrà questo vedersi da gli studiosi nel citato Libro, ed io solamente, per renderlo più piano a' principianti, chieggo licenza al suo chiarissimo Autore di fermarmivi qualche poco. Sia dato da integrare il binomio $\frac{gxdx}{a^4+x^4} = A$. Volendo procedervi secondo il notato metodo verrà a^4+x^4 a risolversi ne' due trinomj $x^2 - ax\sqrt{2} + a^2$. ed $x^2 + ax\sqrt{2} + a^2$., giacchè l'equazione $ff - 2aa = 0$ competente, secondo l'insigne Autore all'esponente n, quando egli sia $= 4$ somministra i due valori di $f = a\sqrt{2}$, e $-a\sqrt{2}$., e in fatti multiplicando assieme essi due trinomj, restituiscono giustamente. $a^4 + x^4$. Suppongasi dunque, che il binomio A sia uguale à $\frac{dx}{p \times x^2 - ax\sqrt{2} + aa} - \frac{dx}{p \times x^2 + ax\sqrt{2} + aa}$ Ridotte queste alla medesima denominazione avremo $\frac{dx\,2ax\sqrt{2}}{p \times a^4 + x^4}$, e supponendo prensentemente $p = 2a\sqrt{2}$, resta manifesto, che la proposta A è $\frac{dx}{2a\sqrt{2} \times x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}$ (B) $- \frac{dx}{2a\sqrt{2} \times x^2 + ax\sqrt{2} + aa}$ (C) Se dunque troveremo l'integrale di B, e di C, la loro differenza sarà l'integrale di A.

Num. 303. Circa al modo di ritrovare le integrali di B, e di C il chiarissimo Autore non discende a farne parola, solamente accenna, e con tutta ragione, altro per avere tali integrali una richiedersi se non che la quadratura, o del cerchio, o dell'iperbola, e dà succintamente qualche costruzione geometrica. Ha egli pubblicata la sua ingegnosa scoperta pe' dotti, e ben instrutti nel calcolo integrale, ne ha voluto prendersi la briga di istruire i Principianti. Le cose da me precedentemente esposte mi rendono non difficile l'instruir questi; procurerò per tanto di farlo, e nello stesso tempo a benefizio pure de' principianti, dirò qualche

qualche cosa sopra di un metodo, che il chiarissimo Bernoullio participò l'anno 1702. all'insigne Reale Accademia di Parigi.

Num. 304. Si propone questo dottissimo Maestro di ritrovare la integrale di una differenziale, che sia una frazione composta di una sola variabile, la quale frazione avendo tanto il numeratore, quanto il denominatore sotto al segno, che sia l'unità, la sua variabile abbia nelle parti del denominatore un grado di piú, che nelle parti corrispondenti del numeratore, qual sarebbe $\frac{dx \times A + Bx}{\sqrt{C + Dx + x^2}} = B$. Si suppone, che i segni di questa forma possano essere o positivi, o negativi come si vuole.

Num. 305. Questa forma dunque potrebbe rappresentare uno de' trinomj B, o C annientando in ella i termini occorrevoli. Potrebbe dunque servire all'intento del metodo Manfrediano. E dunque di bisoguo, che i Principianti intendano, e come il metodo dell'insigne Bernoullio scopra l'integrale di F, e se si dieno de' casi, ne' quali egli non vaglia a scoprirla.

Num. 306. Assume egli dunque, nel caso, che F sia un trinomio, due logoritmi indeterminati $p l b + x^t$, e $q l c + x^t$ (se D. fosse stato un multinomio più alto avrebbe assunti più logoritmi, cioè tanti, quante unità contiene il grado più alto della x nel denominatore. Io ho dato alla variabile x l'esponente t per maggiore universalità della scoperta) Prese susseguentemente le differenziali de' due (nel caso nostro) assunti logoritmi, e sommate, e ridotte, ne trahe

$$\frac{t\,dx \times x^{t-1} \times \sqrt{pc + qb} + x^{2t-1} \times p + q}{bc + x^t \times b + c + x^{2t}} = G.$$

Num. 307. Se per tanto trattisi di trovare l'integrale di F, potendo questa essere attamente rappresentata dalla G, d'altro non farà d'uopo, che di determinare le $b.\ c.\ p.\ q.$ indeterminate di questa. Per determinarle dunque procedo così Dovrà essere

$bc = C$, e $b + c = D$, onde ne traggo $b = \frac{D + \sqrt{BD - 4C}}{2}$; e $c = \frac{D - \sqrt{DD - 4C}}{2}$. Susseguentemente dovendo essere

$pc + qb = A$, $cp + q = B$ ne ricavo $q = \frac{A - Bc}{b - c} =$

$\frac{2A - BD + \sqrt{DD - 4C}}{2\sqrt{DD - 4C}}$, e $p = \frac{Bb - A}{b - c} =$

$\frac{2A + BD + \sqrt{DD - 4C}}{2\sqrt{DD - 4C}}$.

Num. 308. Determinate ora le $b.\ c.\ p.\ q.$ veggo, che in tutte loro entra sempre $\sqrt{DD - 4C}$, e comechè questa grandezza, sempreche DD, quadrato del coefficiente del termine di mezzo della proposta F sia minore di quattro piani $1 \times C$ de' coefficienti de' due estremi, sarà immaginaria, così il descritto metodo, nel caso, che la proposta F abbia DD minore di $4C$ non potrà servire a integrarla. Perchè i Principianti ben intendano questa mia asserzione, e facciano una giusta idea, di che voglia instruirci l'Algebra, allorchè nel calcolo ci dà quantità immaginarie, soggiugnerò; che quando il chiarissimo Bernoullio ha tentata la integrazione della forma F, ha egli necessariamente supposto, ma però arbitrariamente, e può nn tale supposto non esser vero, che essa forma sia procreata dalla somma, o differenza delle due differenziali de gli assunti logoritmi: Ma questa suppositione non ha già forza per fare, che la F sia veramente procreata da tal somma, o differenza, ne che ella non possa essere procreata per altra maniera. Se sia veramente procreata qual l'ha supposto, non ci comparirà all'ora la quantità immaginaria, onde quando la forma F abbia veramente DD maggiore di $4C$, o che abbia C con segno contrario di quello, che ha x^2, nel qual caso si ottiene $\sqrt{DD + 4C}$, all'ora il me-

il metodo Bernoulliano ſerve ottimamente ad integrare la formula F, ma quando ſia il contrario, all'ora non ſerve, e l'immaginario che vi ſi incontra ci fa accorti, che noi immaginariamente ſupporemo, che la F foſſe fatta dalla ſomma, o differenza di differenziali logoritmiche, quando effettivamente, in tal caſo ella è fatta dalla ſomma o differenza di differenziali di natura della logoritmica troppo diverſe.

Num. 309. In fatti nel caſo, che incontraſi $4C$ maggiore di DD., e queſto è il caſo nel quale ſi trovano amendue i trinomj $B.\ C.$, che ſi ſono propoſti da integrare, procedono queſti da due integrali relative della ſeconda claſſe, o vogliamo dire da gli elementi di que' due cerchi, che opportunamente determinai al *Num.* 244

Num. 310. Vide beniſſimo il lodato Bernoullio ottenerſi dal ſuo metodo in alcune occaſioni de' logoritmi immaginarj, e tenne per certo, che queſti indicaſſero archi di cerchio. Quel poco, che ho qui accennato mette in piena chiarezza queſto punto, e da modo ad intendere i miſterj delle quantità, o forme immaginarie, che fin ora erano ſtati oſcuri.

Num. 311. Da queſta avvertenza un altra pure relativamente al calcolo integrale di maggior conto ne viene, e da me pure altrove accennata, ma che qui replicherò, giacchè qui col fatto ſteſſo ſe ne manifeſta la ſua verità. Se noi ci daſſimo a credere di poter dedurre da integrali indeterminate una differenziale, che tutte le differenziali indiſtintamente rappreſentaſſe, laonde comparando queſte alla formata generale differenziale ſi doveſſe ricavare la propria integrale, noi tenteremmo l'impoſſibile. Così ſi vede manifeſtamente ſuccedere nel caſo individuale del metodo Bernoulliano. Le differenziali (biſogna riconoſcerlo,) benchè ci appajano non diverſe di forma, ſono però di diverſa natura, e tre diverſe ne ho gia aſſegnate. Ogn' una di eſſe tre è procreata con maniera particolare alla propria natura. Il fare un modello che ſerva per tutte e tre tali nature è impoſſibile; E quello, che è particolare alla propria natura non può ſervire alle altre. Il metodo dell'Hermano, dottiſſimo Maeſtro di queſti calcoli, e da lui pubblicato negl' Atti dottiſſimi di Petersbourg, incontra queſta difficoltà. Non è però, che un tal metodo non ſia ingegnoſiſſimo, e che non arrecchi vantaggio non piccolo al calcolo integrale.

Num. 312. Torniamo al noſtro propoſito. Abbiamo dunque due forme di trinomj differenziali. Una che aver debbe il quadrato del coefficiente del termine di mezzo maggiore di quattro piani de' coefficienti de gli eſtremi, e queſto procede da due differenziali logoritmiche, le quali giuſtamente, e ſenza errore ſi trovano col metodo Bernovilliano. La ſeconda per lo contrario aver dee quel quadrato minore de' ſuddetti quattro piani, come fu avvertito al *Num.* 245., e procede da elemeati di due archi di cerchio, i quali giuſtamente, e ſenza errore ſi trovano ſecondo il ſuddetto *Num.* 244.

Num. 313. E certo, che può darſi $DD=4C$; Se poſſa poi darſi un trinomio, che abbia tale condizione io non ho tempo di eſaminarlo, ſo bene che a tal caſo non poſſono ſoddisfare ne i logoritmi, ne il cerchio. Non i logoritmi, perchè all'ora i coefficienti $p.\ q.$ degli aſſunti logoritmi ſarebbero diviſi per zero, onde ſembrarebbono logoritmi infiniti, coſa che ne' logoritmi non può aver luogo. Non li archi di cerchio, perchè cadendo all'ora nel centro medeſimo dell'arco quella retta paralella alla di lui tangente, e che dee ſervire a determinarlo, ella in tal ſito cadendo non può dare la dovuta determinazione.

Num. 314. Siccome dunque tutti i binomj, che abbiano $r=-1$, ed e, ed n numeri, e poſitivi, o che tali vengano ridotti colle opportune preparazioni ſi riſolvono mediante il lodato metodo Manfrediano in binomj, che, o hanno la variabile lineare, o che non ſupera il ſecondo grado, e in trinomj dell'eſaminata forma, così ne ſegue, che ſe i binomj hanno la variabile lineare, eſſi hanno per integrale un logoritmo, e così pure que' che hanno la variabile del ſecondo grado purchè ſiano della ſeconda, o terza forma, e que' della prima forma hanno per integrale un arco di cerchio. Quanto a i trinomj, o i logoritmi o il cerchio ſi integrano ſecondo che ſia il quadrato DD maggiore, o minore di $4\ C$ laonde ſarà ora facile a' Principianti l'integrar ſempre tutti i binomj, che abbiano $r=-1$.

Num. 315. Quando per altro per la integrazione accadono archi di cerchio fa d'uopo avvertire alla natura dal problema per prendere, o un arco, o un ſettore circolare, o cilindrico, ſecon-

secondo il grado, al quale ascenderà il problama di cui s' integra l'equazione differenziale. Finalmente fra binomj, i quali trasformandosi acquistano l'esponente della complessa, che si $\frac{e+1-n}{n}$, o $\frac{-e-1-n-nr}{n}$. Quando tali esponenti riescono $=-1$, divengono anch' essi manifestamente integrabili per questo metodo, ma comechè questo esigge, che li altri due esponenti sieno numero intero, onde non riuscendo essi tali, sarebbe d' uopo fare un altra trasformazione, mostrerò il modo facile di far sortire al binomio li esponenti interi nell' atto stesso di questa prima trasformazione. Nella trasformata indeterminata de' numeri 264., e 276., se r sia numero intero, si scorge subito, che la v dovrà porsi l'unità, se poi sia frazione sia essa la $\frac{s}{t}$, e suppongasi all'ora la $v=t$, cioè al denominatore della r, ed otterremo manifestamente $vr+v-1=s+t-1$, ed $v=t$, che sono quantità tutte intere, ne altro più può abbisognare se non. che in caso, che fossero negative, renderle positive spostando le trasformate.

SEZIO-

Sezione Seconda.

Del Calcolo integrale.

Articolo Quarto

De gli ajuti, che dà la Geometria nelle integrazioni de' binomj di una sola variabile, ed occasionalmente dell' integrazione di alcuni multinomj.

Oltre alle integrazioni fin' ora esposte, ed a' metodi per conseguirle, porge alle volte la Geometria l' apertura di trovarne delle altre. A questo Articolo potrebbe per verità ridursi il metodo delle quadrature, di cui parlai al *Num.* 225., e in senso pure di verità quello delle due classi delle differenziali relative. Tutte le mentovate però, per lo strettissimo legame, che è manifesto avere colle cose premesse, ho creduto di dovere anticipatamente trattare, e non riserbarle precisamente al presente Articolo, nel quale per dare più chiara idea di questa apertura porrò altre integrazioni somministrateci dalla Geometria, ed altre pure di questa medesima fatta ne differirò ad altri luoghi ove avrò ordinata occasione di dedurle.

Numero 316. Sia dunque dato qualsivoglia binomio $gdx \times \overline{a+fx^n}^{\frac{1}{2}}$ Questo binomio non dee avere variabile fuori del segno. Dee avere amendue le sue parti positive, ed il segno dee essere in tale stato di cose ridotto $=\frac{1}{2}$. Un tale binomio è sempre l' elemento dell' arco di una curva, che è o del genere delle parabole, o del genere delle iperboli, ed è assegnabile la particolare curva, che lo produce. Nel dato binomio dunque si levi a di sotto al segno, e sotto al segno si porti dx, e piglierà

glierà la forma $g\sqrt{a}\ \sqrt{dx^2+\frac{dx^2fx^n}{a}}$. Già manifestamente si vede, che se questa forma rappresenti la formula generale $\sqrt{dx^2+dy^2}$ dell' elemento delle curve, la $\frac{dx^2fx^n}{a}$ rappresenterà dy^2, onde avremo $\frac{dx\sqrt{fx^n}}{\sqrt{a}}=dy$, e integrando, $y=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}}\times\frac{2}{n+2}\times x^{\frac{n+2}{2}}$, e questa integrale, per rapporto alla presente ricerca è compita, e somministra la natura della curva, della quale il proposto binomio è l' elemento. Se $\frac{n+2}{2}$ sia positivo, è manifesto, che la curva è del genere delle parabole, ma se sia negativo, è delle iperboli. È impossibile, che la trovata curva sia giammai una retta, giacchè all' ora dovrebbe essere $\frac{n+2}{2}=1$. cosa, che accader non può, se n non sia zero, e all' ora manca il binomio.

Se il binomio abbia anche la variabile fuori del segno, onde sia $gx^e dx\sqrt{a+fx^n}=A$, purchè sieno le altre condizioni, lo riddurremo al caso premesso. Suppongasi $x^e=z^v$., onde A divenga $gvz^{\frac{ve+v-e}{e}}dy\sqrt{a+fz^{\frac{nv}{e}}}$, si supponga $ve+v-e=0$ ci riuscirà $A=g\,dz\sqrt{\frac{a+fx^n}{e+1}}$, che ha la forma richiesta, e però si riduce a $\frac{g\sqrt{a}}{e+1}\times\sqrt{dz^2+\frac{dz^2fz^{\frac{n}{e+1}}}{a}}=B$, e la cercata curva sarà $y=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}}\times\frac{2e+2}{n+2e+2}\times z^{\frac{n+2e+2}{2e+2}}$, e perchè $z=x^e+1$, la curva di cui A è l' elemento, riviene $y=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}}\times\frac{2e+2}{n+2e+2}\times x^{\frac{n+2e+2}{2e+2}}$.

In fatti questa curva, adoperandovi le dovute avvertenze, produce il proposto elemento A, della qual cosa stimo opportuno stenderne il calcolo. Avremo dunque $dy=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}}\times\overline{e+1}\times x^{\frac{n+2e}{2}}dx$, e $dy^2=\frac{f}{a}\times\overline{e+1}^2\times x^{n+2e}dx^2$. Essendo ancora $z=x^e+1$, avremo $dz^2=\overline{e+1}^2\times x^{2e}dx^2$. Fatta dunque nella B la sostituzione di questa in vece di dz^2, avremo $g\frac{\sqrt{a}}{e+1}\times dx\sqrt{\overline{e+1}^2x^{2e}+f\overline{e+1}^2\times\frac{x^{n+2e}}{a}}$, la quale, levando di sotto al segno $\overline{e+1}^2\times x^{2e}$, ed $\frac{1}{a}$ acquista la forma $gx^e dx\sqrt{a+fx^n}$ del proposto A. Nel caso, che e sia $=-1$ la mostrata preparazione è sturbata dal zero, ma questo ostacolo potrebbe torsi per qualche modo.

Num. 317. Resta per tanto palese, che tutti i binomj della prima forma, che abbiano l'esponente $r=\frac{s}{2}$ [s figura qualsivoglia

ſvoglia numero diſpari] poſſono ridurſi ad eſſere l'elemento dell'arco di una parabola, o di una iperbola, che il binomio medeſimo rende aſſegnabile. Per le differenziali di queſta forma, le quali pe' premeſſi, o per altri modi ſi ſapranno integrare, non occorrono queſte ricerche, per quelle poi, che non ſi ſanno integrare: è pur meglio qualche coſa, che niente. Nel caſo di $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}} \times \frac{2}{n+2}$, queſta quantità, ſe ſarà poſitiva, ſarà il parametro della parabola, e ſe ſia negativa ſarà il lato della podeſtà dell'iperbola, e così ſarà della quantità $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}}$

$\times \frac{2e+2}{n+2e+2}$.

La trasformazione adoperata nel numero antecedente ci dà pure un'altra riduzione di binomj alle quadrature incomparabilmente più generale. Qualunque binomio dunque, ſia con quali eſponenti, e ſegni ſi voglia, mediante l'ipoteſi $x^e = z^v$, può ſempre ridurſi ad avere la ſua variabile interamente ſotto al ſegno, ed in un ſolo ſuo membro, onde nella forma $\frac{g\,dx}{e+1} \times a + fz \cdot \overline{\frac{n}{e+1}}$. Ridotto così, e ſuppoſta la parte ſotto al ſegno uguale all'ordinata y di una curva, ſarà il propoſto binomio l'elemento $\frac{g}{e+1}$ dell'arco di queſta curva, la di cui natura ſi eſprime per $y = a + fz \cdot \overline{\frac{n}{e+1}}$. Il ſegno più de' membri di queſto binomio indica anche meno.

Num. 318. Hanno in varie occaſioni i valenti Maeſtri del calcolo trovate con ſomma accutezza d'ingegno coll'ajuto della Geometria integrali di altra fatta. Una ne accennerò per iſpiegarmi. Ella ſi legge nell'aureo Libro *des infiniments petits* dell'inſigne Marcheſe dell'Oſpital *Num.* 97. Integra egli col mezzo del Lemma, che egli premette nel *Num.* 96. gli elementi della corda dell'arco del circolo generatore della Cicloide, e la qual corda è quella, che ha l'origine nel punto, da cui eſſa Cicloide viene deſcritta. Suſſeguentemente viene poi anche a dimoſtrare, che l'arco di eſſa Cicloide corriſpondente a tal corda è doppio di queſta. Proſiegue pure ne' numeri ſuſſeguenti a trovare per la ſteſſa via altre ſimili notizie. Come che queſto libro dee eſſere nelle mani di chiunque vuole applicarſi a queſti ſtudj, io non mi diffonderò a deſcrivere, e più minutamente notare ciò, che ho accennato, e così pure non mi diffonderò a far quì menzione di altre maniere ſimili, che da altri dottiſſimi Autori ſono ſtate uſate con frutto. Credo bensì, che foſſe per eſſere di non poco giovamento, che quel Giovine ſtudioſo, il quale nel *Num.* 105. mi figurai, che potuſſe compilare una Geometria elementare intorno alle figure differenziali, v'aggiugneſſe anche queſte maniere di integrazioni geometriche, la onde così per ogni parte abbondaſſero queſti efficaciſſimi ajuti.

Num. 319. Paſſerò in tanto a moſtrare altri modi, co' quali la Geometria ci dà delle integrazioni. Per iſpiegare il primo di queſti modi mi ſi permetta, che ſtenda qui una nuova teoria circa alle Sviluppate, mediante la quale, non ſolo troveremo alcune difficiliſſime integrazioni, ma ſpianerò con eſempj il metodo di ſpoſtare, e così pure le integrazioni relative della ſeconda claſſe, trattando le quali coſe ſono ſtato ſcarſo di eſempj, avendo avuto in animo di ſoddisfarvi nella preſente occaſione.

Lemma.

Num. 320. Poſi (*Fig.* 19.) ſulla retta Af nel punto G coll'angolo ſuo G il triangolo rettilineo GEF. Si muova queſto in arco ſul punto G come centro, tanto che il lato GF venga ad addattarſi alla predetta retta Af. Per queſto moto reſterà diſe-

gnato il trapezio $GFef = v.$, del quale trapezio se ne domanda la generale espressione. Sia $GE = b.$, $GF = c.$ La perpendicolare Gl tirata dall'angolo G alla base sia $= e$. Questa base $EF = p.$ L'arco Ff, che dovrà esser descritto dal lato GF come raggio per venire ad addattarsi a $Gf = x$. E' visibile, che il proposto trapezio è il triangolo Gmf, in cui Gm è $= Gl$, al quale triangolo è aggiunto il triangolo Gem + il Settore GEe.

Facciasi $c\,(GF = Gf)\,x\,(Ff) :: b\,(GE)\,\frac{bx}{c} = Ee$, onde il Settore sarà $\frac{bbc}{2x}$. Il triangolo $Gef = Gem + Gmf$ è $= \frac{pe}{2}$, onde l'espressione generale, che si domanda sarà $\frac{bbx}{2c} + \frac{pe}{2} = v.$

Se questo trapezio sia l'elemento contiguo di qualche area supposto, che Gf essa sia una quantità differenziale; allora, comechè il triangolo Gmf, verrebbe esposto per quantità minore di Gf, o Gm, grandezza, che non può darsi, egli perciò sarà nullo nella presente considerazione; E perchè allora altresì nel residuo triangolo Gem, essendo la perpendicolare Gm un arco tirato dal centro e coll'intervallo $GE.$, sarà la $em = eG$. Quindi ne viene, che se il proposto trapezio sia l'elemento di un'area, che si generi nell'avvertito modo, la sua generale espressione sarà $\frac{\overline{GE}^2}{2GF} \times Ff + \frac{GE \times Gm}{2} = v.$

Problema.

Num. 321. Sopra la retta indiffinita HBf sia (*Fig.* 20.) la normale AD. A questa, come asse, sia adattata coll'asse suo, e col suo vertice in A qualunque curva AL, di cui però se ne sappia trovar la tangente. Questa curva si muova verso f, addattando sempre il suo contorno, e senza scorrere sulla $Hf.$, e col

suo apice in A descriva, come accade nella Cicloide, la curva AEe. Dal punto G, in cui si trova toccare la retta Hf, si tiri al punto E, in cui l'apice allora si ritrova descrivente la nuova curva, la retta GE. Si domanda la formola generale per ritrovare il valore del triangolo mistilineo $GAE = v$. Nominerò la curva descrivente EGF la *Sviluppata*, e la curva AE, che viene generata, la dirò *l'Involuta*. La EB la dirò x, e y la BG. Sia CF l'ordinata susseguente, contigua alla $BG.$, che però GF sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Si prolunghi l'asse CE in b, e supposta MN l'altra coordinata contigua di BG, ma antecedentemente, quando la sviluppata passava col suo piccolissimo lato MG sulla retta Hf, la HG ne era la tangente, onde HG si dirà t. Intanto giri la curva sul suo angolo G, fatto da' due contigui suoi piccolissimi lati $GM.\ GF$, e come centro, onde il lato GF venga ad addattarsi alla Gf. E' visibile, che per questo movimento ne nascerà il trapezio $GEef$, che sarà l'elemento dello spazio cercato, e perchè il piccolo triangolo Gmf è fatto di quantità differenziali, quindi è, che il cercato elemento sarà il solo $GEem$. Questo dunque accade di ritrovare, e tutto il negozio riducesi ad aver l'espressione dell'arco Ff. Si consideri dunque la sviluppata nella posizione antecedente EGF, e prolungata la Fh in G. la Fh sarà la tangente contigua della tangente GH, e la Ch sarà la sottangente contigua della $BH.$, e questa la nominerò s. La dt dunque sarà l'aumento, per cui cresce la sottangente Ch dalla sottangente $BH.$, e perchè questo accrescimento, come visibilmente si fa chiaro, è $BC\,(dx) + Hh$, avremo $Hh = ds - dx$. Allo stesso modo, essendo Fh la tangente contigua di GH, sarà dt il di lei aumento, che essendo anch'egli $= GF\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) + ih$, avremo $ih = dt - \sqrt{dx^2 + dy^2}$. E' poi $Hi = \sqrt{\overline{Hh}^2 - \overline{hc}^2} = \sqrt{\overline{ds - dx}^2 - 1 \times \overline{dt - \sqrt{dx^2 + dy^2}}^2}$; E perchè in fatto di differenziali la Hi è la stessa, che l'arco $HP.$, essendo poi gli angoli al vertice uguali, avremo $GH(t) . Hi \sqrt{d}$

$\left(\sqrt{\overline{ds-dx-1}^2 \times \overline{dt-\sqrt{dx^2+dy^2}}^2} :: Gf\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right)a\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{\sqrt{\overline{ds-dx-1}^2 \times \overline{dt-\sqrt{dx^2+dy^2}}^2}}{t}\right.$, che sarà l'arco cercato Ff. Sostituito ora questo nell' espressione generale del Lemma antecedente in vece di Ff, e in luogo di $\overline{GE}^2$ la sua $= xx+yy$, e per GF la $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e finalmente in cambio di Gn la sua $= \frac{y\,dx-x\,dy}{\sqrt{xx+yy}}$, il che si dimostrò nel *Num.* 231. (equivalendo ivi la Bb a questa Gn) si ridurrà la cercata espressione generale a $dv = xx+yy \times \frac{\sqrt{\overline{ds-dx-1}^2 \times \overline{dt-\sqrt{dx^2+dy^2}}^2}}{2t} + \frac{y\,dx-x\,dy}{2}$. Quest'ultima parte può dover essere alle volte $\frac{x\,dy-y\,dx}{2}$, cioè, quando essendo la sviluppata una delle curve, che ritornano in loro, o verso l'origine, si darà caso, che dx da prima andasse crescendo, ed indi divenga decrescente.

Num. 322. Sia ora la *Sviluppata* EFG un mezzo cerchio laonde *l' Involuta* sia la Cicloide ordinaria AEe, di cui colla presente formula sapremo trovare il valore di qualunque suo settore AEG, cominciante dall' origine A, e terminato dalla retta, che congiunge il punto descrivente E col punto G del contatto del circolo generatore colla base Af, e centro all' ora del piccolissimo archetto Ee. Essendo dunque la sottangente del cerchio $\frac{2ax-xx}{a-x}$, sarà anche $ds = 2dx \sqrt{\frac{2ax-xx}{a-x}} + dx \times \frac{2ax-xx}{\overline{a-x}^2}$. Similmente essendo la tangente del cerchio $= \frac{a\sqrt{2ax-xx}}{a-x}$ sarà altresì $dt = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-xx}} \mp \frac{a\,dx\sqrt{2ax-xx}}{\overline{a-x}^2}$. E perchè nel cerchio è $\sqrt{dx^2 \mp dy^2} = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-xx}}$, e finalmente $x^2+y^2 = 2ax$, con queste quantità faremo il seguente calcolo. E dunque $ds-dx = dx \mp \frac{dx \times \sqrt{2ax-xx}}{\overline{a-x}^2}$, e il suo quadrato è $dx^2 + 2dx^2 \times \frac{\sqrt{2ax-xx}}{\overline{a-x}^2} + dx^2 \times \frac{2ax-xx}{\overline{a-x}^4}$. Similmente è $dt-\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{a\,dx\sqrt{2ax-xx}}{\overline{a-x}^2}$, e il suo quadrato preso negativamente è $-\frac{a^2dx^2 \times \sqrt{2ax-xx}}{\overline{a-x}^4}$. Aggiugnendo ora le trovate quantità, e cavandone la radice, ne risulta $\sqrt{\overline{ds-dx^2-1} \times \overline{dt-\sqrt{dx^2+dy^2}}^2} = \frac{a\,dx}{a-x}$, e però $dv = \frac{3\,a\,dx\sqrt{x}}{2\sqrt{2a-x}}$, che è l'equazione dell' elemento del proposto settore GAE della Cicloide.

Num.

Num. 323. Si proponga ora da integrare questa equazione. E' manifesto, che se avesse $\sqrt{x}$ nel denominatore potrebbe integrarsi con un settore di cerchio, onde lo spotterò, e secondo la serie del *Num.* 214., posta l'integrale $-\frac{3ax^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}}{2}$ avrò da questa le due differenziali $\frac{3ax^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{2a-x}} - \frac{3a^2dx}{\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}$.

Sia dunque (*Fig.* 15.) la curva AB un mezzo cerchio, posto come lo supposi al *Num.* 242., e servendomi in questo caso della formula de' settori posta al *Numero* 251., che è $\frac{rr \times y\,dx - x\,dy}{2 \times xx + yy}$, e supposta la natura di esso mezzo cerchio espressa per $y = \sqrt{2bx - xx}$, si ricava l'elemento Agf del contorno settore $= \frac{rr\,dx}{4\sqrt{x}\sqrt{2b-x}}$, il quale dee rappresentare $\frac{3a^2dx}{2\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}$. Abbiamo dunque $2b = 2a$, onde b, cioè il raggio del nostro cerchio da assumersi sarà a, che è pure il raggio del mezzo cerchio generatore della cicloide. L' equazione poi $\frac{rr}{4} = \frac{3a^2}{2}$ ci somministra $r = a\sqrt{6}$, e conseguentemente il cerchio CgE, il di cui settore dovrà somministrar l'integrale, dovrà avere $a\sqrt{6}$ per raggio. Dirò dunque I il settore di questo cerchio, e però, siccome abbiamo l'equazione differenziale $dv = \frac{3ax\,dx}{2\sqrt{2a-x}}$, e l'altra $-d\frac{3ax^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}}{2}$

$= 3a$

$= \frac{3ax^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{2a-x}} \; \frac{-3a^2dx}{2\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}$, aggiunta a questa equazione l'altra $dI = \frac{3a^2dx}{2\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}$; avremo pure $-d\frac{3ax^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}}{2} + dI = \frac{3ax^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{2a-x}} = dv$., e integrando $-\frac{3ax^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}}{2} + I = \int \frac{3ax^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{2a-x}} = v = -\frac{3ay}{2} + I$,

(giacchè $y = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}$, nel presente caso del cerchio.) Questa equazione, che è la vera integrale del proposto settore della Cicloide è compita, giacchè la supposizione di $x = 0$ anienta, secondo il dovere, i membri dell' equazione. Che poi questa trovata integrale sia vera, oltre alla certezza del metodo col quale si è ritrovata, ne abbiamo un evidente confronto. Parecchi Valentuomini hanno di già scoperto, che se posta la mezza cicloide AO (*Fig.* 21.) si compisca il paralellogrammo AO sopra la base di essa, questo paralellogrammo uguaglia quattro mezzi cerchi generatori DMO. Hanno altresì scoperto, che il trilìneo OAQ è la terza parte di tutto lo spazio $OADO$ chiuso dalla Cicloide, il quale spazio $OADO$, viene perciò a restare trè de' medesimi mezzi cerchj. Queste verità sussieguono come facilissimi corollari dell'ora trovata integrale. Al compirsi della mezza cicloide la x diviene $= 2a$, onde l' integrale $-\frac{3ax^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}}{2}$ si anienta, e tutto lo spazio rimane allora uguale al solo quadrante I. Questo quadrante hà il suo raggio, che stà al raggio del cerchio generatore come 1 à $\sqrt{6}$, e

perchè

perchè le aree de' settori simili sono fra loro come i quadrati de' raggi, l'area di esso quadrante *I* equivarrà a sei quadranti del circolo generatore, vale a dire a tre mezzi cerchj del medesimo.

Num. 324. In proposito dell'asserirsi, che il trilineo *OAQ*, o il di lui segmento *ONX* (*Fig.* 21.) uguaglj il mezzo cerchio *DMO*, o il corrispondente di lui segmento *OSI*, deducendolo dall'essere stabilito, (*) che l'elemento *fN* dell'uno uguaglia sempre il corrispondente elemento *IS* dell'altro, dee farsi a giovamento de' Principianti una annotazione affinchè non cadessero qualche volta in errore. E' notissimo, che integrando una medesima differenziale, ove questa venga attamente compita, ne risultano integrali affatto disuguali, e diverse. Nella Sezione VI. ne mostrerò parecchie anzi nella di lei Appendice al *Num.* 522. mostrerò due spazj, uno de' quali è sempre parte dell'altro, e che ciò non ostante hanno amendue uno stesso preciso elemento. Ciò posto, e quali saranno i contrassegni, che ci accertino, nel caso che li elementi *a. b.* di due quantità *A. B.* sieno fra di loro uguali, per poter conchiudere senza errore, che anche le due quantità *A. B.*, che sono le somme de' corrispettivi elementi *a. b.* sieno fra di loro uguali, o nella costante ragione di essi *a. b.*, se questi fossero sempre in ragione costante? Si otterrà questo accertandosi per l'appunto, che le quantità *A. B.* sieno veramente la somma de' loro respettivi elementi. Le differenziali *a. b.*, che trovansi, o differenziando, o mescolando ancora nella differenziazione qualche teoria geometrica, o simile, perdono ordinariamente, tutte, o in parte quelle costanti, che accompagnavano le quantità assolute *A. B.* delle quali esse sono le differenziali, e però volendo risalire mediante il calcolo integrale a trovare le *A. B* dalle loro differenziali *a. b.*, non trovansi già per lo più le vere *A. B.*, ma queste, o scemate, o eccedenti di quelle costanti grandezze, che in differenziando sono, o svanite, o sonosi diversamente accozzate. In questo caso dunque nel quale è visibile, che le somme di *a. b.*, non rifanno le *A. B.* l'argomentare dall'uguaglianza $a = b$ la verità dall'altra $A = B$ è senza fondamento. Ma se la sola Geometria ci abbia ella prodotti

(*) *Methode pour la mesure des surfaces... par M. Carrè prop. 35.*

dotti gli elementi *a. b.*, o senza ajuto di differenziazione, e mostrandoci evidentemente, che essi elementi, i quali ella ci scopre sono interamente l'adequata parte di quella quantità della quale essi sono gli elementi, onde essi piuttosto ci si fanno conoscere come vere parti constituenti la loro quantità, e non già sotto l'idea di differenziali, allora l'argomentare dall'una uguaglianza la verità dell'altra si fa con tutto fondamento, e necessariamente, e questo per appunto è quello, che è succeduto nel caso de' presenti spazj cicloidali.

Abbiamo dunque la quadratura di qualunque settore assignabile della Cicloide. Confesso però ingenuamente mancare a questa quadratura il pregio di esser composta di quantità tutte perfettamente esponibili, pregio, che hanno alcune altre quadrature di altri particolari segmenti di essa cicloide. Ciò non ostante la quadratura qui scoperta facilissimamente può aversi talmente prossima al vero quanto ne piace, e senza cadere nell'imbarazzo bene spesso insuperabile di sommare delle serie infinite, e che in alcuni casi condur ci possono all'errore. Darò per li principianti un esempio del calcolo per ottenere in numeri assoluti la prossima quadratura del proposto settore.

S'intenda descritto (*Fig.* 21.) sulla ordinata *DO* della mezza Cicloide il mezzo cerchio *DMO* = al mezzo cerchio generatore, e facciasi $OI = EB = x$. Mostrerò *Num* 328., che nella Cicloide è sempre $EB = EF$. Sia per tanto il raggio *CO* del cerchio = 200000 = a, e trovisi, che *OI*, sia di tali parti 120363. Per ridurre questo numero a' numeri delle tavole de' seni, facciasi 200000. 120363 :: 10000000., che è il raggio delle tavole, delle quali in questo calcolo mi servirò, ad un quarto, ed avremo il seno figurato per *OI*. = 6018150. Questo numero si trova essere il seno di gradi 37. L'angolo dunque *ROP* del Settore circolare, che è uguale all'angolo *ISO*, sarà anch'esso di gradi 37, e però esso Settore sarà la $\frac{37}{360}$ parte di tutto il cerchio. Comechè poi è il raggio *CO* al raggio *OR* :: 1. 1/6. :: 200000. 489898 scarse, così altrettante parti sarà lungo esso raggio *OR*, e prendendo la ragione del raggio alla circonferenza di 113 a 710, e facendo 113. 710 :: 489898. alla

alla circonferenza dell' intero cerchio RP, ſarà queſta quaſi 3078120, e queſta multiplicata per 244949, metà del ſuo raggio darà l'area ſua intera = 753824215880; la $\frac{37}{360}$ parte della quale ci dà il ſettore ROP = 77437081632. $\frac{1}{9}$. Biſogna ora ritrovare l'area ay, cioè l'area fatta dal raggio $a = CO$ del cerchio generatore, moltiplicato per l' ordinata SI corriſpondente all' aſciſſa $x = OI$. Eſſendo dunque l'angolo SOI il complemento dall' angolo ISO, il quale ſi è ritrovato di gradi 37, ſarà quell' angolo SOI di gradi 53., onde il ſeno ſuo ſarà 7986355, e fatto. 10000000. 7986355 :: 200000. ad un quarto, ſarà queſto la IS = 159727. $\frac{1}{10}$, e queſto multiplicato nuovamente per eſſo raggio CO ci darà l'area ay = 31955420000. I $\frac{1}{2}$ di queſto numero debbon ſottrarſi dall' altro, e il reſiduo, che è 26503951631. $\frac{8}{9}$ ci dinota, che ſe il raggio CO del cerchio generatore ſia 200000 parti, il ſettore GAE. è 26503951631. $\frac{8}{9}$. quadratelli, ogn' uno de' quali aveſſe per lato una delle parti del raggio. Chi vorrà approſſimazione più minuta non ha che intendere eſſo raggio diviſo in maggior numero di parti, ed aſſumere la ragione del raggio alla circonferenza più proſſima.

Se poi piaceſſe di eſibire per ſole linee il ſettore medeſimo la coſa è aſſai facile. Per ottenere il ſettore circolare I. altro non occorre, che ritrovare il ſuo raggio OR, che ſia $= a\sqrt{6}$. Per riuſcirvi baſta porre ſu di una retta ſette lunghezze a del raggio CO, e diviſa queſta per mezzo farvi ſopra un mezzo cerchio col raggio di eſſa metà, indi al fine della prima ſettima parte alzare una perpendicolare, che termini al mezzo cerchio, la quale è viſibilmente $= a\sqrt{6}$. Con queſto raggio, fatto l'arco

co RP., mediante la SO prolungata ſi avrà il ſettore I. Quanto all'altro ſpazio ay, egli è il rettangolo, che ha CO per un lato, ed IS per l'altro. La differenza $I - \frac{3ay}{2}$ di queſte due aree così ritrovate è il propoſto ſettore GAE.

E' ora neceſſario moſtrare il modo di ritrovare la EB., che è l'aſciſſa corriſpondente all' ordinata della ſviluppata nel punto tangente G. Nella Cicloide queſta è coſa facile, ma perchè queſta notizia è pur neceſſaria in propoſito d'ogn' altra involuta, io ne moſtrerò il modo generale, e darò pure ne' ſeguenti ſei Problemi la notizia, e quaſi che il compimento della teoria di queſte involute, e con tale occaſione moſtrerò, come la geometria ne ajuti per altri modi a trovare altre integrali,

Problema I.

Num. 325. Ritrovandoſi la ſviluppata (*Fig.* 22.) nella ſituazione EG, trovare la retta GE perpendicolare all' involuta AE nel corriſpondente punto E.

L' aſciſſa EB della ſviluppata ſi dica x, e y la ſua coordinata BG. Si tiri GC perpendicolare alla ſviluppata in G., e ſi nomini p. Queſta ſarà pure perpendicolare all' aſſe AG, che in queſto momento è tangente della curva in G. L' aſciſſa AF dell' involuta, corriſpondente al punto E, ſi dica z, ed v la ſua coordinata FE. Avremo dunque $CD = p - v$. Sia detta q la EC ſuperpendicolare della ſviluppata. Avremo dunque $ED = \sqrt{qq - 1 \times p - v^2}$, ed $EC = \sqrt{qq - 1 \times p - v^2 + v^2}$. I principianti potranno vedere nell' utiliſſima Analyſe demontreè del P. Reyneau, *Num.* 550., che p è generalmente $y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, e $q = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx}$, laonde fatte queſte ſoſtituzioni nell' eſ-

preſſione di EG, ella riceverà la forma generale $EG = \frac{\sqrt{x^2dx^2 + 2xydxdy - y^2dx^2 + 2vydx} \times \sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$.

Se ſupporremo, che l'involuta ſia la Cicloide, eſſendo allora $y = \sqrt{2ax - xx}$ e $dy = \frac{dx \times \overline{a-x}}{\sqrt{2ax-xx}}$, ſi otterrà $EG = \sqrt{2av}$. Se la involuta ſia la parabola onde $y = \sqrt{ax}$, e $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$; ſarà $EG = \sqrt{x^2 + v\sqrt{a^2+4ax}}$.

Problema II.

Num. 326. Stando le medeſime coſe trovar l'eſpreſſione generale di EB aſciſſa della ſviluppata corriſpondente al punto E.

Eſſendo $EG = \sqrt{\overline{EB}^2 + \overline{BG}^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ (come ſi è moſtrato nel numero antecedente)

$$\sqrt{x^2dx^2 + 2xydxdy - y^2dx^2 + 2vydx}\sqrt{dx^2+dy^2},$$
$$dx$$

avremo l'equazione $ydx - xdy = v\sqrt{dx^2+dy^2}$, nella quale ſoſtituendo y per x, preſa dall'equazione della ſviluppata, ſi ſeparerà $x =$ alla richieſta EB.

Nella Cicloide ella riſulta $= v$, coſa che promiſi moſtrare al *Num.* 324., e nella parabola, riſultando $x\sqrt{x} = v\sqrt{4x+a}$ ne ritireremo $x = \frac{2v^2 \pm v\sqrt{4v^2+a^2}}{2}$. Quindi inneſſa parabola

bola riſulta $EG =$

$$\sqrt{8v^4 + v^2a^2 + 4v^3\sqrt{4v^2+a^2} + a^2v\sqrt{a^2+v^2} + 4v\sqrt{4v^2+a^2}}.$$
$$a$$

Problema III.

Num. 327. Stando le medeſime coſe trovare l'eſpreſſione generale della ſuperpendicolare FG dell'involuta.

Eſſendo $\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2[\overline{FG}]^2 + \overline{DC}^2$, avremo $FG = \sqrt{qq-1 \times p-v}^2 =$

$$\sqrt{x^2dx^2 + 2xydxdy - y^2dx^2 - v^2dx^2 + 2vydx}\sqrt{dx^2+dy^2}.$$
$$dx$$

Nella Cicloide è $FG = \sqrt{2av - vv}$. Nella parabola è $= \sqrt{x^2 - v^2 + v\sqrt{4ax+aa}}$, e levando x, riſulta $FG =$

$$\sqrt{8v^4 \pm 4v^3\sqrt{4v^2+a^2} + a^2v\sqrt{v^2+a^2} + v\sqrt{4v^2+a^2}}.$$
$$a$$

Problema IV.

Num. 328. Stando le medeſime coſe, trovare l'eſpreſſione generale della ſottangente FL dell'involuta.

Si conduca la EL normale alla perpendicolare EG, ed eſſendo $GF.FE :: FE.FL$, queſta ſarà $\frac{v^2}{\sqrt{qq-1 \times p-v}^2} =$

$$\sqrt{x}$$

$$\frac{v^2 dx}{\sqrt{x^2 dx^2 + 2xy\,dx\,dy - y^2 dx - v^2 dx^2 \pm 2vy\,dx\sqrt{dx^2+dy^2}}}.$$

Per la cicloide sarà $FL = \frac{v^2}{\sqrt{2av - vv}}$, e per la parabola è

$$\sqrt{\frac{8v^4 + v^3\sqrt{4v^2+a^2} + a^2 v}{a}}\sqrt{v^2+a^2} + 4v\sqrt{4v^2+a^2},$$

e levando x, riviene $FL =$

$$\frac{av^2}{\sqrt{3v^4 + v^3\sqrt{4v^2+a^2} + a^2 v}\sqrt{v^2+a^2} + 4v\sqrt{4v^2+a^2}}.$$

Problema V.

Num. 329. Stando le medesime cose trovare l'equazione differenziale dell'involuta.

Essendo $dv.\,dz :: EF.FL$, avremo la cercata equazione esposta per $dz =$

$$\frac{v\,dv\,dx}{\sqrt{x^2 dx^2 + 2xy\,dx\,dy - y^2 dx^2 - v^2 dx^2 \pm 2vy\,dx\sqrt{dx^2+dy^2}}}.$$

Nella cicloide ella diviene $dz = \frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{2a-v}}$; Le cose a' loro luoghi premesse ci danno la sua equazione integrale [*Num.* 242.]

$z(AF)$

$= $ all'arco RP (*Fig.* 21.), il di cui raggio sia doppio di a, meno $\sqrt{2av - vv}$, cioè meno SI. Questa equazione, che non mi è avvenuto di vedere scoperta da altri, può riconfrontarsi vera così. L'angolo POT. è $= DOS$ (*Fig.* 21.), onde la metà di DCS., e perchè il raggio RO è $= 2CO$, sarà l'arco $DS = PT$., e conseguentemente anche l'arco $SO = RP = GE =$ alla retta GA. Ma $GF = GB$ (*Numero* 326.) $= SI$., dunque $AF = RP - SI = z$.

Nel caso poi della parabola, l'equazione differenziale risulta $dz = \frac{v\,dv}{\sqrt{x^2 - v^2 + v\sqrt{4ax + aa}}}$, equazione A, e levando la x sarà $dz =$

$$\frac{a\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{8v^3 - 4v^2\sqrt{4v^2+a^2} + a^2\sqrt{8v^2+a^2} + 4v\sqrt{4v^2+a^2}}}.$$

equazione B. La Geometria ci darà ajuto ad integrare questa equazione. In fatti, mediante l'equazione $v = \frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{4x \pm a}}$ (*Num.* 326.), che somministra $dv = \frac{\sqrt{a}\,dx \times \sqrt{2x+a}}{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}$, l'equazione A, ridotta tutta in x, si trasformerà in $dz = \frac{a\,dx\sqrt{x}}{(4x+a^2)^{\frac{1}{2}}} = C$. La prima integrale della quarta serie, che è pel presente caso $\frac{-a x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{4x+a}}$, mi dà $\frac{-a\,dx}{4\sqrt{x}\sqrt{4x \pm a}}$ (*D*)

$\pm ad$

$+\frac{a\,dx\sqrt{x}}{4x+a}$ (C). La D pel *Numero* 262. ha l'integrale $-\frac{a}{8}\,L\,\frac{\sqrt{4x+a}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+a}-2\sqrt{x}}$, e però ne risulta l'equazione integrale $z=\frac{-a\sqrt{x}}{2\sqrt{4x+a}}+\frac{a}{8}\,L\,\frac{\sqrt{4x+a}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+a}-2\sqrt{x}}$, equazione E; E perchè è $x=\frac{2v^2+v\sqrt{4v^2+a^2}}{a}$. (*Numero* 326.), fatta questa sostituzione nella E, ne otterremo per ta dalla Geometria, $z=-\frac{a^2}{2}\times\frac{\sqrt{2v^2+v\sqrt{4v^2+a^2}}}{\sqrt{8v^2+a^2+av\sqrt{4v^2+a^2}}}$

$$+\frac{a}{8}L\,\frac{\sqrt{8v^2+a^2+4v\sqrt{4v^2+a^2}}+\sqrt{2v^2+v\sqrt{4v^2+a^2}}}{\sqrt{8v^2+a^2+4v\sqrt{4v^2+a^2}}-\sqrt{2v^2+v\sqrt{4v^2+a^2}}}$$

che è l'equazione primitivadi quest' involuta della Parabola.

Proble-

Problema VI.

Num: 330. Resta ancora per compimento del presente oggetto a trovar l' equazione differenziale dell' Arco AE dell' involuta, il che facilmente eseguirò, riassumendo le cose dette al *Numero* 321.

Siccome dunque è (*Fig.* 20.) Ee l' elemento cercato, ed è altresì GF ($\sqrt{dx^2+dy^2}$), Ff [$\sqrt{dx^2+dy^2}\times\frac{\sqrt{ds-dx^2}}{t}-1\times dt-\sqrt{dx^2+dy^2}$: : GE [$\sqrt{xx+yy}$, ad Ee, che dirò dV. avremo la cercata equazione differenziale $dV=\sqrt{xx+yy}\times\left(\sqrt{\frac{ds-dx^2}{t}}-1\times dt-\sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2$

Le cose premesse negli antecedenti cinque Problemi danno quanto occorre sostituire in questa formula generale per ridurre la sua seconda parte ad avere una sola variabile, e la sola sua differenziale, e conseguentemente per esporre il cercato elemento per quella variabile x, y, o v, che ne sia in piacere.

Per la Cicloide, essendosi veduto (*Num.* 322.] che è $\frac{a\,dx}{a-x}=\sqrt{ds-dx^2}-1\times dt-\sqrt{dx^2+dy^2}$, ed essendo ancora $\sqrt{xx+yy}=\sqrt{2ax}$; e $t=a\,\frac{\sqrt{2ax-xx}}{a-x}$, avremo per l' elemento del di lei arco $dV=\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-x}}$, di cui $-2a\sqrt{2a-x}$ è l' integrale, la quale dovendosi compiere, supponendo, che quando x sia zero, anche V si annienti, darà $V=4a-2\sqrt{a}\sqrt{2a}$

$\sqrt{2a-x}$. Può facilimente dimoſtrarſi, che $2\sqrt{a}\,\sqrt{2a-x}$ è il doppio della corda MO dell' arco MSO; ed è viſibile, che $4a$ è il doppio del diametro DO [*Fig.* 21.], laonde l' arco $AE = V$, che ſi è rettificato, viene ad eſſere due volte il diametro del cerchio, meno due volte la corda MO, cioè $AE = 2DO - 2MO$. Se ſupporremo $x = 2a$, nel qual ſuppoſto ſarà fatta tutta la mezza cicloide, queſta farà per la trovata formula $= 4a = 2DO$, giacchè $\sqrt{2a-x}$ allora ſi annienta. Poſta dunque eſſa mezza cicloide AO nell' antecedente equazione, ella diviene $AE = AO - 2MO$, onde l' arco della cicloide OE cioè $AO - AE$ ſarà ſempre $= 2MO$; come per altra maniera dottiſſimi Valentuomini hanno dimoſtrato. Volendo eſporre l' arco AE per l' ordinata $FF = v = x$, avremo l' equazione $V = 4a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{2a-v}$.

Nella parabola troveremo $\sqrt{ds - dx}^2 - 1 \times \sqrt{dt - \sqrt{dx^2+dy^2}}^2 = \sqrt{\frac{dx\sqrt{a}}{4x+a}}$, e però avremo l' equazione $dV = \frac{dx\sqrt{a}\,\sqrt{x+a}}{4x+a} = A$, la quale, mediante l' equazione $x = \frac{2v^2 + v\sqrt{4v^2+a^2}}{a}$, che ſomminiſtra $dx = \frac{dv}{a} \times 4v + \frac{8v^2+a^2}{\sqrt{4v^2+a^2}}$, ſi cambierà in $dV = dv \times \frac{4v \times \sqrt{4v^2+a^2} + 8v^2+a^2 \times \sqrt{2v^2+a^2+v\sqrt{4v^2+a^2}}}{\sqrt{4v^2+a^2} \times 8v^2+a^2+4v\sqrt{4v^2+a^2}} = B$.

Anche queſta differenziale ſi integrerà, giacchè la A è integrabile. In fatti ſuppongaſi $4x + a = y$. onde $x = \frac{y-a}{4}$, e $dx = \frac{dy}{4}$, ed avremo $A = dy\sqrt{a}\,\sqrt{\frac{y+3a}{8y}}$, e ſvolgendola

$\frac{\sqrt{a}\,dy}{8\sqrt{y+3a}}(C) + \frac{3a\sqrt{a}\,dy}{8y\sqrt{y+3a}}[D]$. L' integrale di C è $\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{3a+y}}{4} = \frac{\sqrt{a}\,\sqrt{x+a}}{2}$, e della D (*Num.* 274.) è $\frac{-a\sqrt{3}}{8} L \frac{\sqrt{3a+y}+\sqrt{3a}}{\sqrt{3a+y}-\sqrt{3a}} = -\frac{a\sqrt{3}}{8} L \frac{2\sqrt{x+a}+\sqrt{3a}}{2\sqrt{x+a}-\sqrt{3a}}$.

L' arco dunque V dell' involuta della parabola è il qui trovato, il quale, ſe voglia eſprimerſi per la coordinata v, è $\sqrt{a} \times \sqrt{\frac{2v^2 + av + v\sqrt{4v^2+a^2}}{2}} - \frac{a}{8}\frac{3}{} L \frac{2\sqrt{2v^2+a^2+v\sqrt{4v^2+a^2}} + \sqrt{3a^2}}{2\sqrt{2v^2+a^2+v\sqrt{4v^2+a^2}} - \sqrt{3a^2}}$. Queſta integrale non è compita, e le ſi dee aggiugnere $-\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{8} L \frac{2a+a\sqrt{3}}{2a-a\sqrt{3}}$.

Num. 331. Parmi manifeſto, che ſe ci foſſero ſtate date da integrare e queſta ultima differenziale, e quella del *Num.* 329. non avremmo ſaputo ove rivolgerſi per riuſcirvi. La Geometria ce ne ha aperta la ſtrada, e per queſta ſtrada, e per altre ſimili, altre integrazioni ugualmente aſtruſe pur ritroveremo a' loro luoghi. In tanto ſarebbe bene, che qualche Giovane ſtudioſo ſi applicaſſe a rintracciare in eſſe due differenziali, e così proporzionalmente in altre ſimili, la propria combinazione, che hanno fra di loro gli eſponenti delle variabili, sì compleſſe, che incompleſſe, le quali formano eſſe due differenziali, e la relazione delle loro coſtanti, mentre credo, che così ne potrebbero ricavare due formule generali nella loro linea, utili poi per integrare quelle differenziali, che avendo la forma di eſſe aveſſero ancora le altre condizioni opportune. Le due z, ed V, che ſi ſono eſpreſſe per x, e per v, poſſono pure eſporſi per y, ed avere così al-

sì altre due forme di integrali. Ma bisogna passare più avanti. Se in vece di cercare l'involuta della prima parabola, si cerchi generalmente l'involuta indeterminata di qualunque Parabola, è manifesta la dovizia di questo fonte, e se in oltre adopereremo ancora le iperboli, o altre curve, o loro tronchi, non più saremo ricchi di un fonte, ma di un ben grosso fiume, e il calcolo integrale, posto piede in un paese, del quale fino al presente era stato bandito, ne ritrarrà a dovizia il suo avanzamento.

Num. 332. Altri ajuti può darci la Geometria, e lo possono pure altre parti della Matematica; Avrò in seguito l'opportunità di andarne mostrando qualche altra maniera. In tanto mi contenterò di aver date le poche, che hanno formato questo terzo Articolo, con che sembrerebbe, che fosse ormai tempo di imporre fine a questa seconda, e forse troppo lunga Sezione. Comechè però io sia persuaso, che per l'avanzamento del calcolo integrale, e per la retta maniera di servirsene, possano essere confacenti alcune avvertenze, che, applicandomi io a quest'argomento, mi sono venute fatte, così prima di terminare questa Sezione, stimo a proposito di soggiugnerle quì come un appendice della medesima.

Io mi persuado dunque, che dalle cose sparsamente fin qui dette i miei Lettori avendo veduto darsi differenziali di natura totalmente diversa fra loro, respettivamente al modo di venir procreate, avranno senza altro riconosciuto, che per avantaggiare il Calcolo Integrale è d'uopo seriamente conoscere esse diverse loro nature, imperocchè è manifestamente impossibile, che quel metodo il quale è a proposito per integrare una differenziale di una tale natuta, per esempio Aritmetica, servir possa per integrar quella di natura diversa, come sarebbe una relativa, giacchè in maniere diverse esse procreansi. Alla cognizione dunque delle individuali nature delle differenziali bisogna dar opera. Oltre per tanto le già descritte, un altra credo, che sia da notarsi, che parmi avere scoperta da un fatto, che quì stenderò, e susseguentemente ne dedurrò la natura di tali differenziali, e i loro effetti.

Num. 333. Sia fra la assintoti *BC*. *BD* (*Fig.* 23.) poste ad angolo retto l'iperbola $aa = xy$. Serva pure l'assintoto *BD*. di asse alla Logoritmica *OQ*, l'origine della quale sia nella *BC* prolongata dell'altra assintoto. Le ordinate di questa Logoritmica sieno $\sqrt{aa+xx}$; si domanda, che si ritrovi l'elemento *Mn* dell'area dell'iperbola, non già per l'elemento dx della sua ascissa *BN*, ma per l'elemento *Nn* dell'asse della data Logoritmica, laonde lo spazio dell'iperbola da quadrarsi venga determinato dal logoritmo di $\sqrt{aa+xx}$. Essendo per tanto $Nn = \frac{x\,dx}{aa+xx}$, ed $NM = y = \frac{aa}{x}$; il cercato elemento *Mn* sarà $\frac{x\,dx}{aa+xx} \times \frac{aa}{x} = \frac{aa\,dx}{aa+xx}$, laonde, sempre che sia proposto di ritrovare l'area dell'iperbola corrispondente all'ascissa designata per $L\sqrt{aa+xx}$, l'elemento, che si dovrà integrare sarà $\frac{aa\,dx}{aa+xx}$. Questo elemento, e già più volte lo abbiamo veduto, è l'elemento dell'arco del cerchio relativo alla sua tangente. Quindi è, che siccome sappiamo integrare qualunque spazio di questa iperbola (*Num.* 168.), così nasce speranza, che integrar si possa l'arco del cerchio. E qui per più convalidare, e rischiarare questo fatto, e per dar fondamento ad un altra utile riflessione, mi si permetta, che faccia vedere, come dall'integrale, che troverò del dato spazio iperbolico rinasca, differenziandola colle dovute avvertenze, l'elemento medesimo del cerchio. L'integrale dell'elemento dello spazio iperbolico sopra *BN*, e che considerandolo relativamente all'ascissa precisa dell'iperbola nominerò *V*, è secondo il *Num.* 168. $= aa + aal\,x$, in cui x è l'ascissa *BN*. Vogliasi ora considerare tale spazio relativamente alla Logoritmica, e dicasi v. In questo caso l'integrale sarà $v = aa + aall\sqrt{aa+xx}$, giacchè quì $ll\sqrt{aa+xx}$ equivale a lx nell'altra integrale. Differenziamo ora questa trovata integrale, e secondo il *Num.* 148., avremo

$dv =$

$dv = \frac{aaxdx}{aa+xx \times l\sqrt{aa+xx}}$, e perchè in seguito delle condizioni del presente problema è $BN = x = BN = l\sqrt{aa+xx}$, è manifesto, che il calcolo riduce questa differenziale alla sola $\frac{aadx}{aa+xx}$, e che la sua integrale v. produce veramente, e necessariamente una tale differenziale. Non ostante però la certa verità, quanto alla pratica, dell'operazione di questo elemento, e la vera possibilità di quadrare lo spazio iperbolico, vana però è la speranza di quadrare l'elemento $\frac{aadx}{aa+xx}$, corrispondente a $l\sqrt{aa+xx}$. Nasce questa impossibilità non già per verun difetto nelle verità quì rammentate, ma dall'essere impossibile, che si dia una logoritmica, le ordinate della quale essendo $\sqrt{aa+xx}$, abbia per necessaria condizione, che sia $l\sqrt{aa+xx} = x$. Avvertii già opportunamente al *Num.* 190. questa impossibilità. Questa Logoritmica è quella, che si è supposta nel presente Problema, e che ci ha dato il prenotato elemento, che ci rassembra quello del cerchio.

Num. 334. Se in vece di assumere, che l'ordinata della Logoritmica sia $\sqrt{aa+xx}$ la vorremo $\sqrt{aa-xx}$, ne nascerà l'elemento dello spazio iperbolico $= \frac{-aadx}{aa-xx}x$, sul supposto, che si voglia $x = l\sqrt{aa+xx}$, ed esso elemento farà credere di avere per integrale $aa + aall\sqrt{aa-xx}$, e restituirà differenziandolo la premessa differenziale, ma tutto però anche quì inutilmente, perchè ove si vorrà determinare la Logoritmica confacente per tale integrale, troverassi, che ella ha necessariamente va-

te variabile la sua sottangente, e però non potersi mai dare la logoritmica, che quì si suppone. In questi due casi è ora da riflettere, che quanto a quest' ultimo, la differenziale $\frac{-aadx}{aa-xx}$, che considerato l'elemento dello spazio iperbolico indicato dalla $BN = l\sqrt{aa-xx}$ è una differenziale inassegnabile, e però per altri riguardi una verissima, ed assegnabile differenziale, ed è quella di $a\,L\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}$, logoritmo totalmente possibile. Quanto al primo caso, colla solita analogia alle quantità logoritmiche, anche l'elemento $\frac{aadx}{aa+xx}$, quando si consideri una differenziale relativa, egli pure è realmente integrabile, che se si consideri essere nell'esposto modo l'elemento dell' iperbola, egli è una differenziale inassegnabile.

Num. 335. Le cose per tanto quì esposte ci pongono in vista la razza de' differenziali, che ho intrapreso di far palese. Ve ne sono dunque di quelli, i quali in un riguardo non è possibile di assegnarli, ma gli stessissimi, quanto alla forma, sono realmente assegnabili, ed alle volte integrabili. Parmi potersi distinguere questa razza, e in quel riguardo, nel quale non sono assegnabili, nominandole *Differenziali relativamente non assegnabili.*

Quindi parmi aver luogo una conseguenza. Il generale binomio $gx^c dx \times \overline{a+fx^n}^r$, contiene innegabilmente anche queste differenziali relativamente non assegnabili, dunque par manifesto, che sia perdere il tempo, cercando un metodo, che esso solo integri generalmente esso binomio. Se ciò sussiste, ottima cosa sarebbe il poter riconoscere per segni visibili, e certi, ed insissi nella forma medesima de' differenziali, le differenziali di questa razza, ma quanto a me non so farlo, solo sembrami sempre più grande il bisogno di badare attentamente nelle occa-

sioni

sioni di integrare alla particolare natura de' Problemi, che hanno prodotte le differenziali, sopra le quali si opera. A questa razza di differenziali sembrami, che possano in qualche modo appartenere tutti quelli, che appajono integrabili per quantità immaginarie, o per altro modo impossibili.

Num. 336. L'accidente occorso al *Num.* 333., cioè di essere stata ridotta dal calcolo l'equazione $\frac{aax\,dx}{aa+xx\,l\sqrt{aa+xx}} =$ $\frac{aa\,dx}{aa+xx} = B$ scopre uno de' soliti nascondigli del Calcolo Integrale. Finchè la differenziale stava nella forma A, si sapeva integrare, ma ora per la condizione voluta nel Problema, dovendosi necessariamente supporre $x = l\sqrt{aa+xx}$, sia stata ridotta dal calcolo alla forma B, non si sa più integrare. Chi sa, che tante, e tante differenziali, le quali ci rimangono non integrabili, tali non si rimangano perchè il calcolo le abbia sguisate, e che non fossero facilmente integrabili, se noi sapessimo rimettervi quelle quantità, che il calcolo ha fatte sparire? Non abbiamo però noi libertà di rimettere a nostro arbitrio quelle quantità, che ci giovassero, bisogna, che le condizioni del Problema esse le richieggano.

Num. 337. Ho già promosso quanto ho potuto, il metodo delle quadrature; stimo però a proposito farne quì uno sperimento, la onde i Principianti non abbiano a restarne ingannati, credendosi di aver ottenuto più di quello, che egli può dare. Così pure darò per util loro un esempio per la pratica delle integrazioni solide della seconda classe delle differenziali relative. Sia dunque (*Fig.* 24.) su di un piano il quadrante ABC, il di cui raggio $AB = a$. Sopra il medesimo piano insista rettamente altro piano BEA, che sia un triangolo rettangolo ed isocele posante con uno de' lati sul raggio AB., e scorra questo sopra del cerchio nel senso del *Num.* 89., sempre a se medesimo parallelo, ed al raggio, onde se ne formi l'ungula $ACEBA$, la di cui parte variabile la dirò V. Detta x l'ascissa tanto del triangolo, quanto del quadrante, cominciante in A, sarà l'elemento

mento $mpqn$ di quest'ungula espresso per $x\,dx\sqrt{aa-xx}$, la di cui integrale è $V = -\frac{1}{3} \times \overline{aa-xx}^{\frac{3}{2}}$, e compondola, supponendo V, ed x nello stesso tempo $= o$, proviene $V = \frac{a^3}{3} - \frac{1}{3} \times \overline{aa-xx}^{\frac{3}{2}} = B$, e tutta l'ungula $ACEB$ sarà perciò $\frac{a^3}{3}$, giacchè in questo caso x diviene $= a$.

Num. 338. Nuovamente si cerchi non più l'elemento dell'ungula intera, ma della parte $nqER$, che dirò v. La porzione costante Am del raggio si dica g, e che le x comincino in m. Anche la x del triangolo, che resta pure triangolo, cominceranno in m, e l'elemento di questa porzione di ungula sarà $x\,dx\sqrt{aa-g+x}^2$. Per integrare questo elemento, suppongo $g+x=y$., onde lo trasformo in $y-g\,dy\sqrt{aa-yy}$. L'integrale della prima parte è $-\frac{1}{3} \times \overline{aa-yy}^{\frac{3}{2}}$ (*A*) Quanto alla seconda pongo la prima integrale della seconda serie, che è $gy^{-1+\frac{1}{2}}\overline{aa-yy}^{\frac{3}{2}}$ (*B*)., e ne ho $-g\,dy\sqrt{aa-yy} - aagy^{-2+\frac{1}{2}}dy\sqrt{aa-yy}$. Pongo susseguentemente la prima integrale della terza serie, che è $-aagy^{-1+\frac{1}{2}}\sqrt{aa-yy}$ (*C*), e ne ottengo $aagy^{-2+\frac{1}{2}}dy\sqrt{aa-yy} + \frac{aa\,g\,dy}{2\sqrt{aa-yy}}$. Le tre integrali dunque $-A+B-C$ mi danno le differenziali

$y\,dy\sqrt{aa-yy} - g\,dy\sqrt{aa-yy} + \frac{aag\,dy}{2\sqrt{aa-yy}}$. Queſt' ultima differenziale pe'Numeri 270., e 283. ha la ſua integrale relativa della ſeconda claſſe, ed è quel ſettore, o cuneo cilindrico, il di cui quadrante procreatore ha a per raggio, e per ordinata $\sqrt{aa-yy}$. L'origine di queſto ſettore non è già in C [*Fig.* 16.] ma è, ove nel quadrante corriſponde la prima ordinata al finire di g. Il raggio, ed altezza di tal ſettore è $\sqrt[3]{aag}$., come ricavaſi dall' equazione $\frac{r^3}{2} = \frac{aag}{2}$. Queſto cuneo, o ſua parte variabile la nominerò M. e così pure nominerò N l'ungula $nqER$, o ſua parte variabile. Ciò avvertito l' integrale $-A + B - C - M$ darà la differenziale $y\,dy\sqrt{aa-yy} - g\,dy\sqrt{aa-yy} - aagy^{-2}dy\sqrt{aa-yy} + aagy^{-2}dy\sqrt{aa-yy} + \frac{aag\,dy}{2\sqrt{aa-yy}} - \frac{aag\,dy}{2\sqrt{aa-yy}} = y^{-2}dy \times \sqrt{aa-yy}$. Riduco ora la parte compleſſa delle tre trovate integrali aſſolute a $\sqrt{aa-yy}$, onde ricavo tal parte $= \frac{2yy - 3gy - 2aa}{6} \times \sqrt{aa-yy}$, e ſoſtituendo ora la $g+x$ in vece di y, riſulta eſſa integrale $\frac{2xx + gx - 2aa - gg}{6} \times \sqrt{aa-g+x}$, onde avremo l' equazione $N = \frac{2xx+gx-2aa-gg}{6} \times \sqrt{aa-g+x} - M$

E per-

E perchè, quando x è zero, ſono nulli e l'ungula, ed il ſettore, l'integrale compita ſarà $N = \frac{gg+2aa}{6} \times \sqrt{aa-gg} + \frac{2xx+gx-2aa-gg}{6} \times \sqrt{aa-g+x} - M$.

Num. 339. Potiamo dunque avere il valore proſſimo di qualſivoglia porzione dell' ungula $naER$ mediante la trovata equazione, e così pure della medeſima tutta intera, mentre uſando a proporzione il calcolo, come lo praticai al *Num.* 324., può averſi proſſimo al vero quanto ſi voglia il valore di M. Il valore poi vero di queſt' ungula intera, e dedotto dalla formula, e non già dal valore approſſimato di M, giacchè in queſto caſo $g+x$ diviene $= a$, ſarà $N = \frac{gg+2aa}{6} \times \sqrt{aa-gg} - M$.

Num. 340. Le premeſſe coſe ci danno dunque il valore totale dell' ungula intera $ACEB$, che è $\frac{a^3}{3}$, il valore della porzione $ACqnmp$ di queſt' ungula, che è $\frac{a^3}{3} - \frac{2}{3} \times \overline{aa-gg}^{\frac{3}{2}}$, giacchè in queſto caſo è $x=g$, e finalmente il valore ſopranotato dell'ungula $nqER$, e giacchè ſottraendo queſte due ultime porzioni dalla prima ungula totale, reſta il cuneo cilindrico $RBmpqn$, che dirò P, ſi eſprimerà il valore di queſto per $P = M - gg\sqrt{\frac{a}{2}\,\frac{a}{2} - gg}$, equazione F.

S'intenda ora prolungata la Rn in f, che incontri la Af eccitata perpendicolarmente al piano del cerchio in A, e tirin-

si le $qf \cdot pA$, onde verrà aggiunto al cuneo $RBmpqu$ il prisma $nqfAmp$, e diverrà esso cuneo per tale aggiunta un segmento cilindrico, il quale, se avesse poi l'altezza AB in vece della BR, sarebbe simile al M, giacchè l'angolo mAp al centro A in amendue questi cunei è lo stesso. Ciò avvertito, avendo il prenominato prisma un lato $Am = g$, e l'altro $mp = \sqrt{aa-gg}$, e l'altezza mn anch'essa $= g$, sarà questo prisma $= g\,g\,\frac{\sqrt{aa-gg}}{2}$, e conseguentemente il cuneo $ApBA$, che abbia l'altezza BR, sarà $P + gg\,\frac{\sqrt{aa-gg}}{2}$, e perchè questo sta all'altro, che avendo la medesima base, debbe però avere l'altezza a, come sta g ed a, avremo questo cuneo, la di cui altezza sia a, $= \frac{aP}{g} + ag\,\frac{\sqrt{aa-gg}}{2}$. Il raggio dunque di questo cuneo è a, ed il raggio di M, che gli è simile, è $\sqrt[3]{aag}$, che però essendo questi cunei in ragione triplicata de' loro raggi, risulterà M non più per via di approssimazione, ma per l'espressione del suo vero valore, formata da' simboli medesimi del Problema $= P + gg\,\frac{\sqrt{aa-gg}}{2}$. Sembra dunque potersi liberare da M l'equazione F, e però, che possa ottenersi il valore del cuneo P in quantità affatto note, e libere da M, ma vana è ancora questa speranza, imperocchè fattane la sostituzione nell'equazione F, ella risolvesi in $P = P + gg\,\frac{\sqrt{aa-gg}}{2} - gg\,\frac{\sqrt{aa-gg}}{2}$, cioè in una equazione identica.

Num. 341. L'esposizione di questo accidente, oltre all'avermi servito per dar qualche esempio in concreto a vantaggio de'

de' Principianti, mi dà il comodo di spiegar ciò, che avvertir si debbe, ridotte che sieno le differenziali alle quadrature. Che quella linea, piano, o solido, o qualunque altra cosa quanta, che esser possa, di cui abbiamo scoperto, che ella è l'integrale della proposta differenziale (ben inteso però, che essa integrale si compisca), fino a tal termine la cosa va bene, ne c'inganniamo. Ma se pretendessimo, come nel premesso caso, di poter mai avere nella propria assoluta misura essa integrale, sarebbe pretendere oltre a' limiti, e perdervi tempo, e se non avremo fallato ne' calcoli, o ne' supposti, non otterremmo giammai per equazione finale, se non, che un identica, nè può la cosa succedere in altro modo, perchè, per quanto noi sappiamo dire, che l'integrale di una data differenziale è per esempio il tal arco di un cerchio, questo niffuna cognizione ci dà dell'assoluta misura di un tal arco, ne notizia veruna per fare ne meno un passo a scoprire tal sua misura. Ho messo tutto questo unicamente a cautela de' Principianti, ben sapendo, che i Dotti non ne hanno bisogno.



Del Calcolo Integrale

Sezione III.

Articolo Unico.

Dell' integrazione de' Binomj Complessi, sì Aritmetici, che Geometrici.

Num. 342. INdagando le cose premesse, mi sono capitate avanti due forme di Binomio complesso, della integrazione delle quali non essendomi avvenuto di vederne trattato dagli Autori da me veduti, ho pensato di destinar loro questa Sezione, e spero non senza utile del Calcolo Integrale.

Sia dunque la prima forma la esposta generalmente per $gx^e dx \times \overline{b + \overline{a + fx^n}^{c}}^{r} = A$. Si avverte, che se c sia numero intero positivo, la A non può dirsi propriamente Binomio complesso, e certamente se $c = 1$ egli è un semplice Binomio, se $c = 2$ egli è un Trinomio, e così di seguito. Il caso dunque, in cui c sia intero positivo, si esclude per ora dalla presente ricerca. Nella integrazione del presente Binomio io non mi stenderò se non intorno al metodo delle trasformazioni, giacchè le cose dette circa all' altro metodo, che considera come le differenziali sieno state formate, e quello, che dirò in proposito di questo metodo intorno a i Trinomj, potranno dare ogni bastevol lume a chi tale strada volesse battere.

Num. 343. Sia dunque l' ipotesi $\overline{a + fx^n} = y$, con questa trasformeremo il Binomio A nel B. $= dy \times$

$y - a$

$\dfrac{\overline{y - a}^{\frac{e+1-n}{n}}}{f\, n^{\frac{e-1}{n}}} \times \overline{b + y^{c}}^{r}$. Se $e + \frac{1}{n} - n$ sia $= i$, sarà B risoluto in tanti Binomj semplici quante unità più una ne constiene i, onde se i sia zero, avremo un solo Binomio; se sia $= 1$, ne avremo due, e così di seguito. Il Binomio dunque complesso, che abbia $e + \frac{1}{n} - n = i$, resta soggetto alle integrazioni de' Binomj semplici, e però, quando questi sappiansi integrare, anche il complesso si saprà integrare. Quanto all' essere egli integrabile per uno de' due numeri 258., e 259., è visibile, che se la trasformata somministra più di un Binomio, le y, che sono fuori del segno, avranno sempre i loro esponenti fatti da una progressione aritmetica de' numeri naturali, cominciante dal zero, e finiente all' intero i. Ciò avvertito, siccome fra tutti questi Binomj vi sarà sempre $-a\,dy \times \overline{b + y^{c}}^{r}$ [ometto per brevità i coefficienti costanti], perchè questo possa integrarsi pel *Numero* 258., è d' uopo, che diasi $\frac{t - c}{c} = p$. [p è qualsivoglia numero intero positivo, e si scorge inutile, che sia zero, perchè allora c sarebbe $= 1$, ed il dato Binomio non sarebbe allora complesso] la sovraposta equazione somministra $c = p + \frac{1}{1}$, e però si fa manifesto, che se il dato binomio A abbia $e + 1 - n - in = 0$, ed inoltre c sia frazione positiva, il di cui numeratore sia l' unità, egli si integrerà pel *Num.* 258., e quanto agli altri Binomj, ne' quali esso A è risoluto, anch' essi, stando tali condizioni, sono integrabili per esso numero, perchè ogni uno di tali Binomj può attamente esprimersi per $y^2 dy + \overline{b + y^{p + \frac{1}{1}}}^{r}$, nel quale, essen-

essendo manifestamente $\frac{i+1-\frac{1}{p+1}}{\frac{1}{p+1}}$ un numero intero positivo, resta evidente ciò, che ho affermato.

Num. 344. Se poi il dato Binomio A debba essere integrabile pel *Num.* 259., si consideri il Binomio $y^c dy \times \overline{b+y^c}^{r}$. Dovrà dunque darsi l'equazione $-i-1-\frac{c}{c}-cr=p$. Quì possono darsi tre casi. Uno, che c sia frazione, e questa, o positiva, o negativa, e il terzo, che c sia intero negativo, essendo inutile, che sia positivo.

Primo caso. Sia c frazione positiva, comechè il Binomio fusseguente al sovrapposto sarà $y^{i-1}dy \times \overline{b+y^c}^{r}$, affinchè ancor questo sia integrabile per esso *Numero* 259., bisognerà, che si dia $-i-1-\frac{1}{c}-c-cr$, anch' esso uguale ad un intero, o zero, e perchè $-i-1-\frac{c}{c}-cr$ era intero, sarà pur necessario, che $\frac{1}{c}$, che è la quantità, che le è stata aggiunta, sia essa intera, e positiva, ma essendo c frazione positiva è impossibile, che $\frac{1}{c}$ sia intero, quando essa frazione c non abbia avuto il numeratore uguale all' unità. Dunque fin quì è palese, che c dovrà essere tale frazione, e perchè questo discorso si adatta, ed è necessario di farlo di mano in mano per tutti li altri Binomj

nomj fusseguenti, così è chiaro, che se c sia frazione positiva, e debba il proposto A potersi integrare pel *Num.* 259., è necessario, che il numeratore di c sia l'unità, quando per altro ancora r vi acconsenta, ed in tal caso A è integrabile per amendue i detti numeri.

Secondo caso. Sia c frazione negativa. Il premesso discorso mostra già, che anche presentemente bisogna, che c sia frazione, che abbia l' unità per numeratore, ma accade di più, che l' esponente r nel presente caso debba essere intero negativo. In fatti sia $c=-\frac{1}{t}$, farà dunque mestieri, che si abbia $-1-1+\frac{1}{t}-\frac{r}{t}$, diviso per $-\frac{1}{t}=p=it+t-1+r$, e però $r=p-it-t-1$, e perchè questo secondo membro non può non essere intero, e perchè sarebbe superfluo, che fosse positivo, resta solo, che sia negativo.

Terzo caso. Il discorso de' due casi antecedenti fa già conoscere, che se c sia intero negativo, fa ancor di mestieri, se A debba essere integrabile, che esso c sia unicamente l' unità. In fatti dovendo essere $\frac{-i-1+c+cr}{c}=p=\frac{i+1}{c}-1-r$, ed altresì per integrare il suo fusseguente $\frac{-i+1-1+c+cc}{-c}$ anche esso intero $=\frac{i-1+1}{c}-1-r$, non possono, come è visibile, amendue queste espressioni essere di numero intero, se c non sia l'unità. Ma non basta, che il solo c sia l' unità negativa, all' ora pure sarà necessariamente r un intero negativo, imperocchè adoperando ora -1 in vece di c, l' equazione $\frac{-i-c+1+r}{-1}=p$, che somministra $r=i-p$; fa conoscere, che r non può essere se non intero, e negativo, giacchè essere positivo sarebbe superfluo.

Num. 345. Resta ora a dirsi alcuna cosa de' multinomj, che appajono in questa forma di binomio compleſſo, cioè quando in questi c è intero positivo. Questi dunque sono generalmente integrabili pel *Num.* 259, se abbiano $\frac{e+c-n}{n} = o$, ed in oltre, $\frac{-1-c}{c} \times p + c$, in cui p è intero positivo, ed anche zero, in fatti restando all'ora esso binomio compleſſo trasformato in $dy \times \overline{b+y^{e}}^{r}$, egli sarà integrabile se, abbia la detta condizione.

Num. 346. Se poi sia $\frac{e+1-n}{n} = i$ all'ora occorrono le seguenti riflessioni. Quando c è $= 2$, que' binomj, ne' quali A sarà risoluto, e che avranno per esponente della fuori del segno il numero dispari, saranno sempre integrabili pel *Num.* 258. Il detto numero dispari si dica generalmente f: Avendosi all'ora $\frac{f+1-2}{2}$, che è manifestamente numero intero positivo, o zero, resta chiaro quanto si era proposto. Se pertanto gli altri binomj, a' quali toccano gli esponenti pari, sieno integrabili pel *Num.* 259., il dato A sarà totalmente integrabile. Questo dunque sì otterrà sempre, quando quel binomio, al quale tocca il massimo numero pari, esso sia integrabile. In fatti sia i questo massimo numero pari. Se sia $\frac{-i}{2} - \frac{1}{2} - 1 - r$, o intero positivo, o zero, comechè il susseguente numero pari è minore di i per due unità, sarà la combinazione susseguente $\frac{-i}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} - 1 - r$, che sarà anch'essa numero intero posi-

positivo, e così accaderà di mano in mano di tutti gli altri binomj, laonde resta chiaro, che se avendosi $c = 2$ sia $e+1-n-in = o$, ed in oltre $-i-1-2-2r-2p = o$, supposto i il massimo numero pari nella serie degli esponenti de' binomj, il dato A, che è vero trinomio, sarà totalmente integrabile.

Num. 347. Prima di partir da' trinomj è da notarsi, che tutti i trinomj, come esporrò, possono ridursi alla forma de' binomj compleſſi col seguente modo. Sia dunque la parte sotto al segno di un trinomio la $b + ax^{n} + fx^{2n}$. Pigliſi $\overline{\frac{a}{2\sqrt{f}} + \sqrt{f}x^{n}}^{2}$, e questa, fatta l'attuale moltiplicazione, sarà $\frac{aa}{4f} + afx^{n} + fx^{2n}$. E' visibile, che la quantità $b - \frac{aa}{4f} + \overline{\frac{a}{2\sqrt{}} + x^{n}\sqrt{\zeta}}^{2}$, è la medesima quantità $b + ax^{n} + fx^{2n}$; e però viene ridotta nella forma di binomio compleſſo in cui $c = 2$. Se per altro f sia negativo, questo modo non serve, essendovi $\sqrt{-f}$. Se accadesse, che b fosse $= \frac{aa}{4f}$ allora è per se manifesto, che il dato trinomio sarebbe un vero binomio.

Ciò premesso dimostrerò, che tutti i trinomj, i quali abbiamo $e+c-n-in = o$, essendo i maggiore dell'unità, sono sempre integrabili, quando per altro diasi una tale equazione, nella quale entrano e l'esponente r del trinomio, e le costanti del medesimo, secondo che in appresso anderò indagando, e ciò per più facilità mediante un esempio. Sia dunque qualunque trinomio ridotto nella forma qual sarebbe $x^{e}dx \times \overline{b + ax^{n} + fx^{2n}}^{r} = A$. Questo trinomio ha $\frac{e+1-n}{n} = o$,

$= 2$, e però la prima delle due richieſte condizioni. Si cambierà egli in $dy \times y^2 \frac{-2ay + aa}{f^2} \times \overline{b+y^2}^{-\frac{1}{2}} = B$; La $\frac{-2aydy}{f^2} \times \overline{b+y^2}^{-\frac{1}{2}} = G$ è integrabile pel *Num.* 258., e la ſua integrale è $\frac{-a \times \overline{b+y^2}^{r+\frac{1}{2}}}{r+1 \times f^2} = C$. Le altre due differenziali non ſono integrabili pel *Num.* 258., e ſe una lo foſſe pel *Num.* 259., l'altra potrebbe non eſſerlo. In caſo dunque, che non ſieno integrabili, e ciò dipende da r, è ſempre però poſſibile, che una di loro, per eſempio la $y^2 dy \times \overline{b+y^2}^{-\frac{1}{2}}$, collo ſpoſtarla ſi riduca ad eſſere diverſa dall'altra nel ſolo coefficiente. Suppongaſi dunque l'integrale $y \times \overline{b+y^2}^{r+\frac{1}{2}} = D$, la di cui differenziale ſarà $b\,dy \times \overline{b+y^2}^{-\frac{1}{2}} = E + y^2 dy \times \overline{b+y^2}^{-\frac{1}{2}} = F$. L'integrale dunque $C + D$ ha per differenziale $\overline{b+y^2}^{r} \times \frac{y^2 dy - 2aydy}{f^2} + \frac{b\,dy}{2r+3 \times f^2}$ $(F - G + E)$, nella quale differenziale ſi ſcorge, che ſe il coefficiente della E, cioè $\frac{b}{2r+3 \times f^2}$ foſſe $\frac{aa}{f^2}$, ella ſarebbe interamente la differenziale B, di cui in tal caſo la $C + D$. ſarebbe l'integrale. Non reſta dunque altro ſe non, che diaſi $r = \frac{b-3aa}{2aa}$, e ciò eſſendo l'integrale del propoſto trinomio ſarà $-\frac{a^3 \times \overline{b+a+fx}^{\frac{b-3aa}{2aa}}}{f^3 \times b-aa}$ $+ b \times \frac{\overline{a+fx}^2 \times \overline{b \pm a \pm fx}^{\frac{b-3aa}{2aa}}}{f^3 a^2}$.

Dopo queſta eſpoſizione è facile a dimoſtrarſi quanto ſi era propoſto, imperocchè tutti i binomj ſemplici, ne' quali il dato trinomio è riſoluto, hanno tutti di mano in mano gli eſponenti della loro variabile fuori del ſegno, che formano la ſerie de' numeri naturali comincianti dal zero. Tutti quelli, che hanno i numeri diſpari per eſponenti della loro predetta variabile, ſono manifeſtamente integrabili pel *Num.* 258. Tutti gli altri, che hanno i numeri pari, poſſono manifeſtamente ſpoſtarſi per quanto occorre, fino a ridurſi tutti in una ſola differenziale, che abbia l'eſponente di quella, che non ſi è voluta ſpoſtare, e dal coefficiente della quale, comparato col coefficiente di quella, che ſpoſtandoſi ſi è ridotta, dee trarſene l'equazione cercata, la quale dandoſi, il dato trinomio è integrabile. E perchè può avvenire, che le coſtanti del trinomio ſieno arbitrarie, può queſta ſcoperta eſſere aſsai più ampia di quello, che a prima viſta ne ſembri. Quando per altro r ſia $= -1$ queſto metodo non può ſervire.

Num. 348. Oltre all'integrazione del binomio compleſso A riſoluto in binomj ſemplici, e fin quì deſcritta, poſſono, e debbo-

debbono avervi luogo, tutte le altre, che formano la lista posta al *Num.* 286. Io non mi dilungherò a farne l'applicazione, e così pure non mi dilungherò a far uso de' binomj complessi relativi, che scopersi al *Num.* 243., e seguenti. Se volessi pormi a sviluppare tutta la teoria di questi binomj complessi, troppo tempo mi vorrebbe, onde mi contenterò di averne aperto il campo, e la maniera di svilupparle, e lascerò, che qualche Giovine Studioso si faccia onore. Mi stenderò dunque succintamente a dare altri lumi occorrevoli per essa Teoria.

Num. 349. E' come superfluo, che io avvertisca occorrere di formare le trasformate del binomio *A* particolari a' segni, che le di lui quantità accompagnano. Se in vece di prendere l'ipotesi $a + fx^n = y$, pigliasi l'altra $\overline{a + fx^n}^{\,c} = y$ si ottiene la trasformata $dy \times y^{\frac{1-c}{c}} \times \overline{y^{\frac{1}{c}} - a}^{\,\frac{c+1-n}{n}} \times \overline{b+y}^{\,c}$.

Questa trasformata, per rapporto al potersi avere integrazione co' due *Numeri* 258., e 259., non dà verun vantaggio sopra dell' altra. Forse che potrebbe giovar qualche cosa relativamente agli altri numeri. Se porremo poi $\overline{b + \overline{a + fx^n}^{\,c}}^{\,c} = y$, avremo

$$dy \times y^{\frac{1}{r}} \times \frac{\overline{y^{\frac{1}{r}} - b}^{\,\frac{1-c}{c}} \times \overline{\overline{y^{\frac{1}{r}} - b}^{\,\frac{1}{c}} - a}^{\,\frac{c+1-n}{n}}}{nrc \times f^{\frac{c+1}{n}}}$$

e se suppouemo $b + \overline{a + fx^n}^{\,c} = y$, sarà $dy \times y^{c} \times \overline{y-c}$

$$\frac{\overline{y-c}^{\,\frac{1-c}{c}} \times \overline{\overline{y-b}^{\,\frac{1}{c}} - a}^{\,\frac{c+1-n}{n}}}{cnf^{\frac{c+1}{n}}}$$

. Nè pure queste due trasformate ci danno verun vantaggio, relativamente a' due numeri prementovati, solo in un caso possono esserci utili; ed è, se c sia $= \frac{1}{2}$. All'ora la seconda trasformata sarà $2y^{r}dy \times$

$$\frac{\overline{y-b} \times \overline{\overline{y-b}^{\,2} - a}^{\,\frac{c+1-n}{n}}}{nf^{\frac{c+1}{n}}}$$

. La $\frac{c+1-n}{n}$ si dica t, e faciasi l'attuale moltiplicazione di $\overline{y-b}^{\,2}$, che se bb sia $= a$, la trasformata diverrà $2y^{\overline{r+t+1} - 2by^{r+t}} \times dy \times \overline{y-2b}^{\,2}$:

$$nf^{\frac{c+1}{n}}$$

Se sia dunque $r + t = i$ potremo integrare questa trasformata pel *Num.* 258., e se sia $-r-2t-2 = i$, la integreremo pel *Numero* 259. La prima trasformata poi si muta anch' essa in

$$2y^{\frac{2}{r}+t} - 2by^{\frac{1}{r}+t} \times dy \times \overline{y-2b}^{\,2}$$

, la quale può pure essere integrabile, ma adoperandovi amendue gli precitati numeri. In fat-

In fatti ſuppongaſi $\frac{1}{r}+t+1-1=0$, e queſta parte ſarà integrabile pel *Num.* 258. Suppongaſi in appreſſo $-\frac{2}{r}-t-1-1-t=i$, e queſt' altra parte ſarà integrabile pel *Num.* 259. Ripugna il ſupporre $i=0$, il che moſtrerò così. Si rimetta $e\frac{+1-n}{n}$ in vece di e. La prima equazione ſomminiſtra $n=-er-r+nr$. Se nella ſeconda equazione ſupporremo $i=0$, ella ſomminiſtra $n=-er-r$, che colla premeſſa è incomparabile, ſe nr non ſia $=0$, il che diſtruggerebbe il binomio. Ma ſuppoſto i numero intero poſitivo, all'ora ella ſomminiſtra $\frac{-2er-2r}{2+ir}=n$, che è compoſſibile coll'altra, e le quali comparate inſieme danno $2n+inr-ie-ir=0$, ovvero $n=\frac{i\times e+r}{2+ir}$, laonde ſe ſia $e=\frac{\varepsilon}{2}$, $bb=a$, e ſieno le due equazioni $n=-e-r-nr$, ed $n=\frac{i\times e+r}{2+ir}$, il dato binomio compleſſo A è integrabile.

Num. 350. Paſſando ora alla ſeconda forma del binomio compleſſo, ella è per eſempio $gx^e dx\times\overline{a+fx^n}^{e}\times\overline{b+x^c}^{r}=A$ Per diſporre queſto binomio a qualche integrazione [è inteſo, che t, ed r ſieno n. o rotti, o negativi], ſuppongaſi $a+x^n=y$, e ſi trasformerà in $gy^t dy\times\overline{y-a}^{\frac{e+1-n}{n}}\times\overline{b+\cdots}^{\cdots}$

$b+y-a\,\overline{\ }^{\frac{c}{n}}$. Se per tanto ſia $e\frac{+1-n}{r}=i$, lo avremo ridotto alla prima forma di Binomio compleſſo, e reſterà allora a vederſi coſa poſſa ricavarſene. E' viſibile poterſi fare l'ipoteſi $b+x^c=y$, ed otterremo l' altra trasformata

$$g\,d\,y\times y\times y-b\,\overline{\ }^{\frac{e+1-c}{c}}\times a+y-b\,\overline{\ }^{\frac{-n}{c}}$$

Potremo ancora ſupporre $a+x^n=yx^n$, ed otterremo la trasformata

$$g\times\frac{a^{\frac{e+1}{n}}}{n}\times y^t dy\times y-1\,\overline{\ }^{\frac{-e-1\,n-t\,n}{n}}\times b+\frac{}{y-1\,\overline{\ }^{\frac{c}{n}}},$$

e finalmente può ſupporſi $b+x^c=yx^c$, ed ottenerſene la ſua trasformata.

Num. 351 Quando t, ed r ſieno uguali, o eſſendo amendue poſitivi, o amendue negativi, uno per eſempio t ſuperi l' altro r di un numero intero, all'ora il dato binomio nel primo caſo è veramente un multinomio, e nel ſecondo è tanti multinomj quante unità contiene $i+1$, giacchè all' ora le due parti compleſſe debbono multiplicarſi aſſieme, e darſi loro lo ſteſſo eſponente r, e laſciar fuori del ſegno il reſiduo i. In queſti caſi l' integrazione che ſi ricerca dovrebbe trarſi dalle formule, e teorie proprie di tali multinomj: Rieſce però alle volte di integrarne alcuni mediante le trasformazioni, ſopra di che non mi fermerò. Bensì ſpiegherò quì un modo di avere una proſſima integrazione di molti binomj, il qual modo mi ſi è offerto eſaminando la integrazione di queſto binomio compleſſo. Mi farò ſtrada a ſpiegar queſto modo, ſciogliendo un Problema, che da dottiſſimi Maeſtri di Idrometria è ſtato deſiderato, e colla ſteſſa occaſione ſtabilirò pure, che le altre parti della Ma-

tematica, anch' esse possono contribuire a darci alcune maniere di integrazioni.

Num. 352. Nella sponda piana di un vaso posta verticalmente sia forato un lume ABC [*Fig.* 25.] in lamina quanto si possa sottile, e di qual si voglia forma, purchè la natura della curva, che lo contorna possa esprimersi mediante un equazione algebratica, e l'asse DB dalla quale curva sia per ora posto perpendicolare all'orizzonte AC, e comincino pure per ora le ascisse x di questa curva dalla parte superiore. Sia il vaso tenuto costantemente pieno del medesimo fluido alla segnata altezza, o livello EF; Trovare l'equazione differenziale della quantità assoluta del fluido, che un tal lume sotto la segnata costante altezza tramanda.

Supposto vero ciò, che la Idrometria stabilisce, cioè che in ogni filo perpendicolare II. del lume, ed in ogni punto di un tal filo esca il fluido con velocità esposta per le ordinate DC (*Fig.* 26.) di una medesima parabola ECR, la quale abbia l'origine E nello stesso livello EF del fluido trattenuto alla costante altezza nel vaso, è visibile, che se noi sopra al piano, o sponda nella quale è forato il lume intenderemo scorrere normalmente, e sempre a se medesima parallela essa parabola, e posante nella direzione perpendicolare, onde dal contorno ECR della medesima, che sta in faccia al lume si venisse a formare come un limite, o superficie parabolica nell'andamento della medesima perpendicolare, ogni zampillo di fluido, che da ogni punto del lume cominciasse ad uscire nel medesimo istante, troverebbesi pure in altro medesimo istante giunto al medesimo limite, o superficie parabolica, e però il solido che avesse per base il dato lume, e per generatrice la opportuna parabola, formato a tenore del *Num.* 89., sarebbe la quantità assoluta di fluido, che esso lume tramanderebbe nel tempo, in cui ciascheduno de' detti zampilli consuma dall'uscire dal lume, al giugnere al suo limite parabolico. L'elemento per tanto di questo solido è (*Fig.* 25.) l'ordinata NL del lume multiplicata per l'ordinata BR (*Fig.* 26.) dall' opportuna parabola, e per dx, e questa quantità, supposto che tutto l'intero solido sia nominato v, forma comparata a dv l'equazione differenziale, che ci proponemmo di ritrovare.

Num.

Num. 353. Sia per tanto il lume $ABCA$ [*Fig.* 25.] un mezzo cerchio ABC, che sia col suo diametro AC posto orizzontalmente, e faccia il lembo superiore del lume. Stia ora il fluido nel vaso a livello precisamente di esso diametro. L'equazione differenziale per questo caso (detto per ora p il parametro della parabola) sarà $\sqrt{px}\,dx \times \sqrt{aa-xx} = dv$. Non sò per dir vero integrare quest' equazione, ciò non ostante vi è modo di approssimarvisi tanto, che almeno per le cose fisico-matematiche sia a sufficienza, e questo modo di approssimazione è forse preferibile a quello di ridurre le differenziali alle serie infinite, le quali per lo più sommare non si possono.

In vece dunque che il fluvido si mantenga al livello del detto diametro, ponghiamo che egli giunga all'altezza qualunque EF, onde dirò $DE = q$. Allora l'ordinata della parabola sarà $\sqrt{p}\sqrt{q+x}$, e ne risulterà l'equazione differenziale $dv = \sqrt{p}\sqrt{q+x} \times dx \times \sqrt{aa-xx}$. Osservo per tanto, che $aa-xx$ è $a+x \times a-x$, onde avremo $dv = dx\sqrt{p} \times \sqrt{q+x} \times \sqrt{a+x} \times \sqrt{a-x}$, e che se q sia $= a$, sarà $dv = dx\sqrt{p} \times a+x\sqrt{a-x}$, la qual equazione (*Num.* 258.) ha per integrale $\frac{v}{\sqrt{p}} = a-x^{\frac{3}{2}} \times -\frac{2a}{3} - \frac{1x}{5} - \frac{4a}{15}$, che resa completa colla supposizione di v, ed $x = o$, diviene finalmente $\frac{v}{\sqrt{p}} = \frac{14a^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{14a-2x}{15\ \ 5} \times a-x^{\frac{3}{2}}$. Quest' integrale però nel presente caso non è che la metà del giusto, mentre la differenziale, che si è adoperata non è, che del quadrante, per esempio DBC, giacchè la $\sqrt{aa-xx}$ non è, che la ordinata di esso quadrante di cui il posto lume si è il doppio. La quantità dunque assoluta del fluido, che nel sopra notato tempo esce da un

un lume, che ſia un mezzo cerchio tagliato nella poſta maniera, e ſopra il diametro del quale ſtia alto il fluido altrettanto quanto è il raggio del cerchio, ſarà il doppio della ſopra trovata, ed in quella eſpoſizione altro non reſta d' incognito fuorchè il parametro p., ben inteſo, che ſi voglia la quantità aſſoluta di fluido, che la natura effettivamente tramanda da quel lume poſto in tali condizioni: Che ſe ſi trataſſe della miſura di un ſolido formato alla ſteſſa maniera, e ſecondo il *Num.* 89., all' ora il parametro p ſarebbe per ſe medeſimo noto. Per determinar dunque, reſpettivamente al fluido, eſſo parametro, onde levare dal Problema, che mi ſono propoſto al *Num.* 352. queſt' intoppo, occorre rivolgerſi alla Idrometria. Se qui voleſſi farlo, mi dilungherei di troppo dallo ſcopo principale di queſte memorie. Ho dunque creduto meglio di quì ſoſpenderne la ricerca, e piuttoſto differirle al fine di eſſe, unendovi, ſe avrò vita, e tempo di compilarla, una ſuccinta Diſertazione, nella quale indagando quale, e quanta ſia la forza, che muove i fluidi ſi nel uſcire da' lumi, che correnti ne' Fiumi, o Canali, tenterò di dar lume per determinare eſſo parametro, e colla ſteſſa occaſione altresì la miſura aſſoluta de' fluidi moſſi da tale forza nell' uno, e nell' altro caſo.

Num. 354. La or trovata integrale può dunque aprirci ſtrada ad aver l' integrale proſſima della differenziale $dx \sqrt{p^x} \sqrt{aa-xx}$. E notiſſimo nell' Idrometria, e le coſe quì dette baſtano a ſtabilirne la verità, che le erogazioni dello ſteſſo fluido, che per lo medeſimo lume sì fanno ſotto diverſe altezze, ſono fra loro come le radici quadrate di tali altezze, preſe però dal livello, o orizzonte EF a cui s' alza il fluido, a quel punto in cui corriſponde la media velocità colla quale il fluido eſce dal lume. Queſt' altezza la nominerò altezza ragguagliata. Comechè, reſpettivamente alle coſe fiſiche la ſituazione di queſto punto, o vogliamo dire queſt' altezza ragguagliata può averſi aſſai proſſima al vero, ſe noi diremo per modo di eſempio, che ſtando il fluido nel preſente caſo al Livello EF, ſtando nel qual Livello è nota la ſua erogazione, l' altezza ſua ragguagliata ſia m, e che l' altezza altresì ragguagliata quando il fluido ſtia a qualun-

qualunque altro Livello GH. AC ſia n, e tanto m, quanto n ſieno noti, ſarà $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \times \frac{28\sqrt{pa}^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{28\sqrt{pa}}{15} - \frac{4x\sqrt{p}}{5} \times \overline{a-x}^{\frac{3}{2}}$ l' integrale totalmente nota, e proſſimamente vera; ſe la ragione $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$ ſia proſſimamente vera, e veriſſima ſe tal ragione ſia veriſſima, di quell' erogazione, che ſi fa ſotto al Livello GH, o AC, e conſeguentemente l' integrale della $dx \sqrt{p} \sqrt{q+x} \sqrt{aa-xx}$, o $dx \sqrt{p^x} \sqrt{aa-xx}$, differenziali, che non ſapevamo integrare.

Num. 355. Di queſta altezza ragguagliata non è difficile trovar l' equazione differenziale, propria di qualſivoglia lume, ed altezza, il che eſeguirò nel ſeguente.

Problema.

Data la Figura algebratica di un lume nelle poſte condizioni, trovar l' equazione differenziale dell' altezza ragguagliata dal fluido, che mantenuto coſtantemente allo ſteſſo Livello, ſi erroga da eſſo lume nel già determinato tempo.

Lemma.

Data la parabola ECR (*Fig.* 26.) la porzione ED dell' aſſe della quale ſia coſtante, e la nominerò q, ed in D abbia origi-

origine la variabile $DB = x$, esporre la NO lato del rettangolo, che multiplicato per $BD = x$ sia uguale all' area $DCRB$.

Tutta l'area $ECRB$ è $\frac{2\sqrt{p}}{3} \times \overline{q+x}^{\frac{3}{2}}$, e similmente l'area ECD è $\frac{2\sqrt{p}}{3} \times q^{\frac{3}{2}}$, onde l'area $DCRB$ rimane $\frac{2\sqrt{p}}{3} \times \overline{qx}^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}$, che però, dividendo per x, avremo il lato richiesto NO espresso generalmente, e la dirò espressione K, per $\frac{2\sqrt{p}}{3} \times \frac{\overline{q+x}^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}}{x}$. Se q fosse zero, onde il fluido non superasse col suo livello l'altezza del lume, l'espressione K sarebbe $\frac{2\sqrt{px}}{3}$. Venendo ora al proposto Problema s'intenda condotta per ogni punto variabile I del diametro, o raggio DC [*Fig.* 25.] una perpendicolare IL, e che per cadauna di tali perpendicolari stia un piano perpendicolare al lume. Sopra ogn'uno di questi piani s'intenda descritta la parabola generatrice, onde venga a rappresentarsi l'area parabolica $ECRB$ [*Fig.* 26.] In ogni una di queste aree il lato variabile NO sarà esposto dall'espressione generale K. Ponghiamo dunque, che dal punto D, che è l'origine della curva, che fa il contorno del lume, comincino le ascisse z di un' altra curva, il di cui asse sia la DC, e che le coordinate sue corrispondenti sieno le K, onde alla DI corrisponda l'ordinata K presa nell'area parabolica, che passa per l'ordinata IL. Queste coordinate K si nominino ora t, onde avremo $t = \frac{2\sqrt{p} \times \overline{q+x}^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}}{3x}$, equazione B. Abbiamo poi sempre dall' equazione della curva, che fa il contorno del lume la z esposta per la medesima x, e nel presente caso, in cui BLC è un quadrante, abbiamo $z = NL = \sqrt{ay - xx}$, onde $x = \sqrt{aa - zz}$, che sostituita nell'equazione B, ci somministra con tutta facilità l' equazione della curva $t = 2\sqrt{p} \times \frac{\overline{q+\sqrt{aa-zz}}^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{aa-zz}} = C$. La qual curva è il luogo di tutte le medie velocità di quel filo perpendicolare di fluido, che esce dal lume, o sezione. Se per tanto multiplicheremo il secondo membro per dz l'espressione differenziale $dz\, 2\sqrt{p} \times \frac{\overline{q+\sqrt{aa-zz}}^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{aa-zz}}$ sarà nel presente caso l' elemento della somma di tutte le medie velocità della sezione, e la sua integrale, che dirò $\int dv$ divisa per DC, metà del lembo del lume, e nel presente caso per a, ci darà la velocità media fra tutte le medie velocità della sezione medesima. Questa velocità media dunque sarà $\frac{\int dv}{c}$, e giacchè ella viene ad essere una delle ordinate della parabola generatrice, e l'ascissa ad essa generalmente corrispondente è il quadrato di essa integrale diviso per p, sarà tale ascissa $\frac{quad:\int dv}{\overline{DC}^{1} \times p}$, la di cui differenziale è l' equazione differenziale, che ci proponemmo di ritrovare, ed essa veramente integrata, quando ciò ottener si possa, e compita, se ve ne sia bisogno, ci darà le integrazioni delle quali ho parlato.

Num. 356. E' vero che la trovata equazione differenziale può non saperſi integrare, e nel presente caso del quadrante, nel

nel quale risulta $\frac{4}{9aa} \times$ *quadr:* $\frac{\int dz \times q + \sqrt{aa-zz}^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{aa-zz}}$

io certamente non so integrarla, ciò non ostante, potrà qualcheduno di me più destro riuscirvi, e all'ora si avrebbe la vera integrale sì dell'equazione $dx \sqrt{p} \times \sqrt{q+x} \times \sqrt{aa-xx}$, che della $dx \sqrt{px} \sqrt{aa-xx}$.

Per aver dunque prossimamente l'integrale di quest'ultima, supponendo, che il lume sia un intero quadrante, considero, che l'altezza DB è $= a$, alla quale altezza, secondo il premesso Lemma compete la velocità media del suo filo $= \frac{2\sqrt{ap}}{3}$.

Suppongo pure diviso per mezzo il raggio DC in I, onde IL sarà $\frac{a}{\sqrt{2}}$, e la velocità media del suo filo sarà $\frac{2\sqrt{ap}}{3\sqrt{\sqrt{2}}}$. Unisco affieme queste due velocità, e se ne fa $\frac{1+\sqrt{\sqrt{2}} \times}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\frac{2\sqrt{ap}}{3}$. Questa quantità la divido per 2, giacchè ho prese due sole altezze, e ne viene $\frac{1+\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{ap}}{3}$, e questa è una velocità media fra le due dell'asse DB, e della perpendicolare IL. Se volessi più minuta approssimazione, troverei nello stesso modo le velocità medie di altre perpendicolari, e dividerei la loro somma pel numero di quante ne avessi sommate. Ritornando ora alla già trovata, e che viene a figurarmi equivalentemente la $\int dv$, piglio il di lei quadrato, e lo divido pel quadrato di $\sqrt{p}$; onde ne viene. $\frac{a}{9} \times 1 + \frac{2\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ e questa è prossimamente. L'altezza ragguagliata del fluido, che è mantenuto al livello AC. Quanto a quella del fluido mantenuto al livello EF., essendo l'altezza $DE = a$, troveremo allo stesso modo, che la velocità media del filo EB è $2\sqrt{\frac{ap}{3}} \times 2\sqrt{2-1}$, e del filo IL. $2\sqrt{\frac{ap}{3}} \times$ $\frac{\sqrt{2}+1^{\frac{3}{2}}-\sqrt{2} \times 2\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$, e unendo assieme, e dividendo per 2, e quadrando, e dividendo per p, ne ho l'altezza ragguagliata competente al livello $EF = \frac{a}{9} \times$ $\frac{8\sqrt{2}+3+2 \times \sqrt{2}+1^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$.

Sostituendo ora la radice di questa in luogo della $\sqrt{m}$ della formula del *Num.* 354., e la radice dell'altra altezza ragguagliata in vece di $\sqrt{n}$, troveremo, che l'integrale prossima di $dx \sqrt{px} \sqrt{aa-xx}$, risulta

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1+2\sqrt{\sqrt{2}}}+\sqrt{2}}{8\sqrt{2}+3+2 \times \sqrt{2}+1^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}}}} \times \frac{14a^{\frac{5}{2}}\sqrt{p}}{15} - \frac{14a\sqrt{p}}{15} - \frac{2x\sqrt{p}}{5} \times \overline{a-x}^{\frac{3}{2}},$$

inteso però, che x sia $= a$, e nel qual caso svanisce tutta la porzione multiplicata per $a - x$, giacchè questa diviene all'ora $= 0$.

Num. 357. Imperocchè essendosi adoperate le altezze ragguagliate DB. EB, ed IL. ML, e mediante di esse fissata la ragione $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$ a tutto il quadrante, laonde quando si voglia generalmente l'integrale di $dx\sqrt{px}\sqrt{aa-xx}$ bisogna determinare quale è la lunghezza della x, per rapporto alla quale si vuol l'integrale, e trovare le altezze ragguagliate, che le competono.

Num. 358. Ecco per tanto un altra razza di differenziali, che non so che sia per anche stata conosciuta, l'integrazione della quale è molto diversa dalle altre, che io sono andato notando. E' certo, che supposta esatta la ragione $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, la integrale che troverassi delle due forme differenziali esposte nel *Num.* 356. saranno sempre le loro vere, e precise integrali, laonde se per altro metodo diverso dal quì spiegato, riuscisse di avere le loro integrali, queste saranno le medesime, che ho indicate. Ma queste differenziali non possono già integrarsi stando immutabile il loro coefficiente, mentre, secondo che la variabile va variando, è visibile essere necessario, che il coefficiente si muti, laonde in senso di verità i coefficienti delle integrali di questa razza di differenziali, benchè tal cosa dalle differenziali medesime non apparisca, sono però variabili. Ha dunque questa razza due accidenti assai particolari. L'uno, che integrandole bisogna dar loro un coefficiente, che al variare della variabile è sempre mutabile. L'altro accidente, che è una necessaria conseguenza del primo, si è, non potersi aver l'integrale della proposta, se non fissando volta per volta la variabile alla quale vuol trovarsi la corrispondente integrale. Questa razza di differenziali, io per distinguerla, la nominerò *delle differenziali, che per essere integrate esigono i coefficienti mutabili*. Sono queste ora Binomj semplici, ora complessi, e serve alle volte il Binomio semplice ad integrare il complesso, alle volte per lo contrario è il complesso, che somministra il modo di integrare il semplice. Così è succeduto nel premesso esempio. Prima però di proseguire su questo proposito è necessario avvertire pe' Principianti.

Num. 359. Che in tre situazioni più principali, fra loro diverse può essere collocato il lume, e queste diverse posizioni variano il modo di ritrovare le altezze ragguagliate. Se il lembo del lume, sia una retta, e stia orizzontale, e posto dalla parte superiore, come fin' ora si è considerato nella *Fig.* 25., all' ora l' altezza costante ED, è sempre q., e la variabile ML è $q+x$, e la formula sta quale si ritrovò al *Num.* 355. Se poi esso lembo sia pure una retta, e posta orizzontalmente sia dalla parte inferiore (*Fig.* 27.) allora EB si dica q, e la porzione BD dell' asse, o altezza del lume dicasi b. L'altezza variabile ML sarà visibilmente $q+x$, e l'altezza del lume IL sarà $b-x$, onde la formula del *Numero* 355. diverrà per questo caso la $\frac{2\sqrt{p}}{3}\times\overline{q+b-x}^{\frac{3}{2}}-1\times\overline{b-x}^{\frac{3}{12}}$, giacchè tutta l' altezza ML è $=q+x+b-x=q+b$, e l'altezza IL è $=b-x$. Se finalmente fosse il contorno del lume una curva, che rientri in se stessa, come il cerchio, l' ellissi, o simili (*Fig.* 28.), all' ora inteso condotto orizzontalmente il diametro AC, che divida tutto il convesso superiore ABC dal convesso inferiore ATC, se il lume sia tutto interamente aperto, o passi parte di sopra, e parte di sotto da AC, allora dicasi $EB=q$. Per ottenere l' altezza ML, ricavisi dall'equazione della curva la BN, che dia ro t, corrispondente all' ordinata $RS=NL$. Sarà $ML=q+t$. Sarà pure $MS=q+t+x$, onde la formula per questo caso sarà $\frac{2\sqrt{p}}{3}\times\overline{\frac{q+t+x}{x}}^{\frac{3}{2}}-\overline{q+t}^{\frac{3}{2}}$. Quando i lembi non sono posti orizzontalmente, e così pure quando i lumi saranno segmenti di curve, sarà d' uopo trovare le opportune altezze, e le cose qui dette daranno sufficiente apertura a ritrovarle ancora in casi tali. Che se il vertice, o origine della curva sia dalla parte inferiore (*Fig.* 29.) allora dovrà dirsi tut-

ta la $EB = q$, e giacchè la BN è $= x$, avremo $ML = q - x$, e la formula sarà in tal caso

$$\frac{2\sqrt{p}}{3} \times q^{\frac{3}{2}} - 1 \times \frac{q - x}{x}^{\frac{3}{2}} .$$

Num. 360. Ripigliando ora il proposito, che lasciai al *Num.* 358. darò un esempio, nel quale il Binomio semplice è quello, che serve a trovar l' integrale del Binomio complesso. Sia dunque il lume l' intero cerchio, e sopra di esso scorra la parabola. Avremo l' elemento del fluido, che verrà erogato esposto per $dx\sqrt{px}\sqrt{2a-xx} = x\,dx\sqrt{p}\sqrt{2a-x}$; la di cui integrale è $\frac{-2\sqrt{p}}{5} \times \overline{2a-x}^{\frac{5}{2}} + 4a\sqrt{p} \times \frac{\overline{2a-x}^{\frac{3}{2}}}{3}$, che resa completa diviene $\frac{-4a\sqrt{p} \times \overline{2a-x}^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{p} \times \frac{\overline{2a-x}^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\sqrt{\frac{128a^5p}{15}}$. Con questa integrale potremo avere l' integrale prossima del Binomio complesso $\sqrt{px}\sqrt{q \mp x} \times dx \times \sqrt{2ax - xx}$.

Num. 361. Fin ora ho considerate queste differenziali come gli elementi del fluido, che esca dal lume di un vaso, e con tale considerazione ho spiegato il modo di integrare, almeno prossimamente varie differenziali. Forse questo metodo potrebbe stendersi maggiormente. In fatti, se la curva generatrice, in vece di essere una parabola, forse qualunque altra curva algebratica, si avrebbe certamente l' elemento del solido competente a tale generazione, la onde se ci riuscisse, come ne è riuscito, allorchè il solido è la quantità del fluido, che esce dal lume, di averne la ragione de' solidi generati sulla medesima base esposta per le varie altezze, per le quali l'apice della generatrice sta sopra

sopra alla sommità della base, avremmo visibilmente quelle notizie medesime, che proporzionalmente abbiamo avute nelle premesse scoperte. Io non ho tempo di rischiarar questo dubbio, onde lascerò, che altri vegga se possa trarsene vantaggio; Solo dirò, che se il generale Binomio $gx^e dx \times \overline{\pm a + fx^n}^r$ abbia, o possa ridursi ad avere $r = \frac{1}{2}$, $n = 1$, e la parte fx^n positiva, egli è soggetto alla descritta integrazione; Imperocchè data ad esso Binomio la forma $gx^e\sqrt{f}\,dx \times \overline{\pm \frac{a}{f} + x}^{\frac{1}{2}}$, e supposta una curva, la di cui natura sia $gx^e\sqrt{f} = t$, ed un altra di cui sia $\sqrt{x} = z$. L' elemento $gx^e dx\sqrt{x}\sqrt{f}$ sarà l' elemento di quel solido, che abbia per base la curva $gx^e\sqrt{f} = t$, e per generatrice la parabola $\sqrt{x} = z$, onde esso solido equivarrà alla quantità di fluido, che dalla base, qual lume, uscisse sotto l' altezza x. Divenendo poi nella parabola $\sqrt{x} = z$ l' asse della medesima $\pm \frac{a}{f} + x$, si avrà all' ora l' elemento $gx^e dx\sqrt{f} \times \sqrt{\pm \frac{a}{f} + x}$, la di cui integrale starà all' integrale di $gx^{e+\frac{1}{2}} dx\sqrt{f}$, e che è $2g\frac{\sqrt{f} \times x^{\frac{2e+3}{2}}}{2e+3}$, in una ragione assegnabile. Che se nel generale Binomio l' esponente n non fosse l' unità, tanto, e tanto è soggetto a questa integrazione, mentre supposto $x^n = y$ esso Binomio trasformerassi in $y^{\frac{e+1-n}{n}} dy \sqrt{\pm \frac{a}{f} + y}$.

E' qui

E' quì credo opportuno di fare la riflessione seguente; Spiegai al *Num.* 136. il perchè v' erano delle differenziali, le quali per modo alcuno non potevano da noi ritrovarsi pel puro metodo aritmetico, e conseguenza poi di questo è certamente, che tali differenziali non possono integrarsi altresì pel puro metodo aritmetico. Io ho dunque uno stabile fondamento di credere, che le quì descritte forme di differenziali, le quali sono certamente una grandissima parte delle differenziali Binomie, sieno di questa fatta, e che esse per altro modo integrar non si possano, o assolutamente, o prossimamente, fuorchè per l' accennato artifizio o per le serie.

Num. 362. Premesse queste cose come di passaggio, e che lascierò che altri più profondamente le esamini, potrò ora esporre con qualche chiarezza il contrassegno per riconoscere questa razza di differenziali, le quali richiedono per essere integrabili i loro coefficienti mutabili. Sia dunque un Binomio $x^e dx \times \overline{a+fx^n}^r$, il quale sia integrabile per qualsivoglia delle maniere, che ho già descritte, toltane quella, che ora sto descrivendo, sarà anche, almeno prossimamente, integrabile il binomio complesso $\overline{q+x}^e dx \times \overline{a+fx^n}^r$. Sia altresì il binomio complesso $\overline{q+x}^e dx \times \overline{a+fx^n}^r$ integrabile in qualche modo, ed in una particolare determinazione di q, sarà anche, almeno prossimamente, integrabile esso Binomio, non solo in qualunque supposizione di q, ma anche quando q sia zero, onde diventi il Binomio semplice $x^e dx \times \overline{a+fx^n}^r$. Le differenziali di questi due casi sono quelle, che richiedono i coefficienti mutabili, alli quali sono da aggiugnersi i Binomj della forma premessa nel numero antecedente.

Num. 363. Queste differenziali, cioè le complesse, possono apparire sotto la forma di uno, o più multinomj. Se l'esponente e sia $= 1$ ci apparirà $dx \times \overline{aq+ax+qfx^n+fx^{n+1}}^r$, che se e sia $= i+1$, ci apparirà $q+x\,dx \times \overline{aq+ax+qfx^n+fx^{n+1}}^r$, che sono più multinomj. Se ne' multinomj si ravvisi questa forma, e possano ridursi ne' loro Binomj complessi, e che di questi possa ottenersene l'integrale, è visibile, che anche tali multinomj si sapranno integrare.

Num. 364. Non proseguirò per tanto più minutamente queste cose mancandomi il tempo di farlo, e però forzato a contentarmi di aver reso accessibile questo spazioso campo di almeno prossima integrazione, porrò fine alla terza Sezione, cresciutami bensì assai più di quello, che mi era prefisso, ma nella quale non ho però, che lievemente potuto accennare molte cose, che esaminate più minutamente daranno al Calcolo Integrale non piccolo avanzamento.

Del Calcolo integrale

Sezione IV.

Articolo Primo.

De' Trinomj differenziali Aritmetici, che contengono una ſola variabile.

Capo unico.

Del metodo proveniente dalla conſiderazione come eſſi Trinomj ſieno ſtati formati.

Numero 365. Giacchè la diviſione, che ho fatta de' Binomj in Aritmetici, e Geometrici, ha luogo pure ne' Trinomj, ed una tal diviſione nel fatto di quelli ci ha arrecato utile notabile, quindi è, che ſtimo opportuno di conſervare, almeno largamente, anche riſpetto a' Trinomj la medeſima diviſione, e ſeguire preſſo a poco quella maniera nell' integrazione di queſti, che ho praticata per quelli. Propoſta dunque la forma generale del trinomio $Q = g x^e dx \times a + b x^n + f x^{2n}$, e ſuppoſto, che la parte compleſſa ſia eſpoſta per K darò ad eſſo la forma $g x^e dx K^r$, e la dirò differenziale *Num.* 1. Sia per tanto $e+1 = q$, $r+1 = s$; $q+tn = A$, $q+2tn = B$. Sia l'integrale $\frac{x q K^s}{aq} =$ *Numero* 2. Queſta darà la differenziale $x^e dx K^r =$ *Numero* 1. $+ \frac{bAx^{e+n}}{aq} dx K^r =$ *Num.* 3., $+ \frac{fBx^{e+2n}}{aq} dx K^r =$ *Numero* 4. Sia $q+n = C$. $q+n+tn = D$, $q+n+2tn = E$. Sia l'integrale $- \frac{bAx^e K^s}{aqC} =$ *Num.* 5. Queſta darà la differenziale $- \frac{bAx^{e+n}}{aq} dx K^r = -$ *Numero* 3. $- \frac{bbADx^{e+2n}}{aqC} dx K^r =$ *Num.* 6. $- \frac{bfAEx^{e+3n}}{aqC} dx K^r =$ *Num.* 7. Comechè fra le ſei differenziali, ritrovate dalle due poſte integrali, la *Num.* 2. ſia tolta dalla — *Num.* 3., e la *Num.* 4. — *Num.* 6. non è che una ſola differenziale, ridotti che ſieno i proprj coefficienti nella ſomma $\frac{afBC - bbAE}{aqC}$, reſta manifeſto, che ſe tanto queſto coefficiente, quanto il coefficiente $- \frac{bbAE}{aqC}$ della — *Num.* 7. ſieno amendue uguali a zero, non reſterà dalle due poſte integrali fuori che la propoſta differenziale *Num.* 1.

Il coefficiente della — *Num.* 7. non può eſſer zero ſe non ſia zero E, imperciochè ſe A foſſe zero, la integrale *Num.* 5. ſarebbe ſtata nulla. E' vero che queſta difficoltà ſi torrebbe, ſe in oltre C foſſe ſtato zero, ma occorrerebbe pure, che anche E foſſe zero, ma eſſendo impoſſibile, che tutti e tre queſti ſimboli

sieno zero, se anche t non sia zero, insorge l'altra difficoltà; che così mancano amendue le integrali.

Occorre dunque in primo luogo, che sia $E = q + n + 2tn = 0 = e + 1 + 3n + 2nr$, che dirò equazione *Num.* 8. In secondo luogo fa di mestieri, che sia $afBC - bbAD = 0$, cioè $af \times q + 2tn \times q + n = bb \times q + tn \times q + n + tn$, che dirò equazione *Num.* 9.

Se dall' equazione *Num.* 8. caveremo $q = -n - 2tn$, e la sostituiremo nella *Num.* 9. ne ritrarremo $2af = bb \times r + 2$, che dirò equazione *Num.* 10. Se dalla medesima equazione *Num.* 8. caveremo $t = \frac{-q-n}{2n}$, e la sostituiremo nella *Num.* 9., ne avremo $4afn = bb \times n - q$, che dirò equazione *Num.* 11.

Se per tanto si dia un trinomio, in cui sia $e + 1 + 3n + 1nr = 0$, ed in oltre $2af = bb \times r + 2$, ovvero $4afn = bb \times n - q$, tale trinomio avrà per integrale $\frac{x^{e+1} K^{r+1}}{a \times e + 1} \times$

$$\frac{-b \times e + 1 + n + nr \times x^{e+1+n} K^{r+1}}{aa \times e + 1 \times e + 1 + n}.$$

Esempio. Sia la differenziale $x^{-5} dx \times \overline{\frac{sbb}{4f} + bx + fx^2}^{\frac{1}{2}}$, in cui ritrovasi $-s + 1 + 3 + 1 = 0$, ed in oltre $2af = bb \times \frac{1}{2} + 2$, o che è lo stesso, $4af = bb \times \overline{1 + 4}$. La sua integrale sarà $-\frac{fx^{-4}}{sbb} K^{\frac{3}{2}} + \frac{2ff^{-3}}{1sb^3} K^{\frac{3}{2}}$. In fatti la differenziale della prima integrale è $K^{\frac{1}{2}} dx \times$

x^{-5}

$\overline{x^{-5} + \frac{fx^{-4}}{2b} + \frac{ffx^{-3}}{sbb}}$. La differenziale della seconda è $K^{\frac{5}{2}} dx \times \overline{-\frac{fx^{-4}}{2t} - \frac{ffx^{-3}}{sbb} - 0x^{-2}}$, laonde rimane la sola proposta $x^{-5} dx K^{\frac{1}{2}}$. Sia ancora $x^2 dx \times \overline{\frac{bb}{2f} + bx + fx^2}^{-3}$, nella quale è $2 + 1 + 3 - 6 = 0$, ed in oltre $2af = bb \times -3 + 2$, ovvero $4af = bb \times 1 - 3$. Tale trinomio ha per integrale

$$-\frac{2fx^3 K^{-2}}{3bb} - \frac{ffx^4 K^{-2}}{3b^3}.$$

Num. 366. E' necessario avvertire, che se essendo $E = 0$ fosse $C = 0$, il che sarebbe se r fosse $= -1$, o se essendo $E = 0$ fosse $A = 0$, il che altresì accadrebbe, se fosse $r = -2$, all'ora la proposta differenziale non è pel premesso numero integrabile, ancorchè si dasse in lei l'equazione *Num.* 10, o *Num.* 11. E' altresì da avvertirsi, che se si dasse $r = -2$, allora l'equazione $2af = bb \times r + 2$ sarebbe inutile, nè si potrebbe avere integrazione; Anzi richiedendosi da questa equazione, che la a, o la f sieno uguali a zero, il dato trinomio non sarebbe, che vero binomio semplice. E' osservabile, che supponendo $a = 0$ l'integrale *Num.* 2. sarebbe impossibile, e supponendo $f = 0$, allora l'esponente per determinare se la data differenziale è integrabile viene $e + 1 - n = 0$, che è lo stesso, che tale la determina ancora nel binomio semplice. Per le stesse ragioni se $n = q$, l'equazione $4afn = bb \times \overline{n - q}$, è inutile.

Num. 367. Sia $q + 2n = F$. $q + 2n + 0t = G$. $q + 2n + 2tn = H$. Sia l' integrale

$$\frac{bbAD - afBC}{a^3qCF} \times x^{F} K^{t} = \textit{Num.}\ 12.,$$

che darà la differenziale $dx K^{r} \times \frac{bbAD - afBC}{aaqC} \times x^{e+2n} = -$ *Num.* 4. $+$ *Num.* 6., $+ dx K^{r} \times \frac{bbAD - afBC}{a^3qCF} \times bG \times x^{e+3n} =$ *Num.* 13. $+ dx K^{r} \times \frac{bbAD - afBC}{a^3qCF} \times fH \times x^{e+4n} =$ *Num.* 14.

Fralle nove differenziali naſcenti dalle tre poſte integrali non rimangono, che la *Num.* 1., e la *Num.* 7. la quale unita colla *Num.* 13. fa una ſola differenziale, il di cui coefficiente è $-abf \times \frac{AEF + BCG + b^3ADG}{a^3qCF}$, ed in oltre rimane la

Num. 14. Anche quì è manifeſto, che ſe i coefficienti di queſte due ultime differenziali ſieno amendue nulli, le tre ſommate integrali produranno la ſola propoſta differenziale. Perchè il coefficiente della *Num.* 14. ſia zero, ciò può ottenerſi utilmente ſolo ſe H ſia ella zero $= q + 2n + 2tn = e + 1 + en + 2nr$, che dirò equazione *Num.* 15. Da queſta equazione ritraeſi $q = -2n - 2tn$, e perchè il coefficiente di — *Num.* 7. $+$ *Num.* 13. dee eſſer zero, fattane in queſto l' attuale ſoſtituzione, ed uguagliato eſſo coefficiente a zero, ſi ricava l' equazione $bb \times 2 + t \times 1 + t = af \times 6 \times 1 + t$, cioè $6af = bb \times r + 3$, che dirò equazione *Num.* 16. Se dalla ſteſſa equazione *Num.* 15. ſi ricaverà $nt = -\frac{q - 2n}{2}$, e queſto ſoſtituiſcaſi nel coefficiente

di

di — *Num.* 7. $+$ *Num.* 13., ſi avrà l'altra equazione $12afn = bb \times 2n - q$, che dirò equazione *Num.* 17. Queſt' equazione ſi può ugualmente avere, e più facilmente, ſoſtituendo in luogo di r nell' equazione *Num.* 16. la $-\frac{q - 4n}{2n}$, che dalla equazione *Num.* 15. trovaſi $= r$, che però ſe ſi dia un trinomio, che abbia $e + 1 + 4n + 2nr = 0$, ed in oltre i proprj coefficienti, che abbiano fra loro il rapporto eſpreſſo dalla equazione *Num.* 16. o *Num.* 17., egli avrà per integrale le tre ſovraeſpoſte. Il trinomio $x^2 dx \times -\frac{bb}{12f} + bx + fx^2 \Big|^{-\frac{7}{2}}$ in cui ritrovaſi $2 + 1 + 4 - 7 = 0$, ed in oltre $a = \frac{bb \times 3}{6f} - \frac{7}{2} = -\frac{bb}{12f}$, ha per integrale $-\frac{4fx^3}{bb} - \frac{6ffx^4}{6^3} - \frac{12f^3x^5}{5b^4} \times K^{-\frac{5}{2}}$.

Num. 368. Anche quì è d' avvertire, che ſe eſſendo $H = 0$, foſſe $A = 0$, il che farebbe ſe $r = -3$, ovvero $C = 0$, il che deriverebbe da $r = -\frac{3}{2}$; Oppure ſe $F = 0$ per eſſere $r = -1$, la propoſta differenziale *Num.* 1. non ſarebbe integrabile pel premeſſo numero, ancorchè in eſſa ſi daſſe l' equazione *Num.* 16., o *Num.* 17. Così pure ſe ſi daſſe $2n - q = 0$ il propoſto trinomio non ſarebbe, che vero binomio, ed integrabile pel *Numero* 258.

Num. 369. Sia $q + 3n = I$, $q + 3n + tn = L$ $q + 3n + 2tn = M$. Sia l' integrale

$$\frac{afbAEF + afbBCG - b^3ADG}{a^4qCFI} \times x^{I} K^{t} = \textit{Num.}\ 18.,$$

la

diffe-

differenziale sarà $\frac{afbAEF+afbBCG-b^3ADG}{a^3qCF} \times x^{e+3n} \overline{dxK}^{r} =$ *Num.* 7. — *Num.* 13., +

$\frac{afbAEF+afbBCG-b^3ADG}{a^4qCFI} \times bL \times x^{e+4n} \overline{dxK}^{r} =$ *Num.* 19., + $\frac{afbAEF+afbBCG-b^3ADG}{a^4qCFI} \times fM \times x^{e+n} \overline{dxK}^{r} =$ *Num.* 20.

Di queste 12 differenziali prodotte dalle quattro prese integrali resta la *Num.* 1., e la *Num.* 20, ed in oltre la *Num.* 14., che unita colla *Num.* 19. fa una sola differenziale, il di cui coefficiente è $\frac{afbb \times ADHI+AEFL+BCGL-aaffCHI-b^4ADGL.}{a^4qCFI}$

Quando i coefficienti delle due ultime differenziali fossero zero, le 4 poste integrali produrrebbero la sola differenziale *Num.* 1.

Il coefficiente della *Num.* 20. sarà utilmente zero se M sia zero, onde $q+3n+2tn=0=e+1+sn+2nr.$, che dirò equazione *Num.* 21. Da questa equazione ricavasi $q=-3n-2tn$, che sostituita nel premesso coefficiente di *Num.* 14. + *Num.* 19., produce $afbb \times 24+12t \times 1+t = aaff \times 12 \times 1+t+b^4 \times 6+st+tt \times 1+t$, e però $aaff = afbb \times 2+t = b^4 \times \frac{2+t \times 3+2t}{12}$, che produce $af=bb \times \frac{3+r+\sqrt{3+r \times s+2r}}{2}$, che dirò equazione *Num.* 22., e perchè dall' equazione *Num.* 21. si ha pure $t=-\frac{q}{2n}-2$, si avrà ancora $af = bb \times \frac{n-q}{4n} \times \sqrt{\frac{q \times n-q}{2n \sqrt{6}}}$. Se per tanto si dia $e+1+5n+2nn=0$, ed in oltre l'equazione *Num.* 21., o *Num.* 22., il proposto trinomio sarà integrabile, purchè non sia $A=0$, cioè $r=-4$, $C=0$, cioè $r=-2$, $F=0$, cioè $r=-\frac{3}{2}$, $I=0$, cioè $r=-1$, ed altresì sarebbe inutile se $r=-3$, ovvero $n=q$. Il trinomio $x^{-\frac{6}{5}} dx \times \frac{2bb}{5f}+bx+fx^n \overline{}^{12}$ ha per integrale

$-\frac{25fx^{\frac{1}{5}}}{2bb} - \frac{125ffx^{\frac{4}{5}}}{2b^3} - \frac{625f^3x^{\frac{2}{5}}}{6b^4} - \frac{3125f^4x^{\frac{14}{5}}}{42b^5} \times K^{-\frac{7}{5}}$, giacchè ha $-\frac{6}{5}+1+5-\frac{24}{5}=0$, ed in oltre $\frac{2Bb}{5}(af) = \frac{bb}{2} \times 3n-\frac{12}{5}+\frac{\sqrt{3-12 \times 5-\frac{24}{5}}}{3}$, ne si fa ne r, ne n uguale a veruno de' casi sopra riservati.

Num. 370. Le cose fin' ora premesse fanno vedere, che se ne' trinomj sia $e+1+2nr \pm in=0$, purchè i, che è intero pos-

positivo non ſia minore di 3, e che in oltre ſi dia la relazione opportuna de' coefficienti agli eſponenti di eſſo trinomio, da ricavarſi ad ogni determinazione di i col metodo fin'ora poſto in opera, e da proſeguirſi quanto ſi vorrà, ed eccettuando que' caſi, che dal metodo medeſimo vengono pure ſcoperti, tali trinomj ſono aſſolutamente integrabili. Reſta ora a ſtenderſi il metodo, altresì affatto ſimile, per iſcoprire que' trinomj, che avendo $e+1-in=0$, purchè i ne pur qui ſia minore di 3, e ſienvi le relazioni opportune de' coefficienti agli eſponenti, ſono anch' eſſi aſſolutamente integrabili, e i caſi, che reſtano eccettuati.

Num. 371. Sia dunque $e+1-2n=q$, $r+1=t$, $q+tn=A$, $q+2tn=B$. Suppongaſi l'integrale $\frac{xqK^t}{fB}=$ *Num.* 2., la ſua differenziale ſarà $aqx^{e-2n}dxK^r$ / fB $=$ *Num.* 3. $+bAx^{e-n}dxK^r=$ *Num.* 4., $+x^edxK^r=$ *Num.* 1.

Sia nuovamente $q-n=C$, $q-n+tn=D$, $q-n+2nt=E$, e pongaſi l'integrale $-\frac{bAxCK^t}{ffBE}=$ *Num.* 5., che darà le differenziali $-ab\frac{ACx^{e-3n}}{ffBE}dxK^r=$ *Numero* 6. $-bb\frac{ADx^{e-2n}}{ffBF}dxK^r=$ *Num.* 7., $-bAx^{e-n}$ / fB $dxK^r=$ *Num.* 4. Suppongaſi ora, che il coefficiente $-\frac{abAC}{ffBE}$ della *Num.* 6. ſia nullo, il che utilmente, ſi ottiene ſe ſia $C=0=q-n$. Suo-

Suppongaſi altresì, che il coefficiente $afqE-bbAD$ / $ffBE$ della *Num.* 3. = *Num.* 7. ſia anch' eſſo nullo, e ſoſtituito n in luogo di q, ſi ricaverà $2af=bb\times r+2$. Le fatte ſuppoſizioni laſciano dunque dalle due integrali *Num.* 2. — *Num.* 5. la ſola propoſta *Num.* 1., la quale per ciò avrà per integrale aſſoluta le due aſſunte, ſemprechè fra' ſuoi coefficienti, ed eſponenti ſi dia l'equazione $2af=bb\times r+2$, e che in oltre abbia $e+1-3n=0$. S' eccettuano i caſi, che A foſſe $=0$, il che ſarebbe ſe $r=-2$., e così foſſe $B=0$ per eſſere $r=-\frac{3}{2}$, o $E=0$ eſſendo $r=-1$. La $x^{\frac{1}{2}}dx\times\frac{5bb}{4f}+bx^{\frac{1}{2}}+fx^{\frac{e}{2}}$, in cui ritrovanſi le notate opportune condizioni, ha per integrale $K^{\frac{3}{2}}\times\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2f}-\frac{5b}{12ff}$.

Num. 372. Sia $q-2n=F$, $q-2n+nt=G$, $q-2n+2nt=H$. Si aſſuma l'integrale $\frac{bbAD-afqE}{f^3BEH}\times x^FK^t=$ *Num.* 8. Queſta darà le differenziali $abb\frac{ADF-aafqEF}{f^3BEH}\times x^{e-4n}dxK^r=$ *Num.* 9., $+\frac{b^3ADG-abfqEG}{f^3BEH}\times x^{e-3n}$

$x^{e-3n} \times dx\,K^{r} = Num.\ 10., + \frac{bb\,AD - afqE}{ffBE} \times$

$x^{e-2n}\,dx\,K^{r} = -Num.\ 3. + Num.\ 7.$ Da queſte tre integrali reſta la differenziale *Num.* 1., e la differenziale *Num.* 9., ed in oltre la $-Num.\ 6. + Num.\ 10.$, il di cui coefficiente riduceſi a

$\frac{b^3 ADG - abf \times ACH + qEG}{f^3 BEH}$. Il coefficiente della *Numero* 9. può eſſere utilmente zero per la ſuppoſizione di $F = 0 = q - 2n$, onde ritraeſi $q = 2n$, che ſoſtituito nell' altro coefficiente di $- Num.\ 6. + Num.\ 10.$, ed ugguagliato queſto a zero, produce l'equazione $6af = bb \times r + 3$. Con queſte ſuppoſizioni dunque le tre aſſunte integrali laſciano la ſola propoſta differenziale, la quale ſe avrà $e + 1 - 4n = 0$, ed in oltre $6af = bb \times r + 3$, avrà pur anche per ſua aſſoluta integrale le tre aſſunte, purchè non ſia $B = 0$, cioè $r = -2$, $A = 0$, per eſſere $r = -3$, $E = 0$, a cagione di $r = -\frac{3}{2}$, o $H = 0$, perchè r ſia $= -1$. La $x\,dx \times \frac{7bb}{12f} + bx^{\frac{1}{2}} + fx$, nella quale è $1 + 1 - \frac{4}{2} = 0$, e $6af = bb \times \frac{1}{2} + 3$ ha per ſua integrale $\frac{2x}{5f} - \frac{7bx^{\frac{1}{2}}}{2aff} + \frac{49bb}{360f^3} \times K^{\frac{3}{2}}$.

Num. 373. Si proſegua a porre $q - 3n = I.$, $q - 3n + tn = L$, $q - 3n + 2tn = M$. Si ſupponga l' integrale

$-b^3 A$

$-b^3 ADG + afb \times ACH + qEG \times x^{I}\,K^{t} . = Num.\ 11.$
$f^4 BEHM$

Le di lei differenziali ſaranno —

$ab^3 ADGI + aabf \times ACHI + qEGI \times x^{e-5n}$
$f^4 BEHM$

$dx\,K^{r} = Numero\ 12.$, —

$b^4 ADGHL + aabf \times ACHL + qEGL \times x^{e-4n}$
$f^4 BEHM$

$dx\,K^{r} = Numero\ 13.$, —

$b^3 ADG + afb \times ACH + qEG \times x^{e-3n}\,dx\,K^{r} =$
$f^3 BEH$

Num. 6. — *Num.* 10. Le aſſunte quattro integrali laſciano dunque la propoſta differenziale *Num.* 1., la differenziale *Num.* 12., e la *Num.* 9. — *Num.* 13., il coefficiente della quale ſi riduce ad eſſere $afbb \times \frac{ADFM + ACHL + qEGI}{f^4 BEHM} -$

$\frac{aaffqEFM - b^4 ADGL}{}$. Il coefficiente della *Num.* 12. può eſſer nullo utilmente ſe $I = 0 = q - 3n = e + 1 - 5n$, e ſoſtituendo

tuendo $3n$ in vece di q nel coefficiente di *Num.* 9. = *Num.* 13., e ſuppoſto anch'eſſo $= 0$, ſe ne ricava l'equazione $af = bb \times \frac{3+r + \sqrt{3+r \times 5+r}}{2}$. Mediante queſte ſuppoſizioni le quattro aſſunte integrali laſciano la ſola propoſta differenziale *Num.* 1., la quale, ſe avrà $e + 1 - 5n = 0$, ed in oltre $2af = bb \times 3+r + \sqrt{3+r \times 5+r}$, avrà per ſua aſſoluta integrale le quattro aſſunte, purchè non ſia $B = 0$ cioè $r = -\frac{5}{2}$, $E = 0$, ovvero $r = -2$, $H = 0$, perchè $r = -\frac{3}{2}$, $M = 0$, eſſendo $r = -1$. La differenziale $x\,dx \times \frac{2bb}{5f} + bx^{\frac{2}{5}} + fx^{\frac{4}{5}}{}^{-\frac{12}{5}}$ ha per integrale $\frac{25x^{\frac{6}{5}}}{2f} + \frac{125bx^{\frac{4}{5}}}{ff} + \frac{500bbx^{\frac{2}{5}}}{3f^3} + \frac{1000b^3}{21f^4} \times K^{-\frac{7}{5}}$.

Num. 374. I due premeſſi metodi, che propriamente però ſono un ſolo, poſſono ſtenderſi quanto piace, onde ſoddisfare a qualunque ſuppoſizione di i. E bensì vero, che va ſempre più creſcendo le difficoltà nel calcolo, e che la ſeparazione de' coefficienti da gli eſponenti, onde manifeſtare la relazione, che aver debbono fra di loro, ſupera le notizie, che noi abbiamo per farla. Ciò non oſtante non ſi toglierà giammai, che dato un trinomio noi non poſſiamo ſempre ſapere ſe egli è, o non è aſſolutamente integrabile per queſto metodo, concioſſiachè preparate

parate tante integrali quante unità contiene $i - 1$, e che vadano co' ſegni contrarj levando le antecedenti differenziali da ricavarſi dalle medeſime integrali, ſi tragga q dalla ſuppoſizione di $q + in + tn$, ovvero $q - in$ uguali a zero, e fattane la ſoſtituzione nell'altro coefficiente, in cui pure o ſi trovano e gli eſponenti, ed i coefficienti della data differenziale, o ſe nò, ſono da ſoſtituirviſi, ſi vedrà ſubito ſenza verun biſogno di tale ſeparazione, ſe il coefficiente divenga anch' eſſo = zero, nel qual caſo ſapremo ſenz' altro, che la data differenziale è ſenz' altro integrabile aſſolutamente, e che la ſua integrale è quella, che è ſtata aſſunta. Nello ſteſſo modo altresì potremo, anzi dovremo accertarſi, ſe la data differenziale incontri in veruno de' caſi eccettuati. L' impoſſibilità dunque di ſeparare que' coefficienti non toglie, che riconoſcere non ſi poſſa ſe una differenziale ſia, o nò integrabile, nè quale ſia la ſua integrale, toglie ſolo, che potendo alle volte eſſere indeterminato uno, o più de' coefficienti del propoſto trinomio, onde determinandolo potrebbe renderſi integrabile quella differenziale, che ſenza di ciò non lo ſarebbe, nel caſo, che non potiamo ſeparare, ci vien tolto di ridurre all'atto queſta poſſibilità.

Num. 375. Le integrazioni aſſolute de' trinomj ſi eſtendono anche più oltre del fin qui eſpoſto. In fatti ſia $e + 1 = q$, $r + 1 = t$, $q + tn = A$, $q + 2tn = B$, e l'indeterminata x^q. Sia l'integrale $cx^q K^t$ = *Numero* 2., che dà la differenziale $acqx^e$ = *Num.* 3. $+ cbAx^{e+n}$ = *Num.* 4. $+ fcBx^{e+2n}$ = *Num.* 5. $\times\, dx K^r$. Sia nuovamente $e + 1 - n = C$, $C + tn = D$, $C + 2tn = E$, e l'indeterminata g. Sia l'integrale $gx^C K^t$ = *Numero* 6., la quale dà la differenziale $ngCx^{e-n}$ = *Num.* 7. $+ bgDx^e$ = *Num.* 8. $+ fgEx^{e+n}$ = *Num.*

Num. 9. Suppongaſi ora $C = 0 = q - n = e + 1 - n$, e ſimilmente $B = 0 = q + 2tn = e + 1 + 2n + 2nr$, con queſte due ſuppoſizioni ſi annulleranno le due differenziali *Num.* 5., e *Num.* 7., e per le medeſime due ſuppoſizioni non potrà r non eſſere $= -\frac{3}{2}$. Dalle due integrali *Num.* 2., e *Num.* 6. reſtano dunque le differenziali $dx\,K^r \times$

$$x^{e} \times \overline{acq + bgD}\,(\textit{Num.}\ 3. + \textit{Num.}\ 8.) + x^{e+n} \times$$

$$\overline{cbA + fgE}\,(\textit{Num.}\ 4. + \textit{Num.}\ 9.).$$

Che ſe il coefficiente della prima ſia $= 1$., e quello della ſeconda ſia $= 0$, è manifeſto, che dalle due aſſunte integrali non reſterà, che la data differenziale *Num.* 1. L'equazione dunque $acq + bgD = 1$, darà $c = \frac{1 - bgD}{aq}$, e la $cbA + fgE = 0$ darà $c = \frac{-fgE}{bA}$, onde $\frac{1 - bgD}{aq} = \frac{-fgE}{bA}$ laſcia $g = \frac{Ab}{bbAD - aqfE}$, e mediante queſta $c = \frac{-fE}{AD\overline{bb - Efaq}}$, e perchè le fatte ſuppoſizioni di B, e $C = 0$ danno $A = \frac{n}{2}$, e $D = \frac{-n}{2}$, ed $E = -n$, ritrarremo $g = \frac{2b}{n \times \overline{4af - bb}}$, e $c = \frac{af}{n \times \overline{4af - bb}}$, che però ſe diaſi un trinomio in cui r ſia $= -\frac{3}{2}$, e che in oltre abbia $e + 1 - n = 0$, egli è aſſolutamente integrabile, e la ſua inte-

grale è $\frac{4fx^{e+1}K^{-\frac{1}{2}}}{n \times \overline{4af - bb}} + \frac{2bK^{-\frac{1}{2}}}{n \times \overline{4af - bb}}$. Si averte, che ſe foſſe $4af - bb = 0$ tale trinomio non ſarebbe integrabile con queſto metodo ſembrando, che egli richiedeſſe un integrale infinita, ma ben lungi, che una tal forma ſignifichi coſa tale, non altro denota, ſe non che allora avremmo per noſtro errore tentato di integrare col metodo de' trinomj un vero binomio, giacchè in tal caſo il propoſto apparente trinomio non è, che un vero binomio. Se il trinomio propoſto ſia $x\,dx \times \overline{a + bx^2 + fx^4}^{-\frac{3}{2}}$, nel quale ſono i contraſſegni occorrenti, egli ha per integrale $\frac{2fx^2 + b}{\overline{4af - bb}} \times K^{-\frac{1}{2}}$,

Num. 376. Sia $e + 1 + n = F$, $F + tn = G$, $F + 2tn = H$, e l'indeterminata b. Si aſſuma l'integrale $bx^{F}K^{t}$, la di cui differenziale ſarà

$$baFx^{e+n} + bbGx^{e+2n} + bfHx^{e+3n} \times dxK^{r}.$$

Anche ora ſuppongaſi $C = 0$, e $H = 0$, le quali due ſuppoſizioni producono $r = -2$. Le differenziali dunque reſtanti dalle tre aſſunte integrali ſono $x^{e} \times \overline{acq + gbD} + x^{e+n} \times$

$$\overline{cbA + gfE + abF} + x^{e+2n} \times \overline{cfB + bbG} \times dxK^{r},$$

e perchè in ſeguito delle due fatte ſuppoſizioni è $q = n$, $D = -n$, $A = 0$, $E = -2n$, $F = 2n$, $B = -n$, $G = n$, avremo le ſeguenti

guenti equazioni $acn - gbn = 1$, $ba = gf$, $bb = cf$, onde $b = \frac{cf}{b} = \frac{gf}{a}$, e però $c = \frac{bg}{a}$, onde $bgn - bgn = 1$., equazione, che è impossibile, onde si scorge impossibile di integrare assolutamente, almeno con questo metodo, quel trinomio, che avendo $e + 1 - n = 0$, abbia in oltre $r = -2$.

Num. 277. Sia $e + 1 + 2n = I$, $I + tn = L$, $I + 2tn = M$, e l' indeterminata i. Dall' integrale $i x^{I} K^{t}$ si avrà la differenziale $iaIx^{e+2n}, + ibLx^{e+3n}, + ifMx^{e+4n} \times dxK^{r}$. Anche ora suppongasi $C = 0$, e $M = 0$, dalle quali supposizioni si produce $r = -\frac{5}{2}$, e le differenziali restanti dalle 4. assunte integrali sono $x^{e} \times \overline{\frac{2acn - 3gbn}{2}}, + x^{e+n} \times \overline{\frac{4ban - cbn - 6gfn}{2}}, + x^{e+2n} \times \overline{\frac{bbn + bian - 4cfn}{2}}, + x^{e+3n} \times \overline{3ibn - bfn} \times dxK^{r}$. Facendo poi il primo di questi coefficienti $= 1$., e tutti gli altri $= 0$, riesce benissimo di determinare tutte le indeterminate, laonde se un trinomio abbia $e + 1 - n = 0$, ed in oltre $r = -\frac{5}{2}$, egli è assolutamente integrabile.

Non mi stendo a determinare le sovra assunte indeterminate, ne a proseguir questi metodi, che pajonmi con tutto il premesso bastevolmente appianati. Passerò dunque a spiegare il metodo delle trasformazioni anche respettivamente a' trinomj, e questo si estenderà pure a' trinomj geometrici.

Del

Del Calcolo Integrale

Sezione IV.

Articolo Secondo.

De' Trinomj di una sola Variabile, tanto Aritmetici, che Geometrici.

Capo Unico.

Del Metodo delle Trasformazioni.

Num. 378. SIA il Trinomio $x^{e}dx \times \overline{a + bx^{n} + fx^{2n}}^{r} = Q$. Suppongasi $x^{n} = \overline{y - c}$. La e è una indeterminata. Sarà dunque $dx = dy \times \overline{\frac{y - c}{n}}^{\frac{i-n}{n}}$, e Q si trasformerà in $B = dy \times \overline{y - c}^{\frac{e+1-n}{2}} \times \overline{\overline{fcc + a - bc} + y \times \overline{b - 2fc} + fyy}^{r}$. Suppongasi $b - 2fc = 0$, onde $c = \frac{b}{2f}$, con che ne risulta $y = x^{n} + \frac{b}{2f}$, ed otterrassi pure $B = \frac{dy}{n} \times$ $y =$

$y - \frac{b}{2f}$ $\frac{e+1-n}{n}$ $\times$ $\frac{4af-bb+fy^2}{4f}$ ^{r}. Se per tanto foſſe $\frac{e+1-n}{n} = i$, ſi avrebbe B riſolto in tanti binomj ſemplici quante unità ſono in $i+1$. Tutti que' binomj dunque, che alla y fuori del ſegno avranno l'eſponente diſpari, ſaranno aſſolutamente integrabili pel *Num.* 258., ed ogni pò d'attenzione lo fa manifeſto, gli altri poi che avranno l'eſponente di detta y pari, ſaranno anch'eſſi, ſecondo il *Num.* 259. integrabili, ſempre che r ſia un numero negativo diſpari diviſo per 2, e che ſia maggiore di tre unità del maſſimo numero pari fra quelli, che formano detti eſponenti di eſſa y fuori del ſegno. Queſto maſſimo numero ſarà i, ſe i ſia pari, ed $i-1$ ſe i ſia diſpari.

Num. 379. Quando poi il numeratore della frazione r non ſuperi di 3 unità il maſſimo numero pari, come ſi è detto, quando eſſo numeratore, come qui ſi ſegue a ſupporre, ſia numero diſpari negativo, e il denominatore ſia 2, il dato trinomio è integrabile per logoritmi. Spianerò il modo di queſta integrazione mediante un eſempio. Sia $x\,dx \times \overline{a+bx^2+fx^4}^{-\frac{1}{2}} = A$, in cui è $1+1-2=0$, ed eſſendo $r = -\frac{1}{2}$ il numeratore 1 non ſupera 4, maſſimo numero pari nel preſente eſempio, di 3 unità. La A coll'ipoteſi $y = \frac{2fx^2+b}{2f}$, ſecondo il numero antecedente ſi trasforma in $\overline{\sqrt{f}\,dy \times 4af-bb+4ffy^2}^{-\frac{1}{2}}$, e detto $4af-bb=p$, piglia

piglia la forma $\frac{\sqrt{f}\,dy}{\sqrt{p+4ffy^2}} = B$. Queſta trasformata, avendo $r = -\frac{1}{2}$, ed $\frac{e+1}{n} = \frac{1}{2}$, e la prima forma, è integrabile pe' *Numeri* 263. 276. o 281. per logoritmi. Se poi perſeverando $\frac{e+1-n}{n} = i$, r non ſuperi di 3 unità il maſſimo numero pari, come ſi è eſpoſto, tanto, e tanto può averſene l'integrale. Imperocchè riſolvendoſi all'ora la trasformata in altrettanti binomj quante unità contiene $i+1$; Ed eſſendo gli eſponenti delle variabili fuori del ſegno di queſti binomj in progreſſione Aritmetica, la di cui differenza è 1, e gli eſtremi ſono i, e zero: Tutti que' binomj, che avranno l'eſponente diſpari faranno ſempre integrabili, come è manifeſto, pel *Num.* 258. Quelli poi, che lo avranno pari, giacchè ſpoſtandoli poſſono ridurſi ad aver zero per eſponente, è manifeſto, che anche in queſto caſo, che è lo ſpiegato di ſopra, ſono integrabili per logoritmi.

Num. 380. Le coſe premeſſe fanno ſtrada a ſcoprire generalmente, che ſempre, che ne' trinomj ſia $\frac{e+1-n}{n} = i$, e r una frazione negativa, o poſitiva, che abbia per numeratore un numero diſpari s, e 2 per denominatore, tale trinomio è ſempre integrabile, aſſolutamente ſe r ſia negativo, e ſuperi di 3 unità il maſſimo eſponente pari fra gli eſponenti della variabile fuori del ſegno nel ſenſo già ſpiegato, e parte aſſolutamente, e parte con logoritmi, o per logoritmi ſolamente, ſe s non ſuperi eſſo maſſimo numero di 3 unità, e caſo che r ſia poſitivo, può egli ſempre collo ſpoſtare la trasformata del trinomio, ridurſi ad eſſere negativo. Può pure riſolverſi in integrali relative della ſeconda claſſe, o ricevere tutte quelle integrazioni, che

nell' essere acquistato di binomio, sì semplice, che complesso, possono convenirgli.

Num. 381. Se coll' ipotesi del *Num.* 378. si trasformi il trinomio A nel binomio B. mediante il supporre $\frac{e+1-n}{n}=0$, $0=i$, ed in cambio di porre $b-2fc=0$, si ponga $fcc+a-b$; e si levi un y di sotto al segno, si avrà $B=y^r dy \times \overline{2fy-\frac{b+\sqrt{bb-4af}}{2fn}}^{\,i} \times \overline{fy-\frac{\sqrt{bb-4af}}{2f}}^{\,r}$, giacchè c è $=\frac{b+\sqrt{bb-4af}}{2f}$, e $b-2fc=-\sqrt{bb-4af}$.

Se $4af$ fosse maggiore di bb, la trasformata B avrebbe delle immaginarie. Se poi essendo f negativo, sia a positivo, o vicendevolmente, B non potrà avere immaginarie. Se per tanto sia $\frac{e+1-n}{n}=0$, il trinomio, che ha questa condizione è integrabile pel *Numero* 259. se $-r-1-1-r=0$, cioè se $r=-1$., ovvero se $-r-1-1-r=t$ (t è un intero positivo), cioè se $r=-\frac{t-2}{2}$.

Num. 382. Se poi sia $\frac{e+1-n}{n}=i$, all' ora B si risolverà in altrettanti trinomj quante unità contiene $i+1$. Gli esponenti della variabile fuori del segno de' binomj sono sempre r accresciuto di un termine della progressione Aritmetica, che ha uno per differenza, e per estremi zero, ed i., se per tanto r sia qualunque numero intero negativo, il proposto trinomio sarà sempre integrabile, imperocchè data alla B., per facilitare l' immaginazione, la forma $\overline{2fy-g}^{\,i} \times \frac{y^r dy \times \overline{-p+fy}^{\,r}}{2f}$, gli esponenti della variabile fuori del segno saranno sempre $i-r$, $i-r-1$, $i-r-2$ & $i-r-i$. Possono per tanto darsi tre casi, e sono, che r sia o minore, o maggiore, o uguale di i. Nel primo caso sarà $i-r$ intero positivo, onde il primo binomio sarà integrabile pel *Num.* 258., e così lo saranno tutti gli altri susseguenti binomj, finchè si giunga ad uno degli esponenti, per esempio $i-r-2$, che sia $=0$, il quale anch' esso corrisponde ad un binomio integrabile per lo medesimo numero; Comechè poi l' altro binomio, per esempio $i-r-3$., e tutti gli altri susseguenti hanno per esponente un intero negativo, è manifesto, che tutti questi sono integrabili pel *Num.* 259. Questo stesso discorso fa vedere, che se r sia $=i$, il primo binomio è integrabile pel *Num.* 258. e tutti gli altri susseguenti pel *Num.* 259., e che se r sia maggiore di i, ogni uno de' binomj è integrabile pel *Num.* 259. In questo caso per altro di $r=$ ad un intero negativo, ed $\frac{e+1-n}{n}=i$ vi sono sempre fra le integrali del trinomio de' Logoritmi.

Num. 383. Se poi r sia una frazione il di cui numeratore sia intero dispari s, negativo, e maggiore dell' unità, e il denominatore sia 2, ed in oltre $\frac{e+1-n}{n}=i$, anche allora il dato trinomio è integrabile. Anche quì s può essere maggiore, o minore di $2i$, non però mai uguale, perchè all' ora non sarebbe numero dispari. La serie degli esponenti delle variabili fuori del segno, sarà in questo caso $\frac{2i-s}{2}$, $\frac{2i-s-2}{2}$, $\frac{2i-s-4}{2}$ & $\frac{2i-s-2i}{2}$. Se s è maggiore di $2i$, L' esponen-

ponente della fuori del segno del primo binomio è anch' esso negativo, e dispari, il che essendo, atteso l'essere s maggiore dell'

unità, la somma di $\frac{s}{2}$, e dell' esponente predetto del primo binomio, non potrà essere minore di 2, laonde questo binomio non potrà non essere integrabile pel *Num.* 259. Perchè poi l'esponente del susseguente binomio cresce d'un unità negativa, e così pure succede degli altri susseguenti di mano in mano, questi esponenti così cresciuti, mediante la trasformazione del *Num.* 259. cresceranno l'esponente della sotto al segno nelle loro trasformate di unità positive, e per ciò sempre più produranno i loro binomj integrabili, laonde se s sia maggiore di $2i$, i binomj in cui si trasforma il trinomio, sono integrabili pel *Num.* 259., e senza miscuglio di Logoritmi.

Num. 384. Se poi s è minore di $2i$, l'esponente allora $\frac{2i-s}{2}$ della fuori del segno del primo binomio sarà positivo, e così lo saranno, o potranno essere gli altri di seguito, fino che si giunga ad ottenere de' negativi, il che sempre si otterrà per lo meno nell' ultimo, e penultimo de' binomj. Questi due ultimi binomj, ed altri se ve ne saranno, che ottengono l' esponente della fuori del segno negativo, saranno sempre integrabili pel *Num.* 259., ma avranno però sempre gli esponenti equivalenti ad e, ed r della sorta di $\frac{s}{2}$, e però saranno integrabili per integrali relative.

Numero 385. Sia data nuovamente $x^{e} dx \times \overline{a + bx^{n} + fx^{2n}}^{r} = Q$, e coll' ipotesi $x^{n} = y - c$ sia trasformata in $\overline{y-c}^{\frac{e+1-n}{n}} dy \times \overline{a + fcc - bc + y \times b -$

$\overline{2fc + fy}^{2}}^{r} = B$, e sia $\frac{e+1-n}{n} = r$, allora, giacchè in tal caso la parte sotto al segno potrà multiplicarsi per $y - c$, la B si cambierà in $D = dy \times \overline{c \times bc - fcc - a + y \times \frac{a + 3fcc - 2bc}{n} + yy}^{r} \times \overline{b - 3fc + fy^{3}}^{r}$. Suppongasi ora $b - 3fc = o$, che da $c = \frac{b}{3f}$, e sostituiscasi, e verrà $D = E = \frac{dy}{n} \times \overline{\frac{b}{3f} \times \frac{2bb - 9af}{9f} + y \times \frac{3af - bb}{3f} + fy^{3}}^{r}$.

Num. 386. Se presentemente si faccia $3af - bb = o$ onde $bb = 3af$, resterà $E = \frac{dy}{n} \times \overline{\frac{-b^{3}}{27ff} + fy^{3}}^{r}$, che sarà integrabile se $r = \frac{-4-3i}{3}$, che però se un trinomio abbia $e + 1 - n - nr = o$, ed in oltre $3af = bb$, egli coll' ipotesi $x^{n} = y - \frac{b}{3f}$ si trasforma in un binomio integrabile col *Num.* 259., se r sia $= \frac{-4-3i}{3}$, e i può esser zero.

Num.

Num. 387. Se nella trasformata E, in vece di fare $3af = bb$ sia $9af = 2bb$, allora la E risulterà $\frac{dy}{n} \times \overline{\frac{-bby}{9ff} + fy^3}^{\,r}$, e levando un y di sotto al segno, $\frac{y^r dy}{n^r} \times \overline{\frac{-bb}{9ff} + fy^2}^{\,r}$, che sarà integrabile se $r = \frac{-3-2i}{3}$, che però, se un trinomio abbia $e + 1 - n - nr = 0$, ed in oltre $2bb = 9af$, egli, coll' ipotesi $x^n = y - \frac{b}{9f}$ si trasformerà in un binomio integrabile col *Num.* 259., se r sia $= \frac{-3-2i}{3}$. Se r fosse l' unità negativa, sarebbe integrabile per Logoritmi, e sarebbe l' unità negativa se i fosse zero.

Num. 388. Nella trasformata D, in vece di supporre $b - 3fc = 0$ vi si supponga $c \times \overline{bc - fcc - a}$, onde traggasi $c = \frac{b \pm \sqrt{bb - 4af}}{2f}$. Fatte le sostituzioni se ne otterrà

$$\frac{y^r dy}{n} \times \overline{\frac{b \pm \sqrt{bb-4af}}{2f} \times \sqrt{bb-4af} + y}^{\,r} \times \overline{\frac{3\sqrt{bb-4af}}{2} + fy^2}^{\,r}$$

. Annientando il primo termine si avrà

avrà $b = \sqrt{bb - 4af}$, che producendo $4af = 0$, mostra che A non era trinomio, ma bensì binomio.

Num. 389. Se nella medesima trasformata D si annienti il secondo termine in vece del primo, si ha $2bb = 9af$, laonde

$$D = y^r \frac{dy}{n} \times \overline{\frac{2bb}{9f} + fy^2}^{\,r}, \text{ ovvero } \frac{y^r dy}{n} \times \overline{\frac{4bb}{9f} \times fy^2}^{\,r}$$

. integrabile col *Num.* 259. se $r = \frac{-3-2i}{3}$; e la di cui ipotesi è $x^n = y - \frac{b \mp \sqrt{bb-4af}}{2f}$, ma che contiene delle immaginarie se $4af$ sia maggiore di bb. Anche quì, se r sia l' unità negativa, può integrarsi per logoritmi.

Num. 390. Se nella trasformata del *Num.* 388. in vece di annientare veruno de' termini la lasceremo nella forma di trinomio, e tenteremo la di lei integrazione mediante il metodo de' *Numeri* 378., e seguenti, potremo integrarla se $r = -\frac{4}{3}$, o $-\frac{5}{3}$, o $-\frac{6}{3}$ o &. Se la ragione degli esponenti, relativamente a quella de' coefficienti lo permette. In caso per esempio di $r = -\frac{4}{3}$ bisognerà che diasi $5af = bb + b\sqrt{bb - 4af}$, ovvero $3bb - 4b\sqrt{bb - 4af} = 4af$. Resta la supposizione di $a + 3fcc - 2bc = 0$, ma questa, o ritorna nelle scoperte già

già fatte, o richiede, che il dato trinomio non fosse tale, ma vero binomio.

Num. 391. Se ne' premessi casi 386. 387. 388., ne' quali si scorge, che quando quelle differenziali si trasformino col *Numero* 259., r dee essere una frazione negativa il di cui denominatore è 3, diasi che in cadauno di essi casi respettivamente, r sia minore del suo correspettivo uguale, per esempio nel *Numero* 386. sia r minore di $\frac{4+3i}{3}$, e minore per numero intero p, positivo, e maggiore di zero, onde si desse $r = \frac{-4-3i+3p}{3}$, allora è visibile, che i trinomj, che si sono potuti ridurre alla forma di essi tre numeri, avranno nella loro trasformazione da eseguirsi col *Num.* 257. l'esponente della fuori del segno, che sarà numero intero negativo, e però tali trinomj potranno allora essere anch'essi integrabili.

Num. 392. In vece di essere $\frac{e+1-n}{n} = r$ sia $=$ ad $r-t$, (t si pone un intero qualunque positivo), allora la D sarebbe

$$\frac{\overline{y-c}^{\,t}\,dy}{n} \times \overline{c \times \overline{bc-fcc-a} + y \times \overline{a \pm 3fcc - 2bc + yy \times \overline{b-3fc} + fy^3}^{\,r}}$$

, cioè tante differenziali, quante unità si contengono in $t+1$. Se in questo supposto, ne' tre numeri 386. 387. 388., sia pel *Num.* 386. $r = \frac{-4-3i-t}{3}$, e per gli altri due numeri $r = \frac{-3-2i-t}{3}$, saranno anch'essi integrabili pel *Num.* 259., giacchè integrandosi il binomio, che ha il

ha il massimo esponente t, o $t+r$ fuori del segno, gli altri susseguenti, che decrescono sempre di mano in mano per un unità, producono sempre un esponente alla fuori del segno, che cresce d'un unità positiva, e però saranno anch'essi sempre integrabili. Se poi fosse $r = \frac{-4-3-t+3p}{3}$, o $\frac{-3-2i-t+2p}{3}$, allora parte di essi binomj sarebbe integrabile col *Num.* 259. e il restante pel *Num.* 258. Si avverte essersi sempre supposto, che i possa essere zero.

Num. 393. Si raccoglie per tanto, che tutti i trinomj, i quali abbiano $\frac{e \pm 1 - n}{n} = r$ sono assolutamente integrabili, se abbiano r uguale ad una frazione negativa, in cui il denominatore sia 2, e il numeratore un numero della progressione Aritmetica crescente, il cui primo termine sia 4, e la differenza 3., e questo pel *Num.* 391.; Ovvero se il numeratore altresì sia un numero della progressione Aritmetica, il cui primo termine sia 3, e la differenza 2, e questo pe' *Numeri* 388., e 389., purchè in oltre fra gli esponenti, ed i coefficienti loro si dieno le relazioni opportune.

Se poi le medesime progressioni si continuino decrescendo, onde si giunga ad avere r positivo, allora acquistando la trasformata mediante il *Num.* 259. gli esponenti della sotto al segno interi negativi, anche questi saranno integrabili per logoritmi, e così $\frac{dy}{n} \times \overline{\frac{-b^3}{27ff} + fy^3}^{\,\frac{2}{3}}$, che ha $r = \frac{2}{3}$, che è il termine, che troverebbesi continuando all'indietro la serie $-\frac{4}{3}$, giacchè se ne avrebbe $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, i quali termini rappresentano tutti gli r, acquista, trasformandosi col *Num.* 259., l'esponente

ponente della ſotto al ſegno $= -2$, e però ella è integrabile per Logoritmi.

Si raccoglie per tanto univerſalmente, che i trinomj, i quali abbiano r uguale ad una frazione il di cui denominatore ſia 3, e che eſſendo r negativo, abbia il numeratore non minore di 3, tali trinomj ſaranno aſſolutamente integrabili. Se poi r ſia poſitivo, o anche negativo, ma che il numeratore ſia minore di 3, ſaranno integrabili per logoritmi, purchè ſempre ſia $\frac{e+1-n}{n} = r$, ed in oltre diaſi fra coefficienti del dato trinomio l'opportuna relazione. Se poi dandoſi queſte due ultime condizioni, ſia r un intero negativo, anche all'ora ſono integrabili per logoritmi.

Num. 394. Se finalmente ſia $e+1-n = r-t$, ſtando tutte le altre coſe, ſi hanno le medeſime integrazioni, con queſto ſolo divario, che tutti i termini delle due progreſſioni, che rappreſentano r, debbono eſſere ſcemati coſtantemente dello ſteſſo numero intero t, di modo che per eſempio, ſe per eſſere integrabile $dy \times \overline{\frac{-b^3}{27ff} + fy^3}^{r}$ è d'uopo che r ſia per eſempio uguale a $-\frac{4}{3}$, o $+\frac{2}{3}$, in queſto caſo è di meſtieri, che ſia $= -\frac{4-t}{3}$ oppure $+\frac{2-t}{3}$.

Num. 395. Il trinomio $x^e dx \times \overline{a + bx^n + fx^{2n}}^{r}$ col levargli x^{2n} di ſotto al ſegno riducaſi alla forma $x^{e+2nr} dx \times \overline{ax^{-2n} + bx^{-n} + f}^{r} = Q$. Sia $x^{-n} = y - c$. La A ſi trasformerà in $-\frac{dy}{n} \times \overline{y-c}^{\frac{e+1-n-2nr}{n}} \times \overline{f \pm acc - bc + by + ay^2}^{r} = B$. Suppoſto per tanto $b - 2ac = 0$, che produce $c = \frac{b}{2a}$, e l'ipoteſi $x^{-n} = y - \frac{b}{2a}$, ſi avrà $B = -\frac{dy}{n} \times \overline{y - \frac{b}{2a}}^{\frac{e+1-n-2nr}{n}} \times \overline{\frac{4af-bb}{4a} + ay^2}^{r}$. Laonde ſe ſi aveſſe $e-1-n-2nr-in = 0$, la B ſarebbe riſoluta in tanti binomj quante unità contiene $i+1$, che ſarebbero tutti integrabili, come pel diſcorſo fatto al *Num.* 378., ſe r ſia $= -\frac{s}{2}$, in cui s è numero diſpari maggiore di 3 unità di i, ſe queſto ſia pari, e di $i-1$ ſe ſia diſpari. Che ſe s non ſupera di 3 unità o i, o $i-1$, allora, ſecondo il diſcorſo del *Numero* 379, il dato trinomio A è integrabile per logoritmi.

Num. 396. Se piuttoſto faceſſimo zero $f - acc - bc$, trarremo $c = \frac{b \pm \sqrt{bb-4af}}{2a}$, e l'ipoteſi $x^{-n} = 2ay - b \mp$

$\frac{\mp\sqrt{bb-4af}}{2a}$, e levato un y di sotto al segno, la B prenderà la forma $-dy \times \frac{2ay-b\mp\sqrt{bb-4af}}{2an} \times y^{r} \times \left(-\frac{\sqrt{bb-4af}}{2a}+ay\right)^{r}$, e però il trinomio A sarà integrabile, se essendo $-e-1-n-nr=0$, sia in oltre $r=-1$, ovvero $r=\frac{-t-2}{2}$, essendo t intero positivo.

Num. 397. Se poi sia $-e-1-n-2nr-in=0$ la A sarà risolta in altrettanti binomj quante unità contiene $i+1$. Se r sia intero negativo la A, secondo il discorso del *Num.* 382. sarà sempre integrabile; se poi r sia una frazione $-\frac{r}{2}$, sarà altresì integrabile secondo il discorso de' numeri 383., e 384.

Num. 398. Suppongasi ora che sia $-e-\frac{1-n}{n}-2nr=r$, onde $-e-1-n-3nr=0$, e però secondo il discorso del *Num.* 398. la B prenderà la forma $-\frac{dy}{n} \times \frac{c \times bc-acc-f+y \times f+3acc-2bc+y^{2} \times}{b-3ac+ay^{3}}$, e supposto $b-3ac=0$, onde $c=\frac{b}{3a}$, e l'ipotesi $x^{-n}=y-\frac{b}{3a}$, si otterrà B nella forma $-dy \times \frac{b}{3a} \times \frac{2bb-9af+y \times 3af-bb+ay^{3}}{9a}{}^{r}$. Se in questo caso si faccia $3af-bb=0$, si avrà, secondo il discorso del *Num.* 379. integrazione di A, se sia $r=\frac{-4-3i}{3}$, e la trasformata sarà $-\frac{dy}{n} \times -3f \times \frac{\sqrt{3af+ay^{3}}}{27a}{}^{\frac{-4-3i}{3}}$.

Num. 399. Se piuttosto si faccia $0=2bb-9af$, secondo il discorso del *Num.* 383. A sarà integrabile se $r=\frac{-3-2i}{3}$ ovvero $=-1$.

Num. 400. Se fosse la $bc-acc-f$, che si ponesse $=0$, se ne trarrebbe $c=\frac{b\mp\sqrt{bb-4af}}{2a}$, e l'ipotesi $x^{-n}=\frac{2ay-b\mp\sqrt{bb-4af}}{2a}$. La B prenderebbe allora la forma $-y^{r}dy \times \frac{b\mp\sqrt{bb-4af} \times \sqrt{bb-4af}}{3a} +$

$$\overline{}^{\,r}$$

$y \times \overline{-b \mp \frac{\sqrt{bb-4af}}{2} + ay^2}$. Se si supponga

$-b \mp b\sqrt{bb-4af} = 0$, risulterà $2bb = 9af$, ed allora si

avrà $-\frac{y^r dy}{n} \times \overline{\frac{2bb}{9a} + ay^2}^{\,r}$, ovvero $-\frac{y^r dy}{n} \times$

$\overline{\frac{4bb}{9a} + ay^2}^{\,r}$, integrabili se $r = -\frac{3-2i}{3}$.

Num. 401. Così pure, se senza annientare termine alcuno dell' antecedente B, si lascia nella forma di quadrinomio potrebbe essere, che qualche altra sua integrazione fra le competenti a' quadrinomj potesse ottenersi.

Num. 402. Hanno poi luogo nell' integrazione della presente trasformata tutte le cose diffusamente scritte ne' numeri 391. 392. 393., e 394.

Num. 403. Dato il trinomio solito Q. sia $x^{2n} = y - c$. Questo trasformato dà $B = \frac{dy}{2n} \times$

$$\overline{y-c}^{\,\frac{e+1-2n}{2n}} \times \overline{a - fc + b \times \overline{y-c}^{\,\frac{1}{2}} + fy}^{\,r},$$

che se si faccia $a - fc = 0$, onde $c = \frac{a}{f}$, e l'ipotesi $x^{2n} = y - \frac{a}{f}$, si

otterrà

otterrà $A = \overline{\frac{y - \frac{a}{f}}{2n}}^{\,\frac{e+1-2n}{2n}} dy \times \overline{b \times \overline{y - \frac{a}{f}}^{\,\frac{1}{2}} + fy}^{\,r} = C$.

Suppongasi ora $\overline{y - \frac{a}{f}}^{\,\frac{1}{2}} = z$. La C diverrà $\frac{z}{n}^{\frac{e+1-n}{n}} dz \times$

$\overline{a + bz + fz^2}^{\,r}$, il qual trinomio, se abbia $\frac{e+1-n}{n} = 0$, $0 = i$, avrà poi sempre $\frac{i+1-1}{n}$ un numero, intero, onde sarà soggetto a tutte le integrazioni premesse per un tal caso.

Num. 404. Se poi considerando C nella sua forma di trinomio si dasse $e + 1 + in + 4nr = 0$, laonde venisse soggetto a ciò, che si raccolse al *Num.* 383., ovvero fosse $e + 1 + 2nr - in = 0$, onde C potesse integrarsi col *Num.* 371., e seguenti. Anche allora A sarebbe integrabile, purchè si dasse la relazione opportuna fra gli esponenti, e coefficienti. Di più se diasi $e + 1 + 2nr - n - in = 0$ viene il trinomio C ad esser soggetto a' casi del *Num.* 378., e se finalmente fosse $-e - 1 - 4nr - n - in = 0$ apparterrebbe alle integrazioni scoperte al *Num.* 395., e seguenti.

Num. 405. Al solito trinomio Q col levare di sotto al segno x^{2n} diasi la forma $x^{e \pm 2nr} dx \times \overline{ax^{-2n} + bx^{-n} + f}^{\,r}$.

Sia $x^{-2n} = y - c$, e con questa ipotesi avremo Q trasformato in $B = -\frac{dy}{2n} \times \overline{y - \frac{f}{a}}^{\,-e-\frac{2nr}{2n}-1-n} \times$

$\overline{\overline{\overline{

uno de' due termini ſia poſitivo, e l'altro negativo, biſogna pure, che l'eſponente ſcemato dell'unità della variabile di queſto termine ſia negativo, onde ſe sì avrà per eſempio il ſecondo termine negativo, dovrebbe eſſere $-gnx^{m-n-1}y\,dy$, e l'integrale $gx^{m-n}y$.

Num. 408. Quando una differenziale di due variabili è, o può ridurſi a zero, come ſarebbe $\frac{dx}{x}=\frac{2dy}{y}$, che può ridurſi a $\frac{2xdy-ydx}{xy}=0=2xdy-ydx$, e che poſſa trovarſi l'integrale, allora inſegnano, che ſi debba contrappore alla trovata integrale una coſtante di uguali dimenſioni, onde nel preſente caſo inſegnano, che dovrà averſi l'integrale, $\frac{y^2}{x}=a$. Dicono queſta coſtante eſſere ſovente arbitraria, ma per altro non doverſi mancare d'induſtria nello ſcierla, per dare così alla ſoluzione del problema maggiore eleganza, ed alla ſua coſtruzione maggiore facilità.

Num. 409. Accade alle volte, che le equazioni di queſta fatta non ci appajono integrabili. Inſegnano in tali caſi alcuni artifizj per ridurvele. Sia l'equazione $\frac{dx}{x}=\frac{2dy}{y}$. Queſta in tal forma viene detta non integrabile. Ridotta per tanto a $2xdy-ydx=0$, multiplicandola per $\frac{y}{xx}$, diviene $2xy\frac{dy-y}{xx}^{2}dx=0$, la di cui integrale pel *Num.* 407. è $\frac{y^2}{x}=a$. Così $nxdy=ydx$, ridotta a $nxdy-ydx=0$, e multiplicata per $\frac{y^{n-2}}{x^n}$, diviene $nxy^{n-1}\frac{dy-y}{xx}^{n}dx=0$, che ha per integrale $\frac{y^n}{x^{n-1}}=a$.

Num. 410. Sia $2axdy-x^2dy=aydx+xydx$. Supponga ſi $zz=2ax+xx$, e però $zdz=adx+xdx$, e ſoſtituendo, avremo $zdy=ydz$, e riducendo $zdy-ydz=0$, e dividendo per zz riſulterà $\frac{zdy-ydz}{zz}=0$, e l'integrale ſarà $\frac{y}{z}=\frac{y}{\sqrt{2ax+xx}}=\frac{a}{b}$. Inſegnano pure, che la differenziale $\frac{2axdy+2x^2dy-aydx-2xydx}{2axy+2x^2y}=0$, ſupponendo $ax+xx=z$, onde $adx+2xdx=dz$, con che l'equazione ſi trasforma in $\frac{2xdy-ydz}{2zy}=0$, e multiplicandola per $\frac{y}{\sqrt{z}}$, diverrà $2z\frac{dy-ydz}{2z^{\frac{3}{2}}}=0$, che ha per integrale $\frac{y}{\sqrt{z}}=\frac{a}{b}$.

Num. 411. Ciò che oſta maggiormente alle integrazioni di queſta fatta ſi è il non eſſere per lo più ſeparate le variabili. Manchiamo fin' ora di un metodo per effettuare queſta ſeparazione. Alle volte rieſce, o multiplicando, o dividendo tutta l' equazione per qualche quantità. Serve altre volte il ſupporre le eſpreſſioni, che ſono meſcolate, uguali ad un altra variabile. Sia per eſempio $\overline{x\,dx + y\,dy} \times \sqrt{y} = \overline{x\,dy - y\,dx} \times \sqrt{x}$. Suppongaſi $y = \frac{tz}{a}$, ed $x = \frac{t}{a}\sqrt{aa - zz}$. Fatte le differenziazioni, e ſoſtituzioni ſi avrà $\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$, equazione nella quale le variabili ſono ſeparate, e che le coſe da noi premeſſe rendono integrabile.

Num. 412. Se poi non rieſce di ſeparare le variabili, allora propongono per opportuno ſoccorſo il metodo della ſerie.

Num. 413. Queſto è in ſuccinto quanto ho veduto inſegnato più generalmente da' Maeſtri del Calcolo ſul preſente argomento. Mi reſta ora, proteſtando a' medeſimi Maeſtri un pieniſſimo riſpetto, da farvi ſopra alcune annotazioni. I Principianti ne profitteranno, sì per evitare l' errore, che per inoltrarſi in altre ſcoperte. Sovenganſi queſti di quanto diſſi al *Num.* 15. cioè che le differenziali in tanto hanno l' eſſere, in quanto compongono un equazione eſprimente un problema, laonde non è già in totale noſtro arbitrio il fingere tali equazioni, ma è d' uopo averle tali da' problemi medeſimi. Quando nel problema, di cui ſi cerca la finale aſſoluta equazione, il compoſto delle variabili, per propria di lui natura non ſia uguale a ſole coſtanti, coſa che ora accade, ora nò, non potiamo noi a noſtro arbitrio introdurvi una coſtante, e ciò facendo, guaſteremmo l' equazione. Anzi nè pur nel caſo, che il nominato compoſto uguagli una coſtante, è libero a noi il ſupplirvela arbitrariamente, ve la dobbiamo dare con regola, e queſta regola la riſchiarirò nella ſeguente Sezione. In propoſito dunque del preeſpoſto a' *Numeri* 408., e

410. potrebbe tal' uno diffidare dell' eſattezza di quelle integrazioni. Ma quello poi, che è certo, ſi è, che quelle eſpoſte integrazioni aver ſi poſſono, e ſenza ſupplirvi la coſtante, e paſſandoſi dalle deſcritte preparazioni. In fatti ſe ſi proponga l' equazione $\frac{dx}{x} = \frac{2\,dy}{y}$, a che ne occorre di darle l' altra forma $2x\,dy - y\,dx = 0$, ſe ella è già ſenza altro giro integrabile è. Somminiſtra queſta ſenz' altro $l\,y^2 = l\,x$, onde $y^2 = x$.

Poteva queſt' equazione differenziale eſſere nata dal problema ſeguente. Trovare generalmente la natura di quella curva, la di cui ſottangente ſia ſempre doppia della ſua aſciſſa. Per iſciorlo avrebbe biſognato fare $\frac{y\,dx}{dy}$ (che è l' eſpreſſione generale della ſottangente di tutte le curve) $= 2x$, ed avremmo avuta la notata equazione $\frac{2\,dy}{y} = \frac{dx}{x}$, la di cui integrale $y^2 = x$ moſtra, che la chieſta curva è la parabola, come è notorio. Oſſerviſi per tanto, che ſiccome nella propoſta del problema non ſi cerca altro, che la ſola natura generale della curva, e non già veruna parabola individuale di quel grado, così niuna determinata coſtante qui debbe entrarvi, che ſervendole di parametro la deſigni individualmente. La ſola unità, la quale deſigna generalmente tutti i parametri, è quella, che propriamente debbe entrarvi, e che vi è. Queſta avvertenza ſi manifeſta anche più al caſo nell' altra equazione $2ax\,dy + x^2\,dy = ay\,dx + xy\,dx$, e nella ſuſſeguente del *Num.* 410. Ordinando nella poſta equazione le variabili, ella è $\frac{dy}{y} = \frac{dx \times a + x}{2ax - xx}$. L' integrale di que-

sto ultimo membro il quale è propriamente $\frac{a\,dx}{2ax+xx}$ $+$ $\frac{x\,dx}{2ax+xx}$ è $l\,2a+x-L\frac{\sqrt{2a+x}}{\sqrt{x}}=l\sqrt{2ax+xx}$ onde l'integrale della propoſta, ſenza altri giri, nè trasformazioni è $y=\sqrt{2ax+xx}$, equazione tutta della ſteſſa dimenſione lineare, e che nulla ha di biſogno dell'aggiunta arbitraria di $\frac{a}{b}$. Tale equazione differenziale ha potuto provenire dalla propoſta di ritrovare generalmente la natura di una curva, la di cui ſottangente ſia $=\frac{2ax+xx}{a+x}$, e troveraſſi l'equazione differenziale ſovrapoſta, e che la natura della curva cercata è $y=\sqrt{2ax+xx}$, alla quale niun parametro è in noſtra libertà di dare, eſſendo già dato nella ſteſſa propoſta del problema per la coſtante $=a$. In queſto eſempio dunque, oltre allo ſcorgerſi ſuperfluo il ridurre uguale a zero la propoſta equazione per integrarla, ſi rende paleſe l'errore, che ſi farebbe contraponendovi una coſtante, la quale nel preſente caſo, non arbitraria, ma la ſola unità eſſer potrebbe. Non è però, che non poſſano alcuni problemi ſomminiſtrarci veramente la loro equazione differenziale un di cui membro ſia $=$ a zero. Una di queſte è quella, che ho data al *Num.* 257., e tali ſono tutti i problemi aſſoluti, i quali hanno tutto il compoſto delle loro variabili uguale ad un compoſto tutto coſtante. Queſto caſo veriſſimo per altro nelle equazioni di due variabili, ſecondo il preſente argomento ſarà ben rato, e ſolo può, e dee riconoſcerſi dalla natura del dato problema, dalla quale natura, mediante il metodo vero, e fondato di compire le integrali, ſapremo, e quando, e quale ſia la coſtante, che debbe aggiugnerſi.

In propoſito poi della ſeparazione delle variabili, ingegnoſo, e vero è l'artifizio del *Num.* 411. I Principianti però debbono ſeriamente avvertire, che le ipoteſi, che eſſi aſſumeranno per trasformare l'equazione propoſta, non determinino mai la relazione delle due variabili del problema, perchè in tal caſo otterrebbero bensì la voluta ſeparazione, ma muterebbero, o almeno ſtringerebbero la natura del problema. Sono nel citato numero ſtate fatte due ipoteſi. Una è $y=\frac{tx}{z}$, che dà $x=\frac{az}{t}$. L'altra è ſtata $x=\frac{t}{z}\sqrt{aa-zz}$, che dà $z=\frac{a}{t}\sqrt{tt-xx}$, onde riſulta $\sqrt{tt-xx}=yy$, e ſiccome t è variabile, così niente dalle due aſſunte ipoteſi viene riſtretta la relazione fra x, e y. Che ſe t non foſſe variabile, allora ſarebbe ſtata introdotta arbitrariamente nel problema una condizione riguardante il rapporto di x a y, che non vi è, e il riſultato del calcolo non avrebbe corriſpoſto alla generalità del problema.

Num. 414. Dopo le premeſſe avvertenze paſſerò ad ampliare alcun poco, e come di paſſaggio, giacchè il tempo a me ſi acorcia, l'integrazione di queſto argomento. Prima di tutto biſogna diſtinguere, che le equazioni differenziali, le quali ſembrano di una ſola variabile, e che io per uniformarmi all'uſo, nelle paſſate Sezioni ho nominate tali, come che hanno veracemente nell'altro loro membro la differenza, e ſola di un altra variabile, ſono in ſenſo di verità, ſempre di due variabili, benchè a tal coſa non ſi attenda. Mi ſpiegherò più chiaro con un eſempio. Se ſi abbia l'equazione $dx\sqrt{aa+xx}=dv$, queſta equazione è propriamente di due variabili, ma come che il membro dv è fatto dalla ſola differenza di v, così conſide-

riamo, e diciamo in tal caso, che l' equazione è di una sola variabile. Allo stesso modo per tanto tutte quelle equazioni, che potendo separare le variabili possono ridursi in due membri, in ogn' uno de' quali altro non sia che la variabile, e la propria differenza, possono dirsi di una sola variabile, e per integrarle nulla altro occorre, che quanto si è prescritto in ordine a quelle, che abbiamo detto di una sola variabile. Quindi è, che la primaria regola per la presente integrazione ella è, che si tenti ogni mezzo di separare nel descritto modo le variabili, e allora co' metodi già premessi tentare l' integrazione. Per quelle poi, nelle quali non ci riesce la necessaria separazione, e per queste sole, che uniformandomi al parlar comune nominerò anch' io di due variabili, darò in appresso qualche avanzamento. Nel numero di queste possono esservi, o non esservi, in seguito della possibilità della separazione, quelle differenziali, che per individuale natura del proprio problema hanno il zero per uno de' loro membri. Per tutte queste equazioni dunque, che a cagione dell' inseparazione restano di due variabili, è prima da fare un attenta diligenza nelle condizioni del problema, perchè non rare volte può accadere, che fra esse condizioni una ve ne sia, che manifesti la relazione di x a y, il che dandosi, allora si darà pure x per y, o vicendevolmente, e l' equazione potrà, e dovrà ridursi di una sola variabile.

Ciò fatto è da cercarsi se tali differenziali costino di sole due, o più parti, o termini, perchè questo ancora altera la facilità dell' integrazione. Spiegherò le cose, che sono per dire applicandole ad alcuni esempj. Sia l' equazione differenziale $fx^{a}y^{c}dx = gx^{e}y^{i}dy$, che è fatta di due soli termini, e le di cui variabili non possono darsi l' una per l' altra. Questa forma generale

herale di equazione differenziale è sempre, senza difficoltà veruna integrabile, niente altro occorrendo, che riddurla all' altra forma $fx^{a-c}dx = gy^{i-c}dy$, la di cui integrale è sempre $\frac{fx^{a-c+1}}{a-c+1} = \frac{gy^{i-c+1}}{i-c+1}$. Se $a-c+1$ sia $= 0$, il suo membro sarà il logoritmo della sua variabile (*Num.* 143.), e se così lo sia $i-c+1$, anche questo membro sarà il logoritmo, e in tal caso avremo tutta l' integrale in termini assoluti, e se nò, ci resterà con un membro logoritmico. Quando uno de' membri dell' integrale assoluta, senza ajuto de' logoritmi, risultasse negativo, e che compiendo a dovere l' integrale non possa divenir positivo, il problema, che ha prodotta la differenziale, può essere stato, o proposto, o calcolato erroneamente, perchè regolarmente quantità positiva non può essere comparabile a quantità negativa. Non è però, che alle volte un tale avvenimento non mostri, che la quantità cercata debbe prendersi dall' altra parte, onde qui tanto più bisogna badare alla natura del problema. Se poi l' integrale resti mescolata di Logoritmi, allora il problema, supposto il calcolo fatto a dovere, e le ipotesi giuste, sarà sempre possibile, giacchè il logoritmo negativo non indica quantità negative, ma una mera frazione.

E' d' avvertire che la proposta equazione, e quelle pure che hanno più di due termini, dovrebbero avere, regolarmente parlando, ugual numero di dimensioni ne' loro membri. Nè voglio però dire con questo, che se tali membri ci compajono nella forma dis-

renziale con un numero diſuguale di dimenſioni, nel ve le dobbiamo compiere, e maſſime arbitrariamente. Voglio dire, che noi dobbiamo nel calcolare il proble- ma porre ogni avvertenza di ridurre i di lui mem- bri alla dovuta uguaglianza, ſupplendovi quelle dimen- ſioni, che alla natura del problema convengono, laon- de, e così ci venga fatto di evitare l' errore, ed otteniamo le forme differenziali, che ſieno equazioni, e vere, e confacenti alla propoſta del problema. Gli e- ſempj ſeguenti riſchiareranno, e moſtreranno, che que- ſta annotazione non è truſtranea.

Num. 415. Propongaſi di ritrovare generalmente la natura della curva, la di cui ſottangente s, ſtia al-

la frazione $\frac{x^{e}\,y^{i}}{a^{\,}\,c-1}$ delle ſue coordinate come g ad

f. Avremo $\frac{g\,x^{e}\,y^{i}}{x^{a}\,y^{c-1}} = f\,s = \frac{f\,y\,dx}{dy}$, e però ſe

ne avrà per l' equazione differenziale la ſovrapoſta $=$

$f x^{a} y^{c} dx = g x^{e} y^{i}$, ſe' la natura generale della

cercata curva ſarà $\frac{f x^{a-e+1}}{a-b+1} =$

$\frac{g y^{i-c+1}}{i-c+1}$. Se la frazione $\frac{x^{e}\,y^{i}}{x^{a}\,y^{c-1}}$ non foſſe

ſtata di una ſola dimenſione, vale a dire, che $\frac{e+1}{\text{non}}$

non foſſe ſtato maggiore di un unità di $a+c-1$, vi ſi avrebbe dovuto ridurre, perchè l' eſigenza del pro- blema propoſto così vuole. Imperocchè, eſſendo la ſot- tangente una linea, e così pure la ragione di g ad f (per quanto appare) di linea a linea, così dee an- che la notata frazione eſſere una linea, e però quan- do non la foſſe ſtata, avrebbero, affine di proporre il problema poſſibilmente, e ſenza incoerenza, dovuto ſup- plirſi in ella frazione quelle coſtanti, (o intendervele ſupplite coll' unità, quando il problema altre non ne ammetteſſe), che alla dimenſione di una linea la ri- duceſſero. Tali coſtanti avrebbero ſervito di parametro indeterminato alla curva medeſima.

Mi ſi permetta per tanto, che io applichi la pro- poſta formula generale ad alcuni caſi particolari per me- glio riſchiarare a pro de' Principianti queſte coſe. Sup- pongaſi $g = f$ $a = o$, c, ed $i = 1$. ci reſterà l' e-

quazione $y dx = x y dy$, proveniente da $\frac{y dx}{dy}[s] = x y$,

ed in tali ſuppoſti noi cercheremo una curva, che a- veſſe la ſua ſottangente uguale al prodotto delle ſue due coordinate, ricerca contenuta bensì generalmente nel- la premeſſa formula generale, ma da adoperarſi colle dovute avvertenze. Il prodotto $x y$ è di due dimenſio- ni, e la ſottangente non è che d' una, e però per in- tavolare a dovere il problema in queſto caſo particola- re, biſogna rendere il prodotto $x y$ di una ſola dimen- ſione, dividendolo per una coſtante indeterminata, per eſem- pio p. Potrebbe crederſi, che l' unità poteſſe equivale- re a tale biſogno, ma vedremo di nò. Accade dun- que in queſto, e ſimili caſi di aſſumere l' equazione

$p y dx = x y dx$, che ordinata è $\frac{p dx}{x} = dy$, e ſom-

miniſtra l' integrale $p lx = y$, e queſta eſprime a ſa-

pere

vere la natura della richiesta curva. Questa curva in primo luogo, quando p. sia l'unità, è quella logoritmica medesima, che abbia l'unità per sua sottangente, ma le di lei coordinate si debbono prendere come permutate.

Sia per tanto (*Fig.* 30.) prolongata l'ordinata GB per l'origine, onde convenga colla AC. Si consideri poi BC essere l'asse, e però $BC = x$, e CD sia y. E' visibile che y (CD) è $= lx$ [FB], che è il logoritmo di $FD = BC = x$, onde la natura della

curva che abbia $s = \frac{xy}{l}$ è veramente la notata logoritmica ordinaria così considerata. Quindi se avessimo creduto di soddisfare veramente al problema ponendo l'unità in vece della costante indeterminata p, male vi avremmo soddisfatto, perchè essendo la richiesta generale di trovare in ogni qualunque supposizione la natura della curva, che abbia la domandata condizione, una sola di tali curve, ed è la logoritmica ordinaria avente l'unità per sua sottangente, avremmo trovata, e le altre diversissime, che pur vi sono, ed hanno la cercata condizione, ci sarebbero sfuggite. Quanto poi a determinare la costante p. ne nasce nel presente esempio la determinazione del problema medesimo. In fatti la di lui

proposta, che è $s = \frac{xy}{p}$ ci dà s (AC). y (CD) :: x [DF]. $p = EF$, che è la sottangente generalmente di qualsivoglia logoritmica, ed ecco in primo luogo come fia vero, che l'unità non ci dava che una sola curva, quando altre indissinitamente ve ne sono, che hanno la medesima proprietà, ed in secondo luogo, che la p da noi presa indeterminatamente, è però necessariamente la sottangente costante di quella logoritmica, che serve a determinare, e costruire la curva, la di cui natura veniva cercata nel proposto problema. Nel caso per tanto, che p sia l'unità, la logoritmica sola, avente l'unità per sua sottangente è quella, che soddisfa, ma nel caso, che p sia diverso dall'unità, la curva cercata è quella, che ha la sua ordinata y [CD] uguale al prodotto della sua ordinata x per la sottangente della logoritmica, che somministra tal Logoritmo.

Al proposito pure delle costanti, che fatte le integrazioni, delle quali ora parliamo, vien creduto, che supplir si debbano, porrò un altro esempio. Dimandisi la natura della curva, la quale abbia la sua tangente uguale alla sua ordinata elevata a

qualsivoglia podestà, qual sarebbe y^m. Giacchè la formula generale delle tangenti è $y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, avremo quadrando

$y^2 dx^2 + y^2 dy^2 = y^{2m} dy^2$, onde $dx = dy \times \sqrt{y^{2m-2} - 1}$., la di cui integrale si potrà avere ne' casi, che abbiamo scoperti, o che per altro modo saranno integrabili Se m fosse $= 1$. ci resterebbe $dx = 0$. Parrebbe, che in tal caso si dovesse avere $x = a$ inerendo al detto nel *Num.* 408. sostituendo una costante arbitraria a per integrale della differenziale zero.

Se noi credessimo, che l'equazione $dx = 0$, nel presente caso fosse equazione, anderemmo errati. Ella è unicamente contrassegno certo dell'impossibilità di darsi la cercata curva in tal caso, mentre rissultandoci una variabile $x = a$ ad una costante a, ce ne risulta una vera contraddizione. In fatti è impossibile che

che diasi mai una curva, che abbia la sua tangente uguale alla sua ordinata, giacchè la tangente è l'ippotenusa di quel triangolo rettangolo, di cui la ordinata si è un lato.

Num. 416. Ripigliando ora l'equazione $f x^{a-e} dx = g y^{i-c} dy$. Supponiamo $a-e=2.$, ed $i-c=0$, e allora cercheremo una curva, la di cui sottangente stia al quadrato della sua ascissa nella ragione f a g. Avremo dunque $f x^2 dy = a g y dx$, compendo con a la dimensione, che mancherebbe. L'integrale sarebbe $\frac{-ag}{f} = x l y$. Questa equazione è possibile, perchè $-ly$ è $l\frac{1}{y}$, e l'equazione diviene tutta positiva, ed è $\frac{ag}{f} = x l \frac{1}{y}$. Può altresì aversi la sottangente negativa, e tale a dir vero conviene alla presente curva, e il problema poteva, e doveva proporsi $-s. \frac{x^2}{a} :: f. g$, onde ottenersi la differenziale $-\frac{f dy}{y} = \frac{ag dx}{x^2}$, e l'integrale $\frac{ag}{f} = x l y$. Questa curva sembra una spezie di iperbola equilatera; nella quale non è il prodotto dell'ascissa x nella corrispondente ordinata y, che ugguaglj la quantità $\frac{ag}{f}$, ma lo agguaglia il prodotto dall'ascissa x nel logoritmo dell'ordinata y. Curiosissima poi è la traccia dell'arco di questa curva considerata puramente per rapporto alla voluta sottangente. Supponghiamo $f = g.$, e considerisi l'iperbola prima $pp = xy$. Ponghiamo che x sia $= 1.$, comechè la sottangente della nostra curva dee essere uguale al quadrato dell'ascissa x, sarà in questo caso la sottangente $= -1 = -x.$, onde il primo arco di questa curva spetterà alla prima iperbola. Divenga $x = 2.$ allora la sottangente dovrà essere $= -4$, $= -2x$. Questo secondo arco continguo al primo spetterà dunque alla seconda iperbola $p^3 = x y^2$. Passi x ad essere $= 3$, e la sottangente diverrà $= -9 = -3x$, e questo terzo arco contiguo al secondo, spetterà alla terza iperbola $p^4 = x y^3.$, e così di seguito, laonde la curva $a = x l y$ è una curva, gli elementi contigui, e consecutivi del contorno della quale, cominciando dall'origine, sono gli elementi nell'esposta maniera corrispondenti di tutte quante le iperboli nell'ordine, e natura sovradescritte crescenti di un grado.

Equazioni differenziali altresì di due soli termini dir si possono quelle, i due membri delle quali, benchè composti, o uno di loro, o amendue di due variabili, hanno, o amendue, o uno di loro la forma del *Num.* 407. Propongasi di ritrovare la curva in cui

cui (*Fig.* 3.) la porzione AH della ſottangente ſi ſempre uguale all' ordinata y. Avremo dunque

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{dy} = y.$$

, e però riducendo, e multiplicando per $\frac{1}{y^2}$, otterremmo $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{dy}{y}$. Il primo membro ha la forma del *Num.* 407., laonde, benchè coſti veramente di due porzioni, io conſidero però queſt' equazione in queſto caſo di ſoli due termini,

L' integrale è $\frac{x}{y} = ly$, e tale è la natura della cercata curva.

Num. 417. Paſſerò ora alle equazioni, che ſono di tre termini. Sia data l' equazione, che ſia ridotta alla forma $ax^{m-1}\,dx + bx^{n-1}y^{e}\,dy = cy^{e}\,dy.$, nella quale, eſſendo tutto poſitivo, diaſi che il primo termine contenga la ſola x, e dx, e coſtanti, e così il terzo termine, o ſecondo membro contenga la ſola y, e dy, e coſtanti; Che il ſecondo membro poi contenga x, e y, ma ſolo dy, e coſtanti. [Tutte le equazioni differenziali di tre termini poſſono ſempre ridurſi a queſta forma, e lo moſtrerò in appreſſo]. Se diaſi in oltre, che l' eſponente $m-1$ della x nel primo termine ſia minore di un unità dell' eſponente m dalla x del ſecondo termine, e che l' eſponente della y in queſto ſecondo termine ſia l' unità negativa. La formula, che ha queſte condizioni è

inte-

integrabile. Suppongaſi l' integrale $gx^{i}y^{t} = fy^{r}.$, avremo la differenziale $gix^{i-1}y^{t}\,dx + gtx^{i}y^{t-1}\,dy = fry^{r-1}\,dy$, e traſponendo y^{t}, diverrà $gix^{i-1}\,dx + gtx^{i-1}y^{r-t-1}\,dy = fry^{r-t-1}\,dy.$, che rappreſenta indeterminatamente la propoſta. Con queſta rappreſentazione determineremo $m = i$, $g = \frac{a}{m}$, $t = \frac{bm}{a}$, $r = \frac{ea+a+bm}{a}$, ed $f = \frac{ac}{ae+a+bm}$, dalle quali determinazioni riſulta, che l' integrale della propoſta è $\frac{a}{m}x^{m}y^{\frac{bm}{a}} = \frac{ac}{ae+a+bm} \times y^{\frac{ae+a+bm}{a}}$. Queſta integrale dà in fatti la differenziale $ax^{m-1}y^{\frac{bm}{a}}\,dx + bx^{m}y^{\frac{bm-1}{a}}\,dy = cy^{\frac{ea+bm}{a}}\,dy$, la quale, traſponendo $y^{\frac{bm}{a}}$ riſulta eſſere la propoſta.

Se poi il legno del ſecondo termine ſia negativo, ſuppongaſi l' integrale $\frac{gx^{i}}{y^{t}} = fy^{r}.$, e ſe ne avrà la

differenziale $gix^{i-1}dx - gtx^{i}y^{-1}dy = fy^{r+t-1}dy$, e determineremo $i = m, g = \frac{a}{m}$, $t = \frac{bm}{a}$, $f = \frac{ac}{ac+a-bm}$, ed $r = \frac{ac+a-bm}{a}$, e l' integrale è $\frac{a}{m} \times \frac{x^{i}}{y^{\frac{bm}{a}}} = \frac{ac}{ac+a-bm} \times y^{\frac{ac+a-bm}{a}}$

Nelle due premeſſe integrazioni e non può eſſere negativo, perchè allora avrebbeſi neceſſariamente $-cy^{-e}dy$. Pe' caſi dunque, ne' quali e ſia negativo, pigliſi l' integrale $gx^{i}y^{t} = fly$. Si avrà $gix^{i-1}y^{t}dx + gtx^{i}y^{t-1}dy = \frac{fdy}{y}$, e $gix^{i-1}dx + gtx^{i-1}y^{t-1}dy = fy^{t-1}dy$. Le determinate ſono in queſto caſo $g = \frac{a}{m}$, $t = \frac{bm}{a}$, $f = c$, e biſogna inoltre che ſia $e = \frac{bm+a}{a}$.

Num.

Num. 418. Sia l' eſpreſſione generale di tre termini $gx^{m}y^{r}dx + by^{r}x^{c}dy = fx^{c}y^{s}dy$, la quale in ogni ſuo termine ha x, e y. Queſta, come ho accennato di ſopra, può ſempre ridurſi alla forma $gx^{n-c}dx + bx^{i-c}y^{r-t}dy = fy^{s+t}dy$, nella quale non reſta che un termine, il quale accompagnato alla ſua differenza dy abbia amendue le variabili, e per ottenere queſta riduzione altro non occorre, ſe non che di divider tutto per $x^{c}y^{t}$. Se nella propoſta forma per tanto ſi abbia $i - c = o$, ella è integrabile, perchè diviene $gx^{n-i}dx + by^{r-t}dy = fy^{s-t}dy$.

La forma $Ay^{-1}dy + Bx^{c}y^{e}dx = Cdx$, nella quale il primo termine ha dy diviſo per la ſua y lineare, il ſecondo, ha le due variabili comunque elevate, e il ſolo dx, e il terzo ha ſolo dx ſenza variabili, e ſieno i coefficienti quali ſi vogliano, s' integra come ſiegue.

Sia l' equazione $alx = blfx^{r} + gy^{t}$. Avremo $bgty^{-1}dy + f \times br - a \times x^{r-t}y^{t}dx = agdx$, che ſuppo-

rappresenta la proposta forma, ne resta più, che determinare i coefficienti. Così pure $Ax^{c}y^{e}dx + Bx^{c}y^{e}dy = Cydy$ è integrabile. Pongasi l'equazione $dlx + ply = blfx^{r}y^{t}$, ed avremo la differenziale, che la rappresenta $f \times \overline{a-br} \times x^{r}y\,dx + agy^{t-1}dx + fpx^{r+1}dy = g \times \overline{bt-p} \times y^{t}x\,dy$, sempre che si faccia $a = br$, e che si divida tutto per $y^{t-1}x$.

Se poi in vece di fare $a = br$ si faccia $p = bt$, e si divida per $x^{r+1}y^{t-1}$ cambieremmo essa formula nella $agx^{-r-1}dx + f \times \overline{a-br} \times x^{-1}y^{2-t}dx = -fpy^{1-t}dy$, che rappresenterà generalmente la forma $Ax^{c}dx + Bx^{-1}y^{e}dx = -Cy^{s}dy$.

Num. 419. Con questo ripiego di prendere delle integrali, e formare le differenziali indeterminate, potiamo porre insieme qualche capitale per integrare queste differenziali di due variabili. Qualche Studioso principiante applicandosi per suo esercizio a queste pratiche potrebbe farne un regalo al pubblico. I metodi della separazione delle variabili, e delle trasformazioni, sono per verità più intimamente fatti per la integrazione di esse differenziali, ma essendo fin' ora troppo poco avanzati per darci un valevole ajuto, non ho creduto superfluo al bisogno l'indicato ripiego di formare le sovramostrate formule.

Le cose fin' ora dette possono aprir qualche lume alle integrazioni delle equazioni differenziali composte veramente di due variabili, non solo quando abbiano tre soli termini, ma anche in maggior numero. Quanto poi alle equazioni differenziali, le quali hanno in un loro membro due variabili, e questo è poi uguale ad una variabile da loro diversa, e queste tali equazioni, non già di due, ma di tre variabili si debbono considerare composte, potrebbe forse giovare quanto ho scritto al *Num.* 249., e in tanto lasciando ad altri, che abbiano maggior ozio, il dare avanzamento all' integrazione di questa fatta di differenziali passerò alla seguente.

Sezione VI.

Della regola, e modi per rendere compinte le Integrali.

Num. 420. SEMBRERA' primo a' miei Lettori, che io destini una Sezione di queste mie Memorie a spiegare l' accennata regola, quando gli Autori tutti in poche linee se ne sbrigano, e facilissima ce la spiegano. Gli prego a sospendere per un poco il loro giudizio, e spero che resteranno persuasi, che un tal argomento ha di bisogno di qualche maggiore attenzione. I frutti del Calcolo Integrale sono sempre acerbi, o mai si sa se sieno maturi, finchè non si sappia se le Integrali, che si ritrovano, siano, o nò compiute, e tali frutti non sono mai di verun uso, quando, non essendo compiute le Integrali, non si sappiano compier senza errore; e quello che è peggio, ove queste diligenze si ommettano, non pochi errori ne germogliano, capaci a sconvolgere le vere idee teoretiche della Quantità.

Per espor dunque il più chiaramente che sia possibile quanto mi sono proposto di stendere in questa Sezione, giudico opportuno venire senz' altro al fatto. Ogn' uno sa, che se in un rettangolo FC (*Fig.* 30.) dicasi a la sua larghezza FD, ed intendasi il suo lato FB variabile, onde dicasi $EF = x$, l' elemento di questo rettangolo, o vogliamo dire la sua equazione differenziale sarà $a\,dx = dv$, supposta v l' area variabile del rettangolo ricercata. L' integrale di questa equazione sarà $ax = v$.

Num. 421. Sia la Logoritmica AS (*Fig.* 8.), e vogliasi l'area v dallo spazio Logoritmico $PQRS$, cominciante dall' origine P della medesima. Sia a la sottangente di questa Logoritmica, avremo per differenziale dell' ascissa PQ la $\frac{a\,dx}{x}$, onde l' equazione differenziale di questo problema $a\,dx = dv$, e l' integrale sembrerà $ax = v$; Se nella presente ipotesi credessimo sufficiente questa integrale, caderemmo in errore, e può questa verità mostrarsi all' occhio. E certissimo, che in ogni logoritmica ARS si dà sempre un ascissa AB, la quale è uguale alla propria sottangente BI. Si darà dunque in qual si voglia spazio da una logoritmica compreso il manifesto innegabile assurdo, che la parte sia uguale al tutto, imperocchè divenendo $PB = a$, lo spazio $PBASP$, che è parte del rettangolo $PB \times BA$, sarà uguale a questo medesimo rettangolo $a \times x = PB \times x$. L' equazione dunque $ax = v$, così come è, non può altrimenti esprimere lo spazio logoritmico $PBASP$, e solo verrà ad esprimerlo, quando compita a dovere, e il come lo mostrerò al *Num.* 432. divenga $a \times \overline{x-1} = v$, e nella quale equazione, l'unità, che ho notata, è l' ordinata PS. per l' origine della propria logoritmica, laonde la vera equazione del presente caso è $a \times \overline{x - PS} = v$.

Sia in un triangolo. $a.b :: x.y = \frac{bx}{a}$, onde se vorremo l' area di tale triangolo finiente al finire di x, avremo $\frac{bx\,dx}{a} = dv$, ed altresì l' equazione finale $\frac{bx^2}{2a} = v$, come è già notissimo. Ponghiamo ora, che sopra al medesimo triangolo come base, giusta il *Num.* 89., scorra per es-

va generatrice l' iperbola $aa = xy$; il ſolido generato per tal modo avrà per equazione differenziale $ab\,dx = dv$. Che ſe nel preſo triangolo foſſe ſtato $b = 1$. ſarebbe la medeſima equazione trovata, e pel rettangolo, e per lo ſpazio logoritmico ſopra trovato. L' equazione finale dunque di queſto ſolido ſembrerà anch' eſſa $ax = v$, ma ancor quì è viſibile, che anderemmo fallati, e moſtrerò tra poco, che tal eqnazione dee eſſere $a \times x^{-\frac{1}{2}} = v$.

Num. 422. Sia una parabola, che avendo per parametro $\frac{b}{a}$ ſia eſpoſta per $\frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{a}} = y$. Sopra di queſta come baſe ſcorra, giuſta il *Num.* 89., una parabola affatto uguale; Se ne genererà un ſolido, che avrà per equazione differenziale $\frac{bx\,dx}{a} = dv$, che è lo ſteſſo elemento dell' area ſovratrovata del triangolo, e queſto elemento ha pure la ſteſſa equazione integrale $\frac{bx^2}{2a} = v$. Non è già, che queſto ſolido poſſa mai eſſere uguale ad una ſuperficie, laonde, benchè da' medeſimi ſimboli in apparenza vengano deſignate le due equazioni, eſſe però intrinſecamente non ſono la ſteſſa. Il fatto qui ſtà, che eſprimendo il parametro della parabola per $\frac{b}{a}$, ciò ſarà ſtato per qualche neceſſità accidentale del calcolo, mentre quanto all' eſſenza della parabola, la $\frac{b}{a}$ è una ſola linea da poterſi eſprimere, per eſempio per p., ed ottenerſene $\frac{px}{2} = v$, nella quale equazione diſtinguiamo tre dimenſioni, ove nel triangolo, $\frac{b}{a}$ non eſprime una linea, ma una ragione, o forſe meglio diremo, un numero, e la ſua equazione rigoroſamente non eſprime, che due dimenſioni.

Num. 423. Mi ſi permetta ancora un altro eſempio. Sia la curva ECR (*Fig.* 26.) in cui $ED = p$, $DB = x$, e DC, o $BR = y$, e ſia la natura della curva la $y^{m+n} = a^m \times \overline{p+x}^n$. Suppongo m, ed n poſitivi. Si domanda il valore dello ſpazio $DCRB$, avremo per equazione differenziale di queſto ſpazio la $dv = dx \times a^{\frac{m}{m+n}} \times \overline{p+x}^{\frac{n}{m+n}}$, e conſeguentemente ci parrà di avere l' equazione integrale $v = m \pm n \times \frac{a^{\frac{m}{m+n}} \times \overline{p+x}^{\frac{2n+m}{m+n}}}{2n+m}$. Anche quì anderemmo fallati, e vedremmo, che dee levarſi dal ſecondo membro

$$\frac{m+n}{2n+m} \times a^{\frac{m}{m+n}} \times p^{\frac{2n+m}{m+n}}$$. Propongasi ora di ritrovare una curva, la di cui ſottangente S ſia

$$\frac{v}{a^{\frac{m}{m+n}} \times p+x^{\frac{n}{m+n}}}$$, nella qual curva, $p+x$ ſia l' aſciſſa, ed v l' ordinata. Per ottenere queſta curva, biſogna fare $S = \frac{v\,dx}{dv}$, e ſoſtituendo, ſi avrà la ſteſſiſſima equazione trovata di ſopra $v =$

$$\frac{m+n}{2n+m} \times a^{\frac{m}{m+n}} \times p+x^{\frac{2n+m}{m+n}}$$. Queſt' equazione eſprime la vera natura della richieſta curva, ne v'è biſogno di aggiugnere, o ſcemare coſa alcuna.

Num. 424. Queſti tali fatti, ed altri moltiſſimi, che potrei addurre, baſtano per farmi ſtrada al preſente argomento. Ponendo eſſi dunque in incontraſtabile evidenza, che problemi di natura diverſiſſimi, hanno, o poſſono eſſerci ſomminiſtrati dal calcolo colla ſteſſiſſima equazione differenziale, onde poi per neceſſaria conſeguenza, le loro equazioni integrali ci appajono le medeſime, benchè per verità non le debbano eſſere, è quì luogo di ſpiegare a' Principianti la cagione di tale accidente, e moſtrar loro il modo di non laſciarſi condurre in errore, come certamente in errore cadrebbero, ſe ſi credeſſero, che ſenz' altro le equazioni integrali

grali così trovate, foſſero quelle vere nelle quali debbono finire i problemi, che le hanno prodotte. Per ottenere tali fini fa d'uopo, che i Principianti quì ſi ſovvengano di alcune coſe, che brevemente di già accennai nel Cap. 1. della terza Sezione del Calcolo differenziale.

Num. 425. Toccai allora (*Num.* 38., e 39.), che ſe dall' equazione $A + dA = B + dB$ fatta da queſte variabili contigue di un problema toglievaſi l' equazione $A = B$ delle variabili primitive, il toglier la quale moſtrai ivi eſſer ſempre poſſibile, reſtava per anche equazione fra le non tolte quantità, ed era queſta l' equazione $dA = dB$. Moſtrai in appreſſo [*Num.* 40.], che da tale equazione era alle volte poſſibile di riavere per mezzo del calcolo integrale l' equazione finale $A = B$. delle due variabili primitive. Notai per altro (*Num.* 41., e 42.) ſopravenire anche dopo tale ritrovamento un eſſenziale difficoltà. Non avendo le quantità coſtanti differenziale veruna, è viſibile, che l' equazione finale d' un problema, che ſia per eſempio $A = B - C$ [Denoto per C qualunque porzione totalmente coſtante di queſta equazione], l' equazione differenziale farà ſemplicemente $dA = dB$, giacchè dC è Zero, quindi è, che ottenendoſi da due, o più problemi $A = B - C$, ed $A = B$, benchè tanto fra loro diverſi per rapporto alle pure coſtanti, che aggiugnendoſi, o levandoſi un membro dell' equazione ne alterano indiffinitamente il valore, ottenendoſi dico la ſola ſteſſiſſima equazione differenziale $dA = dB$, da queſta, quando altro ajuto non ne ſovvenga, non potrà mai ricavarſi, fuori che una ſteſſa equazione finale $A = B$, e pure ſe dal calcolo integrale ſi dovrà cavar utile, e verità, fa d' upo che queſto diaci la vera equazione, e preciſa $A = B - C$. Ecco dunque il perchè ne' già addotti eſempj, problemi tanto fra loro diverſi hanno moſtrato di avere una medeſima equazione differenziale, e conſeguentemente ancora una medeſima equazione integrale. Ecco perchè, ſe non vi aveſſimo avvertito, ſaremmo caduti in errore. Ma con qual arte ſcanſar potremo uno ſcoglio di tanto pericolo?

Num. 426. Comechè tutta queſta difficoltà conſiſte, non già per rapporto alle variabili del problema, le differenziali

ziali delle quali perſiſtendo nelle equazioni differenziali, anche nell'equazione integrale ſuſſiſtono, ma ſolo per occaſione delle coſtanti, le differenziali delle quali anientandoſi nell'equazione differenziale, non poſſono più per mezzo delle loro differenziali comparire nell'equazione integrale, quindi è, che a queſte le coſtanti, che ſono neceſſarie alla natura individuale del problema vengono a mancare. Il rimedio dunque per torre queſta difficoltà dipende da un vero metodo, che ci inſegni a riporre nelle equazioni finali quelle coſtanti, che la natura del dato problema vi richiede, e come che così verrà a compierſi la finale equazione, queſto metodo, la neceſſità del quale è ſtata da tutti conoſciuta, ed è ſtato inſegnato, ma ſe ſufficientemente io ne dubito, e ſuſſeguentemente lo eſaminerò. Queſto metodo dico, è ſtato nominato *il metodo di compier le integrali*.

Num. 427. Le coſe fin' ora eſpoſte ci fanno certi di due conſeguenze. La prima è, che un metodo di compier le integrali, il quale dalla medeſima equazione differenziale $dA = dB$ non poſſa mai farci avere, che la ſteſſa finale equazione $A = B - C$, e non già [quando occorra] altra equazione finale e diverſa $A = B - E$., non può eſſere ſufficiente. Le coſe dette al *Num.* 424. lo dimoſtrano, e i fatti regiſtrati antecedentemente lo confermano invincibilmente.

Num. 428. La ſeconda, che un metodo di compier le integrali, il quale non proceda dall' avere una preciſa attenzione alla natura, paſſioni, o condizioni individuali, ed eſſenziali, e non già generali, e comuni di quel problema ſopra cui cade il compimento, non può renderci ſicuri dall' errore. Il mancare la tale preciſa grandezza C nell' equazione integrale $A = B$. provenuta dalla differenziale $dA = dB$ non dipende da qualche generale condizione del problema, che l'ha prodotta, e comune ad altri problemi, dipende dalla preciſa individuale, ed eſſenziale natura del propoſto, coſa anch' eſſa, che dal predetto *Num.* 424. manifeſtamente deriva, giacchè la ſola forma dell' ottenuta equazione integrale, non può da per ſe, come lo abbiamo veduto ne' poſti eſempj, darci tanto che baſti a ſaper certamente qual ſia la coſtante che ſi ricerca.

Num. 429. Quanto poi al metodo di compier le integrali che a me fin' ora è avvenuto di veder preſcritto da' Maeſtri del

del Calcolo, egli è il ſeguente, o almeno parmi, che ſia ſecondo la più chiara intelligenza de' loro inſegnamenti. Nella trovata integrale in vece della variabile pongaſi il Zero: Se tutta l' integrale sì annulla, ella era compita, e niente altro occorre, ſe non ſi annulla ciò, che reſta dall' integrale, e ſarà tutto coſtante, come è viſibile, ſi aggiunga alla da prima trovata integrale, con un ſegno contrario, e queſto compoſto ſarà la cercata integrale compita.

Num. 430. Il fondamento di queſta regola pare a me, che lo ſtabiliſcano così. Qualunque differenziale di una ſola variabile può attamente concepirſi, che ſia il piccolo paralellogrammo elementare dell' area d' una curva.

Sia per eſempio la differenziale $dx \times \sqrt[n]{a+fx}^{r}$. Se $\sqrt[n]{a+fx}^{r}$ ſi concepiſca uguale ad un altra variabile y, onde la data differenziale equivaglia a ydx, queſto è l'elemento dell' area di quella curva la di cui natura ſorſe $y = \sqrt[n]{a+fx}^{r}$. Supponendo in appreſſo, che allor quando x è nel ſuo principiare ad eſſere, ella ſia Zero, ne argomentano, che anche lo ſpazio di queſta curva debba all' ora trovarſi nel ſuo principio, e per tal ragione eſſere anch' eſſo Zero. Conchiudono dunque dover ſuccedere, che quando x ſi ſupponga zero, la trovata integrale, che rappreſenta l' area della preſente curva, ſia anch' eſſa zero, e perciò quando la ſuppoſizione di $x = o$ non annienti per ſe la trovata integrale, doverſi allora annientare da noi, unendovi con ſegno contrario quello, che dalla ſteſſa integrale la ſuppoſizione di $x = o$ ci averà laſciato. Queſta a me par d' intendere, che ſia la ragione, e il fondamento della regola uſata di compier le integrali.

Num.

Num. 431. Di questo fondamento io ne piglierò quella parte, che a me pare essenziale per istabilirne un più vero metodo. Di questa parte m'ha paruto vederne un lampo nel Tomo II. dell' *Analyse demontreè* del dottissimo P. Reyneau, ma mi ha anche paruto sì debole, che abbia bisogno di sufficiente rischiaramento. Ogni problema variabile per esempio $ax = v$ ha l'essenzialissima condizione, che al variarsi in qualunque possibil modo una delle variabili x, debba sempre la variabile corrispondente v variarsi con tal legge, che fra' due membri ax, ed v serbisi immancabilmente uguaglianza. Produca per tanto l'equazione differenziale $a\,dx = a\,dv$ una supposta equazione integrale $ax + q = v$. Le cose che vengo di avvertire, mostrandoci non essere noi mai certi, che le due integrali prodotte dall' equazione differenziale sieno fra loro uguali, ci obbligano a non formare già senza esame un equazione colle due trovate integrali, ma bensì vogliono, che supposta aggiunta una quantità indeterminata q all'uno de' membri, assumiamo che questo composto faccia equazione coll'altro membro, laonde determinata poi essa q nel modo che mostrerò in appresso, abbiasi la vera equazione $ax + q = v$.

Num. 432. Per determinare dunque la q, mi faccio a considerare fralle condizioni del problema quella, per cui se una variabile x mi si renderà nota, la sua corrispondente v allora pure mi fusse nota. Avuta questa notizia, sostituite le quantità note in vece delle variabili, ho tutti e due i membri noti, a riserva di q, il quale allora mi viene determinato, trasportando il membro ax dall'altra parte. Rappresenti la posta equazione $ax + q = v$, l'area del parallelogrammo, e supposto x, ed $v = 0$ si scorge, che in questo caso l'equazione era compita, ma se rappresenti lo spazio logoritmico proposto al *Num.* 422. Fralle condizioni di quel problema trovasi, che quando x nella logoritmica sia $= 1$. (*Num.* 109.) allora l'ascissa di essa logoritmica è zero, e conseguentemente lo spazio v è zero. Fatte queste sostituzioni avremo la data equazione cangiata in $a + q = 0$, onde $q = -a$, che però la vera equazione finale di quel problema dovrà essere quale si disse $a \times \overline{x - 1} = v$, e nella quale equazione, essendo venuta la $-a$ dalla supposizione di $1(x) \times a$, ed essendo allora la $x = PS$, resta altresì chiaro, esser ella la $v = a \times \overline{x - PS}$., e questa è veramente equazione, ed in cui al mutarsi della variabile x, la corrispondente v si cambia colla necessaria legge di mantener sempre equazione. L' equazione $ax + q = v$ proposta al *Num.* 422. esprimente la natura di quel solido ivi proposto si determina avvertendo, che quando nel triangolo, che serve di base, sia $x = 1$., allora l'area triangolare è $\frac{1}{2a}$, nel supposto, che b sia $= 1$. Il paralellogrammo iperbolico poi, che scorre sulla base nel caso, che x, ordinata altresì dall'iperbola, possa supporsi $= 1$. è, come mostrerò [*Num.* 492.] $= aa$. Quando dunque nel presente problema, x sia $= 1$., si avrà il solido $v = \frac{a}{2}$. Fatte queste sostituzioni avremo $a + q = \frac{a}{2}$, laonde $q = -\frac{a}{2}$, dalle quali cose si ottiene la finale equazione di questo problema $a \times \overline{x - \frac{1}{2}} = v$. Abbiamo già spiegato nell' Appendice della Sezione terza della prima parte qual sia l'unità, che dee multiplicare la $\frac{a}{2}$. L' equazione $\frac{bx^2}{2a} + q = v$ esprimente il solido parabolico del *Num.* 423. si determina considerando, che al cominciarsi delle due parabole la x è zero, e così lo è il solido v, laonde fatte le sostituzioni avremo $0 + q = 0$, e per ciò q sarà zero, e la finale equazione di questo solido se ne rimarrà la

rà la sola $\frac{bx^{\frac{2}{2a}}}{} = v$. Determineremo finalmente le due equazioni del *Num.* 423. E quanto alla prima, che è

$$\frac{\overline{m+n} \times a}{2n+a}^{\frac{m}{m+n}} \times \overline{p+x}^{\frac{2m+n}{m+n}} + q = v,$$

osserveremo, che ove x sia zero, così dee essere anche v, e queste sostituzioni ci determinano $q = -\overline{m-n} \times \frac{a^{\frac{m}{m+n}}}{2n+m} \times p^{\frac{2n+m}{m+n}}$, come allora si disse. Quanto alla seconda, la manifesta condizione del problema è, che la trovata curva abbia la sottangente richiesta, nè in quella ricerca è veramente intervenuta veruna integrazione, onde per essa altro non accade.

Num. 433. Ecco dunque il fondamento dimostrativo, su cui dee stabilirsi il metodo di compir le integrali, ed ecco ne' pochi premessi esempj aggevolatane la pratica. Oltre l'essere evidente la certezza di questo metodo dalla sua medesima formazione, concorda egli pienamente co' due contrassegni de' *Numeri* 427, e 428. Per esso si lascia libero, che una medesima integrazione ci dia diverse equazioni finali, e procede dalla precisa attenzione alla natura, e condizioni individuali del Problema. Io certamente stò volentieri lontano dal far paragone fra le cose mie, e quelle degli altri, laonde, non già per un tale oggetto da me non atteso, nè giammai voluto, ma per pura ricerca della verità, non credo poter dispensarmi di far qualche parola sopra il metodo che è stato praticato, e che descrissi al *Numero* 429.

Num. 434. Discorda già quel metodo dalle due necessarie condizioni de' due citati numeri, onde con tutto il fondamento nasce subito diffidenza di sua giustezza. Ma entriamo nell'intimo del soggetto. Passi pure per ora, che qualunque differenziale, a norma dell'esposto al *Num.* 430., sia l'elemento dell'area di una curva, non è già per questo, che il proposto problema, in cui entra la relazione delle individuali sue proprie costanti, e che sono scomparite, debba perdere le sue condizioni essenziali, e determinate a tal relazione, e rimanersene con quelle sole, che sono ristrette nell'idea generale, e vaga di una curva, che non contiene in se niente di tale relazione, solo perchè per accidente, e per una quasi arbitraria, ed incompleta somiglianza da noi ravvisata, può dell'area di una curva alle predette relazioni, e per lo più non determinate, figurar l'elemento. Il metodo di compir le integrali, ed anche quello, che presentemente esamino, quando seriamente vi si rifletta, vuole, che indagate le due variabili corrispondenti divenute cognite in uno stato del problema, o della curva, se così piace, veggasi se vi è equazione, e non essendovi vi si compisca, il che fatto è per se stesso evidente, che variandosi quanto mai si vogliano le variabili, si manterrà equazione, e che tale equazione, così trovata è veramente quella che esprime il dato problema. Può egli mettersi in dubbio, che meno atta sia per questo intento una condizione creduta generale delle curve, ovvero le condizioni precise, ed individualmente fondate dello stesso problema? Ma vi è di più. Può darsi caso, e si dà frequentemente, ed accade quando le variabili sieno complesse, che queste differenziali rappresentano gli elementi di tronchi, o segmenti di aree, o di solidi, ed allora troppo è facile, che la regola, che esaminiamo ci man-

chi. Se la differenziale avesse $a - fx^{\frac{r}{n}}$, cioè la parte variabile col segno negativo, avremmo potuto cadere in errore se avessimo finto $x = o$, mentre allora, per l'ordinario bisogna supporre

porre $a - fx^{\frac{n}{p}} = 0$, il che meglio si intenderà più avanti.

Ma lasciate anche da parte queste non lievi difficoltà passiamo ad altro dubbio, e il fondamento di questo dubbio sarà l' argomento della seguente Appendice, cioè se l' ascissa dell' ideata curva possa indistintamente divenir zero, e se posto anche che lo possa, e che lo divenga, se allora la natura del suo relativo problema permetta, che l' area corrispondente della curva sia anch' essa zero. La necessaria pruova di questi due punti così essenziali manca nello stabilire quel metodo, nel quale come meri supposti si ammettono.

Num. 435. L' insussistenza di tali supposti si è andata tratto tratto mostrando anche a' dotti Maestri del Calcolo nell' usar di un tal metodo, ma non essendo stata da alcuni di loro ben ravvisata, ha prodotto non veri effetti. Vi sono delle differenziali, le quali avendo le loro variabili coll' esponente negativo, e maggiore dell' unità, hanno pure l' integrale loro, la di cui variabile rimane per necessità coll' esponente negativo, nel qual caso, se la differenziale era positiva, ne risulta un integrale negativa.

Pigli si la seconda iperbola FBH (*Fig. 6.*) espressa per $a^{3} = x^{2} y$, e cerchisi l' area $AFEDA = v$ di questa iperbola, sarà perciò $\frac{a^{3} dx}{x^{2}} = dv$, e l' equazione integrale $-\frac{a^{3}}{x} + q = v$. In proposito di questo problema, ed altri di simile condizione, la regola che esamino, ha ben prodotto dell' imbarazzo, e del non vero. Se a norma della medesima debbasi stabilire, che quando l' ascissa x nella sua origine è zero, anche zero abbia ad essere l' area v, verremo a determinare $q = \frac{a^{3}}{0} = \infty$, giacchè comunemente si tiene, che l' espressione di qualunque quantità finita, che abbia il zero per divisore, denoti l' infinito. Ho già replicatamente mostrato in queste Memorie, che denota errore nell' usare di un metodo, che non conviene. Nella seguente Appendice mostrerò, ponendone in chiaro il perchè, che ella non dinota altrimenti l' infinito. La regola dunque ci dà fin ora l' area cercata $v = \infty - \frac{a^{3}}{x}$. Questo valore di v non ha reso paghi, e con ragione, quelli, che lo hanno cercato, laonde hanno tentata un uscita alla difficoltà. Vedendo eglino, almeno nel presente caso, che l' integrale ottenuta è preceduta dal segno negativo, riflettendo alla regola generale del Calcolo, che prescrive doversi le quantità negative prendere dall' altra parte, hanno creduto di fondatamente procedere, insegnando che in questo, e simili casi, il Calcolo Integrale non ci somministri già il cercato spazio $AFEDA$, ma l' opposto, o rimanente spazio $DEQD$, il valore del quale, sappiamo, che è veramente il trovato $\frac{a^{3}}{x}$. Con questo riflesso hanno creduto poter fugire l' imbarazzo dell' infinito, e quasi ammettendo tacitamente un eccezione alla nota regola di compir le integrali, hanno preteso, o almeno usato, che le integrali di simil fatta, non abbiano bisogno di esser compite.

Num. 436. Veriſſimo egli è certamente, che le quantità, che hanno il segno negativo debbono prendersi dall' altra parte, ma

ma troppo a mio credere è lontano, che questa regola abbia qui luogo, oppure se ve lo ha, forza è di riconoscere tal riflessione inutile al preciso del presente argomento. Scostiamoci un poco dal problema nell' antecedente Numero proposto, e detto che AC sia $=$ alla costante p., il restante dell' ascissa, e cominciante in C, e proseguente verso I sia egli la x. Allora la medesima iperbola FBH sarà esposta per

$a^3 = \overline{p+x}^2 \times y$, e l' elemento $\frac{a^3 dx}{\overline{p+x}^2} = dv$ sarà l'

elemento dell' area di questa iperbola, che comincia full' ordinata CB. L' equazione integrale sarà $v =$

$\frac{-a^3}{p+x} + q$, e perchè qui, quando x è $= o$, così v è $= o$, ritrarremmo $q = \frac{a^3}{p}$. Eccoci dunque nel caso di un integrale negativa, sopra la quale potiamo toccar con mano, come coerentemente sussista, che tali integrali debbano prendersi dall' altra parte. Lo spazio designato da $\frac{a^3}{p}$ è tutto l' intero spazio $BQCB$ (suppongo Q all' estremo dell' assintoto AI). Lo spazio $\frac{a^3}{p+x}$ è tutto l' intero spazio $EDQE$, suppo-

sto che x sia $= cD$. Se vorremmo dire, che a cagione di avere quest' ultimo spazio il segno negativo, l' integrale, che ha tal accidente ci denota dover egli prendersi dall' altra parte dell' origine di x, con qual coerenza, e verità poi diremo, che l' espressione del primo spazio, la quale ha il segno positivo debba prendersi dalla parte contraria del secondo, quando anch' esso innegabilmente è quello, che è designato dalla medesima parte, e nella maniera stessa del primo cioè $CBQC$?

Num. 437. Non si ha dunque da dire nè l' uno, nè l' altro, ma lasciando qui per ora da parte l' indicazione de' segni, che qui, rispettivamente al determinare da qual parte si abbiano a prendere le quantità designate è inofficiosa, dee dirsi quello che è per verità, cioè, che lo spazio v, che ricercavasi è veramente la differenza $CBEDC$ fra gli due trovati spazj $\frac{a^3}{p}$, ed $\frac{a^3}{p+x}$, per la qual cosa è stato necessario, che questo secondo spazio, che è il minore ci compaja col segno negativo.

Num. 438. Ponghiamo ancora un altro fatto. Stando anche ora $AC = p$, vogliasi che x cominciante in C, in vece di progredire verso I, vada verso A. La natura di questa medesima iperbola FBH sarà $a^3 = \overline{p-x}^2 \times y$., e per questa equazione cercandosone l' area, si ottiene quella sola parte, che cominciante full' assintoto AI va all' ordinata per l' estremo della variabile x. L' equazione differenziale di questo spazio è

$dv =$

$d'v = \frac{-a^{\frac{3}{2}}\,dx}{p-x}$, a cagione che qui al crescere delle dy le dx decrescono, e l' integrale sarà $v = q = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{p-x}$, e perchè sembra, che quando x divenga $= p$, allora questo spazio debba esser nullo, troveremo con questa supposizione $q = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{0} = \infty$, laonde in questo caso sembra, che l' integrale col segno negativo ci dia un infinito, se vuol compirsi con quella regola medesima, colla quale nell' antecedente esempio compiendo un integrale similmente negativa, niente di infinito compariva. Non è dunque l' avere le integrali il loro esponente, o il loro coefficiente, o amendue negativi, che infetti questi calcoli coll' infinito. Questo accidente trae d'altronde sua origine, e d' onde, lo scopriremo in appresso.

Num. 439. In tanto, esposti questi pochi fatti, mostrerò colla ragione non avere in proposito delle integrali negative la regola de' segni quel luogo, che di sopra abbiamo esposto venir preteso. Determinano i segni la porzione della quantità, quando queste sono certamente intere, e compite, ma finchè sono tronche, e incomplete, non giungono i segni a fare veruna determinazione. Finghiamoci, che sia vera, e certa l' equazione $A = B - C$, ma non ne avendo noi cognizione immediata, ci venga da chi che sia esibita, il quale dicendoci non saper egli se, o siavi incuria di chi

di chi l' ha trascritta, o pure se siavi succeduta abrasione, o simile alterazione, ce la presentasse sotto la forma $A = -C$; ci asficurasse però essere cosa indubitata, che ciò che egli ci ha esibito, dovrebbe essere una vera equazione. In questo caso niun giudizio per certo noi azzarderemo circa la posizione della quantità C per riguardo alla posizione di A, benchè la vedessimo corredata di segni contrarj; ci asficureremmo prima, e cercheremmo ciò che manca; e trovato, che manchi B, compita all' ora l' equazione $A = B - C$, e supposto B maggiore di C, prenderemmo le quantità dalle parti loro convenevoli, e riconosceremmo, che se in questo frangente avessimo voluto dar retta al segno negativo, che precede la C, ci saremmo ingannati. Quello che fin' ora avrà paruto una capricciosa finzione è un fatto verissimo. Il Calcolo integrale è egli quello, che ci da le equazioni integrali, ma dalle sue mani escono deformate. Ci averte però sinceramente, che tali egli per lo più ce le dà, e che non può fare altrimenti. E' per tanto nostro obbligo, lasciata per un poco da parte la regola de' segni, di preparar prima il soggetto a ricevere le leggi di tali regole, indi addattarvele. Anzi essendo impossibile, che diasi mai una quantità positiva, che sia nello stesso genere uguale ad una quantità negativa, pare a me, che sempre quando il Calcolo Integrale ci somministra un equazione finale, in cui la differenziale integrata abbia un membro col segno negativo, e l' altro positivo, e sieno questi dello stesso genere, non possa mai esso Calcolo più chiara, e fedelmente avvertirci con un tal contrassegno, che l' equazione che somministraci, all' ora non è compita.

Num. 440. Qui per altro mi credo in obbligo di fare una distinzione. La quantità $-C$, la quale ora io suppongo esser quella, che ci proviene in un membro di un equazione integrale, può in due riguardi considerarsi. L' una è, se debba comporre l' equazione finale di un problema nel senso da me già esposto, e che dirò *per rapporto al problema*, e in questo riguardo io sono persuaso, che reggano le cose da me dette fin' ora in tale proposito. L' altro è, se essa $-C$ si consideri precisamente a se, e senza badare, che ella debba comporre detta equazione finale, ed io qui chiaramente mi spiego, che in tal riguar-

guardo, e che dirò *per rapporto alla propria forma*; io qui non la conſidero, nè ſono da applicarviſi le coſe dette, anzi non ho ſcrupolo a convenire, che potendoſi dare, che l' eſpreſſione $-C$ ſia compita *per rapporto alla propria forma*, allora ella potrà in queſto riguardo, prenderſi quale la vuole il ſegno che

accompagna. Così chi conſideraſſe la quantità $-\frac{a^3}{x}$

trovata nel *Num.* 435. *per rapporto alla propria forma*, potrà allora, e conſiderarla compita, giacchè in fatti ella veracemente eſprime lo ſpazio $DEQD$, e pretendere di doverla prendere dall' altra parte dell' origine dello ſpazio propoſto da ricercarſi, giacchè in fatti ſtà da tal parte. Ma ſe ſi pretendeſſe perciò di formare una regola, che ove il Calcolo Integrale ci dia delle eſpreſſioni negative della preſente forma, queſte abbiano a ravviſarſi per ciò per compite, e prenderſi dall' altra parte, mi pare, che una tal regola e mancaſſe di fondamento, ed uſciſſe fuori del retto propoſito di compir le integrali: Che ſe poi oltre a queſto ſi pretendeſſe, che l' equazione finale così ſuppoſta, ed ottenuta foſſe quella che ſoddisfaceſſe al propoſto problema, allora poi palpabilmente anderemmo ingannati.

Num. 441. In fatti, eſſendoci noi propoſti (*Num.* 435.) di ritrovare per mezzo del calcolo integrale lo ſpazio $v = AFEDA$; vorremo noi perſuaderci, che egli vi abbia compito dandoci in ſua vece l' altro ſpazio $EQDE$, sì viſibilmente dal richieſto diverſo, oppure faremo noi l' ingiuria al calcolo integrale, ſupponendo ſopra ſi fievole fondamento, che egli *non* vaglia a darci quanto gli addimandiamo? Può egli darcelo, ſol tanto che volghiamo l' occhio all' inſuſſiſtenza di quella regola, che a tale credenza, fors' anche

de' più valenti Maeſtri, aveva condotti. Non tutti però ſono ſtati di tale credenza. Il ſempre grande Bernoullio (*Mem. Accad.* 1730. *pag.* 114.) nella ricerca della Tautochrona incontrandoſi nell' eſpreſſione integrale

$-2g\int z^{-\frac{2}{n}}\,dz$ la riconoſce ſubito incompleta, e la compiſce. Vaglia per tanto l' auttorità di Uomo così ſublime a dare a quanto ho detto una valevoliſſima conferma.

Num. 442. A tutte le ragioni fin' ora addotte darà maggior lume il ſeguente rifleſſo. Il Calcolo Integrale ci da le ſue equazioni, o compite, o non compite. Compita è per eſempio quella dell' area della parabola $v = \frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}}{3}$ proveniente da $dv = dx\sqrt{ax}$. Per le non compite, ove la incognita, che ſi cerca ſia ella poſitiva, come forſe ſempre accade, egli ci da una parte di ciò, che adegua l' incognita, che è miſta di variabili, e la rimanente parte, che è tutta coſtante, vuole che ce la ſomminiſtri la regola di compir le integrali. Se egli ci da la parte a lui ſpettante con ſegno poſitivo, la regola ci da l' altra parte ad eſſa ſpettante, quando così lo richieda la natura del problema, con ſegno negativo, e vicendevolmente. Se il Calcolo dà la quantità poſitiva allora, nel caſo che ſia eccedente a quanto per verità dee eſſere, la regola ci ſomminiſtra queſto eccеſſo, e per ciò ce lo eſebiſce con ſegno negativo, affinchè lo difalchiamo. Se il Calcolo per l' oppoſto ci da la ſua quantità negativa, ci da allora quell' eccеſſo, che è nella quantità poſitiva, che data ci vie-

ne dalla regola, e dalla quale levar dobbiamo quell' eccesso, che con segno negativo, come rettamente si dee, ci è manifestato dal Calcolo. Posta la natura della parabola

la $\sqrt{\frac{}{a}} \times \sqrt{\overline{p+x}} = y$ [*Fig.* 1.] in cui $AC = p$; $CI = x$, ed $IL = y$, e vogliamo cercarsi l' area v di questa parabola, che non può essere se non dalla BC in avanti, avremo per equazione finale $v =$

$$2\sqrt{\frac{}{a}} \times \frac{\sqrt{\overline{p+x}}^{3}}{3}$$

, e posto $x = 0$, nel qual caso anche v è $= 0$, si ha l' equazione compita $v =$

$$2\sqrt{\frac{}{a}} \times \frac{\sqrt{\overline{p+x}}^{3} - p^{\frac{3}{2}}}{3}$$

. La quantità

$$2\sqrt{\frac{}{a}} \times \frac{\sqrt{\overline{p+x}}^{3}}{3}$$

dataci dal Calcolo era, come è visibile tutta l' area ALI, che nella ricerca del presente problema è eccedente per tutta l' area ACB, che nella posizione di questo problema non può aver luogo. Quest' area ACB, che è visibilmente $\frac{2p^{\frac{3}{2}}}{3}$, e che ci viene somministrata dalla regola con segno negativo, e quell' accesso, che

che noi dobbiamo defalcare da ciò che il calcolo ci diede eccedentemente con segno positivo. Per lo stesso modo, ma vicendevolmente, l' esempio del *Num.* 436., anch' esso beniffimo s' intende. Abbiamo ivi datoci dal Calcolo lo spazio $EDQE$ rappresentatoci $= \frac{a^{3}}{p+x}$. La regola ci da lo spazio $BQCB$, e sponendolo $= \frac{a^{3}}{p}$. Il proposto problema voleva lo spazio $CBEDC$. Lo spazio dunque datoci dalla regola è eccedente, e per appunto di quell' eccesso, che il Calcolo ci aveva somministrato, e per virtù de' segni ci aveva fatto conoscere, che egli doveva difalcarsi.

Sia pur anche l' equazione del triangolo $\frac{bx}{a} = y$, e l' altra della parabola $\sqrt{\frac{}{f}} \sqrt{\overline{p+x}} = y$. Sopra di questa parabola come base scorra detto triangolo (l' apice di questo dovrà coincidere in CB (*Fig.* 1.), e vogliasi il valore del solido generato da tali figure. L' equazione differenziale è

$$xb\sqrt{\frac{}{f}}\frac{dx\sqrt{\overline{p+x}}}{a} = dv$$

, e l' integrale

$$2b\sqrt{\frac{}{f}} \times \frac{\sqrt{\overline{p+x}}^{5}}{5a} - 2pb\sqrt{\frac{}{f}} \times \frac{\sqrt{\overline{p+x}}^{3}}{3a} + q = 0;$$

Sup-

e ſupponendo x, ed $v = o$ ſi determina q, e l' equa-

zione finale diviene $2b\sqrt{\frac{f}{5a}\times p+x}^{\frac{5}{2}} =$

$2bp\sqrt{\frac{f}{3a}\times p+x}^{\frac{3}{2}} + 4bp\sqrt{\frac{fp}{15a}} = v$. In queſta equa-

zione dimoſtrerò facilmente, che $2b\sqrt{\frac{f}{5a}\times p+x}^{\frac{5}{2}}$

è minore di $2pb\sqrt{\frac{f}{3a}\times p+x}^{\frac{3}{2}}$, imperocchè, ſuppo-

nendo, che x in qualunque ſtato di ſua variabilità ſia np, o certamente queſta ſuppoſizione è legitima, trasformeremo

le due quantità in $2b\sqrt{\frac{f}{5a}\times p^{3}\times n+1}^{\frac{5}{2}}$, e

$2b\sqrt{\frac{f}{3a}\times p^{3}\times npp}^{\frac{3}{2}}$, onde reſta evidente, che que-

ſta

ſta è minore dell' altra. Queſto propoſto ſolido dunque ci viene veramente dato dal Calcolo con una quantità negativa, e ciò non oſtante non ci luſinghiamo di averlo compito, nè pretendiamo fermarci a prenderlo dall' altra parte, ma lo compiamo, ed otteniamo il preciſo ſolido, che proponemmo di ritrovare.

Num. 443. Ecco dunque tutto il miſtero delle quantità ſomminiſtrate dal Calcolo con ſegno negativo. Ecco coſa indichi in eſſa queſto ſegno, coſa certamente diverſa molto da quello, che alcuni hanno creduto; nè ſolo diverſa, ma oppoſta, perchè ben lungi che per ciò tali quantità abbiano a conſiderarſi compite, quando che la incognita, che nel problema è propoſta da ricercarſi non ſia di ſua natura negativa, il più certo ſegno, che dall' iſpezione dell' integrale aver potiamo, che ella non ſia compita, ſi è il vederla da ſegno negativo preceduta.

Num. 444. Spiegato ora queſt' accidente delle quantità integrali negative per rapporto al non eſſere compite, come che eſſe ſono regolarmente quelle, che hanno la loro variabile coll' eſponente anch' eſſo negativo, laonde avendo eſſe neceſſità di eſſer compite, e volendoſi ciò ottenere col ſupporre, che nel principiarſi, dirò così, la variabilità delle variabili del problema, eſſe ſieno zero, la regola ci da quantità, che ſi giudicano infinite per compimento, è ormai tempo di farſi a ſnodar queſto gruppo, coſa che procurerò di fare ſecondo la mia debole cognizione nella ſeguente.

Appendice.

Nella quale, per occaſione delle preſenti Memorie, ſi tratta delle Quantità variabili, le quali decreſcendo al poſſibile vanno, o non vanno a terminare nel nulla, ed occaſionalmente pure ſi parla dell' Infinito, in riguardo al produrſi alle volte da tali Variabili, e trattaviſi pure degli Spazj iperbolici di ogni genere.

Num. 445. ENtro con timore a trattare le coſe, che formano queſto titolo. Troppo conoſco aſtruſo lo ſcrivere del nulla, e dell' infinito, paeſi amendue, che confinano con quello della quantità, e ne' quali trapaſſando ella (ſe pur veramente ella mai vi paſſa), vi patiſce naufragio. Non mi luſingo io dunque di cogliere affatto nel ſegno, e tanto meno poi mi do a credere di reſtarne in ſalvo da qualche contraddittore.

Altro per tanto io qui non ho in animo, che di azzardare alcune, almeno ragionevoli conghietture, le quali, quando da chi che ſia foſſero anche qualificate per ſemplici, e non ben fondate fantaſie, io però non me ne avrò punto a male, anzi (purchè ciò ſia ſenza offeſa della verità) conſerverò un ſinceriſſimo riconoſcimento a chiunque, col riſchiarare i miei abbagj, contribuirà a ſerbare illeſa, e chiara la di lei cognizione, purchè gli rieſca di accordare col linguaggio de' Matematici, le idee chiare, e certe, che noi abbiamo del nulla, e dell' infinito. Laſcierò bensì, che il tempo, efficace ſcopritore della verità, fondi egli il giudizio, che dee darſi.

Non intendo io qui di entrare nella famoſa queſtione delle quantità più che infinite. Venero quegli Uomini veramente Dottiſſimi, che ne hanno ſcritto, come pure que', che della natura dell' Infinito hanno ſottiliſſimamente, ed ammirabilmente trattato. Sono io lontaniſſimo dal rio prurito di contraddir loro, nè per altro motivo parlerò di tali coſe, ſe non che per la neceſſità, che pure mi ſi para avanti, e mi ſtringe, ſe moſtrar voglio, come mi ſi è offerto il doverlo, per qual modo, e certamente, e pienamente le equazioni, che dal Calcolo Integrale ci vengono offerte, debbano compirſi.

Num. 446. Se ſia ſtato univerſalmente creduto, che le Quantità variabili, decreſcendo al poſſibile, debbano allora terminare nel nulla, io non oſo affermarlo, non eſſendomi per altro avvenuto in chi tal coſa tratti di propoſito, e poſtoſi ad eſaminar daddovero queſto argomento, abbia data dimoſtrativa deciſione del sì, o del no. Ho bensì veduto frequentiſſimamente dottiſſimi Maeſtri ſupporre uguali al zero le quantità variabili, che ſono decreſciute al poſſibile, parendo in fatti, che niun dubbio abbiano avuto ſu queſto punto, e che qual principio per ſe baſtevolmente chiaro, abbiano univerſalmente creduto, che le Variabili decreſcendo, debbano finalmente annientarſi. Io pure, per uniformarmi alla maniera del loro linguaggio, in varie delle paſſate occaſioni così ho ſuppoſto, e qualche volta pure anderò ſupponendo. Imprendo dunque ad eſaminare tal coſa colla maggiore poſſibile brevità, e non già di propoſito, ma, come mi ſono ſpiegato, perchè avendo il Calcolo Integrale troppo biſogno, che queſto punto ſia riſchiarato, non poſſo io traſcurarlo.

Num. 447. E prima di avanzarmi debbo chiaramente ſpiegarmi non conſiderare io qui la grandezza, che va continuamente decreſcendo, come ſemplicemente grandezza, ma come una variabile componente un Problema, onde non parlo del decremento aſſoluto, che la quantità, conſiderata aſſolutamente, poteſſe fare, ma di quel decremento legato inſeparabilmente col decremento, o augmento della correſpondente variabile, e ſtando il qual legame, l' equazione, per cui la natura del Problema ſi eſprime, viene ſempre conſervata immutabile.

Num. 448. Che vi ſieno delle variabili, le quali decreſcendo vanno a terminare nel nulla, non può metterſi in

dubbio. In fatti ſuppongaſi (*Figura* 1.) la parabola *A L I*, e ſuppoſto, che *A I* ſia una coſtante $= b$, e che dal punto *I* cominci una variabile $I C = x$, e vogliaſi lo ſpazio *A C B* $= v$, l' aſciſſa *A C* di queſto ſpazio proverrà $b - x$, e lo ſpazio $v = 2\sqrt{p} \times \frac{b - x^{\frac{3}{2}}}{3}$, ſuppoſto che *p* ſia il parametro di eſſa. Qui è manifeſto, che ſe la $AC = b - x$ ſi chiami z, queſta variabile potrà divenir zero, e lo diverrà ſempre, quando x divenga $= b$. Nelle Differenziali di ſecondo ordine, e così pure in quelle di ordine più elevato, e queſte differenziali ſono eſſe pure variabili, ſuccede altresì, che decreſcendo alcune di loro, giungono al nulla. Ne ſono di ciò manifeſta prova le Teoriche de' *Maſſimi*, e de' *Minimi*, de i punti d' *inflеſſione*, e di *ritorno*. Altre occaſioni vi poſſono eſſere, in cui le variabili finiſcono in zero, ma ſiccome non è mio propoſito di qui rintracciarle, non ne fo maggior diſcorſo, baſtandomi d' aver fatto vedere eſſervi certamente delle variabili, che hanno un tal deſtino.

Num. 449. Solamente oſſerverò qui di paſſaggio, che le mentovate quantità, le quali decreſcendo ſi annientano, ſono la differenza di altre quantità, laonde a giuſtamente penſarvi, non già le quantità aſſolute eſſe ſono, che nulle divengano, ma la loro differenza, quantità impropriamente detta, o almeno di un ordine diverſo, e conſiſtente in una relazione.

Num. 450. Per lo contrario vi ſono delle quantità aſſolute, che quel deſtino non hanno. E perchè ciò ad alcuni ſembrerà nuovo, ſu di queſto conviene fermarſi. Sia una coſtante *b*, a queſta aggiungaſi una variabile *x*, e per le operazioni del Calcolo, o per altro verſo non ci reſti paleſe queſto compoſto, ma appariſcaſi tutta la $b + x$ ſotto la forma di una ſola variabile z. Si vede ſubito, che queſta z non potrà decreſcendo finire in zero, ma al più in *b*. Farò vedere in effetto queſto accidente, che forſe ſarà creduto una mia finzione, e moſtrerò aver egli tal forza, che delle variabili, le quali decreſcendo non ſi ravviſa, che niun impedimento, o ripugnanza per loro natura foſſero per

per avere di finire nel zero, per tale attinenza con un tale accidente perdon la libertà di finirvi.

Num. 451. Sia dunque fra le aſſintoti *A I*, *A i* (*Figura* 31.) l' iperbola Apolloniana *H L b* eſpreſſa per $aa = xy$. Sia l' ordinata *c n*, e condotta *n B* parallela alla *A i*, tutto lo ſpazio *A e n L H A* ſarà uguale al rettangolo *A n* + il trilineo *B n H B* Sia l' altra ordinata *c L*, ſarà ſimilmente lo ſpazio *A c L H A* = all' rettangolo *A L* + il trilineo *C L H C*, Sia finalmente l' ordinata *b N*, ſarà ſimilmente lo ſpazio *A b N H A* = uguale al rettangolo *A N* + il trilineo *E N H E*, e così ſarà ſempre. E' notorio, che i rettangoli *A n. A L. A N.* ſono ſempre fra loro uguali, e che tal coſa ſuccede ſempre, ſia breviſſima quanto mai ſi voglia l' aſciſſa *A b*. I trilinei poi eſſi bensì continuamente decreſcono, laonde ſi tocca di già con mano, che gli accennati ſpazj di queſta iperbola ſono compoſti di una quantità ſempre coſtante, ed è la podeſtà dell' iperbola, e di aſſoluta grandezza, a cui è aggiunta una quantità variabile, che ſono i ſuddetti trilinei, laonde ſe noi eſprimeſſimo tali ſpazj per la variabile v, e queſto è ciò, che veramente facciamo, allorchè integrando le equazioni differenziali procuriamo di avere le equazioni aſſolute, e così faremo in queſto individual caſo, ſe trovando dall' equazione $\frac{dx}{x} = dv$ l' equazione aſſoluta dello ſpazio di queſta iperbola $alxv$, deſignando per v il medeſimo cercato ſpazio, e non ben riflettendo alla natura, ed uffizio di queſto ſimbolo v, pretendeſſimo, che tale ſpazio, decreſcendo ſempre; diveniſſe finalmente zero, ſarebbe una noſtra mera finzione, e finzioni per ciò ſarebbero quelle conſeguenze, che neceſſarie veniſſero da un tale ſuppoſto.

Num. 452. In oltre l' aſciſſa medeſima di queſta iperbola neppur eſſa decreſcendo può giungere al nulla, e ciò perchè dee eſſere neceſſariamente attinente allo ſpazio v. In fatti decreſca pure la x quanto mai ſia poſſibile d' immaginare, applicato ad eſſa ſarà ſempre un rettangolo di aſſoluta, e determinata grandezza, cioè aa; rettangolo, che non

non può mai avere il zero per un ſuo lato, ancorchè ſi fingeſſe multiplicato per l' infinito. Poichè, conceſſo anch, benchè non ſia vero, e vi ripugni il ſentimento, e l' autorità de' più valenti, ed eſercitati Maeſtri in queſto Argomento (*), che il Nulla multiplicato per l' infinito faccia qualche coſa, non però mai farà coſa determinata, come è di biſogno nel noſtro caſo, e come già di ſopra l' ho avvertito.

Num. 453. Sieno fra le medeſime aſſintoti AI. Ai altre due iperbole ILg. GLi. Sia la natura della prima $a^3 = x^2 y$, e la natura della ſeconda $a^3 = x y^2$. Moſtrerò fra poco in grazia de' Principianti, che amendue queſte tali iperboli paſſano pel punto L, e delle loro affezioni avrò più particolare diſcorſo. L' iperbola ILg ha ſempre qualunque ſuo ſpazio $LAbMI$ contenuto dall' aſſintoto AI, e dalla qualunque ſua ordinata bM uguale all' rettangolo AM + il trilineo $LFMI$. Quanto al rettangolo AM, egli quanto più ſcema la Ab, tanto più creſce, imperocchè eſſendo ſempre qualunque $bM = y = \frac{a^3}{x}$, multiplcando queſta per $Ab = x$ diviene $AM = \frac{a^3}{x}$, laonde quanto più decre-ſce la x, tanto più creſce il rettangolo AM. Eccoci dunque un' altra maggiore impoſſibilita, che una variabile divenga zero, mentre ſe lo ſpazio iperbolico di queſta fatta veniſſe eſpoſto per v, che è uguale alla ſomma di una variabile, che ſempre creſce più m altra variabile, che ſempre decreſce, è certiſſimo, che egli non potrà mai divenir zero. Tanto meno la x potrà annientarſi.

Num. 454. L' altra iperbola poi, la di cui natura è $a^3 = x y^2$, avrà il ſuo rettangolo $AO = \sqrt{a^3 x}$, il quale anch' eſſo continuamente decreſce al decreſcere di x. In queſta iperbola dunque niuna ripugnanza finora ſembra, che ſi ravviſi, che lo ſpazio v rappreſentante lo ſpazio iperbolico, nè la variabile x divengan zero.

Num. 455. Dalle coſe premeſſe ſegue evidentemente, che le aſſintoti delle iperboli di qualunque genere $a^{m+n} = x^m y^n$. non ſono altrimenti infinite, imperocchè parlando prima delle aſſintoti di quelle iperboli, che hanno la dignità m non minore di n, ripugnando in eſſe, che x ſia giammai $= o$, non è poſſibile aver mai veruna y infinita, onde neppure l' aſſintoto maggiore AI. Per le iperboli poi, nelle quali n è maggiore di m, ſiccome tali iperbole hanno ſempre le loro aſſintoti Ag minori dell' aſſintoto, di cui abbiamo parlato ed hanno altresì l' altra aſſintoto $Ai =$ alla correſpondente AI, che abbiamo moſtrata finita, ella neceſſariamente, ed a più forte ragione è finita, e reſta chiaro, che amendu le aſſintoti di qualunque iperbola ſono finite.

Num. 456. Non diſimulerò già una forte difficoltà, che cui ben veggo poterſi fare. Che ſia innegabile, che l' aſciſſa x non poſſa, impicciolendoſi, giungere al zero, e che però non potendoſi mai nell' equazione $a^{m+n} = x^m y^n$. porſi il zero in vece di x^m, onde mai poſſa ottenerſi $\frac{a^{m+n}}{o} = y^n = \infty$, queſto conchiude, che le ordinate non poſſono eſſere infinite, ma non già le aſſintoti, le quali potrebbe ben negarſi, che ſieno ordinate. Anzi che ſieno infinite l' eſſer loro di aſſintoti ſembra, che neceſſariamente il richieda: e certamente eſſendo la nozione, che abbiamo dell' aſſintoto, che ella, benchè protratta all' infinito, non poſſa mai congiungerſi alla curva, che a lei ſempre maggiormente ſi accoſta, ſembra neceſſario, che ella poſſa, e debba ſtenderſi all' infinito.

Num. 457. Spero, che eſaminando queſta dificoltà ſi troverà inefficace, e che piuttoſto ſia per rilucerne lume maggiore per ben intendere quanto in queſta Appendice mi ſono propoſto d' inveſtigare. Ogni problema indeterminato comincia

* Memorie dell' Accademia Reale di Parigi all' Anno 1727. pag. 140. nell' Eſtratto dell' Opere di Monſ. de Fontanelle. *Une infinité de non etendus, ou de zero, ne donne rien.* All' Anno 1715. pag. 276. Monſ. de Varignon. *Comme ſi un infinit de rien pouvoint valoir quelque chose, penser? fauſſe.*

mincia la ſua variabile non già col zero, ma con una vera quantità eſiſtente. Diferirò a provare nel ſuſſeguente Numero, e confirmare più chiaramente queſte verità, giacchè fin qui poſſo diſpenſarmene. Eſſendo certo, che nelle iperboli, che ſono al caſo, la x non può mai eſſere zero, qui è di fatto, che la prima variabile di tale iperbola è la minima fra tutte le poſſibili nella ſua iperbola, la quale poi pe' continui accreſcimenti va formando le altre variabili l' una all' altra contigue. Queſta minima variabile è viſibilmente una differenza, non già però indiſtintamente qualunque, ma quella prima, per lo di cui accreſcimento le altre variabili ſi vanno facendo. Sia queſta minima variabile rappreſentata per $A\,b$, il rettangolo dunque $A\,N$ ſarà $= y\,dx$, ſuppoſto $b\,N = y$. A capo di queſto rettangolo ſulla $N\,E = dx$ ſembra, che ſtia il trilineo $A\,N\,H$, ma queſto per le comuni nozioni del Calcolo Differenziale (*Num.* 23, *e ſegg.*) ſi ſa già non eſſere, nè poter eſſere, mentre non potrebbe mai eſſer vero, che il detto rettangolo foſſe differenziale, cioè quel minimo ſpazio, ch' egli può eſſere, quando perſeverando la di lui conſiderazione ſi ammetteſſe l' eſiſtenza di altro ſpazio minore, qual ſarebbe il ſuppoſto trilineo. Se dunque nel caſo che $A\,N$ ſia il primo elemento dello ſpazio iperbolico non può eſſervi il trilineo $E\,N\,H$, reſta chiaro, che l' ordinata $b\,N$ è = all' aſſintoto $A\,H$ di queſta iperbola, la quale per ciò, come ſi era di già affermato, è finita. Di qui ne viene, che la notizia, che noi abbiamo delle aſſintoti, porta bensì, che con eſſe non poſſa la propria curva congiungerſi, ma nulla conchiude, che eſſe aſſintote e le branche della curva abbiano a ſtenderſi in infinito. Non potendo [come abbiamo notato nel Numero antecedente] la x divenir zero, è per ſe manifeſto, che nelle curve aſſintotiche non è mai poſſibile, che la curva colle proprie aſſintoti ſi congiunga, e queſto è tutto quello, che importa a mio credere l' Aſſintotiſmo. La cagione poi perchè tal concorſo s' impediſce parmi il non poterſi annullare la x, e non giammai l' Infinito, il quale perchè non poſſa eſſer traſcorſo dalle aſſintoti, le tenga ſeparate: Anzi pare a me vedere, e lo eſporrò a ſuo luogo, che ſe anche e la curva

curva, e l' aſſintoto correſſero nell' infinito, ciò non oſtante non ſi congiungerebbero: il che, ſe ſuſſiſterà, ſervirà a levare al miſtero dell' Aſſintotiſmo la ſua oſcurità.

Num. 458. Reſtami ora a far vedere ciò, che ho accennato nel Numero antecedente, cioè che le variabili di un problema cominciano non già dal zero, ma con una quantità realmente eſiſtente. In tanto è ſtato creduto, che le variabili naſcano dal zero, in quanto, come altre volte l' ho eſpreſſo, e qui per ajuto de' Principianti giova rammentarlo, incerti noi ſe il problema ſia, o no compiuto, poſſiamo aſſicurarcene ſoſtituendo quantità note in vece delle variabili; concioſſiachè fatta queſta ſoſtituzione viene pur noto ſe ſi conſervi equazione; e in queſto caſo l' integrazione era compiuta, e ſe non lo era, è noto altresì reſtarvi ciò, che aggiunger ſi dee per compimento. Figurandoci dunque noi, che le variabili cominciano tutte dal zero, onde che il zero, diremo così, ſia la variabile iniziale di tutte le coordinate, e immaginandoci queſto zero per una quantità cognita, ſoſtituendo queſto, ne ſcuopre l' uguaglianza, o inuguaglianza: e in queſto caſo la differenza fra due membri per levarla, e ci dà modo così di compier le integrali. Comodiſſimo è per verità queſto penſiere, ma a niuna ragione s' appoggia, e quello, che è peggio, alle volte o non ci ſerve, o ci conduce all' errore.

Che le Variabili de' Problemi non comincino dal zero pare a me manifeſto per la ragione ſeguente. Certo è, che ſe la variabile primitiva dee paſſar ad eſſere la ſua contigua, è neceſſario, che la primitiva non ſia mai minore della ſua differenza, e per la qual differenza ella diviene contigua. Imperocchè dovendo in queſto caſo la differenza eſſere la minima, che in tale conſiderazione dar ſi poſſa, la primitiva dovrà non eſſer minore della differenza, come ſi è detto. Or come mai potrà ſoddisfarſi a queſta neceſſità, quando una primitiva di un problema ſi voglia zero? E qual differenza le ſi può aggiungere, che ſia non maggiore del zero? Niſuna certamente. Or poſto ciò, per procedere avanti mi ſi permetta, che per chiarezza maggiore *delle*

re delle coſe faccia avvertire (coſa per altro manifeſta) che tre accidenti, o maniere hanno i problemi indeterminati. In alcuni le variabili correſpondenti vanno amendue concordemente creſcendo. Un eſempio di queſti lo abbiamo nella parabola $aa = yy$, in cui nel creſcere della x nella contigua $x + dx$ creſce altresì, benchè non ugualmente, la y nella $y + dy$. Queſta maniera di problemi la dirò di quelli, *ne' quali le Variabili ſtanno direttamente*. In altri al creſcere di una variabile la correſpondente decreſce. Così nell' iperbola $aa = xy$, al farſi la $x + dx$ ſi fa la corriſpondente $y - dy$. Queſti li nominerò di quelli, *ne' quali le Variabili ſtanno inverſamente*. La terza maniera è di quelli, che partecipano dell' uno, e dell' altro accidente. Così è nel circolo $2ax - xx = yy$, e in quante altre curve, che rientrano in loro, o ſi piegono, o ſi ripiegono. Di queſti dirò, che *le Variabili ſtanno meſcolatamente*.

Quella Variabile dunque, la quale in ogn' una delle tre eſpoſte maniere di problemi ſarà la prima, e che aumentandoſi, o decreſcendo fa, che nel problema vanno proſeguendo a generarſi le variabili correſpondenti, io la dirò la *Iniziale*. Se ſi daſſe caſo, che le variabili creſceſſero a tal termine, che più oltre o creſcere, o decreſcere nel problema non poteſſero, giunte a tal ſegno le dirò le *Finali*.

Quelle Iniziali per tanto, che appartengono alle coordinate de' problemi della prima maniera, io le nominerò *Minime*, e chieggo licenza per facilità del Calcolo di notarle col preſente carattere o. Quelle Iniziali poi, che ne' problemi della ſeconda maniera debbono decreſcere, io le nominerò *Maſſime*, e le noterò col carattere w.

Num. 459. E per procedere con ordine mi porrò prima ad eſaminare la natura delle Minime. Facilmente ſi riconoſce, che ove ſi tratti de' problemi della prima maniera, onde la comparazione ſi faccia da minima a minima, eſſe minime, o iniziali ſono ſempre tali, che nell' ordine per eſempio delle aſciſſe, niuna aſciſſa, e così nell' ordine delle ordinate, niuna ordinata di loro riſpettivamente minore può darſi nel dato problema. E certamente è chiariſſimo, che ſe le coordinate vanno ſempre creſcendo, la prima di tutte ſarà anche la minima nel ſuo ordine. Ma non ſolo eſſe Iniziali ſono le Minime nelle loro claſſi di aſſiſce, o di ordinate, amendue pure ſono fra di loro uguali: E certamente ſe l' iniziale, per eſempio, dell' aſſiſca foſſe minore dell' iniziale dell' ordinata, queſta non ſarebbe la minima quantità, che dar ſi poſſa in propoſito della ſua conſiderazione, e però è forza, che le due minime iniziali di un problema della prima maniera ſieno fra loro uguali. Conobbe queſta verità l' inſigne NeWton, e la dimoſtrò per altra maniera nel *Lemma* 7., e *ſuoi Corollarj de Metodo rationum primarum, & ultimarum* nell' aureo ſuo Libro *de' Principj Filoſofici*. Se a tal uno non ſoddisfaceſſe la ragione da me addotta, o piuttoſto la maniera, mentre tale ragione ritorna però in quella adoperata dal lodato Autore, e che io ho così adoperata in coerenza della theoria della natura delle Quantità differenziali da me in tutte queſte Memorie ſeguitata, potrà tenerſi quieto ſulla dimoſtrazione di quel chiariſſimo Matematico. Queſta uguaglianza però delle iniziali ſembra avere un' eccezione; e queſta s' incontra in que' Problemi, che eſſendo, o parendo della prima maniera ſono Logoritmici, o ne partecipano, ed in alcuni altri, che noterò a ſuo luogo.

Num. 460. Ogni Minima pertanto è una quantità, che, quanto alla miſura, adegua una differenza dx, o dy, o dv, benchè per natura non ſia una differenza, ma una primitiva, e quella, che adegua la minima fra tutte le differenze del problema: e queſto è tutto per ſe manifeſto. Le Minime però d' un Problema poſſono eſſere o maggiori o minori in qualunque aſſegnabil ragione delle minime di ogn' altro problema, e poſſono eſſer compleſſe; e in queſto ſtato paſſo a conſiderarle.

Num. 461. Sia dunque una iniziale multiplicata per una coſtante, onde ſi abbia per eſempio $a \times o$. Io dico, che queſta eſpreſſione non denota altro nel problema, che la di lui propria minima iniziale. Imperocchè adeguando, come abbiamo avvertito, la o la minima differenza della variabile ſarà dunque $a \times o$ eſprimibile, per eſempio, per $a\,dx$, ſuppoſto che la minima appartenga alla x, e corriſponderà alla nel

ra nel problema, in cui trovaraſſi, all' elemento iniziale del medeſimo, giacchè eſſendo compoſto con quella quantità, che adegua la minima dx, eſſa $a \times o$ non potrà non eſſere la minima fra tutti gli elementi di eſſo problema. Collo ſteſſo diſcorſo intendiamo, che $\frac{1}{a} \times o$ è anch' eſſo una minima, e però reſta paleſe, che le eſpreſſioni $a \times o$, $\frac{1}{a} \times o$ null'altro ſignificano nel problema, in cui s' imbattono, che o. Ho detto, che la o ſia multiplicata per una coſtante, imperocchè ſe foſſe multiplicata, o diviſa per una variabile, ne avremmo conchiuſo fuor di propoſito. Da ciò, che ho premeſſo, ne traluce il perchè, ma diferirò a riſchiararlo affatto al Numero 478. Che ſe s' incontri $+ a + o$, e qui intendo, che il Segno $+$ ſignifichi ancora $-$, io dico, che queſta eſpreſſione non dà altro nel proprio problema fuorchè a. Sia una curva ACB (*Fig. I.*), e ſia $AC = a$, a queſta proſeguiſca $Cc = x$, la iniziale $AC + CI = a + o$ è certamente la contigua di AC, cioè della coſtante a. Ma la variabile contigua di a è $a + da = a + o = a$: Dunque è manifeſto, che $+ a + o$ nient' altro ſignifica, che a. La forma $\overbrace{+ a + f}^{r} o$ altro anch' eſſa non ſignifica, che a^r. Abbiamo già veduto, che $f\, o$ altro non è, che o, onde la propoſta forma non è, che $\overbrace{+ a + o}^{r} = \overbrace{+ a + da}^{r} = a^r$.

Num. 462. Preparate queſte notizie paſſerò a far vedere non averſi alcun biſogno di ſupporre, che le variabili de i problemi della prima maniera naſcano dal zero, e che ſenza queſto ſuppoſto poſſono beniſſimo queſti problemi renderſi, quando occorra, compiti. E' vero, che io ho in addietro adoperato tale ſuppoſto, ma come fare altrimenti, ſe io voleva eſſere inteſo? Qui dunque farò in oltre vedere, che ſe la ſuppoſizione del zero ha in molte occaſioni compite a dovere le integrali, non lo ha fatto per propria virtù, nè perchè di ſua natura ſia ſufficiente, ma per un mero accidente, che ſcoprirò,

Siami

Num. 463. Siaci dunque data dal Calcolo Integrale l'equazione $ax + q = v$, proveniente dall' equazione differenziale $a\,dx = dv$, e ſia queſta l' equazione del paralellogrammo. Vedendo dalla natura del problema, ch' egli è della prima maniera, onde tanto v, quanto x ſono minime, quell' equazione ſi cambia in $o = a\,o + q = o + q$, cioè traſportando $o = -o + o + q$, onde $q = o$, giacchè q per l' aumento, o ſcemamento di o reſta ſempre la ſola q, onde tal' equazione era compiuta. La trovammo pure compita al *Num.* 432., ſupponendo x, ed $v = o$, ma queſto inſuſſiſtente ſuppoſto non ci diede egli già queſta vera conſeguenza: Ce la diede l' accidente, per cui comparendoci per la ſoſtituzione del zero la $x =$ alla v, veniva ad annientarſi q. Lo ſteſſo ſucceſſe al *Numero* 432. dell' equazione $v = m + n \times a^{\frac{m}{m+n}} \times p^{\frac{2n+m}{n+m}} + x \pm q$., nella quale ſuppoſto x, ed $v = o$, ne ricavammo q per compir l' integrale $= -m - n \times a^{\frac{m}{m+n}} \times p^{\frac{2n+m}{n+m}}$. Queſto ſteſſo ſi ottiene colle minime, mentre la data equazione diviene $o = m + n \times a^{\frac{m}{m+n}} \times p^{\frac{2n+m}{n+m}} + q$, e traſportando $q - o\,(q) = -m - n \times a^{\frac{m}{2n+m}} \times p^{\frac{2n+m}{n+m}}$, quale allora fu ritrovato, ma per accidente, mentre il ſupdoſto zero

venne a cagionare quegli effetti, che mantengono quella vera equazione, la quale dalle differenze viene per propria natura prodotta. Se per tanto ne' problemi, che ſono della prima maniera, vuole adoperarſi il zero in vece delle minime, e ſtarſene alla pratica già invalſa, potrà farſi, perchè gli ſteſſi effetti ſi ottengono; nè io qui ho avuto in animo d' innovare, ma ſolo di ſcoprire quell' equivoco, che non diſcoperto chiudevami la ſtrada a coſe di maggior importanza.

Num. 464. Ma quando i problemi, benchè ſieno, o più toſto appajano della prima fatta, ſieno logoritmici, o vi appartenghino, non ſerve la ſuppoſizione del zero, e manca la teoria delle minime. Se l' equazione $a\,x + q = v$ in vece di appartenere al parallelogrammo ſpetti allo ſpazio logoritmico, benchè tale problema abbia le ſue variabili x, ed v, che vanno direttamente creſcendo, non è però, che le ſue minime ſieno uguali, anzi la minima di v è zero, e quella di x è 1, come lo ſpiegai al *Num.* 432. E' però oſſervabile, che la natura della logoritmica pone un limite al creſcere di queſte variabili, il quale non è poſto ne' problemi della prima maniera, onde i logoritmici propriamente non ſono di queſta fatta, giacchè in queſti nulla impediſce, che le variabili comincino minime, ed uguali; coſa che la logoritmica manifeſtamente impediſce ne' ſuoi. Da queſta vera conſiderazione due conſeguenze ne vengono: l' una di fatto, che in queſta maniera di problemi logoritmici a nulla poſſa ſervire la ſuppoſizione del zero; e l' altra, che parmi certa, che ſe a queſti problemi non ſerve la teoria delle minime, non però ella ne patiſce veruna eccezione, giacchè tali problemi non ſono di quelli, a' quali conviene. Corre a mio credere in eſſi analogamente quello, che corre nelle integrazioni logoritmiche, le quali ottener non ſi poſſono, che col metodo loro conveniente, onde ſimilmente compir non ſi poſſono che con que' mezzi, che loro convengono, e che ſono diverſi da quello delle minime. Le medeſime coſe ſono da dirſi in propoſito di compiere la medeſima equazione $a\,x + q = v$ quando eſprime il ſolido propoſto al *Num.* 422., e nella quale equazione l' iperbola, che vi concorre, pone anch' eſſa una limitazione al creſcere delle coordinate.

Che ſe

Num. 465. Che ſe per compiere le equazioni de' problemi, che ſono veramente della prima maniera, non v' ha biſogno di ſuppoſrre, che le variabili comincino dal zero, nè pure v' ha fondamento per un tale ſuppoſto. Oltre a quello, che ho detto al *Num.* 458 pare a me, che biſogni forzar di troppo la noſtra mente a concepire, che un problema ſia indeterminato, e che nello ſteſſo tempo non abbia variabili, e certamente ſe le due ſue variabili ſono zero: queſto vuol dire, che eſſe non ſieno. Ciò dunque che reſta di un problema, dopochè le ſue variabili ſono finte zero, e determinata q, potrà ben parerci un equazione, ma non già il dato problema. Come potrà dunque queſta equazione paſſare ad eſſere il problema, ricevendo di mano in mano le variabili contigue, ſe variabili primitive non aveva? Io ſono perſuaſo, che chi vorrà ſeriamente riflettere a queſte verità, reſterà da ſe ſteſſo convinto, che niun fondamento non ſolo non vi è per finger zero le variabili iniziali, ma che queſta finzione ripugna ancora alle noſtre idee più chiare; e vedendo, che conformandoſi a queſte noſtre idee, può ſenza la finzione del zero ottenerſi beniſſimo di compier le integrali; tanto più reſterà perſuaſo, che le iniziali de' problemi, de' quali qui parlo, cominciano da una quantità realmente eſiſtente.

Che ſe nel caſo dello ſpazio logoritmico abbiamo incontrata una iniziale v, che è veramente zero, queſto nulla toglie di verità a quanto ho detto, perchè non ſolo queſto è un problema di maniera diverſa da quelli, de' quali ho parlato, ma ſi vede ancora la cagione, per cui quella, che ſi crede la ſua iniziale, dee eſſer zero; e la qual cagione è troppo diverſa da quella, che lo impediſce negli altri. Lo ſpazio logoritmico, che (*Fig.* 7.) s' intende cominciare in $A\,B$, e proſeguire verſo Q, è propriamente lo ſpazio di tutta la logoritmica diſteſa ancora verſo P; giacchè l' elemento dello ſpazio, che ſi cerca col Calcolo Differenziale, è generalmente non di un ſolo tronco, ma di amendue della logoritmica intera; e da tutto queſto ſpazio eſteſo, e dalla parte di P, e da quella di Q vien levato tutto lo ſpazio, che cominciando da $A\,B$ va verſo P; e ciò ſi fa pigliando l' e-

lemento

lemento positivo. Quindi è, che levando con questo dallo spazio verso *P*, giunto fino in *AB*, il medesimo per designar quello, che dalla stessa *AB* vuol cominciare per iscorrere verso *Q*, necessariamente ci resta zero. L' iniziale dunque *AB* non è propriamente la minima, e la *v* non è propriamente la iniziale. Tutte queste cose accadono per la necessità di considerare la logoritmica divisa sempre in due tronchi connessi assieme, affine di ottenere i vantaggi del Calcolo logoritmico, come spiegai nel *Capo III.* della *Sezione III. della prima Parte di queste mie Memorie*, e però troppo sono palesi le diversità essenziali, che accadono in questo problema, per riconoscere, che il darsi in esso una, che veracemente non è iniziale, che sia zero, non può fare una fondata eccezione a quanto ho detto.

Num. 466. Prima di porre da parte i Problemi, ne' quali le variabili stanno direttamente, mi si permetta di fermarmi alcun poco a considerare le medesime variabili cresciute che sieno, e vedere, dirò così, quest' altra loro estremità. Possono eleno in questa maniera di problemi avere un limite, oltre al quale crescere non possono. Nè parlo io già di quel limite, che proverrebbe, se l' ascissa, per esempio, *x* fosse la differenza fra una costante, ed una variabile, essendo posta quest' ultima negativamente, qual sarebbe $a - x$, o altra simile limitazione. Parlo di un limite più amplo, e necessario. E' questo, se le variabili, che consideriamo, possono oltreppassare il finito. Arduissima disquisizione è questa, e nella quale replicatamente lo protesto, non ho in mente, che di azzardare qualche mia fantasia, e questa ancora restringerla precisamante alle variabili de' problemi di questa maniera, mentre nè in altro soggetto, e tanto meno ove la grandezza si consideri nella sua assoluta idea, io non me ne fo argomento di disquisizione. Ne' posti termini addunque io sono persuaso, che le variabili non possono uscire dal finito, ed eccone i miei motivi.

Num. 467. Per istenderli con ordine io debbo distinguere due forme, che ha il problema, nel quale le variabili stanno direttamente. Una è quando le ascisse si mantengono sempre maggiori delle ordinate, onde la curva, che lo rappresenta è concava dalla parte delle ascisse. La seconda è allora, che le ascisse si mantengono sempre minori, e così la curva dalla parte di esse scorre convessa. Nel primo caso, giacchè le ordinate iniziali qui sono sempre uguali, le susseguenti differenze delle ascisse sono visibilmente sempre maggiori delle differenze delle ordinate; imperocchè se dopo qualche corso quelle cominciassero a divenire minori, o anche a restarsene correspondentemente uguali, scambiandosi allora la curvatura della curva, il problema non sarebbe più qual si è posto, ma di quelli, ne' quali le variabili stanno mescolatamente. Lo stesso discorso cammina in proposito della seconda forma, e conchiude, che allora le ascisse si dovranno mantenere sempre minori delle ordinate, e così le loro differenze. Vi ha il caso, ed è quello, che chiamasi alla linea retta, ed in esso è manifesto, che quale l' ascisa si trova o maggiore, o minore, od uguale all' ordinata, tale pure proseguisce, e così proseguiscon le loro corrispondenti differenze. Di questo caso ne parlerò in appresso.

Num. 468. Ma le differenze delle ascisse, per esempio, nel primo caso, e così dovrà rispettivamente discorrersi nel secondo, non solo sono sempre maggiori delle corrispondenti differenze delle ordinate, sono anche sempre in maggior ragione maggiori. Se per esempio nell' ascissa la differenza contigua della iniziale fosse dieci parti, e nove ne fosse nell' ordinata, la differenza pure contigua dell' iniziale; indi nell' ascissa l' altra differenza contigua fosse ancor essa intesa divisa nelle sue dieci parti, la correspondente nell' ordinata sarà minore di nove di queste parti, altrimenti, se ciò non fosse, non avrebbesi curvatura.

Num. 468. Premesse queste cose, è d' uopo mostrare il seguente

LEMMA.

Sia la serie $A \ldots \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \&c.$, che sia la somma di quante frazioni si vogliano minori cadauna di loro dell' unità.

Sia

Sia l' altra ſerie $B \ldots\ \frac{1}{a} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{b} + \&c.$ che anch' eſſa ſia una ſimil ſomma di altrettante frazioni. Le due prime frazioni di amendue le ſerie ſieno la medeſima $\frac{1}{a}$

Tutte le altre frazioni poi della prima A ſieno non ſolo correſpondentemente maggiori delle frazioni della B, cioè $\frac{1}{b}$ maggiore di $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{c}$ maggiore di $\frac{1}{g}$, e così di ſeguito, ma ſia in oltre la loro differenza ſempre, e di mano in mano maggiore della differenza ſuſſeguente, cioè $\frac{1}{b} - \frac{1}{f}$ ſia maggiore di $\frac{1}{c} - \frac{1}{g}$, e così ſuſſeguentemente. Dico, che ſe le due ſerie $A.B$ ſi continueranno ſempre con tal legge, e tanto, che baſti, ſi giungerà finalmente ad ottenere, che la prima ſerie A, meno l' ultimo ſuo termine $\frac{1}{d}$, ſarà maggiore della ſeconda ſerie B, in cui vi ſia il ſuo termine $\frac{1}{b}$ corriſpondente all' ultimo $\frac{1}{d}$, che ſi vuol levato nella A.

Sia la ſomma di A meno il termine $\frac{1}{d} = x$, e quella di B, da cui ſia ſimilmente levato il termine corriſpondente $\frac{1}{b}$, $= y$. La ſomma delle differenze fra le grandezze corriſpondenti, cioè delle differenze $\frac{1}{b} - \frac{1}{f}$. $\frac{1}{c} - \frac{1}{g}$ &c. ſi dica z, ſarà $x + z = y$., e perchè la ſomma z eſprime una ſerie di quantità minori tutte bensì dell' unità, ma eſſa ſomma però ſempre più all' unità ſi accoſta, e può anche oltreppaſſarla, e per lo contrario la $\frac{1}{b}$ è una grandezza, che è minore dell' unità, e che in oltre da eſſa unità ſempre decreſcendo, di eſſa unità ſempre più ſi fa minore; è viſibile, che z arriverà finalmente ad eſſer maggiore di $\frac{1}{b}$.

Dunque poſta queſta $\frac{1}{b}$ in vece di z, avremo $x + \frac{1}{b}$ $(\frac{1}{a} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{b})$, che è tutta la ſerie B col ſuo termine $\frac{1}{b}$, minore di $y\ (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$, che è tutta la ſerie A ſcemata del ſuo ultimo termine $\frac{1}{d}$, come ſi era propoſto di dimoſtrare.

Num. 470. Le due ſerie A B del premeſſo Lemma ſono viſibilmente, e con tutta generalità le due coordinate del problema, in cui le ordinate ſtanno direttamente. Oſſerviamo dunque, ſe fia poſſibile, che paſſino nell' infinito. Eſſendo chiaramente certo, che una variabile, la quale dal finito debba paſſare nell' infinito, altro fondo non ha per riuſcirvi, che una delle proprie differenze; onde ſuppoſta x quella variabile finita, che s' immagini giunta al ſegno, in cui la ſua contigua abbia ad eſſere infinita, ella non potrà divenirla, che per l' addizione della ſua differenza. Eſſendoſi dunque nella preſente ſuppoſizione protratto quanto è poſſibile le due notate ſerie A B, immagini delle coordinate del problema, ſi avrà già ottenuto, che la variabile rappreſentata per A, meno la ſua ultima $\frac{1}{d}$, e che in queſto ſtato è variabile primitiva, fia divenuta maggiore della variabile rappreſentata per B, che abbia il ſuo ultimo $\frac{1}{b}$, e che è la variabile contigua della ſua primitiva

antecedente. E giacchè quella variabile primitiva $A = \frac{x}{d}$ eta per anche finita, così questa variabile contigua B di lei minore, sarà necessariamente finita. Ponghiamo ora, che quella variabile primitiva $A - \frac{x}{d}$ ricevendo la sua differenza $\frac{x}{d}$ divenga, e la sua variabile contigua, corrispondente alla predetta contigua B, e nello stesso tempo infinita. Condizione essenziale del problema si è, e l' ho replicato più volte, che sostituite in esso queste due variabili contigue si mantenga equazione. Ora è egli giammai possibile, che stando in un problema una quantità A, che si pretende infinita, e nell' altro membro alcuna altra B, che non può essere infinita, giacchè dimostrata minore della finita $A - \frac{x}{d}$, si mantenga allora equazione? Se ciò è impossibile, impossibile è ancora, che le variabili in questa maniera di problemi passino nell' infinito.

Num. 471. Una eccezione di fatto sembra, che abbia la generalità di questa conchiusione. Se diasi un Triangolo isocele ortogonio DCA (*Fig.* 30.), e sieno le coordinate di esso i due lati uguali DC (x) CA (y), che stanno intorno all' angolo retto, il problema, che espone la natura di questo luogo non si ravvisa già soggetto alla sovrastesa conchiusione, perchè restando qui sempre le due variabili corrispondenti uguali fra di loro, al giungere una ad essere infinita, l' altra pure vi giunge nello stesso tempo, e serbasi l' equazione del problema, senza che assurdo veruno ci dia impaccio. Mostrerò l' ineffiacia di questa eccezione, e che neppure queste coordinate possono godere la pretesa prerogativa. Posta vera l' equazione esprimente quel luogo, e che sarebbe $ax = ay$ è necessario, benchè non vi si ponga mente, come avvertirò più avanti, che sia parimenti vera l' anologia $\sqrt{2aa} . a :: \sqrt{xx + yy} . x$ onde che sia vera l' equazione $x \sqrt{2} = \sqrt{xx + yy}$. Questa $\sqrt{xx + yy}$ è visibilmente l' ipotenusa DA del triangolo, che è il luogo del dato problema: ed ecco come concorda ancor questo caso alla posta conchiusione. Non potrà mai la x (DC) divenire infinita, se prima non lo divenga l' ipotenusa DA, e al divenirlo questa, l' equazione mancherà, e toccherassi allora con mano l' equivoco, che stava nascosto. Che poi sia necessario, che sia vera la posta anologia, egli si fa manifesto osservando, che la proposta equazione $ax = ay$, che non è che $x = y$, non è già, quanto a se, e considerata sciuttamente, un' equazione continente un problema, ma una esposizione identica, e sterile di scientifica ricerca, non denotando altro, quanto a se, se non che si ripigli la stessa grandezza, lo che può convenire a ripigliare non solo l' infinito, ma il nulla. Ma quando vogliasi, che significhi utilmente di più, onde che le variabili soddisfacenti al problema debbano prendesi uguali, allora è d' uopo, che abbiasi il vero luogo, e questo è la presente ipotenusa, posta la quale, necessarie pur sono tutte le non assurde conseguenze di sua esistenza.

Num. 472. La stessissima ripugnanza, che le coordinate passino nell' infinito si scorge pure in quella parte a ciò atta de' problemi, le variabili delle quali stanno mescolatamente; imperocchè dovendo alcune di queste, se passar pur vogliono nell' infinito, ridursi finalmente in un andamento di variabili, che stieno direttamente, siegue di queste ciò, che del problema di questa maniera si è stabilito.

Num 433. Passiamo ora ad esaminare i Problemi, ne' quali le variabili stanno inversamente. Egli è senz' altro visibile, che in questi problemi alla minima variabile sua iniziale x, per esempio, corrisponde una variabile y, che è la massima fra tutte quante le variabili, che nella classe delle y possa essere, mentre non potendo più decrescere la x, forza è, che neppure la y, alla quale allora mancherebbe la correspondente variabile, possa crescere. Nè siegue già da ciò, che questa massima debba essere la

massima fra tutte le grandezze, che sieno entro la sterminata vastità del possibile, questa conseguenza non esce dalla posta idea di questa variabile, solo uscendone legittimamente, che ella è la maggiore fra tutte quelle, che nel suo problema hanno luogo, la onde una massima di un problema può, rispetto alla massima di un altro, essere molto picciola. Questa massima l' ho già contrassegnata col carattere $\mathcal{M}$, e l' ho per distinguerla nominata *Finale*.

Num. 474. E quanto all' Algoritmo di queste massime, cioè agli effetti, che soggettandole al Calcolo esse producono, ad esse conviene non altro algoritmo di quello, che al le quantità meramente assolute conviene, ed altro di particolare non hanno, se non che di essere quella più grande variabile, che nel suo ordine il problema ammetter possa.

Num. 475. La Massima compiessa $a\,\mathcal{M}$ è la massima medesima, la di cui quantità assoluta è da rintracciarsi per le condizioni del problema, è multiplicata per a, e così dee dirsi della $\frac{\mathcal{M}}{a}$.

Num. 476. La $+a+f\mathcal{M}$ (e qui $+$ significa anche $-$) è la medesima quantità assoluta, in cui in vece di $\mathcal{M}$ dovrà porsi la massima ritrovata in quantità assolute, mediante le condizioni del problema.

Num. 477. Per le due seguenti espressioni, per le quali non mi si era per anche aperto il luogo bastevolmente per farne parola, vi ha qualche differenza, ma però apparente. Qualunque quantità costante a divisa per una 0, altro non significa, che la massima sua corrispondente, cioè $\frac{a}{0} = \mathcal{M}$, e certamente siccome il maggior quoziente, che aver si possa dalla divisione di una quantità costante per una variabile, egli è quando questa non può più impiccolire; ed il maggior quoziente, che possa aversi, è il massimo fra tutti, è evidente, che si denota attamente questo massimo quoziente $\mathcal{M}$ in questa considerazione per $\frac{a}{0}$. Vicendevolmente altresì qualunque costante a divisa per una massima al-

ma altro non significa, che la minima sua corrispondente $\frac{a}{\mathcal{M}} = 0$., come è manifesto per lo stesso discorso. Se il divisore nel primo caso fosse stato il vero Nulla, v' ha ben ragion di pensare, che il quoziente dovesse disegnar l' infinito, e se questo fosse egli il divisore, dovesse mostrarci il nulla per quoziente. Mi ha paruto necessario sceverare queste idee tanto prossime, e tanto diverse, e che producono poi conseguenze a troppo maggior ragione differenti. Così ridotto l' infinito, quanto al comparirci nel Calcolo, alla sua vera origine, che è una divisione fatta di una quantità assoluta pel vero nulla, non uscirà l' infinito a pretendere ultroneamente, nè a farci credere, che egli sia, ove non è, o non può essere.

Num. 478. Tanto in riguardo delle minime, che delle massime in questo loro algoritmo si è sempre considerato, che le quantità con esse composte sieno costanti, e non già variabili, e si è accennato (*Num.* 461.) Che se si riferissero a quantità in tale occasione considerate variabili, ne verrebbero conchiusioni fuor di proposito, e senz' uso. Ne darò ora la ragione. Le idee di queste massime, e minime sono nate, e sussistono solamente in grazia di compiere quelle equazioni finali, che il Calcolo Integrale non può darci compite, per lo svanire, che nel Calcolo Differenziale, il quale lo ha preceduto, fanno le costanti. In questi problemi finali, come considerandoli è chiaro, sta in un membro una sola delle variabili, o vi si lascia sola, finchè sia il problema reso compiuto, e nell' altro l' altra sola corrispondente variabile, ne stanno esse giammai tutte e due mescolate in un sol membro. Le massime, e le minime poi debbono sostituirsi (quando pel loro mezzo si voglia compire il problema) in luogo cadauna di loro dell' omologa loro variabile, dunque non possono aver luogo nel problema mescolate con altre variabili. Quindi l' idea loro non richiede il riferirle a variabili, ma alle sole costanti, colle quali solo accadde, che debbano risultare composte, onde riferendole, se pur dassero qualche conchiusione, questa sarebbe sempre fuor di proposito, e nel nostro caso senz' uso.

Stimo

Num. 479. Stimo bene per comodo di chi vorrà valersi di queſte mie fantaſie por' qui aſſieme in riſtretto l'algoritmo di queſte minime, o maſſime.

E per le minime $o = o$ [*Num.* 459.] $+ a \times o$, $o + \frac{o}{a^r} = o$ (*Num.* 451.) $+ a + f\, o = a^r$ [*Num.* 461.]

Per le maſſime debbe ſoſtituirſi in luogo della maſſima la quantità aſſoluta, che dalle condizioni del problema ci viene manifeſtata. [*Num.* 575., e 476.]

Per le maſſime, e minime $\frac{a}{o} = \infty$ $\frac{a}{\infty} = o$ (*Num.* 477.)

Num. 480. Che le Maſſime poi de i problemi non ſieno infinite, e conſeguentemente che ne' problemi *indeterminati*, ne' quali le variabili ſtanno inverſamente, non poſſa veruna delle ſue variabili divenire infinita, a me ſembra coſa certiſſima. Imperocchè rendendo qui generale il diſcorſo tenuto al *Num.* 455. in propoſito delle aſſintoti iperboliche, come che in un problema indeterminato vi hanno luogo effettivamente tutte le variabili poſſibili correſpondenti, onde in queſto vi debbono aver luogo effettivamente e la minima, e la maſſima ſua correſpondente dovrà in eſſo ſtarci da una banda una quantità finita, che è la minima (*Num.* 459.) e nell' altro membro una quantità infinita, quale ſi ſuppone la maſſima. E giacchè queſti due membri in queſto caſo non poſſono eſſere uguali, perchè anzi maggiore diſuguaglianza dar non ſi può, che fra l' infinito, e il finito, avremo un problema determinato, e tali ſaranno tutti quelli della propoſta maniera, in cui farà equazione (e queſto è neceſſario, perchè ſia un problema), e non farà equazione [e lo impediſce l' infinito] : Aſſurdo, che non ha altro fondamento, ſe non ſe l' arbitraria ſuppoſizione, che la maſſima ſia infinita.

Num. 481. Per li Problemi poi, ne i quali le variabili ſtanno meſcolatamente, e per quella porzione, che ſi pone a continuare il ſuo corſo, avendo le variabili inverſamente poſte, nè pur eſſi poſſono avere veruna loro variabile

riabile infinita, giacchè poſtiſi a tal corſo ne debbono ſeguire le leggi.

Num. 482. Eſcluſe per tanto da i Problemi indeterminati le variabili nulle, e le infinite, reſta a far vedere anche più di propoſito, che ſenza il nulla, e ſenza l' infinito vi ha modo, adoperando in loro vece le minime, e le maſſime ſovra avvertite di aver quegli effetti, che per azardo, adoperando quelli, ſi è alle volte ottenuto, conſentanei alla verità, e ſfuggire quegli altri non pochi, che quelle ſuppoſizioni ci hanno dato, e che privavanci di utiliſſime cognizioni, e ci tenevano nell' errore. Piglierò dunque ad iſtendere alcune poche Memorie intorno alla quadratura degli Spazj iperbolici aſſintotici di qualunque genere, sì interi, che parziali, e loro Settori; e ſopra di eſſi farò ſperienza di quanto ho detto.

Succinte Memorie

Intorno alla Quadratura degli Spazj Iperbolici Aſſintotici Rettangoli di qualunque genere, così interi, che parziali, e loro Settori.

Num. 483. FRALLE Aſſintoti AI. Ai poſte ad angolo retto ſia qualunque iperbola GLi (*Figura* 31.), la di cui natura ſi eſprima generalmente per $x^t y^n = a^{t+n}$, nella quale la ſomma degli eſponenti delle variabili ſia uguale all' eſponente di a, lato della podeſtà della medeſima iperbola. Io dico, che ſempre che troviſi in queſta iperbola la $x = y$, amendue queſte variabili ſaranno allora uguali al predetto lato $a = AC$. E certamente eſſendo, ſecondo che porta la ſuppoſizione, $y = x$, ſoſtituita, per eſempio, y nell' equazione in vece di x, avremo $x^{t+n} = a^{t+n}$, onde $x = a = y$.

Di qui

Num. 484. Di qui ſiegue, che l' eſtremo *L* del diametro *AL*, che parte dal centro *A* di tale iperbola, farà un punto della medeſima iperbola.

Num. 485. Siegue ancora, che tutte quante queſte poſſibili iperboli, che abbiano lo ſteſſo lato *a* della loro podeſtà, ſe ſieno poſte alle ſteſſe aſſintoti, avranno comune il punto *L*, eſtremo de' loro diametri *AL*, e però anche queſti ſaranno tutti fra loro uguali, onde nominerò tali iperboli *Aventi lo ſteſſo diametro*.

Num. 486. Il punto *L* diſtingue ogn' iperbola in due rami. Io nominerò *Rami aſcendenti* quelli *LG*, *LH*, *LI*, che da eſſo punto ſi ſtendono verſo l' origine *A* delle aſciſſe, o che è lo ſteſſo, verſo il loro centro: e *Rami deſcendenti* quelli *Lg*, *Lh*, *Li*, che ſcorrono dall' altra parte.

Num. 487. Fra le iperboli, che hanno lo ſteſſo diametro, ſe ne dia un pajo, delle quali gli eſponenti delle variabili ſieno permutati negli eſponenti delle variabili omologhe dell' altra iperbola. Nominerò in queſta comparazione *Iperboli reciproche* queſto pajo d' iperboli. Così ſe l' iperbola *ILg* abbia per equazione $a^{\frac{t+n}{n}} = x^t y^n$, e l' altra iperbola *GLi* abbia $a^{\frac{t+n}{n}} = x^n y^t$. Queſte due Iperboli comparate aſſieme io le nominerò *Reciproche*.

Num. 488. Due iperboli reciproche poſte allo ſteſſo diametro *AL*, e fra le medeſime aſſintoti, una di loro dinoterà col ſuo ramo aſcendente *LG* lo ſteſſo luogo, che l' altra denota coll' altro ſuo ramo deſcendente *Lg*, e così vicendevolmente; imperocchè eſſendo $AD^n \times DO^t = y^n x^t = a^{t+n} = y^t x^n = do^t \times Ad^n$, ed eſſendoſi poſto $Ad^n = AD^n$, onde $Ad = AD$, ſarà pur anche, come ſi era propoſto, $DO = Do$.

Poſte

Num. 489. Poſte tralle due aſſintoti le due uguali *Ad*, *AD*, li due ſpazj *DOG*, *dog*, ovvero *DAiOD*, e *dAiod*, che nelle due iperboli reciproche ſtanno ſopra le *DO*, *do*, e ſtendonſi quanto mai poſſono ſtenderſi le aſſintoti, ſono fra loro uguali, e così pure ſe oltre *D*, e *d* ſieno preſe due qualuque uguali *DF*, *df* ſulle medeſime aſſintoti, i due ſpazj *DOPF*, *dopf* contenuti dalle iperboli reciproche, e negl' intervalli uguali *DF*, *df*, ed ugualmente diſtanti dal centro *A*, ſono anch' eſſi fra loro uguali. Nell' iperbola apolloniana, comechè ella è a ſeſteſſa reciproca, ſono i proprj di lei ſpazj, che ſono fra di loro uguali.

Num. 490. In tutte dunque queſte iperboli, la generale natura delle quali è $a^{\frac{t+n}{n}} = x^t y^n$, vogliaſi [*Fig.* 31] lo ſpazio contenuto dall' aſſintoto *AI*, dall' aſciſſa *Ab*, e dalla correſpondente ordinata *bO*, *bN*, ovvero *bM*, e dall' arco iperbolico correſpondente. Detto per tanto *v* lo ſpazio cercato, avremo per la ſua equazione differenziale $dv = \frac{dx \times a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t}{n}}}$, e per equazione finale $v = \frac{n a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} + q$. Determinerò la *q* a ſuo luogo.

Se *t* ſia maggiore di *n*, ſcorgeſi, che la parte $\frac{n a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t}$ ſarà negativa, e la variabile ſarà nel denominatore. Sarà il contrario, ſe *t* ſia minore di *n*.

Num. 491. In tutte le nominate iperboli vogliaſi (*Fig.* 31.) lo ſpazio contenuto dalla *FM*, o *&c.* paralella all' aſciſſa *Ab* dal reſtante *FI* dell' aſſintoto correſpondente all' ordinata, che comincia a detta paralella *FM*, e dall' arco iperbolico *MI*. Nominerò *V* queſto ſpazio; il ſuo elemen-

to sarà $x \times = dy$, giacchè al crescere delle x le y decrescono, onde l' ordinata contigua sarà $y - dy$. L' equazione differenziale di questo spazio sarà dunque

$$dV = -\frac{dy\, a^{\frac{t+n}{n}}}{y^{\frac{n}{t}}},$$

e l' equazione finale $V = \frac{-ta^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} x^{\frac{t-n}{n}} + q$.

Num. 492. Resta ora a far uso di queste generali formule, e a determinare la q, giusta le varie condizioni particolari delle medesime iperboli. Sia in primo luogo (*Fig.* 31.) l' iperbola HLb l' Apolloniana, onde $t = 1 = n$, giacchè la di lei natura è $a^2 = xy$, e vogliasi lo spazio $HAbNH$. La prima formula diviene $v = a^2 x^0 + q$., cioè $a^2 l\, x + q$. Per determinare la q osservo, che quando x divenga 0, allora il suo logoritmo è zero, giacchè, come lo dissi nella Prima Parte, la minima ordinata del ramo positivo della logoritmica non ha logoritmo. Osservo altresì, che quando x sia 0, allora abbiamo nell' equazione per la variabile corrispondente v l' elemento massimo, così portando la natura del nostro problema, che è di quelli, in cui le ordinate stanno inversamente. Questo massimo elemento del cercato spazio v nella presente iperbola è aa, giacchè allora il trilineo suo corrispondente, come avvertii al *Numero* 457., non è, nè può essere. Avremo dunque l' equazione $w\,[a^2] = a^2 l\, 0\,(0) + q$. e però $q = aa$, laonde l' equazione finale è compita per quanto ad essa si spetta esprimente il cercato spazio sarà $aa + aa\, l\, x = v = a^2 \times 1 + l\, x$, e qui soddisfo alla promessa, che feci ai *Numeri* 157., e 166.. La intera soluzione poi di questo problema, traducendolo dall' essere di logoritmico a quello di assoluto, l' ho data al *Num.* 168., e seguenti.

Il non

Num. 493. Il non avvertire alle verità da me passo passo seguitate in questa, e simili calcolazioni, ha fatto credere, che lo spazio sovrapposto iperbolico sia di propria natura infinito. Nell' equazione $v = aa\, l\, x + q$., avendo assunto, che quando x sia $= 1$ sia pure $aa\, l\, x = 0$, e che lo spazio iperbolico v, allor che insiste all' ascissa $1 = x$, sia infinito, hassi potuta ritrarre l' equazione $\infty = 0 + q$; onde doversi avere l' equazione finale $v = \infty + aa\, l\, x$. Non mi sono ignoti gli altri fondamenti non presi da questi Calcoli, sopra de' quali si pretende di stabilire, che tali spazj sieno infiniti. Differirò qualche poco a farne parola, nè qui interromperò lo sperimentar l' uso delle Massime, e delle Minime, che ho intrapreso.

Num. 494. Nella stessa Iperbola Apolloniana [*Fig.* 31.] vogliasi ora lo spazio ENH. La formula del *Num.* 491. propria per questo spazio cambierassi in

$$V = \frac{-a^2 y^0}{0} + q = -a^2 l\, x + q$$

Quì quando y sia massima, lo spazio V è minimo. Avremo dunque $0 = -a^2 l\, w + q$, e $a^2 l\, w = q + 0 = q$. L' equazione dunque finale, e compita sarà $aa\, l\, w - aa\, l\, y = V$. E' facile intendere questa espressione, e toccar con mano la verità sua. Supposto $en = EN$, lo spazio ENH è $= enb$ (*Num.* 489.) Lo spazio enb è certamente tutto lo spazio iperbolico meno lo spazio $AenHA$. Tutto lo spazio iperbolico è per l' antecedente numero $= aa \times 1 + l\, Ab$ ($l\, w = l\, y$, allorchè $y = AH$) Lo spazio poi $AenHA$ è $aa \times 1 + l\, Ae$ ($l\, y$ allorchè $y = bN$), dunque lo spazio $enb = ENH$ sarà veramente quale si è trovato $\overline{aa \times 1 + l\, w}\,(l\, Ab) - \overline{aa \times 1 + l\, y}\,[l\, bN]$ $= aa \times l\, w - l\, y = V = aa \times l\, \frac{aa}{y}$, giacchè $l\, \frac{a}{w} = y = aa$.

Num. 495. Si proponga di avere (*Fig.* 31.) lo ſpazio $v = A\,b\,M\,I\,A$ dell' iperbola, la di cui natura ſia $a^3 = x^2 y$. Per la formula del *Num.* 490. avremo $v = \frac{-a^3}{x} + q$. Oſſervo, che quando $x = o$, allora v, elemento del cercato ſpazio, ſarà π. Avremo dunque $\pi = \frac{-a^2}{o}$ [$— \pi$ *Num.* 479.] $+ q$; dunque $q = 2\pi$, e conſeguentemente l' equazione finale compita ſarà $v = 2\pi - \frac{a^3}{x}$. Reſtaci ora da cercare, ed eſporre in quantità note l' opportuno ſimbolo π. Per ciò ottenere mi fo ad oſſervare nella data natura della curva $a^3 = x^2 y$, eſſere l' ordinata y coſtantemente $= a^3 \times \frac{1}{x^2}$, vale a dire eſſere a^3 multiplicata per una frazione, il di cui numeratore è l' unità, e il denominatore è il quadrato di x. Se dunque io conſidero l' aſciſſa diviſa in un numero indefinito di unità, e in queſto caſo poſſo concepirle quanto mai voglio picciole, purchè non calino dalla o, giacchè di eſſa nel ſuo problema non può eſſere grandezza minore, e a queſta poſſo aſſumerle uguali, veggo, che tutte le ordinate contigue di queſta iperbola diviſe per a^3 ſaranno uno de' termini di quella ſerie, che avendo ſempre la preſa unità per denominatore, avranno per denominatore il quadrato di quel numero, che deſigna quante di eſſe unità compongono la aſciſſa correſpondente alla predetta ordinata. Laſcio ora qui queſta conſiderazione, e ritornando alla prima, veggo, che nella fatta conſiderazione il primo elemento del cercato ſpazio, che è la maſſima, che cercavaſi, ſarà a^3; imperocchè eſſendo l' eſpreſſione indeterminata di ogni rettangolo $A\,M$ la $x \times y \left(\frac{a^3}{x^2}\right) = \frac{a^3}{x}$, e ponendoſi in queſto caſo $x = 1$, reſta chiaro, che nella preſente conſideraziene è $\pi = a^3$.

Laon-

Laonde conſervando altresì queſta conſiderazione, di cui nuovamente avrò propoſito al *Num.* 499., non eſſendo qui ora le coſe baſtevolmente ſpiegate, avremo totalmente nota l' equazione finale ricercata, e ſarà $v = 2a^3 - \frac{a^3}{x}$.

Num 496. Dottiſſimi Maeſtri hanno indagato il ſovra notato ſpazio v, e come lo notai al *Num* 435., ſi ſono contentati di credere di averlo trovato, e che ſia $— \frac{a^3}{x}$. Alcuni altri poi, riflettendo, che $— \frac{a^3}{x}$ non può giammai eſſere eſſo ſpazio v, hanno creduto, che egli ſia non già lo ſpazio richieſto $A\,b\,M\,I\,A$, ma che per eſſerci queſto ſpazio $— \frac{a^3}{x}$ ſommminiſtrato dal Calcolo Integrale col ſegno negativo, il Calcolo, quaſi indicando la ſua inſufficienza in queſto frangente a ritrovare il richieſto ſpazio, ci aviſi però col ſegno negativo non potere di più, ſe non che darci lo ſpazio alla parte oppoſta del ricercatogli, qual veramente è lo ſpazio $— \frac{a^3}{x}$, che è uguale, e fra poco lo moſtrerò, allo ſpazio $A\,M\,g\,b$; ed hanno creduto, che quando riſultano integrali negative, null' altro ſi poſſa ſperare dal Calcolo Integtale, fuori che una quantità da prenderſi alla parte oppoſta della ricercata. Altri poi tenendo per ſufficiente la regola comune di compir le integrali, ſoſtituito il zero, come ella preſcrive in luogo delle variabili, hanno ottenuto $o = \frac{— a^3}{\bullet}$ [∞] $+ q$, onde $q = \infty$, con ciò $v = \infty - \frac{a^3}{x}$. Ecco dunque rappreſentato da queſta maniera di Calcolo lo ſpazio intero $I\,A\,g\,I$ infinito, eſsendo queſto ſpazio quello, che per appunto nella poſta equazione rappreſenta

senta l' ∞, e dal quale levato lo spazio $bMgb = \frac{a^3}{x}$ si lascia giustamente il cercato spazio $AbMIA = v$. Che poi questo spazio sia non solo infinito, ma anche più che infinito, benchè comparendoci nella trovata forma $v = \infty - \frac{a^3}{x}$ semplicemente infinito, sia levata da esso una quantità $\frac{-a^3}{x}$, che può al decrescere di x supporsi, che anch' essa divenga infinita, altri veramente dottissimi Maestri hanno per altre ingegnosissime maniere procurato di confermarlo.

Num. 497 Ma che il proposto spazio non giunga veramente neppure all' infinito sembra, che con tutto fondamento possa dalla premessa considerazione dedursi. E' evidente, che le ordinate contigue della proposta iperbola divise per a^3. sono caduna di loro uno de' termini della proposta serie, e che le unità, o i numeratori de' medesimi sieno pure uguali alla o, la somma di tutti i termini di essa serie, che sopra l' ascissa capiscono multiplicata per a^3 adegua l' intero spazio della medesima iperbola. Tutti convengono, che la predetta somma sia finita. Dunque dovrà conchiudersi, che ella è anche finita, quando sia multiplicata per a^3, cioè quando adegua lo intero spazio predetto.

Num. 498. L' insigne Jacopo Bornoullio, il quale per la sovrapposta riflessione asserì, che lo spazio intero iperbolico suddetto potesse dimostrarsi finito (*Ars conjectandi pag.* 255.) bramava di saper il valore di quella somma. Tale notizia con altre di più io forse potrò qui registrare. Allor che vogliasi, che nella trovata equazione $v = 2a^3 - \frac{a^3}{x}$, v denoti l' intero spazio dell' iperbola, bisogna, che x divenga massima, e allora $\frac{a^3}{x}$ sarà ugual o, dunque per

que per questo stato avremo $v = 2a^3$ [*Num.* 477.]. Se dunque la cercata serie è lo spazio v diviso per a^3, sarà ancora la sua somma $= 2$, nella quale è compreso il primo termine $\frac{1}{1}$, la onde se cerchisi la somma della serie cominciante da $\frac{1}{4}$, e che empia lo spazio predetto iperbolico, ella adegua precisamente l' unità.

Num. 499 Il modo tenuto a compir l' equazione $v = \frac{-a^3}{x} + q$ ci apre il campo a compir generalmente l' equazione $v = \frac{-n\,\frac{t+n}{n}}{t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}} + q$, che è la forma, che piglia l' equazione del *Num.* 490. allorchè t è maggiore di n. Nelle iperboli di questa maniera, sempre che x sia minima, pure la v è massima, laonde avremo generalmente $\pi = \frac{-n}{t-n} \times \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{o}[\pi] + q$, ovvero $\frac{t-n}{-n} \times \pi = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{o}(\pi) + \frac{t-n}{-n} \times q$. La onde $q = \pi + \frac{n\,\pi}{t-n} = \frac{1\,\pi}{t-n}$; E perchè in tutte queste iperboli le loro massime sono $a^{\frac{t+n}{n}}$, giacchè in ognuna di loro hassi sempre $y = a^{\frac{t+n}{n}} \times x^{\frac{1}{\frac{t}{n}}}$, vale a dire sono esse un termine della serie frazionaria, i termini della quale sono generalmente es-

te eſpoſti per $x^{\frac{1}{n}}$ multiplicato per $a^{\frac{t+n}{n}}$, il che poſto, eſſendo poi anche l' eſpreſſione indeterminata di qualunque rettangolo AM la $x \times y$ $\left(\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t}{n}}}\right) = a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{t-n}{n}}$, e ponendoſi in queſto caſo $x = 1$ reſta conchiuſo, che in queſte iperboli l' eſpreſſione generale riſpettivamente di qualunque maſſima è $a^{\frac{t+n}{n}}$, come io aveva detto, e però la

$$v = \frac{-a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}} + \frac{ta^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$$

viene ad eſſere l' equazione finale, e compita di tutti i propoſti ſpazj iperbolici, ne' quali t, eſponente di x, è maggiore di n eſponente dell' ordinata y. Se per tanto aveſſimo l' iperbola $a^4 = x^3 y$, in cui $t = 3$, ed $n = 1$, ſarebbe l' eqazione del ſuo ſpazio la $v = \frac{3a^4}{2} - \frac{a^4}{2x^2}$. Se aveſſimo $a^5 = x^{\frac{1}{2}} y$ eſprimerebbeſi la ſua quadratura per $v = \frac{4a^5}{3} - \frac{a^5}{3x^3}$. Se cercaſimo quella di $a^5 = x^3 y^2$, ſarebbe $v = 3a^{\frac{5}{2}} - \frac{2a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}}$, e così in qualunque ſuppoſizione, che piaceſſe a noi di fare di t, e di n.

Per ot-

Num. 500. Per ottenere poi lo ſpazio intero di tutte queſte iperboli ricorre qui la conſiderazione fatta al *Num.* 498.; cioè biſognare allora, che la x divenga maſſima, e in tal caſo divenendo nella premeſſa formula generale la $\frac{-na^{\frac{t+n}{n}}}{0^{\frac{t}{n}}} = v$ cambieraſſi per queſto biſogno la trovata formula generale nella ſola $v = \frac{ta^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$, e queſta ci darà l' area intera contenuta dalle aſſintoti, e da amendue i rami di qualunque iperbola, che abbia t maggiora di n.

Num. 501. E perchè queſti ſpazj interì in eſſo caſo di t maggiore di n ſono, come è viſibile, la ſomma di tutti i termini, che eſſi contengono, delle ſerie frazionarie cominciantì dall' unità incluſivamente, le frazioni delle quali ſi eſpongono per $a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{y}{t}} = x^{\frac{1}{a}}$, avremo di qui il modo generale di ſommare, non già l' unica ſerie, che il Dottiſſimo Bernoullio bramava, i denominatori della quale, ſtando coſtante il numeratore, erano i quadrati de' numeri naturali preſi ordinatamente, ma ne' termini ſovraeſpreſſi indeffinitamete tutte le ſerie, i denominatori delle quali, ſtando i numeratori coſtanti, ſieno qualunque dignità immaginabile, intera, o rotta, o anche irrazionale, purchè non variabile, de' medeſimi numeri natutali preſi ordinatamente, e purchè dette dignità ſuperino l' unità. Sono per tanto queſte ſerie eſpreſſe generalmente, come è per ſe viſibile, pel coefficiente $\frac{t}{t-n}$ della formula generale

$v = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$ esprimente gli interi spazj delle esaminate iperboli, laonde le cercate somme de' designati termini di queste serie si esprimono per la frazione, che ha per numeratore il numeratore t dell' esponente della dignità, a cui si vuole elevato il numero naturale, e il denominatore è la differenza $t-n$ fra il numeratore, ed il dere. Così se vogliasi la somma di tutti i termini di quella serie, nella quale posta sempre l' unità per numeratore la dignità, a cui i numeri naturali si vogliono elevati, sia la $\frac{3}{2}$, cioè sieno le radici quadrate de' cubi de' me-

desimi numeri, come sarebbe $\frac{1}{\sqrt{1^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}}$ + &c.

ella sarà $\frac{3}{3-2} = 3$. Vogliasi la somma delle frazioni

$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}$ + &c. $\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \text{&c.}\right)$ ella

sarà $\frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$. La somma di $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$ + &c $\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{&c.}\right)$ Si è già veduta $= \frac{2}{2-1}$

$= 2$. e così sarà d' ogn' altra, che voglia aversi. In tutte queste somme è sempre compreso il primo termine, che è l' unità. Accade pure, e qui torna in acconcio l' avvertirlo, che la somma di quelle serie, che hanno l' unità per numeratore, e per denominatore le dignità intere consecutive uguagliano cadauna di loro scemata dell' unità il termine della serie armonica antecedente a quello, che col suo denominatore denota la dignità de' denominatori di quella serie. Così la somma di $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ + &c. nel-

la quale la dignità de' numeri naturali, che formano i denominatori, è 2, scemata dell' unità, onde tal somma resti 1. uguaglia il termine $\frac{1}{1}$ della serie armonica, che pre-

cede quello, il di cui denominatore in questa serie è 2. Così la somma della serie $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}$ + &c. sce-

mata di uno, è $\frac{1}{3}$, la susseguente è $\frac{1}{4}$, e così di

mano in mano. Laonde la Somma di tutte queste serie, scemate cadauna di loro dell' unità, e che ordinatamente si susseguono, fanno per appunto la serie armonica.

Num. 502. Trovati gli spazj di quelle iperboli, nelle quali è t maggiore di n, cerchiamo ora quelli, ne' quali vicendevolmente è n maggiore di t. La formula generale, che loro conviene, trovata al *Num.* 490. è

$v = \frac{n\,a^{\frac{t+n}{n}}\,x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} + q$ rimane qual è, e in questo caso divenendo minima la x, quando anche il primo v diviene minima, giacchè in quelle iperboli i rettangoli A

O, l' espressione generale de' quali è $\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t-n}{n}}}$, in cui es-

sendo n maggiore di t, è forza, che ella sia $a^{\frac{t+n}{n}}\,x^{\frac{n-t}{n}}$ diven-

divengono senza restrizione sempre minori, e il problema datoci dall' integrazione è di quelli, ne' quali le variabili stanno direttamente. La suddetta formula dunque cambierassi in $o = \frac{n\,a^{\frac{t+n}{n}}}{n-t} \times o$ (o *Num.* 479.) $+ q$, la onde risulta $q = o$, e però la formula di questi spazj era compita, ed è quale si è detto $v = \frac{n\,a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t}$.

Num. 503. Questa formula è stata generalmente ritrovata tale col supporre x, ed v uguali a zero. Questa supposizione, rendendo uguali i due membri datici dal Calcolo Integrale, annienta q, effetto, che per accidente coincide coll' essenziale effetto di annientarlo, che produce per propria natura la sostituzione delle minime, e però la fortunata riuscita del zero in questa occasione niun fondamento dà a dover credere, che le variabili di queste iperboli divengano giammai zero.

Num. 504. Sia per tanto l' iperbola GLi $a^3 = y^2 x$, e vogliasi qualunque suo spazio $AbOGA$. La premessa formula ce lo somministra per l' equazione $v = 2a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, e così si ottiene in ogn' altra determinazione di t, e di n. Mostrerò intanto, che lo spazio $bMgb$ vale $\frac{a^3}{x}$, come lo dissi al *Num.* 496. Essendo l' iperbola ILg reciproca alla GLi, quando che sia $AB = Ab$, lo spazio $bMgb$ dell' iperbola ILg sarà uguale allo spazio $BmGB$, che è = allo spazio $AfmGA$. Questo ultimo spazio, se le assisse della sua iperbola GLi si dicano V, e le ordinate S, sarà per questo medesimo Numero $= 2e^{\frac{3}{2}} V^{\frac{1}{2}}$: Levando poi da questo spazio il rettangolo Am, che vedremo esse-

re $= a^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}$ resterà lo spazio $AfmGA = a^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}}$. Quanto al rettangolo Am, essendo la sua iperbola $a^3 = VS^2$, sarà $fm = S = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}}$, e multiplicato per V egli proverrà, come si è detto, $= a^{\frac{3}{2}} V^{\frac{1}{2}}$. Perchè poi sia $HfmGA = bMgb$, dovrà essere $a^{\frac{3}{2}} V^{\frac{1}{2}} = \frac{a^3}{x}$, come si è proposto, onde dovrà essere $V = Af = \frac{a^3}{x^2}$. La Af nell' iperbola ILg, la di cui natura è $a^3 = x^2 y$, e nella quale lo spazio $bMgb$ è $= bM = AF$, e la bM in questa iperbola è $y = \frac{a^3}{x^2}$. Dunque lo spazio $bMgb$, che nella iperbola ILg sta sopra la bM, e stendesi fino all' estremo g dell' assintoto, è quale si è detto $= \frac{a^3}{x}$.

Num. 505. Passerò ora a mostrare, che anche colla formula $v = \frac{n\,a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t}$ trovasi tutto l' intero spazio iperbolico $AGiA$ uguale a tutto l' intero spazio iperbolico suo reciproco $AIGA = \frac{t\,a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$, quale lo trovammo colla formula del *Numero* 500.; Imperocchè in questo caso dovrà l' ascisca Ai essere la massima, che sia possibile, e per-

tanto

tanto dovendo in questa iperbola $a^{t+n} = x^t y^m$. essere allora $y = 1$, e ciò perchè viene allora ad essere la minima, verrà pure x ad essere $= a^{\frac{t+n}{t}}$, che sostituita in vece di x, ed elevata ad $\frac{n-t}{n}$, e multiplicata per $a^{\frac{t+n}{n}}$ ci somministra $v = \frac{n a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t} = A$. Sembra qui a prima vista essere evidente tutto il contrario di quello, che mi sono proposto, perchè troppo è visibile, che il coefficiente $\frac{t}{t-n}$ non è il coefficiente $\frac{n}{n-t}$, e che l' esponente $\frac{t+n}{n}$ non è l' esponente $\frac{t+n}{t}$.

Troppo veramente è visibile, ma la cosa però in verità è diversa, ed una ben leggiera attenzione lo scuopre. Nelle iperboli reciproche gli esponenti delle variabili debbono permutarsi, e se io nella posta formula non li hò permutati, ma solo li ho considerati ora l' uno, ora l' altro maggiore, così doveva farlo, non considerando io allora iperboli reciproche, ma assolute, ma quando così si considerano, allora tale permutazione è necessaria; e fatto questo, si ha subito il trovato coeficiente $\frac{n}{n-t}$ cambiato nell' altro $\frac{t}{t-n}$, e l' esponente $\frac{t+n}{t}$ nell' esponente $\frac{t+n}{n}$. Di questa verità sarà pruova di fatto l' iperbola, $a^3 = xy^2$, che essendo reciproca dell' altra $a^3 = x^2y$ ci da per l' intera somma del suo spazio $2a^3$, come ce lo dà pur l' altra adoperandovi la formula prenotata.

Num.

Num. 506. Ma di quì non solo, ma più generalmente dalla considerazione che le iperboli reciproche abbiano le loro aree nel senso esposto sempre uguali, nasce un apparenza d' insolubile paradosso. Sia per esempio l' iperbola. $a^3 = x^2y$ Tutte le di lei ordinate contigue, sono i termini altresì contigui della serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ &c. Sia l' iperbola reciproca $a^3 =$ [illegible] le ordinate contigue di questa sono i termini essi pure contigui della serie. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} +$ &c. Così detta $a^{t+n} = x^t y^n$ la generale equazione di un iperbola le ordinate contigue di essa, saranno sempre i termini della serie espressi per $\frac{1}{x^{\frac{t}{n}}}$ denotando x tutti i numeri consecutivi naturali comincianti, dall' unità inclusivamente, e dette l' iperbole sue reciproche $a^{t+n} = x^n y^t$, le ordinate contigue di questa saranno espresse per i termini della serie $x^{\frac{1}{\frac{n}{t}}}$ multiplicati però questi e quelli per a^{t+n}. Ripigliando ora il primo esempio, affine di render sensibile le difficoltà, sembra dover seguire, che la serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ &c. protratta al possibile debba esser uguale alla serie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} +$ &c. protratta anch' essa al possibile; la onde sembra conchiudersi che la parte sia uguale al tutto, cosa senza veruna

ria difficoltà impossibile . I termini certamente della prima serie sono parte , ed anche molto scarsa de' termini della seconda , mentre fra il primo , e il secondo termine della prima mancano 14. termini che trovansi nella seconda , fra il secondo , e terzo termine della prima mancano 63. termini , che sono nella seconda , e così sempre abbondantemente crescendo . Scioglierò al *Num.* 534. questo apparente paradosso.

Num. 507. Fin ora abbiamo [illegible] proposti espressi per le sole ascisse , sarà opportuno averli ancora per amendue le coordinate . L' equazione generale delle proposte iperboli è $a^{\frac{t+n}{n}} = x^n y^n$. Quando t sia maggiore di n abbiamo avuto al *Num.* 499. lo spazio

$$v = \frac{t\, a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} - \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}}$$

e perchè dall' equazione della curva è $x^{\frac{t}{n}} = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{y}$ sostituendo , cambieremo la formula in $v = \frac{t\, a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} - \frac{nxy}{t-n}$. Questa formula ci restituisce lo spazio intero IAg di questa iperbola quale lo ritrovammo al *Num.* 499. $v = \frac{t\, a^{\frac{t-n}{n}}}{t-n}$, giacchè nel caso di questo intero spazio la y diviene o . Se poi t sia minore di n , la formula avuta per questo caso al *Num.* 502.

502. , che è $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t}$, ricevendo in vece di $x^{\frac{-t}{n}}$ la sua $= a^{\frac{y}{t+n}}$ cangierassi nella $v = \frac{nxy}{n-t}$. Ancor questa formula ci restituisce l' intero spazio GAi ; imperocchè nel presente caso , essendo y l' unità , la x [Ai] dee essere n , e questa massima è $a^{\frac{t+n}{n}}$ (*Num.* 505.) onde avrassi , come si è detto , $v = \frac{x\, a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t}$. Lascio qui di deddurre que' corollarj , che respettivamente alle proporzioni , che hanno fra loro le porzioni di tutti gli spazj iperbolici , ed i medesimi spazj interi possono facilissimamente trarsi dalle ora fissate formule.

Num 508. Piglierò per tanto la considerazione dell' altra formula del *Numero* 491., per la quale cerchiamo gli spazj iperbolici (*Fig.* 31.) $IFM.GDO$, i quali spazj già dalle passate formule aver si possono, ma trovati per quest' altra strada , confirmeranno rispettivamente le notate cose. La formula generale è $V = \frac{-t\, a^{\frac{t+n}{t}}}{t-n} y^{\frac{t-n}{t}} + q$. Se t sia maggiore di n, quando y sia $y = AI$, allora lo spazio V è minimo. La massima y richiedendo $x = 1$. diviene $a^{\frac{t+n}{n}}$ Onde fatte le sostituzioni ricaviamo $q = \frac{t\, a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$, e la for-

mula generale per questo caso si è $V = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} -$

$\frac{t a^{\frac{t+n}{t}} y^{\frac{t-n}{t}}}{t-n}$. Da questa formula avremo, allorchè y sia o in g il suo intero spazio $V = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$, che è lo stessissimo, che ritrovammo al *Num.* 500.. Se t sia minore di n, allora, comechè $t-n$ è quantità negativa, in tal caso la formula diviene $V = \frac{t a^{\frac{t+n}{t}} y^{\frac{t-n}{t}}}{n-t} + q$. Ciò posto, qui la AG non può dirsi massima, poichè nello stesso problema vi è la Ai di lei maggiore. Mi volgo dunque a considerare la y, allorchè è l' ultima, e la scorgo in tal caso $= 1$., il che mi dà $x = a^{\frac{t+n}{t}}$, onde il primo rettangolo $x \times 1$ viene ad essere lo stesso $a^{\frac{t+n}{t}}$. Considero poi, che in tal caso V è l' intero spazio iperbolico, che (*Num.* 502.) trovammo $= \frac{n a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t}$., da cui dee levarsi il detto rettangolo, laonde questo spazio V, corrispondente alla supposizione di $y = 1$. sarà $\frac{t a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t}$. Fatte ora que-

queste sostituzioni, la nostra formula diverrà $V \left(\frac{t a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t} \right)$

$= \frac{t a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t} \times 1 \left(y^{\frac{t+n}{t}} \right) + q$, dalla quale risultando $q = o$, siamo fatti certi, nel caso di t minore di n, che la formula $V = \frac{t a^{\frac{t+n}{t}} y^{\frac{t-n}{t}}}{n-t}$ è compita, e da questa formula pure avremo l' intero spazio $GAiG$, che (*Numero* 505.) ritrovammo $= \frac{n a^{\frac{t+n}{t}}}{n-t}$, se supposto $y = 1$ vi aggiungeremo il rettangolo $a^{\frac{t+n}{t}}$

Num. 509. Credo opportuno il riflettere, che chi avesse voluto compir questa formula, supponendo $y = o$, avrebbe avuto il medesimo effetto, ma chiaramente si scorge l' insussistenza di ciò supporre, giacchè certamente, ove y si voglia zero, ben lungi che V lo sia anch' esso, egli è tutto lo spazio $GAiG$, che generalmente è stato creduto infinito, e da alcuni più che infinito. Cagionando a fortuna la supposizione, benchè impossibile del zero, uguaglianza fra due termini variabili, viene pure per accidente ad aversi quell' effetto, che l' effettiva uguaglianza, e dedotta dall' intrinseco del problema necessariamente produce. Per ridurre poi le due trovate formole alla sua maggiore facilità introducendovi la x, avremo per la prima

$V = \frac{-txy}{t-n} + \frac{ta^{\frac{t+n}{t}}}{t-n}$, e per la seconda $V = \frac{txy}{n-t}$.

Num. 510. Trovati gli spazj interi delle iperboli, indagherò brevemente i loro segmenti. Sia (*Fig.* 31) Ab = alla costante p, e dopo di questa sul punto b cominci la x, onde lo spazio iperbolico, che si cerca, sia sempre sopra la bM come suo principio, e stendasi verso i. L'equazione generale della sua propria curva è $a^{\frac{t+n}{n}} = y^{\frac{n}{t}} \times p + x$. laonde si avrà $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}} \times p+x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} + q$. Se sia t maggiore di n piglierà la forma $v = \frac{-na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p+x^{\frac{t+n}{n}}} + q$. Per determinare q, osservo, che in questo caso i rettangoli bL; bt vanno sempre decrescendo a misura, che si accostano all' ordinata bM, il che così dimostrerò. Essendo $y = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{p+x^{\frac{t}{n}}}$, e questa esprima la qt, sarà $At = \frac{xa^{\frac{t+n}{n}}}{p+x^{\frac{t+n}{n}}}$, quando che x sia = bg, e questa espressione generale mostra evidentemente, che a misura che $p+x$

$p+x$ sarà più piccola, i rettangoli ad essa corrispondenti saranno, come si è proposto, più piccoli, mentre i numeratori al crescere di x, crescon sempre in maggior proporzione, che non fanno i corrispondenti denominatori. Ciò assicurato, scorgesi che il primo rettangolo corrispondente alla x, quando sia o, può, e dee anch' esso esser o, la onde avrò l'equazione $o = \frac{-na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p+o^{\frac{t-n}{n}}} + q$.

onde $q = \frac{na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p^{\frac{t-n}{n}}}$, e la formula compita per ritrovare i proposti segmenti sarà $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p^{\frac{t+n}{n}}}$

$\frac{na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p+x^{\frac{t+n}{n}}}$, e ricevendo la y, diverrà $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p^{\frac{t-n}{n}}} = \frac{nxy}{t-n}$.

Se poi-

Num. 511. Se poi t sia minore di n, anche qui scemano i rettangoli allo scemare di x, onde avremo l' equazione $0 = \frac{n a^{\frac{t+n}{n}} \times \overline{p+0}^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} + q$, e perciò

$$v = \frac{n a^{\frac{t+n}{n}} \times \overline{p+x}^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} - \frac{n a^{\frac{t+n}{n}} \times p^{\frac{n-t}{n}}}{n-t},$$

ovvero $v = \frac{nxy}{n-t} - \frac{n a^{\frac{t+n}{n}}}{n-t} p^{\frac{n-t}{n}}$.

Num. 512. Se finalmente sia $t = n$, avremo $v = n a^2 \times \overline{p+x}^{0} + q = n a^2 l \overline{p+x} + q$; E giacchè anche qui, quando $x = 0$ v è $= 0$, e l' equazione di questa curva riduce $n = 1$, avremo $v = a^2 L \frac{p+x}{p}$, equazione da liberarsi da logoritmi seguendo le vestiggia indicate nell' Appendice della terza Sezione della prima parte di queste mie Memorie.

Num. 513. Sia ora AB (*Fig.* 31) $=$ alla costante p, e condotta la Bm paralella all' ascissa, sopra qualunque punto assegnabile di essa comincj la y, onde tutti i segmenti, che cercheranosi di questi spazj iperbolici, sieno sempre sulla detta Bm come loro principio, e stendansi verso I. L' equazione generale della curva, alla quale questi segmenti appartengono sarà $a^{t+n} = x^t \times \overline{p+y}^n$, onde si avrà $y = a^{\frac{t+n}{n}} x^{-\frac{t}{n}} - p$. La equazione differenziale del suo spazio sarà $dv = dx \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{-\frac{t}{n}} - p\,dx$, e la finale $v = q +$

$q + \frac{n a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} - px$. Giacchè qt è $= \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{\frac{t}{xn}} =$

$p+y$., tutto il rettangolo At sarà $\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t-n}{n}}}$ da cui levato il rettangolo $A2z = px$, avremo per espressione generale de' rettangoli Bt la $\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{\frac{t-n}{n}} - px$. In questa espressione si scorge, che quanto minore è la x, tanto più il rettangolo si fà maggiore, e diviene massimo al farsi 0 la x. Supposto per tanto p. maggiore di n, l' equazione $v = \times$

$$q^{\frac{-n a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times x^{t-n}}} - px$$

che tale sarà la forma di questo caso, ricevendo $v = w$, ed $x = 0$ diverrà $w = q - \frac{n a^{\frac{t+n}{n}} w}{t-n} - p0$; onde $q = \frac{tw}{t-n}$. Per render nota questa w, osser-

offervo, che ponendoſi la minima $x = \epsilon$. ci reſta il primo maſſimo rettangolo $a^{\frac{t+n}{n}}$, e però traggo $q = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{x-n}$, e l'equazione compita $v = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} - \frac{n a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}} - px$, che ricevendo y diviene $v = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} - \frac{nx \times p+y}{t-n} - px$.

Num. 514. Se poi ſi voglia t minore di n, allora l'eſpreſſione generale de' rettangoli Bt ha la forma $a^{\frac{t+n}{n}} \times x^{\frac{n-t}{n}} - px$, nella quale ſi ſcorge che eſſi calano al calare di x, e però in queſto caſo, tanto v, quanto x divengano 0, e ſomminiſtrano l'equazione compita $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} - px$, e l'altra $v = \frac{nx \times p+y}{n-t} - px$.

Num. 515. Se poi ſia $t = n$ all' ora ſi ha $v = q - px + \frac{na^2x^0}{0} = q - px + a^2 l x$, e comechè in queſto caſo l'eſpreſſione del rettangolo Bt diviene $a^2 - px$, onde quando x ſia 0, reſta $a^2 = v$, avremo $a^2 = q - 0 + a^2 l 0$ onde $q = a^2$, e la compita ſarà $v = a^2 - px + a^2 l x$.

Num. 516. Sia ancora (*Fig.* 31) $Ab = p$; ma cominciando x nel punto b, lo ſpazio iperbolico abbia bensì ſempre il ſuo principio ſulla bM, ma ſtendaſi verſo A, verſo cui ſtendaſi pure la x. L'equazione generale della propria iperbola ſarà $a^{\frac{t+n}{n}} = y^{\frac{n-t}{n}} \times p-x$. L'equazione differenziale del ſuo ſpazio ſarà $\frac{-dx \times a^{\frac{t+n}{n}}}{p-x^{\frac{t}{n}}}$. Si pone $= dx$, perchè in queſto caſo le variabili contigue delle aſciſſe decreſcono. L'equazione integrale ſarà $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}} \times p-x^{\frac{n-t}{n}}}{t+n} + q$. L'eſpreſſione generale de' rettangoli bt è $\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{p-x^{\frac{t-n}{n}}}$, onde reſta chiaro, che eſſendo t maggiore di n, al creſcere di x, creſce ancora il rettangolo. Soſtituite dunque $0 = v$, e $0 = x$ nell'equazione $v = \frac{-na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p-x^{\frac{t-n}{n}}} t + q$, che è la forma del caſo preſente, ſi avrà $v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p^{\frac{t-n}{n}}} = \frac{ta^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p-x^{\frac{t-n}{n}}}$, che diverrà

$$v = \frac{na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times p} \cdot \frac{t-n}{n} - \frac{ny \times p-x}{t-n} .$$

Num. 517. Quando poi t ſia minore di n, l'eſpreſſione generale del rettangolo bt ſarà $a^{\frac{t+n}{n}} \times p-x \cdot \frac{n-t}{n}$, la quale creſce allo ſcemare di x, e però avremo $v = w$, il di cui valore ſi hà ponendo nell' eſpreſſione di bt la $x = o$, e rieſce $a^{\frac{t+n}{n}} p^{\frac{n-t}{n}}$; Con ciò avremo

$$v = \frac{ta^{\frac{t+n}{n}} p^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} + \frac{na^{\frac{t+n}{n}} p-x}{n-t} \text{ che rieſce}$$

$$v = \frac{ta^{\frac{t+n}{n}} p^{\frac{n-t}{n}}}{n-t} + \frac{ny \times p-x}{n-t} ,$$

Num. 518. Se poi ſia $t = n$, riſulta $v = q + a^2 L \frac{p}{p-x}$, ed eſſendo all' ora $v = a^2$, quando $x = o$, ſi ottiene $q = -a^2 + a^2 L \frac{p}{p}$.

Num. 519. Troppo ora mai ſono ſtato lungo in cercare queſti ſpazj, laonde laſcerò a' Principianti il cercare per loro eſercizio quelli, che convengono alle iperboli, le nature delle quali ſi eſprimono come ſiegue $a^{\frac{t+n}{n}} = x^t \times y-p$, $a^{\frac{t+n}{n}} = x^t \times p-y$ $a^{\frac{t+n}{n}} = y \times x-p$. Que' della prima, ſe foſſe per eſempio $AB = p$, e cominciaſſero le y ſull' aſciſſa Ai, ſarebbero gli ſpazj comincianti ſulla Bm, e ſtendentiſi verſo I. Que' poi della ſeconda, ſe aveſſimo p uguale, o maggiore riſpettivamente di AC, di AH, o di AI, e pel punto eſtremo di p, intendendoſi l' altro ſuo eſtremo collocato in A, foſſe tirata una retta paralella all' aſciſſa Ai, e sù di queſta cominciaſſero le y, gli ſpazj ſarebbero gli eſtremi per eſempio $QILg$. Che ſe finalmente foſſe $Ab = p$., e le x cominciaſſero dal centro A, gli ſpazj nella terza ſarebbero cominciati ſulla bM, e procedenti verſo i. Potrebbero pur anche co' premeſſi modi giudizioſamente adoperati, trovarſi gli ſpazj, o totali, o parziali iperbolici, la natura delle iperboli de' quali foſſe $a^{\frac{t+n}{n}} = +b+x^{\frac{t}{n}} \times + f+y^{\frac{n}{n}}$ (il ſegno + ſignifica anche −) quando che ſi otteneſſero per eſſi elementi integrabili.

Num. 520. Paſſerò in tanto ad indagar brevemente il modo di avere qualunque ſettore delle iperboli, dando alcune formule generali, colle quali non ſolo i ſettori delle iperboli aver ſi poſſano ma ancora di altre curve, quando ſucceda che i loro elementi ſieno integrabili. Sieno dunque le coordinate AB. AC (*Fig.* 32), e fra eſſe la curva BC. Dall' angolo A ſia condotta alla curva la retta AE, trovare l' area del ſettore elementare AEg. Sulla AC ſieno le x comincianti in A, e ſieno le y paralelle alle AB. Sia Ay la contigua di AE. Col centro A tirifi l'archetto Ei; Eſſendo $AB = x$, e $DE = y$, ſarà $AE = \sqrt{x^2+y^2}$, ed ig, che è la ſua differenza ſarà $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. E poi $Eb^{-2}\,(dx^2) + bg^{-2}\,(dy^2) = ig^{-2}$ $\left(\frac{x\,dy+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + Ei^{-2}$., dunque $Ei = \frac{\mp y\,dx \mp x\,dy.}{\sqrt{x^2+y^2}}$, e perchè $\frac{AE \times EI}{2}$ è l'area cercata del ſettore elementare, ella ſi eſporrà generalmente per la formula $\frac{\mp y\,dx \mp x\,dy}{2}$. Per ſervirci di queſta formula a ritrovare i ſetttori aſſoluti da

B verſo E, comecchè all'ora i dy decreſcono; perchè decreſcono le ordinate contigue, la formula ſara $dv = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$. Per lo contrario ſarà $\frac{y\,dx - x\,dy}{2} = dv$, quando ſi cerchino i ſettori aſſoluti da C verſo E.

Num. 521. Sia ora la ſolita iperbola $a^{\frac{t+n}{n}} = x^{\frac{t}{n}} y$, avremo $y = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t}{n}}}$, e $dy = \frac{-t a^{\frac{t+n}{n}} dx}{n \times x^{\frac{t+n}{n}}}$. Se ſi voglia il ſettore $ABEA$, che comincj da B; fatte queſte ſoſtituzioni nella prima formula, avremo $dv = \frac{a^{\frac{t+n}{n}} dx}{2 x^{\frac{t}{n}}} + \frac{t a^{\frac{t+n}{n}} dx}{2 n x^{\frac{t}{n}}}$, e l'integrale $v = \frac{-t-n \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{2 \times t-n} + q$.

Se t ſia maggiore di n, allorchè x ſia l'unità, vedremo facilmente, ſervendoci le coſe del *Numero* 499., che $v = n = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{2}$., dalle quali ſoſtituzioni avremo l'integrale compita $v = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} - \frac{t-n a^{\frac{t+n}{n}}}{2 \times t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}}$; che ſi ri-

duce

duce ad $v = \frac{t a^{\frac{t+n}{n}}}{t-n} = \frac{t-n \times xy}{2 \times t-n}$.

Se ſupporremo l'iperbola $a^3 = x^2 y$. otterremo $v = 2a^{\frac{3}{2}} - 3a^{\frac{3}{2x}}$, quale è in fatti, perchè eſſendo pel *Num.* 495. lo ſpazio $ABED = 2a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{x}}$, queſto ſpazio eccede il trovato ſettore pel triangolo $AEB = \frac{a^3}{2x}$, onde fattane la ſottrazione, haſſi per queſt'altra maniera il medeſimo ſettore $2a^{\frac{3}{2}} - \frac{3a^3}{2x}$.

Num. 522. Se la t ſia minore di n, e vogliaſi pure che il ſettore ſia $ABEA$, la formula diverrà $v = \frac{t+n \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{2 \times n-t} + q$. In queſto caſo divenendo, ſecondo il *Numero* 502., v, ed x concordemente 0, ci reſterà $q = 0$, e la compita ſarà $t + n \times \frac{a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-n}{n}}}{2 \times n-t} = v = \frac{t+n \times xy}{2 \times n-t}$. Se l'iperbola foſſe ſtata l'Apolloniana $a^2 = xy$, onde t, ed $n = 1$ l'elemento del ſettore, ſecondo il *Num.* 521., ſarebbe ſtato $\frac{a^2 dx}{x}$. Si oſſervi quì attentamente, che queſti ſettori elementarj di queſta iperbola ſono bensì uguali à paralellogrammi correſpondenti elementari della medema iperbola, ma che ciò non oſtante la ſomma

ſomma de' ſettori non uguaglia già quella de' paralellogrammi, e queſto ſia in conferma di quanto hò detto al *Num.* 324. Si oſſervi in oltre, che ſe colla regola ordinaria voleſſimo compir le integrali di queſti due elementi, che ci compariſcono amendue ſotto la ſteſſiſſima forma, troppo grandemente andremmo fallati, e ſpero, che i Dotti mi faranno giuſtizia, ſe hò eſaminata la regola di compire le integrali, e ſe nel ſuo eſame vi ſono proceduto, come dovevaſi. Se $\frac{a^2 dx}{x}$ ſia l' elemento dello ſpazio iperbolico và egli compito come lo feci già nella prima Parte di queſte mie Memorie. Se lo ſteſſiſſimo, quanto alla forma, ſia l' elemento del ſettore iperbolico ci riſulta $\frac{a^2}{2} + a^2 l x = v.$, giacchè in tal caſo q è $= \frac{a^2}{2}$.

E' egli dunque poſſibile compire le integrali di queſti due elementi, quando non ſi ſappia a qual problema appartengano? Può egli baſtarci il fingere, e ſenza baſtevole fondamento le variabili correſpondenti x, ed v uguali a zero?

Num. 523. Se voglianſi i ſettori $AECA$, all' ora è d'uopo ſervirci della ſeconda formula generale, ed otterremo $v = \frac{t+n \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{t+u}{n}}}{2 \times n - t} + q$. Se t ſia maggiore di n, ella cangiaſi in $v = \frac{-t-n \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{2 \times t - n} + q$, e come che (*Num.* 502.) divengono quì ed x, ed v concordemente ∞, la formula ſarà $v = \frac{-t-n a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{2 \times t - n}$, ovvero, che $\frac{-t-n \times xy}{t-n}$, che nella $a^3 = x^2 y$ riſulta $= \frac{-3a^3}{2x}$.

Queſto medeſimo ſettore ſi ottiene dal *Num.* 496. Imperochè eſſendo $CDE = \frac{a^3}{x}$, e il triangolo $ADE = \frac{a^3}{2x}$; il ſettore ſarà, quale ſi è trovato, $= \frac{3a^3}{2x}$; Ma perchè quel ſettore trovato colla ſua formula và veramente contro l' origine della x, ci viene da queſta dato, qual è dovere, col ſegno negativo; E quì è oſſervabile, che queſta integrale, benchè col ſegno negativo, e colla variabile nel denominatore, ciò non oſtante è compita, e che non ci denota altrimenti lo ſpazio a lei oppoſto, ma il proprio, e che ove in vece di x ſi poneſſe il zero, ce lo ſomminiſtrerebbe irremiſibilmente con forma di ∞, benchè da tutti ſia conoſciuto, ed è certamente finito. Diſtrugge dunque col fatto queſta integrale le coſe, che alcuni hanno credute per vere, e che notai al *Num.* 496.

Num. 524. Vogliaſi finalmente il ſettore $AECA$ allorchè n ſia maggiore di t. La formula ſarà $v = \frac{t+n \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{2 \times n - t} + q$. Se la AE foſſe andata ſcorrendo verſo B fino a convenire colla AB, il propoſto ſettore ſarebbe l'intero ſpazio, e però $v = W$, il quale (*Num.* 505) è $\frac{-na^{\frac{t+u}{n}}}{n-t}$. Si pone col ſegno negativo, perchè, e queſto ſettore, e lo ſpazio intero medeſimo vanno di fatto contro l' origine della x. All' ora pure ſarebbe

rebbe $x = a$, laonde la compita farà $v = \frac{-na^{\frac{t+n}{n}}}{n-t} +$

$\frac{\overline{x+n} \times a^{\frac{t+n}{n}} x^{\frac{n-t}{n}}}{2 \times n-t}$, ovvero $v = \frac{-na^{\frac{t+n}{n}}}{n-t} +$

$\frac{\overline{x+n} \times xy}{2 \times n-t}$. Il trovato ſettore nella ſolita iperbola è dun-

que $y = -2a^3 + \frac{3a^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{2}$, e cercandolo per le pre-

meſſe notizie ſi ha nuovamente lo ſteſſo. Anche queſta equazione è oſſervabile. Ella è poſitiva, ed hà la variabile nel numeratore. Se aveſſimo fatte le variabili amendue nulle, avremo creduto compita tale integrale con innegabile errore.

Num. 525. Mi ſi permetta, che in grazia de' Principianti applichi fuori delle iperboli una delle trovate formule pe' ſettori ad un altra curva, onde poſſano aprirſi il campo per trarne i vantaggi, che eſſe formule poſſono arrecarci. All' arco di cerchio AF (*Fig.* 33) ſtiano nell' angolo retto E le due tangenti EA. EF. Sia $CA = a$, $AB = x$, onde $BD = \sqrt{2ax - xx}$, e però $GD = a - \sqrt{2ax - xx}$, che fatta $= y$; eſprimerà la natura dell' arco AD riferito all' aſciſſa EG, dunque $dy = \frac{\overline{x-a} \times dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Se ſi cerchi il ſettore ADE, comechè i dy decreſcono, la formula conveniente è $\frac{y\,dx - x\,dy}{2}$, e con queſta ſi avrà $\frac{a\,dx}{2}$.

$\frac{a\,dx}{2} - \frac{a\,dx\sqrt{x}}{2\sqrt{2a-x}} = dv$. Per trovarne l' integrale procedo così. L' integrale $A = \frac{a\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}{2}$ è

$= \int \frac{-a\,dx\sqrt{x}}{2\sqrt{2a-x}} + \frac{a}{2}\int \frac{a x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2a-x}}$, e comechè

$\int \frac{a x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2a-x}}$ è l' arco AD della circonferenza del dato cerchio cominciando in A, e correſpondente alla $x = AB$; ſi nomini n queſto arco, ed avremo la poſta integrale A

$\frac{a\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}{2} = \frac{an}{2} - \int \frac{a\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{2a-x}}$, laonde $\int \frac{a\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{2a-x}} =$

$\frac{a\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}{2} - \frac{an}{2}$, e queſta farà l' integrale della porzione differenziale ſopra avuta, quanto all' altra porzione $\frac{a\,dx}{2}$, la ſua integrale è $\frac{ax}{2}$, onde avremo $v = \frac{ax}{2} + \frac{a\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}{2} - \frac{an}{2} + q$. Per determinare q oſſervo, che concordemente ed v, ed x divengono minime, e

così pure l'arco $DA = n$, la onde q mi risulta zero, e la trovata integrale era compita. E facile averne la riprova, giacchè il triangolo CBD è $= \frac{a-x \times \sqrt{2ax-xx}}{2}$, la somma de' due triangoli ADE, ADB è $= x \times \frac{a+\sqrt{2ax-xx}}{2}$, la onde tutto lo spazio $CDEA$ è $= \frac{ax+a\sqrt{2ax-xx}}{2}$. Il settore ACD è $= \frac{an}{2}$, che levato da tale spazio lascia il settore v quale è stato trovato.

Num. 526. In grazia pure de' Principianti porrò altre due formule generali per ritrovare altre maniere di settori. Sia (*Fig.* 34.) $AE = p$, ed $AF = x$, onde $EF = x - p.$, e la $FH = y.$, onde $EH = \sqrt{x-p^2+y^2}$, la di cui differenza è $eb = \frac{dx \times \overline{x-p} + y\,dy}{\sqrt{x-p^2+y^2}}$. Da ciò si caverà il settore $EHB = dv = y\frac{dx}{2} - \frac{dy \times \overline{x-p}}{2}$, e questo, quando il settore assoluto GEH debba cominciare dargli, e procedere verso $I.$, ed aver l'apice non già nell' angolo A, ma in un'altro punto E dell'ascissa AI. La formula poi $dv = \frac{dy \times \overline{x-p}}{2} - y\,dx$ è pel settore IGE quando debba cominciare da I, e procedere verso B. Se poi l'apice del settore vogliasi entro il concavo della curva, come in E (*Fig.* 35.), purchè esso punto E sia dato di posizione, mediante la normale $DE = b$, ed $EF = AD = p$; avremo pure il settore elementare dv

$= \frac{dy \times \overline{p-x}}{2} - \frac{dx \times \overline{b-y}}{2}$ quando il settore, cominciando dalla parte di C và verso B, e per lo contrario $dv = \frac{dx \times \overline{b-y}}{2} - \frac{dy \times \overline{p-x}}{2}$. Se le due normali fossero fra loro uguali, è all' ora visibile, che per la detta formula aver si potrebbero nelle iperboli, ed a proporzione in altre curve, le aree di esse iperboli, la natura delle quali non fosse riferita alle assintoti, ma al loro asse, o diametro prolongato, cosa che può giovare assai nelle quadrature delle iperboli, o altre curve espresse per tale maniera. I Principianti potranno esercitarsi su queste formule, e trovare i modi di compire quelle integrali, che loro si offriranno; E certamente sempre più avranno occasione di convincersi da loro medesimi, che la regola di compire le integrali aveva bisogno di un esame più attento, e che essendo essa parte essenziale, anzi il compimento del Calcolo integrale, almeno per loro riguardo la presente Appendice non sarà stata superflua. Prima però di porvi fine sembrami far di mestieri raccorre in succinto alcune avvertenze, parte delle quali sono andato spargendo nelle presenti memorie, ma che quì hanno il loro proprio luogo.

Num. 527. Più della metà dunque degli spazj iperbolici, e non poca parte de' loro settori, i quali erano comunemente creduti infiniti, possono credersi con ragione finiti, e le loro aree si ottengono con un confronto, ed accordo, come si è veduto, che ne conferma mirabilmente la verità, senza che l'infinito vi appaja. Per qual cagione dunque vi aveva potuto apparire? Nè cerco io già del mezzo per cui ciò succede, cioè supponendo nulle quelle variabili, che sono nel denominatore. Cerco la cagione più intima, cioè perche nelle iperboli, che hanno t maggiore di n, possa accadere questo accidente, e non in quelle, che lo hanno al contrario. Sopra la soluzione di sì altrusa dimanda, ed anche sulla nascita dell' infinito azzarderò il mio pensiere.

Num. 528. E' invalso di servirsi nel calcolo della sola espressione $\frac{a}{c}$ per notare promiscuamente due cose fra loro essenzialmente diverse, nè si è avuta la diligenza di dare a tale espressione qualche carattere specifico per riconoscere quale denoti delle due cose. Significa dunque essa espressione quell' assoluta quantità che proviene dal dividere a per c, e che denominiamo quoziente, e denota altresì l' abitudine, o rapporto geometrico che hà la grandezza a alla grandezza c. E' superfluo che io mi faccia a rilevare l' essenziale diversità di questi due concetti, manifestissima essendo per se medesima. Si è dato il caso nel calcolare che per le regole certe, e ben usate del medesimo calcolo abbia a nascere l' espressione $\frac{a}{o}$, e discorrendo all'ora chi in tale simbolo è incappato, che i quozienti crescono sempre più quanto scema il divisore, gli ha paruto di ben conchiudere, che essendo il divisore c, all' or quando è divenuto zero, decresciuto all' infinito, infinito ne abbia ad essere il quoziente, e però non poter l' espressione $\frac{a}{o}$ altro significare, che l' infinito. Potrebbe ben parere, che questo discorso abbia delle eccezzioni. Quando io hò l' espressione $a \times o$ convengo benissimo che ella significhi il nulla, ma non già perche il nulla abbia a distruggere la quantità assoluta a, ma perche intendendosi che a è presa niuna volta, o che è lo stesso, ella è veramente non posta, io chiaramente conosco, che non essendovi la grandezza a, come lo denota l' espressione $a \times o$, questa altro non può significare che il nulla; E perche dunque nell' espressione $\frac{a}{o}$, ove si voglia che dinoti divisione, non abbiamo piuttosto a dire significar ella, che a è niuna volta diviso o, che sembra lo stesso, che niuna grandezza lo divide? e certamente il nulla niuna cosa può fare, e conseguentemente nè men dividere, e tanto meno far l' iusinito, che è il maggior tutto che diasi. Ma quand' anche lo denotasse non parmi già che seguire unicamente ne debba che $\frac{a}{o}$ denoti l' infinito.

Num 529. Sia dunque $\frac{a}{o} = b$, ed esaminiamo il valore di b. Non può dubitarsi, che non sia vera la conseguente equazione $a = b \times o$, e così l' altra che a sia $= o$ (suppongo quì che l' espressione $\frac{a}{o}$ sia espressione essenzialmente vera, il che esaminerò fra poco). Or come intendere che una quantità costante, e nell' ordine suo assoluto realmente esistente, e che non era zero, diventi zero; Nè giova punto per iscansare la difficoltà il pretendere che b fosse infinito, perche il simbolo $\infty \times o$ rimane anch' esso il solo zero, giacchè un infinità di zeri niente di più può produrre di zero, e ritorniamo al vero significato di quell' espressione, cioè che il creduto infinito è posto nissuna volta. Ma potrà forse pretendersi che $\frac{a}{o}$ significhi che il nulla possa porsi nella a un infinità di volte, e però significar l' infinito. Visibile equivoco par questo a me. Il nulla niuna volta può porsi in a, giacche replicato il nulla non solo infinite volte, ma se sfrenatamente anche voleffimo dirlo infinità di infinità di volte, niuna volta non sarà mai posto non solo in a, ma nè pure in qualunque di lei menomissima parte, e farà in a la sola sua propria comparsa, o estensione negativa del nulla.

Num. 530. Questo pare a me anche di troppo per toccar con mano che l' espressione $\frac{a}{o}$ non può denotar divisione.

sione . Resta dunque, che ci denoti una abitudine geometrica , e questo è quello che veramente ci denota . Ma questa abitudine è per verità molto particolare , ed hà bisogno di attenzione per formarne il suo giusto concetto . E' notissimo , nè può dubitarsene , che le quantità eterogenee non possono compararsi fra di loro , e però che aver non possono fra di loro vera vicendevole abitudine di quantità . Se noi volessimo comparare la lunghezza di un piede alla lunghezza (servendoci malamente di questo termine in vece del proprio di durazione) di una settimana , non vi è chi non veda , non potersi fare questa comparazione , perche tali lunghezze non essendo nello stesso ordine di quantità sono eterogenee . Non è però , che se facendo noi un discorso ben condotto , e quanto a se non erroneo , ci venisse fuori una conchiusione legitima , che la lunghezza di un piede fosse per esempio un terzo della lunghezza di una settimana , non ci venisse altresì una vera idea di un abitudine geometrica , benchè l'abitudine sia impossibile , e noi all' ora riflettendovi ci acorgeremmo della nostra assurda conchiusione , e riandando , ed assicurandoci della verità del nostro antecedente discorso , a questo non imputeremo l'errore , ma bensì a quella disattenzione , per la quale abbiamo lasciati scorrere i nostri pensieri a comparare assieme quantità , che erano incomparabili . Ciò riconosciuto lasceremo da parte tutto il nostro discorso , benchè quanto a se , giusto , e ben fatto , e così pure la sua conchiusione , come lavoro totalmente inutile , se non se , bastevole a farci avvertiti del nostro equivoco . Con perfetta analogia a quanto hò immaginato succede la cosa in proposito dell' espressione $\frac{a}{o}$, e prendendo un esempio in concreto , venga con un fondato , e vero discorso data dal calcolo differenziale l'espressione $\frac{a\,dx}{x}$, e con ugual verità data conseguentemente dal calcolo integrale la $\frac{ax^{o}}{o} =$

$\frac{a}{o}$, onde l'abitudine di una grandezza costante , assoluta , e realmente esistente , ad un altra non esistente , e che perciò non può mai dirsi grandezza . Bisogna pur conoscere che quì abitudine non si può dare , mentre qual maggiore eterogeneità può mai concepirsi quanto è quella , che in questo fatto si manifesta fra una vera quantità , ed una non quantità . Quando dunque il nostro ben condotto , e quanto a se vero discorso ci hà prodotta l' impossibile abitudine $\frac{a}{o}$ ci è d' uopo lasciar da parte esso discorso , e la sua conseguenza , e riconoscere , che le quantità sulle quali abbiamo preteso di fare i nostri calcoli , comparandole assieme , sono di loro natura incomparabili ; e in fatti nel presente caso individuale , non può dubitarsi che tali non sieno , giacchè i logoritmi considerati nel problema sono di una spezie di quantità essenzialmente diversa dalla spezie della quantità assoluta .

Num. 531. Spiegate queste cose , se l' espressione $\frac{a}{o}$ non può denotar divisione , non può neppure in senso vero , ed adequato denotare un abitudine , ma solo in senso indiretto , ed è di avertirci aver noi , senza accorgersene , supposto , che le quantità che noi maneggiamo in un problema , sieno omogenee , quando che non le sono , e l'Algebra (preggio mirabile della quale è di corrisponder sempre fedelmente co' suoi simboli alle nostre vere idee) ce ne avvertisce , mostrandoci per risultato del nostro discorso , due quantità estremamente eterogenee comparate assieme . Se questi miei pensieri , o fantasie sono vere , parmi che nella considerazione dell' infinito sia da andarsi con non poca cautela , badando se egli nasca , o venga a comparirci per l'esposta maniera , mentre in tal caso io diffiderei molto di sua vera esistenza . Quanto poi a sciorre il già proposto quesito , cioè per qual ragione nelle quadrature delle

le iperboli, che hanno t maggiore di n ſalti fuori l' infinito, e non v' appaja in quelle, che lo hanno per lo contrario, proſeguendo ſopra le coſe eſpoſte, parmi non difficile il farlo. Nel primo caſo le variabili correſpondenti ſtanno reciprocamente. Debbeſi dunque in eſſe iperboli comparare una variabile minima ad una maſſima; E però, quando noi, ſupponendo x, ed v uguali a zero, veniamo a comparare con viſibile errore una minima ad una minima, onde è pur viſibile che l' abitudine in queſto caſo da noi voluta, ſarebbe abitudine per dir così eterogonea, mentre la legge del problema ripugna, che una minima ſia comparata ad una minima. Quindi è, che procedendo ſu tale inavvertenza, doveva il calcolo darci tale abitudine eterogenea, perchè per eſſa conoſceſſimo il noſtro equivoco. Ma pur troppo in vece di correggerlo ne è nato un altro, cioè il credere infinito ciò che è finito, e che da dottiſſimi Maeſtri era ſtato riconoſciuto per tale (*Num.* 497) Nelle iperboli poi, che hanno t minore di n, eſſendo le variabili amendue, o minime, o maſſime, non hanno avuto luogo tali coſe ſe non ſe nell' occaſione di volere gl' interi ſpazj ſiaſi aſſunta un abitudine eterogenea.

Num. 532. Poſſono per altro tutte le iperboli, e così ſarà di non poche altre curve, avere un non sò che di eterogeneo in loro, che difficulta le loro compitamente aſſolute quadrature quando ottenener ſi vogliano per iſtrada non propria. Queſta eterogeneità non è però la ragione che abbia fatto uſcire in iſcena l' infinito. Per iſpiegarmi piglierò per eſempio la $a^3 = x^2 y$; la di cui area v è $= 2a^3 - \frac{a^3}{y} = 2a^3 - xy$. In due maniere aſſai diverſe, può ſembrare a tal uno che uſo far ſi poſſa di queſta eſpreſſione, che è veramente tutta in termini aſſoluti. Nella prima potrebbe volerſi intendere, che la a ſia diviſa in un numero grandiſſimo di particelle menomiſſime rifferite ad una nota miſura, qual ſarebbe la linea del Piè geometrico, e così avere nota la grandezza a^3, ed xy., onde per un approſſimazione ſempre maggiore, ottenere l' aſſoluta miſura dello

dello ſpazio cercato. Nella ſeconda potrebbe, come moſtrerò in appreſſo, volerſi cercare un rettangolo uguale ad a^3. Servendoci del primo modo, che a dir vero non conviene a queſta coſtruzione, incontraſſi la ſovra avvertita eterogeneità, perchè una linea non è comparabile ad un' area, e tanto meno ad un ſolido; eterogeneità, che produce una ſpezie d' incomenſurabili, che potremmo chiamare di ordine, a diſtinzione degl' irazionali, onde volendoſi fare queſta comparazione è forza di ridurre quel ſolido all' eſſere come di numero, e così ſervirſene, ſenza però poter avere il preciſo ſpazio iperbolico, datoci bensì dal calcolo in quantità aſſolute, ma eterogenee nella qualità, eſponendoci un area per un ſolido. Se poi vorremo ſervirci del ſecondo modo, niuno impedimento vi troveremo, perchè procedendo per iſtrada puramente Geometrica, troveremmo il cercato rettangolo coll' artifizio ſeguente.

Num. 523. Propongaſi di ritrovare il rettangolo $v = p^n$, eſſendo n qualunque numero intero. Fleviſi il 2 alla dignità n, indi condotta (*Fig.* 36.) una retta indefinita AQ, ſi pongano ſopra di eſſa tante parti uguali, e lunghe a piacimento, quante unità contiene 2^n, e terminino queſte in B; S' alzi quivi la perpendicolare $BC =$ a due delle poſte parti. Nel punto A ſi tiri la normale indefinita DE, ſi ponga $AD =$ ad una delle nominate parti uguali. Ciò preparato, conducaſi pe' punti A, e C una parabola, il di cui parametro ſia AD, e la ſua equazione $AD \times x = y^2$. fatto queſto, ſi ponga ſulla AE la $AF =$ alla data p, e tirata la FG parallela all' aſſe, che incontri la parabola in G, dal punto G ſi tiri l' ordinata GH, che ſi prolunghi in I; di modo che HI ſia $= AD$, ſi tiri DI. E' manifeſto che il rettangolo $AD \times DI$ ſarà $= p^n = y^n = v$. E' per ſe chiaro, che in vece del 2 potrà adoprarſi qualunque altro numero intero i, ma allora la BC doveva porſi di altrettante parti uguali quante unità ſono in i. E' manifeſto adeſſo poterſi ſciorre il propoſto problema non ſolo ſe l' eſponente n ſia numero intero, ma ſe ſia frazione, onde può trovarſi $v = p^{\frac{t}{u}}$. Perciò ottenere ſi trovi un numero, che elevato alla

alla dignità di r abbia queſto così elevato la radice razionale deſignata per n. Così ſe foſſe propoſto di trovare $v = p^{\frac{5}{2}}$, il numero 4 ſoddisfa a queſta preparazione, perchè 4 elevato a 3 (cioè al cubo) è 64, e la radice di 64 è 8. Trovato dunque il numero opportuno, pongaſi la AB di altrettante parti uguali quante ne ſono nel trovato numero elevato $a^{\frac{1}{n}}$ (come nel preſente eſempio di 8), e la Bc di quante ne ſono nel medeſimo numero (cioè 8 parti 4), e pongaſi DA una di queſti parti. Deſcrivaſi poi la parabola, la di cui natura ſia $AD \times x = y^{\frac{1}{n}}$, e avremo $v = p^{\frac{1}{n}}$.

Num. 534. Mi reſta ora di dare lo ſcioglimento di quel Paradoſſo, che notai al *Num.* 506., ed è come la ſomma de' termini della ſerie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ &c. protratta al poſſibile ci paja uguale alla ſomma de' termini $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} +$ &c. di queſta ſeconda ſerie anch' eſſa protratta al poſſibile, giacchè ſi è trovato, che ognuna di queſte ſerie multiplicata per la ſua reſpettiva coſtante empie le due aree intere, ed eguali di due iperboli reciproche. Intendo, che ogni ſomma di dette ſerie ſia protratta al poſſibile, quando che l' ultimo loro termine $\frac{a^3}{x^2}$, o $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ ſia giunto a tale picciolezza, che ſe magiormente ſcemaſſe, non ſuſſiſterebbero più le equazioni $a^3 = x y^2$., che fanno l' eſſenza di detti termini: Lo che non ſignifica punto, che tali ultimi termini ſieno diventati zero, nè che la multitudine de' termini, che le compongono, ſieno divenute infinite, ma che è evacuata tutta la multitudine delle variabili contigue, che può ammettere il dato problema. Mi ſo dunque a con-

ſiderare, che nell' iperbola $a^3 = x^2 y$, che chiamerò la prima iperbola, ogni termine della ſua ſerie è multiplicato ſempre per a^3, e che nell' iperbola $a^3 = x y^2$, che chiamerò la ſeconda, ogni termine della propria ſerie è multiplicato per $a^{\frac{3}{2}}$. L' inugualianza viſibile di queſti due multiplicatori ella è, che compenſa per appunto l' inuguaglianza, che hanno reciprocamente i termini corriſpondenti delle loro ſerie, e la loro diverſa multitudine, le quali multitudini, detta m quella della prima ſerie, ed n quella della ſeconda, ſtano :: $m . n$ :: $a^{\frac{3}{2}} . a^3$. Ciò riflettuto ſi vede ſubito, che niente ripugna, che le due iperboli reciproche ſieno uguali, e che ſta termiſſimo, che la parte è minore del tutto, mentre, benche le due iperboli abbiano le loro ordinate, come ſi ſono ritrovate, non è già vero, che la ſomma di tanti termini della prima ſerie conſiderati ſenza eſſere multiplicati per veruna grandezza, ſia uguale alla ſomma di altrettanti termini della ſeconda ſerie, la multitudine de' quali nella prima eſſendo $a^{\frac{3}{2}}$, ed eſſendo multiplicati cadauno di loro per a^3 è = alla ſerie de' termini della ſeconda, la multitudine de' quali è a^3, e ſono multiplicati cadauno di loro per $a^{\frac{3}{2}}$.

Num. 535. Reſe paleſi queſte coſe, avremo apertura di ſommare tutte le ſerie, che ſporrò. Voglio, che la ſerie poſſa ridurſi ad avere in tutti i ſuoi termini l' unità per numeratore, e che per denominatori abbia i numeri naturali per ordine elevati alla medeſima dignità. Se la dignità ſia una frazione non minore dell' unità (onde ſe il denominatore della frazione ſia anch' eſſo l' unità, reſtano in queſta condizione compreſe anche le dignità intere) dee procederſi, come moſtrai al *Num.* 301. Se poi la frazione, che denota la dignità, ſia minore dell' unità, dee procederſi in altro modo. Nel primo caſo, che per meglio ſpiegare ciò che ho da dire, chieggo licenza di qui replicare ſuccintamente

lamente: Sia la frazione la $\frac{1}{x^{\frac{s}{n}}}$, e qui neceſſariamente s maggiore di n, pongaſi l' iperbola $a^{\frac{s+n}{s}} = x^s y^n$. Detta S la ſomma cercata de' termini, giacchè la loro ſomma multiplicata per $a^{\frac{s+n}{s}}$ (*Num.* 457.) fa l' area dell' iperbola predetta, e la quale area è $\frac{s\,a^{\frac{s+n}{n}}}{s-n}$ (*Num.* 500.) avremo $S \times a^{\frac{s+n}{s}} = \frac{s\,a^{\frac{s+n}{n}}}{s-n}$, laonde, come allora ſtabilimmo, $S = \frac{s}{s-n}$. Paſſiamo al ſecondo caſo, e ſia l' iperbola reciproca $a^{\frac{s+n}{s}} = x^n y^s$. onde i termini della ſerie ſieno $\frac{x}{x^{\frac{n}{s}}}$, in cui ſeguendo a ſupporre s maggiore di n, la $\frac{n}{s}$ è minore dell' unità. Dicaſi s la ſomma de' termini, che ſi ricerca di queſta ſeconda ſerie. Avremo anche ora $s \times a^{\frac{s+n}{n}}$ uguale all' area totale della ſua iperbola, che per eſſere reciproca all' iperbola antecedente, poſta (*Num.* 458.) $S \times a^{\frac{s+n}{n}} = s \times a^{\frac{s+n}{s}}$, onde $s \times \frac{a^{\frac{s+n}{n}}}{a^{\frac{s+n}{s}}} = S = \frac{s}{s-n}$ e perciò $s = \frac{s}{s-n} \times \frac{a^{\frac{s+n}{s}}}{a^{\frac{s+n}{n}}} = \frac{s}{s-n} \times a^{\frac{ns-ns}{sn}}$. Le

ſerie dunque tutte della prima fatta hanno le loro ſomme $\frac{s}{s-n}$ eſprimibili con tutta facilità per ſoli numeri, ma quelle della ſeconda hanno le loro ſomme, le quali eſſendo multiplici della prima per la quantità $\frac{1}{a^{\frac{ss-nn}{sn}}}$ (ſi pone nel denominatore, perchè la quantità $nn - ss$ è negativa, eſſendo s maggiore di n) ſono più difficilmente eſponibili, complicandoſi nella loro eſpreſſione co' numeri la quantità concreta. Per torre al poſſibile queſta complicazione ecco ciò, che mi è ſovvenuto di fare col Problema del *Numero* 513. (*Fig.* 36.). Troviſi il Rettangolo $AI. = a^{\frac{s+n}{n}}$, il di cui lato ſia AH. Collo ſteſſo Problema troviſi l' altra parabola AL, che avendo lo ſteſſo parametro AD ci dia il rettangolo $AN = a^{\frac{s+n}{s}}$, il di cui lato ſia AM. Abbiamo dunque così le due vere, ed omogene $a^{\frac{s+n}{n}}$ (AN), ed $a^{\frac{s+n}{s}}$ (AM), laonde poſta nel punto H la retta AO di tante parti arbitrarie, purchè tutte fra loro uguali, quante ne contiene $s-n$, conlotta per O dal vertice A la retta indefinita AP, e la PM parallela alla HO, queſta MP, colla multitudine delle parti uguali, che conterrà, e che ſi ſono poſte nella HO, denoterà la ſomma s, giacchè $HO : MP :: AH . AM :: a^{\frac{s+n}{n}} . a^{\frac{s+n}{s}} :: S . s$.

Num. 536. Qui debbono raccorſi alcune conſeguenze. La ſomma dunque s di tutti i poſſibili termini della ſerie della ſeconda fatta è certamente finita, giacchè eſſendo $AH . AM$, ed S. tutte grandezze finite, è forza, che lo ſia la s. La ſomma della ſerie armonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$ &c. può crederſi con tutto fondamento minore della ſerie $\sqrt{\frac{1}{1}} +$

$+ \sqrt[\frac{1}{2}]{2} + \sqrt[\frac{1}{3}]{3} +$ &c. e tanto più di molte altre di minor esponente, dunque la somma della serie armonica può crederſi con tutto fondamento finita.

Num. 536. Ripigliando l' analogia $S. s :: 1. a^{\frac{tt-nn}{tn}} \left(a^{\frac{t+n}{n}}\right) \left(a^{\frac{t+n}{t}}\right)$ oſſervo, che il numeratore è l' aſſintoto maggiore, e il denominatore è il minore della medeſima iperbola. Verremo per tanto anche ad avere la ſomma della prima ſerie alla ſomma della ſeconda come la prima minima aſciſſa, o iniziale dx, deſignata qui dal calcolo per l' unità, al quoziente ſuddetto. Siccome dunque la ragione di S ad s è di finito a finito, e il medeſimo quoziente è viſibilmente finito, reſta chiaro, che anche dx è dello ſteſſo ordine finito; e che però gli accreſcimenti delle variabili contigue ſi confermano eſſere quali, e conſiderando (*Num.* 22.) la loro eſſenziale idea, gli ſtabilii, quantità aſſolutamente finite. Pare, che ſieno d' un ordine diverſo, e la cagione manifeſta di tale apparenza ſi è, che avendo noi poſta privativamente l' idea, che ſieno quelle minime quantità, che ricercanſi per fare, che aggiungendoſi, o levandoſi alla propria variabile primitiva, la coſtituiſcano la ſua contigua, li abbiamo perciò tolti in qualche modo dal comune delle altre quantità, e ripoſti come in un ordine diverſo, ma non perciò infinitamente picciolo.

Num. 538. Una difficoltà potrebbe inſorgere circa alla ragione 1 ad $\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{a^{\frac{t+n}{t}}}$, quando per 1 ſi doveſſe deſignare dx, , e queſta pure dileguerò. Se ſi ſupponeſſe, che in ogni pajo d' iperboli reciproche diverſe, pajo per pajo, nella propria podeſtà, eſſendo, per modo d' eſempio, la podeſtà in un pajo la a^3, e nell' altra la b^3, le minime aſciſſe poſſibili foſſero uguali, la onde in tutte ſi aveſſe la medeſima unità, ed iniziale uguale, ſarebbe pur certo, che cambiando in tal caſo neceſſariamente le aſſintoti le loro aſſolute grandezze, la ragione ſuddetta, che è uguale a quella delle due ſomme, e che è certamente coſtante per ſua natura, ci ſarebbe reſa variabile. Sta l' equivoco nel ſupporre, che le minime aſciſſe ſieno generalmente uguali. Sono eſſe proporzionali alle minime ordinate delle loro riſpettive iperboli: coſa che a me ſembra evidente. In fatti in ognuna delle due iperboli omologhe, che ſieno compite, debbono capirvi tante ordinate nè più nè meno, quanti ſono i termini poſſibili della medeſima ſerie, che è la propria di eſſe iperboli, onde ſulle loro aſciſſe debbono capirvi altrettanti nè più nè meno, minimi accreſcimenti contigui (cioè tanti dx) tutti fra loro uguali bensì nella loro variabile, ma diſuguali, riferiti gli uni dell' una iperbola agli altri dell' altra. Quindi è, che le unità dell' altra omologa aſciſſa non poſſono eſſere fra di loro uguali, ma bensì nella ragione, che ho aſſegnata. Queſto rifleſſo ſempre più ſcuopre inutile il metodo di approſſimazione, che adoprar ſi voleſſe, ed accennai al *Num.* 532.

Num. 539. E' duopo dir ancor qualche coſa dell' area intera dell' iperbola Apolloniana, e della ſomma intera della ſerie armonica, la quale fa come una eccezione alla poſta regola di ſommare le ſerie della prima fatta [*Num.* 535.] giacchè ſembra, che i denominatori di queſta ſerie abbiano l' eſponente maggiore dell' unità, concioſſiachè ritrovandoſi $s = u = 1$ haſſi l' eſponente $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$, che non ſolo maggiore dell' unità, ma ſi direbbe infinito. Proſeguendo ſopra le coſe premeſſe ne' *Numeri* 529., e 530., queſto eſponente ci denota ſolo eſſervi in queſta diſquiſizione quantità eterogenee a quelle, alle quali noi vorremo fare una comparazione, onde biſogna cercare altronde la ſomma di queſta ſerie, e ſcoperte eſſe quantità eterogenee, maneggiarle col calcolo loro proprio. E' ſuperfluo il rammentare, che il male viene qui da' Logoritmi, e che del calcolo loro proprio è di uopo ſervirſi: e il come lo moſtrai nella *Prima Parte*

Parte di queſte mie Memorie, di che però è neceſsario qui riparlare, per ſoddisfare a ciò, che mi propongo, e che allora (*Num.* 180.) io promiſi. Ebbimo al *Num.* 178. l' equazione $v = aa + \frac{aaL}{4341000}$, che eſprime per v il valore di qualunque ſegmento iperbolico, l' aſciſſa del quale abbia il logoritmo L. Per eſibire ora un rettangolo, che adegui il richieſto ſegmento v, ſi trovi (*Fig.* 36.) pel *Num.* 533. il rettangolo $AI = aa$, podeſtà della data iperbola. Se il logoritmo L diviſo per 4341000 dia per quoziente un numero intero, aggiungaſi al trovato rettangolo AI altrettante volte il medeſimo, quante unità contiene il riſultato quoziente. Se queſto quoziente ſia un rotto, ridotta la frazione ſolamente a' minimi termini, e riſparmiando di fare l' attual diviſione, il rettangolo AI ſi replichi tante volte, ponendone uno in capo all' altro, quante unità contiene il denominatore di eſſa frazione, onde diviſo il lato così replicato in altrettante parti uguali quante unità contiene il denominatore: uno di quali rettangoli, per eſempio, HN, ſi aggiunga al rettangolo AI, e tutto il rettangolo AN ſarà uguale al propoſto ſpazio v. Coſa per ſe evidente ſenz' altra dimoſtrazione.

Num. 540. Volendo poi tutta l' area intera dell' iperbola, può procederſi così. Trovato pel detto *Num.* 533. il rettangolo $AI = aa$, veggaſi che ragione abbia il ſuo lato AB, che figura l' unità all' altro lato ritrovato AH, onde ſi abbia il quoziente $\frac{AH}{AB}$, che venga ad eſporre un numero. Queſto numero equivarrà, come è viſibile, al numero eſprimibile per aa, quando è ridotto a dover eſprimere una linea, vale a dire, quando eſprima l' intera aſſintoto dell' iperbola, onde preſo nelle Tavole il Logoritmo correſpondente a tal numero, che equivarrà così a Laa, ſi operi, come ſopra, e il così trovato rettangolo, che dirò, per eſempio, AN, ſarà uguale all' area intera dell' iperbola. Potiamo pure ſervirci, e più brevemente della maniera ſeguente. Troviſi (*Fig.* 6.) l' area del ſegmento $FACBF$ correſpondente all' aſciſſa $AC = aa$ lato della podeſtà dell' iperbola. Da tale area leviſi il quadrato di a. Queſto reſiduo

ſiduo ſi raddoppj, ed aggiungagli il medeſimo quadrato di a, e queſto compoſto è manifeſtamente il valore intero dello ſpazio intero iperbolico. La quadratura per tanto dell' intera iperbola apolloniana ſi ottiene per mezzo di ſole linee rette, della parabola apolloniana, e de' logoritmi.

Num. 541. Per ritrovar finalmente la ſomma s di tutti i poſſibili termini della ſerie armonica, compreſa l' unità, e che capiſcono nell' iperbola apolloniana protratta al poſſibile, comechè queſta s multiplicata per aa è uguale al trovato rettangolo ſovraſuppoſto AN: dividaſi queſto pel rettangolo $AI = aa$, e la frazione, o quoziente $\frac{AN}{AI}$ ſarà $= s$.

Num. 542. Oltre le varie maniere di avvantaggiare il Calcolo Integrale, che ſono andato notando, prima di por mano alla preſente Appendice, una ve n' ha, della quale non ho per anche parlato di propoſito. Mi ſtenderò dunque prima di terminare le preſenti Memorie alcun poco ſopra di queſta maniera, e così compirò a quanto promiſi al *Numero* 216.

Sia dunque (*Fig.* 37.) fra le aſſintoti AR. AG, poſte ad angolo retto, qualſivoglia iperbola $HBE\left[a^{t+n} = x^t y^n.\right]$, e diviſo per mezzo colla retta AD l' angolo retto RAG, ritroviſi, mediante le variabili x. y della data equazione, la natura dell' iperbola medeſima, riferita alla AD, come aſſe, e le di cui aſciſſe BD ſieno z, e le ordinate DE ſieno v. Per ſciorre queſto Problema ſia $AC = a$; $AF = x$, $FE = y$. Sarà dunque $AB = a\sqrt{2}$, e però $AD = a\sqrt{2} + z$, che per facilità del Calcolo dirò g. Così pure è $AG = x + y$, e perchè $AD\sqrt{2}$ è $= AG$, avremo $y = g\sqrt{2} - x$; Ed eſſendo ancora $EG = y\sqrt{2}$, onde $DG = v + y\sqrt{2}$, che è $= AD = g$, avremo ancora $y = \frac{g-v}{\sqrt{2}}$. Finalmente l' equazione $a^{t+n} = x^t y^n$.

della propoſta iperbola ci dà la terza equazione $y = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t}{n}}}$

Queſti tre valori di y comparati aſſieme ci producono l' equazione $\sqrt{2}^{\frac{t+n}{n}} \times a^{\frac{t+n}{n}} = \overline{g-v} \times \overline{g+v}^{\frac{t}{n}}$, che è l' equazione generale di tutte quante le iperboli BE riferite alla retta AD dividente per mezzo l' angolo retto delle loro aſſintoti, ed eſpoſta per le coordinate z (BD), ed v [DE]. E' da avvertirſi, che nelle iperboli diverſe dall' Apolloniana, l' iperbola BE è il ſolo ramo diſcendente di quell' iperbola, della quale in queſta ricerca ſi adopera l' equazione.

Num. 543. Noterò di paſſaggio, che in tutte le equazioni della ſeguente forma $x^{\frac{t}{n}+1} - x^{\frac{t}{n}} g\sqrt{2} + a^{\frac{t+n}{n}} = 0$. Nella qual forma ſta nel primo termine con ſegno poſitivo la ſola variabile; nel ſecondo termine vi ſta col ſuo coefficiente la variabile con ſegno negativo, e nel terzo termine ſta con ſegno poſitivo un compoſto di ſole coſtanti. Queſti tre termini ſono uguali a zero. L' eſponente della variabile nel primo termine creſce di una unità ſopra dell' eſponente della variabile nel ſecondo. In tutte le equazioni dunque della deſcritta forma la x è l' aſciſſa AF del ramo diſcendente di quell' iperbola, l' eſponente della quale x in eſſa iperbola è t, e l' eſponente della ſua y è n, e la ſua podeſtà è a, e viene eſſa x determinata dalla normale EF, laſciata cadere dal punto E perpendicolarmente alla AG. La prima delle tre equazioni del Numero antecedente, cioè $y = g\sqrt{2} - x$, comparata colla terza, cioè $y = \frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t}{n}}}$ produce la

radici delle equazioni potrebbe forſe eſaminare ſe queſta annotazione poteſſe aver uſo.

Num. 544. Abbiamo pur anche in qualſivoglia iperbola $x = \sqrt{2}^{\frac{t+v}{v}}$. Queſta equazione proviene comparando la prima colla ſeconda equazione del *Num.* 542.. Ciò premeſſo ſuppongaſi, che la data iperbola ſia la $aa = xy$, e però eſſendo n, e $t = 1$., avremo per l' equazione del ramo BE riferito alla retta BD. $gg - vv = 2aa = 2aa + 2az\sqrt{2} + zz - vv$, ed $v = \sqrt{2az\sqrt{2} + zz}$, che è l' equazione dell' iperbola apolloniana, riferita non più alle aſſintoti, ma al ſuo aſſe, come è già noto. Vogliaſi per tanto l' area $BEDB$ di queſta iperbola, ed è manifeſto, che ſarà l' integrale di $dz\sqrt{2az\sqrt{2} + zz}$. Per ritrovare queſta integrale per un metodo totalmente geometrico, e che ora imprendo a ſpiegare, facendomi ſtrada con queſto eſempio, procedo così. Conſidero la iperbola HBE riferita alle aſſintoti, e ſapendo già, che lo ſpazio $TAFEBHT$ è $aa + aalx$ [giachè AF è $= x$], e che tutto lo ſpazio $TAMHT$. è $aa + aal\frac{a}{x}$ [imperciocchè $AM = EF$ è $= y = \frac{aa}{x}$] vengo a ſapere, che lo ſpazio $HMFEBH$ è $= aa + aalx - aal\frac{a}{x} = 2aa\overline{lx - la} = 2aal\frac{x}{a}$. Levando poi da queſto il rettangolo $OMFE = y$ [EF] $\times \overline{x-y}$ ($AF - AM$) $= \frac{aa}{x} \times \frac{xx-aa}{x} = a^2 - \frac{a^4}{xx}$, ci rimane lo ſpazio $HBEOH = \frac{a^4}{xx} - a^2 + 2aal\frac{x}{a}$. Il triangolo poi rettilineo $HOEH$ è $= \frac{\overline{FM}^2}{2} = \frac{\overline{x-y}^2}{2} = x^2 - aa + \frac{a^4}{2xx}$, e levando

da queſto lo ſpazio $HBEOH = \frac{a^4}{xx} - a^2 + 2aaL\frac{x}{a}$, rimane $\frac{x^2}{2} - \frac{a^4}{2xx} - 2a^2L\frac{x}{a}$, la di cui metà è lo ſpazio cercato $BEDB = \frac{x^2}{4} - \frac{a^4}{4xx} - aal\frac{x}{a}$, e ſoſtituendo $\frac{g+v}{\sqrt{2}}$ in vece di x, diviene $\frac{g+v^2}{8} - \frac{a^4}{2\times g+v^2} - aal\frac{g+v}{a\sqrt{2}}$, e finalmente eſſendo pure nel preſente caſo $g = a\sqrt{2} + z$, ed $v = \sqrt{2az\sqrt{2}+zz}$, onde $g+v = a\sqrt{2} + z + \sqrt{2}\sqrt{az\sqrt{2}+zz}$, avremo l' area $BEDB$, o l' integrale di

$$dz\sqrt{2az\sqrt{2}+zz}(E) = a\sqrt{2}+z+\sqrt{2az\sqrt{2}+zz}^2 - \frac{a^4}{2a\sqrt{2}+z+\sqrt{2az\sqrt{2}+zz}^2} - aaLa\frac{\sqrt{2}+z+\sqrt{2az\sqrt{2}+zz}}{2}(G)$$

Num. 545. Ecco dunque come poſſa avvantaggiarſi anche per mezzo della ſola Geometria il Calcolo Integrale. E certamente ſemprechè ſi abbia nota una quantità, ed altresì nota una di lei parte, ſe ſi abbia l' elemento della porzione reſtante, non può a meno, che anche di queſta porzione non ſi abbia l' integrale. Così ci è ora ſucceduto in fatto dell' iperbola Apolloniana, la di cui integrale G è ſtata una conſeguenza di queſta rifleſſione, e frutto totalmente dovuto alla ſola Geometria. Scoperta che ebbi la ſovratrovata integrale G, penſai di accertarmi della di lei verità, differenziandola; e ciò facendo, non ſolo ne reſtai certo, me in oltre ebbi eſſa integrazione più generale, come ora proſeguirò a moſtrare.

Num.

Num. 546. Sia l' integrale $\overline{2bcz^t + ccz^{2t}}^{\frac{1}{2}} = H$. Tanto b quanto c, e t ſono indeterminate. La differenziale di H è $tcz^{t-1}dz \times \frac{b+czt}{H^{\frac{1}{2}}}$. Adoprerò il ſeguente ripiego per minorare la fatica del Calcolo, che ſarebbe troppo nojoſa ſenza un tale ſoccorſo. Dirò y la $H^{\frac{1}{t}}$, ed x la $b + cz^t$, laonde avremo $dx = ctz^{t-1}dz$, e $dy = tcz^{t-1}\frac{dz}{y} \times x$, che però $dx + dy$, riducendo tutto alla ſteſſa denominazione, ſarà $ctz^{t-1}dz \times \frac{y+x}{y}$. Siccome poi è $x = b + cz^t$, ſarà $xx = 2bb + 2bcz^t + ccz^{2t}$, e levando comunemente bb, ſarà $xx - bb = 2bcz^t + ccz^{2t}$. Ciò preparato, ſia l' integrale $p \times x+y = C$. La p è una indeterminata. La differenziale di C ſarà $dx+dy \times 2p \times x+y$. Pigliſi l' altra integrale $\frac{mb^4}{x+y^2} = D$. La m è una indeterminata: La differenziale di D è $-2mb^4 \times \frac{dx+dy}{x+y^3}$. Si prenda finalmente l' integrale $2qbbLx+y = E$. La q è una indeterminata, e la differenziale di E è $\frac{dx+dy \times 2qbb}{x+y}$. Le differenziali delle tre aſſunte integrali ſi uniſcano in una ſomma, ed avremo

$$\overline{dx+dy} \times 2 \times p \times \overline{x+y}^4 - mb^4 + qbb \times \overline{x+y}^2 \over \overline{x+y}^3$$

e giac-

e giacchè $dx + dy$, è $= ctz^{t-1}\,dz \times \frac{x+y}{y}$, l'ottenuta differenziale passerà nella $\frac{ctz^{t-1}\,dz \times 2 \times p \times \sqrt{\frac{x+y}{y}}^4 - mb^4 + qbb \times \frac{x+y}{y}}{\sqrt{\frac{x+y}{y}}^2}$, e multiplicandola per $\frac{y}{y}$ otterremo $\frac{2 \times p \times \sqrt{x+y}^4 - mb^4 + qbb \times x+y \times y}{\sqrt{x+y}^2 \times y^2} \times ctz^{t-1}\,dz \times y$. Questa ultima quantità è la differenziale $ctz^{t-1}\,dz\sqrt{2bcz^t + z^{2t}}$. Se per tanto la frazione, che la multiplica, fosse o l'unità, o qualunque quantità costante, le tre assunte integrali *C. D. E.*, sommate assieme, ci avrebbero dato questa integrale. Ridurremo per tanto facilissimamente la proposta frazione ad essere l'unità, procedendo come siegue. Si facciano le attuali multiplicazioni, e per tutto, ove s'incontra yy, sostituiscasi $xx - bb$, e ne avremo

$$\frac{x^4 16p + x^3y \times 16p + x^2b^2 \times -16p + 4q + xyb^2 \times -8p + 4q + b^4 \times 4p - 2m - 2q}{2x^4 + 2x^3y \quad -3x^2b^2 \quad -2xyb^2 \quad + b^4}$$

Uguagliando ora $16px^4$ a $2x^4$ si ottiene $p = \frac{1}{8}$., e lo stesso si ottiene uguagliando $16px^3y$ con $2x^3y$. L'equazione $x^2b^2 \times -16p + 4q = -3x^2b^2$ ci dà $q = -\frac{1}{4}$., e l'equazione $xyb^2 \times -8p + 4q = -2xyb^2$ ci dà lo stesso

stesso $q = -\frac{1}{4}$. Finalmente l'equazione $b^4 \times 2p - 2m - 2q = b^4$ ci dà $m = -\frac{1}{8}$; laonde resta dimostrato, che le tre integrali $\frac{\sqrt{b + cz^t + \sqrt{2bcz^t + z^{2t}}}^2}{8} - \frac{b^4}{8 \times \sqrt{b + cz^t + \sqrt{2bcz^t + z^{2t}}}^2} - \frac{bb}{2} L\, b + cz^t + \sqrt{2bcz^t + z^{2t}}$ somministrano il solo Binomio $I = ctz^{t-1}\,dz\sqrt{2tcz^t + ccz^{2t}}$, il quale è quel medesimo $dz\sqrt{2az\sqrt{2} + zz}$ [*E*], che al *Num.* 544. abbiamo trovato essere l'elemento dell'area iperbolica *BEDB*, la di cui integrale è, come la trovammo al medesimo Numero, la $\frac{\sqrt{a\sqrt{2} + z + \sqrt{2az\sqrt{2} + zz}}^2}{8} - \frac{a^4}{2 \times \sqrt{a\sqrt{2} + z + \sqrt{2az\sqrt{2} + zz}}^2} - aaL\,a\sqrt{2} + z + \sqrt{2az\sqrt{2} - \frac{2az\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} + zz}$ [*G*), bastando per chiarirsene fare $b = a\sqrt{2}$. $c = 1$., e $t = 1$. Vi è il solo divario, che l'integrale *G* è compita, e altrimenti ella non può non essere in seguito del metodo adoperato nel ritrovarla, ove l'altra non è compita, a cagione anche ciò del diverso metodo adoperatovi.

Num. 547. Il modo, col quale le tre notate integrali ci producono la sola trovata differenziale, è osservabilmente diverso da quello, col quale nel capo primo della seconda sezio.

ſezione abbiamo veduto darci da una, o più integrali una ſola differenziale. Queſte ce l' hanno data, annientando ſempre per via della combinazione de' loro eſponenti il coefficiente dell' altra differenziale, ed in oltre occorrendo, annientando ancora i coefficienti delle altre differenziali, per effetto de' ſegni contrarj. La differenziale, che ora abbiamo ſcoperta non rimane ſola, perchè parte de' coefficienti delle concomitanti differenziali ſi annientino, ma perchè dando a tutte loro tali coefficienti, i quali ſommati aſſieme, benchè compoſti di variabili, uguagliano o una quantità coſtante, o fra queſte l' unità. Ha dunque il Calcolo Integrale anche queſto recondito naſcondiglio, che io credo, che fin ora ſia ſtato occulto, ma comunque ſia, queſto pure dà ſempre più giuſto fondamento a quanto notai al *Num.* 217.

Num. 548. Non poche differenziali per tanto potrebbero ben avere le loro integrali ſcopribili per queſta ſtrada. Confeſſo il vero, ho fatto non pochi tentativi, per aprirmi queſta ſtrada, ma tutti in vano. Qualche altro di me più deſtro, e più provveduto di tempo, forſe potrebbe riuſcirvi, e però non ho voluto mancare di avvertirlo.

Num. 549. Rivolgiamoci ora a ridurre ad uſo utile la trovata differenziale generale I. Si levi adunque un ζ di ſotto al ſegno, e diverrà $t c z^{\frac{3t}{2}-1} \sqrt{2bcz + cc\zeta^t}^r$.

Dato dunque il ſolito Binomio $A = g x^e dx \times \sqrt{a + fx^n}^r$ (e qui ſi vede, che r dee eſſere, o poterſi ridurre $= \frac{1}{2}$), e che f ſia poſitivo (coſa neceſſaria per non urtare nell' immaginario) dovrà averſi $ct = g$, $\frac{3t}{2} - 1 = e$, $cc = f$, $2b = a$, e $t = n$. Trarremo dunque in primo luogo, che tale Binomio avente $r = \frac{1}{2}$ è integrabile, ſe abbia $e = \frac{3n-2}{2}$, e determineremo all' ora $c = \sqrt{f}$, $b = \frac{a}{2\sqrt{f}}$, $cg = n\sqrt{f}$, con che ſi ottiene la cercata integrazione, che viene ad eſſere

$$\int g x^e dx \times \sqrt{a + fx^n} = \frac{\sqrt{fx^n} + \sqrt{ax^n + fx^{2n}}}{2\sqrt{f}}^{\frac{1}{2}} \times \frac{a^2}{8f} \times \left(\frac{a}{2\sqrt{f}} + \sqrt{fx^n} + \sqrt{ax^n + fx^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{8f} \times L \frac{a}{2\sqrt{f}} + \sqrt{fx^n} + \sqrt{ax^n + fx^{2n}} = M,$$

ed alle quali dee darſi il comune coefficiente $n\sqrt{f} = g$.

Num. 550. Perchè poi il trovato Binomio mantiene lo ſteſſo valore, levando di ſotto al ſegno z^{2t}, acquiſterà pure la forma $ct z^{2t-1} dz \sqrt{2bcz^{t-1} + cc}$, e conſeguentemente, rappreſentando il ſolito A, dovrà averſi $g = ct$, $e = 2t - 1$, $n = -t$, $2bc = f$, e $cc = a$, per le quali coſe conchiuderemo, che il Binomio ridotto ad avere $r = \frac{1}{2}$ ſarà integrabile, ſe ſia $e = -2n - 1$, e determineremo $g = -n\sqrt{a}$, $b = \frac{f}{\sqrt{a}}$, e $c = \sqrt{a}$, e come ſopra, ne avremo la ſua integrale N.

Num. 551. Queſte due integrali $M.N$ poſſono aggiungerſi alla Liſta delle integrali, che ſteſi al *Numero* 285., e ſembra, che poſſano ancora ampliare la medeſima Liſta. Pigliamo, per eſempio, la trasformata del *Num.* 274., che è

$$pga^{\frac{e+1+nr}{n}} x^{\frac{ve+v-n}{n}} dx \times \sqrt{1 + fx^n}^r = y^{-\frac{e-1-n-un}{n}} dy \times \sqrt{a - fy^n}^r,$$

e che conviene alla $gx^e dx \times \sqrt{a - fx^n}^r$. Suppongaſi ſecondo il *Num.* 549, $-\frac{e-1-n-nr}{n} = \frac{1}{2}$, e $\frac{ve+v-n}{n} = 3\frac{v-2}{2}$, e ricaveremo $e = \frac{3n-2}{2}$, ed $r = -3$, e però

e però sembrerà potersi aggiungere alla detta Lista l' integrale di $gx^e\,dx \times \overline{a - fx^n}^{\,r}$ sempre che questo sia ridotto ad avere $r = -3$, ed $e = \frac{3n-2}{2}$, e così sembra potersi fare di altre parecchie. E' però qui d' avvertire, che se la $gx^{\frac{3n-2}{2}}\,dx \times \overline{a - fx^n}^{\,3}$ si sposti, potrà ridursi ad essere $gx^{\frac{n-2}{2}}\,dx \times \overline{a - fx^n}^{\,-1}$, la quale così ridotta è integrabile pel medesimo *Num.* 274. essendo per altro vero, che queste due integrali, per tali diverse strade scoperte, hanno fra di loro forma diversa.

Num. 552. Siccome dunque cercando così l' area dell' iperbola apolloniana abbiamo avuto il vantaggio di scoprire la maniera d' integrare generalmente quella particolar forma di differenziarli, così cercando nello stesso modo le aree di altre iperboli, possiamo accrescerci il capitale. Sia dunque l' iperbola $a^3 = x^2y$. La formula generale del *Num.* 541. si cambierà in $2\sqrt{2}\,a^3 = g - v \times \overline{g + v}^{\,2}$, che è $v^3 + v^2g - vgg - g^3 + 2a^3\sqrt{2} = 0$, la quale coll' ipotesi $v = r - \frac{g}{3}$ si trasforma in $r^3 - \frac{4rgg}{3} - \frac{16g^3}{27} + 2a^3\sqrt{2} = 0$. In questa equazione, atteso il ritrovarvisi la quantità $-\frac{6g^3}{27}$, che è negativa, e variabile, giacchè g è $= a\sqrt{2} + z$, può essere il termine $2a^3\sqrt{2} - \frac{16g^3}{27}$ ora positivo, ora negativo. Troveremo il limite, nel quale si fa questo passaggio supponendo $16 \times \frac{a\sqrt{2} + z}{27}^{\,3} = 2a^3\sqrt{2}$, e questa equazione divisa per 2, e cavatane la radice terza diviene $\frac{2a\sqrt{2} + 2z}{3} = a\sqrt[6]{2}$, che dà

$z = a \times \frac{3\sqrt[6]{2} - 2\sqrt{2}}{2}$, e comechè $\sqrt[6]{2}$ è prossimamente $\frac{11224}{10000}$, e $\sqrt{2}$ è pure prossimamente $\frac{14142}{10000}$, ne risulta z prossimamente uguale ad $a \times \frac{1347}{5000}$, laonde, quando z sia minore di $a \times \frac{1347}{5000}$, allora quel termine è positivo, e per lo contrario, quando z sia maggiore. Posto questo sapremo quale sia la formula, che adoperar si dee per separar la r, e supposto che quel termine sia positivo, vi converrà la nota formula $r^3 - rp + q = 0$, che somministra

$$r = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Calcolando ora la $\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}$ risulta questa $= 2a^6 - \frac{16g^3a^3\sqrt{2}}{27} = \frac{54a^6 - 16a^3\sqrt{2} \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3}}{27}$, onde per questo supposto traesi

$$r = \sqrt[3]{\frac{8 \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3} - 27a^3\sqrt{2}}{27} \pm \sqrt{\frac{54a^6 - 16a^3\sqrt{2} \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3}}{27}}}$$

$$\pm \sqrt[3]{\frac{8 \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3} - 27a^3\sqrt{2}}{27} \mp \sqrt{\frac{54a^6 - 16a^3\sqrt{2} \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3}}{27}}}$$

e finalmente $dv = -\frac{a\sqrt{2}\,dz - z\,dz}{3} +$

$$dz\sqrt[3]{\frac{8 \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3} - 27a^3\sqrt{2}}{27} \pm \sqrt{\frac{54a^6 - 16a^3\sqrt{2} \times \overline{a\sqrt{2} + z}^{\,3}}{27}}}$$

$+ dz$

$$+ dz \sqrt[3]{\frac{8 \times a\sqrt{\tfrac{1}{2}+z}^{\,3} - 27a^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} \mp \sqrt{54a^6 - 16a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \times a\sqrt{\tfrac{1}{2}+z}^{\,3}}}{27}}$$

che è l' elemento dell' area terminata dal ramo descendente dell' iperbola $a^3 = x^2 y$, finachè z si resti minore di $a \times \frac{1347}{5000}$, e dalle coordinate BD, DE, e del quale elemento potremo trovare l' integrale; Scoperta, che io lascerò, che i Principianti riducano al suo fine per loro esercizio, ed alla quale scoperta. o integrazione quanto mai sarebbe difficile il giungere investigandone il modo dalla sola sua forma? Lascerò pure a' medesimi Principianti l' esercitarsi, quando q sia negativa, e così il trovare la differenziale del ramo descendente della iperbola reciproca $a^3 = xy^2$. Per ciò poi, che riguarda il poter divenire $\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}$ una quantità negativa; laonde la formula ci somministra r sotto apparenza infetta d' immaginario, questo si sa essere vizio della medesima formula delle equazioni cubiche, laonde questo accidente nulla influisce nella verità dell' alrre cose, che in questo proposito ho qui stese.

Num. 553. Questo Metodo ci da pure l' integrazione generale delle due seguenti forme di Trinomj:

$A = dx\sqrt{b + ix + x^2}$, e $B = dx\sqrt{b - ix + x^2}$. Se x^2 avesse il coefficiente, col levarlo di sotto al segno, vi si rimedia. Amendue tali forme debbono aver l' esponente $r = \frac{1}{2}$, e tutti i coefficienti, o positivi, come nell' A, o il solo di mezzo negativo, come nel B. Per ciò, che spetta alla prima forma, vogliasi nell' iperbola Apolloniana la sola area, che comincia sopra la SQ (*Fig.* 37.), e si stende illimitatamente verso D. La parte BS sarà dunque costante, e la nominerò f; la SD poi sarà la z., onde la BD sarà $f + z$; e però avremo $g = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} + f + z$, e fatta questa sostituzione nell' equazione $gg - vv = 2aa$, trovata nel *Numero* 544., otterremo

$v =$

$v = \sqrt{ff + 2af\sqrt{\tfrac{1}{2}} + z \times \overline{2f + 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}}} + zz}$, che multiplicata per dz sarà l' elemento dell' area, che sta sopra SQ, ed il valore della qual area noi sappiamo ritrovare in ogni supposizione arbitraria di AC, e BS, e però f, ed a, che sono inderminate, determinar si possono colle due equazioni $ff + 2af\sqrt{\tfrac{1}{2}} = b$, e $2f + 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = i$, che sono i coefficienti determinati del dato trinomio. Queste due equazioni ci determinàno dunque

$f = \frac{i - \sqrt{ii - 4b}}{2}$, ed $a = \frac{\sqrt{ii - 4b}}{2\sqrt{2}}$, laonde l' iperbola, che somministrerà l' integrale del proposto trinomio, dovrà avere per lato a della sua podestà la $\frac{\sqrt{ii - 4b}}{2\sqrt{2}}$, e l' area dovrà cominciare al capo di $BS = f = \frac{i - \sqrt{ii - 4b}}{2}$.

Se $4b$ sia maggiore di ii, il dato trinomio non è integrabile per questo metodo. Quanto alla forma B, vogliasi la sola area, che comincia sopra la DE, e stendesi verso B, dette allora $BD = f$, e $DS = z$, avremo in tal caso l' ascissa $AS = AB + BD - DS = g = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} + f - z$, e fatta questa sostituzione nella predetta formula generale $gg - vv = 2aa$, otterremo

$v = \sqrt{ff + 2af\sqrt{\tfrac{1}{2}} - z \times \overline{2f + 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}}} + zz}$,

che multiplicato per dz sarà l' elemento di quell' area, di cui ne sappiamo trovare il valore, e ne risultano le medesime determinazioni di f, e di a trovate di sopra.

Num. 554. Ma è ormai tempo di rivolgersi a dar fine alle presenti succinte memorie intorno alla quadratura de' considerati spazj iperbolici, per indi terminare colla presente, ormai troppo lunga, Appendice, ciò, che ho avuto in

ani-

animo di compilare intorno a' Calcoli differenziale, ed integrale, reſtami però da eſaminare quelle Dimoſtrazioni, che hanno dato fondamento a credere, che le aree intere iperboliche, ed anche parziali, e le loro aſſintoti, ſieno infinite. Farò queſto eſame colla maggiore brevità, e chiarezza poſſibile, e proteſtando agl' inſigni Autori di eſſe Dimoſtrazioni un ſommo riſpetto. Avrò replicate occaſioni in far queſto eſame, di eſporre letteralmente le dimoſtrazioni da eſaminarſi. Leggonſi tali dimoſtrazioni in quaſi tutti gli Autori. Biſogna pure traſcieglierne alcuno. Io per tanto uſerò traſcriverle da più inſigni, non già perchè io ſia così vano, e ſciocco di voler, ciò facendo, oppormi ad Autori di tanto ſapere, ma perchè avendo Autori per appunto di tanto ſapere meglio, e più intelligibilmente ſteſe le loro dimoſtrazioni, così più chiaramente, ed accertatamente poſſono eſaminarſi. Ben lontano adunque, che da queſto mio contegno oppor mi ſi poſſa, che io biaſimevolmente me la pigli co' più dotti Maeſtri, arguire giuſtamente ſi debbe la ſomma verace ſtima, che io faccio di loro, ed il giuſto motivo di uſare così per più chiaramente rintracciare la verità.

Per procedere in queſti eſami con ſicurezza, porrò prima que' contraſſegni, pe' quali ſe una grandezza ſia finita, o infinita, o ſe nulla, pare a me, che ſi poſſa evidentemente riconoſcere, indi con tali contraſſegni, ove occorra, procederò nell' eſame, che imprendo.

Num. 555. Data una grandezza A, di cui ſiamo certi, che ella è finita, qualunque altra grandezza B a lei omogenea, che ſia di eſſa A minore, od uguale, non ſarà certamente, riſpetto a queſta, infinita.

Num. 556. Data la medeſima grandezza certamente finita A qualunque altra grandezza a lei omogenea B, che ſia di eſſa A, o uguale, o maggiore, non ſarà certamente nulla riſpetto a queſta.

Num. 557. Di queſti due contraſſegni evidenti mi ſerviro ove occorra nel preſente eſame. So beniſſimo, che per altra maniera procedono i Maeſtri di queſto argomento, per riconoſcere quando le grandezze ſieno o infinite, o nulle, e

ſopra queſte maniere pure brievemente eſporrò alcuni miei ſcrupoli.

Num. 558. Definiſcono adunque appellar eſſi aſſolutamente infinite quelle grandezze B, le quali a qualſivoglia grandezza omogenea C, e finita, hanno maggior ragione di qualunque aſſegnabil ragione. Di modo che, ſe la maſſima aſſegnabil ragione della grandezza B, alla C, foſſe la $\frac{m}{n}$, e riuſciſſe di dimoſtrare in ſeguito de' ſuppoſti fatti, che ciò non oſtante, B aveſſe a C ragione maggiore, che m abbia ad n, la B ſarebbe infinita.

Num. 559. Definiſcono altresì appellar eſſi minore della grandezza finita, o (che è equivalentemente lo ſteſſo) eſſer nulla quella grandezza D, che ad altra finita G omogenea ha minor ragione di qualunque aſſegnabile. Laonde ſe la minore aſſegnabile ragione di D a G ſia la $\frac{a}{c}$, e riesca di dimoſtrare ſimilmente, che la D abbia alla G minor ragione di quella, che la a abbia alla c, la D, riguardo alla G, è minore di ogni finita grandezza, o vogliamo dire è nulla.

Num. 560. Sull' appoggio di queſte due definizioni ha dimoſtrato il dottiſſimo P. Grandi (*de infinitis infinitorum alla Propoſizione* 1., *e* 2., *e ſuoi Corollarj*), che aggiungendo a qualunque grandezza finita qualſivoglia grandezza omogenea, purchè finita, e quante di queſte ſi vogliano, non però ſe ne può fare una grandezza infinita, e nella Propoſizione ſeconda dimoſtra con ugual forza, che multiplicando qualſivoglia grandezza finita, per qualſivoglia, e quanto ſi vogliano grandezze omogenee, purchè finite, non però può produrſene grandezza infinita.

Num. 561. Ugualmente pure dimoſtra eſſo P. Grandi al luogo citato, che levando da grandezza finita altra qualſivoglia omogenea grandezza, purchè minore della prima, non può mai ottenerſi grandezza minore del finito, ne poterſi ottenere queſto effetto dividendo qualunque grandezza finita per altra grandezza, quanto ſi voglia grande, purchè finita.

Num. 562. Il chiariſſimo Giacomo Bernoullio (*de ſeriebus infinitis*) pone nel ſecondo aſſioma, o poſtulato, che *omni quantitate finita poteſt accipi major*, e coerente a tal detto è pure il lodato P. Grandi nello ſcoglio della precitata definizione III., che è quella, che ho riferita al *Num* 558.

Num. 563. Premeſſe queſte coſe ripigliamo la mentovata definizione terza. Per conoſcere, che *B* è infinita, biſogna eſſere certi, che la ragione di *m* ad *n* è quella maſſima ragione, che fra grandezze finite ſia aſſegnabile. Biſogna adunque eſſer certi, che non poſſa darſi o grandezza maggiore di *m*, o minore di *n*; ora io domando, o *m* è grandezza finita, o è infinita, o nè l'una, nè altra. In queſto caſo ſaremmo fuori de' termini. Se è grandezza finita, dunque quando ſia da concedere il permeſſo Poſtulato ſecondo dell' inſigne Bernoullio, potrà darſi grandezza maggiore di *m* Se poi *m* è infiita, e con qual contraſſegno ne ſiamo noi venuti in cognizione, e fatti certi? Reſta ora a vederſi coſa accada, ſe *n* ſia quella minor grandezza finita, che dar ſi poſſa. Ma quà ricorre la medeſima difficoltà. Dalla grandezza *n*, giacchè finita, può ſempre (*Num.* 561.) levarſi altra grandezza di lei minore, ſenza ottenere grandezza minore del finito, e però ſempre levarſene, e darſi quella minore, che può levarſi. Queſti ſono i miei ſcrupoli, (e per tali voglio, che ſi conſiderino) circa alla maniera tenuta, per riconoſcere, ſe le grandezze ſieno o nulle, o infinite. Non laſciandomi eſſi ſcrupoli pienamente quieto è di qui, che ho ſtimato bene dare un' altra maniera, che a mio credere eſclude ogni dubbietà, per riconoſcere, ſe le grandezze ſieno o infinite, o nulle; intanto ritorno onde partii.

Eſporrò dunque in primo luogo la più obvia prova, per cui vien creduto, che le aſſintoti ſieno infinite, traſcrivendo le parole medeſime dell' inſigne, e veramente Maeſtro di queſte coſe il Marcheſe de l'Hoſpital [*Sections Coniques pag.* 62. *num.* 192.] *Il ſuit de ce que* H M (y) $= \frac{mm}{x}$, *que plus* CH (x) *augumente, plus au contraire* HM (y) *diminue, de ſort que* CH (x) *étant*

tant infiniment grande, H M (y) *ſerà alors infiniment petite, ceſt a dire nulle ou Zero. D'ou l'on voit que l'Hyperbole* A M, *& ſon aſymptote* CH (*ètant prolongee*) *s'aprochent de plus en plus, de ſort, qu'enfin deur diſtance vient moindre que aucune donee, et que cependent elles ne ſe peuvent jamais rencontrer, puiſque elles ne ſe joignent que dans l'infini, ou l'on ne peut jamais arriver. Il en eſt de meme pour l'autre aſſymptote* Cg. Alla pagina poi 152. *Num.* 228. allarga queſto medeſimo diſcorſo a tutte le iperboli, e loro aſſintoti di qualunque grado.

Num. 565. Queſta eſpoſizione non può certamente dirſi una dimoſtrazione, perchè per quanto ſia vero, che al creſcere della *x* decreſca ſempre la *y*, queſta non è pruova, che *y* ſi annienti, nè che *x* divenga infinita, e di queſti due punti, che ſono gli eſſenziali, qui non v' è pruova veruna, nè baſta affermare, che la loro diſtanza dalle aſſintoti viene in fine minore di ogni grandezza, biſogna provarlo.

Num. 566. Poſſono i Principianti trovarſi imbarazzati da una illazione, che eſſi far poſſono. Succede frequentemente, che in calcolando, e non ſolo relativamente alle iperboli, ma generalmente in qualunque altro ſoggetto, ſi aſſume, che alcune quantità divengano, o infinite, o nulle, e tali aſſumendole, ne vengono ſoluzioni, e veriſſime, ed utiliſſime, laonde con fondamento non diſprezzabile, poſſono i Principianti dedurne, e che può beniſſimo una grandezza divenir zero, o infinita, e che il porre in dubbio una verità sì manifeſta non è che un tetro capriccio, per cui ſi leverebbe alla Matematica la dovizia di tante feliciſſime ſcoperte.

Per levare queſta difficoltà, biſogna premettere un' evidente diſtinzione. Sia (*Fig.* 15.) nella curva *ABc* l'aſſe *AL* uguale alla coſtante *a*. Nel punto *L* cominci una variabile *x*, la quale da eſſo punto *L* ſcorra verſo *A*, onde la vera aſciſſa *z* di queſta curva, ſia per eſempio la *AG*, che perciò ſarà $= a - x$. E' viſibile, che ſe creſcendo la *x* giunga ad ugguagliare *a* (*LA*), allora la *z* diverrà nulla, giacchè in tale caſo diverrà $a - a$. Mi ſono già replicatamente ſpiegato altrove, che in queſte conſiderazioni, ſe le variabili poſſano, o no divenire nulle, o infinite, io non

parlo di quelle variabili, che ſono la differenza fra una coſtante, ed una variabile, ma parlo delle variabili ſemplici, ed aſſolute, e conſiderate preciſamente nel loro problema, e però le ſopraindicate, nè ciò che da eſſe derivar poteſſe, non cadono nella preſente conſiderazione. Altre volte in vece di riferire le ordinate di una curva al di lei aſſe, riportanſi ad altre linee, o paralelle, o inclinate all' aſſe medeſimo, e così propriamente ſi fa in calcoli generali, non particolarizati a curve. Ottenuta la ſoluzione del problema, ſi rendono infinite le diſtanze fra l' aſſe, per eſempio della curva, e l' altre linee, e ne vengono con tutta certezza le ſoluzioni di eſſo problema particolarizzato a tali ſuppoſizioni. Anche queſto caſo è manifeſtamente eſcluſo dalla diſquiſizione preſente, e ben ſi ſcorge, che la verità delle ſoluzioni, che ſi ottengono, non ſi fonda ſul potere, o non potere eſſer nulle, o infinite tali diſtanze, ma ſono eſſenziali allo ſteſſo problema, e che le medeſime ſoluzioni ſi farebbero avute le ſteſſiſſime, ſe ſenza riferire le ordinate alla linea fuori dell' aſſe, all' aſſe medeſimo ſi foſſero da prima ſenz' altro riferite. Altri caſi di ſimil ſorta vi poſſono eſſere, nè mi ci dilungherò attorno, e i Principianti debbono riconoſcere da loro medeſimi, che niun caſo di queſta fatta ha che fare col loro imbarazzo. Fiſandoci adunque al ſolo caſo delle variabili ſemplici, ed aſſolute, due riſpoſte darò al loro obbietto. La prima, che eſſendo il loro argomento uno di quelli, che pruovan troppo, nulla pruova. Abbiamo replicatamente veduto in propoſito di compire le integrali, che ſupponendo annientata la variabile, rieſce molte volte di compire a dovere le integrali, ma abbiamo anche veduto compirſi eſſe ugualmente bene, ſenza annientate le variabili. Seconda riſpoſta. Molte integrali, e lo abbiamo moſtrato col puro fatto, ſupponendo zero, o infite le variabili, non ſi compiſcono a dovere, e cadiamo nell' errore, dal quale errore reſtiamo liberi, ed otteniamo integrali perfettamente compite, tenendo le variabili nel finito, dunque eſſe finite ſono, ſervendoci anche di quelle medeſime illazioni, che imbarazzavano i Principianti.

Num.

Num. 567. Ritorniamo a difficoltà più intrinſeche di queſto argomento. Si propone il Dottiſſimo Signor Abate Deidier nell' aureo ſuo Libro intitolato *Le Calcul differentiel, et le Calcul integral* (*Pag.* 404. *Num.* 19.) di ritrovare generalmente (*Fig.* 2.) la quadratura di tutti gli ſpazj *IAfpI*, o *HAenH*, o *GAbOG*, compreſi dall' aſſintoto ſuperiore *AI*, dal ramo ſuperiore, e parte dell' inferiore di qualunque ſorta d' iperbola, e dall' aſciſſa. Ommetto di qualunque ſorta d' iperbola, e dall' aſciſſa. Ommetto di ſervirmi della figura poſta dal Signor Deidier eſſendo ſuperfluo il replicarla. Porrò bensì litteralmente il ſuo diſcorſo. *L' equation qui exprime ces hyperboles eſt* $a^m + x^n = y^m x^n$ *& faiſant* $a = 1$, *on aura* $1 = x^m y^n$, *donc* $y^m = x^{\frac{x}{n}} = x^{-n}$, *&* $y = x^{\frac{-n}{m}}$, *& mettant cette valeur de* y *dans* $y\,dx$, *on aura* $y\,dx = x^{\frac{-n}{m}}\,dx$, *dont l' integrale eſt* $\int y\,dx = x^{\frac{m}{m-n}} = x^{\frac{-n}{m}+1} = \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{x^{m-n}}$, *& mettant au lieu de* x^{-n} *ſa valeur* y^m, *on aura* $\int y\,dx = \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n}xy$, *qui ſera l' integrale, ou la quadrature de l' eſpace indeterminè* IAFpI, *ou &c.*

Si m *eſt plus grand que* n *on aura toujours la quadrature de l' eſpace* GAbOG [che è il conveniente a queſto caſo] *car ſon expreſſion* $\frac{m}{m-n}xy$ *étant poſitive, ſon rapport au rectangle* xy *ſera fini. Si* m *eſt égale a* n, *l' expreſion* $\frac{m}{m-n}$, *ſe changerà en* $\frac{m}{0}xy$. *Or* $\frac{m}{0}$ *eſt infini; ainſi le rapport de l' eſpace* HAenH [che conviene al preſente caſo] *au rectangle* xy *ſera infini, & par conſequent cette eſpace ſera infinement grand; Enfin ſi* m *eſt moindre que* n *l' expreſion* $\frac{m}{m-n}xy$ *ſera negative, donc ſon rapport* [cioè dello

dello ſpazio I A f p I] *au rectangle* x y *ſera un rapport du negatif au poſitif, & par conſequent ce rapport ſera pour ainſi dire plus que infini, & l' eſpace* [I A f p I] *plus que infiniment grand, par exemple.*

Soit m = 2, n = 1. *l' equation ſera* $a^3 = xy^2$., *&*

l' integrale $\frac{m}{m-n}\, xy = 2xy$. *Donc l' eſpace* (che qui ſarà G A I O G) *ſera au rectangle* x y *comme* 2. *a* 1. *De meme ſi* m = 4, *n* = 1. *l' equation ſera* $a^5 = xy^4$., *& l' integrale* $\frac{m}{m-n}\, xy = \frac{4xy}{3}$; *Donc l' eſpace* (che qui è equivalentemente lo ſteſſo G A b O G) *ſera au rectangle* x y, *comme* $\frac{4}{3}$ *a* 1., *ou comme* $\frac{4}{3}$ *à* $\frac{3}{2}$, *ou comme* 4 *à* 3., *& ainſi des autres.*

Soit m = 1., n = 2; *l' equation ſera* $a^3 = x^2y$.; *& l' integrale* $\frac{m}{m-n}\, xy = \frac{1}{1-2}\, xy = -xy$., *donc l' eſpace* [che qui è I A f p I] *ſera au rectangle* x y *comme* 1 a − 1. *Mais le rapport de* 1 *à zero eſt infini, donc le rapport de* 1 a − 1. *eſt en quelque maniere plus qu' infini. De même ſoit* m = 1, n = 4 *l' equation ſera* $a^5 = x^4y$, *& l' integrale* $\frac{m}{m-n}\, xy = -\frac{xy}{3}$., *donc l' eſpace* (I A ſ p I) *ſera au rectangle* x y *comme* + 1 a − 3, *& par conſequent ce rapport ſera plus qu' infini, & ainſi des autres.*

Et pour mieux eclaircir ceci il ny à qu' a faire attention que lorſque m = n, *l' integrale* $\frac{m}{\cdot}\, xy$ *eſt infinie par rapport à* x y, *à cauſe que* m *eſt diviſe par zero, qui eſt infiniment petit, or quand* m = 1, n = 2, *l' integrale eſt* $-\frac{1}{1}\, xy$, *& le numerateur eſt encor plus grand par rapport au denominateur* = 1, *que par rapport à zero, donc la fraction* $-\frac{1}{1}$ *eſt pour ainſi*

ainſi dire plus qu' infinie, & par conſequent l' integale $-\frac{1}{1}$ *xy eſt infinement grande par rapport à* x y, *& ainſi des autres.*

Nous auons demontrè ceci d' un autre façon dans le primier Livre de la Mefure des Surfaces, & des Solides, *ou l' on verra, que ceux que penſent autrement touchant ces integrales negatives de l' hyperbole, ſont tombès dans l' erreur.*

Num. 568. Eſaminerò con tutto il riſpetto queſta dimoſtrazione. Che l' integrale $\frac{m}{m-n} \times x^{\frac{m}{m-n}}$ di queſti ſpazj iperbolici ſia in ogni ſuppoſizione di *m*, e di *n* la vera, io credo di poterlo negare con tutto il fondamento; e ſuſiſtendo ciò, ſvaniſce poi tutto il fatto diſcorſo. Finchè *m* è maggiore di *n*, l' integrale è vera; ma quando *m* viene ad eſſere uguale ad *n*, allora è falſa; e quando *m* divine minore di *n*, ella pur manca, non eſſendo compita. L' equazione differenziale, o dell' elemento di queſti ſpazj è veramente $\frac{dx \times a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}} = dv$, e l' integrale è

$v = \frac{m}{m-n} \times a^{\frac{m+n}{m}}\, x^{\frac{m-n}{m}}$. Nella ſuppoſizione di $m = n$ è bensì vero, che il denominatore del coefficiente $\frac{m}{m-n}$ diviene uguale a zero, ma è altrettanto vero, che anche l' eſponente $\frac{m-n}{m}$ della variabile *x*, anch' eſſo diviene zero, e al certo l' eſsere $m - n$ eſponente non può dargli privilegio di non eſsere zero, quando lo ſia, trovandoſi denominatore d' un coefficiente. L' integrale dunque in queſto caſo non è altrimenti quale qui è ſtata ſuppoſta $\frac{m}{\cdot}\, xy$, ma ella è $m \times a^{\frac{m+n}{m}}\, x^{\circ}$, vale a dire (*Num.* 142., e 143.)

$m \times aalx$, nella quale vera integrale, non ſolo nulla v' ha d' infinito, ma per lo contrario vi è una riprova certiſſima, che le aſſintoti, le quali in queſto caſo ſono amendue uguali, ſono finite, giacchè dovendo x, anche quando paſſi ad eſſere l' intera aſſintoto, eſſere l' ordinata di una logoritimica, ed eſſendoſi moſtrato (*n.* 121.) repugnare, che in veruna logritimica ſi dia mai un' ordinata infinita, reſta pur chiaro dalla vera trovata integrale di queſto caſo, che le di lei aſſintoti ſono finite.

Num. 569. Che ſe pure taluno riguardando riſtrettamente il ſimbolo ma^2x°, e ſenza avvertire che queſta eſpreſſione veramente ſignifica $maalx$, inſiſteſſe a pretendere, che ſignifica maa, giachè $x.^\circ$ è l' unità, e però ſuſſiſtere beniſſimo, che nel caſo di $m = n$ lo ſpazio della ſua iperbola viene dato dal calcolo, anche non ommettendo di far zero l' eſponente, vien dato dico infinito, io pregherò chi così penſaſſe ad andare al fonte di queſta diſquiſizione. L' iperbola, che ha prodotto l' integrale ma^2 è innegabilmente l' iperbola apolloniana $aa = xy$ giacchè l' equazione $a^{2m} = x^m y^m$ è eſſenzialmente l' equazione $a^2 = xy$, e l' elemento ſuo che era compreſo nel ſimbolo generale $\frac{dx \times a^{m \pm n}}{x^m} = dv$ è $\frac{aadx}{x} = dv$. Ora io domando, qual è l' integrale di $\frac{aadx}{x}$? Ognuno ſa, che ella è a^2lx, e ſono perſuaſo, che niuno mai vorrà ſoſtenere, che ella ſia $\frac{aa}{\circ}$, e certamente volendolo ſoſtenere biſognerebbe, e perdere, e pretendere falſe le tanto utili, e ſalde integrazioni logoritmiche, che noi abbiamo. E' notiſſimo che in fatto, maſſime del calcolo integrale, le formule, o integrazioni generali parecchie volte non corriſpondono in alcuni caſi particolari, e io ne darò una pruova ſenſibile al *Num.* 590.

La pre-

La preſente integrazione, o formula generale ne è una di queſta fatta, e le coſe quì notate ſvelano la cagione, per cui ella è tale.

Num. 570. Sarà però bene, che noi mettiamo queſte verità in ſicuro da ogni contraſto, giacchè molto facilmente può farſi. In vece di cercare (*Fig.* 31) gli ſpazj iperbolici $HAbNH$, $GAbOG$, o $IAbMI$ poſanti ſull' aſſintoto ſuperiore AI, ſi cerchino gli ſpazj parziali $Mbdo$, $Nbd\delta$, $Obd\beta$ poſanti ſulla bM paralella all' aſintoto ſuperiore. Detta p la coſtante Ab, ed x la variabile da b verſo i, l' aſciſſa di queſto problema ſarà $p + x$, e l' equazione generale per queſta ricerca ſarà $a^{\frac{m}{n}} + x = y^m \times p + x$. Riandando per tanto tutti gli ſteſſiſſimi paſſi, che il chiariſſimo Autore ha fatto nella ricerca degli ſpazj intieri ariveremo anche qui alla medeſima equazione $\int y dx = \frac{m}{m-n} \times p + x \times y$, è dovremo ancor qui nella ſteſſima maniera argomentare, e conchiudere, che ſe m è più grande di n, lo ſpazio $Obd\beta$ è finito, che lo ſpazio $Nbd\delta$, pel quale m è $= n$ è infinito, e che più che infinito è lo ſpazio $Mbdo$, pel quale m è minore di n.

Num. 571. Avertiamo ora ſeriamente, che tutti e tre queſti ſpazj ſono non ſolo viſibilmente finiti, ma che vi è di più ſtrano. Fra queſti tre ſpazj quello $Mbdo$, che **queſta maniera di calcolo**, e di argomentazione ci fa conchiudere per più che infinito è minore degli altri due, e lo ſpazio $Nbd\delta$, che il medeſimo diſcorſo ci ſtabiliſce infinito è pur eſſo minore dello ſpazio $Obd\beta$, che il calcolo medeſimo ci dimoſtra finito, conchiudendoſi così, contro l' incontraſtabile contraſſegno, che al *Num.* 555. adduſſi per conoſcere ſe una quantità ſia, o no infinita, che l' infinito è maggiore del più che infinito, e il finito è maggiore dell' uno, e dell' altro. Che ſi abbiano concluſioni sì ſtravaganti non vi ha biſogno di altra pruova, che di quella ſola degli occhi. Immaginiamo nella *Fig.* 31, che la linea Mb in vece di eſſere condotta frall' aſſintoto AL, e il lato cL ſia condotta per di ſotto di queſto lato, ed a lui pa-

rale-

ralella. Vedremo lo ſpazio creduto più che infinito ſtarſi tutto dentro lo ſpazio detto infinito, e queſto, tutto dentro al finito.

Num. 572. Se dunque quando applichiamo il calcolo, ed il diſcorſo agli ſpazi parziali iperbolici, gli occhi medeſimi ci fanno conoſcere l' inſuſiſtenza di tali argomentazioni, e queſte ſono le medeſime ſteſſiſſime, che ſi ſono uſate in propoſito della dimoſtrazione, che ſto eſaminando, e relativa agli ſpazj interi, non può dubitarſi, che anche per queſti non ricorrano le coſe medeſime, e che non ſia vero quanto aſſerj al *Num.* 568., cioè che nel caſo di $m = n$ l' integrale trovata nella deſcritta maniera non è vera, e nel caſo di m minore di n ella manca. Quanto al primo non m' occorre ſpendervi molte parole, toccandoſi con mano, che eſſa integrale non è già $\frac{ma^2}{o}$ ma $aalx$, ovvero $a^2 l \overline{p + x}$, avvertendo però di compire l' una e l' altra. Quanto al ſecondo le coſe dette in propoſito di compire le integrali lo ſtabiliſcono a mio credere con tutta evidenza. L' integrale negativa, che in queſto caſo ſi manifeſta, non è compita, e perciò manca da quello che eſſer debbe. Compitaſi dunque a dovere (*Num.* 498.), e diverrà poſitiva, e ſvanirà ſubito il motivo, che aveva fatto immaginare, il più che infinito.

Num. 573. L' eſaminata dimoſtrazione dunque non conchiude punto, che gli ſpazj iperbolici ſieno infiniti, o più che infiniti togliendoſi la prima conſeguenza coll' uſare della vera integrale logritmica, e ſvanendo la ſeconda, compiendo, com' è notoriamente di dovere, le trovate integrali. Ma il chiariſſimo Autore dice aver dimoſtrati queſti ſpazj più che infiniti per altra maniera. Io ho lo ſvantaggio di ritrovarmi privo dell' Opera, che egli individua, onde non poſſo reſtare illuminato da ciò, ch' egli inſegna. Paſſerò dunque all' eſame di altra Dimoſtrazione ſullo ſteſſo argomento, addotata per valida da altri dottiſſimi Autori, e che traſcriverò dal dottiſſimo Hoſpital *des Sections coniques alla pag.* 160. Forſe che ſarà la medeſima, di cui ſi è ſervito il dottiſſimo Sig. Abate. Per meglio però fare intendere

intendere la forza della medeſima dimoſtrazione, e rendere poi più intelligibile l' equivoco, che a me pare che contenga, mi ſi permetta che fedelmente la ſponga nel modo ſeguente.

Problema.

Num. 574. *Data una curva* AB (*Fig.* 38.) *concava verſo l' aſſe, e ſappiaſi il valore, od eſpreſſione della ſottangente* PT *di eſſa curva, con queſto però che tal valore ſia eſpreſſo per* AP *lineare, e multiplicata per un coefficiente coſtante, trovare un rettangolo* APMK, *al quale l' area* APMA *della curva abbia una coſtante ragione.*

Sia $AP = x$ $PM = y$, e condotte le contigue QN. NL. ſarà $MR = SN = dx$, e $RN = MS = dy$. Stante la tangente MT nel punto M, ſi conducano TF dall' eſtremo della tangente, e AL dal vertice della curva paralelle alla PM, e pe' punti $M.N.$ le $MF.NG$ paralelle all' aſſe AC. Ciò fatto, io dico che i due paralellogrammi elementari $PMRQ$, che dirò A, e $MFGS$ fatto della dy, e dalla ſottangente, e che nominerò B, ſono ſempre corriſpondentemente fra loro uguali. In fatti eſſendo $NR.$ $RM :: MP. PT.$ (MF) ſarà anche $PMRQ = MFGS$. Sia per tanto l' eſpreſſione della ſottangente della curva, come ſi è propoſto la $\frac{n}{t} \times x$ (e queſta è l' eſpreſſione generale delle ſottangenti di tutte le parabole $y^n = x^t \times a^{n-t}$) noi avremo il paralellogrammo elementare B eſpoſto per $t \times x\,dy = \frac{n}{t}\,dy \times AP$. giacchè x è $= AP$, ed eſſendo il paralellogrammo $MKLS$, che nominerò C lo ſteſſo che $AP \times dy$, avremo il paralellogrammo B eſpoſto per $\frac{n}{t} \times C$. S' intenda ora che cominciando dal vertice A vadanſi nella curva formando

do ſucceſſivamente tutti i paralellogrammi elementari $PMRQ$, e corriſpondentemente fuori della curva i paralellogrammi elementari $MFGS$, i quali comincino anch' eſſi dallo ſteſſo vertice A. queſti faranno ſempre e in ugual numero, e tutti correſpondentemente uguali, laonde noi avremo $\int A = \int \frac{n}{t} C = \frac{n}{t} \int C$. a cagione che $\frac{n}{t}$, come ſi è ſuppoſto, è un coefficiente coſtante, laonde tanto è $\int \frac{n}{t} C$, quanto $\frac{n}{t} \int C$, e ſiccome $\int A$ è tutta l' area $APMA$ della curva, giacchè per tutta eſſa area ſi ſono fatti i paralellogrammi, e $\int C$ è tutta l' area $MKAM$ del trilineo eſteriore alla curva, giacchè anche per eſſa tutta i ſuoi paralellogrami ſi ſono fatti, detta Z l' area della curva, e Q l' area del trilineo, avremo $\frac{n}{t} Q = Z$, e però $t . n :: Q : Z$, e componendo $t + n, n :: Q + Z . Z$; Ma eſſendo $Q + Z$ tutto il rettangolo $AKMP$, queſto pure è il rettangolo, al quale l' area Z della curva ha la ragione aſſegnabile, e coſtante n, a $t + n$, come ſi era propoſto di ritrovare.

Num. 575. Queſto ſteſſo diſcorſo è ſtato applicato alle curve conveſſe verſo l' aſſe, ed aſſintotiche, e ſe ne è ricavato quale certiſſimo corollario, che nell' iperbola $x^t + ^n = x^t y^n$, ſe ſia l' apolloniana, tutto lo ſpazio di eſſa, che da qualunque di lei ordinata ED ſi ſtende verſo C, cioè ſecondo il corſo delle aſciſſe, riſulti infinito, e più che infinito, ſe eſſa iperbola aveſſe l' eſponente n delle ordinate maggiore di t, eſponente delle aſciſſe. Io dunque ſtenderò il medeſimo diſcorſo, e poſtolo in chiaro, farò vedere non ſeguirne però tali concluſioni.

Sia dunque (*Fg.* 39.) la curva EMB fra le ſue aſſintoti, e preſo in eſſa qualunque punto E tirſi per eſſo la EI paralella all' aſſe AC. Tirſi l' ordinata PM, e l' ordinata QR, e così le due coordinate contigue $MK . SL$ prolungate in $F . G$, ove incontrino la normale TF, eccitata dal

dal punto T eſtremo della tangente del punto M. Si dimoſtra anche quì, che è ſempre il paralellogrammo elementare $PMRQ\,[A] =$ al $MFGS\,(B)$, e che eſſendo l' eſpreſſione della ſottangente PT la $\frac{nx}{t}$ (tale eſſendo l' eſpreſſione generale delle ſottangenti di tutte le iperboli ſovraeſpreſſe), eſſo paralellogrammo B ſarà $\frac{nxdy}{t}$, e perchè $x = AP. = KM$, queſto paralellogrammo B ſarà pure $n \times \frac{KM}{t} \times dy = n \times \frac{KN}{t} \times MS$, giacchè $dy = MS$. Avremo dunque $\frac{n}{t} \times KMSL = PMRQ$. Naſcano ora i paralellogrammi elementari corriſpondenti, e faccianſi le due aree, per eſempio, $EIKM$, $EDPM$, ed eſſendo in amendue ugual numero de proprj paralellogrammi, certo è, che le due aree medeſime ſaranno eſpoſte per $\frac{n}{n} \int B$, e $\int A$, onde avremo l' equazione $n Q = t Z . (n \times EIKM = t \times EDPM)$, e le analogie $t - n :: Q . Z$, e $t - n . n :: Q - Z . Z$ ($EIKM - EDPM$. ad $EDPM$), come nell' antecedente ſi è pure reſpettivamente avuto.

Ma queſto è quanto di certo, e di evidente conſegue nel fatto diſcorſo, e che ora conſerverò quì come a parte per poter proſeguire ad eſporre ciò, che ulteriormente è ſtato preteſo di ſtabilire. Suppoſto adunque che l' iperbola EMB ſia protratta all' infinito in B, onde i punti $C . B$. ſieno confuſi in un ſolo, e ſi conſideri lo ſpazio $IEMK$ divenuto $IEBA\,[Q)$, e lo ſpazio $PMED$ divenuto $BEDB\,[Z)$, ſarà il rettangolo $IEDA = Q - Z$, e però anche in riguardo alle iperboli, ſarà aſſegnato il rettangolo $Q - Z$, cioè $IEDA$, al quale lo ſpazio iperbolico $BEDB\,[Z)$ il quale dalla retta ED ſi ſtende fino a B infinitamente lontano da A, avrà là coſtante ragion $\frac{n}{t - n}$

Num. 576. Come corollario di queſto diſcorſo ſe ne è raccolto, che eſſendo nell' iperbola Apollon iana $n = t$, ſarà la ragione di $BEDB$ ad $IEDA$ uguale alla ragione di n a

di n a Zero, e però che rispetto al detto rettangolo $IEDA$, il nominato spazio iperbolico è infinito, ed in oltre, che nelle iperboli che abbiano n maggiore di t, tal ragione sarà in certo modo più che infinita.

Num. 577. Perchè questi due corollarj sussistano si vede essenzialmente necessario, che non ripugni, che i due punti B. C possano concorrere in un solo, laonde, che la retta BX, dalla quale si determina l' area $IEBX$, venga a giacere sulla AC, altrimenti ripugnerà, che diasi nella presente considerazione il rettangolo $IEDA$, e ripugnerà pure il fare a questo, che non può essere, la pretesa comparazione.

Num. 578. Per riconoscere adunque se tali cose repugnino, io mi rifarò a quanto lasciai a parte nel *Num.* 575. Tutto ciò dunque che ivi potè stabilirsi di certo, e di libero, e scevero da ogni nostra arbitraria supposizione, furono le due analogie $t.n :: Q.Z$, e $t-n.n :: Q-Z.Z$. L' area Q è il rettangolo $IEHK$ + il trilineo EHM. L' area Z è il rettangolo $PMHD$ + il medesimo trilineo EHM: L'ultima analogia sarà dunque $t-n.n :: IEHK-PMHD.PMED$

$$t+n \quad t\,n,$$

onde avremo di certo, che in qualsivoglia iperbola $a \quad = x\,y$ di qualunque genere la differenza $t-n$, che proviene sottraendo dall' esponente t dell' ascissa l' esponente n della ordinata, sta sempre a questo esponente n della ordinata, come sta la differenza $IEHK-PMHD$, che proviene sottraendo dal rettangolo $IEHK$, che sta appoggiato all' assintoto AI delle ordinate il corrispondente rettangolo $PMHD$, che sta appoggiato all' assintoto AC delle ascisse, a tutta l' area iperpolica $PMED$, che si connette a quest' ultimo rettangolo $PMHD$.

Num. 579. Da questa evidente, e inoppugnabile dimostrazione, consideriamo cosa raccor si debba per estimare gli spazj iperbolici di qualunque genere. Quanto alla apolloniana essendo in questa $t=n$ dovrà la differenza frà $IEHK$, e $PMHD$ esser Zero, e questo è per l' appunto. Dovendo essere $t:n :: Q.Z$ dovrà pur essere $IEMK = PMED$, e detratto comunemente MEH, rimangono i due sudetti rettangoli

rettangoli fra loro uguali, e conseguentemente la loro differenza sarà zero. Per le iperboli poi nelle quali sia n maggiore di t, la differenza fra essi due rettangoli dovrà essere negativa, e questa pure dimostrasi esser tale in effetto. Essendo t minore di n anche Q sarà maggiore di Z, e detratto da amendue lo stesso trilineo MEH, i residui rettangoli saranno pure, il primo minore del secondo, e la loro differenza anch' essa negativa.

Num. 580 Ecco per tanto quello, che può dedursi di certo, e vero dal contesto della presente dimostrazione, e senza che niuno assurdo s' incontri. Ma se passiamo a pretendere, come è stato fatto, che l' area CED (supposto che B, e C coincidano assieme) fosse allora comparabile al rettangolo $IEDA$, con quella legge che porta la fin quì stessa dimostrazione, quì è d' onde arbitrariamente ci scosteremo dalle cose conchiuse, e dedurremo erronee conseguenze. Ripugna che il rettangolo $IEDA$, considerandolo come è stato preteso di considerarlo, si dia giammai in veruna iperbola, che abbia t non maggiore di n. Si darà bene il rettangolo $IFVX$, sia la VX vicina quanto mai si voglia, ma non però confusa colla DA, ma non giammai, come abbiamo detto, il rettangolo $IEDA$.

In fatti sia il punto B confuso col punto C, e che per ciò si abbiano le due aree $IECA$, CED, dovrà anche ora aversi $t:n :: IECA : CED$, altrimenti distruggeremmo, non solo la natura delle iperboli, ma sarebbe anco stato superfluo al Dimostratore lo stabilire, qual mezzo, che servisse alla propria dimosttazione, la medesima analogia. Se l' iperbola sia l' apolloniana essendo $t=n$ dovrà anche essere $IECA=CED$, il tutto alla parte, assurdo manifesto: Se poi t sia minore di n dovrà allora $IECA$ esser minore di CED, assurdo maggiore. Nè gioverebbe già nel caso, in cui siamo, fingere, e pretendere, che essendo tanto l' uno, quanto l' altro de' nominati spazj infinito, non corre per loro, che sia assurdo, che il tutto non sia maggiore della parte, nè che parimenti sia assurdo, che un infinito $IECA$ maggiore visibilmente di un altro CED, sia però di questo minore, pensieri, e risposte, che sarebbero, e novissime, e stranissime

niſſime, e che come ho detto, non gioverebbono, poichè qui non ſi tratta di provare ſe tali ſpazj ſieno, o no infiniti, ma ſolo di eſaminare, ſe la deſcritta dimoſtrazione provi, che ſieno infiniti. Laonde per far ſvanire gli aſſurdi, che ſaltan fuori, volendo conchiudere, che ella li dimoſtri infiniti, non può giovare il ſupporli con vana petizione di principio infiniti. Queſti aſſurdi adunque, che ſi dimoſtra evidentemente, che ſeguirebbero, ſe ſi poteſſe dare, ſecondo il ſenſo eſpoſto, il rettangolo $IEDA$, e che non ſi ſono incontrati, che nella occaſione di ſupporre queſto rettangolo, conchiudono evidentemente, non poterſi egli dare, e però reſtare indimoſtrato quello, che pretendevaſi, cioè che lo ſpazio iperbolico CED ſia, o infinito, o piu che infinito, vedendoſi chiaramente, che lo ſcambio inavvertentemente fatto del rettangolo $IEDA$, che non può darſi, nel retangolo $IEVX$, il quale può darſi, quantunque la XB divenga proſſima alla AC, ſecondo però, che lo permette la natura della propria iperbola, ne ha cagionato l' equivoco.

Num. 581. Dopo di queſto fa d' uopo paſſare all' eſame di queſta medeſima dimoſtrazione relativamente alle iperboli $a^{t+n} = x^t y^n$, che hanno n minore di t. Queſto eſame mi porterà a produrre un mio penſiere, il quale ſe ſarà ſuſſiſtente, ci porrà in iſtato di rendere aſſai chiari i miſteri dell' aſſintotiſmo, e mi aprirà il campo a rendere inefficace un altra pruova, che le aree iperboliche ſieno infinite. Che vi ſieno delle quantità, le quali decreſcendo vanno a finire in zero, tutti nè convengono, e ne convengo anch' io, ſolo tenendo, che ve ne ſieno di quelle, le quali, benchè vadano deſcreſcendo, finir non vi poſſano. Fra quelle dunque, che vi finiſcono ſono certamente gli angoli eſterni, per eſempio (*Fig.* 39.) l' angolo MTP, poichè la retta MT inſiſtente nel punto T alla retta AC può ſempre andarſi accoſtando a queſta, nè ripugnanza veruna vi è, che con eſſa addattandoſi vada a confonderſi. I lati elementari della iperbola fanno ſempre con la tangente del punto antecedente un angolo eſterno, quale va ſempre di mano in mano decreſcendo. Par giuſto il credere, che finalmente tale angolo diventi nullo, giacchè

giacchè quanto alla propria natura non vi è ripugnanza, e dalla parte della iperbola io non ſo vedervela, mentre non ſolo lo ſcemarſi continuo di un tal angolo è certo, ma poſto che eſſo ſi annienti tutto ciò, che nell' aſſintotiſmo è miſterioſo da intendere, pare a me, che chiaramente ſi ſpieghi. Immaginiamo dunque annientato tale angolo nel punto B, certo ſarebbe allora, che per quanto proſeguiſce il ramo EMB di là da B, tutto ſarebbe una linea retta, ancorchè ſi prolungaſſe in infinito, e che queſta conſerverebbe ſempre coll' aſſintoto AC un perfetto paralelliſmo. Accaderebbe però, che nell' punto B l' iperbola, in ſenſo di verità, finirebbe, poichè divenendo allora la coordinata y una coſtante, avremmo in tale ſtato, non più l' equazione del iperbola $a^{t+n} = x^t y^n$, ma l' equazione $a^{\frac{t+n}{t}} = x\,(\text{la } b \text{ figura la } y \text{ divenuta coſtante})$, la qual equazione è quella d' un paralellogrammo, nel quale eſſendo x l' aſciſſa la $a^{\frac{t+n}{t}} : b^{\frac{n}{t}}$ è l' ordinata.

Num. 582. Se tale mio penſiere ſuſſiſte, parmi che tutto ſia reſo chiaro. Le aſſintoti delle iperboli, che hanno n o uguale, o maggiore di t, come linee rette, che con niuna altra linea concorrono, può concepirſi libero il protrarle all' infinito, ma non per queſto il ramo EMB della iperbola, può oltreppaſſare il punto B, e ſe ſi concepiſſe, che lo trapaſſi, non è più iperbola, ma paralellegrammo, e di qui può naſcere, che di tutti i rettangoli, che far ſi poſſono contenuti da amendue le aſſintoti, e coll' angolo oppoſto al vertice A, terminati all' iperbola, l' ultimo ſia quello, che ha tale ſuo angolo terminato al punto B, e così ſalvando ſempre illeſa la natura della iperbola, potrà ſalvarſi che tali rettangoli ſaranno ſempre tali, quali tale natura delle iperboli lo eſige, o uguali, o maggiori del quadrato ſopra al lato della podeſtà della iperbola. Così pure potrà intenderſi il perchè nell' iperbola apolloniana, e in quelle, che hanno n minore di t, e che ſono le reciproche di queſta, delle quali

le quali ora andiamo trattando, la x iniziale, non può mai esser zero, mentre dee essere uguale ad $a^{\frac{t+n}{t}} : b^{\frac{n}{t}}$, come porta l' espressione sopra trovata.

Num. 583. Nelle iperboli poi, che hanno n maggiore di t seguirà lo stesso paralellismo, ma d' un' altra maniera, perchè in tali iperboli il ramo, che si stende di là da B, coinciderà coll' assintoto AC. Dimostrerò prima, che in queste iperboli la distanza fra B, e C, quando che il ramo EMB, divenga una retta in B, è minore della distanza fra B, e C, competente alle iperboli, che hanno n maggiore di t, indi passerò a far vedere, che quella distanza può esser nulla. L' espressione generale della distanza fra B, e C è, come antecedentemente ho notato la $a^{\frac{t+n}{t}} : b^{\frac{n}{t}}$. Nel caso che n sia maggiore di t si dica $t+c=n$, e nel opposto caso, quando n sia minore di t, dicasi $t-c=n$. Sostituiscansi questi due valori in luogo di n nella sovra posta espressione generale, e nel caso di n maggiore di t avremo $a^{\frac{2t+c}{t}} : b^{\frac{t+c}{t}}$, che dirò $= f$. Nell' altro caso poi avremo $a^{\frac{2t-c}{t}} : b^{\frac{t-c}{t}}$, che dirò $= g$; Sarà dunque $f . g :: a^{\frac{2t+c}{t}} : b^{\frac{t+c}{t}} . a^{\frac{2t-c}{t}} : b^{\frac{t-c}{t}}$, e però

$f \times a^{\frac{2t-c}{t}} : b^{\frac{t-c}{t}} = g \times a^{\frac{2t+c}{t}} : b^{\frac{t+c}{t}}$, e riducendo

$f . g :: a^{\frac{c+c}{t}} . b^{\frac{c+c}{t}}$.

Siccome dunque b è minore, e grandemente d' a, giacchè a significai la prima y AX (o piuttosto l' ultima BC). ed a tutta la presso che infinita AC della iperbola, così g, che significa la distanza BC nel caso, che n sia minore di t, sarà minore, e grandemente di f, vale a dire della distanza BC competente al caso di n maggiore, o uguale di t.

Num. 584. Perchè poi quello, che impedisce nelle iperboli di questa seconda fatta, che il ramo EMB non possa congiungersi collo assintoto, è il rettangolo $ACBX$, il quale, o è costantemente uguale al quadrato del lato della podestà della iperbola, nel caso di $n=t$, o all' allungarsi di x (AP] nel caso di n maggiore di t, và esso $ACDX$ successivamente accrescendosi, impedimento, che non interviene nelle iperboli, che hanno n minore di t, e nelle quali detto rettangolo è minore di detto quadrato, e all' allungarsi di AP sempre va decrescendo; così sembra ragionevole il sostenere, che tale rettangolo, in questo caso di n minore di t, si annienti, il che accadere non può, se la sovra adoperata b non si annienti, il che essendo, è altresì, che il ramo EMB, in queste iperboli concorra coll' assintoto AB, e prosegua sopra la medesima in una retta.

Num. 585. Ciò stante, non è poi maraviglia se nel discorso esaminato della quadratura delle aree iperboliche, in queste, che hanno n minore di t, niun' imbarazzo, nè mistero alcuno d' infinito, o piucchè infinito s' incontra, nè che il tutto sia maggiore della parte. Potendo in questo il lato KM (*Fig.* 39.) adattarsi all' assintoto AC, e formarsene l' area $IEBA$, e sussistendo veramente, e senz' assurdo anche fra questa, e l' area BED la ragione di t ad n, così va bene il calcolo, che se ne forma, ed il rettangolo $IEDA$ è senza errore veruno la differenza di esse due aree.

Num. 586. Applicando dunque, come ſi preteſe di fare (*Num.* 575.) alle curve concave verſo l' aſſe, ed aſſintotiche il diſcorſo, che nel *Num.* 574. alle curve verſo eſſo concave fu con buon ſucceſſo applicato, non rieſce di avere analogamente, quando n ſia maggiore di t, nelle iperboli di qualunque grado le ſteſſe notizie. Non è però inutile tale diſcorſo, poichè da eſſo, data una iperbola $a^{t+n} = x^t y^n$ di qualunque grado, e in eſſa ſia condotta la ordinata DE, laonde l' aſciſſa AD a queſta ordinata corriſpondente ſia detta p, e condotta qualunque ordinata $PM = y$ alla quale corriſponda l' aſciſſa $AP = x$, può ſempre averſi il valore aſſoluto dell' area $PMED$ eſpreſſo per le a, x, p, n, t, eccettuatone però il caſo di $n = t$.

In fatti la DP ſarà $x - p$. La $PM = y = a^{\frac{t+n}{n}} x^{-\frac{t}{n}}$. La $DE = a^{\frac{t+n}{n}} p^{-\frac{t}{n}}$, ed eſſendo $HE = DE - PM$, ſarà pure

$$HE = a^{\frac{t+n}{n}} \times p^{-\frac{t}{n}} - x^{-\frac{t}{n}}.$$

Così pure è il rettangolo

$$IH = IE(AD) \times HE. = a^{\frac{t+n}{n}} \times p^{\frac{n-t}{n}} - p\, x^{-\frac{t}{n}},$$

e però ricaveremo $IH - PH = a^{\frac{t+n}{n}} \times p^{\frac{n-t}{n}} - x^{\frac{n-t}{n}}$, e queſto è il valore generale della differenza, che riſulta ſottraendo il rettangolo PH dal rettangolo IH. In queſto rettangolo è ſempre x maggiore di p, laonde ſe n ſia maggiore di t egli reſta neceſſariamente preceduto dal ſegno negativo, e avrà la forma $- a^{\frac{t+n}{n}} \times x^{\frac{n-t}{n}} - p^{\frac{n-t}{n}}$. Per lo contrario ſe n ſia minore di t, ſarà preceduto dal ſegno poſitivo, e come che in tal caſo tanto p quanto x ſaranno nel denominatore, allora avrà la forma

$$a^{\frac{t+n}{n}} \times p^{\frac{t-n}{n}} - x^{\frac{t-n}{n}} = a^{\frac{t+n}{n}} \times \frac{x^{\frac{t-n}{n}} - p^{\frac{t-n}{n}}}{p^{\frac{t-n}{n}}}$$

Ciò avvertito, ſe ſia n maggiore di t, e vogliaſi il valore aſſoluto dell' area $FMED$, dovremo fare $t - n$ (che è quantità negativa) ad n :: $- a^{\frac{t+n}{n}} \times x^{\frac{n-t}{n}} - p^{\frac{n-t}{n}}$ a $PMED$, che ſarà $- n \times a^{\frac{t+n}{n}} \times \frac{x^{\frac{n-t}{n}} - p^{\frac{n-t}{n}}}{t-n}$, e queſto è il valore generale di eſſo ſpazio nel caſo di n maggiore di t, e che ſarà un valore poſitivo, atteſo l'eſſere $t - n$ quantità negativa. Nel caſo poi di n minore di t, eſſo valore ſarà $\frac{n a^{\frac{t+n}{n}} \times x^{\frac{t-n}{n}} - p^{\frac{t-n}{n}}}{n-t \times p^{\frac{t-n}{n}}}$. Suppongaſi, che l' iperbola ſia $a^3 = xy^2$, in cui $t = 1$, e $n = 2$, l' area $PMED$ ſarà $2a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}$ cioè $2a^{\frac{2}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}$. Suppongaſi l'iperbola $a^3 = x^2 y$, in cui $t = 2$, e $n = 1$ l' area $PMED$ ſarà $a^3 \times \frac{x-p}{px}$.

Riavremo queſti ſteſſi valori integrando generalmente gli elementi dell' area cercata. Imperocchè l' elemento dell' area $ZMPA$ per l' iperbola $a^3 = xy^2$, e $a^3 x^{-\frac{1}{2}} dx$, la di cui integrale

tegrale è $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. Così il valore dell' area $ZFDA$ è $2a^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}$, onde il valore dell' area $PMED$ riviene il trovato $2a^{\frac{3}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}$. Se l' iperbola sia $a^3 = x^2y$ l' elemento dell' area $ZMPA$ sarà $a^3x^{-2}dx$, e la sua integrale compita, come al *Num.* 495. sarà $a^3 - a^3x^{-1}$. Similmente il valore compito dell' area $ZEDA$ sarà $a^3 - a^3p^{-1}$ e riverrà il valore compito dell' area $PMED$ il già trovato di sopra $\frac{a^3 \times x - p}{px}$

Num. 587. Ho voluto ſtendere per minuto queſte calcolazioni, perchè i Principianti tanto meglio reſtar poſſono illuminati nella queſtione preſente. Queſti potranno riconoſcere, che il ſimbolo $t - n$ negativo, quando n ſia maggiore di t, non opera già il preteſo *più che infinito*, ma egli è negativo, perchè nell' anologia $t - n . n :: Q - Z . Z$ egli dee corriſpondere al ſuo omogeneo $Q - Z$, che anch' eſſo in tale occaſione è neceſſariamente negativo.

Num. 588. Così pure perchè reſtino illuminati ſopra a che ſignifichi il medeſimo ſimbolo $t - n$, che diviene zero, allorchè ſia $t = n$, oſſervino il valore generale di $Q - Z$ preſſo per $a^{\frac{t+n}{n}} \times p^{\frac{n-t}{n}} - x^{\frac{n-t}{n}}$, il quale allora diviene $a^2 \times 1 - 1 = 1$, o (tanto $p^{\frac{n-t}{n}}$ quanto $x^{\frac{n-t}{n}}$, e che ſono p^0, e x^0, divengono l' unità, laonde in modo veruno, quando n ſia $= t$, s' ha fondamento di pretendere da queſta anologia veruna *quantità infinita*.

Num.

Num. 589. In terzo luogo oſſervino ancora l' anologia, che riſulta nel caſo di $n = t$: Ella è o $(t - n) \; n :: o \; (a^2 \times 1 - 1)$ all' area $PMED$. Abbiamo ricavati i veri valori di queſto ſpazio ſtando diſuguali n, e t, ma quando queſti divengano uguali, la regola, o formola, che felicemente ci ha dati quelli, ci manca per queſto, riſultandoci allora $n = PMED$. Queſta notizia è inutile, e non vera. Non vera, perchè è n nella ſteſſa iperbola una coſtante, e l' area $PMED$ nella ſteſſa iperbola un area variabile. E' inutile perchè n, che è un ſemplice numero, non può compararſi ad un area. Ecco dunque come lo promiſi al *Num.* 569., che nel caſo individuale delle iperboli, la Regola, che veramente ci può fare iſcoprire i valori delle aree parziali iperboliche, quando n, e t ſieno diſuguali, ci manca quando divengono uguali, laonde che il ſimbolo $\frac{a^2 x^0}{0}$, che in queſto caſo ci viene ſomminiſtrato dalla medeſima regola, non ſerve, e ci condurrebbe all' errore, ſe ad eſſo in tale occaſione affidar ci voleſſimo. Le differenziali, o elementi dell' area iperbolica, che ha $n = t$, ſono differenziali di una logoritmica, onde entrar non poſſono in quella regola, nè con eſſa maneggiarſi, che le ſole differenziali aritmetiche contiene.

Num. 590 Ritorniàmo ora all' idea, che ho prodotto al *Num.* 581. cioè che i rami di qualunque iperbola finalmente, e prima che eſcano dal finito, ſi facciano rette. Allora, come ho detto, l' iperbola non paſſa più avanti, cambiandoſi la di lei natura in quella di un paralellogrammo. Potrà parere impoſſibile, che una equazione compoſta di variabili non abbia a poter ſtendere queſte ſue variabili ſenza limite, benchè nulla in eſſe variabili, o in quelle, che han il limite, appaja di coſtante. Mi ſi permetta, che eſamini ſucceſſivamente queſto punto.

Num. 591. Per farmi ſtrada verrò ſubito a un fatto. Sia l' equazione $A .. x^2 - bx + aa$. E' notiſſimo, che in queſta equazione è $x = \frac{b + \sqrt{bb - 4aa}}{2}$, e che ſe bb ſia minore di $4aa$, allora x è immaginaria, laonde ſe per ſoluzione di un problema ci veniſſe queſta equazione, e foſſe bb, non maggiore di $4aa$, ſaremmo fatti certi, che l' ottenuta ſoluzione

ſoluzione a nulla varrebbe, e riconoſceremmo avere, o aſſunti ſuppoſti non veri, o sbagliato il Calcolo.

Num. 592. Supponiamo ora, che la equazione *A* abbia la *b*, che ſia anch' eſſa variabile, o tutta, o in parte, per eſempio ſia $B \ldots x^2 - 2ax - xz\sqrt{2} + aa = 0$, e ſarebbe queſta l' equazione, che nel *Num.* 543. ſcoprimmo ſotto la forma $x^2 - xg\sqrt{2} + aa = 0$, e nella quale *x* è tutta l' aſſintoto *AG* dell' iperbola apolloniana *BE* (*Fig.* 37.), e $g = DA + BA = z + a\sqrt{2}$ è l' aſſe della medeſima iperbola a queſto, e non più all' aſſintoto referita, il qual aſſe è in oltre protratto fino all' angolo *A* delle aſſintoti. Nell' equazione *B* ſta dunque non ſolo la parte *CF* della *x*, ma anche la parte *AC* della medeſima, e tutto ſotto la ſola denominazione di *x*, e così pure vi ſta, come aſſe, tutta la *AD*, benchè aſſe proprio non ſia che la *BD*. Le *x*, che ſi cercano mediante l' equazione *B*, debbono eſſere le *AF*, o *AT*, *AC* determinate dalle perpendicolari *EF*, *QT*, o *BC*, le quali dal ſolo ambito *BQE* dell' iperbola ſono laſciate cadere ſull' aſſintoto *AG*. E' viſibile, che nel preſente caſo, in tutto lo ſpazio *AC* non può laſciarſi cadere veruna perpendicolare alla *AC* dall' ambito della curva, e che però della porzione di *x*, che è uguale ad *AC*, niuna determinazione può farſene, a norma dell' equazione *B*, benchè tale porzione di *x* ſuſſiſta neceſſariamente in eſſa equazione. Di queſto accidente l' Algebra ce ne dee rendere avvertiti, ed accadendo appunto tale accidente allor che *AB* ($a\sqrt{2}$) venga ad eſſere non minore di *AD* (*g*) ella lo fa, ſomminiſtrandoci allora *x* uguale a quantità immaginarie, mentre l' equazione $x^2 - gx\sqrt{2} + aa = 0$ ci dà $x = \frac{g + \sqrt{gg - 2aa}}{\sqrt{2}}$, nella quale per appunto $\frac{\sqrt{gg - 2aa}}{\sqrt{2}}$ è immaginaria, quando $a\sqrt{2}$ ſia non minore di *g*.

Nulla

Num. 593. Ecco dunque la viſibile cagione, che in queſta equazione fa naſcere l' immaginario. Non appare egli perchè quel problema, che per ſua finale ſoluzione aveſſe la *B*, abbia ammeſſi principj non veri, o per errore di Calcolo. Naſce perchè la variabile medeſima del problema, benchè in eſſo ſempre ſuſſiſta, e benchè in eſſa nulla appaja di coſtante, ha un termine, decreſcendo dal quale più non ſuſſiſte; ſe ſi voleſſe portar di là da queſto termine l' uſo della preſente equazione, ella muterebbe natura, perchè ſe le perpendicolari alla *AG* ſi voleſſero laſciar cadere dalla *BA*, non avremo più la natura dell' equazione *B*, ma quella del triangolo. E' dunque viſibilmente poſſibile, che una equazione non poſſa eſtendere ſenza limite, nel ſenſo eſpoſto, le ſue variabili, e che, ſe ſi pretendeſſe di continuarla oltre un tal limite, ella muterebbe natura.

Num. 594. Coſa ſimile io dunque mi immagino, che accada alle iperboli, e che eſſe continuar non ſi poſſano liberamente. Il limite, in cui così ſi riducono, pare a me, che ſia, quando ſono giunte a proſeguir rette, al che fare, non ſolo ripugnanza non pare che eſſer vi poſſa per parte degli angoli eſteriori, che ſempre vanno decreſcendo, e ſembra, che ſia neceſſario che vi pervengano per quel rettangolo, che nelle iperboli, che hanno *x* non minore di *t*, per loro eſſenziale natura, o coſtantemente, o ſempre creſcendo, ſta invincibilmente adattato all' aſſintoto dell' aſciſſe, e da queſte ne tien ſeparato il corriſpondente ramo iperbolico.

Num. 595. Spiegate queſte coſe mi porrò a rendere inefficace, come lo accennai, un altra pruova della infinità delle aree iperboliche. Conſiderando l' iperbola apolloniana nell' cono è certo, che le aſſintoti ſono la comune ſezzione della ſuperficie del cono, e del piano, che per l' aſſe del cono medeſimo ſi ſtende. La traccia poi dell' iperbola è anch' eſſa la comune ſezzione della ſuperficie del medeſimo cono, e di altro piano, che al primo è poſto per ogni verſo parallello

ralello. Se da ogni punto della traccia della iperbola si manderà al piano per l' asse una perpendicolare, tutte queste perpendicolari intese cadute da ogni punto dell' iperbola sopra del piano, riporteranno sopra di questo la iperbola, e questa sarà allora figurata sopra del detto piano, come se fosse un foglio di carta, e i due lati del cono saranno le di lei asintoti. Da questa considerazione resta innegabile, che l' iperbola così riportata non potrà mai congiungere le sue branche alle asintoti, perchè cadendo le perpendicolari, che la vanno riportando da un punto, che è dentro i lati del cono, mai ve nè potrà esser una, che cada sopra a' medesimi lati. E perchè non sa intendersi, che nè il cono, nè il piano pel di lui asse, e l' altro, che gli è paralello, non possano stendersi in infinito, così è manifesto, che lo spazio fra l' assintoto, e l' iperbola, esso si stenderà in infinito. Questo discorso sarebbe vero, se tutte le proposizioni, che concorrono a farlo, esse fossero vere, o essendo anche vere, validamente stringessero. Che possa darsi cono esteso in infinito è cosa, che ha bisogno di pruova, e io mi lusingho d' aver dato pruova al *Num.* 471., che cono infinito, o triangolo, il che torna allo stesso, non possa darsi: Ma diasi. Se dopo un tanto corso del ramo per esempio *EMB* (*Fig.* 39.) egli si muti in retto, durerà il cono ad allungarsi, si protrarrà esso ramo *EMB*, ma non però l' iperbola, ma un paralellogrammo, e tutto il discorso sarà inefficace.

Num. 596. Altre due dimostrazioni concludenti l' infinità dell' aree iperboliche mi restano per anche da esaminare. Sono amendue degl' insigni Frattelli Bernoulli. Leggonsi alla pagina 246., e seguenti dell' egregia Opera *de Seriebus infinitis*, cominciando al *Num. XV.* Io stimo opportuno per maggior chiarezza, e per farne uno esame più fedele, trascriver quanto nel citato luogo sta impresso -

Invenire

XV. „ *Invenire summam ſeriei infinitæ fractionum* R, *quæ-*
„ *rum numeratores conſtituunt ſeriem Æqualium, de-*
„ *rum nominatores vero Trigonalium, eorumve æquemul-*
„ *tiplicium.*

Si a ſerie harmonice proportionalium N, *eademmet multa-ta primo termino* P *ſubtrahatur, exoritur nova ſeries* Q, *cujus denominatores Trigonalium dupli ſunt, cujuſque adeo ſumma æqualis erit ipſi primo termino ſeriei Harmonicæ* N, *per* Ax. 3.

Operatio talis.

A ſerie $N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c}$ *&c.*

Subtracta ſeries $P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c}$ *&c.* $= N - \frac{a}{c}$

Relinquit ſeriem $Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c}$ *&c* $= \frac{a}{c}$

Cujus duplum $R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c}$ *&c.* $= \frac{2a}{c}$

Series ſcilicet Fractionum propoſita, quarum Denominatores ſunt numeri Trigonales, eorumve æque-multiplices.

Obſervandum tamen, non ſine cautela hac utendum eſſe metodo. Nam ſi a ſequenti ſerie S *eadem dempto primo termino* T *ſubtrahatur, prodibit ſeries* Q, *quæ antea; nec tamen inde ſequitur, ſummam ſeriei* Q, *æqualem eſſe primo termino ſeriei* $S = \frac{2a}{c}$. *Cujus rei ratio eſt, quod, ſi a ſerie* S *ſubtrahatur ſeries terminorum totidem* T, *in qua ſinguli termini poſtremum præcedentes ſingulos primum conſe-*

 quen-

quentes in altera deſtruunt, reſiduum, hoc eſt reſultans ſe-
ries Q, *evidenter debet adæquari primo termino ſeriei* S
minus ultimo ipſius T; *adeoque ipſi primo ſeriei* S *abſolu-*
te æqualis eſſe nequit, niſi tum cum ultimus ipſius T *in*
nihilum deſinit, uti quidem deſinere perſpicuum eſt in ſerie
P, *vel* N: *at non evaneſcit pariter in ſerie* T, *vel* S,
verum eſt $= \frac{a}{c}$, *per* X. *Quin itaque potius ſumma ſeriei*

$$Q = \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}, \text{ ut ſupra.}$$

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \text{ &c.}$$

$$T = \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \text{ &c.}$$

$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \text{ &c.} = \frac{2a}{c} =$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$$

XVI. „ *Summæ ſeriei infinitæ harmonice proportionalium,*
„ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. *eſt infinita.*

ID *primus deprehendit Frater: inventa namque per præce-*
dentem ſummæ ſeriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$
&c. *viſurus porro quid emergeret ex iſta ſerie.*
$\frac{2}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$ „ &c. *ſi reſolveretur me-*
todo Propoſitionis XIV. „ *collegit Propoſitionis veritatem ex* *abſur-*

abſurditate manifeſta, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei har-
monicæ finitæ ſtatueretur. Animadvertit enim, ſeriem A,
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c. = (*fractionibus ſin-*
gulis in alias, quarum numeratores ſunt 1, 2, 3, 4, &c.
tranſmutatis) *ſeriei* B, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$
$+ \frac{6}{42}$ + &c. = C + D + E + F &c.

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \text{ &c.} = \text{per praceden.} \frac{1}{1}$$
$$D = + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \text{ &c.} = C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$E = + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \text{ &c.} = D - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$
$$F = + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \text{ &c.} = E - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

} = G

Unde ſequitur, ſeriem G = A, *totum parti, ſi ſumma finita eſſet.*

Queſto baſta per ora a far comprendere la prima Dimoſtrazione, che eſaminerò in primo luogo, eſponendo brevemente, ed allargando qualche poco, a più facile intelligenza pe' Principianti, il diſcorſo dell' inſigne ſtimatiſſimo Autore.

Num. 597. Si propone egli la premeſſa Serie *R*, nella quale i numeratori ſono tutti numeri uguali, e i denominatori ſono anche eſſi numeri uguali, ma multiplicati cadun di loro ſucceſſivamente per ordine co' numeri triangolari 1. 3. 6. 10. &; Suppone, che queſta ſerie con tal legge ſia continvata in modo, che la moltitudine de' ſuoi termini congiunga ad eſſere infinita. Di queſta ſerie, in queſta condizione ricerca il valore, cioè quanto ſommino i valori di tutti queſti termini di multitudine infinita. Trova egli col metodo, che v'adopera, e che è ſopra deſcritto nel teſto, che tal

tal somma è $\frac{2a}{c}$, laonde se a fosse $= c$ risulterebbe la serie

$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ + &c. protratta all' infinito uguale a due. Con due diversi supposti trova egli lo stesso valore di essa serie R. Fra poco esaminerò queste cose, e in tanto passerò a ricercare se la sua dimostrazione conchiuda veramente, che la serie armonica, protratta all' infinito sia di valore infinito.

Num. 598. Avendo dunque ricavato, che $\frac{c}{c}$ è il valore della serie $Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c}$ + &c. protratta all' infinito, ed essendo questa serie, quando a sia $= c$ la $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. il valore di questa serie sarà l' unità. Serbata in tanto a parte questa notizia, e presa la serie

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ + &c. protratta all' infinito, multiplica per ordine tanto il numeratore quanto il denominatore di cadaun termine di questa serie pe' numeri naturali, presi anch' essi per ordine, con che senza mutare il valore di niuno di essi termini, giacchè così facendo li multiplica ogn' un di loro per l' unità, le muta solo la forma, e la cambia nella

$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{36} + \frac{1}{42}$, restando certamente $A = B$. Spartisce successivamente la serie B nella serie $C.D.E.F.$ &c. come sta figurato di sopra, essendo pur anche certissimo, che le serie $C.D.E.F$ protratte anch' esse al bisogno, uguagliano co' loro valori raccolti assieme il valore della serie $B = A$. La serie C è la stessa che la M, però il di lei valore sarà come sopra l' unità. Il valore della serie D, che manca di $\frac{1}{2}$ della serie C sarà $\frac{1}{2}$. Il valore della serie E, che manca di $\frac{1}{6}$ della serie D sarà $\frac{1}{3}$, e così il valore della F sarà $\frac{1}{4}$, e i valori delle altre, che si intendessero susseguentemente poste, sarebbero altresì susseguentemente $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ &c., cioè i termini consecutivi della serie armonica.

Num. 599. Segue per tanto da tutto questo, che il valore della serie armonica G protratta all' infinito, $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c vien a risultarci uguale al valore della $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ + &c. benchè quella sia visibilmente maggiore di questa per una unità. Questo innegabile assurdo riduce il chiarissimo Autore a cercarne lo scampo: E non diffidando punto di veruna delle Proposizioni adoperate in questa scoperta, s' induce a dire esser forza, che il valore della serie armonica M protratta all' infinito, sia assolutamente infinito: perchè così, per quanto ella avesse una unità di più della serie A, ciò non torrebbe punto, che elleno non fossero uguali.

Num. 600. Esaminiamo di passaggio questa illazione. O egli suppone, che la serie A sia anch' essa infinita, o che sia finita. Se la suppone finita, ben lontano che tale illazione conchiudesse, ella porrebbe in essere un assurdo maggiore, e certamente supposta A finita, la G sarebbe maggiore della A ben altro che di una unità, mentre sarebbe di lei maggiore per altrettanto quanto l' infinito è maggior del finito, e il pretendere di levar l' assurdo col supporre infinita la serie G, sarebbe un accrescerlo a dismisura. Resta dunque, che egli voglia, che anche la serie A fosse infinita. Questa pretesa vuol certamente, che anche la G, che per se stessa, e indipendentemente da questi discorsi è maggiore della A, fosse infinita, ed ecco in questa illazione non sievole sospetto di petizione di principio.

Num.

Num. 601. Ma facciamo vedere, ſervendoci di que' principj, che i Difenſori dell' Infinito hanno poſti per propagarlo, che la ſerie *A* non può eſſere di valore infinito. Nella ſerie Q ſia $a = c$, e diverrà la ſerie

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \times \text{ &c.}$$

. Il valore di queſta protratta all' infinito ſi dice = 1, e però è di lunga mano finita. I numeratori di queſta ſerie *M* ſi multiplichino per ordine co' numeri naturali preſi anch' eſſi per ordine, e ne verrà la ſerie *B*. La ſerie *M* multiplicata come ſi è detto, non può, in ſeguito del riferito al *Num.* 560., eſſere infinita, perchè è una grandezza finita multiplicata per grandezza finita, e però finita, e queſte ſole grandezze finite ſono aggiunte aſſieme, dunque neppur la $A = B = M$ può eſſere infinita. Ma ſe *A* è finita, ne riſulta minore di *G* che per una unità, e come potrà, ſalva la teoria del *Num.* 560., poterſi pretendere la *G* infinita?

Num. 602. Non accade dunque cercar ripiego per ſalvare il rilevato aſsurdo, biſogna cercare d' onde egli naſca. Entrano nel diſcorſo, che l' ha fatto uſcir fuori, le quattro ſeguenti propoſizioni. Prima, che la ſerie *A* ſia $= B$, ſeconda che ſia $B = C + D + E + F +$ &c. Terza che la ſerie *C* ſia protratta all' infinito, e che perciò vaglia uno; e quarta, che $B + D + E + F +$ &c. ſia $= G$. Tra queſte propoſizioni la prima, ſeconda, e quarta ſono evidentemente vere. Solo dunque ſopra la terza può cadere ſoſpetto, e queſta è, che veramente è falſa, il che ora paſſerò a far vedere.

Num. 603. La ſerie *C* non può protrarſi all' infinito, e di quì poi viene, che il valore di tutti i ſuoi termini poſſibili non gingne ad eſſere l' unità, ma ſe ne reſta minore. Reſtando poi tale ſomma di *C* minore dell' unità, così la ſomma di *D* è minore di $\frac{1}{2}$, quella di *E* minore di $\frac{1}{3}$, e tutti queſti ſmanchi, o difetti raccolti aſſieme, fanno poi quella unità, che ſembrava eccedente, e di cui pareva che

va, che la *G* ſuperaſſe la *A*. Per preparare i Principianti all' intelligenza di quanto ho a dire, farò prima vedere, che fino a che non s' introduca in queſto diſcorſo la non vera pretenſione, che i termini della *C* ſieno di multitudine infinita, la ſerie *B* ſpartita nelle ſerie *C. D. E. F.* &c. dà ſempre la ſerie *G* preciſamente uguale alla ſerie *A*, e che l' aſſurdo ſcoperto non vi è mai, ſe non quando ſi pretende, che i termini della ſerie *B* ſieno di multitudine infinita, ſoſpetto certamente fondatiſſimo, ſe non piuttoſto pruova certiſſima, che lo ſcoperto aſſurdo è uſcito per queſta porta. Paſſerò poi ſuſſeguentemente a moſtrare, che eſſa ſerie *C*, o *B* non può avere la multitudine de' ſuoi termini infinita, e però avere neceſſariamente la propria ſomma minore dell' unità.

Num. 604. La ſerie *C* naſce dunque come ſotto.

$$P - R = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \&c. =$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \text{ &c.}$$

Cioè ponendo la ſerie armonica cominciante dall' unità, e interpollando negativamente frall' uno e l' altro de' due termini conſecutivi, il termine che fra queſti due è il minore. E ſiccome, a riſerva de' due termini eſtremi, nella ſerie $P - R$ vengono con ciò tutti quelli di mezzo, pe' ſegni contrarj a ſvanire, così la ſerie *C*, che è la ſteſſa $P - R$ è neceſſariamente uguale al primo termine, meno l' ultimo di quelli della ſerie armonica, che ſi ſono adoprati.

Num. 605. Oſſervo ora che nella ſerie armonica cominciante dall' unità, detto *N* il numero, che denota quanti termini di eſſa ſerie ſi ſono poſti, il termine effettivo nella ſteſſa ſerie, correſpondente a tale multitudine *N* di termini ſarà ſempre $\frac{1}{n}$. Il quinto termine per eſſempio di queſta ſerie ſarà $\frac{1}{5}$, il centeſimo ſarà $\frac{1}{100}$ e però generalmente il termine *M* ſarà $\frac{1}{n}$. Per iſpiegarmi ſenza equivoco adoperò

pero N per denotare la multitudine, ed n per notare il termine, essendo però sempre N, ed n lo stesso numero. Volendo poi comparare la quantità N, de' termini, che abbia la serie C, a quanti, procreandoli, ve ne sieno occorsi della serie armonica, è visibile, che ve ne vorranno $N+1$, e perciò il termine di questa serie, che sotratto dal primo (*Num.* 604.) avrà procreato il termine N della serie C, sarà stato $\frac{1}{n+1}$. Quindi il valore di tutti i termini della serie C, la multitudine de' quali sia N, dovendo essere $1-\frac{1}{n+1}$, sarà generalmente $\frac{n}{n+1}$. Se poi voremo l' espressione di qualunque termine della C corrispondente ad N, sarà egli generalmente $\frac{1}{n\times n+1}$ giacchè ogni termine della C si fa sempre da $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Num. 606. Ciò trovato abbia la serie C, per esempio i primi quattro termini, e però $N=4$, che produrrà il valore de' suoi termini $\frac{n}{n+1}=\frac{4}{5}$, e se ne faccia il seguente calcolo.

$$C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\ldots\ldots\frac{4}{5}\}\ldots\ldots\frac{1}{2}$$

$$D=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=C-\frac{1}{2}\ldots=\frac{3}{10}\}\ldots\ldots\frac{1}{5}$$

$$E=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=D-\frac{1}{6}\ldots=\frac{2}{15}\}=\frac{77}{60}=G=\frac{1}{4}=\frac{77}{60}=A,$$

$$F=\frac{1}{20}=F-\frac{1}{12}\ldots=\frac{1}{20}\}\ldots\ldots\frac{1}{5}$$

e da un tale calcolo ricaveremo, che se il valore della serie C si ponga $\frac{4}{5}$ quale veramente nel presente caso di

di $N=4$ il valore della serie $C+D+E+F$ risulta $\frac{77}{60}=G$, che è il valore nè più nè meno de' quattro primi termini della serie A, che anch' esso è $\frac{77}{60}$ e questo esatto confronto seguirà sempre in qualunque supposizione della multitudine finita N de' termini di C, che adoperar si vogliano in questa calcolazione, onde è di fatto quanto asserj (*N.* 603.), cioè che l' assurdo, che si manifesta, ha unicamente origine dal supposto, che se la serie C abbia N infinito, abbia ancora in tal caso il proprio valore uguale all' unità.

Num. 607. Passerò per tanto ad esaminare se essa C possa avere N infinita, e cosa sia per succedere, quando un tale supposto fosse possibile. Dalle cose premesse al *N.* 605. è manifesto, che la serie C ha sempre necessariamente un termine di meno di quanti ne abbia la serie armonica, che l' ha procreata, giacchè per fare nella C il termine N, vi è occorso il termine $N+1$ della serie armonica. In tutte queste considerazioni è pur visibile, che il numero N, o il suo uguale n, comincia finito, e va crescendo, susseguentemente ricevendo sempre una unità, e però non poter giugnere ad essere infinito, se non che passando dal finito all' infinito colla aggiunta di una unità. Se reggesse che aggiunto finito a finito non può mai farsene infinito, sarebbe subito dimostrato, che non solo la serie C, ma neppure la serie armonica, possono avere la multitudine de' propri termini infinita, ma pure passiamo sopra a tali evidenze, vi sarà certo un termine nella serie armonica, il quale precederà quel termine, che è l' infinitesimo, e sarà egli finito, e perchè questi termini sono sempre espressi, l' antecedente per $\frac{1}{n}$, e il conseguente per $\frac{1}{n+1}$, diciamo che il termine infinitesimo sia $\frac{1}{n+1}$, corrispondente ad $N+1$, e ad esso $n+1$ uguale, l' antecedente contiguo, e finito, sia il termine $\frac{1}{n}$ corrispondente anche esso ad $N=n$.

Quando dunque la serie armonica abbia il termine $\frac{1}{n+1}$, la

la C non ha che il termine N, onde la multitudine de' suoi termini finita, e comeche altri termini oltre $\frac{1}{n+1}$ non possono darsi nella serie armonica, così niun' altro oltre al correspondente alla multitudine finita N potrà darsi nella serie C, la quale per ciò non potrà mai avere la multitudine N de' suoi termini infinita.

Num. 608. Per altro modo dimostreremo pure la medesima verità. Non potrà mai essere in natura termine veruno della serie C, che non sieno altressì in natura due termini consecutivi della serie armonica, che lo procreino. Sia dunque [Benchè per verità sia impossibile] il termine $\frac{1}{\infty}$ l' ultimo termine della serie armonica, e il suo antecedente sia il termine $\frac{1}{n}$. Il termine della serie C, che sarà procreato sarà $\frac{1}{n} - \frac{1}{\infty}$. Questa quantità, o figmento di quantità può avere due forme; una sarà $\frac{1}{n}$ giacchè $\frac{1}{\infty}$ si calcola per Zero, ovvero $\frac{\infty - n}{n \times \infty} = 1$. La forma generale de' termini della serie C è (*Num.* 605) $\frac{1}{n \times n + n}$. Il termine dunque procreato da' due termini $\frac{1}{n} - \frac{1}{\infty}$ della serie armonica, dovrà essere $= \frac{1}{n \times n - 1}$. Se lo uguaglieremo ad 1, giusta la seconda forma, ne ritraremo $n = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: Se lo ugualieremo ad $\frac{1}{n}$, che è la prima forma, ricaveremo $n = 0$. La serie armonica non può certamente avere per denominatore di verun suo termine nè $-\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, e tanto meno Zero, e però è impossibile, che essa serie possa neppure avere veruno suo termine, che sia $\frac{1}{\infty}$.

Num.

Num. 609. Ed eccoci condotti non solo a dimostrare, che la serie C non può avere una multitudine di termini infinita, ma che nemmeno tale può averla la serie armonica, di cui veniamo di dimostrare, che aver non può il termine $\frac{1}{\infty}$ cioè $N = \infty$. Questa verità era pure palpabile dal precedente discorso del *Num.* 605., imperocchè se essa serie armonica aveva il termine $\frac{1}{n}$ termine finito, e a questo altri termini susseguir non potevano se non che zero, questo in linguaggio piano, ed intelligibile da chi che sia, altro non vuol dire se non, che dopo del termine $\frac{1}{n}$, altri essa serie non ne ha, e però che la multitudine de' suoi termini, che ad N veracemente finisce, è finita.

Num. 610. Che se la multitudine de' di lei termini è finita, finito pure è il valore de' medesimi. Il valore di cadauno di essi termini, eccetto il primo è sempre, e di mano in mano sempre più, minore dell' unità. Essendo dunque in questa serie tanti termini per appunto quante unità sono in N, è certissimo, che il valore di tutti essi termini sarà sempre minore di N, che si è dimostrato dover essere sempre finito (*Num.* 560.)

Num. 611. Ma vi resta da togliere un' altra difficoltà. La serie Q può nascere, come lo abbiamo esposto al *Num.* 604., e nascendo in tale maniera, le cose fin quì dette pruovano, che ella non può avere infinita la multitudine de' proprj termini. Può però nascere in altra maniera, cioè in quella sovra riferita al *Num.* 596., e descritta nel testo nascere dalla serie $S - T$. La serie S, o T, è una serie, che ha i proprj numeratori, e denominatori, i quali crescono sempre aritmeticamente: Ha il chiarissimo Autore dimostrato al *Num.* X., che le serie, che hanno tal condizione quando giungano ad avere infinita la multitudine de' proprj termini, l' ultimo loro termine sarà $= \frac{a}{c}$. il che stando, segue poi per certo, che la serie Q procreata per questa maniera, e avente un infinità di termini, ha il suo voalre

valore $= \frac{a}{c}$, cioè $= 1$ nel caso che sia $a = c$, e non s' incontrano le eccezzioni, che si sono rilevate, quando essa serie Q nasce dalla serie $N - P$.

Num. 612. Dimostra dunque il chiarissimo Autore al *Nnm.* X la sua proposizione così: E per rendermi più intelligibile mi piglierò la libertà di cambiare alcune lettere de' suoi simboli, e qualche altra cosetta, senza punto minorare di forza la sua dimostrazione. Sia la serie

$$\frac{2a}{c} + \frac{2a+b}{c+d} + \frac{2a+2b}{c+2d} + \frac{2a+3b}{c+3d} + \frac{2a+4b}{c+4d} + \text{\&c. continuata}$$

sempre con tal legge, cioè che tanto i numeratori, quanto i denominatori crescano sempre in proporzione aritmetica. Dimostra egli dunque, che se questa serie giugnerà ad avere la multitudine de' suoi termini infinita, l' ultimo termine, che ella avrà, sarà $= \frac{b}{d}$, cioè quella frazione, che ha per numeratore, e denominatore la costante omologa differenza delle due progressioni.

Sia generalmente n il numero, che multiplica la differenza, ed N il numero della multitudine de' termini, sarà come è visibile $n + 1 = N$, e detto t qualunque termine, ogni termine s'esprimerà generlmente per $\frac{2a+nb}{c+nd} = t$.

onde ricaverassi $n = \frac{tc-2a}{b-td}$, e perchè $n + 1 = N$, onde

$n = N - 1$, avremo pure $N = 1 + \frac{tc-2a}{b-td}$, e questa viene ad essere l' espressione della multitudine de' termini, competente a qualunque termine t. Nel caso dunque che t sia il termine infinitesimo, dovrà $1 + \frac{tc-2a}{b-td}$ essere infinito.

Comechè a, b, c, d sono quantità, che tutte si sono prese finite non potrà la esposta frazione essere infinita, se non se o t sia infinita, ovvero il denominatore $b - td$ sia Zero.

Il primo modo non può essere, perchè la frazione risulterebbe $1 + \frac{\infty}{\infty} = 0 = N$, che ben lontano che sia Zero dee essere infinita. Rimane dunque, che sia unicamente $b - dt = 0$, e però che sia come fu proposto di dimostrare, $t = \frac{b}{d}$.

Num. 613. Questa ingegnosissima dimostrazione potrebbe per altro essere concludente, e lo sarebbe senza dubbio se non fosse libero di assumere N infinita, nascendo la determinazione di t unicamente da questo supposto. Se generalmente la proposta serie abbia questa eccezione, io non ho qui di bisogno di rintracciarlo, a me basta il far vedere, che la serie S effettivamente la ha, e che però il suo ultimo termine non è altrimenti l' unità, come è stato preteso.

Num. 614. La serie S ridotta alla forma del *Num.* X è

$$\frac{2a}{c} + \frac{2a+a}{c+c} + \frac{2a+2a}{c+2c} + \frac{2a+3a}{c+3c} \quad (B) + \frac{2a+4a}{c+4c} + \text{\&c.}$$

Anche in questa si dica n il numero che multiplica la differenza, e così N il numero che, denota quanti sono i termini e questo sarà sempre $= n + 1$. Se n sia per esempio 4 il numero de' termini, a' quali tal termine corrisponde, sarà $S = n + 1 = N$. Si osservi ora, che in questa serie il denominatore di qualunque termine B è sempre fatto da c multiplicato per un numero N, che designa quanti termini ha avuto la serie, compreso esso B, e il numeratore del quale è a multiplicato per un numero M, che denota anch' esso quanti termini avrà la serie compresovi il susseguente à B.

Num. 615. Il quarto termine, per esempio, ha il denominatore, che è fatto da c, multiplicato per 4 che è $=$ ad N, numero designante quanti termini ha la serie, ed il denominatore è fatto da a multiplicato per 5, che è $=$ ad M numero denotante quanti termini ha la serie, se abbia il termine susseguente al quarto.

Num. 616 Si osservi pure che cadaun termine di questa serie debbe sempre essere minore del suo antecedente, giacchè quanto alla presente considerazione ella sono $\frac{a}{c}$

$\frac{a}{c} \times \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} +$ &c. dal che ne segue, che cadaun termine di questa serie debbe certamente essere finito, giacchè essendo il primo $= \frac{2}{1}$ finito, e gli altri tutti di mano in mano minori degli antecedenti, cadauno di loro risulta non solo finito, ma anche minore di 2.

Num. 617. Ma se questa serie avesse la multitudine de' suoi termini infinita, avrebbe anche un suo termine, e sarebbe l' antecedente all' infinitesimo, che sarebbe non solo maggiore degli antecedenti, ma assolutamente infinito, dunque ella avere non può quel termine infinitesimo. Sia B il termine antecedente all' infinitesimo, sarà il suo numeratore M, e il denominatore N, ed esso termine sarà $\frac{aM}{cN}$, termine infinito, giacchè in esso N è finito, perchè designa la multitudine del termine B, che è finita, ed M, che significa una multitudine infinita, è infinito.

Num. 618. Non sussiste dunque, relativamente alla posta serie, che il suo termine infinitesimo sia l' unità. Ripugna il supporre, che questa serie abbia termine infinitesimo, e però la dimostrazione, che fondavasi sopra questo impossibile supposto, svanisce, con che parmi aver soddisfatto a quanto occorreva per questo capo.

Le considerazioni, che in questa occasione mi è occorso di fare intorno alle presenti serie, m' hanno somministrato le notizie seguenti. Dato il numero finito de' termini di quelle serie, che esporrò, trovare [almeno prossimamente) il valore de' posti termini: Credo di far piacere al Pubblico registrando qui tali notizie.

Num. 619. Sia la serie $A =$ $\frac{a}{c} \times \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} +$ &c. nella quale tanto i numeratori quanto i denominatori crescono per ordine di una unità, e i numeratori sono sempre maggiori de' denominatori per una unità. Dato il numero finito n de' termini, che ella contiene, trovare il valore v de' medesimi raccolti assieme. Osservo, che la serie A è $=$ alla due serie seguenti $\frac{a}{c}$

$$\frac{a}{c} \times \left.\begin{array}{l} = B + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ + = C + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \end{array}\right\} + \text{&c.} =$$

$$A = \frac{}{2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} \quad \text{&c.}}$$

Di queste due serie la B è la somma di tante unità, quante ne contiene n. La C poi è la serie armonica cominciante dall' unità, e avente anch' essa la multitudine n di termini. Dirò S il valore de' termini n della detta serie armonica, e siccome noi pel *Num.* 172. possiamo avere questa somma pochissimo maggiore del giusto, così possiamo avere la somma di A pochissimo eccedente. La formula generale per questa ricerca sarà $n + S \times \frac{a}{c} = v$.

Num. 620. Sia la serie $\frac{a}{c} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = D$, nella quale sono i numeratori, che sono minori di una unità de' denominatori.
Anche questa serie è $=$

$$\frac{a}{c} \times E = 1 + 1 + 1 + 1 \quad \text{&c.} =$$

$$= E = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{&c.}$$

La formula per questa somma viene visibilmente $v = \frac{a}{c} \times n + 1 - S$.

Risulta da quanto ho steso al *Num.* 605., che la somma del numero n de' termini della serie C è sempre $\frac{n}{n+1}$. Essa serie C è la serie, che ha per numeratori l' unità, e per denominatori il doppio de' numeri triangolari, onde la somma de' termini

mini della ſerie de' trigonali ſarà $\frac{2n}{n+1}$. Se dunque delle ſomme de' termini conſecutivi de' trigonali ne faceſſimo un' altra ſerie, ella ſarebbe le ſovra eſpoſta in cui $\frac{2}{2}$ è $= \frac{2}{1}$, e di queſta ſeconda ſerie ne potiamo avere la ſomma.

Num. 621. Riſultò al *Num.* 606., che la ſerie $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{20}$ (*G*) è $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ [*H*]. La ſerie *G* è $\frac{1}{5} \times \frac{4}{1} + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, cioè è una ſerie, nella quale i denominatori ſono i numeri naturali, cominciando dall' unità, e i numeratori ſono i medeſimi numeri, ma preſi reciprocamente. Si nomini *n* il numero de' termini. Se queſta ſerie ſi multiplichi per una frazione, il di cui numeratore ſia l' unità, e il denominatore ſia $n+1$, la ſerie, che ne verrà, è quella, che equivale alla ſomma di altretanti termini della ſerie armonica, cominciante dalla unità, meno una unità. Se ſi voglia pertanto il valore de' ſoli termini, non multiplicati per la ſuddetta frazione, detto *v* queſto valore, ed *S* la ſomma della ſerie armonica cominciante dalla unità, avremo

$$v = S - 1 \times u + 1,$$

Num. 622. Chiudiamo queſta digreſſione, e paſſiamo ad eſaminare la ſeconda dimoſtrazione concludente l' infinità delle aree iperboliche dell' altro inſigne Bernoullio. Per ciò fare proſeguirò a ſtendere il rimanente del Teſto. *Ego poſtmodum cum indicaſſet, idem oſtendi hunc in modum. Summa ſeriei infinitæ harmonicæ* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c. *ſuperat datum quemvis numerum: Ergo infinita eſt per ſecundam. Eſto datus numerus* N *quantumcumque magnus: Abſcinde a principio ſeriei aliquot terminos, quorum ſumma æquet; vel ſuperet unam unitatem numeri* N, *& a ſerie reliqua iterum aliquos abſcinde, quorum ſumma aliam unitatem numeri* N *ſuperet, idque*

ſi fieri poſſit, repete toties quot in numero N *ſunt unitates; ſic termini abſciſſi omnes ſuperabunt totum numerum, multo magis igitur tota ſeries eum ſuperabit. Si negeris, abſciſſis aliquot, reliquos unitatem ſuperare poſſe, eſto primus reliquorum, qui poſt abſciſſionem ultimam remanſerunt,* $\frac{1}{a}$, *& ſequentes* $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2}$, $\frac{1}{a+3}$. *Conſtituatur ad duos primos terminos* $\frac{1}{a}$, *&* $\frac{1}{a+1}$ *Progreſſio geometrica, cujus ideo ſinguli poſt ſecundum termini, ſingulis reſpondentibus in progreſſione harmonica minores ſunt ob denominatores majores per* IV., *& continuetur hæc uſque ad* $\frac{1}{aa}$ (*quod quidem fiet in terminis finitis propter a numerum finitum*) *eritque hæc ſeries geometrica finita* $= 1$ *per* VIII. *Harmonica itaque terminorum totidem ſuperabit unitatem* Q: E: D:

Num. 623 Queſta dimoſtrazione tutta ſi fonda in queſto, che dalla ſerie armonica poſſa ſempre andarſi levando tanta multitudine di termini, onde il valore di queſti adegui, o ſuperi l' unità, e che tal coſa replicar ſi poſſa tante volte, adoperando ſempre i termini conſecutivi agli antecedentemente adoperati, quante unità ſono nel numero, quantunque grande *N*: Perchè biſogna, che tal coſa ſia neceſſariamente poſſibile, altrimenti la dimoſtrazione, anche per queſto titolo, mancherebbe, l' inſigne Autore proccura di dimoſtrarne la poſſibilità così. Sia il termine $\frac{1}{a}$ il primo, che conſegue a que' termini, che fino all' ora è occorſo, e ſi ſono potuti adoperare, il ſuſſeguente ſarà $\frac{1}{a+1}$, l' altro ſarà $\frac{1}{a+2}$, e così di ſeguito, e in tal forma proſeguiranno i termini della ſerie armonica. Facciaſi, dice egli, una progreſſione geometrica, che abbia per primo termine $\frac{1}{a}$, e per ſecondo $\frac{1}{a+1}$, il terzo termine ſarà

$\frac{a}{a+1}^2$, e il quarto $\frac{a^2}{a+1}^3$, e così di seguito, e generalmente i termini di questa progressione saranno $\frac{a^n}{a+1}^{n+1}$.

Si prosegua questa progressione, corrispondendo sempre al termine della progressione armonica il termine della progressione geometrica, tanto che il termine $\frac{a^n}{a+1}^{n+1}$ divenga $= \frac{1}{a^2}$. La somma di questa progressione, che ha $\frac{1}{a}$ per primo termine, ed $\frac{1}{a^2}$ per ultimo, è pur essa $= 1$.

Ogni termine di essa progressione, e susseguente al secondo termine, è minore del termine corrispondente della serie armonica, avendo sempre i termini di questa i loro denominatori minori de' denominatori de' termini corrispondenti della progressione. Adunque nella serie armonica la somma de' termini susseguenti al termine $\frac{1}{a}$ per fino al suo termine corrispondente al termine $\frac{1}{aa}$ della progressione geometrica, si dimostra sempre maggiore dell' unità, onde questa potrà sempre levarsi, come era stato proposto di dimostrare. Questa dimostrazione sarebbe invincibile, se non mancasse di una condizione, che è necessaria.

Num. 624. Se accadesse, che la serie armonica dal termine $\frac{1}{a}$ in avanti non potesse continuarsi, o continuarsi tanto, quanto sia per occorrere, perchè nella progressione possa giugnersi al termine $\frac{1}{aa}$, è visibile, che la premessa dimostrazione nulla conchiuderebbe, niente conchiudendo, che la proposta progressione sia al mondo, quando nello stesso tempo più essere non vi possa la serie armonica. Ora che tale accidente per appunto accada, io spero di poterlo porre evidentemente in chiaro. Il numero N se debba essere *quantumcumque magnus*, è necessario, che sia assolutamente infinito, vale a dire, che contenga una multitudine infinita di unità, e certamente se egli fosse finito, numero più grande di lui assegnarsi potrebbe (*Num* 562.], e non sarebbe quale nella posta dimostrazione è necessario supporlo. Il denominatore di cadaun termine della serie armonica cominciante dall' unità è quel medesimo numero, che designa la multitudine de' termini, che fin lì l' hanno condotta. Supponiamo dunque, che questa serie armonica sia protratta fino all' N termine: Questo termine sarà $\frac{1}{N}$, e perchè N è infinito $\frac{1}{N}$ sarà rigorosamente Zero, e niun altro termine vi sarà, oltre di questo nella serie armonica. Se il termine $\frac{1}{N-1}$ che è l' antecedente a quell' ultimo, fosse stato egli il termine $\frac{1}{a}$ che avrebbe giovato di costituire la progressione geometrica prescrita dal Chiarissimo Autore per dimostrare, che anche da tale residuo (reliduo, che è niente) de' termini della serie armonica può farsene, raccogliendoli assieme, una nuova unità? Nulla affatto. Neppure potrebbe nel posto caso farsi l' ordinata progressione geometrica, perchè essendo $\frac{1}{N-1}$ finito, ed $\frac{1}{N}$ nullo, qui non v' è luogo, anche in senso dell' insigne Autore, a formarne la progressione.

Num. 625. Queste vere, ed evidenti considerazioni ci portano dunque a dimostrare rigorosamente, che la somma de' valori d' infiniti termini (se fossero possibili) della serie armonica è veramente finita. Certo è che per costituire una unità, raccogliendo assieme de' termini consecutivi della serie armonica ve ne vogliano ben di molti, e quanto più questi sono lontani dal primo termine, tanto maggior multitudine ve ne vuole (*Num.* 172.), è dunque visibilmente impossibile, che le unità, le quali partendo la serie armonica, nel modo suggeritoci dal chiarissimo Autore, si anderanno facendo, non sieno in multitudine minore di molte e molte

unità di quante ne contiene il numero N. La ſomma dunque de' valori de' termini della ſerie armonica, benchè abbia una multitudine di termini infinita, ſarà minore di $N - 1$; ma $N - 1$ è finita, dunque ſarà eſſa ſomma finita, come al Num. 555.

Num. 626. Proſeguiamo ora l' altra parte del Teſto dell' inſigne Autore.

IV. *Sequitur etiam, ſi modo in Geometriam ſaltum facere permiſſum eſt, ſpatium curva hyperbolica, & aſymptotis comprehenſum, infinitum eſſe: Secta intelligatur aſymptotos linea a centro in partes æquales infinitas in punctis B. C. D. E. &c. e quibus ad curvam educantur totidem alteri aſymptoton parallelæ* BM, CN. DO, EP, *&c. & compleantur parallelogramma* AM, BN, CO, DP, *&c. quæ ob baſium qualitatem inter ſe erunt ut altitudines, ſeu ut recta* BM, CN, DO, EP, *&c.; hoc eſt ut* $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *&c. ex natura hyperbolæ; cum igitur ſumma* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ *&c. infinita oſtenſa ſit, erit & ſumma Parallelogrammorum* AM, BN, CO, EP, *&c. infinita, multoque magis ſpatium hyperbolicum, quod parallelogrammis illis circumſcriptum eſt.*

Se dunque dal pretendere la ſomma della ſerie armonica infinita rettamente ſe ne deduceva, che l' area intera dell' iperbola apolloniana foſſe infinita, così mancando, che tal ſomma ſia infinita, manca pure la pruova, che tale ſia l' area mentovata, e ſi dà luogo a levare ogn' ombra d' inſuſiſtenza a quanto fin quì ho ſparſamente moſtrato, cioè che le aree intere delle iperboli ſono finite.

Num. 627. Così tolto da queſte Aree iperboliche quell' infinito, che a mio credere ſenza ragione vi ſi era intruſo, e che impediva le loro intere quadrature, ſturbando dal compiere a dovere le integrali de' loro elementi, ſpero, che anche per queſto il Calcolo Integrale ſia per ricevere non iſpreggievole avanzamento. Per ottener queſto, e per quella forza, che la Verità, o ſoda, od apparente fa a quelle menti, che ſinceramente la amano, io non ho potuto diſpenſarmi dal fare il premeſſo eſame; nel che fare ho avuto un continuo

tinuo ribrezzo, vedendomi portar lontano dal ſentimento de' più accreditati, e valenti Maeſtri, a' quali proteſto però ſempre una ſomma ſtima, e riſpetto.

Num. 628, E quì porrò fine a queſta ormai eccedivamente lunga Appendice. Spero di aver baſtantemente moſtrato, e colla ragione, e col fatto, che la Regola, la qual è in uſo per compir le integrali è difettoſa, e di averne altresì, e colla ragione, e col fatto ſtabilita una, che ſuppliſca al biſogno. Per le quantità, che poſſono, o non poſſono uſcir dal finito, ſpero ſimilmente di averle ſcoperte tanto che baſta, ed aver dato un abbozzo di teoria, ſufficiente per non incontrare il nulla, o l' infinito, ove veramente eſſi non ſono, non avendo però io mai preteſo di eſcluderli dove veramente abbian luogo. Intorno poi alla natura delle quantità differenziali, ſpero di aver eſpoſta la loro eſſenziale idea, onde non reſti ſcrupolo intorno alla loro reale eſiſtenza, e ſieno ſicure, e cognite le pratiche di calcolarle. Paſſando al Calcolo Integrale ſarà ſtato ſcarſo l'avanzamento, che gli avrò dato, ma forſe l' avere ſcoperti non pochi de' ſuoi naſcondigli, e con ciò poſto il Mondo in malizia, perchè ne ſcopra i rimanenti, e l' avere ſcoperte varie di lui affezioni, potrà giovare a chi vi ſi applicherà per fare ulteriori ſcoperte. Queſto è tolto a me di proſeguire, ed è ben aſſai, che abbia potuto giugnere a compilare le preſenti incolte, e ſcarſe Memorie.

IL FINE.

Errata Corrige

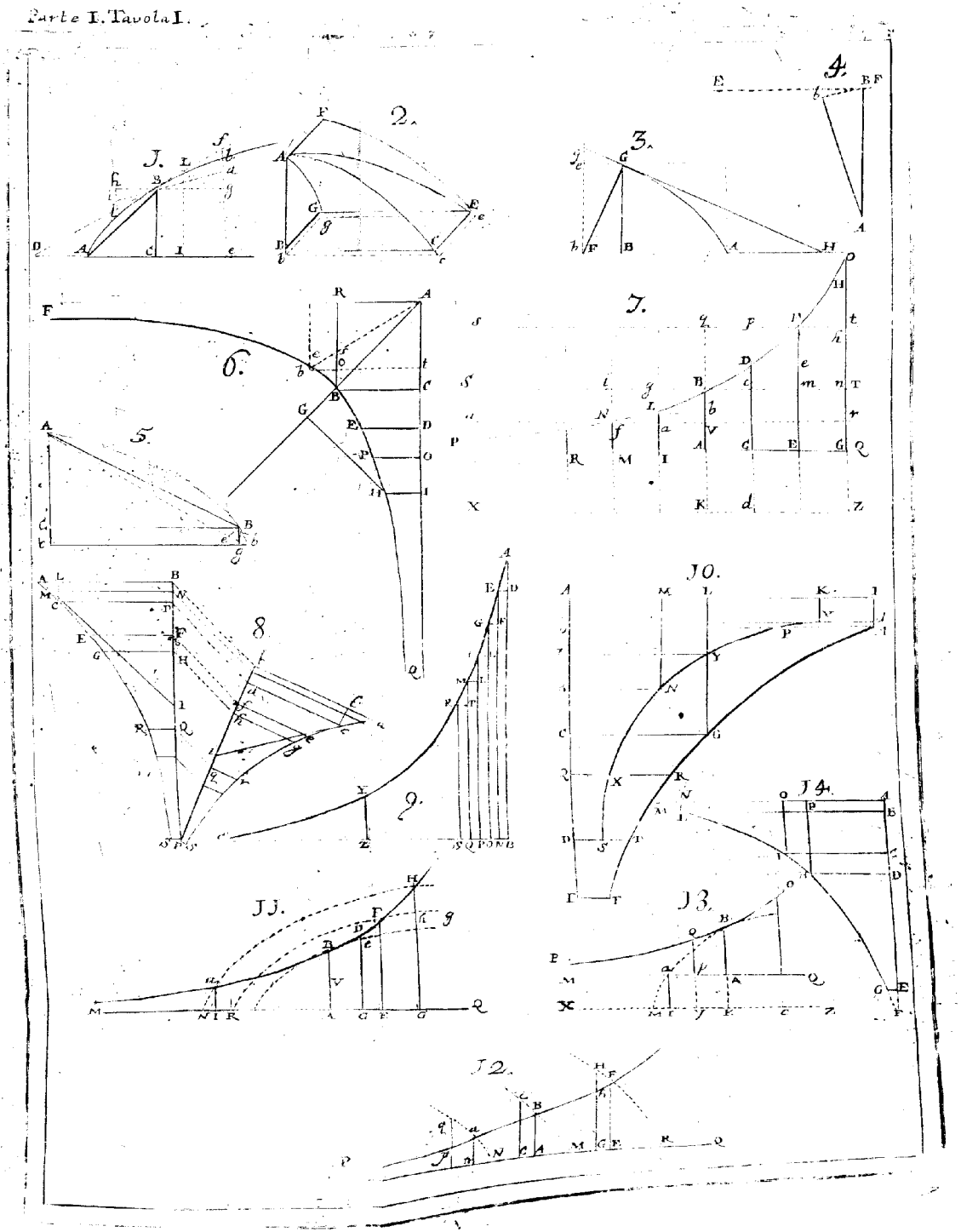
pag.	linea		
145	1	tfx^n	$fx.^n$
	15	multiplicammo	multiplicassimo
148	10	$2n$	$3n$
149	1	a^2	a^3
	26	serie	somma
150	7	$x^{\frac{1}{n}}fp$ &c. . + &c.	$\frac{1}{x^n fp} - \frac{a \times q-n}{x^{2n} ffp \times p-n} + \frac{a^2 \times q-n \times q-2n}{x^{3n} f^3 p \times p-n \times p-2n} - \frac{a^3 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^4 f^4 p \times p-n \times p-2n \times p-3n} +$ &c
151	6	$-\frac{2gaK^r \times 2}{1sH}$	$-\frac{2gaK^{r+1}}{1sff}$
	7	più	già
	8	Regner	Reineau
152	28	$\frac{sfx^{2n}}{a^2}$	$\frac{ffx^{2n}}{a^2}$
159	7	le differenziali B	le differenziali D
170	14	tb	cb
171	2	$fx.^a$	$fx.^n$
173	11	x	$\sqrt{x}$
174	19	$axt + x$	$ax + xx$
	21	$x^2 + a + fx.^{-2}$	$x^2 \times \overline{a + fx^{-2}}$
	23	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{c}$
175	4	AB	AD
	8	$b\frac{t+c}{cx} - \frac{t}{c}$	$b\frac{t+c}{c}x - \frac{t}{c}$
176	10	$-\frac{3}{2}$	è superfluo
277	10	$\frac{rbdx}{rb^4 + x^2}$	$\frac{rbdx}{b^2 + x^2}$
	25	DAF	DAE
181	12	$\frac{2t}{s} = n$	$2c = n$

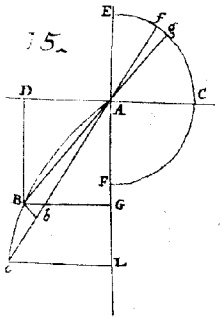
181	13	$\frac{bv}{f}$	b
184	3	$v^2 p dx^2$	$vpdx^2$
	15	$x = \frac{vp}{q}$	$x = \frac{vp}{q}$, e $dx = \frac{dvp}{q}$
	16	$\sqrt{v} + p$	$\sqrt{v + q}$.
204	4	$-\frac{3e}{2} - e - 1$ &c	$-e - 1$.
208	2	$= -[R]$	$= -\frac{1}{2}[R]$
	12	$\sqrt{a} + \sqrt{fx^n}$	$\sqrt{a} - \sqrt{fx^n}$
219	5	$x^{\frac{3v-2}{2}} dx +$	$x^{\frac{3n-2}{2}} dx \times$
230	16	dy	dz
	17	fx	fz
232	16	dx	dz
234	1	$GFef$	$GEef$
	22	HBf	HAf
235	22	la Fb in G	la FG in b
	24	dt	ds
236	6	Gn	Gm
238	19	$3axdx$	$3a\sqrt{x}\,dx$
251	6	$\frac{a3}{8}$	$\frac{a\sqrt{3}}{8}$
254	20	$L\sqrt{aa + xx}$	$L\sqrt{aa - xx}$
256	10	ora	ove
263	16	$\frac{t-c}{c}$	$\frac{1-c}{c}$
	25	y^2dy	y^2dy
264	4	y^cdy	y^2dy
267	13	$2\sqrt{}$	$2\sqrt{f}$
	20	$e + c$	$e + 1$
272	16	$\overline{a + fx^n}^{\,e}$	$\overline{a + fx^n}^{\,1}$
2 8	6	$q \times x$	$q + x$
279	18	$\overline{DC}^1$	$\overline{DC}^2$
294	10	$aaffCHI$	$aaffBCHI$
295	4	$\frac{n-q}{4n} \times$	$\frac{n-q}{4n} +$.

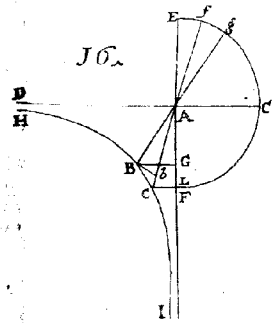
295	13	$3n$	3
302	16	$= \frac{af}{nx}$	$= \frac{4f}{nx}$
312	13, 14	$yx = 3\sqrt{bb}$	$yx - b + 3\sqrt{bb}$ &c.
360	19	porzione	polizione
371	24	$alx v$	$alx = v$
372	18	$\frac{a^3}{x}$	$\frac{a^3}{xx}$
376	14	$2ax - x$	$2ax - xx$
390	5	*Num.* 251	*Num.* 461
392	31	*Do*	*do*
401	13	$\frac{1}{\frac{4}{x}a}$	$\frac{1}{\frac{1}{x^n}}$
405	1	$a^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$
	5	$a^{\frac{v}{2q}}r^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$
	15	*ALGA*	*AIGA*
415	4	$\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{\frac{t-n}{n}}$	$\frac{a^{\frac{t+n}{n}}}{\frac{t-n}{n}}$
	8	$v = \frac{q - na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}}$	$v = \frac{q - na^{\frac{t+n}{n}}}{t-n \times x^{\frac{t-n}{n}}}$
416	2	$\frac{ta^{\frac{t+n}{n}}}{x^{\frac{t-n}{n}}}$	$\frac{ta^{\frac{t+n}{n}}}{t-n}$
417	11	$\frac{na^{\frac{t+n}{n}} \times t-x^{\frac{n-t}{n}}}{}$	$\frac{na^{\frac{t+n}{n}} \times p-x^{\frac{n-t}{n}}}{n-t}$
419	23	Ay	Ag
423	1	$t-n$	$2 \times t-n$
426	15	dargli	da G
444	8	$\frac{}{a\sqrt{2+z+\sqrt{2az\sqrt{2+zz}}}}$	$\frac{}{a\sqrt{2+z+\sqrt{2az\sqrt{2+zz}}}}$

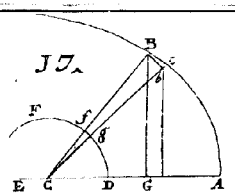
445	9	$2bb \cdot \sqrt{fxn}$	$bb \sqrt{fx^n}$
449	1	$\sqrt{fxn}$	$\sqrt[m-n]{fx^n}$
461	8	$\frac{m}{x^{m-n}}$	$x^{\frac{m}{m-n}}$
465	26	$t \times xdy$	$\frac{t}{n} \times xdy$
467	8	$\frac{KN \times MS}{t}$	$\frac{KM \times MS}{t}$
472	4	maggiore	minore
475	3	*FMED*	*PMED*
	11	$2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}$	$\frac{-1}{}$
490	24	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
493	20	$S = n+1$	$s = n+1.$

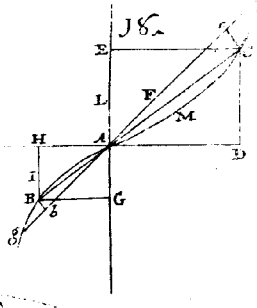
UNIVERSITÀ CATTOLICA S. CUORE
n.
d.
c.
data

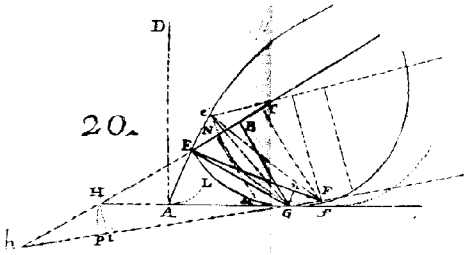

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.

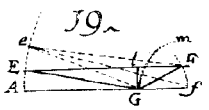

15.

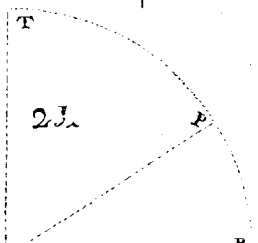

16.

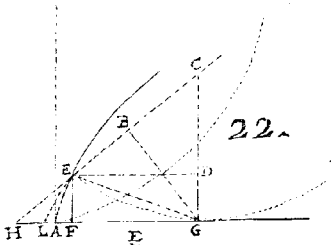

17.

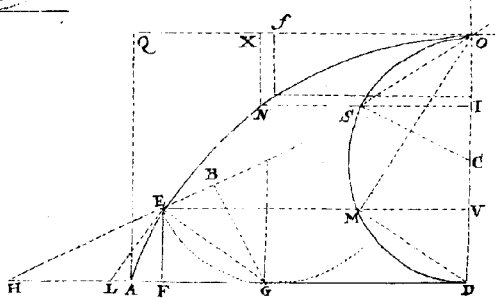

18.

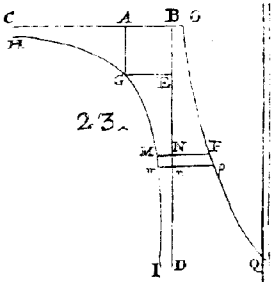

20.

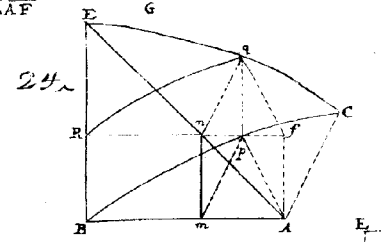

19.

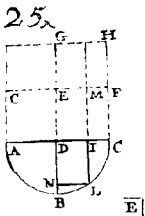

21.

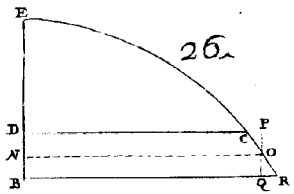

22.

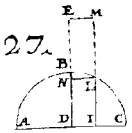


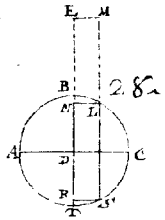

23.

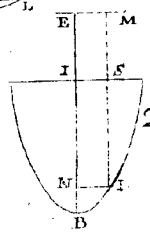

24.

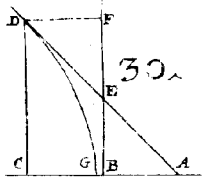

25.


26.


27.


28.


29.


30.

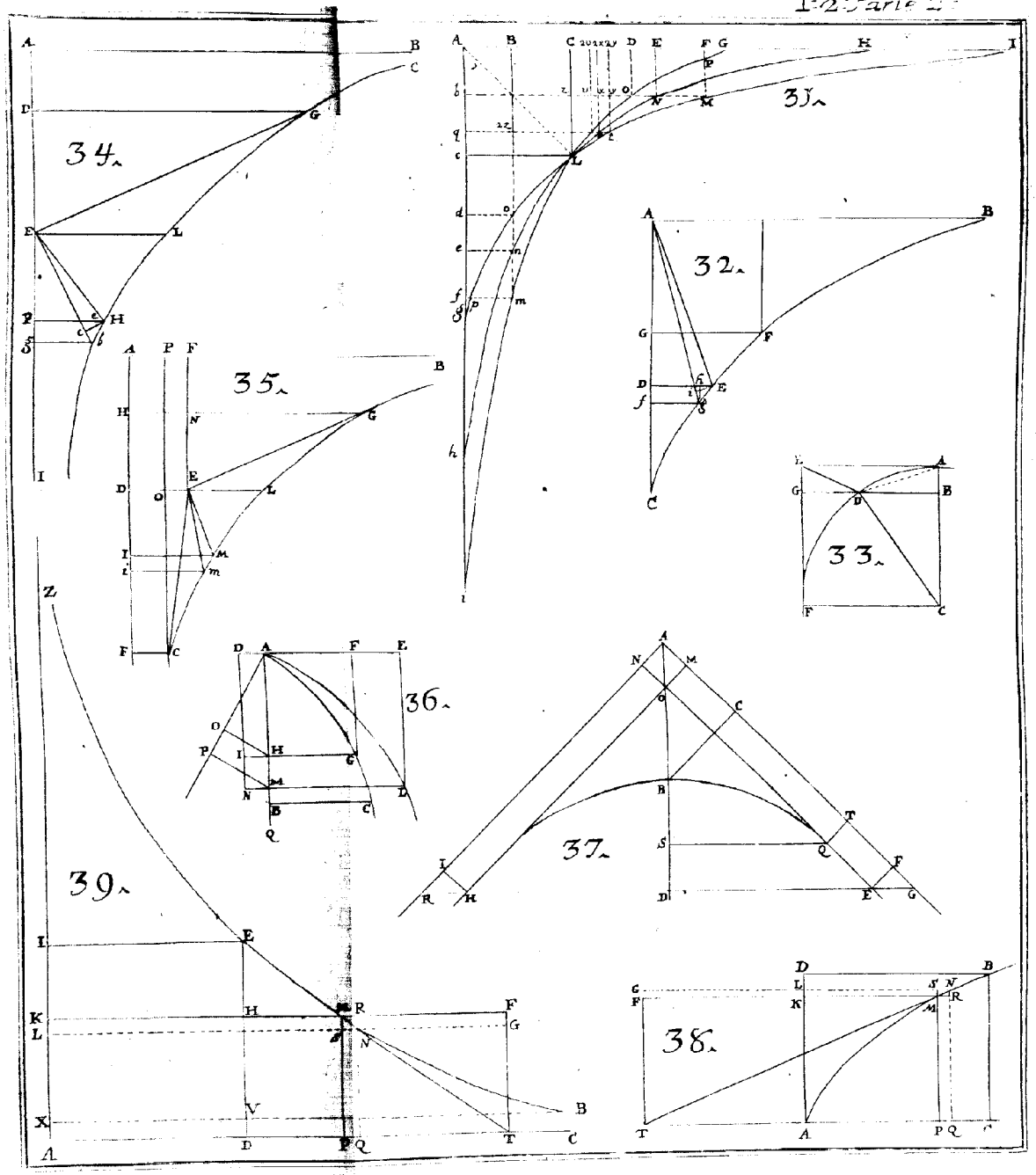

34.
35.
31.
32.
33.
36.
37.
39.
38.

TAVOLA DELLE QUATTRO SERIE DE' BINOMJ, COME AL NUMERO 221.,
E nelle quali è $q = e + 1$, e $p = e + 1 \pm nr$, e $K = a + fx^n$.

PRIMA SERIE del *Num.* 213., che integra i Binomj, che hanno $e + 1 + nr + in = o$, fuſſeguita dalla Serie, che ſerve ad aumentare l' Eſponente e della Variabile fuori del Segno di quante n ne ſia in piacere, reſtando inalterato l' Eſponente r della Parte compleſſa.

ORDINE PRIMO.

$$gx^{e+1}K^{r+1} \times \frac{1}{aq} \text{ (Num. 1)} \quad -\frac{x^n \times f \times p+n}{a^2 \times q \times q+n} \text{ (Num. 2)} \quad +\frac{x^{2n} \times f^2 \times p+n \times p+2n}{a^3 \times q \times q+n \times q+2n} \text{ (Num. 3)} \quad -x^{3n} \times f^3 \times \frac{p+n \times p+2n \times p+3n}{a^4 \times q \times q+n \times q+2n \times q+3n} \text{ [Num. 4]} \quad +x^{4n} \times f^4 \times \frac{p+n \times p+2n \times p+3n \times p+4n}{a^5 \times q \times q+n \times q+2n \times q+3n \times q+4n} \text{ (Num. 5.)}$$

ORDINE SECONDO.

$$gx^e dx K^r \times 1 + \frac{x^n \times f \times p+n}{aq} \text{ (Num. 1)} \quad -\frac{x^n \times f \times p+n}{aq} - \frac{x^{2n} \times f^2 \times p+n \times p+2n}{a^2 \times q \times q+n} \text{ [Num. 2]} + \frac{x^{2n} \times f^2 \times p+n \times p+2n}{a^2 \times q \times q+n} + \frac{x^{3n} f^3 \times p+n \times p+2n \times p+3n}{a^3 \times q \times q+n \times q+2n} \text{ (Num. 3)} - \frac{x^{3n} \times f^3 \times p+n \times p+2n \times p+3n}{a^3 \times q \times q+n \times q+2n} - \frac{x^{4n} \times f^4 \times p+n \times p+2n \times p+3n \times p+4n}{a^4 \times q \times q+n \times q+2n \times q+3n} \text{ (Num. 4)}$$

$$+x^{4n} f^4 \frac{\times p+n \times p+2n \times p \times 3n \times p+4n}{a^4 \times q \times q+n \times q+2n \times q+3n} + \frac{x^{5n} f^5 \times p+n \times p+2n \times p+3n \times p+4n \times p+5n}{a^5 \times q \times q+n \times q+2n \times q+3n \times q+4n} \text{ [Num. 5.]}$$

SECONDA SERIE del Num. 214., che integra i Binomj, che hanno $e + 1 - in = o$, fuſſeguita dalla Serie, che ſerve a ſcemare l' Eſponente e della Variabile fuori del Segno di quante n ne ſia in piacere, reſtando inalterato l' Eſponente r della parte compleſſa,

ORDINE PRIMO.

$$gx^{e+1}K^{r+1} \times x^n fp \text{ (Num. 1.)} \quad \frac{-a \times q-n}{x^n ff \times p \times p-n} \text{ (Num. 2)} + \frac{a^2 \times q-n \times q-2n}{x^{2n} f^2 \times p \times p-n \times p-2n} \text{ (Num. 3)} \quad \frac{-a^3 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^{3n} f^3 \times p \times p-n \times p-2n \times p-3n} \text{ (Num. 4)} + \frac{a^4 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n}{x^{4n} f^4 \times p \times p-n \times p-2n \times p-3n} \text{ (Num. 5)}$$

ORDINE SECONDO.

$$gx^e dx K^r \times 1 + \frac{a \times q-n}{x^n fp} \text{ (Num. 1)} \quad -\frac{a \times q-n}{x^n fp} - \frac{a^2 \times q-n \times q-2n}{x^{2n} \times ff \times p-n} \text{ [Num. 2]} + \frac{a^2 \times q-n \times q-2n}{x^{2n} \times ff \times p-n} + \frac{a^3 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^{3n} \times f^3 \times p-n \times p-2n} \text{ [Num. 3]} \quad \frac{-a^3 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^{3n} f^3 \times p-n \times p-2n} - \frac{a^4 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n}{x^{4n} f^4 \times p \times p-n \times p-2n \times p-3n} \text{ (Num. 4.)}$$

$$+\frac{a^4 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n}{x^{4n} \times f^4 \times p-n \times p-2n \times p-3n} + \frac{a^5 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n \times q-5n}{x^{5n} f^5 \times p \times p-n \times p-2n \times p-3n \times p-4n}$$

TERZA SERIE del Numero 219., che ſerve a ſminuire di quante Unità ne piaccia l' Eſponente r della Parte compleſſa de' Binomj, contenente anch' eſſa la Serie delle Integrali da porſi per ottenere tale intento, e fuſſeguita dalle Differenziali, che da tali Integrali provengono.

ORDINE PRIMO.

$$gx^{e+1}K^r \times \frac{1}{q} \text{ (Num. 1.)} \quad \frac{x^n f n r K^{-1}}{q \times q+n} \text{ (Num. 2)} + \frac{x^{2n} ff n r \times n r-n K^{-2}}{q \times q+n \times q+2n} \text{ [Num. 3.]} \quad -\frac{x^{3n} f^3 \times n r \times n r-n \times n r-2n K^{-3}}{q \times q-n \times q-2n \times q-3n} \text{ [Num. 4.]} + \frac{x^{4n} f^4 n r \times n r-n \times n r-2n \times n r-3n K^{-4}}{q \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n} \text{ [Num. 5]}$$

ORDINE SECONDO.

$$gx^e dx K^r \times 1 + \frac{f n r x^n K^{-1}}{q} \text{ (Num. 1)} \quad -\frac{f n r x^n K^{-1}}{q} - \frac{ff n r \times n r-n \times x^{2n} K^{-2}}{q \times q+n} \text{ (Num. 2)} + \frac{ff n r \times n r-n \times x^{2n} K^{-2}}{q \times q+n} + \frac{f^3 n r \times n r-n \times n r-2n \times x^{3n} K^{-3}}{q \times q+n \times q+2n} \text{ (Num. 3)} \quad -\frac{f^3 n r \times n r-n \times n r-2n \times n r-3n+x^{3n} K^{-3}}{q \times q+n \times q+2n}$$

$$-\frac{f^4 n r \times n r-n \times n r-2n \times n r-3n \times n r-4n \times x^{4n} K^{-4}}{q \times q+n \times q+2n \times q+3n} \text{ [Num. 4.]} + \frac{f^4 n r \times n r-n \times n r-2n \times n r-3n \times n r-4n \times x^{4n} K^{-4}}{q \times q+n \times q+2n \times q+3n} + \frac{f^5 \times n r \times n r-n \times n r-2n \times n r-3n \times n r-4n \times n r-5n \times x^{5n} K^{-5}}{q \times q+n \times q+2n \times q+3n \times q+4n} \text{ (Num. 5.)}$$

QUARTA SERIE del Numero 220., che ſerve ad accreſcere di quante unità ne piaccia l' Eſponente r della Parte Compleſſa de' Binomj, contenente anch' eſſa la Serie delle Integrali da porſi per ottenere tale intanto, e fuſſeguita dalle Differenziali, che da tali Integrali provengono.

ORDINE PRIMO.

$$gx^{e+1}K^r \frac{K}{\times x^n f \times n r+n} \text{ (Num. 1.)} \quad \frac{-K^2 \times q-n}{x^{2n} ff \times n r+n \times n r+2n} \text{ (Num. 2)} \quad \frac{+K^3 \times q-n \times q-2n}{x^{3n} f^3 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n} \text{ (Num. 3.)} \quad \frac{-K^4 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^{4n} f^4 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n \times n r+4n} \text{ (Num. 4.)} \quad \frac{+K^5 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n}{x^{5n} f^5 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n \times n r+4n \times n r+5n} \text{ (Num. 5.)}$$

ORDINE SECONDO.

$$gx^e dx K^r \times 1 + \frac{K \times q-n}{x^n f \times n r+n} \text{ (Num. 1.)} \quad \frac{-K^2 \times q-n \times q-2n}{x^{2n} ff \times n r+n \times n r+2n} - \frac{K \times q-n}{x^n f \times n r+n} \text{ (Num. 2.)} \quad \frac{+K^2 \times q-n \times q-2n}{x^{2n} f \times n r+n \times n r+2n} + \frac{K^3 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^{3n} f^3 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n} \text{ [Num. 3.]} \quad \frac{-K^3 \times q-n \times q-2n \times q-3n}{x^{3n} f^3 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n} - \frac{K^4 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n}{x^{4n} f^4 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n \times n r+4n} \text{ (Num. 4)}$$

$$+\frac{K^4 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n}{x^{4n} f^4 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n \times n r+4n} + \frac{K^5 \times q-n \times q-2n \times q-3n \times q-4n \times q-5n}{x^{5n} f^5 \times n r+n \times n r+2n \times n r+3n \times n r+4n \times n r+5n} \text{ (Num. 5.)}$$