



PRELEZIONI
SUI PRINCIPI MATEMATICI
DEL NEWTON.

FA 7 B 199-1

PRELEZIONI
SUI PRINCIPI MATEMATICI
DELLA FILOSOFIA NATURALE
DEL CAVALIER ISACCO NEWTON

*PER USO DELL' UNIVERSITA' INTERNA
DEL REAL CONVITTO DEL SALVATORE.*

T O M. I.



N A P O L I 1792.

Presso GIUSEPPE MARIA PORCELLI Librajo ,
e Stampatore della R. Accad. Militare.

Con Licenza de' Superiori .

PREFAZIONE DELL' AUTORE .

IL Cavalier Nevvton, che togliendo il velo, on-
da Natura si ricovre , vi spìò attento le di
lei leggi , e di esse compìè un Codice pe' Sapien-
ri , non parve uomo ; ma sotto umane forme Su-
blime Genio quaggiù disceso ad illustrar la Na-
tura , e ad eternarsi il nome (a). Dunque questo
Codice di Leggi Cosmologiche , ch' Ei disse Prin-
cipj Matematici della Filosofia Naturale , si
dovrebbe intender bene da ognuno , che brami con-
templar l' Universo : o ch' ei si arresti a specu-
larne il di lui sistema , e le leggi , o che guida-
to da' Metodi del Nevvton vogliane indagar delle
nuove . Ed in fin coloro , cui Natura è Scala al
Fattore , potranno a dispetto dell' empio raccorre
da questo Codice , che un Dio Vivente , d' infinito
Potere e di Sapienza ricolmo , e non mica l' iner-
te caso , nè il cieco fato geometrizzì ne' Cieli .
Ma tu il sai , Amico Lettore , i parti de' Subli-
mi

2 3

(a) In questo paragrafo contengono i più preclari
elogj fatti ad un sì Granduomo . Un Filosofo francese
classificando i Sommi Ingegni disse , che la mente del
Nevvton era media tra le Angeliche Intelligenze , e le
umane . Ed un' Inglese il celebrò con questa leggiadra i-
scrizione : *Hic jacet mortalis Newtonus , quem immor-
talem predicant Tempus , Calum , Natura .*

mi Ingegni sovente si concepiscono men chiari nell'altrui mente. Per la qual cosa il Nostro Amabile Sovrano, cui cale molto la didascalica educazione de' suoi Popoli, m'impone (b), che a vantaggio degli Alunni del Real Convitto del Salvatore io componessi chiare Prelezioni sul Nevuton: sistemandole col metodo di composizione, e col nitor della Sintesi dimostrando ciocchè ivi si aduna, e che da' Geometri posteriori saggiamente vuol delibarsi. In siffatta guisa ho io procurato giusta mia possa compiere queste Prelezioni fregiandole ancora di ricche note: in alcune delle quali ho esibito il filo di certe fisicomatematiche scoverte, ed i tentativi de' Sommi Ingegni (le quali cose sogliono l'acume de' Giovanetti perfezionare): ed in altre ho recata la genesi di quelle formole analitiche, che in pochi simboli ampie verità naturali contenendo sogliono fecondar bene in nostra mente. In fine per opera di un mio dotto allievo il Signor D. Stefano Forte ho fatto rigidamente dimostrare que' Lemmi di Geometria, che son di face a' alcune verità di queste Prelezioni; i quali anzichè disseminarli per l'intera Opera con discapito dell'attenzione di chi legge, gli ho innanzi ad essa col titolo di Geometriche Prenozioni insieme raccolti. E questo è quanto, Amico Lettore, conveniva dirti.

GEO-

(b) Legislazione di S. M. Siciliana per l'Educazione pubblica del Real Convitto del Salvatore §. 21.

GEOMETRICHE PRENOZIONI.

POSTUL. Quando dall'Autore vuol dinotarsi, che la ragione di X ad Y sia composta dalle altre di A a B, di C a D, di E ad F, ec. ei suol adottare la seguente compendiosa indicazione, $X : Y :: (A : B) (C : D) (E : F)$, ec.

PRENOZ. I. Se in mezzo a due grandezze omogenee A, e B vi si frappongano delle altre M, N, P, ancora ad esse omogenee; sarà sempre la ragione di A a B composta dalle ragioni di A ad M, di M ad N, di N a P, e di P a B.

Vedi Lemm. Prop. 23. El. VI.

PRENOZ. II. Se di due ragioni si scambino gli antecedenti, o ch'è lo stesso, i conseguenti; la ragione, che da esse si compone, riman la stessa. Così, a cagion di esempio, la ragion composta da quelle di M ad N, e di P ad R è la stessa di quella, che componesi dalle altre di M ad R, e di P ad N.

Questa verità chiaramente si rileva dalla Prop. 23. del VI. degli Elem.

PRENOZ. III. La ragion composta da più ragioni semplici, due delle quali sien fra loro inverse, è la stessa, che quella che si compone dalle medesime, minorate di quelle due.

Dimos. La ragion composta da più ragioni semplici è quella, che ha per esponente il prodotto degli esponenti di esse. E poichè dagli esponenti di esse risultane lo stesso prodotto, o che vi s'includa il prodotto degli esponenti delle due ragioni inverse, ch'è l'unità, o che le n' escluda; sì nell'uno, che nell'altro caso, la stessa ragion composta dovrà ricavarfi. C. B. D.

PRENOZ. IV. Se le due ragioni di $a : b$, e di $c : d$ compongano la ragione di $M : N$; una di quelle due

componenti sarà direttamente come la ragion composta di $M : N$, ed inversamente come l'altra componente.

Dimos. Imperciocchè essendo $a : c :: b : d :: M : N$ (per Ipot.), e $b : d :: b : c :: d : c$; sarà (Pren. I.) $a : c :: b : c :: (M : N) (d : c)$: cioè $a : b :: (M : N) (d : c)$. Con simigliante maniera dimostrasi, che stia anche $c : d :: (M : N) (b : a)$. C. B. D.

PRENOZ. V. Essendovi più analogie, $A : B :: C : D$, $A' : B' :: C' : D'$, &c. allora potrà conchiudersi, che la somma degli antecedenti delle prime ragioni stia alla somma de' loro conseguenti, siccome la somma degli antecedenti delle seconde ragioni alla somma de' conseguenti di loro; quando gli antecedenti delle prime ragioni sieno a quelle delle seconde proporzionali: ovvero quando i conseguenti delle prime facciano proporzione con quei delle seconde.

PRENOZ. VI. Lo stesso può stabilirsi, qualora sieno infinite coteste analogie.

Vedi la dim. del Lemm. II. recata ne' conici illustrati dal Giannattasio.

PRENOZ. VII. Se la ragione di $M : N$ sia maggiore di ciascheduna delle ragioni di $A : B$, $A' : B'$, $A'' : B''$, &c.; ella sarà anche maggiore della ragione della somma degli antecedenti di queste alla somma de' loro conseguenti.

Dimos. Facciasi $M : N :: A : F$, ed $M : N :: A' : G$, saranno F , e G rispettivamente minori di B , e B' ; e quindi sarà anche $F + G$ minore di $B + B'$. E poichè si è fatto $M : N :: A : F$, ed $M : N :: A' : G$; sarà $M : N :: A + A' : F + G$ (12. El. V.). Or essendo $F + G$ minore di $B + B'$, la ragione di $A + A' : F + G$ è maggiore di quella di $A + A' : B + B'$; dunque anche la ragione di $M : N$ è maggiore della ragione di $A + A' : B + B'$. E proseguendosi in simil guisa la dimostrazione, conchiuderassi l'assunto. C. B. D.

PRE-

PRENOZ. VIII. Sia $AaPF$ una qualunque curva riferita all'asse AF , ed in essa s'inscrivano de' rettangoli Ba , Cb , Dc , &c. di uguali altezze, ed altrettanti Bf , Cg , Dh , &c. le si circoscrivano; io dico che l'area di tal curva termini nella somma de' rettangoli iscritti, o de' circoscritti, qualora l'altezza di ciascheduno di essi diventi una grandezza minore di qualunque data.

La dimostrazione può leggerfi ne' Conici illustrati dal Giann. Lemm. I.

PRENOZ. IX. In ogni curva ADF il triangolo formato da un'archetto di lei Dd , e da' due elementi gD , e gd delle coordinate ortogonali DB , BA , è sempre simile al triangolo DLB costituito dall'ordinata DB , dalla normale DL , e dalla sunnormale BL .

Dimos. Imperciocchè essendo gli angoli acuti BLD , BDL del triangolo rettangolo DLB uguali ad un retto; essi debbono pareggiare l'angolo LDd , che si è supposto retto: quindi toltovi di comune l'angolo LDB , rimarrà l'angolo BLD uguale all'altro gDd . Dunque i due triangoli rettangoli DLB , dDg saranno equiangoli, e con ciò simili. C. B. D.

Defn. I. Se dentro l'angolo retto TCA si concepisca descritta la curva Bpp tale, che le ordinate PM , GF , &c. all'asse CA sieno inversamente come i quadrati delle loro ascisse CM , CF , &c.; cotesta curva si dice Iperbole cubica. Il punto C si chiama di lei centro, ed i lati CA , CT del diviso angolo, che deggionfi sempre avvicinare al perimetro di quest'iperbole senza poterlo giammai toccare, si chiamano Assintoti di essa.

PRENOZ. X. Lo spazio asintotico infinitamente lungo MYP dell'Iperbole cubica Bpp è uguale al rettangolo delle sottoposte coordinate PM , MC .

E gli spazj asintotici MYP , FYG sono in suduplicata ragione delle sottoposte ordinate MP , FG , o nell'inversa delle loro ascisse CM , CF .

Dim.

Dim. Part. I. Si bisecchi l'angolo ACT colla retta CB , che prolungata incontri in B la detta Iperbole cubica. Pel punto B e col medesimo angolo asintotico ACT si descriva l'Iperbole conica BNn (Con. Giann. Lib. IV. Prop. 5.). E poi preso in questa Iperbole l'archetto Nn infinitesimo, si conduca pel suo estremo n l'ordinata nm , ed indi la retta NZ , che lo tocchi in N , e per B si ordini a CM la retta AB . Sarà CA uguale ad AB per essere il triangolo CAB isoscele rettangolo: e (per lo Cor. I. Prop. 18. Lib. III. Con. Gian.) sarà MZ uguale ad MC . Per la qual cosa essendo (Prop. 20. dell. stes. Lib. III.) $NM:AB::CA:CM$, e quindi $NM:CM::CA^2:CM^2$, sarà $NM:MZ::CA^2:CM^2$.

Or essendo (Pren. IX.) il triangolo NMZ simile al triangoletto Nrn , sta $NM:MZ::Nr:rn$; e per la natura di quest'iperbole cubica è $CA^2:CM^2::MP:AB$. Dunque siccome *ex ostensis* sono uguali le prime ragioni di queste due analogie, così le altre saranno ancora tra se uguali. Vale a dire sarà $Nr:rn::MP:AB$, e l rettangolo di Nr in AB sarà uguale al rettangolo di rn in MP , cioè al trapezietto $PpmM$. E quindi tutti quest'infiniti trapezietti, che compongono l'aja asintotica MTP , adegueranno il rettangolo di AB nell'intera MN . Ma poichè si è dimostrato essere NM a CM , come CA^2 a CM^2 , o per l'iperbole cubica Bpp , come MP ad AB ; sarà il rettangolo di NM in AB quanto quello di CM in MP . Dunque anche lo spazio asintotico infinitamente lungo MTP uguaglierà il rettangolo delle sottoposte coordinate MC, MP .

Part. II. E dimostrandosi col medesimo sistema di ragioni, che l'altro spazio asintotico FTG agguagli il rettangolo delle coordinate FG, FC ; sarà lo spazio asintotico MTP all'altro FTG , come il rettangolo PMC al rettangolo GFC , cioè in ragion composta di PM a GF , e di CM a CF , cioè in sudduplicata ragione di PM a GF , o nella semplice ragione di CF a CM . Imperocchè la seconda di quelle due componenti è per la natura dell'iperbole cubica sudduplicata inversa della prima. C. B. D.

Co-

Corol. I. Essendo le aje asintotiche infinitamente lunghe BTE, ATD uguali ai rettangoli EBC, DAC delle sottoposte coordinate; sarà l'aja $BAD E$, differenza di quelle, uguale alla differenza de' rettangoli EBC, DAC . Laonde descrivendosi un'iperbole conica, che si rapporti ai medesimi asintoti della cubica, e che passi per D , sarà il rettangolo DAC uguale all'altro RBC : e quindi la differenza de' rettangoli EBC, RBC , ch'è il rettangolo di ER in CB , sarà quanto l'aja $BAD E$ dell'iperbole cubica.

Cor. II. Ed essendo per la natura dell'iperbole cubica $EB:DA::CA^2:CB^2$: e per la natura dell'iperbole conica $DA:RB::CB:CA::CB^2:CB.CA$; saranno le tre grandezze EB, DA, RB in ordinata ragione colle tre altre $CA^2, CB^2, CB.CA$: onde per uguaglianza ordinata starà $EB:RB::CA^2:CB.CA::CA:CB$. E quindi dividendo resterà $ER:RB::AB:BC$, e l rettangolo di ER in BC pareggerà l'altro di RB in AB .

n. 1. Cor. III. E' dunque l'aja $DAB E$ uguale al rettangolo di RB in AB . E quindi le due aje $EDAB$, e $DA b$, che sono uguali rispettivamente a' rettangoli $ABR, Ab r$, saranno fra loro in ragion composta di AB ad Ab , e di BR a br , o di Cb a CB . Vedi Cor. 2. Prop. 20. Lib. III. Con. Giann.

n. 2. Cor. V. Per l'estremo d di una qualunque altra ordinata ad si descriva l'iperbole conica df rapportata agli asintoti AC, CQ ; saranno i due rettangoli DAC, dac rispettivamente uguali agli altri RBC, fbc : onde siccome i due primi sono (Pren. X.) nella ragione di aC ad AC ; così sarà pure $RBC:fbc::aC:AC$; e poi (Pren. IV.) $RB:fb::(aC:AC)(bC:BC)$. Ma le aje $DAB E, dab e$ dell'iperbole cubica si son mostrate uguali a' rettangoli di BR in BA , e di bf in ba . Dunque quelle al par di questi saranno in ragion composta di Rb ad fb , e di BA a ba : e quindi sarà $DAB E:dab e::(aC:AC)(bC:BC)(BA:ba)$.

PRE-

PRENOZ. XI. Se la retta AO , che unisce il vertice del triangolo BAC colla metà della sua base BC protraggesi su del vertice, sicchè AD sia dupla di AO ; congiunte le rette CD , BD queste saranno anche dai lati BA , CA dello stesso triangolo bisecate. E vicev.

Dim. Facciasi AF uguale ad AD , e si uniscano le rette BF , CF ; farà il triangolo BOF uguale all'altro AOB (4. El. I.). Dunque l'angolo OFB farà uguale ad OAC , e quindi BF , ch'era uguale ad AC , le farà anche parallela, e la figura $BACF$ un parallelogrammo.

E poichè la retta AG è parallela alla FC , dee stare $FD:DA::FC:AG$, ed $FD:DA::CD:DG$. Dunque la congiunta CD vien bisecata dalla BA prodotta, finchè l'incontra: ed è AG metà di FC , o di AB .

Part. II. Che se il punto medio G della retta DC si unisca col punto A , la retta GA dee giacersi a diritto colla BA : altrimenti BA passando per G non combacerebbe colla GA : lo che è assurdo. C. B. D.

n. 1. Cor. I. I lati AB , BF , AF del triangolo ABF sono come i seni degli angoli AFB , FAB , ABF , che loro oppongonsi. E questi seni sono gli stessi, che quei degli angoli CAF , BAF , BAC . Dunque le rette AB , AC , AF son proporzionali ai seni degli angoli CAF , BAF , BAC .

n. 2. Cor. II. E farà (come con corto filo di ragioni può rilevarsi) AF ad $AB+AC$, come sen. BAC a sen. $CAF+sen. BAF$.

n. 3. Cor. III. Finalmente, se AB adegui AC , la retta AF dovrà bisecar l'angolo BAC . E se questo angolo sia di 120° , farà tanto BAF , che FAC , o il suo uguale BFA di 60° . Dunque il triangolo BAF sarà equilatero, ed AF sarà uguale tanto ad AB , che ad AC .

PRENOZ. XII. Se per l'angolo C del quadrilineo $KOCF$ conducansi comunque nel dilui piano le due rette BR ,

BR , br , ed abbassate dagli altri angoli O , K , F del quadrilineo le perpendicolari OB , KA , FR su di BR , e le altre Ob , Ka , Fr sulla br , sieno BA , e ba rispettivamente uguali a CR , e Cr ; il proposto quadrilineo sarà un parallelogrammo.

Dim. Si calino dal punto O le due rette OL , OM rispettivamente perpendicolari a KA , Ka , e si congiungano le altre due LM , Rr . E poichè (10. El. XI.) l'angolo LOM è uguale all'altro RCr , ed i lati di quello OL , OM sono uguali alle rette BA , ba (34. El. I.), cioè per ipotesi a CR , Cr lati di questo, farà la retta LM uguale ad Rr , e l'angolo LMO uguale all'altro RrC . Con che essendo OM parallela a CR , anche LM farà ad Rr parallela. Per la qual cosa avendo i due triangoli LKM , RFr tutti i loro lati tra se paralleli, dovranno essere equiangoli (10. El. XI.); ed essendosi mostrata la LM uguale alla Rr , farà (26. El. I.) LK uguale ad FR . E poichè i triangoli rettangoli OKL , CFR , come si è dimostrato, hanno uguali non meno i cateti OL , CR , che gli altri LK , RF , è d'uopo che OK ipotenuza del primo sia ancora uguale, e parallela a CF ipotenuza del secondo. Dunque (33. El. I.) la figura $KOCF$ farà un parallelogrammo. C. B. D.

PRENOZ. XIII. Se fuori de' due cerchi uguali FBY , $fb y$ si prendano ovunque i due punti A , ed a , e condotte pe'l primo di essi le secanti AM , AO tra loro vicinissime, si tirino pe'l secondo le altre due am , ao , che ascindano gli archi bo , dm rispettivamente uguali a BO , e DM ; io dico essere gli archetti ED , bd nella ragion diretta delle parti esteriori AB , ab di esse secanti, e nell'inversa di AP , ed ap , somme delle medesime parti, e delle metà delle parti interiori.

Dim. Da' centri S , ed s si calino SP , SR , sp , sr rispettivamente perpendicolari sulle medesime secanti, e da' punti B , e b si tirino BT , bt perpendicolari su di AM , ed am . E poichè l'angolo AQP manca dal retto APQ per quanto è l'angolo infinitesimo PAQ , Fig. 29. e 30.

ei si potrà stimare uguale ad APQ . Dunque anche SRQ sarà uguale ad SQR , il lato SR sarà uguale ad SQ , e QP dinoterà la differenza di SP , e di SR . Con simil ragionamento mostrerassi, che pq sia differenza di sp , e di sr . Onde essendo le due SP , SR rispettivamente uguali ad sp ed sr , sarà PQ uguale a pq . Ciò posto, per la similitudine de' triangoli BAT , PAQ stia BT a PQ come AB ad AQ , o ad AP . E per la similitudine degli altri due apq , abr , l'è anche $pq:br::ap:ab$: dunque farà (Pren. I. e II.) $BT:br::(AB:ab)$ ($ap:AP$). Ma per l'uguaglianza delle due corde DM , dm , gli angoli BDT , bdt , ch'esse formano co' loro archi, son pure tra se uguali. Dunque saranno simili tra loro i triangoletti rettangoli BDT , bdt . Con che essendo la ragion degli archetti BD , bd quanto quella di BT a br , farà $BD:bd::(AB:ab)$ ($ap:AP$). C. B. D.

PRENOZ. XIV. Ne' triangoli rettangoli SAP , sap i seni degli angoli acuti ASP , asp sono direttamente come i cateti AP , ap , che li sottendono, ed inversamente come le loro ipotenuse.

Dim. Posto il raggio uguale ad R , è nel triangolo rettangolo SAP sen. $ASP:R::AP:AS$, e nell'altro triangolo sap l'è pure $R:sen. asp::as:ap$. Dunque (Pren. I. e II.) farà sen. $ASP:sen. asp::(AP:ap)$ ($as:AS$). C. B. D.

Fig. 81. PRENOZ. XV. Date di posizione le tre rette AB , BC , AC , che non sien tutte tra se parallele, ritrovarne un punto, da cui le perpendicolari, che vi si abbassano, sieno come le tre rette date M , N , P .

Costr. Cas. I. Le prime due rette si uniscano in B ; ed in A , e C le segghi la terza AC . Si prendano 1. accanto all'angolo B le due rette uguali BF , BG , e fatta CR uguale a CG , si congiungano le altre due FG , GR . 2. Si divida FG in E sicchè stia $FE:EG::M:N$, e l'altra GR in H , talchè stia $GH:HR::N:P$. 3. Finalmente si uniscano le rette BE , CH , che pro-

tratte

tratte s'incontreranno in L . Sarà L il punto addimandato.

Dim. Essendo tra se uguali gli angoli BFG , BGF (5. El. I.); se dal punto E si calino EO , EQ perpendicolari su di BA , e BC , i due triangoli rettangoli EFO , EGQ riusciranno equiangoli, e simili. Dunque farà $EO:EQ::FE:EG$. Ed abbassate le LI , ed LK perpendicolari sulle medesime BA , BC ; la prima delle divise ragioni è uguale a quella di LI ad LK ; e l'altra è per costruzione uguale alla ragione di M ad N . Dunque farà $LI:LK::M:N$.

Nella stessa guisa si dimostrerà, che stia $LK:LS::N:P$. Dunque le tre perpendicolari LI , LK , LS sono come le tre rette date M , N , P .

Cas. II. Sieno BA , BC , ac le tre rette date, delle quali BC , ed ac sieno parallele, e le altre due s'incontrino in B . A tal uopo si prendano le uguali BF , BG d'accanto l'angolo B , e congiunta la FG , la si divida in E , sicchè stia $FE:EG::M:N$, e si unifca BE . II. Da un qualunque punto G della BC si cali Cc perpendicolare su di ca , e si prolunghi in D , talchè stia $DC:Dc::N:P$. III. Per D si tiri DL parallela a CK , che s'incontri con BE in L : sarà questo punto quello, che si domanda. Lo che dimostrasi come prima. C. B. D.

Cor. Il richiesto punto L , segnato dal concorso di due rette, non è, che un solo.

DELL'EPICICLOIDE INFERIORE.

Fig. 82.

PRENOZ. XVI. Def. II. Se il circolo BnO esistente nel piano dell'altro RAS , entro di questo con perfetta rivoluzione si aggiri in maniera, che i punti della sua periferia vadansi successivamente adattando nella concavità del circolo RAS , cioè che il circolo BnO vada rotolando entro dell'altro RAS ; un qualunque punto n del circolo BnO segna la curva AnM , ch' *Epicicloide inferiore* si domanda. Il punto medio di questa curva, qual è il punto Q , si dice *vertice* di essa: e l'arco ABM n'è la di lei base. Il circolo RAM diceasi *cerchio immobile* e l'altro BnO *cerchio rotatore*, di cui il punto n chiamasi *punto descrivente*.

Cor. I. Nel generarsi l'arco An dell'Epicicloide AQM , tutt' i punti dell'arco nB si sono successivamente adattati a quei dell'arco AB . E nel trasferirsi fino ad M il punto n , tutt' i rimanenti punti della circonferenza BnO di mano in mano si sono sovrapposti a quei dell'arco BAM . Dunque l'arco nB è uguale all'arco AB , e l'arco $nOPB$ pareggia l'altro BM : e con ciò l'intera periferia del circolo rotatore BnO uguaglia la base di questa Epicicloide.

Cor. II. Rotolando il circolo BnO entro dell'altro RAS , la corda Bn nel principio di tal movimento genera un'archetto infinitesimo, cui essa corda è perpendicolare in n : ma l'è anche Bn perpendicolare ad nO . (31. El. III.). Dunque la nQ è tangente dell'Epicicloide in N .

Cor. III. Quindi adattandosi ad un qualunque punto n dell'Epicicloide la tangente nO , e la normale nB ; e dal punto B , ove la normale incontra il cerchio immobile RAS , tirandosi al centro C del medesimo il raggio BC ; la parte BO di esso raggio, intercetta tra la normale, e la tangente, uguaglia il diametro del circolo rotatore, e viceversa.

Cor. IV. Unito il centro C del cerchio immobile col vertice Q dell'Epicicloide per la retta CQ , e prodotta fino ad X ; farà QX uguale al diametro del cerchio rotatore.

PROP.

PROP. I. Se ad un qualunque punto n dell'Epicicloide AnM si adatti la tangente nO , e la normale nB , e dal punto B , ove la normale incontra il cerchio immobile RBS , si tiri al di lui centro C il raggio BC ; dico, che l'arco epicicloideale nQ stia alla parte nO della tangente, che il raggio BC ascinda verso del contatto, nella costante ragione della differenza dei diametri del circolo immobile e del rotatore, al raggio del cerchio immobile.

Dim. Si bisechi BO in I , e col centro I intervallo IB descrivasi il circolo BnO , il quale dovrà passare pel punto n , e farà il circolo rotatore (Cor. 3. Defin. 2.). Concepisca ora, che tal circolo rotolando nella concavità dell'altro RAS si trasferisca nel sito prossimo GtP ; cosicchè i punti dell'archetto infinitesimo Bb si adattino successivamente a quei dell'archetto BG : con tal movimento il punto dato n condurrassi in t scorrendo per l'archetto infinitesimo nt dell'Epicicloide; e 'l centro I del circolo rotatore trasferirassi in K . Si uniscano le rette CG , Ct , Kt , Pt ; e ne' punti P , e t si adattino al circolo GtP le tangenti PE , tE , e dal punto E del loro incontro si abbassi sulla Pt la perpendicolare EH : indi da P si cali sulla Ct la perpendicolare PL , la quale si prolunghi, finchè incontri la tE in D , d'onde si abbassi su di Pt l'altra perpendicolare DF . Dipoi col centro C intervallo Cn descrivasi l'arco na : e col centro P intervallo Pa si descriva l'altro av . Finalmente la retta Ct si prolunghi, finchè tagli in r l'arco na .

E poichè il semicerchio GtP è uguale all'altro BnO , e l'arco Ga , com'è chiaro di per se stesso, pareggia l'altro Bn ; farà il rimanente arco atP uguale al rimanente arco nfo : e con ciò le loro corde Pa , On sonq anche uguali. E quindi Pv , ch'è uguale a Pa , pareggia On : e tv differenza di Pv , e Pt , è anche differenza di On , e Pt . Dunque, nel trasferirsi il circolo BnO nel sito prossimo GtP , l'arco nQ si è diminuito dell'archetto nt , e contemporaneamente la corda On si

Tom. I.

h

è mi-

è minorata di tv . Essendo ora gli archi Ga , Bn uguali fra loro, at sarà il contemporaneo aumento dell' arco Bn : e per essere Cr uguale a Cn , tr sarà il contemporaneo decremento di Cn . Dunque non solo gli archi tn , tv sono infinitesimi, ma lo sono ancora la retta tr , e l' arco ta ; e con ciò la tangente Dt prolungandosi si confonde coll' archetto ta : siccome la Pt tangente dell' Epicicloide in t è a diritto col dilei archetto tn : onde i triangoletti ntr , rta , atv si potranno avere per rettilinei.

Or i due triangoli ntr , PtL , che son rettangoli in r ed L , ed hanno anche uguali gli angoli opposti al vertice rtn , PtL , deggion essere simili fra loro. E per la stessa ragione i triangoletti rta , atv sono rispettivamente simili ai triangoli LtD , DtF . Dunque sarà $tn:tr::tP:tL$, $tr:ta::tL:tD$, $ta:tv::tD:tF$: e quindi sarà ex æquo $tn:tv::tP:tF$.

Intanto nel triangolo CPT rettangolo in P essendosi da P abbassata la perpendicolare PL sulla di lui base CT , dev'essere l'angolo TPL uguale all'angolo TCP (8. El. VI.): è poichè nel quadrilatero $KPEt$ son retti gli angoli KPE , KtE ; gli altri due PKt , PEt debbono far due retti. Ma i due angoli PED , PEt anche uguagliano due retti: dunque l'angolo PKt è uguale all'angolo PED . Laonde i due triangoli PED , CKt , che hanno (per dim.) uguali gli angoli EPD , tCK , non men che gli altri PED , CKt sono fra loro simili; e con ciò dee stare $DE:EP::tK:CK$; ossia $DE:Et::GK:CK$, e componendo $Dt:Et::GC:CK$. Ma per la similitudine de' triangoli DtF , EtH sta $Dt:Et::Ft:Ht$. Dunque l'è parimente $GC:CK::Ft:Ht$; e duplicando i conseguenti sarà $GC:2CK::tF:tP$; ed invertendo si avrà $2CK:GC::tP:tF$. Ma si è antecedentemente dimostrato essere $tn:tv::tP:tF$. Dunque è ancora $tn:tv::2CK:GC$. E dimostrandosi con simile ragionamento essere sempre il decremento dell' arco nQ al contemporaneo decremento della corda nO nella costante ragione di $2CK:GC$, sarà la somma dei primi alla somma dei secondi, come $2CK:$

$2CK:GC$. E poichè giugnendo il punto n in Q , svaniscono contemporaneamente l' arco nQ , e la corda nO ; quindi dovrà essere nQ uguale alla somma dei primi decrementi, ed nO uguale alla somma de' secondi. Dunque sarà $nQ:nO::2CK:GC$; cioè l'arco epicicloideale nQ sta ad nO , siccome è la differenza dei diametri del circolo immobile RAS , e del rotatore BnO al raggio del circolo immobile RAS . C. B. D.

PROP. II. Sia AnQ il semiperimetro di un' Epicicloide descritta dal cerchio GnO , che rotoli nella concavità dell' altro immobile RAX ; ritrovare la curva, che nasce dall'evoluzione di questa Epicicloide. Fig. 83.

Costr. I. Dal centro C del cerchio immobile RAX conduca al punto A , ch'è un' estremo dell' Epicicloide, la retta CA , da cui se ne tronchi AT uguale al diametro GO del cerchio rotatore. 2. Si ritrovi GP terza proporzionale in ordine a CA , e CT . 3. Si descriva col centro C intervallo CT il cerchio MTQ , il quale dovrà passare pel punto Q vertice dell' Epicicloide AnQ : imperciocchè condotto per Q il raggio CQX , dee QX uguagliare AT diametro del cerchio rotatore (Cor. 4. Def. 2): e quindi l' arco MTQ passerà per Q . 4. Finalmente si concepisca, che un cerchio, il di cui diametro sia quanto TP , tocchi nel punto Q l' arco TQ , e che vada nella cavità di questo rotolando da Q verso T , sicchè tutti i punti della sua circonferenza si adattino successivamente sull' arco QTM , mentre il dilei punto Q segna l' Epicicloide QPM . Dico, che la prima metà di questa curva sia quella, che si domanda.

Dim. Il cerchio GnO dicasi per brevità primo rotatore: e l' altro, che abbia TP per diametro, secondo cerchio rotatore.

1. E poichè dalla costr. sta $CA:CT::CT:CP$, farà (19. El. V.) $CA:CT::AT:TP$. Ma gli archi simili AX , e TQ son come i loro raggi CA , e CT : dunque saranno i medesimi archi AX , TQ come AT a TP , o come la semicirconferenza del primo cerchio

chio rotatore a quella del secondo. Ma l'arco AX è uguale alla semicirconferenza del primo cerchio rotatore: dunque sarà pure TQ uguale alla semicirconferenza del secondo: e quindi dovrà cadere in P il vertice della seconda Epicicloide.

2. Si adatti ad un qualunque punto n della data Epicicloide la tangente nO ; e sia GnO la posizione del primo cerchio rotatore, quando il di lui punto descrivente si trovi in n ; dovrà le retta CK , che unisce il centro C del cerchio RAX con quello di GnO , passare (11. 12. El. III.) pe' punti G , ed O , ove lo stesso cerchio GnO tocca gli altri due RAX , MOQ . E perchè la tangente nO tronca da CG la parte GO (Cor. 3. Def. 2.) uguale al diametro del primo cerchio rotatore; è d'uopo, che l'incontro delle due rette NO , CG cada in quel punto, ove il cerchio GnO tocca il cerchio MOQ .

3. Si tagli OB uguale a TP , e si prolunga nO in D , sicchè sia $nO:OD::GO:OB$: ei sarà chiaro, che congiunte le rette Gn , DB , debba essere il triangolo GnO simile all'altro BDO (6. El. VI.): e che l'angolo ODB sia retto al par dell' altro GnO (Cor. 3. Def. 2.). Dunque il punto D dovrà calcare nella periferia del secondo cerchio rotatore, quando il di lui centro si ritrovi nella retta CO . E dico altresì che lo stesso punto D debba ritrovarsi nell' Epicicloide descritta dal secondo cerchio rotatore. Imperocchè, se vogliasi che il cerchio ODB , il quale abbia OB per diametro, incontri in un'altro punto p la seconda Epicicloide; l'arco Op dovrebbe pareggiare OQ . Laonde essendosi dimostrato (n. 1.), che QOT adegui ODB , sarà OT uguale a pB . Ma sta $CA:CT::AG:TO$, e di queste ragioni la prima è uguale a quella di AT a TP , o di GO ad OB : e son poi Gn , e pB rispettivamente uguali a GA , ed OT . Dunque sarà $Gn:pB::GO:OB$: e quindi sarà l'arco Gn simile all' altro pB , e l'angolo GOn uguale a pOB . Ma il primo è uguale a BOD . Dunque sarà BOp uguale a BOD . Lo che è assurdo.

4. Si bisecchi TA in E . E poichè si è dimostrato (n. 1.) essere $CT:CA::TP:TA$: farà compo-

nen-

rendo $CT+CA$, o sia $2CE$ a CA , come PA a TA , o come GB a GO , cioè a dire come nD ad nO . Ma (Prop. ant.) $2CE$ sta a CA come nQ ad nO . Dunque sarà $nD:nO::nQ:nO$, e quindi nD uguale ad nQ . Sicchè l'estremo D della tangente nD dell'arco nQ , ch'ella parreggia, sempre si ritrova nell' Epicicloide, che si descrive dal secondo cerchio rotatore. Dunque questa Epicicloide sarà quella, che nasce dall'evoluzione della data AnQ . C. B. D.

Cor. La retta AP , come può intendersi facilmente, è il raggio dell' oscolo nel vertice P dell' Epicicloide QDP . Dunque se il cerchio QDB , che rotoli entro l'immobile QTM descriva l'Epicicloide inferiore QPM , il di cui vertice sia P ; il raggio AP dell' oscolo nel di lei vertice P dovrà investigarsi, facendo CP a CT , come CT a CA . E questo vuol capirsi bene per intendere chiaramente la Prop. C. delle Prelez.

DELLA CICLOIDE.

Defn. III. Se il circolo TNM , che tocchi in M la retta AM , compia su di questa un perfetto rotolamento, ed in uno stesso piano; il punto M descriverà una curva, che *Cicloide* semplicemente, o *Cicloide volgare* si domanda.

Fig. 80.

Cor. I. Qualora il raggio CG del cerchio immobile RAS sia infinito rispetto a GK raggio del cerchio rotatore GAP ; la periferia di questo, e con ciò anche l'arco ABM ad essa uguale sarà una parte infinitesima della periferia del cerchio immobile. Dunque l'arco ABM potrà averli come una retta, cui sian perpendicolari le CX , CG , &c. e la curva AQM sarà in tal caso una *Cicloide volgare*.

Fig. 81.

Cor. II. Di più essendo CK pressochè uguale a CG , l'arco Qn , che nell. I. Prop. dell' Epicic., si è dimostrato essere alla corda nO del cerchio rotatore, come $2CK$ a CG , le farà come 2 ad 1: cioè l'arco cicloideale

dale

dale Qn è doppio della corda nO del cerchio rotatore.

Cor. III. Gli altri Coroll. dedotti dalla defin. dell'Epicl. si possono convenevolmente alla Cicloide applicare.

Defn. IV. Si bisecchi in X la base AM della Cicloide AQM , di dove le si eriga la perpendicolare XQ , che incontri in Q il dilei perimetro; si dirà QX asse della Cicloide, intorno a cui suol mettersi il cerchio generatore QLX : il punto Q si dirà vertice della stessa curva: e tutte le dilei corde parallele alla MA si diranno ordinate alla Cicloide, e le loro ascisse saranno le parti dell'asse, ch'esse verso il vertice ne tagliano.

PRENOZ. XVII. Ogni arco cicloidale Qn è duplo della corda QL , che gli corrisponde nel circolo generatore. E la tangente On condotta all'estremo di esso arco è parallela alla medesima corda.

Dimost. Il circolo rotatore intendasi trasferito nella posizione nBN , sicchè il suo punto descrivente cada in n estremo dell'arco Qn , dopo che tutti i punti dell'arco Qn sieno adattati successivamente su quelli della retta AB . Si congiunga il centro R di questo circolo col punto B , ov'ei tocca la BA : e la retta BR protragga, finchè incontri in O il cerchio NBO ; sarà BO perpendicolare ad AB (Cor. 3. Def. 3.), ed uguale ad XQ . E poichè a cagion del parallelogrammo $BEFX$ le rette XF , BE parri de' diametri uguali XQ , BO son anche tra se uguali; è d'uopo, che QF , ed OE rimanenti porzioni de' diametri anche si pareggino. Ma la corda QL è media proporzionale (Cor. Prop. 8. El. VI.) tra XQ , e QF , ed On tra BO , ed OE : dunque sarà QL uguale ad On . Il perchè essendo l'arco cicloidale Qn duplo della corda On (Cor. 2. Def. 3.), il farà anche duplo della QL .

Ed essendo tra se uguali gli angoli QXL , OBn , perchè insistono sugli archi uguali QL , On ; anche gli angoli QLF , OnE , che a quelli (8. El. VI.) son rispettivamente uguali, dovranno pareggiarsi. Dunque nO , ch'è tangente (Cor. 3. Def. 3.) della Cicloide nel punto n , sarà (27. El. I.) parallela alla corrispondente corda QL . C. B. D.

Cor.

Cor. I. Dunque, preso l'archetto nt infinitesimo, e calata tr perpendicolare su di nF , dovrà risultarne il triangoletto ntt simile al triangolo QLF .

Cor. II. Ed i triangoli QXL , OBn saranno perfettamente tra se uguali.

PRENOZ. XVIII. Poste le medesime supp. della prec. pren. la parte nL della semiordinata nF , cioè quella, che framezza l'arco cicloidale, e'l cerchio generatore, è sempre uguale al corrispondente arco circolare QL .

Dim. Gli archi XL , Bn , sortesi dalle uguali corde XL , Bn , sono tra se uguali. Dunque togliendo cotesti archi dalle uguali semicirconferenze QLX , nBN dovrà rimanervi l'arco LQ uguale all'altro BN . Or l'arco BN è quanto la BX , conciossiachè l'arco BN deesi adattare sulla BX , affinchè il cerchio generatore compia una metà della sua rotazione: ed è poi a cagion del parallelogrammo $LXBn$ la retta BX uguale alla nL : dunque sarà pure LQ uguale ad nL . C. B. D.

PRENOZ. XIX. La Cicloide volgare è simile, ed uguale a quella, che si genera dalla sua evoluzione.

Dim. Supposto quanto si è detto nell. Prop. 2. dell'Epicl., immaginatevi, che il raggio CA del cerchio immobile RAX diventi infinito rispetto ad AT diametro del primo cerchio rotatore, in tal caso i raggi CA , CG , CX , &c. diverranno tra se paralleli: gli archi circolari AX , TQ faranno qual rette uguali, e perpendicolari alla CA : e la semiepicicloide AnQ dovrà degenerare in una semicicloide volgare. E perchè il diametro PT del secondo cerchio rotatore dee stare a TA diametro (n. 3. costr. Prop. 2. Epicl.) del primo rotatore, come CT a CA , cioè in ragion d'uguaglianza, essendo tali rette infinite per la finita TA differenti; sarà anche TP uguale a TA . E quindi la curva QDP , che si descrive dalla evoluzione della Cicloide volgare AnQ , sarà ancor essa una Cicloide uguale, e simile alla AnQ . C. B. D.

Cor. Essendo nO ad OD , come GO ad OB , cioè in ra-

Fig. 83.

ragion di uguaglianza; sarà vero, che ogni raggio dell' evoluta di una Cicloide volgare debba esser biseccato dalla base di quell' altra, che nasce dalla dilei evoluzione. E poi il raggio dell' oscolo nel vertice di una Cicloide sarà duplo del diametro del cerchio generatore. Vedi fig. 74.

PRENOZ. XX. Sia la retta AB divisa ad arbitrio in C, ed essa si prolunghi fino ad O, o si divida in un' altro punto O; sarà $AC \cdot BO \pm BC \cdot AO = AB \cdot CO$.

Dim. Part. I. Per la I. El. II. è $BC \cdot AO = BC \cdot CO + BC \cdot AC$. Dunque aggiungendovisi $AC \cdot BO$, farà $AC \cdot BO + BC \cdot AO = BC \cdot CO + BC \cdot AC + AC \cdot BO$: ma questi due ultimi rettangoli sono uguali (I. El. II.) al rettangolo di $AC \cdot CO$. Dunque farà $AC \cdot BO + BC \cdot AO = BC \cdot CO + AC \cdot CO = AB \cdot CO$.

Part. II. Ed essendo $AC \cdot BO = AO \cdot BO + OC \cdot BO$; togliendovi d' ambe le parti $BC \cdot AO$, farà $AC \cdot BO - BC \cdot AO = AO \cdot BO + OC \cdot BO - BC \cdot AO$. Ma $AO \cdot BO - AO \cdot BC = AO \cdot CO$. Dunque farà $AC \cdot BO - BC \cdot AO = AO \cdot CO + OC \cdot BO = AB \cdot CO$. C. B. D.

LA MECCANICA

CAP. I.

DEL MOTO EQUABILE.

§. 1. DEFIN. I. Quella Scienza, che ha per oggetto i moti de' corpi solidi, e le forze, che gl' investono, si addimanda *Meccanica*.

§. 2. DEFIN. II. Un corpo si dice mosso equabilmente, se per uguali parti del suo sentiero, qualunque sian queste, vi si conduca sempre in tempi uguali.

§. 3. COROLL. I. Dunque questo corpo dovrà impiegarvi più tempo in percorrere un qualche spazio, che un' altro minore di esso.

§. 4. COROLL. II. Di più un corpo mosso equabilmente dee correre un dato spazio in un dato tempo: dunque dovrà spendervi il doppio tempo nel condursi per lo doppio spazio, il triplo per lo triplo, ec.

§. 5. DEFIN. III. E se un corpo in tempi uguali percorra spazj disuguali, o pur v' impieghi ineguali tempi in descrivere uguali spazj, il suo moto si dirà *variabile*.

Tom. I.

A

§. 6.

§. 6. DEFIN. IV. Il moto variabile sarà poi *accelerato*, o *ritardato*, secondochè gli spazj descritti in tempi uguali vadano crescendo successivamente, o decrescendo.

§. 7. SCOL. La forza motrice, come l'intenderete, cari Giovanetti, nel Capo III., non si giace *inoperosa* entro di un corpo; ma tantosto lo guida al moto, obbligandolo a descrivere equabilmente un dato spazio in un dato tempo. Dunque questa nuova determinazione sorta nel corpo dalla forza motrice che lo riempie, e che da' Fisici *velocità* del mobile si domanda, l'è un' affezione del di lui moto, che come cosa al corpo inerente può concepirsi. E quindi da questo concetto della velocità le rapportate definizioni potran ricevere le seguenti forme del pari eleganti, che le primiere. Un corpo si dirà mosso equabilmente, se ovunque ne serbi invariabile quella velocità, onde ha principiato il suo moto (a). E l' movimento di un' altro corpo si dirà accelerato, o ritardato, se la dilui velocità continuamente cresca, o pur decresca.

§ 8.

(a) Alcuni sogliono dire, che la velocità di un corpo sia il rapporto dello spazio al tempo. Ma la definizione recata alla velocità nel §. 7. è più conveniente al senso di tante espressioni usate non men dal volgo, che da' medesimi Geometri: e sono la *velocità*, che ad un corpo s' imprime: quella con cui n' esce da un dato luogo, o ad un' altro ne perviene: la velocità si accresce, si diminuisce: &c.

§. 8. ASSIOMA. Le velocità di più corpi, che camminano equabilmente, sono nella ragion degli spazj, ch' essi descrivono in tempi uguali.

Ciò segue immediatamente dalla definizione della velocità, qualunque si voglia quì adottare (a), senza che faccia uopo dimostrarvelo compiutamente. Onde tal principio l'è un vero assioma.

PROP. I. TEOR.

§. 9. Se un corpo equabilmente si conduca pel sentiero ABD; gli spazj AB, BD, che vi descrive, saran come i tempi impiegati a descriverli.

Fig. I.
n. I.

DIM. Qui si possono verificar due casi: primamente che gli spazj AB, e BD sieno commensurabili, loro servendo per comune misura la linea finita N: e poi che nol sieno.

CAS. I. Rappresenti la retta M quel tempo, che il mobile ne impiega a percorrere la parte N del suo cammino: indi si prendano le due rette PS, ed SR tali, che stia $PS : M :: AB : N$, ed $M : SR :: N : BD$; sarà *ex equo* $PS : SR :: AB : BD$. E perchè le due grandezze M ed N sono aliquote simili delle altre due PS ed AB; siccome la retta M dinota il tempo, in che lo spazio N si è dal mobile descritto, così l' altra PS (4) dovrà puranche

A 2

di-

(a) Not. §. 7.

dinotare quel tempo, che vi si richiede a percorrere lo spazio AB. In simil guisa può concludersi, che la retta SR esprima il tempo per BD: dunque essendosi dianzi mostrato, che gli spazj AB, e BD sieno proporzionali alle rette PS, ed SR; essi saran come i tempi, ne' quali dal mobile si son percorsi.

CAS. II. Sieno in secondo luogo incommensurabili gli spazj AB, e BD, e dinotino le medesime rette PS, SR i tempi, ne' quali son essi equabilmente percorsi: dico esser ben anche $AB : BD :: PS : SR$. Imperocchè, se ciò non sia vero, suppongasi primieramente, che la ragione degli spazj sia minore di quella de' tempi: sarà PS ad SR come AB ad un' altra BT minore di BD. E quindi se prendasi un' aliquota di AB, che sia minore di TD, e tolga si dall' altra BD quante volte si possa, rimarrà finalmente fD minore di TD, e Bf commensurabile ad AB. E poichè Bf è maggiore di BT, la ragione di AB a Bf sarà minore di quella di AB a BT, e perciò minore dell' altra di PS ad SR, che le si è supposta uguale. Dunque starà AB a Bf come PS ad un' altra retta SQ maggiore di SR. Or poichè i due spazj AB, e Bf si sono mostrati commensurabili, e dalla supposizione SP dinota il tempo per AB, dovrà l' altra SQ dinotare il tempo per Bf (a). Per la

(a) Cas. *præc.*

la qual cosa, essendo SR il tempo per BD, ed SQ il tempo per Bf, ci vorrà più tempo a percorrerne equabilmente uno spazio minore, che un' altro maggiore. Locchè è assurdo (3).

Che se suppongasi la ragione di AB a BD maggiore di quella di PS ad SR; sarà invertendo BD ad AB in minor ragione di SR a PS. La qual cosa mostrerassi assurda, come quì sopra. Dunque gli spazj percorsi da un corpo, che equabilmente si muove, sono sempre come i tempi, in che quelli si percorrono. *Che Bisognava Dimostrare (a).*

§. 10. COR. I. Essendosi mostrato, che stia $AB : BD :: PS : SR$, sarà componendo $AD : BD :: PR : SR$.

§. 11. COR. II. Quindi, se due o più corpi, che si muovono equabilmente, abbiano pur anche

A 3 le

(a) Alcuni Meccanici si son contentati di dimostrare questo Teorema nel solo caso, che gli spazj descritti da' corpi sieno commensurabili. Altri più accurati, come il Galilei, l' Ab. Grandi, Maclaurin, Keil, &c. volendo adeguatamente rilevare la proporzionalità degli spazj coi tempi si son prevaluti del *criterio degli Equimultipli*: e l' Sig. d' Alembert nella sua Dinamica si è servito delle proprietà del Triangolo per conchiuderne lo stesso assunto. Ma la presente dimostrazione sebben rigorosa, e compiuta, non si è ordita col criterio degli Equimultipli, nè dalle proprietà del triangolo si è derivata; ma sola dalla natura del moto equabile, e dalle proprietà di due ragioni uguali.

le loro velocità uguali; gli spazj da essi descritti saranno nella ragione de' tempi decorsi nel descriverli.

PROP. II. TEOR.

Fig. 1. §. 12. Muovansi equabilmente i due corpi A, e B
n. 2. ne' tempi P, ed R, e colle velocità M, ed N;
la ragione degli spazj corsi sarà composta
da quella de' tempi, e da quell'altra
delle velocità.

DIM. Si concepisca un terzo corpo C muoversi equabilmente colla velocità M del primo di que' due corpi, e nel tempo R del secondo; sarà (11) lo spazio descritto dal corpo A a quello, che C ne percorre, siccome P ad R. Ma lo spazio descritto dal corpo C sta allo spazio descritto dal corpo B come la velocità M all'altra N (8). Dunque (a) sarà lo spazio percorso dal corpo A a quello, che da B si percorre, in ragion composta del tempo P al tempo R, e della velocità M all'altra N. C. B. D.

Fig. 1. §. 13. COR. I. Quindi se le basi M, ed N
n. 3. de' rettangoli X, e Z dinotino le velocità, con cui equabilmente si muovono i corpi A, e B, e le loro altezze P, ed R esprimano i tempi, ne' quali i medesimi si sono mossi; l'aja del

(a) Prenoz. I.

rettangolo X a quella del rettangolo Z starà come lo spazio corso dal corpo A a quello, che B ne percorre. Imperocchè essendo i rettangoli X, e Z in ragion composta delle loro basi M, ed N, e delle loro altezze P, ed R, saran pure in ragion composta delle velocità, e de' tempi, che da quelle, e da queste sono rispettivamente rappresentate; e quindi per la prop. pres., come gli spazj percorsi dai medesimi corpi A, e B.

§. 14. COR. II. Dunque tutti que' rapporti, che hanno due rettangoli rispetto alle loro altezze, ed alle basi su cui poggiano, potranno adattarsi agli spazj rispetto ai tempi, ed alle velocità, ond'essi equabilmente ne son percorsi. Cioè

1. Due spazj equabilmente descritti saranno tra se uguali, qualora i tempi, e le velocità sieno rispettivamente uguali fra loro.

2. O quando le velocità sieno inversamente come i tempi.

3. E le velocità sono inversamente come i tempi, se gli spazj equabilmente percorsi sien tra se uguali.

4. Le velocità di due corpi, che muovonsi equabilmente, saranno tra se uguali, se gli spazj serbino la ragion de' tempi.

5. E se gli spazj sieno come le velocità, i tempi saranno tra se uguali.

PROP. III. TEOR.

§. 15. *Poste le melesime cose della proposizione precedente, la ragione delle velocità è composta dalla diretta ragione degli spazj corsi, e dalla inversa de' tempi. Ed i tempi sono direttamente come gli spazj, ed inversamente come le velocità.*

La dimostrazione di questo Teorema dipende dalla sola Prenozione IV. tanto nella I. Parte, che nella II.

§. 16. SCOL. Ma prima, ch'io ne discenda alla speculazione de' moti variabili, mi è paruto convenevole avvertire, che la velocità, onde equabilmente si muove un corpo, lo spazio, ch'ei percorre in qualche tempo, e questo stesso tempo (le quali cose principalmente discernonsi in tal moto) sono sì strettamente tra lor connesse, che sempre una di esse può agevolmente dalle altre due rinvenirsi. In fatti, se la velocità di un corpo mosso equabilmente sia 4, cioè atta a fargli percorrere, per esempio 4 passi in un secondo, e 'l tempo del suo cammino sia 10"; lo spazio percorso in questo tempo sarà di 40 passi, prodotto della velocità 4 nel tempo 10". E se lo spazio di 40 passi sia descritto equabilmente in 10", la velocità del moto sarà 4, quoto, che nasce dividendo 40 per 10. E finalmente se i medesimi 40 passi sieno descritti

ti colla velocità 4; il tempo, in che il mobile gli ha equabilmente percorsi, sarà 10, quoto, che nasce dividendo 40 per 4. (a)

CA-

(a) *Nota.* Il tempo assoluto, ch'è la durazion delle cose, di per se finisce continuamente senza punto accelerarsi, ritardarsi, o intermetterli in verun modo. Dunque il solo moto equabile è analogo al suo progresso, ed atto a misurarne il rapporto delle sue parti. Or tutti gli abitanti del nostro globo avendo adottato il moto del Sole per la misura del tempo, si sono mirabilmente accordati nel prendere per unità delle grandezze successive quel tempo, che passa tra due prossime culminazioni di questo stesso luminare, vale a dire un giorno naturale. E quindi le settimane, i mesi, gli anni, i secoli, &c. non sono, che tanti multipli di cotesta unità del tempo, e di essa ne sono summultipli le ore, i minuti, i secondi, &c. E poichè per l'obliquità dell'Eclittica, e per la dilei eccentricità i giorni naturali non sono tra se uguali, come il dovrebbero essere a tal uopo; affin di agguagliarli fra loro, hanno gli Astronomi escogitato un giorno medio, e l'equazione di tempo: del che si ragiona nell'Astronomia. Ma intanto per gli usi civili l'unità delle grandezze successive non è che il giorno naturale: e per gli usi Meccanici si suol prendere per unità il *minuto secondo*, cioè la parte 3600ma di un'ora del giorno solare medio.

Di più la velocità di un corpo suol disegnarsi per lo spazio corso equabilmente in un secondo.

Finalmente se lo spazio percorso da un corpo equabilmente si chiami s , u la velocità, e t il tempo: si dovranno sempre verificare queste 3. equazioni I°. $s = ut$, II°. $u = \frac{s}{t}$, III°. $t = \frac{s}{u}$.

C A P. II.

TEORIA GENERALE DEL MOTO
VARIABILE.

Fig. 2.
n. 2.

§. 17. **Q**uantunque io non abbia sin qui esaminato, nemmen di leggieri, le cagioni, e le leggi; onde ne' moti variabili la velocità del mobile continuamente si accresca, o si scemi; pure dovrà prendersi come postulato, che in tali moti l'acquisto di velocità, o la perdita; che ne fa il mobile alla fine di un tempo finito, o dopo averne percorso uno spazio finito; non debba essere, che di una magnitudine ancor finita. Dunque se le parti AM ; AN ; AB , ec. della retta ABX indefinita verso X dinotino i tempi; da che si è fatto muovere un corpo; e le perpendicolari MP ; NQ ; BD , ec. su di essa eccitate da' punti M , N ; B , ec. rappresentino le velocità, ond'egli n'è affetto alla fine de' mentovati tempi; la linea, che passa pe' punti P , Q , D , ec. o sarà una retta inclinata alla BA , o pure una curva di continua curvatura. Similmente se dal punto A incominci a muoversi un corpo per la retta AX , e le perpendicolari MP , NQ , BD , ec. elevate su di essa da' punti M , N , B , ec. esprimano le velocità, con cui il mobile ai luoghi M , N , B , ec. ne per-

perviene; la serie de' punti P , Q , D , ec. dovrà giacersi in una retta, o in una curva di continua curvatura.

§. 18. DEFIN. V. La figura $CAPQ$, le di cui ascisse AB , AC , ec. dinotano i tempi, da Fig. 2. che un corpo si è incominciato a muovere, e ^{n. 1.} le corrispondenti ordinate BR , CQ , ec. segnano le velocità, ond'egli n'è affetto alla fine di essi, suol chiamarsi *Piano delle velocità del mobile*. (a)

§. 19. DEFIN. VI. La figura ABC si dice *Scala delle velocità di un mobile*, se le sue ascisse Fig. 3. AD , AB , ec. sieno gli spazj dal corpo descritti dal principio del moto; e le corrispondenti ordinate DG , BC , ec. dinotino le velocità, colle quali lo stesso corpo n'è pervenuto ai luoghi D , B , ec.

§. 20. DEFIN. VII. E si dirà *scala de' tempi* quell'altra curva ASB , ove le ascisse AD , Fig. 4. AB , ec. sieno gli spazj percorsi da un corpo, da che si è incominciato a muovere, e le corrispondenti ordinate PD , SB , ec. dinotino i tempi decorsi nel descriverli.

PROP.

(a) Il primo, che usò i *Piani delle velocità*, fu il nostro acutissimo Geometra Gio: Alfonso Borelli *de vi percuss. cap. 20. e Prop. 78.*

PROP. IV. TEOR.

§. 21. *Comunque si muova un corpo, può sempre concepirsi ch' egli trascorra equabilmente uno spazietto infinitamente piccolo. O che il suo moto sia equabile in un tempo infinitesimo.*

Fig. 3. PART. I. La curva A G C rappresenti la scala delle velocità di un corpo, che dal luogo A cominciando il suo moto ne progredisca per la A X: e la retticciuola D d dinoti uno spazietto infinitesimo ovunque descritto dallo stesso mobile. Egli è chiaro (17) che le ordinate D G, d g distese alla curva pe' punti D, e d debban essere a un dipresso fra di loro uguali. Dunque il moto per D d sarà equabile (7). C. B. D.

PART. II. Nello stesso modo può guidarsi la dimostrazione per la II. Part. (a)

PROP.

(a) Se un qualche spazio descritto dal mobile si dica s , il tempo, in ch'ei si descrive, si chiami t , ed u la velocità finale; lo spazietto ds potrà averfi come descritto equabilmente colla velocità u nel tempuscolo dt .

Dunque (15) sarà sempre nel moto variabile $\frac{ds}{dt} = u$. E perchè nel moto equabile la velocità è costante, per esempio uguale ad a , sarà nel moto equabile $\frac{ds}{dt} = a$, e $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$: cioè rendendo omogenea questa espressione potrà rilevarsi, che il moto sarà equabile, se si avveri che sia $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$.

PROP. V. PROBL.

§. 22. *Data la legge, onde varia la velocità di un mobile riguardo al tempo, da che si è incominciato a muovere, e concesse le quadrature de' Curvilinei, determinare i rapporti degli spazj coi tempi, e colle velocità corrispondenti.*

COSTR. Si descriva la curva A C Q P, che Fig. 2. sia il piano delle velocità del mobile, ove AB, AD, A C, ec. dinotino i tempi scorsi dal principio del moto, e le perpendicolari BR, DE, CQ, ec. esprimano le velocità dallo stesso mobile acquistate alla fine di que' tempi. Io dico, che gli spazj descritti ne' tempi A C, A B sien proporzionali alle aje mistilinee A C Q P, A B R P, e che concessa la quadratura di queste ne resti determinato il rapporto, degli spazj ai tempi, o alle velocità finali, qual si addimandava.

DIM. Si prendano le due particelle A d, B D infinitesime rispetto ad A B, e B C, ed a queste proporzionali: e poi dalle medesime A B, e B C se ne tolgan delle altre d f, f n, ec. D F, F H, ec. rispettivamente uguali alle prime A d, B D. E poichè ne' due tempuscoli A d, B D il corpo può concepirsi mosso equabilmente colle velocità A P, B R (21); gli spazietti, ch' egli vi descrive, saran come i rettangoli di d A in A P, e di D B in B R (13). Similmente negli altri due tempuscoli d f, e D F gli spazj descritti dallo stesso mobile

bile saran proporzionali ai rettangoli di df in de , e di DE in DE , e così in appresso. Ma son pure gli spazj descritti ne' tempi Ad , df , fn , ec. colle velocità AP , de , fg , ec. come i rettangoli di dA in AP , di fd in de , di nf in fg , ec. Dunque in forza della Prenoz. VI. saranno tutti quegli spazietti, che il mobile percorre nel tempo AB , agli altrettanti descritti nel tempo BC , come la somma de' rettangoli dAP , fde , nfg , ec. all' aggregato degli altri DBR , FDE , HFG , ec. cioè prendendo le grandezze equivalenti ai termini di questa analogia, sarà lo spazio descritto dal mobile nel tempo AB a quello, ch' egli descrive nel tempo BC , come (a) l' aja $ABRP$ all'altra $CBRQ$. Dunque (b) gli spazj descritti ne' tempi AC , ed AB saran come le aje $ACQP$, $ABRP$. C. B. D.

Fig. 2. §. 23. COR. Se nel principio del moto la
n. 2. velocità del mobile sia zero, come lo è ne' gravi, che si lascian cadere dalla quiete; la curva APD dovrà incontrare nel punto A il suo asse. Dunque

1. Gli spazj descritti dal mobile ne' tempi AM , AN , AB presi dal principio del moto saranno come i trilinei AMP , ANQ , ABD .

2. Gli spazj descritti ne' tempi successivi AM , MN , NB saran come le aje AMP , $MNQP$, $NBDQ$.

(a) Pren. VIII. (b) Invert. e Compon. 3. E

3. E lo spazio descritto nel tempo AB con questa legge di accelerazione starà a quello, che nello stesso tempo si percorrerebbe da un' altro corpo equabilmente, e colla BD velocità finale di quello, come il trilineo ABD al rettangolo di AB in BD .

§. 24. SCOL. I. Perchè la dimostrazione di questo Problema, come ogni altra, che l'è affine, alle leggi si astringa di una Sintesi rigorosa, non si vuol semplicemente dividere la AB in parti uguali, ed infinitesime, e lo stesso poi fare della BC ; ma si esige, che
Fig. 2.
n. 1.
„ ciascuna di quelle a ciascuna di questa stia
„ come la AB alla BC ; affinchè le medesime
„ AB , e BC restino in ugual numero di partecelle eziandio ripartite. Dopo di ciò si distenda il filo della dimostrazione, in sin che
„ si rilevino quattro serie tali, che i primi
„ loro termini sieno tra se proporzionali, e l'
„ sieno ancora i secondi, i terzi, ec. all' infinito. Ma ciò non basta, come si è avvertito
„ nella pren. V., per concluderne la proporzionalità di esse serie: conviene altresì dimostrare, che le grandezze della prima serie sieno proporzionali a quelle della terza, o quelle della seconda proporzionali alle altre della quarta. La qual condizione se in appresso io tralascio di verificare, non è già che la stimi ridondante; ma vo' solamente isgravar le dimostrazioni di ciò, che il vostro intendimento può supplirlo di leggieri.

§. 25.

§. 25. SOL. II. Da ciò che si è recato nella Proposizione V. io m'immagino, che avrete compreso non potersi adeguatamente risolvere questo Problema Meccanico, se non si concedano le quadrature de' Curvilinei (a). Conciosiachè niente gioverebbe esibire gli spazj descritti ne' tempi A C, A B per le aje A C Q P, A B R P, quando ignorata la quadratura di queste in un s'ignori qual ragione abbian esse rispetto alle loro ascisse A C, A B, che ne rappresentano i tempi, o alle ordinate C Q, B R, che le velocità ne dinotano. Ma poichè per mezzo de' nuovi metodi agevolmente or si ottiene la quadratura di una curva dato il rapporto delle di lei coordinate; lo stesso Problema, ed ogni altro somigliante s'intenderà risoluto, sol che vi si riduca. E di qui comprenderete ancora perchè mai nell'enunciazione di esso Problema abbiasi dovuto aggiungere quel dato necessario *concesse le quadrature de' Curvilinei*, e che ne importi cotesta espressione: la quale se mai si ometta, dovrà senza meno sottintendersi. Ma ove si tratti di risolvere con dell'analisi lo stesso Problema, i moderni Meccanici senza mica soggettarlo alla Geometria, e senza usar tanti andirivieni, lo riducono immantinente all'integrazione di una *formola ad una*

(a) Il Cavalier Nevvton ne' Problemi del I. Libro de' suoi Princ. Mat. vi aggiunge questo dato, ma poi l'omette verso la fine del I., e nel II. Libro.

una variabile, che ad infiniti casi speditamente può adattarsi (a).

§. 26. ESEMPL. Ma per chiarirvi con qualch' esempio ciò che vi si è generalmente recato, supponete che la velocità di un mobile cresca come il tempo da ch' ei si è mosso. In questa legge di accelerazione (che, come quaggiù l'intenderete, si conviene a' gravi lascitisi cader verticalmente dalla quiete) saranno le ascisse A M, A N, A B, che i tempi ne dinotano, come le corrispondenti ordinate M P, N Q, B D, che le velocità del mobile n'esprimono. Dunque i punti P, Q, D ec. dovranno cascar tutti in una retta, che per A si conduce: e gli spazj descritti dal mobile ne' tempi A M, A N, A B, essendo analoghi ai triangoli simili A M P, A N Q, A B D, saranno al pari di questi in duplicata ragione de' lati omologhi A M, A N, A B, o degli altri M P, N Q, B D.

§. 27. E perciò se le velocità di un mobile seguano la ragione de' tempi, da ch' egli si è mosso, gli spazj descritti dal principio del moto saranno tra loro, come i quadrati de' tempi, o delle velocità finali.

Tom. I.

B

§. 28.

(a) Se il tempo A B si dinoti per s , e la velocità B R per u , o per T , (che sia una funzione di t), farà l'aja curvilinea A B R P, come si rileva dai metodi delle quadrature, uguale a $\int u dt$, cioè a $\int T dt$.

Fig. 2.
n. 1.

§. 28. Di più prendendosi le parti uguali AM , MN , NB , ec. nella retta AB , ed ordinate le rette MP , NQ , BD , ec. ne risulta il trapezio $MNPQ$ triplo del triangolo AMP ; il trapezio $NBDQ$ quintuplo dello stesso triangolo AMP , e così gli altri in appresso settuplo, noncuplo ec. dello stesso triangolo. Dunque nella medesima ipotesi di accelerazione gli spazj descritti in tempi uguali, che successivamente si computino dal principio del moto, crescono come i numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9. ec.

§. 29. Finalmente essendo il triangolo ABD , metà del rettangolo di AB in BD , dovrà in questa legge di accelerazione anche verificarsi, che uno spazio descritto dal principio del moto sia metà di quello, che un corpo movendosi equabilmente colla velocità finale descriverebbe nello stesso tempo.

PROP. VI. PROBL.

§. 30. *Data la Legge, con cui varia la velocità di un mobile riguardo agli spazj percorsi, e concesse le quadrature delle figure curvilinee, ritrovar la ragione de' tempi ai medesimi spazj.*

Fig. 3. **Costr.** Muovasi il corpo A nella retta AB , ed ogni perpendicolare DG , che le si erige, dinoti quella velocità, ond' egli n' è affetto nel luogo D ; e sieno gli estremi di coteste rette

rette allogati nella curva continua AGC . Ciò supposto

I. Si distenda BA verso H , e per A si meni AR parallela a DG : e poi cogli asintoti rettangoli AH , AR , e con qualunque potenza, si descriva l'iperbole conica TS (a). II. Si tiri per G la retta GT parallela ad AB , che incontri la medesima iperbole in T . III. Si distenda GD in N , sicchè DN pareggi la retta VT , che resta fra l'iperbole TS , e l'asintoto AR . E ciò sempre facendosi, si formi l'altra curva ENM . Io dico, che il tempo impiegatosi dal mobile a percorrere AD a quell'altro, in che percorre AB , stia come l'aja curvilinea $ADNEQ$ all'altra $ABMEQ$.

Dim. Si prendano dalle rette AD , AB due aliquote simili Dd , Bb , che sieno infinite-sime rispetto ad esse: e le medesime AD , AB s'intendano divise in parti rispettivamente uguali alle Dd , e Bb . E poichè gli spazietti Dd , e Bb son percorsi equabilmente colle velocità DG , e BC (21), sarà (15) il tempo per Dd al tempo per Bb , come Dd a Bb , e come BC a DG . Ma BC , e DG avvegnachè uguali alle rette AR , AV sono (b) come VT ed RS , o come DN ed MB , che dalla costruzione quelle ne uguagliano. Dun-

B 2 que

(a) Prop. V. Lib. IV. de' Conici illust. dal Giannattasio.

(b) Cor. 2. Prop. 20. Lib. III. Conic. del Giann.

que il tempo per Dd starà al tempo per Bb, come Dd a Bb, e come DN a BM, cioè come il rettangolo di Dd in DN al rettangolo di Bb in BM. Qual cosa potendosi sempre dimostrare, sarà (a) il tempo per AD al tempo per AB come l'aja ADNEQ all'altra ABMNEQ (b). C. B. D.

§. 31. COR. I. Essendo il tempo per AB al tempo per AD come l'aja ABMNE all'altra ADNEQ; sarà dividendo il tempo per BD al tempo per AD, come l'aja BDNM all'altra ADNEQ.

§. 32. COR. II. Due corpi descriveranno in tempi uguali gli spazj AB, AD, se le loro velocità ne' punti corrispondenti (c) di queste linee sien sempre, come le lunghezze AB, AD de' medesimi spazj. Imperocchè (supposti i prelim. della prec. prop.) il tempo per Bb sta a quello per Dd, come Bb a Dd, e come AD ad AB (15), cioè in ragione di uguaglianza. E lo stesso dimostrandosi riguardo agli altri elementi de-

(a) *Prepoz. VI. ed VIII. e §. 24.*

(b) Lo spazjo AB si dica s , e la velocità, onde il mobile in B ne perviene, si dinoti per u , o per S funzione di s , sarà il tempo per AB uguale a $\int \frac{ds}{u}$, ovvero a $\int \frac{ds}{S}$.

(c) Cioè que' punti, ove le medesime linee AB, AD son divise proporzionalmente.

degli spazj AB, AD, saranno essi spazj contemporaneamente descritti.

§. 33. COR. III. Il tempo, che v' impiegherebbe un mobile a correr lo spazietto Dd colla velocità BC, sta a quello, che vi porrebbe un'altro a descriverlo colla velocità DG, come DG a BC (a), cioè (b) come BM, o la sua uguale DO a DN (intendendosi per M condotta la retta ML parallela ad AX); val quanto dire come il rettangolo Dd o O all'altro DdnN. Ed in simil guisa dimostrandosi, che i tempi, ne' quali i medesimi corpi descrivono qualunque altro spazietto dr, uno colla velocità BC, l'altro colla velocità dg, sieno fra loro come i rettangoli rdo, ed rdn; sarà (c) il tempo, onde colla velocità BC descrivesi equabilmente lo spazjo AB a quello, che ci vuole a descriverlo con moto variabile, di cui la scala della velocità n'è la curva AGC, come il rettangolo ABML all'aja mistilinea ABMEQ.

§. 34. COR. IV. Dalla dimostrazione di questo Problema comprendesi, che le DN, e BM ordinate nella curva de' tempi sieno nella ragione inversa delle DG, e BC corrispondenti ordinate della scala delle velocità. Dunque se la linea AGC sia una retta, sicchè DG, e BC diventino proporzionali ad AD, ed AB;

B 3

le

(a) §. 14. n. 2. e §. 21.

(b) *Costruz. di questo Probl.*

(c) *Prez. VI. ed VIII.*

le medesime DN, ed MB saranno inversamente come le ascisse AD, ed AB: e quindi sarà un' Iperbole conica la curva de' tempi MNE (a).

§. 35. SCOL. La curva ENM, come rilevasi dalla costruzione di questo Problema, ha per asintoti le due rette AQ ed AX. E sebbene le sue ordinate DN, BM, ec. sempre pareggino le corrispondenti ordinate VT, RS, ec. dell' Iperbole conica TS; ella non per tanto non sarà un' Iperbole conica, se la linea AGC non sia una retta.

§. 36. ESEMP. Siano gli spazj AD, AB corsi dal mobile dal principio del moto in duplicata ragione delle velocità finali DG, BC; sarà la curva AGC una parabola conica (b): e poichè sta $AD:AB::DG^2:BC^2::AV^2:AR^2$, ed è (per la natura dell' Iperbole TS) $AV^2:AR^2::RS^2:VT^2::BM^2:DN^2$, sarà $AD:AB::BM^2:DN^2$. Dunque la curva NM sarà un' Iperbole cubica, i dieui spazj asintotici ADNEQ, ABMEQ (c) sono in sudduplicata ragione di AD, e di AB. Dunque se le velocità di un mobile sieno in sudduplicata ragione degli spazj percorsi, i tempi impiegati a trascorrerli saran puranche in sudduplicata ragione de' medesimi spazj, o come le velocità finali.

PROP.

- (a) Cor. 2. Prop. 20. Lib. 1. Conic. di Giann.
(b) Cor. 2. Prop. 1. Lib. 4. Con. Giann.
(c) Ptenoz. X.

PROP. VII. PROBL.

§. 37. Data la Scala de' tempi ABS, costruire Fig. 4. quella delle Velocità.

COST. I. Si tiri ad un qualunque punto P nel perimetro della Scala de' tempi la tangente PF, che incontri l'asse prolungato in F. II. Si faccia come PD ordinata a DF sottangente (qual ragione conoscesi dall' indole nota della scala de' tempi), così la retta X, che dinoti un minuto secondo ad una quarta DG, che perpendicolarmente dal punto D erigasi su di DF; dico, che il punto G, come ogni altro, il qual si rinvenga in simil guisa, debba cascarne nella scala AC delle velocità.

DIM. Si prendano i due spazietti Dd, Bb infinitesimi, ed uguali; ed ordinata BC nella AGC scala delle velocità del mobile, si ordinino dp, BS, bs in quella de' tempi: e poi si tirino PQ, SR parallele ad AB. E poichè la ragione di PD a DF è per costruzione uguale a quella di X a DG, ed ella è puranche uguale all'altra di pQ a QP (essendo tra se simili i due triangoli pQP, PDF), sarà $X:DG::pQ:QP$; ed invertendo $DG:X::QP:pQ$. Per simil modo dimostrandosi, che stia X a BC come sR ad RS, sarà per uguaglianza perturbata $DG:BC::sR:pQ$: imperocchè le due rette PQ, SR come uguali a Dd, e Bb, sono uguali fra loro. Dunque le due or-

B 4 dina-

dinate DG , BC essendo inversamente come pQ , ed sR , cioè inversamente come i tempi, ne quali equabilmente percorronsi i due spazietti uguali Dd , Bb , saranno come le velocità, che accompagnano il mobile ne' luoghi D , e B . E quindi potendosi ciò sempre dimostrare, la curva AGG (19) sarà la scala delle velocità. $C. B. D.$

§. 38. COR. I. Che se gli spazj sieno come i tempi, la curva APS diverrà una retta, che nel punto A inclinasi ad AB . Dunque sarà costante la ragione di pQ a PQ , e quindi ancora la sua uguale di X a DG . Ma la grandezza X è costante: dunque tale sarà pure la DG , ed ogni altra ordinata dalla scala delle velocità.

§. 39. COR. II. Dunque se un corpo cammini con tal legge, che i tempi sieno come gli spazj, il suo moto non può essere, che equabile.

C A P. III.

DELLE FORZE.

§. 40. **L'** Aggregato delle forze, che negli elementi della materia innestò Natura, è l'anima, che informa l'immensa mole dell' Universo, e la ravviva. Dunque l'inten-

tenderle non è mica uno studio vano, o biasimevole, ma il vero modo di saggiar le leggi dell' Universo, e l' profondo sapere di chi lo regge, e sostiene. Ma che sian mai coteste forze, e comeempiendo ciascun corpo fra lor si stringano, non è dato a' Mortali saperlo in verun modo: e sol ci si concede poterne spiare alcune di loro relazioni, da cui attingendone i principj della Meccanica, e della Statica ne deriviamo le Teorie di queste Scienze.

§. 41. Tra le diverse forze, che si ritrovano entro a' corpi, ve ne ha una sola, che può intendersi, e rimettersi, e che sovente si transfonde in altri: laddove le rimanenti quivi ne reggon sì forte, che lungi dal potersi in altri corpi trapiantare, ritengono sempre un' invariabil vigore, ed energia. Quella, di che intendo qui primieramente ragionarvi, può dirsi forza motrice, e le altre poi saranno quaggiù co' proprj nomi, e colle qualità loro distinte.

§. 42. Quantunque noi tuttoggiorno muoviamo alcuni corpi, ed altri da tante altre cagioni veggiamo ancor mossi; pure nè sì frequente sperienza, nè qualunque speculazione che vi si faccia, vale a chiarirne la natura di quel principio attivo, che intrudesi in essi, e 'l modo, onde quivi ne agisce. E quel che più ne duole, in tutte le attrazioni, e gravitazioni de' corpi, oltre a queste cose, che del

del pari ignoriamo, ci rimangono eziandio ascose le cagioni moventi, e le loro sedi. Dunque la comunicazione del moto, la composizione delle forze, la loro diffusione pe' solidi, e pe' fluidi, il rinvigorirsi e l'allentarsi, cui le scorgiam soggette, saran sempre pe' Filosofi, non che pel volgo ignaro altrettanti arcani: nè loro sarà permesso conoscer le forze motrici, che per *gli effetti prodotti ne' corpi mossi, per le cagioni da cui esse ne provengono, e per un certo modo, onde transfondonsi ne' corpi.* Quali cose m'ingegnerò dilucidarle, prima di esibirvi le Teorie di queste forze.

§. 43. La forza motrice (a), che si ritrova in un corpo, purchè non resti elisa da straniera ca-

(a) Quelle, che dal Borelli chiamavansi *Forze motive*, e che non pochi de' Moderni soglion dirle *Forze de' Corpi in moto*, quì son chiamate *Forze motrici*, come son dette dal Papino, e dal Leibnitz negli *Atti di Lips.* 1691 e dal Sig. Jürin nelle *Transaz. Angl.* an. 1741. e da altri. Esse da straniere cagioni sempre he derivano: son soggette ad accrescersi, a diminuirsi, e ad estinguerfi: sovente si transfondono ad altri corpi: e la di loro quantità può ancora adeguatamente misurarsi. Dunque non si divierà considerarle come cose inerenti a' corpi mossi, trasmessevi da cagioni esterne, e quivì dall'inerzia conservate. Che anzi con un' espressione improntaraci da' fluidi, ed assai proporzionata all' intelligenza de' Giovani, può dirsi, che *le forze motrici riempiano i corpi mossi, e che le potenze sien di loro come sorgenti.* Ma conveniva distinguere le potenze dalle forze motrici, perchè le prime hanno differenti nature, come vedesi chiaramente dalle loro specie esibite nel §. 44, mentre le forze motrici son tutte

cagione, lo spinge ben tosto al moto, comparandogli un grado di velocità proporzionale alla sua energia. Dunque dovrà aversi, come un'Assioma, *che la velocità di un mobile sol ne provenga dalla forza motrice che lo riempie, e che quella a questa debba esser sempre proporzionale.*

§. 44. Le potenze moventi son poi quelle cagioni, che trasmettono a' corpi le forze motrici. Tali sono le forze muscolari degli animali, l'elasticità di certi solidi, e di certi fluidi, la forza di gravità, e di diverse altre attrazioni, la forza elettrica, l'impeto di un corpo mosso, la forza dell'acqua profluente, quelle dell'aria, de' vapori, del fuoco ec. ed in sin la Mano del Vivente Iddio, onde proiettò un tempo i Pianeti, e le Comete, ed ognor ne rifocilla i loro moti presso a languire, l'è ancor essa una potenza movente. Che copia di potenze non è nel Mondo! e qual divario non v'ha tra esse! E pure han saputo i Meccanici riporle tutte in due soli generi indicativi nel §. che segue.

§. 45.

tutte simili fra loro. Sebbene volendosi considerarle le potenze pel solo valore, che hanno di muovere i corpi, si possano tutte riguardare come omogenee, e talora alle forze motrici pareggiarsi. Finalmente vuolsi qui avvertire, che la natura di queste forze n'è interamente ignota al nostro intendimento, ma che poi la loro esistenza dal moto de' corpi si rileva, e dal riflettervi, che la materia sia del pari indifferente alla quiete, ed al moto, o che il moto ne' corpi non sia, che contingente.

§. 45. Ogni potenza, che muove un corpo, o gli transfonde in un'istante qualche forza finita senza spingerlo di vantaggio; o pur recandogli delle continue spinte vi genera una consimil forza dopo esserne decorso un tempo finito. E quindi volendosi distinguere questi due supremi generi di potenze, quelle del primo genere si son dette *Forze d'urto*, e *Pressioni* quelle del secondo: o piuttosto le prime converrà chiamarle *Forze Spingenti*, o *Impellenti*, o *Forze istantanee*, e *Forze continue* le altre. Immaginatevi, che un martello percuotendo gagliardamente un corpo duro lo guidi al moto; non sarà egli vero, che nel solo momento della percossa (a) abbiassi questo corpo acquistata l'intera forza-

(a) Il Gran Galilei, il Torricelli, il Borelli, ed altri opinarono, che la forza della percossa sia infinita rispetto alla forza della gravità. In fatti dicea il Galilei, percuotete sopra di un chiodo da ficcarsi in un durissimo legno, ovvero sopra un palo, che debba penetrar dentro in terreno ben fisso; vedrete per la sola virtù della percossa spingerli, e l'uno, e l'altro avanti, onde senza quella mettendoli sopra il martello, non solo non si muoverà, ma nè meno, quando anco vi fosse appoggiato un peso molte, e molte volte dell'istesso martello più grave. Ma i Leibniziani usi a misurar la prima forza dal quadrato della velocità nella massa del mobile, e l'altra dalla semplice velocità nella stessa massa, credettero eterogenee coteste forze, per appunto come l'è una superficie rispetto ad una linea. Finalmente il Sommo Eulero in una *dissert. inser. negl. Att. di Berl. 1746. sulla vera misur. della percossa*, sostenne non esser punito eterogenee tali forze; poichè l'urto de' corpi (che se-

forza, onde si muove? E se per avventura egli si trovi in uno spazio, ove niun corpo gli resista, nè forza straniera vi penetri a turbargli il moto, quivi dovrà girne per diritto, ed equabilmente: poichè l'inerzia delle sue parti, qual custode della forza impressagli, il reggerà con una medesima velocità pe' l'entier primitivo, senzachè si richiegga nuova potenza, che quella ne ravvivi, questo ne rad-drizzi (a). Ma ove poi si lasci cadere un grave, continue spinte gli saran recate dalla gravità terrestre, che tutte accogliendosi entro di esso, ne comporranno alla fine di un tempo finito una forza ancor finita.

§. 46. Intanto ogni corpo animato da una forza continua, purchè da estranee cagioni non sia impedito, deesi condurre per un dato spazio in un dato tempo. Dunque l'impression di questa forza potrà supporsi continuata o nella stessa guisa, che gli elementi dello spazio si van descrivendo l'un dopo l'altro, o come ne fluisc-

secondo esso non son mai perfettamente duri) lungi dall'eleguirsi in un'istante, esige un'intervallo di tempo. Ma che che si pensi di questa Teoria di Eulero, e de' calcoli che su vi distende, non si dovrà da ciò rilevare non esservi in Natura potenze materiali o im-materiali, che operino con una sola spinta ne' corpi, cui son esse applicate.

(a) Il Cavalier Nevvton ne' *Princ. Mat. della Filos. Nat.* suol dire *moveatur corpus sola vi insita*, e vuol intendere che cotesto corpo cammini colla sola forza istantanea impressagli da un'eterna cagione.

sce il tempo, in che si muove il corpo. Cioè a dire le spinte, che riceve un corpo da una forza continua o sono tante, quanti ne sono gli elementi dello spazio descritto, o quanti momenti di tempo ne son passati in descriverlo. Delle quali supposizioni sebben la prima sembri del pari concettibile, che la seconda; ella non di meno vi sarà mostrata impossibile nel seguente Teorema,

PROP. VIII. TEOR.

§. 47. *Non si può immaginare veruna forza continua, che ad un corpo arrechi tante spinte, quanti sono gli elementi dello spazio, pei quali lo conduce.*

DIM. CAS. I. Gl' impulsi recati al corpo A da una forza continua, s' è possibile, sien tanti, quanti sono gli elementi dello spazio descritto dallo stesso mobile: e si supponga in I. luogo, che quelli al par di questi sieno tra se uguali. E poichè uguali spinte generano (43) uguali particelle di velocità nello stesso mobile, il numero di queste dovrà ben anche uguagliare il numero de' mentovati elementi. Dunque le intere velocità saran come gli spazj descritti dal mobile dal principio del suo moto.

Fig. 3. Ciò premesso sia AX il sentiero del corpo, che dal punto A ne cominci il suo moto; saranno gli spazj AD, AB come le velocità, onde

onde lo stesso mobile ai luoghi D, e B ne perviene. Dunque la curva de' tempi MNE dovrà essere un' Iperbole conica, come vi fu mostrato nel Coroll. 3. della V. Prop. E quindi il tempo nel quale percorresi dal mobile lo spazio AD a quello per DB starà come l'aja iperbolica ADNEQ all' altra DBMN, cioè come una grandezza infinita (a) ad un'altra finita: vale a dire il corpo A animato da questa potenza dovrà descrivere in un tempo infinito la prima parte AD del suo cammino, ancorchè picciolissima, e v' impiegherà poi un tempo finito a passarne l' altra parte DB, sebben la sia molto grande. Lo che è assurdo.

CAS. II. Non si potendo verificare, che una potenza continua uniforme investendo un corpo vi replichi degl' impulsi come gli elementi dello spazio descritto da esso mobile; non potrà nemmeno avverarsi cotesto sistema di agire, quando la forza continua sia variabile, cioè nel caso, che le spinte variassero di energia. Conciossiachè ogni forza continua variabile non è che uniforme pe' spazietti iniziali: dunque l' assurdo rilevato nel I. Caso, ricaderebbe su di quest' altro. E quindi sarà vero quel che si è proposto. C. B. D.

§. 48. Nel movimento di un corpo, come si è detto, non si discernono, che due sole quantità continue tra lor diverse, cioè il tempo nel

(a) Cor. 4. Prop. 22. Lib. III. Con. Giannat.

nel quale dura il dilui moto , e lo spazio ; ch'egli ne describe . Dunque essendosi qui sopra dimostrato non potersi concepir forza continua , che tante spinte al mobile ne arrechi quanti sono gli elementi dello spazio pe' quali lo conduce ; dovrà concludersi che l' impression di questa forza si continui come il tempo , che ne fluisce : cioè che le spinte sien tante di numero , quanti momenti di tempo si ritrovano nella durata del moto . E quindi , se queste spinte si suppongano di uguali energie e cospiranti , ognuno dovrà inferirne , che la *velocità generata nel corpo debba proporzionarsi al valore di ciascuna spinta , ed al numero di esso , o esserne come il valore di ciascuna spinta , e come il tempo* . Quali cose saran dichiarate nel Capitolo , che segue .

§. 49. Oltre alle forze motrici , delle quali si è qui sopra ragionato , si ritrovano pur anche ne' corpi delle altre forze , che risedendo intimamente , e di continuo ne' loro elementi di materia , non si possono in verun modo a' corpi contigui trapiantare . Dunque son queste da quelle ben diverse : e quel che più reca meraviglia , tra loro eziandio differenti nell' indole , e nel fine , cui son destinate .

§. 50. La prima forza , che anima gli elementi della materia , senza potersi mai affievolire , non che distruggere , è quella che da Greci diceasi *αντιστοιχία* *Antistipia* , e da noi chiamasi *Impenetrabilità* , e talvolta *Solidità* . Per
mez-

mezzo di essa la materia n' è sempre preservata dalla compenetrazione : ed ella poi è sì efficace , e poderosa , che sola varrebbe ad elidere tutte le forze di Natura , ancorchè cospirassero a volerne intromettere una particella di materia nel luogo , ove si giace un'altra . Dunque questa forza era necessaria nell' Universo materiale , perchè quivi si conservasse la medesima quantità di materia , e potessero i corpi da altri ricever moto , o divisione . Or poichè in tal guisa vengon essi dal loro distruggimento preservati ; parmi , che tal forza sia quell'istesso *Principio di conservazione* , onde Iddio Ottimo Massimo li mantiene nel loro essere , e gl'impedisce d'immergersi nel sen del nulla .

§. 51. Scorgesi ben anche nella materia una forza passiva detta dal sagacissimo Keplero *Inerzia* , per mezzo di cui mantensi ne' corpi lo stato di quiete , o di moto rettilineo uniforme , ove per avventura si ritrovino , finchè straniera cagioni non vengano a disturbarli . Così se un corpo stia in quiete , l'inerzia della materia gli serberà questo stato , purchè non venga da esterne cagioni incitato al moto . E se gli s' imprima qualche forza , la medesima inerzia ne conserverà in esso la velocità recatagli da quella , e la direzione iniziale del suo moto , fintantochè cagioni straniera non vengano ad impedir cotesti effetti .

§. 52. Ma l'inerzia non solo impiegasi a
Tom.I. C man-

mantener ne' corpi i loro stati, sian di quiete, sian di moto; ma resiste eziandio ad ogni mutazione di stato, che in essi forza straniera ne vuol indurre: e per questa ragione ella sovente suol chiamarsi *Forza d'inerzia*. Cade a proposito qui ponderare quanto su questa Teoria ha sagacemente avvertito l'immortal Newton *defin. 3. Princip. Matem. Fil. Nat.* „ Exercet vero corpus hanc vim solum „ modo in mutatione status sui per vim aliam „ in se impressam facta: estque exercitium „ ejus sub diverso respectu et resistentia, et „ impetus. Resistentia, quatenus corpus ad „ conservandum suum statum reluctatur vi impressæ. Impetus, quatenus corpus idem, vi „ resistentis obstaculi difficulter cedendo, contra „ natur statum suum mutare.

§. 53. Da queste considerazioni ritraggonsi le 3. famose leggi del moto, che son come assiomi di queste Scienze. Eccole come le ha enunciate l'immortal Newton.

§. 54. LEX. I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

§. 55. LEX. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.*

§. 56. LEX. III. *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem.*

§. 57. Dunque niun corpo di per se vale a can-

cangiarsi quello stato, in che si trova. S'egli è in quiete, vi vuole una causa esteriore, che lo muova. Se l'è in moto, deesi a cagioni esterne attribuire, perchè talora cangi di velocità, o torca dal cammin dritto. E quindi il solo moto equabile rettilineo è *naturale* a' corpi, cioè quello, che per serbarvisi, non ha bisogno di Potenze esteriori. Che anzi, se le Potenze continuamente applicate ad un corpo mosso l'abbandonino di repente, egli dovrà riprendersi il moto equabile rettilineo, continuandolo sin che nuova cagione non lo perturbj.

§. 58. La terza legge, come men chiara delle altre due, fu dal Cavalier Newton con 3. esempi illustrata. Fingasi, ci dice in I. luogo, che un cavallo si tiri dietro un sasso legatoglisi con una fune, e che cammin facendo la spezzi, ovunque ciò ne accada. Osserverete ritirarsi con ugual empito i tratti della fune, l'uno verso il cavallo, l'altro verso la pietra. Dunque tanta è l'azione, che il cavallo esercitava su della pietra, quanto la reazione, che questa gli opponea.

II. S'io percuoto colla mia mano un corpo duro, l'energia della percossa, che gli arreco, è quanto l'impressione, che mi sento nella mano.

III. Qualora un corpo mosso incorre in un altro, quanto moto nel conflitto perdesi da quel-

quello, tanto da questo si acquista.

§. 59. Ma non pertanto questa legge sembra a' Giovanetti incompatibile colla comunicazione del moto, e taluni credonla finanche assurda: conciossiachè, dicon essi, s'è vero, che l'azione esercitata dal corpo A nell' altro B pareggi la reazione, che B ne oppone ad A, come potrà muoversi talun di questi corpi, o tutti e due? come mai potrà progredire il cavallo trascinandosi quella pietra, quando ella sempre il ritiri verso di se con tanta forza, con quanta n'è dal cavallo continuamente investita? Ma cotali difficoltà, ed altre somiglianti non son che ombre gittate nelle loro menti dalle oscure idee di forza, e di azione, che si han formate: e basterà chiarir queste per toglier quelle immantinente. Eccone le vere idee di queste voci. La forza di un corpo mosso, per esempio del corpo A, è quel principio attivo, che lo muove, e che si trasfonde in un' altro, qualora quello in questo ne imbatta. L' Azione del corpo A non è la forza, che lo anima, come credesi falsamente da' Giovanetti. Ella è sì bene la transfusione, o la comunicazione di questa forza ad un' altro B, (che qui suppongasi quiescente): e la reazione del corpo B consiste nel distruggere in A altrettanta forza, quanta ne ha egli dal corpo A ricevuta. O, a dir breve, l'azione del corpo incorrente, e la reazione del quiescente non sono, che le reciproche, ed opposte im-

pressioni, che nel momento dell' urto esse ne risentono, da che la materia di uno non può in quella dell' altro compenetrarsi, e dal voler tutti e due nel proprio stato rimanersi. E sebbene (a) l' umano intendimento non giunga a percepire, nè ad immaginarsi in che modo si perda la forza di un corpo, e da un' altro si riceva: pur non di meno la quantità della forza perduta, e quella della forza acquistata sono i valori delle divise impressioni. Dunque chi non vede come in ogni mutazione di stato, che si cagionino i corpi, sempre l'azione ne pareggi la reazione, e le si opponga?

§. 60. Ma prima di esaminare altre Teorie, qui giova esibirne que' rapporti, che serbano le Potenze rispetto alle masse de' corpi, che investono, ed alle velocità, che vi producono.

C 3

PROP.

(a) La celebre quistione sulla misura delle forze vive un tempo eccitata fra i Newtoniani, ed i seguaci del Leibnitz, e i dispareti, che non ha guari hanno avuto il Pref. de Maupertuis el Caval. d' Arcy sul *Minimo dell' Azione*: la quale, non pur le menti de' Giovani, ma de' Filosofi sovente avviluppa.

PROP. IX. TEOR.

§. 61. Due Potenze P , e p spingendo rispettivamente due corpi uguali, vi debbon produrre due gradi di velocità proporzionali alle loro energie.

DIM. Le forze rispettivamente impresse dalle Potenze P , e p a due corpi uguali sono effetti pieni di esse Potenze: dunque siccome quelle si dimostrarono proporzionali alle velocità de' mentovati corpi (43); così le Potenze P , e p saranno alle medesime velocità proporzionali. C. B. D.

PROP. X. TEOR.

§. 62. Per prodursi da due Potenze spingenti ineguali un'istesso grado di velocità in due disuguali masse, debbon esser quelle in proporzion di queste.

DIM. La Potenza P spingendo un' elemento M di materia gl'imprima un grado di velocità, che si dinoti per V : ei sarà chiaro che un'altra Potenza P' uguale a P abbia a produrvi l'istessa velocità in un' altro elemento M' uguale al primo M . Dunque se s'intendan congiunti i due elementi M , ed M' , sicchè formino un sol corpicciuolo, e che insieme gli spinga una Potenza uguale a $P + P'$, cioè uguale a $2P$; l'aggregato di essi, cioè la mas-

sa

sa $2P$ dovrà girne puranche colla velocità V . Nello stesso modo può concludersi, che colla stessa velocità V si debbano muovere i corpicciuoli $3M$, $4M$, $5M$, ec. qualora gl'investano le Potenze $3P$, $4P$, $5P$ ec. Dunque le masse de' corpi debbon essere proporzionali alle forze spingenti (a), quando da velocità uguali ne sono animati. C. B. D.

PROP. XI. TEOR.

§. 63. Le Potenze P , e p sono fra loro, come le masse de' Corpi M , ed m , che spingono, e come le velocità U , ed u , che vi producono.

DIM. Immaginatevi, che un'altra Potenza π urtando il corpo M' uguale al primo de' divisiati corpi, ne produca le velocità del secondo: sarà (61) $P : \pi :: U : u$, e (62) $\pi : p :: M : m$. Dunque (b) sarà (c) benanche $P : p :: (U : u) (M : m)$. C. B. D.

C 4

§. 64.

(a) Il nostro Borelli scoperse il principio di questa dimostrazione: in fatti egli rilevò nel Cor. della Prop. XI. de vi percuss. questa verità; *duo aequalia corpora aequaliter mota, si conjungantur, duplicatur quidem virtus motiva, remanente tamen velocitate inalterata.*

(b) Prenoz. I.

(c) Quest' ultima espressione dinota che sia P a p in ragion composta di U ad u , e di M ad m .

§. 64. COR. Da questo Teorema si potranno dedurre le seguenti verità.

§. 65. Se due Potenze uguali spingano rispettivamente due disuguali masse; le velocità, che vi generano, sono nell'inversa ragione delle stesse masse.

§. 66. E se le velocità sieno inversamente come le masse, le Potenze spingenti dovranno pareggiarsi.

§. 67. Se Potenze disuguali spingano masse disuguali, le velocità, che vi producono, debbon essere nella diretta ragione delle Potenze, e nell'inversa delle masse.

§. 68. E le masse saranno direttamente come le Potenze, ed inversamente come le loro velocità.

§. 69. Di più se le masse sieno come le Potenze, che le spingono, le velocità in esse generate, saranno tra se uguali.

§. 70. Finalmente la velocità prodotta dalla Potenza P nella massa M sarà dinotata pel quoziente $\frac{P}{M}$.

PROP. XII. TEOR.

§. 71. La Forza d'inerzia in ciascun corpo è come la quantità della materia, ch' egli contiene.

DIM. Le Potenze P , e p spingendo rispettivamente i corpi M , ed m vi producano uno stesso

stesso grado di velocità, qualunque egli si sia; dovranno esser quelle come le masse di questi (62). Ma le forze d'inerzia di diverse masse sono come le Potenze, che spingendole dalla quiete loro impartiscono velocità uguali. Dunque le forze d'inerzia de' corpi M , ed m saranno alle loro masse proporzionali. C. B. D.

§. 72. DEF. VIII. La quantità di moto in un corpo, che va per diritto equabilmente, e che suol dirsi *Momento*, è il prodotto della dilui massa nella velocità. (a)

§. 73.

(a) La definizione del *Momento*, ch'è la seconda di quelle, che il Cavalier Nevvton rapporta ne' Principi Mat. della Filos. Natur. vien espressa ne' seguenti termini: *quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate. Et quantitate materiae conjunctim*. E vuol dinotare il Valentuomo, che la misura de' *Momenti* non sia una grandezza omogenea ad essi, come lo è in tutte le grandezze geometriche, ma un composto di grandezze eterogenee proporzionali a' medesimi momenti. Quelle grandezze che si misurano per altre minori omogenee si dicono *grandezze proprie*, e le altre che si valutano per grandezze eterogenee ad esse proporzionali, *quantità improprie* si domandano. Siccome le prime misure si dicono *vere*, e le altre *vicarie*. Intanto la sì famosa questione sulla misura delle forze m' induce a recarvene un brieve saggio nel §. seguente.

La misura delle *forze vive*, cioè di quelle, che sono inerenti a' corpi mossi, chi non fa in quante guise abbia rivolto de' moderni Geometri il cervello? L' Immortal Nevvton seguendo le orme di alcuni Fisici Italiani, e dopo di lui il Delaguiers, il Mairan, Colin Mac-laurin, Jurin, ed altri si avvilirono doverli le forze de' corpi valutare dalle masse nelle velocità di essi. Laddove il gran

Lei-

§. 73. COR. I. Da questa definizione potrebbersi raccorre ben molte conseguenze: eccone alcune:

1. I momenti di due corpi sono in ragion composta delle loro velocità, e delle masse.
2. Se due corpi vadan per dritto equabilmente, le loro velocità sono direttamente come i momenti, ed inversamente come le masse.
3. E

Leibnitz, e con seco la famiglia de' celebri Bernulli, la numerosa Scuola de' Wolfiani, il Marchese Poleni, Ermano, Ristero, il P. Riccati, ed altri sostenner forte, che la regola Newtoniana sol ne valesse per le pressioni, ch' essi chiamaronle *forze morte*; ma che per misurar le *forze vive*, cioè le *forze de' corpi in moto*, doveasi la massa del mobile nel quadrato della velocità moltiplicare. Su questo assunto d' ambe le parti si fecero varie speculazioni, ed esperienze; e tuttora ne' Volumi delle Reali Accademie di Lipsia, di Parigi, di Berlino, di Pietroburgo, nelle Transazioni Anglicane, ne' Commentari di Bologna, &c. vi leggiamo non poche dissertazioni scritte su questo argomento da' Fautori del Leibnitz, e del Geometra Inglese. Nè vi fu mai letteraria discettazione sostenuta per tanto tempo, e con sì grande impegno da tanti Valentuomini, atti ad escogitar nuove esperienze, a ragionarvi profondamente, e a distendervi calcoli accurati, ed universali, quanto questa di che ragiono. Doveasi dunque (per non combattere alla maniera degli Andabati) fissar quell' effetto delle forze vive, dalla di cui grandezza la loro intensità dovesse sicuramente estimarsi; imperciocchè le forze non si conoscono in loro stesse, ma dagli effetti prodotti esternamente: nè la loro azione può valutarfi, che dagli obici superati. Or chi l'avrebbe creduto! i Newtoniani, ed i seguaci del Leibnitz non si accordaron mai su questo punto. I primi faceano consistere l'intero effetto della forza viva di un corpo

3. E le masse son direttamente come i momenti, ed inversamente come le velocità.
4. Ed essendo uguali le loro masse, i momenti esser deggiono come le velocità de' corpi: e se queste sieno uguali, i medesimi momenti saranno come le velocità de' mobili.
5. I momenti di due corpi mossi equabilmente per dritto saranno uguali, se le masse e le

po nel poter egli rimuovere un' ostacolo di un' istantanea resistenza: mentre i Leibniziani si servivano di ostacoli di continuate resistenze. In fatti il Gran Leibnitz riflettendo, che ogni grave lasciandosi cadere da una qualunque altezza si acquistò tanta forza, con cui sospinto può salirne ad una pari altezza; stabilì che tutto l'effetto di cotesta forza dovea riporsi nel condurre il grave ad una tal salita. Giovanni Bernulli escogitò un sistema di balestre rettilinee in un certo modo tra lor combinate, e dalla tension di queste ne computava la percossa di quel corpo, che le tendeva. Il Marchese Poleni facendo cadere alcuni gravi sopra uno strato di materia molle, ne riducea l'effetto della percossa loro alla grandezza di quei cavi, ch' essi ne imprimevano. Ed altri Meccanici altri effetti della forza viva n' escogitarono. Dunque non sia maraviglia, se questi Valenti Discettatori non convenendo sull' effetto adeguato della forza viva abbian dette tante belle cose, e tutte vere, senza aver mai rassodate le loro Teorie, o confutate le avverse, e sovente degenerando in mere, e biasimevoli logomachie. Dunque l'esempio di questi Valentuomini sia pe' Giovani salutare avvertimento a non isposar partito sulla misura delle forze vive: e sien sicuri, che colla misura Leibniziana, e colla Newtoniana si dimostrino ugualmente bene le Teorie Meccaniche, ed Idrodinamiche, e che ogni Problema proposto su queste Scienze dia identici risultati, o che alla maniera del Newton, o pur del Leibnitz si guidi a fine.

e le velocità di essi mobili si adeguino rispettivamente, o pur se quelle sieno inversamente come queste. E *viceversa*.

6. Se i momenti di due corpi sieno come le masse, le velocità de' mobili dovranno essere tra se uguali: e se i momenti sieno come le velocità de' mobili, le masse di questi dovranno essere tra se uguali.

§. 74. COR. II. Di qui potrebbesi conoscere, e valutare l'efficacia delle machine belliche, onde gli Antichi solean demolire le mura ostili, e paragonarle con quelle de' moderni; sol che si sappiano le masse, e le velocità de' corpi percuzienti da esse machine animati.

§. 75. Intanto mi è paruto degno di gravissima ponderazione, avanti ch'io ne discenda all'esame delle forze centripete, l'investigar gli effetti, che ne produce in un corpo una Potenza continua uniforme, cioè quella che gli rechi continue spinte uguali per la medesima direzione, e poi valutarne geometricamente gli stessi effetti. Onde a tal uopo giova risalire un poco alle considerazioni ne' §. 47, e 48. esibite.

§. 76. Quivi si conchiuse non potersi immaginare veruna forza continua, che ad un mobile tante spinte ne imprima, quanti sieno gli elementi di quel sentiero rettilineo, pe' quali lo conduce: e che l'azione di questa forza debbasi concepir continuata come la durata del moto, sicchè il suo progresso al flus-

so del tempo si conformi. Or il tempo, che per la continuità delle sue parti è una grandezza analoga all'estensione (a), non può a rigor di Geometria in indivisibili elementi ripartirsi: e pure non v'ha chi nol ravvisi, come una serie d'istanti staccati per così dire l'un dall'altro al par delle grandezze, che discrete appelliamo. Dunque del pari l'azione di una forza continua potrà suporsi come una successione d'impulsi tutti fra lor distinti, sicchè ne paja quasi interrotta per intervalli di tempo infinitesimi. Ma egli è altresì vero, che ogni spinta produce in un'istesso corpo un grado di velocità proporzionale alla sua energia (61). Dunque imprimendoglisi più spinte successive di uguali intensità, e tutte conspiranti, cioè fatte per una stessa direzione, la velocità in esso mobile generata debb'esser proporzionale all'intensità di ciascuna spinta, ed al numero di esse: val quanto dire la medesima velocità è come l'energia della Potenza continua, e come il tempo: sostituendosi all'intensità di ciascuna spinta l'energia della Potenza, ed al numero delle spinte il numero degl'istanti, cioè il tempo. Ed ecco la più universale enunciazione, che può darsi al seguente Principio di Meccanica.

§. 77.

(a) Il Signor Cochius negli Atti di Berl. 1775. ha registrato un suo Opusc. sull'analogia del Tempo, e dell'Estensione.

§. 77. LA VELOCITA' GENERATA IN UN MOBILE DA UNA FORZA CONTINUA UNIFORME E' DIRETTAMENTE COME L'ENERGIA DI QUESTA FORZA, EL TEMPO, OND'ELLA SI E' GENERATA, ED INVERSAMENTE COME LA MASSA DEL CORPO.

§. 78. Questo Principio, che si è qui sopra dimostrato a priori, non può contenere una verità contingente, come ne sembrava al Signor Daniele Bernulli (a), ma sì bene una verità necessaria, siccome il sommo Eulero lo ha ben anche con dell' Analisi rilevato (b). Egli è come face a' movimenti accelerati: e l' gran Galilei, che lo scoperse nella fine (c) del viver suo, rinacque a vita immortale nella memoria de' Posterì.

§. 79. Finalmente la materia de' corpi, che si vide da tante forze ravvivata, l'è anche rapita verso di alcuni centri da una forza continua, che dall' Imm. Newton domandasi At-

(a) Volum. 1. Accadem. Petropolit.

(b) §. 152. Mechan. e §. 177. d'ill. Teor. del Mot. de' Corp. rigidi, ed Ermanno nel Vol. II. Att. Petrob. Theor. Mor. alludendo all' opinione di Daniele Bernulli, che una funzione della Potenza potrebbesi concepir proporzionale agl' incrementi della velocità generati in un certo tempuscolo, soggiunge, sed hoc casu Functio Potentie esset vera Potentia agens.

(c) La dimostrazione di questo Principio fu ritrovato dal Galilei un pò prima della sua morte, e dopo la pubblicazione de' suoi dialoghi: ond' ella è stata poi inserita nelle altre Edizioni.

trazione. Per essa i corpi distanti si sforzano di avvicinarsi l'un l'altro, in sin che si tocchino: e per virtù di lei si mantien la coerenza ne' solidi, la rotondità delle parti de' fluidi, e quel maraviglioso equilibrarsi de' Pianeti su della nostra Terra, tuttochè un' altra forza poderosa gli spinga continuamente ad immergersi entro agl' immensi spazj de' Cieli. Ma intanto al nostro intendimento è ascosa l' origine di questa forza; nè può egli concepirsela come una proprietà della materia, o de' centri, nè come un' effetto di un fluido, che premendo i corpi sottoposti gli spinga incessantemente in ver de' centri.

C A P. IV.

NOZIONI DELLE FORZE CENTRIPETE.

§. 80. DEF. IX. **Q**Uella forza continua, che investendo un corpo il fa tender sempre ad un dato punto, si domanda gravità, o Forza Centripeta. Esso corpo si dice Grave; el punto, ove ne tende, appellasi Centro delle Forze, o semplicemente di lui Centro.

§. 81. SCOL. Cotesta tendenza de' gravi o consiste nella loro discesa verso del centro delle forze, o nel conato di discendervi. La prima

prima si appalesa in que' gravi, che si lascian cadere liberamente, nè son poi da corpi stranieri nel loro cammino impediti: e la seconda in quegli altri si sperimenta, che son ritenuti da ostacoli invincibili, o pur che si volgono intorno al centro delle forze. Così la gravità terrestre, che l'è una specie di tali forze, obbliga un grave a calar giù verticalmente o per un piano inclinato, tosto ch'ei si lasci nel vuoto, o in un fluido di esso grave più leggiero. Ella fa che un' altro grave preme quel piano, su cui poggia, o che tenda quel filo, da cui è sospeso: ed è altresì dovuto alla gravità terrestre, che la nostra Luna non iscappi per la tangente, e sen vada ad immergere ne' lontanissimi spazj del Firmamento. Ma niun di Voi s'immagini, che la forza centripeta sia virtù de' centri, o che questo abbiasi da me voluto indicare nella rapportata definizione: poichè qual cosa sarebbe mai sì strana, quanto il credere, che da' punti geometrici, quali sono i centri delle forze, sgorghin d'intorno intorno forze sì copiose, ed attive, che si vadan poi al distaccarsi da' centri diradando? Che anzi nemmeno può stabilirsi, che le tendenze de' gravi sieno proprietà de' loro elementi, o che derivino da straniere potenze, le quali continuamente gli spingano, li premano, li traggono in ver de' centri. E solo potrà concepirsi tanto l'una, che l'altra di queste tendenze, come

me una successione di spinte recate al grave verso del suo centro; le quali ne' corpi cadenti si rammassan tutte, e negli altri, che dagli ostacoli son ritenuti, dalla renitenza di questi nel nascer loro ne son distrutte.

§. 82. DEF.X. Una forza centripeta si dirà *Uniforme*, se colla stessa energia ella ne investe un dato grave a qualunque distanza dal di lui centro.

§. 83. DEF.XI. E si dirà poi *Variabile*, se la divisata energia si muti, al cangiarsi della distanza di un grave dal di lui centro.

§. 84. SCOL. A rigore niuna forza centripeta può essere uniforme; ma tale può considerarsi in uno spazio infinitesimo trascorsone dal grave.

§. 85. DEF.XII. *Legge della forza centripeta* dicesi quel rapporto, ch' evvi tra la gravità di un' istesso corpo, e la dilui distanza dal centro delle forze, O pure può dirsi cogli Analisti, che la legge di una forza centripeta sia quella *funzione* della distanza di un corpo dal centro delle forze, cui n'è proporzionale la gravità di esso.

§. 86. SCOL. Così crescendo la gravità di un corpo come la distanza, ch'ei tiene dal centro delle forze, la *ragion di queste distanze* si dirà legge della forza centripeta. E se la gravità si minori, come ne cresce il quadrato della distanza di un corpo dal di lui centro, la *ragion inversa duplicata delle distanze* sarà in tal

caso la legge della forza centripeta.

Fig. 6. §. 87. DEF. XIII. La curva *S E C A* dirassi *scala delle gravità, o delle forze centripete*, se il dilei asse *A K* passi per lo centro delle forze, e le ordinate *BN*, *CE* ec. sieno come le gravità di un' istesso corpo posto ne' luoghi *B*, *C*, ec.

§. 88. DEF. XIV. La tendenza dell' intero grave al centro delle forze chiamasi *Peso* del corpo: e dal Newton suol dirsi *Quantità motrice della forza centripeta*.

§. 89. SCOL. Il peso di un corpo non può conoscersi, nè estimarsi, che da quella forza, onde se ne impedisce la sua discesa verso del centro.

§. 90. DEF. XV. La tendenza di ciascun' elemento dello stesso grave dicesi *Quantità acceleratrice della forza centripeta*.

§. 91. COR. I. Il peso di un corpo, ch' è la somma de' conati, onde ciascun de' di lui elementi vuol irne al centro, conviene che si valuti dal numero di cotesti elementi, e dalla tendenza di ciascheduno. Dunque la quantità motrice della forza centripeta è il prodotto della massa di un corpo nella quantità acceleratrice della stessa forza. E di qui s' intende agevolmente ciò, che il Cavalier Newton deduce dalla Def. VIII. Princ. Mat. Fil. Nat. (a)

§. 92.

(a) Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem
ut

§. 92. COR. II. Due elementi di materia disgregati dalla massa di un corpo, e posti a disuguali distanze dal centro delle forze, se quivi si faccian cadere liberamente, dovranno alla fine di un' istesso tempuscolo concepir due gradi di velocità alle di loro tendenze proporzionali (61), o alle quantità acceleratrici della forza centripeta. Dunque *la quantità acceleratrice della forza centripeta è proporzionale a quel grado di velocità, che in un dato tempuscolo si acquista un' elemento di materia liberamente calando verso del centro*.

§. 93. COR. III. E poichè dopo un' istesso tempuscolo tanta velocità si acquista un semplice elemento di materia, quanto un qualunque grave, questo però dal suo peso animato al moto, e quello dal suo conato (62); sarà anche vero, che la misura della forza acceleratrice sia la velocità, che in un dato tempuscolo si produce in un qualunque grave libera-

D 2

men-

ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiae, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiae. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terrae, ubi gravitas acceleratrix, seu vis gravitatis in corporibus universis eadem est, gravitas motrix, seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur, ubi gravitas acceleratrix sit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum.

mente scendendo verso del centro (a).

§. 94. COR. IV. Le diverse tendenze di due uguali elementi di materia nascono dalle disuguali distanze, ch'essi serbano dal centro delle forze, o dai diversi luoghi, ove ne stanno. Siccome per l'opposto i diversi pesi, che sperimentansi in due gravi dal comun centro equidistanti, produconsi dalle disuguali masse, che in se contengono. Dunque la quantità acceleratrice della forza centripeta è relativa al luogo del grave, laddove la motrice riguarda la massa dello stesso corpo.

§. 95. SCOL. Masse uguali collocate ad uguali distanze da altrettanti centri, vi possono tendere con disuguali forze. Ciò non è improbabile, sebbene il sembri nel primo aspetto: imperciocchè dall'esperienza siam tuttavvia ammaestrati, che diverse magneti di peso uguali, traggan sovente con differenti ener-

(a) N. B. Se p dinoti il conato di ciascun elemento della materia, onde n è composto un grave, ed M l'intera di lui massa; il peso dello stesso corpo, che l'è una Potenza continua (45), sarà espresso per pM , e la velocità generata nello stesso corpo dopo un dato tempuscolo (70) sarà proporzionale a $\frac{pM}{M}$, cioè a p . Ma se P dinoti l'intero conato della massa M ; la velocità, che nello stesso tempuscolo vi si produce, sarà come $\frac{P}{M}$, ch'è quanto p . E bisogna capir bene queste due cose per l'esatta guida de' calcoli, che talora convien istituire su queste Teorie.

nergie due pezzi di ferro uguali fra loro, e dalle magneti equidistanti. E l'Cavalier Newton colla guida d'ingegnosi, ed accurati calcoli rinvenne, che, se ad uguali distanze dai centri del Sole, di Saturno, di Giove, e della nostra Terra si ponessero altrettanti corpicciuoli di uguali masse, i loro pesi lungi dall'essere tra se uguali, come parrebbe a taluno, sarebbero nella ragion de' seguenti numeri 227502, 1033, 2411, 1. Dunque i centri delle forze si possono concepir dotati di diverse forze attraenti, tuttochè di queste non ne sieno proprietarj, come vel dissi altrove.

§. 96. DEF. XVI. La *Quantità assoluta* della forza centripeta è il peso di un dato corpo posto ad una data distanza da un centro delle forze.

§. 97. COR. I. Dunque se i pesi di due corpi uguali ed ugualmente distanti da due centri sien fra loro come m ad n ; questa medesima ragione dovranno serbarsi le quantità assolute degli stessi centri (a).

D 2

§. 98.

(a) E di qui può intendersi chiaramente ciò, che il Cavalier Newton rapporta nell'*illust. dell. def. VIII. Hasce virium quantitates* (cioè la quantità motrice, l'acceleratrice, e l'assoluta della forza centripeta) *breviszatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad corpora centram potentia, ad corporum loca, & ad centram virium: nimirum vim motricem ad corpus,*

§. 98. COR. II. E con ciò le quantità assolute de' centri del Sole , di Saturno , di Giove, e della nostra Terra saranno come 227512, 4033 , 2411 , 1 .

C A P. V.

RAPPORTO DELLE FORZE CENTRIPETE
AI MOTI DE' GRAVI.

§. 99. DEF. XVII. **Q**uella forza, che derivando dalla Centripeta , impieghi solamente ad accelerare un grave nel suo cammino, o a ritardarnelo, dicesi *Forza Acceleratrice*, o *Ritardatrice* (a).

§. 100.

tamquam conatum , & propensionem totius in centrum ex propensionibus omnium partium compositam: & vim acceleratricem ad locum corporis , tamquam efficaciam quamdam de centro per loca singula in circuitu diffusam , ad movenda corpora , quæ in ipsis sunt : vim autem absolutam ad centrum , tamquam causam aliquam præditum , sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu , sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magnetica , vel Terra in centro vis gravitantis) , sive alia aliqua , quæ non apparet . Mathematicus damtaxat hic est conceptus ; nam virium causas , & sedes Physicas jam non expendo .

(a) N. B. Non bisogna confondere la quantità acceleratrice della forza centripeta con quella , che qui si chiama *Forza acceleratrice* .

§. 100. SCOL. I gravi , che si lascian cadere in un mezzo libero, sono dai loro pesi rispettivamente accelerati , cioè dall'intera forza centripeta , che incessantemente investendoli, verso del centro li dirige . Ma quegli altri , che vi discendono a traverso de' fluidi , su de' piani obliqui , o per sentieri curvilinei , sono accelerati da una parte della divisata forza , la dicui quantità , e la direzione sarà in appresso investigata .

§. 101. COR. I. Dunque l'intensità della forza acceleratrice sarà proporzionale alla velocità generata in un dato tempuscolo .

§. 102. COR. II. E poichè le velocità son come le Potenze applicate alle masse (70); dovrà tenersi per vero , che , nel corpo M sollecitato della potenza P per una qualunque direzione , l'energia della forza acceleratrice sia $\frac{P}{M}$.

§. 103. DEF. XVIII. La forza acceleratrice di un corpo si dirà *uniforme*, s'egli per un'istessa direzione , e colla stessa energia n'è sempre animato al moto , ovunque si ritrovi nel suo sentiero .

§. 104. SCOL. I gravi , che si lasciano liberamente cadere nelle vicinanze della nostra Terra sono animati al moto da una forza costante , e per la stessa direzione . Dunque l'è *uniforme* quella forza , che gli accelera nella
D 4 loro

loro discesa verticale. Ed è anche uniforme la loro accelerazione per i piani obliqui, come a suo luogo vi sarà dimostrato.

PROP. XIII. TEOR.

§. 105. *Le velocità, che si producono in più corpi uniformemente accelerati da altrettante forze, sono come le intensità di queste, e come i tempi, in che quelle si son prodotte.*

DIM. La dimostrazione di questa verità può supplirsi da ciò, che abbondantemente si è detto in tanti luoghi.

§. 106. COR. I. Dunque le forze acceleratrici saranno nella ragion diretta delle velocità generate, se i tempi sieno uguali.

2. E le forze direttamente come le velocità generate, ed inversamente come i tempi (Pren. IV.).

3. E saranno tra se uguali le velocità rispettivamente generate in due mobili da due forze acceleratrici, se queste seguano l'inversa ragion de' tempi. E viceversa.

§. 107. SCOL. I. Le velocità generate non sono, che gl'incrementi delle velocità de' mobili.

§. 108. SCOL. II. La perdita di velocità, che fa un mobile uniformemente ritardato da una qualunque forza, l'è anche proporzionale all'intensità di essa forza, ed al tempo. Dunque tutto ciò, che qui sopra ho dimostrato de-

degli incrementi di velocità rispetto ai tempi, ed alle forze acceleratrici, potrà applicarsi a decrementi della velocità riguardo ai tempi, ed alle forze ritardatrici.

PROP. XIV. TEOR.

§. 109. *Poste le medesime cose della Prop. prec. gli spazj, ch'essi corpi descrivono dal principio del loro moto, sono nella semplice ragion delle forze acceleratrici, e nella duplicata de' tempi.*

E gli stessi spazj son pure nella duplicata ragion diretta delle velocità finali, e nell'inversa delle forze.

DIM. PART. I. Le rette AE, AC dinotino Fig. 3.
i tempi, ne quali muovansi due corpi, uno dalla forza AP uniformemente accelerato, l'altro dalla AQ. Nella retta FD, che per E conducesi perpendicolare alla CA, si prendano le parti FE, ED proporzionali alle velocità dagli stessi corpi acquistate alla fine del tempo AE, le quali (106) dovranno essere nella ragion delle forze AP, AQ: ed unite le rette AF, AD, si prolunghi la AD, sinchè incontri la CB perpendicolarmente eccitata alla retta AC dal punto estremo C.

Ciò posto, si tirino ovunque le rette bq, cf, ec. perpendicolari alla AC, saranno le rette FE, cd, ba ec. come le altre AE, Ad, Aa, ec. dunque siccome per FE dinotasi la velocità dal primo corpo acquistata al-

la fine del tempo AE ; così le altre cd , ba , ec. dovranno esprimere (26) quelle velocità, ond'ei si muove alla fine de' tempi Ad , Aa , ec. e quindi (26) lo spazio trascorso dallo stesso mobile nel tempo AE sarà rappresentato dal triangolo AFE . In simil guisa può dimostrarsi, che l'altro mobile uniformemente accelerato dalla forza AQ debba percorrerne nel tempo AC uno spazio dall'altro triangolo ACB disegnato. E poichè il triangolo AEF sta all'altro ACB (a) in ragion composta di AEF ad AED , e di AED ad ACB ; ed è la prima di queste ragioni componenti uguale a quella di FE ad ED (b), cioè alla ragione delle forze acceleratrici; e l'altra de' triangoli simili AED , ACB uguaglia la ragione de' quadrati de' loro lati omologhi AE , AC , o de' tempi, che dalle rette AE , AC son disegnati. Dunque sarà vero che gli spazj descritti dal principio del moto sieno come le forze acceleratrici, e come i quadrati de' tempi.

PART. II. I triangoli AEF , ACB sono in ragion composta delle loro basi EF , CB , e delle altezze AE , AC , o delle ED , CB , che ad esse altezze sono proporzionali. Ma l'è poi $ED:CB::(ED:EF)(EF:CB)$. Dunque (c) sarà $AEF:ACB::(EF:CB)(ED:$

(a) *Pren. I.*(b) *I. Elem. VI.*

(c) Le ragioni, che qui veggonsi distinte per parentesi, e rinchiusse ne' vincoli, sono le componenti della

($ED:EF$) ($EF:CB$), cioè a dire $AEF:ACB::(EF^2:CB^2)(ED:EF)$. E quindi gli spazj descritti ne' tempi AE , AC sono direttamente come i quadrati delle velocità finali, ed inversamente come le forze acceleratrici. $C. B. D.$

§. 110. COR. I. Di qui si possono raccogliere non poche verità Meccaniche utili e preclare, sol che s'intendano le affezioni, e gli sviluppi della ragion composta. In fatti dalla I. Parte di questo Teorema si deduce 1. che gli spazj descritti dai riferiti corpi debbano essere come le forze acceleratrici, qualora i tempi sieno fra se uguali.

2. Ed essi debbon essere come i quadrati de' tempi, quando le forze acceleratrici son di ugual energie.

3. Di più reciprocandosi le forze acceleratrici coi quadrati de' tempi, dovranno pareggiarsi gli spazj descritti da mobili dal principio del loro moto. E viceversa.

4. I quadrati de' tempi saran poi direttamente come gli spazj descritti, ed inversamente come le forze acceleratrici. E le forze acceleratrici direttamente come gli spazj descritti, ed inversamente come i quadrati de' tempi.

§. 111. COR. II. E dalla II. Part. potrem rilevare 1. che gli spazj descritti debban seguire la

la ragione di ACF ad ACB , e così per brevità fogliam disegnare.

la ragion duplicata delle velocità finali, se le forze sieno uguali.

2. E ch'essendo uguali le velocità finali, gli spazj descritti debbano essere nella ragion inversa delle forze.

3. E poi per essere uguali cotesti spazj, si richiede, che le forze sieno in duplicata ragione delle velocità finali. E viceversa.

4. Finalmente le medesime velocità saranno in suduplicata ragione degli spazj corsi dal principio del moto, ed in sudduplicata ragione delle forze.

§. 112. COR. III. Dunque gli spazj descritti da questi mobili saranno tra se uguali, 1. qualora le velocità finali serbinò la ragion inversa de' tempi. 2. o quando le forze acceleratrici rispondan contrariamente ai quadrati de' tempi. 3. o pur se le forze sieno in duplicata ragione delle velocità finali (a).

§. 113. COR. IV. Dunque il valore di una forza acceleratrice potrà dinotarsi dallo spazio diviso per lo quadrato del tempo, o dal quadrato della velocità finale diviso per lo spazio.

§. 114. SCOL. Una Forza acceleratrice comunque variabile nella dilei energia, può concepirsi, che animi uniformemente il mobile nel con-

(a) Il primo carattere dell'egualità de' mentovati spazj conoscesi dal solo ravvisare i triangoli AEF, ACB, che li rappresentano. E gli altri due son dimostrati nel §. 110. n. 3. §. 111. n. 3.

condurlo per uno spazietto infinitesimo, o descritto in un tempo infinitesimo. Dunque tutto ciò, che si è mostrato nelle due ultime Propositioni, e ne' loro Coroll., può convenevolmente adattarsi agli spazietti iniziali (a), ed ai tempi infinitesimi, senza che faccia uopo dimostrarvelo di bel nuovo. Ed ecco l'enunciazione di tali Teoremi, e de' loro Corollarj.

PROP. XV. TEOR.

§. 115. L'Incremento di velocità, che una forza accelerando un corpo vi produce, è come l'energia di questa forza, e come il tempuscolo, in ch'ei si è prodotto. (b)

§. 116. COR. I. Le forze acceleratrici sono direttamente come gl'incrementi di velocità prodotti ne' corpi, ed inversamente come i tempuscoli ne' quali si producono. E questi tempuscoli son pure nella

(a) Gli spazietti iniziali sono que' spazietti infinitesimi, che dai gravi si descrivono in sul principio del loro moto.

(b) Un corpicciuolo, la di cui massa sia M , se venga sollecitato dalla potenza p nel tempuscolo dt , dovrà acquistarsi un' elemento di velocità (77) proporzionale a $\frac{p dt}{M}$. Dunque se u dinoti la velocità del mobile, e du

quel suo elemento, dovrà esser sempre $du \equiv \frac{\theta p dt}{M}$, ed

$u = \frac{\theta}{M} \int p dt$; ove θ è un coefficiente costante da determinarsi colla speriienza.

nella ragion diretta degl' incrementi di velocità , e nell' inversa delle forze generatrici .

§. 117. COR. II. *Gli incrementi di velocità debbon essere uguali , se le forze acceleratrici sieno inversamente come i tempuscoli . E viceversa .*

PROP. XVI. TEOR.

§. 118. *Gli spazietti iniziali son come le forze acceleratrici , e come i quadrati de' tempi , nè quali trascorronsi da' corpi . Ed essi son pure come i quadrati delle velocità generate , ed inversamente come le forze acceleratrici .*

§. 119. COR. I. 1. *Dunque gli spazietti iniziali deggiono essere , come le forze acceleratrici , qualora i tempi sono uguali . E viceversa .*

2. *Ed i medesimi spazietti dovranno essere uguali , se le forze acceleratrici sieno inversamente come i quadrati de' tempuscoli . E viceversa .*

3. *Di più le forze acceleratrici son direttamente come gli spazietti iniziali , ed inversamente come i quadrati di que' tempuscoli , nè quali si trascorrono . Ed i quadrati di questi tempuscoli saranno nella diretta ragione de' mentovati spazietti iniziali , e nell' inversa delle forze acceleratrici .*

§. 120. COR. II. *E dalla II. Part. può dedursi 1. che gli spazietti iniziali debbano essere nell' inversa ragione delle forze acceleratrici , qua-*
lo-

lora le velocità da' mobili acquistate si pareggino fra loro . E viceversa .

2. *Ed essi spazietti saranno uguali , sol che le forze sieno in duplicata ragione delle velocità generate .*

§. 121. COR. III. *Finalmente il valore della forza acceleratrice potrà esibirsi dallo spazietto iniziale diviso pe' l' quadrato del tempuscolo ; o dal quadrato della velocità generata diviso per lo spazietto iniziale .*

§. 122. SCOL. I. *I rapporti delle forze acceleratrici ai moti de' corpi convien che distintamente intendansi , e che si rendano familiari le loro idee : conciossiachè son essi tanti principj regolatori di moltissime dimostrazioni meccaniche . Oltre a che tutti i Problemi diretti del moto curvilineo non sono , che tante applicazioni di questo Teorema a diversi casi .*

§. 123. SCOL. II. *Queste verità sono puranche applicabili a moti ritardati , purchè nelle loro enunciazioni si sostituiscano i decrementi agl' incrementi , e le forze Ritardatrici alle Acceleratrici .*

PROP.

PROP. XVII. TEOR.

§. 124. Se un grave dal luogo A si lasci liberamente discendere all'immobile (a) centro K delle forze; le velocità, ond'ei ne perviene a' luoghi

Fig. 6.

B, e C, saranno in sudduplicata ragione delle corrispondenti aje ABNS, ACES nella scala ACEŠ delle forze centripete.

DIM. La curva ADF s'intenda esser la scala delle velocità del mobile, e presi gli spazietti infinitesimi Bb, Cc alle intere AB, AC proporzionali, si conducano le ordinate NBD, nbd, ECF, ecf alle curve ADF, SNE. Si protragga le rette BA, ed SA verso Y, e Q, e bisecato l'angolo QAY colla retta AT, si menino pe' punti D, d, F, f le rette DR, dr, FT, ft parallele al comun asse delle divise curve. E poichè i triangoli APR, AQT sono isosceli, i loro lati AP, AQ, o le sottoposte ordinate BD, CF saranno rispettivamente uguali a PR, e QT. Onde prolungate le rette rd, tf, sinchè incontrino le ordinate BD, CF, dovranno i rettangoli di BD in gd, di CF in hf uguagliare rispettivamente gli altri due PRrp, TQqt.

E poichè il grave trascorre equabilmente (15) gli spazietti Bb, Cc colle rispettive velocità BD, CF, e ne' tempuscoli, che si dica-

no

no T, e t; sarà $bd : cf :: (Bb : Cc) (t : T)$. Ma è (115) anche $gd : hf :: (bn : ce) (T : t)$. Dunque componendo tra di loro le prime ragioni di queste due analogie, e le altre rimanenti, avrassi $bd . gd : cf . hf :: (Bb : Cc) (t : T) (bn : ce) (T : t)$, cioè per la III. Prenozione $bd . gd : cf . hf :: (Bb : Cc) (bn : ce)$, vale a dire i rettangoletti bd, gd, cf, hf, o gli altri PRrp, QTtq, che son loro uguali, saranno come i rettangoletti BbnN, CceE. Dunque (b) sarà il triangolo RAP all'altrq TAQ, come l'aja ABNS (c) all'altra

(a) L'immobilità de' centri qui si richiede essenzialmente, perchè sia vero questo Teorema. Che se taluno brami saper le leggi de' gravi, che scendono naturalmente ad un centro mobile, o a due centri fissi, potrà leggere negli Att. di Bologna Vol. VI. la diss. del P. Riccati de mot. rect. corporis attracti, aut repulsi a centro mobili, e nel Vol. XI. degli Att. Nuov. di Pietrobb. un' Opusc. di Eulero de motu corporis attracti ad duo centra immobilia: il Sign. de la Grange nell. Part. II. *Mechanique Analyt.* §. 17., ed altri. Ma tanto in questo Problema, che in ogni altro di questo Trattato di Meccanica prescindiamo dalla resistenza de' mezzi.

(b) *Pren. VIII. e §. 24.*

(c) Se lo spazietto Bb dicasi dx , la velocità Bb sia u , e du il suo elemento, p la spinta, che ha il grave in B, ed M la dilui massa; dovrà essere la forza acceleratrice uguale a $\frac{p}{M}$. Dunque sarà $u du = \frac{p dx}{M}$, ed integrando $u^2 = \frac{2p}{M} \int p dx + C$. Qui la costante è zero, quando il grave si lasci di per se cadere: θ è un coefficiente

Tom. I.

E

coefficiente

tra ACES. E quindi siccome i medesimi triangoli RAP, TAQ sono in duplicata ragione de' loro lati omologhi AP, AQ, o delle ordinate BD, CF, che li pareggiano; così le aje ABNS, ACES saran pure di queste ordinate in ragion duplicata: cioè a dire le velocità BD, e CF, onde il grave liberamente calando dal luogo A agli altri B, e C ne perviene, sono in sudduplicata ragione delle aje ABNS, ACES nella scala delle forze centripete. C. B. D.

§. 125. COR. I. Concessa la quadratura della curva ACES si possono geometricamente esibir de' quadrati, che nello spazio pareggino le aje ABNS, ACES, ec. Dunque se dai punti B, C, ec. della indefinita AK le si erigano le perpendicolari BD, CF, ec. rispettivamente uguali ai lati di questi quadrati; la curva ADF, che n' emerge per assegnazion di punti, sarà la scala delle velocità del mobile. E da questa cogli artifizj della Prop. VI. può la curva de' tempi rinvenirsi (a).

§. 126.

ciente costante da definirsi coll' esperienza: e questa formula potrebbe rilevare dalla not. (b) §. 115, ponendo $\frac{dx}{u}$ in luogo di dt .

(a) Il Cavalier Nevvton rinvenne la verità di questo Teorema, dimostrandola nell. Prop. 39. Lib. I. Princ. Mat. in una maniera analitica indiretta: cioè supponendo i quadrati delle velocità proporzionali a certe aje, e ne conchiuse esser queste nella scala delle forze. Ed
ecco-

§. 126. COR. II. Prendasi Cc uguale a Bb, saranno i rettangoli BbnN, CceE nella ragion delle loro basi BN, CE: e quindi gli altri due BgD, ChF, che a quelli si son dimostrati proporzionali, saranno ancora nella ragion di BN a CE.

§. 127. COR. III. Cioè a dire, le forze acceleratrici son come le velocità, e i loro elementi acquistatisi alla fine di uguali spazietti (b).

§. 128. COR. IV. Se i gravi L ed A si faccian cadere liberamente dalle altezze LB, AC, le loro velocità finali saranno in sudduplicata ragione delle corrispondenti aje LBNK, ACES nella scala delle forze. Fig. 7.
n. 1.

E 2 PROP.

eccone la maniera. La velocità, onde il grave calando dal luogo A ne perviene ai luoghi b e B, si dicano rispettivamente u , ed $u + \omega$, ove ω è una grandezza infinitesima, e sieno le aje AbnS, ABNS come uv ad $vv + 2v\omega + \omega\omega$; sarà dividendo l' aje BbnN proporzionale a $2u\omega + \omega\omega$, o semplicemente a $2v\omega$ (potendo $\omega\omega$ trascurarsi rispetto a $2v\omega$): e quindi NB sarà come $\frac{2v\omega}{Bb}$, o pure (prendendo la metà di questa espressione)

come $\frac{v}{Bb} \times \omega$. Vale a dire la NB è direttamente come l' incremento della velocità dinotato per ω , ed inversamente come il tempo espresso per $\frac{Bb}{v}$ (15). Ella dunque è come la forza acceleratrice in B (115, n. 2); e l' aje ABNS, che si è supposta proporzionale al quadrato della velocità in B, farà una parte della Scala delle forze.

(b) Il Signor Daniele Bernulli nel Vol. V. Att. Ant.

PROP. XVIII. TEOR.

§. 129. *Poste le medesime cose della prop. prec. le forze, che accelerano il grave ne' luoghi B, e C, sono come le corrispondenti sunnormali BL, CK della scala ADF delle velocità di esso.*

Dim. Si prendano i due spazietti infinitesimi ed uguali Bb , Cc , ed ordinate le rette BD , bd , CF , cf , si calino sulle BD , e CF le perpendicolari dg , fh . E poichè il triangoletto dgD è simile (a) al triangolo DBL , dovrà stare $Dg : dg :: BL : BD$: onde il rettangolo di BL in dg o in Bb sarà uguale all'altro di BD in Dg . E dimostrandosi in simil' guisa che il rettangolo KCc pareggi l'altro CFh , saranno i due rettangoli LBb , KCc nella ragion degli altri due BDg , CFh . Or i primi rettangoli perchè *egualti* sono nella ragione delle loro basi BL , CK ,

Ant. Petrob. chiamando pdx una pressione momentanea, che soffre il grave verso del centro, e pdx una pressione spaziale, dedusse due belle verità, che qui giova esibirle. I. *Summa omnium pressionum momentanearum utcumque variantium, que definito corpori definitam velocitatem impresserint a quiete, semper est eadem.*

II. *Summa omnium pressionum spatialium utcumque variantium, que definito corpori definitam velocitatem impresserint a quiete, semper est eadem.*

(a) *Prenez. IX.*

CK , e gli altri due BDg , CFh (127) son come le forze, che accelerano il grave ne' luoghi B , e C . Dunque queste forze son come le corrispondenti sunnormali BL , CK nella scala ADF delle velocità del grave (a). $C. B. D.$

§. 130. COR. I. Dunque se da' punti B , C , ec. si erigano sulla CA le perpendicolari BN , CE , ec. uguali alle rispettive sunnormali BL , CK , ec. della ADF scala delle velocità; per assegnazion di punti verrà a costruirsi la scala delle forze acceleratrici.

§. 131. COR. II. Se le velocità BD , CF , con che il grave lasciandosi cadere dal luogo A agli altri B , e C ne perviene, sieno in suduplicata ragione delle altezze AB , AC ; la curva ACF scala delle velocità di esso mobile, sarà una Parabola conica (b), le cui sunnormali, come da' Conici può appararsi (c), son tutte fra loro uguali.

E 3

§. 132.

(a) Nella Prop. prec. si è dimostrato il rettangolo di NB in Bb sempre proporzionale al suo corrispondente di BD in Dg . Dunque se le rette BN , BA , BD si dicano rispettivamente ϕ , x , u ; e con ciò le Bb , e Dg sieno dx , e du ; sarà ϕdx proporzionale ad udu , e ϕ come $\frac{udu}{dx}$, cioè (per quel ch'è noto dal metodo diretto delle tangenti) come la sunnormale della curva AF nel punto L .

(b) *Prop. 7. lib. I. Con. del Giann.*

(c) *Prop. 9. dell'istess.*

§. 132. COR. III. Dunque se le velocità di un grave, che colla sola forza di gravità giù ne discende, sieno in sudduplicata ragione delle altezze percorse, la forza acceleratrice sarà costante.

PROP. XIX. PROBL.

§. 133. Poste le medesime cose della Prop. XVII. ritrovar quello spazio, che dee trascorrere il corpo B uniformemente accelerato dalla forza CG, affinchè tanta velocità si acquisti, con quanta un grave al luogo C ne perviene lasciandosi liberamente cadere dall' altro A.

Fig. 7.
n. 1.

COST. La retta CG rappresenti la forza, che costantemente accelera il corpo B: la CE sia quella del grave A, qualora ei si ritrovi in C, e la curva CLKE sia la scala delle gravità di questo corpo. Sulla CG si formi il rettangolo BCGM uguale all' aja ACES, che qui suppongasì quadrabile: dico esser CB lo spazio addimandato.

Si prendano gli spazietti infinitesimi Aa, Bb reciprocamente proporzionali alle forze AS, BM, dalle quali i corpi A, e B sono accelerati nel principio del loro moto, e si compiano i rettangololetti AasS, BbmM. Questi saranno uguali (a), e serberanno alle aje uguali

(a) Prop. 14. El. VI.

quali ACES, BCGM ugual ragione: vale a dire starà AasS: ACES:: BbmM: BCGM. Ma le aje AasS, ACES (124) sono in duplicata ragione delle velocità, che si acquista il grave A calando per le altezze Aa, AC; e le altre due son pure in duplicata ragione di quelle velocità, onde il corpo B sempre animato dalla forza CG a' luoghi B, e C ne perviene. Dunque quelle velocità saran come queste. Ma le velocità acquistatesi da' corpi A, e B nella discesa per gli spazietti iniziali Aa, Bb si uguagliano fra loro (120), essendo essi spazietti nell' inversa ragione delle forze acceleratrici. Dunque la velocità, che la scesa per la CA ne conferisce al grave, è quanto quella, che il corpo B si acquisterebbe passando lo spazio BC sempre accelerato dalla forza CG: C. B. D.

§. 134. COR. I. Se il grave in giù si proietti dal luogo A con tanta velocità, quanta gliene avrebbe conferito la discesa per la LA; le velocità, ond' ei perviene a' luoghi B, e C, saranno in sudduplicata ragione di LASK + ABNS ad LASK + ACES.

§. 135. COR. II. Che se la velocità impressa al grave A per AC sia uguale a quella, che gli produrrebbe la forza uniforme F conducendolo per lo spazio S; le velocità, ond' egli arriva ai luoghi B, e C, saranno in sudduplica-

cata ragione di S.F + ABNS ad S.F + ACE S (a).

PROP.

(a) Un grave, la cui massa sia r , dal luogo A si lasci cadere all'immobile centro K , o pur si proietti per la retta centrale CK colla velocità c , e dopo qualche tempo, che si dica t , ei ne trascorra lo spazietto Bb colla velocità u . Si ponga $KA = r$, $KB = x$, la gravità del corpo in $A = g$, ed R ed X esprimano le funzioni di KA , e KB , cui son proporzionali le gravità dello stesso corpo A , e B ; farà la forza acceleratrice del grave posto in B uguale $\frac{gX}{R}$, ed essendo $Bb = D$ ($r - x$) $= -dx$,

Fig. 6.

farà (not. b §. 124) $u du = \frac{-gX dx}{R}$. Dunque integrando, ed aggiungendo la convenevole cost. avrassi

$$u^2 = C - \frac{2g}{R} \int X dx, \text{ e con ciò } u = \sqrt{\left(C - \frac{2g}{R} \int X dx \right)}$$

Ed essendo $t = \frac{-dx}{v}$

$$\text{sarà } t = \int \frac{-dx}{\sqrt{\left(C - \frac{2g}{R} \int X dx \right)}} + \text{Cost.}$$

ESEMPL. Suppongasi $X = x^n$, e $c = 0$, sarà $\int X dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, e determinando la cost. C dal supporre, che u sia zero, quando x è uguale ad r , avrassi

$$u = \sqrt{\frac{2g}{r^n} \left(\frac{r^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} \right)}, \text{ e}$$

$$t = - \int dx : \sqrt{\frac{2g}{r^n} \left(\frac{r^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} \right)} + \text{Cost.}$$

PROP. XX. TEOR.

§. 136. Il grave P liberamente discenda al centro C delle forze, e l'altro N d'ugual massa salga nella CN sospinto da una forza impellente: io dico che se mai ne' luoghi S , ed O equidistanti dallo stesso centro abbiano questi corpi velocità uguali, anche negli altri punti del loro sentiero equidistanti dal centro dovranno avere velocità uguali.

Fig. 7.
n. 2.

DIM. Si prendano nella CP le retticciuole Ss , st , ec. tutte uguali fra loro, ed uguali alle altre Oo , on , ec. dell'altra CN . Ei sarà chiaro, che i divisati corpi, supponendosi in S , ed in O ugualmente veloci, abbiano a passare gli spazietti uguali Ss , o Oo in tempi uguali (15). Ma, per l'equidistanza de' punti S , ed O dal centro O , la forza acceleratrice del primo corpo è quanto quella, che l'altro ne ritarda. Dunque l'elemento di velocità, che acquista il grave P discendendo per Ss , uguaglia quello, che si perde dall'altro N nella salita per oo : imperciocchè questi elementi sono in ragion composta delle divisate forze, e de' tempi (105, 108), che si son dimostrati rispettivamente tra loro uguali. Ma per l'ipotesi sono uguali le intere velocità, che hanno questi gravi ne' luoghi S , ed O : dunque il dovranno essere puranche uguali le velocità loro negli altri due luoghi s , ed o equidistanti

quidistanti dal centro C delle forze. E continuando il filo del ragionamento nella stessa guisa, si conclude quel che si è proposto. C. B. D.

§. 137. COR. Di qui può trarsi per conseguenza la verità, che segue. *In ogni sistema di accelerazione un corpo, che si fa liberamente cadere da una qualunque altezza, dee tanta forza acquistarsi, che con altrettanta sospintone valga a salir tant'alto. E per ogni punto di questa altezza egli dee passarvi colla stessa velocità sì nel discendere, che nel salire.*

PROP. XXI. TEOR.

§. 138. *Non si può verificare l'ipotesi di accelerazione, ove le velocità d'un grave, che si lascia liberamente discendere, sieno come gli spazj percorsi, o in ragion duplicata, triplicata, ec. di essi spazj.*

DIM. Che non possano coteste velocità esser proporzionali agli spazj corsi dal principio del moto, ben si rileva dalla Prop. VIII. Cas. I. Ma che le medesime nè tampoco possan proporzionarsi alle potenze de' medesimi spazj, vi sarà mostrato nel seguente modo.

Fig. 3. S'è possibile, sieno le velocità DG, BC acquistatesi da un grave alla fine degli spazj AD, AB, come le potenze n de' medesimi. Intendasi descritta l'iperbole MNE in mezzo agli asintoti rettangoli AQ, AB, sicchè le ordi-

ordinate DN, BM sieno inversamente come le potenze n delle corrispondenti ascisse AD, AB; si costruisca l'iperbole conica IN, che passi per N; e resti ancor situata tra' medesimi asintoti. E poichè la ragione di ADⁿ ad ABⁿ è maggiore di quella di AD ad AB, sarà puranche la ragione di dn a DN maggiore di quella di df a DN, essendo queste due ragioni rispettivamente uguali alle prime a cagion delle due Iperboli. Dunque la dn sarà maggiore della df: tutti i rettangoli circoscritti alla curva NEQAD saranno maggiori de' corrispondenti circoscritti nell'iperbole conica NFQAD; e lo spazio NEQAD sarà puranche maggiore dell'altro NFQAD: ed essendo questo infinito (a) di grandezza; quello ne sarà piucchè infinito. Cioè a dire si richiederebbe un tempo infinito a far discendere liberamente un grave per l'altezza AD, ancorchè picciolissima: lo che ripugna (b). C.B.D.

§. 139. COR. Dunque è assurda l'ipotesi di Baliano, che le velocità de' gravi cadenti sieno proporzionali agli spazj percorsi.

CAP.

(a) Cor. 4. Prop. 22. Lib. III. Con. Giann.

(b) Lo spazio AB liberamente percorso dal grave A sia x, e la velocità in B si dinoti per X (qualunque Funzione di x), e sia $\frac{x \cdot dx}{dx} = X'$. Perchè sia possibile questa generale ipotesi di accelerazione, la grandezza X' dee diventare una costante positiva, quando in essa pongasi x=0.

C A P. VI.

DELLE VERE IPOTESI DI GRAVITÀ, CHE
HAN LUOGO NELLA NOSTRA TERRA,
E DE' MOTI RETTILINEI, CHE NE
SON DETERMINATI.

§. 140. **T**Re sono le vere leggi di gravità, o di *centripetenza* che, come vel dimostro nel Trattato delle Attrazioni de' corpi sferici, han luogo nel nostro Globo, ed in ogni altro del Sistema Solare. Qui non fò che indicarle, ed esibirvi le leggi de' moti rettilinei, che ne son determinati.

§. 141. IPOT. I. La gravità (a) di un corpo, ch'è presso la superficie della nostra Terra, non è che costante.

§. 142. IPOT. II. Se un corpo immergasi profondamente entro la nostra Terra, la sua gravità dee mancare, come la sua distanza dal di lei centro.

§. 143. IPOT. III. E sollevandosi un grave a grandi altezze dalla superficie terrestre, la gravità di esso è inversamente come il quadrato della sua distanza dal centro della nostra Terra.

(a) Qui per gravità intendosi la di lei *quantità acceleratrice*. Di queste tre Ipotesi la prima fu escogitata dal Gran Galilei, e le altre due furon dimostrate dall'Imm. Nevvton.

§. 144. COR. I. Dunque tanto pesa un grave a lido di mare, quanto in sulla cima di una torre, che quivi si erga: tanto su di un colle, che nella vieina valle. E se un grave, il di cui peso sia per esempio di 100 lb, s'intenda profundato nella nostra Terra per un mezzo raggio terrestre, il suo peso diverrà di 50 lb; ed ei peserebbe sole 25 lb elevandosi dalla superficie terrestre per un semidiametro della Terra. E (ciocchè sembra meraviglioso) se il medesimo si sublimasse nella region della Luna, la quale dista da noi per 60 semidiametri terrestri, il suo peso di 100 lb si ridurrebbe a quello di un terzo di un'oncia. Imperocchè facendosi come (60)² ad (1)², così 100 lb ad un quarto: questo sarebbe $\frac{1}{4}$ lb, ch'è un terzo di un'oncia.

§. 145. COR. II. Da ciò rilevasi ancora, che un corpo, ch'è presso la nostra Terra, ottiene il massimo peso, qualor ne giace nella di lei superficie.

§. 146. COR. III. E dalle medesime leggi può intendersi ciocchè soggiunse Isacco Newton nel Cor. 2. Prop. LIII. Lib. I. de' Princip. Matem. *Nam gravitas decrescit in progressu a superficie Telluris, deorsum quidem in ratione simplici, sursum vero in ratione duplicata distantiarum.*

PROP.

PROP. XXII. TEOR.

§. 147. *Nell' Ipotesi della gravità costante, il peso di un corpo è come la di lui massa.*

Dim. Il peso di un corpo è come il numero de' di lui elementi, e come la forza acceleratrice di ciascheduno (91). Ma questa forza qui supponesi costante nell'energia, e nella direzione: dunque il peso di esso sarà come il numero degli elementi, che il compongono, o come la massa che in se contiene (a). C. B. D.

§. 148.

(a) Che se vorrebbe una dimostrazion rigorosa applicabile tanto alle masse commenfurabili, che alle incommenfurabili; fingasi, che i corpi A , e B sieno affatto sgombri di pori, affinchè la quantità di materia, che in essi si contiene, occupi adeguatamente i loro volumi: e sieno in primo luogo cotesti corpi commenfurabili, avendo per comune misura il corpicciuolo C . Rappresenti la retta V il peso della massa C , e facciasi V a PQ come C ad A , ed V a QF come C a B ; le rette PQ , e QF dinoteranno i pesi de' corpi A , e B , e saranno proporzionali alle loro masse: lo che può dimostrarsi come il I. Cas. Prop. I.

CAS. II. Che se le masse A , e B siano incommenfurabili, anche in questo caso saran proporzionali alle rette PQ , QF , che n' esprimano i loro pesi. Imperciocchè se ciò non si accordi, la ragione di A a B fingasi minore di quella di PQ a QF : e prendasi la massa D manchevole di B per una grandezza minore di qualunque assegnabile, e che sia commenfurabile ad A . E poichè la ragione de' corpi A e B si è supposta minore di quella de' loro pesi PQ , e QF , farà la ragione di A a D al-

§. 148. COR. Sebbene ignoriamo la cagione della gravità terrestre, el di lei modo d'agir ne' corpi; si sa nondimeno ch'ella debba investire non pur l'esterne di loro parti, ma le interne ancora. Poichè se in quelle sol ne agisse, dovrebbe cangiarsi il peso di un corpo al cangiarsi della di lui superficie. Lo che ripugna ad una continuata esperienza.

§. 149. SCOL. Se nel vuoto Boileano si faccian cadere più gravi comunque differenti nella massa, nel volume, nella densità, nella figura, ec. ed ancorchè uno di essi sia una levissima piuma, ed un'altro una palla di oro ponderosa; si vedran tutti discendere (come avealo presagito il Galilei) in tempi uguali da uguali altezze. Dunque le velocità finali di cotesti corpi dovranno uguagliarsi; e i pesi loro, che

altresì minore di questa di PQ a QF , e con ciò uguale alla ragione della medesima PQ a QR maggiore di QF . Per la qual cosa, essendo le masse A , e D commenfurabili, e rappresentando PQ il peso della prima, dovrà QR dinotar quello dell'altra D (Cas. I.). Adunque essendo QR maggiore di QF , farà il peso del corpo D maggiore di quello dell'altro B : lo che è assurdo. Che se la ragione di A a B suppongasi maggiore di quella di PQ a QF , farà invertendo la ragione di B a A minore di quest'altra di QF a PQ : e questa illazione è falsa, come la precedente.

Il valentissimo Giacomo Ermanno nel Teor. I. della sua *Foron.* propone questi due casi, ma poi non ne dimostra, che il primo: conveniva dunque qui distenderne la dimostrazione del secondo.

che come altrettante Potenze continue uniformi le han prodotte, (62) saranno proporzionali alle masse. Per mezzo delle oscillazioni de' pendoli, come vel dimostrerò a suo luogo, anche confermarsi, che in ogni regione della nostra Terra le masse de' corpi sieno proporzionali ai loro pesi, e che quivi la gravità acceleratrice sia costante. Ma il Cavalier Newton volendo tra se paragonare i pesi de' corpi in diverse regioni, dimostrò sottilmente, che la gravità sotto dell' Equatore a quella, ch' è sotto a ciascun de' Poli di nostra Terra, sia come 229 a 230; e che scostandosi dall' Equatore verso di un Polo, l' incremento del peso di un corpo debba essere come il quadrato del seno della latitudine.

§. 150. DEF. XIX. Il moto di un corpo si dirà *uniformemente accelerato*, o *uniformemente ritardato*, se in tempi uguali riceva gradi di velocità uguali, o pur ne perda.

§. 151. COR. Qualor sia nulla la velocità iniziale di un corpo, che muovesi di moto uniformemente accelerato, le velocità successive saranno, come i tempi, da ch' ei s' è mosso.

PROP.

PROP. XXIII. TEOR.

§. 152. *Se un grave si lasci liberamente cadere vicino la superficie della Terra, il suo moto sarà uniformemente accelerato.*

E se un' altro sospingasi verticalmente con una forza finita, ei dovrà salire con moto uniformemente ritardato.

DIM. Dall' azione uniforme della gravità terrestre intendesi agevolmente ciò, che si è proposto (77).

§. 153. COR. Dunque in un grave, che cade naturalmente dovrà verificarsi (27, 28, 29)

1. *Che gli spazj descritti dal principio del moto debbano crescere come i quadrati de' tempi, e delle velocità finali.*

2. *E gli spazj passati in tempi uguali da questo grave, che partesi dalla quiete, crescono come i numeri impari ab unitate 1, 3, 5, ec.*

3. *E finalmente un grave v' impiega tanto tempo a calar liberamente da un' altezza, quanto vi spenderebbe a percorrere il doppio spazio, se colla velocità finale ne gisse equabilmente (a).*

§. 154.

(a) Niuna cosa ha tanto contribuito ad illustrare il nome di Galileo Galilei, quanto l' aver egli sagacemente rilevato le leggi della discesa verticale de' gravi, e sentiero di quegli altri, che obliquamente son proiettati: erigendosi col suo acume sugli altri Contemplatori della Natura, cui non era mai riuscito sviluppar le leggi di fenomeni cotanto ovvi, e fuggando virilmente quegli errori,

Tom. I.

F

§. 154. COR. II. La velocità finale di un corpo, che scende con moto uniformemente accelerato, misurasi dal doppio spazio diviso pel tempo. E ciò si rileva dal n. 3. Cor. prec.

§. 155.

errori, onde le Scuole erano da gran tempo ingombre. In fatti i Peripatetici teneano come assioma, che le velocità de' gravi fatti cadere da una stessa altezza fossero proporzionali ai pesi loro: e seguendo lo Stagirita diceano, che una palla di 100 libbre cadendo dall'altezza di 100 braccia dovesse arrivare in terra prima, che una di una libbra fosse scesa un sol braccio. Ma il Galilei con pruove argute, ed eleganti dimostrò, che cotesta Ipotesi distruggea se stessa, cioè che supponendo un mobile più grave muoversi più velocemente del men grave, se ne concludea, che il più grave dovrebbe girne men veloce. E maneggiando sottilmente e con leggiadria la verità della Prop. X. §. 62. conchiuse, che pesi disuguali debbanfi acquistare velocità uguali nel discendere da una stessa altezza, e che nelle vicinanze della nostra Terra la gravità acceleratrice de' corpi sia costante. Oltre a che egli fece piombare dall'alto del Duomo di Pisa masse ineguali, e mostrò ad infiniti Spettatori, che quivi ragunaronsi, esser quasi uguali i tempi della loro discesa da una stessa altezza, e con ciò le loro velocità finali. E facendo poi per archi di cerchio simili ed uguali oscillar due pesi, uno che fosse decuplo dell'altro, ritrovò isocrona coteste oscillazioni, e quindi uguali le loro velocità ne' punti infimi degli archi descritti. Dunque il Valentuomo dimostrò questa Verità Meccanica con tante ragioni sì a priori, che a posteriori, cui piegaron tosto la fronte i Filosofi di Europa, tranne i suoi avversari, che accesi di rabbia, e di dispetto gli divenner grandemente molesti.

Un' altro errore, che il Galilei anche rimosse dalla mente de' Fittici, si tenea per conseguenza immediata di una moltiplice esperienza, e come verità intuitiva. Ogni

gra-

§. 155. COR. III. Se due gravi si faccian cadere liberamente in due diverse regioni della Terra, le altezze percorse saranno come i quadrati de' tempi, e come le forze, che quivi gli accelerano (109).

F 2

§. 156.

grave discendente, diceasi, *vires acquirit eundo*: dunque la sua velocità dee crescere in ragion dello spazio. Ma il Galilei avvalendosi di quella verità, che si è recata nel §. 32., dimostrò con quattro semplicissime ed argute parole esser tanto falsa, ed impossibile cotesta supposizione, quanto che il moto facciasi in un'istante: e proscrivendola dal regno di Natura sostituì in sua vece, che le velocità ne' gravi cadenti fossero proporzionali ai tempi. Conveniva dunque per filosofar saggiamente far due cose: prima conoscer colla luce della Geometria i sintomi del moto in questa nuova Ipotesi, e poi confermarli con replicate, e sicure sperienze. Le quali investigazioni eran del pari malagevoli: quella per non essersi ancora alla Scienza della Natura rinnestata la Geometria, questa per non poterli ravvisar le parti dello spazio verticale trascorse dal grave cadente, essendo molto rapido cotesto moto: nè poi vi erano degli orioli a pendolo, onde misurare esattamente i piccioli tempi. Ma ecco gl'ingegnosi modi, con cui il Valentuomo riuscì nel suo intento.

Colla Geometria degl'Indivisibili rinvenne, che ogni grave in quel tempo, che naturalmente impiegavi a discendere da una data altezza, potrebbe percorrere un doppio spazio, se colla velocità finale ne gisse equabilmente. II. Che gli spazj corsi dal principio del moto sieno come i quadrati de' tempi. III. E che gli spazj descritti in tempi uguali debbano crescere come i numeri impari 1, 3, 5, 7, ec: Ei scoperse ancora, che se dalla cima di un piano inclinato si facean cadere due gravi, uno per la dilui lunghezza, l'altro verticalmente; le loro velocità in arrivando ad una medesima orizzontale dovean essere

§. 156. COR. IV. Un corpo proiettato in su verticalmente dee salir tant' alto, che di là ricadendo al luogo della proiezione, acquistasi quella forza, onde ne fu sospinto. E per ogni punto del suo cammino, ch'ei compie ora salendo, ora scendendo, dee passarvi colla stessa velocità.

§. 157. SCOL. I. Dalle affezioni del moto uniformemente accelerato si possono agevolmente conoscere quelle del moto uniformemente retardato, senza indugiarne di vantaggio.

§. 158. SCOL. II. L'acutissimo Ugenio traendo cal-

effere uguali, e ch'era la stessa la legge di accelerazione di questi due moti. Dunque pensò su de' piani inclinati praticar l'esperienze nel seguente modo. In una trave lunga 12. braccia fece incavare un canaletto altrettanto lungo, e largo poco più di un dito, fattolo tirar ben dritto, e pulito: e poi disposela in modo, che un diletto estremo si potesse ad arbitrio elevare ora un braccio, ora due, ec. sull'orizzonte. Per quel canaletto, che giaceasi obbliqua, vi facea discendere una palla di bronzo durissimo ben rotondata, e liscia: mentre lì d'appresso pendea una gran secchia piena d'acqua, la quale per un sottil cannello saldatogli nel fondo versava un filo d'acqua, che ricevendosi in un bicchiere nell'intero tempo della discesa della palla, o in una dilui parte, di volta in volta con esattissima bilancia si pesava, e 'l tempo n' esprimeva. Ed egli replicando ben cento volte tale esperienza, ed in diverse inclinazioni della trave all'orizzonte, sempre incontrò che gli spazj corsi dal principio del moto eran tra di loro, come i quadrati de' tempi. Sicchè conchiuse il Valentuomo, che la sua ipotesi era favorita non pur dalla Ragione, ma ben anche dalla Natura.

calcoli accurati da sicure sperienze rinvenne, che un grave lasciandosi liberamente cadere nelle vicinanze di nostra Terra, debba in un minuto secondo correre $15\frac{1}{2}$ pied. parig., i quali corrispondano a $15\frac{1}{2}$ pied. renan., o a 18, 57 palm. nap. (a). Dunque la velocità, che si ha guadagnato cotesto grave alla fine di un secondo è $30\frac{1}{2}$ pied. parig.

§. 159. DEFIN. XX. Qualora si dice la velocità V è dovuta all' altezza A , o vicendevolmente A è dovuta ad V , si vuol intendere, che un grave per acquistar cotesta velocità avrebbe a cadere liberamente dall' altezza A nelle vicinanze di nostra Terra, cioè sempre animato dalla gravità terrestre.

§. 160. SCOL. La velocità di un corpo si misura (b) dallo spazio, ch'ei può descrivere equabilmente in un secondo. Ma i moderni Meccanici sogliono misurarla dall' altezza, che l'è dovuta: poichè in tal modo non solo conoscesi il valore di essa velocità, ma questa può talvolta facilmente esibirsi.

† 3

PROP.

(a) I piedi Renani $15\frac{1}{2}$ equivalgono a scrup. 15625, la cui radice quadrata è esattamente 250.

(b) Nota (a) §. 16.

PROP. XXIV. TEOR.

§. 161. *Se un grave si lasci cadere all'immobile centro N delle forze, ov' ei tenda come la sua distanza da esso; gli spazj corsi, le velocità finali, e i tempi impiegati a percorrerli, saranno rispettivamente come i seni versati, i seni retti, e gli archi.*

Fig. 8.

DIM. Sia A quel luogo, donde si lasci cadere il grave, ed AB perpendicolare ad AN esprima il peso di cotesto corpo in A. Si congiunga la retta NB, e pe' punti C, F, ec. si conducano le rette CQ, FE, ec. parallele ad AB; saranno le ordinate AB, CQ, FE ec. del triangolo ANB come le ascisse NA, NC, NF, ec. vale a dire come le forze, che accelerano il grave in A, C, F, ec. Dunque il triangolo ANB è la scala delle forze centripete (87) in questa ipotesi: e le velocità, che lo stesso grave acquistasi calando dalle altezze AC, AF, saranno (124) in sudduplicata ragione de' trapezj ACQB, AFEB.

E poichè i triangoli simili ANB, CNQ sono come i quadrati de' lati omologhi NA, NC, sarà convertendo $ANB:ACQB::AN^2:AN^2-CN^2$, ed invertendo $ACQB:ANB::AN^2-CN^2:AN^2$. E dimostrandosi per simil modo, che stia $ANB:AFEB::AN^2:AN^2-FN^2$, sarà *ex æquo* $ACQB:AFEB::AN^2-CN^2:AN^2-FN^2$. Or descritto col

cento

centro N intervallo NA il circolo ASN, che stia nel piano del triangolo ANB, e prodotte le rette QC, EF, che ne incontrino la periferia in D, ed M, sono DC^2 , ed MF^2 rispettivamente uguali ad AN^2-CN^2 , ed AN^2-FN^2 (a). Dunque il saran pure DC^2 , ed MF^2 , come i trapezj ACQB, AFEB; ed esse rette DC, MF in sudduplicata ragione di questi trapezj, cioè come le velocità acquistate dal grave nelle discese per AC, AF. (b)

Si prendano i due spazietti Cc, Ff infinitesimi, e proporzionali agl' interi spazj AC, AF, ed ordinate nel circolo le rette cd, fm, si calino dP, mR perpendicolari sulle CD, ed FM; saranno (c) i triangoletti DdP, MmR rispettivamente simili a DNC, MNF. Dunque starà $CD:DN::Pd:Dd$, e l' rettangolo di DN in Pd, o in Cc sarà uguale all' altro di CD in Dd. E dimostrandosi nella stessa guisa, che il rettangolo di MN in Ff adegui l' altro di FM in Mm, sarà la ragione de' rettangoli di DN in Cc, e di MN in Ff uguale a quella degli altri due di CD in Dd, e di FM in Mm. Ma i primi son proporzionali (d) agli spazietti Cc, Ff, e gli altri due sono in ragion composta

F 4 di

- (a) 35. El. III.
- (b) Come si è mostrato.
- (c) Propoz. IX.
- (d) 1. El. VI.

di CD ad FM, che rappresentano le velocità del grave in C, ed F, e di Dd ad Mm. Dunque questi archetti Dd, Mm (12) saran come i tempi, ne' quali sono stati trascorsi gli spazietti Cc, Ff. E quindi i tempi delle discese (a) per le altezze AC, AF saran come gli archi AD, AM, i di cui seni retti DC, MF esprimono le velocità finali, ed i seni versi AC, AF sono gli spazj corsi dal mobile. C. B. D.

§. 162. COR. I. Sia SDA la circonferenza di un circolo massimo terrestre, di dove si lasci all'ingiu cadere il grave A; saranno le forze, che lo accelerano, come le distanze dal centro di nostra Terra: la quale ipotesi è stata abbracciata dal Cavalier Newton.

§. 163. COR. II. Dunque nel moto di questo grave dovrà verificarsi, che gli spazj corsi, le velocità finali, ed i tempi sieno rispettivamente come i seni versi, i seni retti, e gli archi: cioè se lo spazio descritto sia AC, il tempo sarà espresso dall'arco AD, e la velocità in C dal di lui seno retto DC.

§. 164. COR. III. Dunque in questa Ipotesi di gravità è trascendente tanto il rapporto de' tempi agli spazj corsi, quanto quello de' tempi alle velocità finali.

§. 165. SCOL. Quest' Ipotesi di gravità fu adottata

(a) §. 24., e *Prin.* VIII.

adottata da alcuni Matematici Italiani, e l'nostro Borelli la credè verificata rispetto alle acque. Vedi Guido Grandi *nelle Note al Tratt. del Galilei sul mot. unifor. acc.*

PROP. XXV. TEOR.

§. 166. *La velocità, che nel centro della nostra Terra si acquisterebbe un grave lasciatusi cadere dalla superficie, è dovuta all'altezza di un mezzo raggio terrestre.*

E se con questa velocità un' altro mobile percorra equabilmente un quadrante di un circolo massimo della Terra, tanto tempo v'impiegherà a descriverlo, quanto quel grave a cadere dalla superficie al centro.

DIM. PART. I. Il semidiametro terrestre AN si bisечи in F; e poi si compia il rettangolo AFG B; sarà l'aja di questo rettangolo uguale a quella del triangolo ANB. Ma quel rettangolo è la scala della gravità costante, e l'triangolo ANB è quella della gravità decrescente, come la distanza dal centro N (87). Dunque tant'è la velocità, che si acquisterebbe un grave discendendo per la metà del raggio terrestre sempre animato dalla gravità AB, quanto quella che gli conferirebbe la discesa per NA accelerato dalla gravità decrescente come la distanza (33).

PART. II. I tempi, onde descrivonsi equabilmente l'archetto Dd, e lo spazietto Cc, quella

quello colla velocità NS , questo coll' altra DC , sono (15) come Dd a Cc , e come DC ad NS , o ND . Ma si è qui sopra dimostrato, che stia $Dd : Cc :: ND : DC$. Dunque (14. n. 5) que' tempuscoli sono uguali. E quindi il saran pure i tempi, ne' quali il grave scende dalla superficie al centro; e l' mobile si aggira equabilmente in un quadrante di un circolo massimo colla velocità dovuta ad un mezzo raggio terrestre. C. B. D.

PROP. XXVI. PROBL.

§. 167. Ritrovare il tempo, in che un grave liberamente cadendo dalla superficie della Terra, perverrebbe al dilei centro.

I. Si ritrovi la velocità, che acquistasi da un grave disceso per la metà del raggio della nostra Terra; animato costantemente dalla gravità terrestre (a). II. Si divida il quadrante di un circolo massimo terrestre per si fatta velocità: sarà tal quoto il tempo addimandato.

§. 168. Or essendo il semidiametro terrestre 19741200 pied. parig., sarà un quadrante di un circolo massimo della nostra Terra 31009407 pied. parig. Ed essendo la velocità acquistasi da un grave alla fine di $15\frac{1}{2}$ pied. parig. uguale a $30\frac{1}{6}$: sarà quella ch'è dovuta ad un mezzo raggio terrestre uguale a 24405. E di-

(a) §. 153, e 158.

videndo 31009407 per 24405, il quoto 1270 indicherà i secondi del tempo addimandato; cioè il tempo della discesa del grave dalla superficie al centro sarà 21', 10".

PROP. XXVII. TEOR.

§. 160. Poste le medesime cose della prop. XXIV., se due gravi uguali si lascino liberamente cadere da luoghi A , e Q ; essi arriveranno in tempi uguali al comun centro N delle forze. Fig. 9.
E le velocità quivi acquistate saran tra di loro, come le altezze AN , NQ , ond' essi son discesi.

DIM. Descritti col medesimo centro N , e cogl' intervalli NA , NQ i circoli AS , QT , che però stiano in uno stesso piano, si prenda nella circonferenza dell'esteriore l'archetto Dd infinitesimo, e si congiungano i raggi DN , dN . E poi si concepiscan due altri corpi muoversi equabilmente pe' quadranti AS , QT con quelle velocità, che i gravi avrebbersi acquistate nelle discese per AN , QN . E poichè le velocità; che i gravi A , e Q si acquistano discendendo per AN , e QN , sono in sodduplicata ragione delle aje ANB , QNE (128); saranno esse come AN , e QN . E quindi il tempo per Rr (15) starà a quello per Dd , come Rr a Dd , e come ND ad RN , cioè a dire in ragion di uguaglianza, essendo gli archi simili Rr , Dd proporzionali ai raggi RN , DN .

DN. E ciò sempre dimostrandosi, saranno i tempi, ne' quali descrivonsi i quadranti AS, QT colle mentovate velocità, uguali fra loro. E saran benanche uguali i tempi delle discese de' due gravi (166) per le altezze AN, QN. C. B. D.

§. 170. COR. E generalmente se un corpo muovasi con tal legge, che le forze acceleratrici sieno come que' spazj, che gli restano a descrivere; ei perverrà sempre in un istesso tempo al punto infimo, da qualunque punto cominci a discendervi.

PROP. XXVIII. TEOR.

Fig. 10. §. 171. Se un grave si lasci cadere dal luogo A all'immobile centro C delle forze, ov'ei tenda in ragion inversa duplicata della sua distanza; i quadrati delle velocità, con cui ne perviene a' luoghi B, e b, sono direttamente come gli spazj corsi AB, Ab, ed inversamente come gli spazj CB, Cb, che gli restano a percorrere in sino al centro.

DIM. Dal punto A si ecciti sulla CA la perpendicolare AD, ch' esprima il peso del grave in A; e poi condottale per C la parallela CQ si descriva l'Iperbole cubica DEde, che abbia per asintoti AC, CQ, e passi per D. Finalmente si menino per B, e b le ordinate BE, be alla stessa curva DEde. Ciò posto le ordinate AD, BE, be, ec. sono

sono per la natura dell'Iperbole DEd inversamente come i quadrati delle loro ascisse CA, CB, Cb, ec. (a), cioè dalla supposizione come le forze acceleratrici in A, B, b, ec. Dunque l'Iperbole cubica DEde (87) sarà la scala delle forze centripete in questa legge di gravità: ed i quadrati delle velocità, che il grave acquistasi nelle discese per AB, Ab, saranno (124) come le corrispondenti aje ABED, AbED. Ma queste (b) sono direttamente come AB, Ab, ed inversamente come CB, Cb. Dunque in questa ragione saran pure i quadrati delle riferite velocità del grave. C. B. D.

§. 172. COR. I. Ed esse velocità saranno in sudduplicata ragion diretta degli spazj corsi, ed in sudduplicata inversa di que', che gli restano a percorrere in sino al centro.

Fig. 11. §. 173. COR. II. Si descriva su di BR il semicerchio BDR, e quivi ordinate, ovunque ne piaccia, le due rette cd, pt, si tirino le corde Rd, Rt, che incontrino in A, ed E la tangente BAE. Unita la Bd il triangolo BRA sarà simile a Bcd: dunque starà BA^2 a BR^2 , come Bc^2 a cd^2 , o come (c) Bc a cR : e sarà in simil guisa BR^2 : BE^2 :: Rp : pB : dunque (d) sarà BA^2 : BE^2 :: $(Bc:cR)$ $(Rp:pB)$

- (a) Prenez. X.
- (b) Prenez. X. n. 1.
- (c) Essendo $\frac{Bc}{cR}$ Bc, cd, cR.
- (d) Prenez. I.

(R p : p B), cioè (a) sarà $BA^2 : BE^2 :: (Bc : Bp)$ (R p : c R).

§. 174. COR. III. Sicchè i quadrati di B A , e di B E sono (171) in duplicata ragione delle velocità, che in c , e p acquistasi un grave calando liberamente dalle altezze B c , B p . E queste velocità saran poi come le tangenti B A , B E .

Fig. 10. §. 175. COR. IV. Se da i luoghi A , ed a si faccian liberamente cadere due gravi uguali, i quadrati delle velocità, ond' essi pervengono ai luoghi B , e b , saranno direttamente come gli spazj corsi A B , a b , ed inversamente come i rettangoli A C B , a C b fatti dalle intere altezze A C , a C negli spazj da descriversi C B , C b . Imperocchè in questa ragione sono (b) le aje iperboliche A B E D , a b e d .

PROP. XXIX. TEOR.

§. 176. Poste le medesime cose della Prop. prec. i tempi, ne quali percorronsi dal grave gli spa-

Fig. 11. zj B C , B P , sono come B D + D C , e B T + T P , cioè come le somme de' seni retti, e degli archi, di cui gli spazj corsi sono i seni versi.

DIM. Si prendano le retticciuole C c , P p infinitesime, e proporzionali agli spazj B C , B P ,

(a) Prenoz. II.

(b) Prenoz. X. n. 2.

B P , e ordinate nel semicircolo B D R le due rette d c , t p , si tirino le corde B d , B t , che incontrino in f , e g le altre ordinate C D , P T . E poichè l'angolo O d B fatto dalla tangente O d e dalla corda d B è quanto l'angolo d R B posto nell' alterna porzion del circolo : ed è poi l'angolo d R B uguale a B d c per la similitudine de' triangoli d R B , B d c , saranno i due angoli O d B , B d c tra se uguali . Ma questi angoli sono anche rispettivamente uguali agli altri due D d f , D f d (a) : dunque i due angoli D d f , D f d del triangolo D d f dovranno pareggiarsi, e sarà quindi f D uguale all' archetto D d , ed f r (b) uguale a D d + D r . In simil guisa dimostrasi g s uguale a T t + T s .

E poichè il triangolo A B R è simile a B d c , e con ciò a d f r , sarà $BA : BR :: dr : rf$. E dimostrandosi nello stesso modo, che stia $BR : BE :: gs : ts$, sarà BA a BE in ragion composta di $dr : rf$, e di $gs : ts$, cioè (c) in ragion composta di $dr : ts$, e di $gs : fr$. Vale a dire, le velocità con cui trascorronsi le retticciuole c C , p P dal grave, che si lascia cader liberamente dal luogo B sono

(a) Prop. 15. e 29. El. I.

(b) Se l' archetto D d si ritrovasse nel quadrante inferiore T R , la retticciuola f r sarebbe uguale a D d — D r .

(c) Prenoz. II.

(174), sono fra loro direttamente come gli stessi spazietti cC , pP , ed inversamente come le retticciuole fr , gs , o come le loro equivalenti somme $Dd + Dr$, $Tt + Ts$. Dunque queste somme saran (12) come i tempuscoli, ne' quali percorronsi dal grave gli spazietti cC , pP : e quindi gl' interi tempi della discesa del grave per le altezze BC , BP saranno (a) come $BD + DC$, e $BT + TP$ (b). C. B. D.

PROP. XXX. TEOR.

§. 177. Tanto tempo v'impiega questo grave a calare dal luogo B al centro R delle forze, quanto vi spenderebbe un' altro corpo ad aggirarsi equabilmente nella semicirconferenza BTR colla velocità, che quello si acquista calando dall' altezza Bp metà di BR.

DIM. Essendo per ipotesi Rp uguale a pt, sarà pure RB uguale a BE. E quindi le velocità, onde questo grave giugne ai luoghi c, e p fattovi cadere da B, saranno come BA, e BR (171), cioè a dire come le retticciuole dr , rf , essendo il triangoletto drt simile a Bcd , o a BRA . Dunque il tempo, che v'impie-

(a) Prenoz. IV.

(b) In questa ipotesi di gravità è trascendente la ragione degli spazj ai tempi, e de' tempi alle velocità finali.

piegherebbe un corpo a descrivere l'archetto Dd colla seconda di queste velocità, al tempo, in che dal grave percorresi lo spazietto Cc , starà (15) come $Dd : Cc$, e come $rd : rf$, cioè (a) come $Dd : rf$, o come $Dd : Dd + Dr$. E quindi l'intero tempo, nel quale si volgerebbe equabilmente un mobile nella circonferenza BDR colla mentovata velocità, al tempo della discesa del grave dall' altezza BR starà, come la semicirconferenza BDR alla stessa semicirconferenza (b), cioè in ragion d'uguaglianza. C. B. D.

§. 178. COR. I. QR, e BR sieno le altezze, onde due gravi uguali si faccian cadere in sino al centro R, ed esse si bisechino ne' punti C, e P; saranno i tempi delle discese di questi gravi, come le loro velocità ne' punti P e C, e come le semicirconferenze, che han per diametri le stesse altezze QR, e BR (15). Fig. 13. n. 1.

§. 179. COR. II. Cioè a dire i tempi, ne' quali costesti gravi discendono liberamente all' immobile centro delle forze, sono direttamente come le intere altezze, ed inversamente come le velocità acquistatesi per le metà di esse.

§. 180. DEFIN. XXI. Se vi sien due ragioni una duplicata dell' altra, quella che da queste

(a) Prenoz. I.

(b) Il seno del semicerchio BDR è zero; dunque $BDR + \text{sen. BDR}$ sarà uguale a BDR.

Tom. I.

G

ste si compone, suol dirsi *sesquuplicata* della prima.

PROP. XXXI. TEOR.

§. 181. In questa Ipotesi di gravità i tempi, che v'impiegan due gravi uguali a scendere liberamente dai luoghi Q, e B all'immobile centro R delle forze, sono in *sesquuplicata* ragione delle altezze, onde ne son discesi (a).

DIM. I quadrati delle velocità, che si acquistano cotesti gravi ne' punti medj C, e P delle altezze QR, e BR, sono (175) in ragion composta di QC:BP, di RP:RC, e di BR:

(a) Suppongasì la gravità proporzionale alla potenza n della distanza dal centro R, e che da' luoghi Q, e B vi si lascino cadere due gravi uguali. Le altezze QR, e BR si chiamino r , e s ; e detta x una qualunque

Fig. 13. n. 1. RC, facciasì $RQ:RC::RB:RP$, sarà $RP=\frac{rx}{r}$.

Dunque le velocità, onde cotesti gravi giungono rispettivamente in C, e P, (n.a. §.135) saran come

$$\sqrt{r^{n+1}-x^{n+1}}, \text{ e } \sqrt{s^{n+1}-\left(\frac{rx}{r}\right)^{n+1}},$$

omettendosì que' fattori comuni, che vi si dovrebbero contenere. Ma questi radicali sono nella ragione di $r^{\frac{n+1}{2}}$,

a $s^{\frac{n+1}{2}}$, come con lieve riduzione può rilevarsi. Dunque in questa medesima ragione saranno le velocità, onde i mentovati gravi pervengono a i termini degli spazj QC, BP proporzionali all' intere altezze QR, BR.

Che

BR:QR, cioè come BR:QR (a). E quindi le semplici velocità saranno in sudduplicata ragione di BR:QR. Ma i tempi delle discese per le altezze QR, e BR (179) sono come QR a BR, e come la velocità in P a quella in C. Dunque i medesimi tempi saranno in ragion composta di QR a BR, e della sudduplicata di QR a BR: cioè a dire in *sesquuplicata* ragione delle altezze QR, e BR (180), onde i gravi ne son discesi. C. B. D.

G 2 PROP.

Che se gli spazietti Cc, Pp sieno proporzionali a QC, e BP, e con ciò a QR, e BR, i tempuscoli per Cc, e Pp (15) saran come r a s , e come $r^{\frac{n+1}{2}}$ ad $s^{\frac{n+1}{2}}$,

cioè come $r^{\frac{1-n}{2}}$ a $s^{\frac{1-n}{2}}$. Ed in questa stessa ragione

saran pure (12. El. V.) i tempi, ne' quali discenderanno i medesimi gravi al comun centro R delle forze. Dunque

TEOR. I. Se la gravità di un corpo sia come la potenza n della di lui distanza dal centro; la velocità, ond' ei quivi ne perviene calando dall' altezza r , sarà come la potenza $(1+n):2$ della stess' altezza.

TEOR. II. E 'l tempo, in che vi discende, sarà come la potenza $(1-n):2$ della medesima altezza.

L' espressione del tempo esibita nell' esempio della not. a §. 135. non può generalmente integrarsi; pur nondimeno il Sig. Eulero nel §. 308. della sua Mecc. si avvisò, che ogni termine dell' integrale del tempo dovrebbe essere della dimensione $(1-n):2$, e da ciò ne conchiuse questo II. Teorema. Ma qui mi è riuscito rilevarlo dalla 12. El. V. senza ricorrere ad integrazioni di formole, o a congetture sulle dimensioni de' termini di un' integrale, che non può prendersi generalmente.

(a) Prenoz. III.

PROP. XXXII. TEOR.

§. 182. *In questa medesima Ipotesi, la velocità con cui un grave giugnerebbe nel luogo B della Terra fattovi cadere da un' altezza infinita, non è che finita: ed è uguale a quella, ch'ei si acquisterebbe cadendo dal semidiametro BC della Terra sempre accelerato dalla gravità terrestre.*

Fig. 12.

DIM. La retta BD perpendicolare al semidiametro terrestre BC dinoti la gravità del corpo A posto nel punto B della superficie della Terra. Si compia il rettangolo BCFD, e per D si descriva l'Iperbole cubica LD rapportata agli assintoti rettangoli AC, CF; sarà questa curva la scala della gravità decrescente come il quadrato della distanza (87). Prendasi finalmente BA uguale al semidiametro BC, e si compia il rettangolo BN.

E poichè l'aja assintotica infinitamente lunga BXD è uguale (a) al rettangolo delle sottoposte coordinate BD, BC, cioè a dire al rettangolo BDNA, la velocità, che si acquisterebbe un grave calando dall'altezza infinita XB, sarebbe dovuta ad AB, ch'è uguale al semidiametro terrestre BC (133). C. B. D.

§. 183. COR. I. Essendo il semidiametro terrestre di pied. parig. 19741200, la velocità do-

(a) *Prenoz. X.*

dovuta a quest' altezza sarà 34510 piedi parig. Imperocchè facendosi come $\sqrt{15 + \frac{1}{15}}$ a $\sqrt{19741200}$, così $30 + \frac{1}{6}$, (che dinota (158) la velocità dovuta a pied. $15 + \frac{1}{15}$) ad un quarto, questo l'è a un di presso 34510.

§. 184. COR. II. Dunque nella vera Ipotesi della gravità decrescente come il quadrato della distanza, un grave lasciandosi liberamente cadere su della nostra Terra da un' altezza infinita, quivi ne perverrebbe con una velocità finita, e tale, che con essa passerebbe equabilmente 34510 pied. in un secondo.

§. 185. COR. III. E se dalla superficie terrestre con questa velocità un grave si proiettasse in su verticalmente; ei dovrebbe ascendere ad un' altezza infinita, senza potersi mai estinguere il suo moto.

§. 186. SCOL. Questo paradosso meccanico, che intrecciando poche ragioni ho qui sinteticamente rilevato, rinvennelo con dell' analisi il P. Fontana, Insigne Analista Italiano, e della Università Pavese Ornamento, e Splendore.

C A P. VII.

DELLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

§. 187. DEF. XXII. **D**ue forze insieme impresse ad un corpo diconsi *cospiranti*, se le loro direzioni formino una sola retta, ed entrambe spinganlo verso una stessa parte.

§. 188. DEF. XXIII. E tali forze si diranno *opposte*, se per direzioni, che formino una retta continuata, ne spingano il corpo a parti contrarie.

§. 189. DEF. XXIV. Due forze diconsi *laterali*, se i valori, e le direzioni loro sieno espresse dai lati di un'angolo rettilineo, ed esse insieme spingano un corpo, ch'è nell'apice dello stesso angolo.

§. 190. ASS. I. Un corpo investito da due forze cospiranti dee muoversi per la comune loro direzione con una forza uguale alla di loro somma.

§. 191. ASS. II. E se le forze sieno opposte, il corpo dovrà girne colla loro differenza per la direzione della forza maggiore.

§. 192. COR. Se per avventura sieno uguali l'energie delle forze opposte, queste si equilibreranno tra loro, e l' corpo rimarrà in quiete.

§. 193.

§. 193. ASS. III. Un corpo spinto da due forze laterali deesi muovere equabilmente con una determinata forza, e per una determinata direzione.

§. 194. SCOL. Trascende l'umano intendimento il saper come Natura dalle forze laterali una sola ne formi, che *media* si domanda, e come all'istante ella compia questo maraviglioso lavoro d'azione. Pur non di meno l'inerzia della materia chiaramente ne mostra il divisato effetto, cioè che il mobile investito da più forze istantanee debba girne per dritto, ed equabilmente, come se una determinata forza avesselo spinto solamente (a). Ma dura cosa, e malagevole è di tal

G 4 for-

(a) Non v'ha sorgente più copiosa di verità meccaniche, statiche, ed idrodinamiche, quanto il *Principio della Composizione delle Forze*, che rinvennero il Gran Galilei nel Dialogo IV. delle due Scienze Nuove sul moto. Questo Padre de' veri Contemplatori della Natura dimostrò con un certo filo di ragioni, che se mai un corpo conducasi con due moti equabili, l'uno orizzontale, verticale l'altro, l'impeto risultante dalla composizione di essi debba essere in potenza uguale ad amendue, cioè che la velocità del mobile debba esprimersi colla radice de' quadrati delle velocità di que' due moti. E l'Cavalier Nevvton nato a promuovere grandemente le invenzioni Galileane, formò un'altra dimostrazione, che alla composizione delle forze più che a quella de' moti si convenisse. „ Il corpo A, dicea questo Valentuomo „ Cor. I. leg. III, qualora è spinto dalle forze M, ed N, i valori, e le direzioni delle quali son dinotate dalle rette AB, AC, dovrà condursi per la diagonale AD del parallelogrammo ABCD, che si compone da AB, ed AC, descrivendola nello stesso tempo, „ in

Fig. 13.
n. 2.

forza investigarne la quantità, e la direzione, o da ciascuna di queste due determinazioni l'altra derivarne. Ond'io quaggiù metterò innanzi a' vostri occhi il prospetto delle proprietà di lei, cioè le *condizioni*, e le *limitazioni*, che dee aver tal forza media, perchè distintamente intendiate que' principj, co' quali l'ho rinvenuta.

§. 195.

„ in che con ciascuna forza farebbesi condotto per ciascun lato. Imperciocchè la forza N spingendo cotesto corpo „ per la direzione AC parallela a BD non estingue la „ velocità, che la forza M gl'impartisce d'accostarsi „ alla BD . Dunque dopo qualche tempo ei dovrà rin- „ venirli in un punto della BD . Ma la forza M nè „ tampoco toglie al mobile la velocità d'accostarsi alla „ CD prodottavi dalla forza N : dunque è d'uopo, che „ alla fine dello stesso tempo ei si ritrovi nella CD , e „ che colle forze congiunte pervenga per la AD nel luo- „ go D , ove si legano le due rette BD , CD . „ Ma com'è, può dir taluno, e donde addiviene, che in „ questo misto di forze restino tuttavia inalterati i loro ef- „ fetti, cioè le velocità d'appressarne alle BD , CD il „ mobile A , che insieme investono? I Comentatori del „ Nevvton non fan che ridire, ciò che ha detto PILL. Au- „ tore senza dilucidarlo: ed altri temperano la rapportata „ dimostrazione nel seguente modo. „ In virtù della forza „ M il corpo A dovrebbe alla fine di un dato tempo „ ritrovare in un punto della AB distando per un dato „ intervallo dalla retta AC : e per la forza N dovreb- „ besi alla fine dello stesso tempo rinvenire in un punto „ della AC , il quale disti da AB per una data retta. Ma „ il corpo A non può trovarsi nello stesso tempo ne' „ luoghi B , e C , nè veruna forza vale a distruggere la „ determinazione dell'altra: dunque necessariamente dee „ ritrovarsi in un punto tale, che le perpendicolari da „ esso calate sulle AC , ed AB sien quanto quelle, che „ vi

§. 195. I. La forza media dee avere una determinata direzione, ed energia: onde non è, che una sola.

§. 196. II. La forza media, in parità di altre circostanze, dee variare secondo che si cangi l'angolo delle direzioni delle forze laterali. Questo nesso, ch'evvi tra la variazione del-

„ vi si menano da B , e C . Or questo punto (come „ facilmente dimostri) è nella diagonale del parallelo- „ grammo $ABDC$. Dunque ec. „ Ma siemi lecito pro- „ porre certi miei dubbj sul valore di questa dimostrazione. La forza M spingendo con una data energia il corpo A per ABX , lo determina a descrivere equabilmente lo spazio AB in un dato tempo. Dunque alla fine di que- „ sto tempo ei dovrà trovarsi in un punto della AX di- „ stante dal luogo A per un dato intervallo: e dovrà al- „ la fine di quel tempo serbare una certa distanza dal- „ la retta CAE , e da qualunque altra data di sito: „ imperciocchè la perpendicolare BE l'è data di magnitu- „ dine per esser dato di specie, e di grandezza il triangolo ABE . Sicchè la forza M mentre alla fine di quel „ tempo allontana il mobile per un dato intervallo dal „ luogo A , il fa anche serbare una certa distanza dalla „ retta AE data di posizione: e di queste determinazioni „ la prima, come ognun lo ravvisa, non è che principa- „ le, e l'altra n'accessoria: come lo stesso può dirsi dell' „ altra forza N . Or nell'atto, che le due forze M ed N „ insieme agiscono per AB , ed AC sul corpo A , le loro „ principali determinazioni, cioè quelle di traslatarlo nello „ stesso tempo in B , e C non vi possono regger tuttavia: „ come dunque le di loro accessorie dovran rimanervi? Ol- „ tre a che molti Scrittori di Meccanica, tra' quali evvi „ il dottissimo Wolfio, trascurano di dimostrare, che il „ corpo equabilmente conduca per la diagonale del detto „ parallelogrammo. Dunque non potrà mai convenevolmente „ con-

dell'angolo delle forze laterali, e quella della forza media, lo dirò *legge della variazione della forza media*.

§. 197. III. La forza media pareggia la somma delle laterali, quando svanisce l'angolo, che comprendono le direzioni di queste forze. Ed ella sarà uguale alla differenza delle laterali, quando l'angolo delle loro direzioni facciasi di 180° . (190, 191). Questi valori sono il primo, e l'ultimo rapporto della forza media alle laterali: o piuttosto dir si possono le di lei limitazioni.

§. 198.

conchiudersi, che le velocità laterali e la media sieno come i lati di esso parallelogrammo e come la diagonale rispettivamente; nè tampoco che in questa ragione sieno pure le forze laterali e la media.

Ma oltre a ciò l'acutissimo Daniele Bernulli credendo verità contingente, che le forze sieno come le velocità generate, rigettò le antiche dimostrazioni sulla composizione delle forze, come quelle, che reggendo su di cotesta base men salda non potessero stabilire la verità necessaria di questo Principio Meccanico; e si accinse a formarne un'altra ben rigida, e convincente, ove niun principio precario, o vacillante vi s'intrudesse in verun modo. Egli a tal uopo premettendo alcuni principi Intuitivi dimostrò sinteticamente 3. Teoremi, e sciolse 4. Problemi nel Vol. I. Pietrob. onde rilevò poi, che se dalle forze laterali si compia un parallelogrammo, la forza media debba esprimersi dalla diagonale di questa figura, che passi per l'angolo delle forze laterali. Queste dimostrazioni furono alquanto ristrette dal P. Riccati negli Att. Bolog. 1745. e' il Sig. d'Alembert nella sua Dinamica volle pur congegnarne un'altra sintetica, ed assai breve; della quale, cred'io, che poco rettandone pago questo Geometra, riprendesse ne' suoi Opuscoli a dimostrare analiticamen-

§. 198. IV. Supposto, che AF dinoti la forza media emergente dalle laterali AB, AC, un'altra forza AD uguale ed opposta alla AF Fig. 14. dovrà equilibrarsi colle forze laterali AB, AC. E ciascuna di queste, per esempio la AB dovrà pure equilibrarsi colla AD, e coll'altra laterale AC.

§. 199. V. Se s'intenda il corpo A spinto dalla forza AC, ch'è una delle due laterali, e dalla AD, ch'è uguale e contraria alla media AF; ei dovrà muoversi colla forza AL, ch'è uguale all'altra laterale AB, ed a lei opposta. E se

mente alcuni Teoremi del Bernulli. Ma finalmente l'ill. Cavalier de Foncenex facendo variare l'angolo delle direzioni di due forze laterali tra se uguali, rinvenne il valore della forza media con un metodo analitico diretto; e poi sciolse generalmente il Problema della Composizione delle forze.

Or se le sole limitazioni (197, 203) delle forze laterali bastassero ad effettuarne una soluzione completa e soddisfacente, potrei senza tanto ineticarmi a' principi analitici, ragionare a questo modo. Ciascuna delle due forze laterali tra se uguali sia a , φ l'angolo delle loro direzioni, e $2a\Phi$ esprima il valore della forza media; dovrà essere $\Phi = 1$, quando $\varphi = 0$ (197). $\Phi = 0$, quando $\varphi = 180^\circ$ (111), e $\Phi = \frac{1}{2}$, quando $\varphi = 120^\circ$ (203). Dunque necessariamente vuol esser $\Phi = \text{Cos. } \frac{1}{2} \varphi$, come n'è risultato da' calcoli dell' Ill. Foncenex Vol. II. Att. Turin. Ma omettendo queste analitiche ricerche; e le dimostrazioni sintetiche del Sig. Bernulli, che negli animi de' Giovanetti non usi a ragionar sì forte indurrebber qualche smarrimento; piacemi dimostrarvi il parallelogrammo delle forze con un metodo corto, e scevro, per quanto mi sembra, da' nei delle antiche dimostrazioni.

E se mai spingasi cotesto corpo colla forza AD , e colla laterale AB , la forza media sarà AE uguale, e contraria alla laterale AC .

§. 200. SCOL. Questo rapporto della forza media alle laterali mi ha guidato nelle seguenti speculazioni, e nell'investigarla con un metodo nuovo, agevole, e sgombro di que' nei, che a' metodi antichi si sono imputati.

§. 201. VI. Qual è la legge della variazione della forza media AF , e l' modo ond' ella si rinviene dalle laterali AB , AC , tal esser dee la variazione della forza AL , e l' artificio, con cui dalle forze AC , AD si rinverrebbe.

§. 202. VII. Ed avrassi per genuino quel metodo, onde dalle forze laterali AB , AC si determini la forza media AF , se adattandosi alle forze AC , AD dia la forza AL uguale, e contraria alla laterale AB . Questo vuol intendersi anche riguardo all' altra laterale AC .

§. 203. VIII. Se mai le forze laterali si uguagliano, la direzione della forza media dovrà bisecare l'angolo delle direzioni di quelle forze. E se l'angolo delle direzioni di tali forze sia ancora di 120° , la forza media sarà uguale a ciascuna delle laterali.

§. 204. SCOL. Queste considerazioni della forza media fluiscono dalla di lei natura, e sono sufficienti a determinarla col calcolo delle Funzioni, o coi stenti della rigorosa Sintesi. Tal forza non è che una sola. Ella dee
avere

avere le condizioni quassù rapportate, e non altre: dunque necessariamente dovrà esser quella, ove tali condizioni, e limitazioni abbiano luogo; ed a questo modo ho procurato ordire la dimostrazione del seguente Problema.

PROP. XXXIII. PROBL.

§. 205. *Date le due forze laterali AB , AC ritrovare l'energia, e la direzione della forza media.* Fig. 14.

COST. I. Gli estremi delle rette AB , AC , eh' esprimono le direzioni, e l'energie delle forze laterali, si uniscano colla BC . II. Si bisechi in O cotesta congiungente, e vi si tirino dal vertice A la retta AO : io dico, che il doppio di questa retta debba dinotare l'energia, e la direzione della forza media.

DIM. La retta AO producasi d'ambe le parti, sicchè AF , ed AD di essa sian duple. Inoltre si tirino le altre due rette CD , BD , e bisecate in G , ed H si congiungano le due AG , AH ; sarà la BA dupla di AG , ed a dritto con questa; siccome anche la CA si giace a dritto colla AH , e di questa n'è dupla (a).

E poichè (b) le tre rette AB , AC , AF sono come i seni degli angoli CAF , BAF , BAC ,

(a) *Prenoz. XI.*

(b) *Prenoz. XI. n. 1.*

BAC, e questi seni sono gli stessi di que' degli angoli CAD, LAD, CAL: anche le 3. rette AL, AC, AD saran come i seni degli angoli CAD, LAD, CAL. Di più (a) sta $AF:AB+AC::\text{Sen. BAC}:\text{Sen. BAF}+\text{Sen. CAF}$: ed è ancora $AL:DA+AC::\text{Sen. DAC}:\text{Sen. DAL}+\text{Sen. CAL}$. -E facendosi l'angolo BAC di 180° la retta AF diviene uguale alla differenza di BA, ed AC: siccome quando poi svanisce l'angolo BAC, la retta AF fassi uguale alla somma di AB, e di AC.

Inoltre se l'angolo BAC sia di 120° , e le forze BA, AC si uguaglino, la dupla della retta AO sarà quanto ciascuna delle laterali AB, AC. E lo stesso può dirsi di AL rispetto alle due CA, ed AD, e di AE riguardo ad AB ed AD (b).

Or la forza media (195) non è, che una sola, e quella esser dee, ove si trovino verificate tutte le condizioni, e limitazioni, e tutti que' rapporti alle laterali, ch'io vidi doverlesi appartenere (c). Ma tali cose si son dimostrate appartenersi alla AF: dunque questa sarà la forza media, che si addomanda. C, B, D.

§. 206. COR. I. Se l'energie delle forze laterali

(a) Prenoz. XI. n. 2.

(b) Prenoz. XI. n. 3.

(c) Vedi i §§. 296. fino a 297.

rali si uguaglino, ciascuna di queste forze starà alla media, come il raggio al doppio coseno della metà dell'angolo delle loro direzioni (a).

§. 207. COR. II. E generalmente la forza media è alla somma delle laterali, come il seno dell'angolo delle direzioni delle laterali alla somma de' seni degli angoli, che queste direzioni fanno colla media (b).

§. 208. COR. III. Compito il parallelogrammo BACF dalle forze laterali AC, AB, la sua diagonale AF dovrà dinotare l'energia della forza media: la quale, come di per se comprende, è sempre minore dell'energie delle laterali (c).

§. 209. SCOL. Chiunque si porrà a riandare queste mie investigazioni sulla forza media, vedrà tosto, ch'io non le ho carpite da ciò, che su di essa dimostrasi comunemente; ma che tutte sien nate da quella proprietà di lei, ch'esposi nel §. 199.

§. 210. DEF. XXV. Il parallelogrammo BACF, che

(a) Prenoz. XI. n. 4.

(b) Prenoz. XI. n. 2.

(c) Si cali FQ perpendicolare su di BA prolungata, le bisogni: le forze laterali AB, AC si dicano F, ed f, e l'angolo BAC delle loro direzioni, o il suo uguale FBQ si chiami ϕ . Essendo FB a BQ come il raggio, (che li ponga uguale ad 1) al coseno di QBF, sarà $f:BQ::1:\text{cof. } \phi$, e quindi $BQ=f.\text{cof. } \phi$. Dunque sarà 13. El. II. $AF=\sqrt{FF+ff\pm 2Ff\text{cof. } \phi}$. e tale sarà il valore della forza media.

che ha per lati le rette AB , AC esprimenti le forze laterali, e quindi per diagonale la forza media, appellasi *Parallelogrammo delle forze*.

§. 211. DEF. XXVI. La forza media AF dicesi composta dalle due laterali AB , AC , ed anche equipollente, o equivalente ad esse. Ed ecco la più generale enunciazione, che può darsi al Principio della Composizione delle forze.

§. 212. DUE POTENZE, CHE INSIEME AGISCONO IN UN CORPO, SONO EQUIVALENTI AD UNA SOLA RAPPRESENTATA NELLA QUANTITA', E NELLA DIREZIONE DALLA DIAGONALE DI QUEL PARALLELOGRAMMO, I DI CUI LATI ESTRIMONO LE RISPETTIVE QUANTITA', E DIREZIONI DELLE POTENZE DATE.

§. 213. SCOL. L'equipollenza delle forze consiste nell'identità dell'effetto, che le forze laterali producono in un corpo, e che in esso vi produrrebbe una sola forza quanto la media. Più forze si equilibrano fra loro, se niun effetto ne segua in quel corpo, che insieme investono. Ed una forza si dirà uguale ad altre forze, se l'energia di quella pareggi la somma dell'energie di queste. Dunque le voci *equipollenza*, *equilibrio*, ed *uguaglianza di forze*, che a taluno potran sembrare sinonime, esprimono rispettivamente l'identità dell'effetto, la nullità dell'effetto, l'identità delle cagioni.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBL.

§. 214. Date le intensità di tre forze, che insieme spingano il corpo A per le direzioni AX , AY , AZ : determinare il valore, e la direzione della forza, che da quelle si compone. Fig. 15.

I. Si taglino sulle rette AX , AY , AZ , le parti AB , AC , AG , proporzionali alle forze impresse ad A per tali direzioni. II. Compiasi dalle due AB , AC il parallelogrammo $BACD$, e si tiri in esso la diagonale AD . III. Dalla diagonale AD , e dalla terza forza AG formisi benanche il parallelogrammo $DAGF$, e si conduca la diagonale AF ; questa ultima diagonale esprimerà il valore, e la direzione della forza composta dalle date.

DIM. Essendo le due forze AB , AC equipollenti alla media AD , tanto è imprimere al corpo A le tre forze AB , AC , AG , quanto le due AD , AG . Ma queste due forze determinano (§. 212) il corpo per la diagonale AF del parallelogrammo $DAGF$. Dunque la diagonale AF esprimerà la direzione, e l'intensità della forza composta dalle tre AB , AC , AG (a). C. B. D.

§. 215.

(a) La forza media AE può anche rilevarsi formando prima il parallelogrammo $CARF$, e poi componendo l'altro $BAFE$ dalla AF diagonale di quello, e dalla rimanente forza AB . Dunque dovrebbe Tom. I. H be-

Fig. 16.

§. 215. COR. I. Collo stesso artificio si potrà rinvenire la direzione media, e l'intensità di una forza composta da quattro altre, da cinque, da sei, ec.; delle quali sappiansi non meno le intensità, che le direzioni.

§. 216. COR. II. Se una di più forze applicate ad uno stesso corpicciuolo sia uguale, e contraria all'equipollente delle altre; il corpicciuolo resterà in quiete, ed esse forze si equilibreranno. E viceversa.

CAP.

besi dimostrare, che la diagonale AE del parallelogrammo $DACE$ sia identica a quella che nell'altro $BAFE$ conducefi per A : o che unite le rette BE , EF ne risulti un parallelogrammo. Lo che si effettua nel seguente modo.

Le rette BD , CF , come uguali, e parallele alla stessa AR , sono fra di loro uguali, e parallele. Ma anche DE l'è uguale, e parallela alla CA : dunque farà l'angolo BDE uguale ad ACF , e per la 4. El. I. BE uguale ad AF , e l'angolo EBD uguale a CFA . Ma BD si è dimostrata parallela a CF : dunque la BE farà parallela all'altra AF , e la figura $BEFA$ (34. El. I.) un parallelogrammo.

CAP. VIII.

PRINCIPJ, CHE SI DERIVANO DALLA COMPOSIZION DELLE FORZE.

PROP. XXXV. TEOR.

§. 217. Se le 3. forze AB , AC , AD applicate al corpo A si equilibrino; le loro direzioni avranno a giacere in uno stesso piano. E ciascheduna di queste forze sarà come il seno dell'angolo compreso dalle direzioni delle altre due. Fig. 14.

E se le direzioni delle 3. forze AB , AC , AD giacciono in uno stesso piano, e l'energia di ciascheduna sia come il seno dell'angolo delle direzioni delle altre; tali forze si dovranno equilibrare.

DIM. Part. I. La forza AD per equilibrarsi colle altre due AB , AC , vuol essere (216) uguale, e contraria ad AF equipollente alle AB , AC . Dunque siccome le tre rette AB , AC , AF sono sempre in uno stesso piano, così il dovranno essere benanche le tre AB , AC , AD . Che poi ciascuna forza debba essere come il seno dell'angolo delle direzioni delle altre due, ben si comprende da ciò, che si è detto nel Cap. prec.

H 2

Part.

Part. II. Sta BA ad AC , come il Sen. DAC al Sen. DAB : o pure (prolungando DA verso F , e tirando per B la BF parallela ad AC , che l'incontri in F ,) AB è ad AC come Sen. FAC , o del suo uguale BFA al seno di BAF . Ma a questi seni son anche proporzionali i lati BA , BF del triangolo BAF : dunque sarà $AB:AC::AB:BF$, e quindi BF sarà uguale ad AC , e la figura $BACF$ un parallelogrammo avente AF per una sua diagonale. E poichè per la natura dello stesso triangolo AB sta ad AF come il seno di BFA a quello di ABF , ed i seni di questi angoli sono gli stessi di quelli degli angoli DAC , BAC ; sarà dunque AB ad AF come il seno di DAC al seno di BAC , cioè per Ipotesi come BA ad AD . Dunque AF è uguale ad AD . E quindi (a) la forza AD dovrà equilibrarsi colle altre due (216) AB , AC . C . B . D .

§. 218. COR. Da questo Teorema il Sig. Varignon ha sagacemente rilevato l'equilibrio de' pesi sostenuti con delle corde, ed ha insieme risolti non pochi Problemi di Statica.

§. 219.

(a) Il punto A ove si equilibrano le tre forze AD , AB , AC è il centro di gravità del triangolo DBC , come il Sig. Robervallio l'indicò ad Evangelista Torricelli. E'l gran Leibnitz poi rinvenne questo Teorema generale, che fa d'uopo qui rapportarvelo. Se più forze applicate ad un corpicciuolo si equilibrino tra di loro; egli dovrà ritrovarsi nel centro di gravità de' punti estremi di quelle rette, che le rappresentano.

§. 219. DEF. XXVII. La *Risoluzione* delle forze, ch'è il Problema inverso di quello della loro composizione, riducesi a scindere una data forza in più laterali, che l'equivalgano.

§. 220. COR. Dunque affinchè questo Problema sia determinato, debbonsi fissare il numero, e le direzioni delle forze laterali.

§. 221. DEF. XXVIII. *Momento* di una Potenza è il valore, ch'ella tiene a produrre un certo effetto.

§. 222. SCOL. Il Momento di una stessa Potenza varia, secondo ch'ella si adatti a produrre ora un'effetto, ora un'altro. La qual cosa perchè chiaramente intendiate, piacemi addurvi qualch'esempio.

I. Immaginatevi che il corpo A poggia sul piano declive BA , il quale non sia cedevole, nè possa rivolgersi intorno a B , nè rinculare. Il peso di cotesto corpo esprimasi dalla verticale AF ; ed abbassata FG perpendicolare sul piano BA si congiunga la GA , e poi si compia il parallelogrammo $AGFE$. La forza AF da quel, che si è detto nel Cap. prec., equivale alle due laterali AG , AE : dunque tant'è che questo corpo all'ingiù tenda col suo peso; quanto che spingano insieme le due forze AE , AG . Or la prima di queste forze impiegasi direttamente contro del piano BG ; e dalla durezza, ed immobilità di questo tutta si elide senza avere alcun regresso sul corpo A . Dunque la sola forza AG

Fig. 17.
n. 2.

H 3

restan-

resterà a far discendere il corpo su del piano: e 'l momento del grave su questo piano declive starà al peso di esso come AG ad AF .

II. Suppongasi, che il corpo A stia impiantato nel piano BA , e che questo possa intorno a B liberamente aggirarsi; sarà chiaro che la forza AG , ch'è una delle divisate laterali, debbasi interamente distruggere, perchè impiegata contro del perno B , intorno a cui si volge il piano. Onde ad esso corpo riman solo la forza AE , colla quale ne aggira il piano. Dunque il momento di questo corpo a rivolgere il piano sarà rappresentato dalla AE , e starà al dilui peso, come AE ad AF .

III. Finalmente lo stesso corpo A cadendo dalla verticale AF percuota obbliquamente il piano FQ ancor esso fermo, ed immobile; sarà il momento di questa percossa obbliqua all'energia della percossa perpendicolare, com'è al raggio il seno dell'angolo d'inclinazione della retta AF al piano FE . Imperciocchè abbassandosi AE perpendicolare sul piano EQ , e congiunta la FE si compia il parallelogrammo $AGFE$: ed espressa per FR la forza, che la discesa per AF conferisce al corpo A , si menino RP , RQ perpendicolari sulle rette prolungate GFP , EFQ . Sarà cotesta forza equivalente alle due laterali FQ , FP : vale a dire l'impressione, che vi fa su di FE il corpo cadente, sarà quanto quella, che ne risulterebbe nel piano, se due martelli percuotessero il

cor-

corpo F , uno per FQ , l'altro per FP con forze proporzionali a queste rette. Or la percossa per FQ non s'imprime in detto piano, ma solamente l'altra FP . Dunque la FP dovrà dinotare il momento di questa percossa obbliqua, ed alla percossa perpendicolarmente esercitata sul piano FE starà come FP ad FR , cioè come il seno dell'angolo FRP , o di AFE al raggio.

§. 223. DEF. XXIX. Se la Potenza AN applicata al corpicciuolo A si risolva nelle due forze laterali AP , AQ , di cui la prima abbia la sua direzione coincidente colla retta MAP , che passi per A , e la direzione dell'altra sia perpendicolare alla stessa retta; la prima forza si dirà forza stimata secondo la retta MAP .

PROP. XXXVI. TEOR.

§. 224. Se le Potenze RA , rA , NA , nA , ec. comunque applicate al corpicciuolo A si equilibrino; le loro forze stimate secondo una qualunque retta MAP , che passi per esso corpicciuolo, si dovranno sempre distrugger fra loro.

DIM. S'è possibile non si elidano le forze MA , ma , ec. colle altre PA , pa , ec. ma la differenza di quelle, e di queste esprimasi dalla TA . E poichè le direzioni delle altre laterali QA , qA , SA , sa , ec. sono perpendicolari alla retta MAP nel punto A , esse

H 4

do-

dovran sempre ritrovarsi nel piano sGS , che passa per A , ed insiste perpendicolarmente alla MAP . Or se queste forze si distruggan fra di loro, il corpicciuolo A si troverà animato dalla sola forza AT , e con questa dovrà girare per AT , contro la supposizione dell'equilibrio. Se poi dalle forze QA , qA ; SA , sA , ec. ne risulti la forza media AG , la quale dee stare nel piano sGS ; lo stesso corpicciuolo sarà dalle due forze AT , AG insieme animato, e dovrà ben anche muoversi: lo che ripugna all'ipotesi. Dunque le forze stimate secondo la retta MAP si distruggon fra loro: $C. B. D.$

§. 225. COR. I. Se le forze stimate secondo la retta MAP si distruggano fra di loro, il corpicciuolo investito dalle Potenze RA , rA , NA , nA , ec. o rimarrà in quiete, o dovrà muoversi per una perpendicolare alla MP , che passi per A .

§. 226. COR. II. Ritrovandosi le direzioni delle Potenze RA , rA , NA , nA , ec. in uno stesso piano, quivi dovranno pur giacerne le RM , rm , NP , np , ec. perpendicolari alla MAP . E siccome (224) le rette QA , SA , ec. sono uguali alle altre qA , sA , ec. così sarà pure $RM + NP + ec.$ uguale ad $rm + np + ec.$

Fig. 20. §. 227. COR. III. Le tre forze CO , CF , CL applicate al punto C si equilibrino fra loro, e da

e da un qualunque punto S preso nel piano, ove giacciono le loro direzioni CO , CF , CL , si calino su di queste le perpendicolari ST , SP , SQ . Si congiunga la retta SC , e su di essa da' punti O , F , L si abbassino le perpendicolari OB , FR , LA . Sarà il triangolo OCB simile all'altro SCT ; ed essendo $OB:OC::ST:CS$, sarà $OB \cdot SC$ uguale ad $OC \cdot ST$. E saran pure, per la similitudine de' triangoli FCR , SCP , e degli altri LCA , SCQ , tanto $FR \cdot SC$ uguale ad $FC \cdot SP$, quanto $LA \cdot SC$ uguale ad $LC \cdot SQ$.

§. 228. COR. IV. Intanto, come si è dimostrato nel Cor. I., $OB + FR$ è uguale ad LA , o pure $OB \cdot SC + FR \cdot SC$ uguale ad $LA \cdot SC$. Dunque sarà ancora $OC \cdot ST + FC \cdot SP = LC \cdot SQ$.

§. 229. COR. V. Dunque se per quel corpicciuolo, ove sieno applicate tre forze in equilibrio; si conduca nel piano delle loro direzioni una qualunque retta, ed in essa prendasi un qualunque punto; i valori di quelle forze, che stanno da una parte di questa retta, moltiplicati per le distanze delle loro direzioni da quel punto, saranno uguali al valore dell'altra forza moltiplicato per la distanza della sua direzione dal medesimo punto (a).

PROP.

(a) Questa verità meccanica fuol enunciarsi nel seguente modo, se nel piano di due forze laterali prendasi un punto fisso, da cui si calino sulle loro direzioni,

PROP. XXXVII. TEOR.

§. 230. Vi sarà equilibrio tra più Potenze comunque applicate al corpicciuolo C, se condotte

Fig. 17. per esso le tre rette AB, A'B', A''B'', che
n. 1. non giaccian tutte in uno stesso piano; le forze stimate secondo queste rette vicendevolmente si distruggan tra di loro.

DIM. Se non v'ha equilibrio tra queste Potenze, il corpicciuolo C dovrà muoversi per la retta CN (225) perpendicolare a ciascuna delle tre rette AB, A'B', A''B''. Dunque una stessa retta sarà perpendicolare a tre rette, che non istanno in uno stesso piano: lo che ripugna. C. B. D.

§. 231. COR. Qualora le direzioni alle Potenze RA, rA, ec. di cui vuol saggiarsi l'equilibrio, giaccian tutte in uno stesso piano; basterà condurre pel corpicciuolo due rette MAP, QAq tra se perpendicolari, e poi vederne se vicendevolmente si distruggano le forze stimate secondo queste rette. Imperciocchè se questo corpo non sia in riposo dovrebbe muo-

zioni, e su quella della forza media tre perpendicolari; la forza media moltiplicata per la sua perpendicolare sarà uguale alla somma, o alla differenza de' prodotti di ciascuna forza laterale nella sua perpendicolare. Ella fuol dedursi da una proprietà del parallelogrammo esposta dal Varignonio nel Lemm. XVI. della Novell. Meccan. Vedi l'Ab. Marie, e l Sig. Salimbeni

muoversi per AQ (225), e per MP nello stesso tempo. Lo che ripugna.

§. 232. DEF. XXX. Centro di una Potenza è quel punto, da cui può concepirsi, ch'ella si diffonda.

§. 233. COR. Se la Potenza sia una forza continua, il dilei centro sarà lo stesso, che il centro delle forze.

§. 234. DEF. XXXI. Se imprimasi un picciol moto ad un corpicciuolo, ove si ritrovino applicate più Potenze in equilibrio, ogni momentaneo incremento, o decremento della distanza del corpicciuolo dal centro di ciascuna Potenza si dirà spazietto d'accesso, o di recesso. I divisati incrementi, o decrementi delle distanze si dicon pure velocità virtuali negative, o positive delle stesse Potenze. El prodotto della Potenza nella sua velocità virtuale chiamavasi dall'acutissimo Gio: Bernulli Energia della Potenza.

§. 235. SCOL. Rappresentino RA, rA, NA, nA, ec. più Potenze applicate al corpicciuolo A, e tra di loro equilibrate, i di cui centri sieno i punti R, r, N, n, ec. E poi s'imprima ad esso corpicciuolo un picciol moto per Aa, sicchè la retta Aa sia infinitesima. Si tirino le rette Ra, ra, Na, na, ec. e cogli centri R, r, N, n, ec. e cogli intervalli Ra, ra, NA, nA, ec. si descrivano gli archetti circolari Ba, ba, CA, cA, ec. Saranno le retticciuole BA, bA, ec. gli spazietti di

Fig. 19.

di accesso, e le altre Ca, ca , ec. quei di recesso. Le medesime rette BA, bA , ec. son le velocità virtuali positive delle Potenze RA , rA , ec. e le altre Ca, ca , ec. son le velocità virtuali negative delle altre Potenze NA , nA , ec. le di cui energie saran dinotate de' rettangoli $RAB, rAb, NA.aC, nA.ac$, ec.

PROP. XXXVIII. TEOR.

§. 236. *Se le forze RA, rA, NA, nA , ec. applicate al corpicciuolo A lo mantengano in equilibrio; le forze RA, rA , ec. moltiplicate pe' loro spazietti di accesso AB, Ab , ec. saranno uguali alle rimanenti forze NA, nA , ec. moltiplicate pe' loro spazietti di recesso Ca, ca , ec.*

DIM. A ragion dell'equilibrio di queste Potenze, le loro forze MA, mA , ec. stimate secondo la retta AA sono uguali alle altre forze PA, pa , ec. (224); cioè a dire tutti i rettangoli MAa, mAa , ec. uguaglian tutti gli altri PAa, pa , ec. E poichè i due triangoli rettangoli MAR, BAa han di comune l'angolo acuto RAM ; sono essi equiangoli, e simili fra loro: dunque sarà $RA:AM::Aa:AB$, e l rettangolo MAa sarà uguale all'altro di RA in AB .

Similmente dall'essere i triangoli rAm, PAN, pAn , ec. rispettivamente simili agli altri

altri Aab, AaC, Aac , ec. si dimosterà, che i rettangoli MAa, PAa, pAa , ec. rispettivamente uguagliano gli altri di rA in Ab , di NA in aC , di nA in ac . Dunque sarà $RA.AB + rA.Ab + ec. = NA.aC + nA.ac + ec. C.B.D.$

§. 237. COR. Essendo l'energie delle Potenze RA, rA , ec. uguali all'energie delle altre NA, nA , ec. le forze di quelle, e di queste, stimate secondo la stessa retta MAP , saran pure uguali.

§. 238. SCOL. In questo Teorema racchiudesi quel Principio della Statica quanto semplice, altrettanto generale, che *Principio delle velocità virtuali* si domanda. I primi stami di esso formaronsi nella mente del Gran Galilei, e l'acutissimo Giovanni Bernulli il rese più fecondo, e completo di quel ch'io l'ho quasi enunciato (a). Il Varignonio cercò dimostrarlo sinteticamente nella Sez. IX. de la Nouvelle. Mecan. e l Principe de' moderni Analisti il

(a) Ecco l'enunciazione generale di questo Principio, *In ogni sistema di forze tra loro equilibrate l'è uguale a zero la somma de' prodotti di ciascuna forza nella dila velocità virtuale.* Intanto se le grandezze P, Q, R , ec. rappresentino i valori di altrettante Potenze applicate ad un corpo, o ad un sistema di corpi: p, q, r , ec. sieno le loro direzioni, e dp, dq, dr , ec. dinotino le loro velocità virtuali. Sarà in caso di equilibrio $Pdp + Qdq + Rdr + ec. = 0$. Il maneggio di questa formola, che l'ovente fuol esser lungo, e malagevole, farà rapportato altrove.

il Sig. de la Grange non ha guari ne ha con dell'analisi agevolato l'uso, e lo ha poi applicato anche al movimento de' corpi animati da più forze. Intanto la voce *Principio* qui non vuol dinotare una verità primitiva, donde copiosamente si derivino delle altre; ma sì bene una Proposizione, che dimostra l'essenzial carattere di ogni sistema di forze tra di loro equilibrate,

PROP. XXXIX. TEOR.

§. 239. *Se un corpicciuolo, cui sieno applicate più Potenze intendasi spinto con picciol moto per tre diverse direzioni non giacenti in uno stesso piano, e sempre in ciascun caso si avveri, che le Potenze moltiplicate per gli spazietti di accesso pareggino le altre moltiplicate per gli spazietti di recesso; coteste Potenze saran tra di loro in equilibrio.*

DIM. In ciascun di questi casi l'Energie delle Potenze positive sono uguali alle negative delle altre: dunque dovranno distruggersi le loro forze stimate secondo quella retta per la quale intendesi spinto il corpicciuolo (237). E quindi tali Potenze dovranno tra loro (230) equilibrarsi. C. B. D.

§. 240. **SCOL.** Questo Principio delle velocità virtuali avrebbesi potuto ritrar facilmente dalla Composizione delle forze per mezzo delle

le seguenti verità di Geometria, ch' io dimostrai nella Prenoz. XII. I. *Se per un angolo C del parallelogrammo COKF comunque si conduca la retta BCR, e su di essa dagli altri angoli del parallelogrammo si menino le perpendicolari OB, KA, FR; sempre la differenza de' segmenti CB, CA, che stanno da una parte del punto C, dovrà uguagliare il segmento CR, ch' è nell'altra.* II. *E se per un punto C conducansi le due rette BR, br nel piano, ove stiano i quattro punti C, O, K, F, ed abbassate da' punti O, K, F le rette OB, KA, FR perpendicolari su di BR, e le altre Ob, Ka, Fr perpendicolari su di br, sia $BC - CA = CR$, e $Cb - Ca = Cr$, sarà un parallelogrammo la figura chiusa dalle rette OC, CF, FK, KO (a).*

PROP.

(a) Ecco il modo, onde dal parallelogrammo delle forze potrebbesi dimostrare il Principio delle velocità virtuali. Le tre forze OC, CL, CF applicate al corpicciuolo C si equilibrino, compito il parallelogrammo OCFK dalle forze CO, CF, dovrà essere la forza media CK uguale, e contraria alla rimanente CL (216). Si concepisca il corpicciuolo C trasferito nel prossimo luogo c per la Cc, e sulla retta QCB si calino da' punti O, K, F, L le perpendicolari OB, KA, FR, LQ; farà $BC = CA + CR$ (pren. XII.), o sia $CB = CQ + CR$: imperocchè AC è uguale a CQ per avere i due triangoli CKA, CLQ le condizioni della 26. El. I. Si congiungano le rette Oc, Fc, Lc, e co' centri O, F, L, e cogli intervalli Oc, FC, LC si descrivano gli archetti circolari cn, Cc, Cm; faranno i triangolotti Ccn, Ccc, Ccm rispettivamente simili ai triangoli BCO, FCO,

PROP. XL. PROBL.

§. 241. *Abbozzare un metodo generale, onde possa investigarsi il moto assoluto di un corpicciuolo comunque animato da quante forze si vogliano.*

Fig. 22. Cost. La linea NSs sia il sentiero del corpicciuolo.

FCR, LCQ. Dunque si avranno le tre seguenti analogie $BC : CO :: Cn : Cc$, $RC : CF :: co : Cc$, $QC : CL :: cm : Cc$, e quindi i tre rettangoli BCc , RCc , QCc saranno rispettivamente uguali agli altri $OC.Cn$, $FC.co$, $LC.cm$. Ma essendo $BC = RC + QC$, anche BCc dee pareggiare $RCc + QCc$. Dunque sarà ancora $OC.Cn = FC.co + LC.cm$, cioè la forza OC moltiplicata pe' l' suo spazietto d' accesso Cn sarà uguale alle altre due forze FC , LC rispettivamente moltiplicate pe' loro spazietti di recesso co , cm .

Essendo poi $OC.Cn = FC.co + LC.cm$, sarà ancora $BCc = RCc + QCc$, e quindi $BC = RC + QC$, cioè (prolungata LC in K , finchè CKL adegui $+ , o$ calata la perpendicolare KA su di QB) sarà $BC = RC + AC$. E dimostrandosi lo stesso su di un' altra retta che passi per C ; la figura $OCFK$ sarà un parallelogrammo (Prenoz. XII.). Ed essendo la forza LC uguale, e contraria a CK equipollente delle due OC , FC , queste tre forze OC , FC , LC saranno in equilibrio (217).

E perchè più forze, che si equilibrano posson sempre ridursi a tre, che giacciono in uno stesso piano, facilmente può dedursi dal parallelogrammo delle forze il Principio delle velocità virtuali. Ma questo metodo, ed un' altro somigliante, che non ha guari mi è caduto in mente, l'è men semplice di quello, che si è qui sopra esibito, le cui tracce osservansi in Varignonio *sect. 9. Nouvel. Mécaniq.*

picciuolo, la quale per la massima generalità, suppongasì essere a doppia curvatura.

1. D'accanto a questa linea intendasi posto, ove ne piaccia, l'angolo solido A di un cubo; e l' moto del corpicciuolo si riferisca ai lati BA , CA , DA di esso angolo; le quali rette dicansi *Direttrici del moto*.

2. Prendasi nel sentiero del mobile l'archetto Ss infinitesimo, ed abbassate le rette SY , sy perpendicolari sul piano dell'angolo BAD , da' punti Y , ed y , ove queste lo incontrino, si calino YX , yx perpendicolari alla retta AD ; saranno le tre coordinate SY , YX , XA parallele alle tre Direttrici.

3. La forza per Ss si risolva in tre forze laterali, le cui direzioni SP , SQ , SR sien parallele alle Direttrici AD , AB , AC : ed i valori di queste forze, che comunque dipendano dalle riferite coordinate, si dicano P , Q , R (a).

4. Per mezzo della Prop. XV. si ricavino tre equazioni, ch'esprimano gli effetti di queste forze,

Que-

(a) Si cali Ss perpendicolare su di sy , e sn su di SP ; e poi si compiano i due parallelogrammi rettangoli $Ssso$, $Ssnm$; sarà l'angolo nSr uguale all' altro yYr , perciocchè i lati di quello son paralleli ai lati di questo. E quindi i due triangoli nSr , Yyr per la 26. El. I. avranno uguali i cateti sn , yr , e gli altri Sn , Yr : e l' quadrato di Ss sarà uguale ai quadrati di Yr , e di yr . Dunque il quadrato di Ss , ch'è uguale ai

Quest'equazioni maestrevolmente maneggiate daranno l'accelerazione del corpicciuolo, e l di lui sentiero (a).

§. 242. COR. Se il sentiero del corpicciuolo giaccia in uno stesso piano, basterà risolvere il di lui moto elementare in due moti, le cui dire-

quadrati di Sx , e di ty , sarà uguale ai tre quadrati di Tr , di yr , e di ts .

E poichè la forza Ss è equivalente alle due So , Sx , ed Sy è pure equivalente all'altre due Sm , Sn : la forza Ss sarà equivalente alle tre So , Sm , Sn .

(a) Le tre coordinate AX , XY , YS si dicano x , y , z ; l'archetto Ss sia ds , e dt il tempo, in ch'ei si percorre. Sia M la massa del corpicciuolo, e P , Q , R le forze, che lo accelerano per SP , SQ , SR ; faranno le rettificuole Xx , yy , zz rispettivamente uguali a dx , dy , dz , e le velocità, onde il corpicciuolo le descriverebbe nel tempuscolo dt , faranno $(dx):dt$, $(dy):dt$, $(dz):dt$, i di cui elementi sono $(ddx):dt$, $(ddy):dt$, $(ddz):dt$, prendendo dt per costante. Dunque per la Prop. XV, si avranno le tre seguenti equazioni,

$Mddx = \theta Pdt^2$, $Mddy = \theta Qdt^2$, $Mddz = \theta Rdt^2$. E moltiplicando la prima equazione per $(2dx):Mdt^2$, la seconda per $(2dy):Mdt^2$, la terza per $(2dz):Mdt^2$, e sommando fra loro i primi membri di queste nuove equazioni, ed i secondi, avrassi $(2xdx + 2ydy + 2zdz):dt^2 = \frac{\theta}{M}(Pdx + Qdy + Rdz)$.

Ma il primo membro di quest'equazione è il differenziale di $(dx^2 + dy^2 + dz^2):dt^2$, ove dt^2 sia costante, cioè di $(ds^2):dt^2$, cioè del quadrato della velocità (a. §. 16) per l'archetto Ss , la quale si dica u : dunque sarà $uu = \frac{\theta}{M} \int (Pdx + Qdy + Rdz) + C$

direzioni sieno parallele a due rette date, che si seghino perpendicolarmente, o pur comunque.

§. 243. SCOL. Il sommo Eulero applicatosi a risolvere il *Problema de' tre corpi* si abbattè in un Principio nuovo di Meccanica, o piuttosto in un nuovo metodo da calcolare i moti de' corpi comunque animati da quante forze si vogliono, ch'esposelo nel Vol. dell'ann. 1750. dell'Acc. Reale di Berlino. Questo metodo consiste nel rapportare a tre piani fissi, o a tre assi il movimento di un corpo, su cui agiscano quante forze si vogliono, la qual cosa erasi anteriormente ritrovata dall'Ill. Maclaurin; e nel dedurne tre convenevoli equazioni tra le forze, che lo accelerano verso di ciascun piano, e i di loro effetti. Ma poi il Valentuomo nella *Teor. del Moto de' Corpi Rigidi*, ed in altre *Dissert.*, ch'ei fece su questo argomento, si avvisò doversi in luogo di tre qualunque Direttrici determinare i tre *Assi Principali*, che sono insieme i tre *Assi liberi di girazione*, (come il Sig. de Segner aveva lo nel 1755 giudiziosamente rilevato); e quindi calcolarne il moto del corpo rigido, e le sue leggi. Ma poichè le formole, che in tal guisa ritraggonsi, sono grandemente involupate, e n'è poi molesta la loro applicazione ai casi particolari; l'acutiss. Sig. della Grange Vol. di Berlin. 1773. tenne altra via per riuscirne in quest'impegno: e lo stesso Eule-

ro nel *Volum. XX. degli Att. Nuov. Pietrob.*; e nella *Teor. del moto de' corp. rigid. data in luce nell'an. scorso*, ha semplificato i suoi calcoli rapportandogli a quell'*Asse Invariato*, ch'ei si avvide doversi nel moto de' corpi rigidi mai sempre ritrovare.

C A P. IX.

DELLA LIBERA DISCESA DE' GRAVI
PER PIANI DEGLIVI.

§. 244. DEF. XXXII. **P**iano *Inclinato*, *Obbliquo*, o *Declive* dicesi quello, che non è posto verticalmente nè in sito orizzontale. E chiamerò *obblività* di un tal piano quell'angolo acuto, che ne misura la sua inclinazione all'orizzonte (a).

Fig. 23. §. 245. DEF. XXXIII. Per la retta PN perpendicolare al piano inclinato QC conducasi il piano verticale TPN, la comune sezione di questo piano, e di quello dirassi *lunghezza* del piano inclinato.

PROP.

(a) Le voci *Inclinato*, *Obbliquo*, *Declive*, *Obblività*, ec. che di lor natura son relative, qui si enunciano come assolute; intendendosi la posizion di questi piani rapportata all'Orizzonte.

PROP. XLI. TEOR.

§. 246. Un grave posto su di un piano declive cerca di scendere per la dilui lunghezza con una forza, che sta al suo peso, com'è al raggio il seno dell'obblività di esso piano.

DIM. Il peso del corpo P, ch'è sul piano inclinato QC, esprimasi dalla retta verticale PL condotta pel luogo, ove quello ne giace: e su di PN perpendicolare allo stesso piano si cali dal punto L la perpendicolare LN, e poi si compia il parallelogrammo PMLN. Finalmente prodotte le due rette PM, PL, finchè incontrino in T, ed O il piano orizzontale AB, si unisca la retta TO.

Ciò posto il piano QC è perpendicolare al verticale TPO (a); ma allo stesso verticale l'è anche perpendicolare il piano orizzontale AB: dunque la retta CT comune sezione del piano inclinato, e dell'orizzontale sarà perpendicolare (b) al piano verticale TPO. Il perchè sarà retto tanto l'angolo CTP, che l'altro CTO (c), e l'angolo PTO sarà la misura dell'inclinazione del piano QC all'altro

I 3

AB

(a) Prop. 18. El. XI.

(b) Prop. 19. El. XI.

(c) Defn. 3. El. XI.

AB (a), cioè l'obliquità dello stesso piano QC (243).

E perchè la forza, che spinge il grave P su del piano declive è dinotata dalla retta PM, (b) ed ella sta al peso del grave, come PM a PL, cioè come PO a PT (essendo simili i due triangoli PML, POT), o pure come il seno dell'angolo PTO al raggio; sarà vero, che il grave P cercherà di calare per la lunghezza PT del piano QC, ov'ei posi, con una forza che sta al suo peso, come il seno dell'obliquità del piano al raggio. C. B. D.

§. 247. COR. I. Se un globo ponderoso, e duro si lasci giù discendere per un piano declive, il quale sia fermo, immobile, ed incapace di aggirarsi, o di rinculare (c); il suo moto dovrà

(a) Defn. 6. El. XI.

(b) §. 222. n. I.

(c) Se il piano obliqui AC, su di cui cada rotolando la palla M ben rotondata, e dura, possa orizzontalmente, e senza resistenza rinculare; la forza perpendicolare ad esso piano lungi dal distruggerli, come si è detto nella dimostrazione di questo Teorema, avrà regresso ad accelerar la palla. Per intender come ciò vada, supponete che il peso della palla M si esprima dalla verticale FM, e ch'ei si risolva nella forza FG parallela al piano declive, e nella GM perpendicolare allo stesso piano. Si cali Gf perpendicolare su di FM, fg perpendicolare su di GM, gr sulla FM, ec. sarà FG la forza che all'ingìù spigne la palla per la lunghezza del piano obliqui: e risolvendo la forza perpendicolare GM nelle due Gf, fM, la prima di queste s'impiegherà ad urta-

Fig. 25.

vrà essere uniformemente accelerato. Imperocchè la forza, che quivi all'ingìù ne spigne cotesto globo, serbando al di lui peso la costante ragione del seno dell'obliquità del piano al raggio, dee essere uniforme, e 'l movimento del globo uniformemente accelerato (77. 150).

I 4 §. 258.

urtare il piano orizzontalmente; e l'altra fM resterà verticalmente applicata alla stessa palla. Con che se di bel nuovo scindasi la forza fM nelle due fg, e gM, e la gM nelle altre gr, ed rM; la forza fg urterà la stessa palla per la lunghezza del piano obliqui, mentre la gr si unirà colla Gf ad urtare il piano orizzontalmente. E così delle altre. Dunque la forza acceleratrice della palla M sul piano AC non è in tal caso analoga alla FG, ma si bene ad $FG + fg + ec.$ Su di che vedi la diss. di Gio. Bern. nel vol. V. Att. Ant. Pietrob.

Che se quel piano declive, su cui scenda una palla, si aggiri verticalmente, o in altro modo; il di lei moto non sarà uniformemente accelerato, nè tampoco uniforme quella forza, che quivi l'obbliga a scender giù. E converrà impiegare nuovi principj per iscovrire i sintomi di questo moto quanto in se vario, tanto malagevole a calcolarsi. Vedi il Sig. Clairaut Memoir. de Paris 1742. i Bernulli, l'Eulero, e quegli altri Geometri, che hanno esaminata la discesa di una palla in un tubo, che si aggira.

Non di rado addiviene, che un corpo posando su di un piano declive nè rotolando, nè strisciando quivi ne discenda, tuttochè niuna forza il ritenga, nè obice alcuno il fermi. Ciò è dovuto allo stropicciamento del corpo col piano: e 'l Sig. Buffingero nel vol. II. Att. Ant. Pietrob., ed altri han saputo di ciò trarne i principj per calcolare le frizioni de' corpi. Eccone il modo.
„ Si determini colla l'esperienza l'angolo della quiete,
„ cioè la massima inclinazione del piano obliqui AC,
„ su

§. 248. COR. II. E quindi le principali affezioni di questo moto, che furon recate nei §. (27, 28, 29), converranno alla discesa di un globo su di un piano declive fermo, ed immobile; ed ove si prescinda dalla resistenza dell'aria, e dallo stropicciamento del globo, e del piano.

§. 249. COR. III. Dal presente Teorema rilevasi, che la massa di un corpo moltiplicata pel seno dell'obblività di quel piano, ov' ci giace,

„ su cui possa reggerfi il solido $FAMG$ senza dis-
„ derne per la dilui lunghezza. Dovrà in tal caso la fri-
„ zione del corpo con del piano obbliquo pareggiar quella
„ forza, che all'ingiu lo spinge per la lunghezza del
„ piano. E quindi se facciasi come il raggio al seno del-
„ l'angolo della quiete, così il peso del corpo dato ad
„ un quarto, questo darà la frizione del corpo sul piano.
„ Ed essendo la forza, che accelera il corpo pel piano,
„ alla pressione, che quello esercita su questo, come FG
„ a GM , o come AB a BC , cioè come la tangente
„ dell'angolo ACB al raggio, in questa stessa ragione
„ sarà la frizione alla forza premente. Or, secondo ciò
„ che sperimentarono il Sig. d'Amontons, ed altri Geo-
„ metri, l'angolo della quiete è di 18° , $27'$, la cui
„ tangente è pressochè un terzo del raggio. Dunque la
„ frizione di un corpo sta alla dilui forza premente, co-
„ me 1. a 3.

Se un grave è posto talmente su di un piano de-
„ clive, che la verticale condotta pel suo centro di gra-
„ vità cada nella sua base; egli dovrà venir giù sri-
„ sciando su del piano; e vi dovrà scender rotolando, se
„ quella cadane fuori di questa. Una tal regola, che nel
„ primo aspetto sembra sgombra di dubbio, e che dall'Ab-
„ Grandi, dal Muschembroek, e da altri vien francamen-
„ te proposta, chi l'avrebbe creduto! fu per mezzo di si-
„ cu.

giace, uguagli il seno massimo moltiplicato per la forza, con cui lo stesso corpo cerca di scenderne pel piano. Dunque essendo il seno massimo di una costante magnitudine, potrà inferirsi, che le forze, onde più gravi posti su di altrettanti piani declivi cercan di scendervi, sien proporzionali ai loro pesi, ed ai seni delle rispettive obblività de' piani.

§. 250. COR. IV. Or le forze acceleratrici sono direttamente come le Potenze, ed inversamente come le masse (102); dunque le forze acceleratrici de' gravi posti sui piani obbliqui saranno direttamente come i loro pesi, ed i seni delle obblività de' piani, ed inversamente come le loro masse: cioè (per esser le masse proporzionali (147) ai pesi,) nella ragion de' seni delle obblività de' piani (a).

§. 251.

curissime sperienze mostrata falsa da quegli Accademici Napoletani, che prima della metà di questo secolo soleanfi racorre a specular la natura. Il Sig. Candido Pistoi nel Vol. III. degli Atti de' Fisiocritici di Siena, Giorgio Kraft, ed Eulero ne' Vol. XII., e XIII. degli Att. Ant. di Pietrobb. han. poi recate molte altre sperienze per confermarne la falsità della divisata regola. E lo stesso Eulero ha nel cit. Vol. XIII. giudiziosamente calcolati i moti de' corpi su de' piani obliqui, tenendo conto della loro frizione.

Finalmente un corpo, che scende per un piano obliquo, se per avventura si tragga dietro un' altro grave legatogli con una corda, che attraversi una girella stabile, con qual legge dovrà egli progredire? Vedete la *Dinam. dell'III. Sig. d'Alembert, ed un' Opusc. di Eulero negli Att. Pietr. an. 1773.*

(a) *Pren. III.*

§. 251. COR. V. Dunque le forze acceleratrici di più gravi posti su di altrettanti piani obliqui sono nella ragion de' seni delle obbliquità de' piani.

PROP. XLII. TEOR.

Fig. 25. §. 252. Se dalla cima A del piano obliquo AC si faccian cadere due gravi, uno verticalmente, l'altro per la lunghezza del piano; gli spazj, ch'essi descriveranno dopo un dato tempo, saran fra di loro come il raggio al seno dell' obbliquità dello stesso piano.

Ed in questa stessa ragione saran pure le rispettive velocità finali de' medesimi gravi.

DIM. Le forze, che accelerano il grave cadente verticalmente, e l'altro che giù ne scende pel piano inclinato, sono tra di loro come il raggio al seno dell' obbliquità del piano (246). Dunque gli spazj contemporaneamente descritti da' medesimi corpi, e le loro velocità finali, che sono come le mentovate forze (110, 106), debbon esser fra loro come il raggio al seno dell' obbliquità del piano. C.B.D.

§. 253. COR. I. AB ed AM sieno gli spazj contemporaneamente descritti da questi gravi, che partono dalla cima del piano inclinato AC . Si elevi BC perpendicolare su di BA , e si unisca BM ; sarà AB ad AM come il peso del

del corpo, che scende verticalmente, alla forza acceleratrice di quell' altro, che cala pel piano inclinato AC , cioè come il raggio al seno dell' angolo ACB , val quanto dire come AC ad AB . Dunque i due triangoli ABC , ABM , che hanno l'angolo BAC di comune, ed i lati BA , ed AC proporzionali a' lati AM , ed AB , saranno tra se equiangoli: onde l'angolo AMB sarà retto al par del suo uguale ABC .

§. 254. COR. II. Dunque la retta BM , che unisce gli estremi B , ed M de' due spazj AB , AM

(a) Dunque se il Diametro AB del semicircolo AMB si ponga verticalmente, e pe' suoi estremi A , e B si tirino delle corde AM , AN , ec. BM , BN , ec. tanto quelle, che queste saran percorse da un grave in quell' istesso tempo, in ch' ei vi discenderebbe pe' il diametro AB . Imperocchè nel triangolo rettangolo ABM presa l'ipotenusa AB per raggio, AM è seno dell'angolo ABM , o del suo uguale ACB . Dunque AM sta ad AB come la forza acceleratrice del corpo che scende per AM al peso del medesimo corpo: e quindi AM , ed AB son descritte nel medesimo tempo. Così si dimostra, che AN , ed AB sian descritte nel medesimo tempo, e così delle altre. E poichè BM sta a BA come il seno dell'angolo MAB , o del suo uguale MBC al raggio, cioè come la forza acceleratrice di un corpo, che scende per MB al peso dello stesso corpo: MB , e BA saran descritte in uguali tempi. Nella stessa guisa può dimostrarsi, che NB percorra da un grave in tanto tempo, quanto vi spenderebbe un' altro a calare per AB : dunque non solo le corde AM , AN , ec., che le altre MB , NB , ec. son descritte nello stesso tempo, che il diametro verticale AB .

AM descritti in uguali tempi, e dal grave, che cala verticalmente, e da quell'altro, che discende pe' l piano obbliquo AC, l'è perpendicolare al medesimo piano.

§. 255. COR. III. E se più corpi si faccian cadere per diversi piani obbliqui, gli spazj ch'essi descriveranno in uguali tempi, saranno come le loro forze acceleratrici, cioè come i seni delle obbliquità de' piani (110, 251).

PROP. XLIII. TEOR.

§. 256. Se i due gravi A, ed a si facciano insieme cadere dalla cima del piano inclinato AC, questo però verticalmente, quello per la lunghezza del piano; essi giugneranno all'orizzonte BC con velocità uguali. Ed i tempi delle loro discese saranno, come gli spazj percorsi.

DIM. Gli spazj AB, ed AC sono fra di loro come le forze, le quali accelerano il grave, che scende pel piano obbliquo AC, e quell'altro, che cala verticalmente. Dunque (111.n.2.) le velocità finali de' medesimi corpi saranno tra se uguali.

E poichè le velocità, onde i medesimi corpi arrivano in B, e C, sono come i tempi, e le forze (105); e quelle si son mostrate tra se uguali; l'è mestiere, che i tempi siano inversamente come le forze: cioè il tempo per AB

AB a quello per AC, come AB ad AC. C. B. D.

§. 257. COR. Dunque i tempi, in che più gravi discendono per altrettanti piani diversamente inclinati all'orizzonte, e della stessa altezza, sono come le lunghezze de' piani, che percorrono. E sono tra se uguali le velocità, and' essi pervengono all'orizzonte.

PROP. XLIV. TEOR.

§. 258. Se vi sieno due piani contigui diversamente inclinati all'orizzonte; la velocità, che acquistasi da un grave in calando pel piano superiore, sta a quella con cui entra nell'inferiore, come il raggio al coseno dell'angolo d'inclinazione de' medesimi piani (a).

Fig. 26.
n. 2.

DIM. Le rette NB, e BC dinotino le lunghezze de' piani contigui per cui ne scenda il grave; e l'energia di quella forza, ch'egli acquista in B, esprimasi dalla NB. Si cali NM perpendicolare su di CB prolungata verso M, e si compia il parallelogrammo MNDB. Ciò

(a) Credeasi dal Galilei, dall'Ugenio, da Keil, e da tanti altri Meccanici, che un grave calando pel piano obbliquo NB n'entrasse nel piano BC, che gli è contiguo, con quella stessa velocità, ch'egli aveasi pel primo NB acquistata. Ma questa cosa fu mostrata falsa dal cel. Varignonio nelle *Memorie dell'Acc. delle Scienze di Parigi degli an. 1693, 1704.*

Ciò premesso, la forza NB equivale alle due DB, e BM (212). Ma di queste la prima direttamente impiegasi contro del piano BC, e per la resistenza di esso si elide interamente: dunque al grave B gliene resta la sola forza MB, con cui entra nel piano BC. Ma nello stesso corpo le forze sono come le velocità (73.n.4): dunque la velocità, che il grave B acquistasi nella discesa per BN, sta a quella, onde poi n'entra nel piano BC, come NB a BM, cioè come il raggio al coseno dell'angolo NBM, che misura l'inclinazione de' piani contigui NB, BC. C. B. D.

§. 259. COR. I. Col centro B, intervallo BN, descrivasi l'arco circolare NS; sarà SM differenza dalle due BN, e BM, ed insieme senoverso dell'arco NS, o dell'angolo NBM. Dunque la velocità, che perde il grave B passando dal piano NB nell'altro BC, sta alla velocità acquistata nella discesa per NB, come il senoverso dell'angolo d'inclinazione de' piani contigui al raggio.

§. 260. COR. II. Sia l'angolo NBS minore di qualunque acuto rettilineo (qual' è per appunto quello, che forma ogni elemento di una curva colla sua tangente); sarà l'arco NS infinitesimo rispetto alla circonferenza del raggio SB, e la sua corda SN una parte infinitesima del diametro 2 SB. Ma per la natura del circolo sta $SM:SN::SN:2SB$: dunque SM

SM sarà puranche infinitesima rispetto ad SN, ed infinitesima di secondo ordine riguardo a 2SB.

§. 261. COR. III. Val quanto dire, il grave B passando dal piano NB nel contiguo BC, non soffre sensibile perdita di velocità, quando sien questi piani tra loro inclinati ad angolo ottusissimo.

PROP. XLV. TEOR.

§. 262. Sia ABCDE una linea curva verticalmente disposta, e colla concavità in su (a). Io dico, che la velocità finale di un grave, che vi si lasci liberamente discender dentro, debbasi all' altezza dell' arco.

Fig. 26.
n. 1.

DIM. Sieno AB, BC, CD, DE, ec. gli elementi contigui di quella curva, onde col suo proprio peso discenda il grave per la dilei parte concava. Per A, per C, e per D si distendano le rette orizzontali AF, CQ, DG; e si protragga gli elementi CB, DC, in fin che incontrino AF ne' punti N, F. Finalmente si calino NQ, FG perpendicolari su di CQ, e DG.

E poichè il grave nulla perde di sua velocità in passando dall'elemento AB nell'altro conti-

(a) Se un grave discenda nella parte convessa di una curva situata verticalmente, egli farà obbligato in un punto di essa a sbalzar fuori. Vedi un' Opusc. del celeb. P. Fontana inserito nel II. Vol. della Società Italiana.

tiguo BC (261), la velocità, ch'ei s'acquista discendendo per ABC sarà quanto quella, che gliene verrebbe calando pel solo piano NBC, o (257) per la dilui altezza NQ. Similmente lo stesso grave entrando nel piano CD, non perde veruna quota della velocità, che aveva in C, e quindi percorso l'elemento CD troverassi avere in D tanta velocità, quanta ne avrebbe concepita in D calando pel solo piano FCD, o per la FG altezza di questo. Dunque, continuando in simil guisa cotesto ragionamento, la velocità, che si acquista un grave discendendo per un qualunque arco, il di cui piano è verticale, è dovuta all'altezza del medesimo arco. C. B. D.

CAP.

CAP. X.

DELL'ATTRAZIONE DE' CORPI SFERICI.

PROP. XLVI. TEOR.

§. 263. *Se tutti i punti della circonferenza del circolo BRb attraggano con forze uguali il corpicciuolo A, ch'è ad essi equidistante, e fuori del di loro piano; un tal corpicciuolo tenderà al centro del circolo con una forza proporzionale alla divisata circonferenza, al seno dell'angolo ABC, ed all'intensità di ciascuna forza traente.*

Fig. 27.
n. 1.

DIM. Si conduca per un punto qualunque B della circonferenza il diametro Bb, ed unite le AC, Ab, si compiano i due rettangoli ADBG, AdbC. Le forze, onde i due punti opposti B, e b traggono il corpicciuolo A, esprimansi con delle rette AB, Ab; e quella si risolva nelle laterali AD, AC, questa nelle laterali Ad, AC. Ei sarà chiaro doversi distrugger tra loro le forze AD, Ad come uguali, e contrarie: onde dalla forza AB dee risultar nel corpicciuolo la forza AC, ed un'altra uguale ad AC anche n' emerge nello stesso corpo dall'altra Ab. Dunque la forza, che trae il corpicciuolo per AB starà alla risultante per AC, come

Tom. I.

K

come AB ad AC (212), o come il raggio al seno dell'angolo ABC . E quindi ponendo il raggio uguale ad 1, sarà la risultante per AC uguale al valore di essa forza traente moltiplicato pel seno dell'angolo ABC . E quindi la forza, che da tutti i punti della circonferenza BRb risulta nel corpicciuolo A verso del centro C , sarà come l'intensità della forza di ciascun punto, come il seno dell'angolo ABC , e come il numero de' punti della circonferenza, o come la medesima circonferenza. $C. B. D.$

§. 264. COR. I. La tendenza del corpicciuolo A al centro C è una forza, che in esso risulta dalle infinite forze, che insieme lo traggono per AB , Ab , ec.

Fig. 29. §. 265. COR. II. E se tutti i punti della zonetta sferica generata dall'archetto circolare BD rivolto con perfetta rivoluzione intorno ad AS , che passi pel dilui centro, tirino con uguali forze il corpicciuolo A equidistante da essi; la tendenza del corpicciuolo si farà al centro della sfera, e sarà come la superficie della zonetta, come il seno dell'angolo ABC , e come l'intensità di ciascuna forza trauente. O pure la divisa tendenza sarà, come l'attrazione della zonetta sferica di BD , e come il seno dell'angolo ABC .

PROF.

PROP. XLVII. TEOR.

§. 266. Se il corpicciuolo S pongasi entro la superficie sferica $DGO F$, e tutt' i punti di questa il tirino con forze, le cui quantità *Fig. 27. n. 2.* assolute sieno uguali, e le acceleratrici crescano come i quadrati delle distanze; ei resterà quivi immobile, senz' esserne in verun modo turbato da queste infinite attrazioni.

DIM. Sia $DGO F$ un circolo massimo di essa sfera, che passi per S ; e disteso per S il diametro DO , la corda RQ , e l'altra MA infinitamente a lei vicina, si ordinino MN , AB sul diametro DO di esso cerchio.

I due triangoli ASQ , MSR , avendo gli angoli verticali ASQ , MSR tra se uguali, non men che gli altri due SAQ , MRS , come insistenti sullo stesso arco MFQ , sono simili fra loro. Dunque sta QA ad MR , come QS , o la sua uguale AS ad SM , cioè come AB ad MN . E quindi le armille sferiche generate dagli archetti AQ , ed MR essendo (a) in ragion composta di AQ ad MR ,
K 2 e di

(a) L'elemento di una curva nel volgersi intorno al suo asse genera una superficie di un cono troncato, la quale si misura dallo stesso archetto moltiplicato per la circonferenza di un suo estremo: onde l'è proporzionale all'archetto generatore, ed alla dilui distanza dall'asse di rotazione.

e di AB ad MN, saranno come AB^2 ad MN^2 . E poichè le forze, con cui coteste armille traggono il corpicciuolo S per le direzioni medie SB, SN sono fra loro direttamente come le medesime armille, ed inversamente come i quadrati di SA, e di SM (265) esse saranno come AB^2 ad MN^2 , e come MS^2 ad SA^2 , cioè in ragion di uguaglianza. E quindi dalle attrazioni di queste due armille, il corpicciuolo S resterà quivi equilibrato, ed immobile. La qual cosa potendosi sempre dimostrare, sarà vero ciocchè proposi. C. B. D.

§. 267. COR. Che se per lo corpicciuolo S intendasi passare il piano FG perpendicolare su di DO; le forze, onde le superficie de' segmenti sferici FDG, FOG il tirano per SD, ed SO, saranno tra se uguali.

PROP. XLVIII. TEOR.

§. 268. *Poste le medesime cose del Teor. prec. un corpicciuolo situato fuori la stessa superficie sferica tenderà al dilei centro con una forza reciprocamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal centro della sfera.*

Fig. 29.
30.

DIM. Sieno MBF, m b f (a) due circoli mas-

simi

(a) Questi due circoli, che per agevolar la dimostrazione, veggonsi distinti fra loro, si debbon concepire, che abbiano il medesimo centro della sfera.

simi della sfera BOY, che passino pe' corpicciuoli uguali A, ed a situati a disuguali distanze dal di lei centro, e tutti i punti della superficie sferica tirino questi corpicciuoli, come si è supposto nel Teor. prec. Ed intendendosi ne' medesimi circoli praticato ciò che vi recai nella Prenoz. XIII., saranno le armille sferiche generate dagli archetti BD, bd in ragion composta de' rettangoli sap, SAP, e de' quadrati di AB, ed a b distanze de' corpicciuoli dalle armille. Dunque i medesimi rettangoli (a) sap, SAP saranno direttamente come le divise armille, ed inversamente come i quadrati delle loro distanze da' corpicciuoli, cioè i medesimi rettangoli saranno come le attrazioni esercitate dalle medesime armille su de' corpicciuoli A, ed a (b).

Or le rispettive tendenze de' corpicciuoli A, ed a attratti dalle divise armille sono dirette al centro della sfera, ed elleno son proporzionali alle attrazioni delle armille, ed a i seni degli angoli ABC, abc, o de' loro uguali ASP, asp (265). Dunque le tendenze de' corpicciuoli al centro della sfera saranno come il rettangolo sap all' altro SAP, e come il seno dell' angolo ASP al seno dell' altro asp, cioè a dire in ragion composta di (sa : SA) (ap : AP) (AP : ap) (sa : SA), essendo le prime due

K 3

ta-

(a) Prenoz. IV.

(b) Per ipot.

ragioni equivalenti a quella de' rettangoli, e le altre due a quella de' seni (a).

Ma dalla composizione di queste ragioni (b) n' emerge quella di sa^2 ad SA^2 . Dunque le tendenze de' corpicciuoli A ed a inver del centro della sfera, che vi si producono dalle mentovate armille attraenti, saranno inversamente come i quadrati delle distanze de' medesimi corpicciuoli dal centro della sfera. La qual cosa potendosi sempre dimostrare, sarà vero quel, che si è proposto. C. B. D. (c)

PROP.

(a) *Pren. XIV.*

(b) *Pren. III.*

(c) Questa verità esponefi dall'Imm. Nevvton nell. *Prop. 71. Lib. I. Princ. Mat.* e tanto la dimostrazione, che quivi si legge, quando questa, che ne ho qui recata, son coi medesimi principi di Geometria, e di Meccanica, sebben diversamente, condotte a fine. Più volte tentai farne un'altra, che fosse di verità geometriche men ingombra di queste due: ma quanto l'Analisi secondava i miei desideri, tanto la Sintesi erane a ciò restia; sicchè credei impossibile d'escire da quella del Cavalier Nevvton. Ma poi con un metodo analirico comunicatomi dal valentissimo giovane D. Annibale Giordano, e che altrove mi farò pregio esibirvelo, ho conosciuto *a priori*, che volendosi prendere le tendenze medie delle armille di BD, e di bd nella costante ragione di as^2 ad AS^2 , convienfi necessariamente tirar le seganti AO, AM ed ao , am ne' circoli FDO, Fdo, sicchè le corde BO, DM parti di quelle sieno rispettivamente uguali a bo , dm parti di queste.

PROP. XLIX. TEOR.

§. 269. Posta la medesima legge di attrazione, se i corpicciuoli uguali A, ed a pongansi fuori le superficie sferiche attraenti BNM, bnm, e le loro distanze da' centri di esse sieno proporzionali a semidiametri delle sfere; le forze, onde i medesimi corpicciuoli tenderanno a i centri delle sfere, saranno tra se uguali.

Fig. 32.

Dim. Sieno BNM, bnm due circoli massimi di esse sfere, che passino per A, ed a. E condotta ovunque nel primo di questi circoli la segante AB, si forni in a l'angolo cab uguale a CAB, e di questi sieno BAD, bad due uguali elementi. Si uniscano i raggi CD, e cd, e si calino Df, df perpendicolari su di AC, ed a c.

E poichè dalla supposizione le distanze CA, ca son proporzionali ai semidiametri CD, cd delle sfere; e si è dalla costruzione adeguato l'angolo cad all'altro CAD, saranno simili fra loro i triangoli CAD, cad. Dunque le seganti AD, ad saran proporzionali ad essi raggi, e l'angolo DCF pareggerà l'altro dcf. Per la qual cosa avendo i due triangoli rettangoli DCF, dcf uguali cotesti angoli acuti, dovranno essere anche simili fra loro, e saranno i cateti DF, df proporzionali alle ipotenuse CD, cd, cioè a raggi delle sfere.

K 4

Or

Or essendo retti gli angoli CDB , cdb , che i raggi fanno colle circonferenze, ed essendo tra se uguali i due angoli CDA , cda de' triangoli simili CDA , cda ; saranno i rimanenti angoli ADB , adb tra se uguali, ed i triangoletti DAB , dab simili tra loro, onde gli archetti DB , db saran proporzionali alle secanti AD , ad , cioè, come si è dimostrato, ai raggi CD , cd . Ma le zone sferiche generate dagli archetti DB , db rivolti intorno ad AC , ed ac sono proporzionali ad essi archetti, ed alle loro distanze dagli assi di rotazione (a): dunque le stesse armille saranno come i quadrati de' raggi CD , cd ; e le forze, ond' esse trarranno i corpicciuoli A , ed a , essendo direttamente come le loro superficie, ed inversamente come i quadrati di AD , e di ad , saran tra di loro come CD^2 a cd^2 , e come ad^4 ad AD^2 , cioè in ragion di uguaglianza.

Ma l'attrazione, che l'armilla di DB esercita sul corpicciuolo A , sta alla di lui tendenza verso il centro C della sfera, come il raggio al seno dell'angolo ADF : ed in questa medesima ragione P è pure l'attrazione esercitata dall'armilla di db sul corpicciuolo a alla tendenza, che in questo risultane verso del centro c . Dunque coteste tendenze de' corpicciuoli A , ed a ai centri C , e c delle sfere MNB , mnb , saranno tra se uguali.

La

(a) Ved. not. (a) §. 267.

La qual cosa sempre dimostrandosi, sarà vero ciò, che ho proposto. C. B. D.

PROP. L. TEOR.

§. 270. *Poste le medesime cose del Teor. preced. se tutti i punti delle mentovate sfere tirino i corpicciuoli A , ed a ; le tendenze di questi saranno come i raggi di quelle.*

DIM. Prendansi gli elementi NR , nr de' raggi, che sieno ad essi proporzionali; saranno le attrazioni, che i solidi $NMQR$, $nmq r$ producono ne'corpicciuoli A , ed a , come i numeri delle superficie sferiche, che in essi contengono, cioè come NR ad nr , o come NC ad nc . E ciò sempre dimostrandosi, sarà vero il Teorema. C. B. D.

§. 271. COR. Ed in questa stessa ragione saranno dalle sfere tirati i corpicciuoli A , ed a , quando questi sieno posti in N , ed n .

PROP. LI. TEOR.

§. 272. *Un corpicciuolo situato fuori di una sfera, i dicui punti il tirino con forze uguali, e decrescenti come i quadrati delle distanze, tenderà al centro della sfera con forza reciprocamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal dilei centro.*

DIM. S'intenda la sfera divisa in infinite
su-

superficie sferiche concentriche fra loro; sarà l'attrazione, che ciascuna di esse esercita sul corpicciuolo, inversamente come il quadrato della distanza ch'ei tiene dal centro della sfera (268). Dunque l'attrazione esercitata da tutta la sfera sul corpicciuolo sarà inversamente come il quadrato della distanza di questo dal centro di quella. C. B. D.

§. 273. COR. I. Se tutta la materia della sfera attraente intendasi raccolta nel dilei centro; l'attrazione, che in tal caso soffrirà il corpicciuolo, sarà come quella, che prima gliene recava l'intera sfera attraente.

§. 274. COR. II. E se un corpicciuolo tiri ciascun punto di una sfera colla medesima legge di sopra esposta; la forza totale, onde questa tenderà al corpicciuolo, sarà inversamente come il quadrato della distanza di esso dal centro della sfera.

PROP. LII. TEOR.

§. 275. *Poste le medesime cose della proposizione precedente, un tal corpicciuolo intromesso nella sfera attraente tenderà al dilei centro, come la sua distanza da esso.*

Fig. 28. DIM. S'intendano due corpicciuoli uguali B, e b immersi entro la sfera DAF ad ineguali distanze dal centro C; e pe' punti B, e b si fac-

faccian passare le superficie sferiche BP, bp. Egli è chiaro dalla prop. XLVII. che si equilibrino fra loro le attrazioni di ciascuna superficie sferica contenuta nel solido ADFPB. Dunque niuna tendenza dovrà da questo solido prodursi nel corpicciuolo B, e la sola sfera interiore BPC sarà quella, che il farà tendere al suo centro. E per la stessa ragione l'altro corpicciuolo b tenderà al centro dell'altra sfera bpc, come se non vi fosse il solido bpADF. Per la qual cosa essendo le attrazioni esercitate dalle sfere BPC, bpc su i corpicciuoli uguali B, b, come i loro raggi CB, Cb (271), saranno in questa medesima ragione le forze, ond'essi tenderanno al comun centro di questa sfera. C. B. D.

§. 276. COR. I. E quindi più corpi uguali situati fuori la superficie della nostra Terra, tenderanno al dilei centro con forze, che decrescono come i quadrati delle loro distanze dal medesimo centro. E que', che vi s'intromettono dentro di essa, anche ne graviteranno al centro terrestre, ma in ragion delle loro distanze dallo stesso centro.

§. 277. COR. II. E di quì può conoscersi la verità delle tre Ipotesi di accelerazione, ch'io rapportai nei §. 141, 142, 143.

PROP.

PROP. LIII. PROP.

Fig. 31. § 278. Se ciascun punto della sfera ABD tiri ciascun punto dell'altra abd con forza centripeta decrescente, come il quadrato della distanza; la sfera abd tenderà al centro C della prima inversamente come il quadrato di Cc distanza de' loro centri.

DIM. S'intenda la massa della sfera ABD raccolta nel centro di essa C; sarà l'attrazione esercitata dalla sfera ABD in un punto a dell'altra, come quella che vi eserciterebbe il corpicciuolo C (273), cioè inversamente come il quadrato di Ca. Dunque il corpicciuolo C tira ogni punto della sfera abd inversamente come il quadrato della sua distanza da esso punto. E quindi essendo (274) la forza totale, onde la sfera abd tende al corpicciuolo C, inversamente come il quadrato di Cc, sarà puranche la tendenza della sfera abd nell'altra ABD inversamente come il quadrato di Cc. C. B. D. (a)

CAP.

(a) Questi Teoremi si dimostrano in simil guisa dal Cav. Newton nell. Sez. XII. Princ. Mat. e parecchi Problemi affini veggionli risolti col metodo delle flussioni nella Sez. XIII. Princ. Mat.

CAP. XI.

GENERALI CONSIDERAZIONI SUL MOTO DE' CORPI, CHE NE' MEZZI LIBERI SI AGIRANO INTORNO AGL' IMMOBILI CENTRI DELLE FORZE.

PROP. LIV. TEOR.

Fig. 33. § 279. Se al corpo A imprimasi una forza finita per la direzione ABD, mentr'ei tenda di continuo all'immobile centro S delle forze; il sentiero di tal corpo sarà curvilineo: giacerà nel piano delle rette AD, AS: e volgerà la sua parte concava allo stesso centro.

DIM. IL corpo A, se fosse animato dalla sola forza impressagli per ABD, progredirebbe equabilmente per la retta AD senza mai torcer cammino: e quindi disegnando AB quello spazietto, ch'ei percorre nel primo elemento di tempo; le retticciuole BD, DX, ec. uguali alla prima AB sarebbero percorse dal mobile A nel secondo elemento di tempo, nel 3°, nel 4°, ec. Ma appena ei giunge all'estremo B della prima retticciuola AB, che riceve una spinta verso il centro S delle forze, la quale valga a farlo discendere per uno spazietto BP in quello stesso tempo, che avreb-

avrebbe colla sola forza d'impulsione descritta la BD . Dunque con entrambe queste forze ei dovrà equabilmente percorrere la BC diagonale del parallelogrammo $BPCD$, e nel medesimo tempo, che colla sola forza di proiezione avrebbene descritta la BD . Similmente se non vi fosse altra sollecitazione verso il centro S delle forze, il corpo seguirebbe il suo cammino per la retta BCR , descrivendo CR uguale a CB nel medesimo tempo, che CB . Ma replicandoglisi in C una spinta per CS , che valga a farlo discendere per CQ nello stesso tempo, in che avrebbe descritta la CR ; è d'uopo che secondando queste due forze ei si guidi per la CN diagonale del parallelogrammo $RCQN$, e così in appresso. E poichè la velocità acquistasi dal corpo A nella discesa per BP l'è infinitesima rispetto a quella, che gli arreca la forza di proiezione (a), sarà BP infinitesima rispetto ad AB , e con ciò puranche CD infinitesima rispetto a BD . Dunque descrivendosi un circolo intorno al triangolo BDC , sarà l'arco sotteso da DC infinitesimo riguardo a quello, che da BC si sottende: e perciò l'angolo DBC sarà evanescente riguardo a

(a) La velocità iniziale di un grave cadente è sempre infinitesima rispetto a quella, ch'ei si acquisterebbe dopo un tempo finito: e quindi anche infinitesima riguardo alla velocità di proiezione, che si è supposta finita.

a BDC , o al suo uguale ABS , e quindi sarà infinitamente ottuso l'angolo ABC . Collo stesso ragionamento proverassi, che sieno infinitamente ottusi gli angoli BCN , CNF , ec. che tra se comprendon le rette infinitesime BC , CN , NF , ec. dunque sarà curvilineo il sentiero del corpo A , e l' sarà benanche concavo verso il centro S , poichè gli angoli ABC , BCN , CNF , ec. han le diloro aperture rivolte al punto S .

Or giacendo nel piano delle due rette DB , BS non meno il triangolo ABS , che l'altro BSC ; saranno essi triangoli nel piano disteso per le rette AX , ed AS . La qual cosa potendosi in simil guisa dimostrare degli altri triangoli CSN , NSF , ec. la curva descritta dal proietto dovrà giacere nel piano delle rette ADX , ed AS , cioè della direzione della forza proiettile, e di quella retta, che passa pel centro delle forze, e per lo punto della proiezione. $C. B. D. (a)$

§. 280.

(a) L' Ill. Nevvton nella dimostrazione di questo Teorema *Prop. I. Lib. I. Princip. Mat.* divide il tempo della rivoluzione del corpo non già in particelle infinitesime, come si è fatto quì sopra, ma in parti finite, e tutte fra loro uguali: e poi suppone, che alla fine di ciascuna parte di tempo la forza centripeta agisca nel proietto *unico impulsu, sed magno*. Il corpo (112) deve condursi per le diagonali de' parallelogrammi $BPCD$, $CQNR$, ec., i quali hanno tutti i loro lati di una magnitudine finita. Or supponendosi, segue lo stesso Autore, che cresca all' infinito il n. de' triangoli ASB , BSC ,

§. 280. DEF. XXXIV. La curva ABCNF dicesi *Orbita*, o *Traiettoria*; le rette SA, SB, SC, ec. si appellano *Raggi Vettori*; ed i triangoli mistilinei ASC, NSB, ec. diconsi *Aje descritte intorno al centro delle forze*.

§. 281. DEF. XXXV. Quella forza, con cui il proietto in ciascun punto della sua Traiettoria cerca scapparne per la tangente, suol dirsi *Tangenziale*; e quell'altra, che ritirandolo dalla tangente lo fa piegare nell'Orbita, si dice *forza Centripeta*, il di cui conato opposto *forza Centrifuga* si domanda (b).

§. 282. COR. I. Gli elementi AB, BC, CN ec. della Traiettoria ABCNF sono descritti in tempi uguali.

§. 283.

BSC, CSN, ec. i quali han per bafi le diagonali di que' parallelogrammi; e che all' infinito s' impiccioliscono le loro bafi; verran queste a costituire il perimetro di una curva, nella quale si volgerà il proietto, e la forza centripeta, che per intervalli di tempo erasi supposta replicar sul corpo le sue spinte, si renderà continua. Ma per l'intelligenza de' giovani vi aggiugnerei, che nel renderli continua cotesta forza, le sue spinte successive non sieno più finite, ma di un' *infinitesima energia*.

(a) Aggirate una fionda colla vostra mano: offerrete, ch' ella in ogn' istante cerchi scapparne per la tangente, e che la vostra mano ne la debba incessantemente ritirare. La prima forza è la *tangenziale*, e l'altra è la *centripeta*. Ma poi v' è un'altra forza, cioè quella, onde continuamente si tira la corda, e che debb' esser contraria all' azione della vostra mano, e questa è la *centrifuga*.

§. 283. COR. II. Il sentiero, che descrivesi dal proietto intorno ad un immobile centro delle forze, non puol esser mai una *linea a doppia curvatura*, nè quivi può ritrovarsi punto di *flesso contrario*.

PROP. LV. TEOR.

§. 284. Poste le medesime cose della prop. prec. i tempi, in che il proietto trascorre due archi qualunque ABC, CNF della sua Traiettoria ACF, son proporzionali alle aje corrispondenti ASC, CSF descritte intorno al centro S delle forze.

E le velocità, ond' ei si muove in due qualunque luoghi B, ed N della stessa Traiettoria, sono inversamente come le perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti de' medesimi punti B ed N.

DIM. PAR. I. Premesse le medesime cose della dim. prec. i due triangoli ASB, BSD sono uguali fra loro, e l' sono benanche (a) questi altri due BSC, BSD. Dunque sarà il triangolo ASB uguale all'altro BSC. Nella stessa guisa dimostrasi, che gli altri triangoli CSN, NSF, ec. sieno uguali fra loro, ed uguali ai due primi ASB, BSC. Or gli elementi AB, BC, CN, NF ec. della Traiettoria ACF (282) son descritti in uguali particelle di tempo:

Tom. I.

L

dun-

(a) Prop. 37. 38. El. I.

dunque quante volte l'aja ASC contiene il triangolo ASB, altrettante volte il tempo per ABC dovrà contenere il tempo per AB: e quante volte l'altra CSF contiene il triangolo CSN, tante volte il tempo per CNF conterrà quello per CN: e quindi sarà l'aja ASC all'altra CSF come il tempo per ABC al tempo per CNF.

PART.II. I due elementi AB, CN della Traiettoria ACF sono a cagion della loro picciolezza descritti equabilmente; ma essi son altresì descritti in tempi uguali (282): dunque saran proporzionali alle velocità, onde muovesi il corpo ne' luoghi B, ed N. Or i medesimi elementi AB, CN, avvegnachè basi de' triangoli uguali ASB, CSN, sono inversamente come le di loro altezze, cioè inversamente come le perpendicolari calate dal centro S delle forze sulle rette AB, e CN, che son le tangenti dell'orbita ne' punti B, ed N. Son dunque le velocità del mobile ne' luoghi B ed N della Traiettoria, ch'ei descrive, inversamente come le perpendicolari menate dal centro delle forze sulle tangenti di essa ne' medesimi luoghi. C. B. D.

§.285. DEF. XXXVI. La proporzionalità delle aje ASC, CSF, ec. ai tempi, in che si descrivono gli archi ABC, CNF, ec. dicesi *equabilità delle aje* (a).

§.286.

(a) Giovanni Keplero, il di cui genio spingealo

§.286. DEF. XXXVII. Se la Traiettoria sia una curva, che torni in se stessa, il tempo, in che il corpo la descrive, si dirà *Tempo Periodico*.

L 2

§.287.

sovente ad indagar armonie ne' moti de' corpi celesti, rinvenne tra le altre cose, che i Pianeti lassù ne' Cieli descrivano equabilmente le aje intorno al Sole, abbenchè si volgano con variabil moto nelle loro Traiettorie. Ma chi l'avrebbe creduto! questa equabilità delle aje l'è una legge universale, onde Natura tempera i moti de' corpi, che giran d'intorno ad immobili centri: ed era serbato al Geometra Inglese l'avvertirla, il dimostrarla *a priori*, e l'impiegarla come principio euristico per iscoprire i sintomi de' curvilinei movimenti. Nè poi vi farà maraviglia, perchè prima del Nevvton s'ia nulla, o poco saputo di questi moti. In fatti il gran Galilei avea fissate le sue speculazioni al moto de' proietti, e l'acutissimo Ugenio erasi ristretto al solo esame delle forze centrifughe de' corpi, che volgonfi circolarmente.

Il *Principio delle aje*, che rinvenne il Cavalier d'Arcy, e che avendolo dimostrato egregiamente nel Vol. dell' *Real Acc. del. Scien. di Par. per l'an. 1747.* quivi l'impiegò a sciogliere alquanti Problemi Dinamici, non è che il presente Teorema Nevvtoniano reso più generale. Eccone la sua enunciazione: *A, B, C, ec. sia un sistema di corpi, che agiscan fra loro per attrazione, o perchè legati a fili flessibili, o a verghe inflessibili, o in altra guisa; sarà sempre la somma de' prodotti di ciascun corpo nell'aja, che il suo raggio vettore descrive intorno ad un centro fisso, proporzionale al tempo.* Lo stesso Autore proponendo questa verità in altro aspetto ne formò un Principio Metafisico, che disse *Conservazion dell' azione*; il quale non è, che identico al Principio della *Conservazion del momento nel moto di circolazione*, anteriormente adottato dai Signori Daniele Bernulli, ed Eulero. Vedi *Memoir. de l'Acad. des Scien. de Berl. an. 1745.* e gli *Opusc. di Eulero*.

Fig. 38. §. 287. COR. Il tempo periodico di un corpo, che si volge nell'Orbita APS con forza centripeta tendente al punto C, è come il numero delle aje ACL, LCP, ec. ciascuna delle quali sia descritta in un dato tempo. Ma questo numero è come la magnitudine dell'intera Orbita APS direttamente, ed inversamente come la grandezza di una di quelle aje. L'è dunque il tempo periodico per l'orbita APS direttamente come la sua grandezza, ed inversamente come quella dell'aja ACL descritta in un dato tempo.

PROP. LVI. TEOR.

Fig. 34. §. 288. Poste le medesime cose delle prop. prec. le forze, onde il mobile ne' luoghi B, ed N vien ritirato dalle tangenti, e ritenuto nell'Orbita ACF, sono come le saette Bt, Nr degli archi minimi ABC, GNE descritti in uguali tempi.

DIM. Se nel luogo B s'intendesse spenta la forza tangenziale del corpo A, egli lasciato a se liberamente dovrebbe discenderne al centro S per la BS: descrivendo lo spazietto BP nello stesso tempo, che AB. E supponendosi nello stesso mobile annullata la forza tangenziale, che lo agita nel punto N; ei dovrebbe di là calarne al centro delle forze per la retta NS, e descrivere il primo spazietto NL in

in quanto tempo avrebbe colla sola forza tangenziale descritta la NT, o colla tangenziale e colla centripeta insieme combinate percorsa la diagonale NF. Ma (282) sono uguali i tempi per AB, e per NF: dunque il saranno ancora quei delle discese per BP, ed NL, E quindi le forze centripete ne' luoghi B, ed N saranno fra loro nella ragione di questi spazj iniziali BP, NL (119): cioè, compiti i parallelogrammi BAPC, GLFN, come le loro metà Bt, Nr. C. B. D.

§. 289. COR. I. Se i tempi, ne' quali descrivonsi gli archetti minimi ABC, GNF, non sieno uguali fra loro, come si è supposto quì sopra; le forze centripete ne' luoghi B ed N saranno direttamente come le saette Bt, Nr, ed inversamente come i quadrati de' mentovati tempi (119. n. 3.).

§. 290. COR. II. Intanto i tempi per gli archetti ABC, GNF son come le aje ASC, GSF (284): e queste essendo dupli de' triangoli BSC, NSF, son rispettivamente uguali a' rettangoli di BS in Cx, e di NS in Fz (intendendosi calate le perpendicolari Cx, Fz su di SB, e di SN). Dunque le forze centripete ne' luoghi B ed N saranno fra loro nella semplice ragion diretta delle saette Bt, Nr, e nell'inversa duplicata de' rettangoli di SB in Cx, e di SN in Fz.

§. 291. COR. III. E volendo esprimere alla

maniera degli Analisti la quantità della forza centripeta, che anima il mobile nel luogo B, si dirà, ch'ella sia uguale a $\frac{Bt}{SB^2 \cdot Cx^2}$.

§. 292. SCOL. In queste tre proposizioni tre cose ho voluto generalmente definire: la natura del sentiero, in che si piega il proietto: la qualità del suo moto: e la legge di quella forza, che ritirandolo continuamente dalle tangenti l'obbliga ad inflettersi nella Trajettoria. E saran poi queste cose sufficientemente determinate nelle proposizioni de' Capi, che seguono.

PROP. LVII. TEOR.

§. 293. Se il corpo A si volga nella Trajettoria ABNF, e le aje descritte intorno all'immobile punto S situato verso la parte concava di essa sieno proporzionali ai tempi; il punto S sarà il centro delle forze.

DIM. Si prendano i due archetti contigui AB, BC, che però sieno infinitesimi, e descritti in uguali particelle di tempo: il primo di esso, che può considerarsi qual retticciuola, si prolunghi verso X, sicchè BD l'adequi: e poi si congiungan le rette BS, CS, DS, DC. Essendo AB, e BD uguali fra loro, i triangoli ASB, BSD saranno tra se uguali. Ma dall'Ipot. il triangolo ASB adegua l'altro BSC. Dunque sarà il triangolo BSC uguale all'altro

tro BSD, e quindi (a) BS parallela a DC. Per la qual cosa designando il lato DB del parallelogrammo DBPC la forza tangenziale del mobile, e la diagonale BC quella, che si compone dalla tangenziale, e dalla centripeta, è d'uopo che l'altro lato BP dinoti la direzione, e l'attività della forza centripeta, onde il mobile ritirato dalla tangente torce il suo cammino nell'orbita. E conchiudendosi collo stesso ragionamento, che agisca per CS la forza centripeta nel luogo C; il centro delle forze dovrà risiedere nel concorso delle due rette BS, CS, val quanto dire nel punto S. C. B. D.

§. 294. COR. I. L'equabilità delle aje descritte intorno all'immobile punto S posto nella parte cava della curva ACF l'è un indizio sicuro, che ad esso tenda quella forza centripeta, con cui il corpo, che volgesi in tal curva, quivi n'è ritenuto. El centro delle forze dee stare nel concorso delle rette BS, CS, ec. per le quali n'è il corpo ritirato dalle tangenti.

§. 295. COR. II. Che se un corpo si aggiri in una linea curva, e le aje descritte intorno ad un punto, ch'è verso la parte concava di lei, non sieno proporzionali ai tempi; esso punto non sarà mai il centro delle forze.

L 4

PROP.

(a) Prop. 40. Elem. I.

PROP. LVIII. PROBL.

Fig. 35. §. 296. *Dato il rapporto delle velocità, onde un*
 n. 1. *corpo si muove ne' tre luoghi A, B, C della*
sua Traiettoria ABC, determinare il
centro delle forze.

COST. I. Si tirino ai tre dati punti le rispettive tangenti AD, DE, EC: sarà data la loro posizione dall'esser nota la Traiettoria ABC, ed in essa i punti A, B, C anche dati. II. Si trovi in mezzo a queste tre tangenti il punto S, donde le perpendicolari abbassate su di esse sieno inversamente come le velocità in A, B, e C (a). Sarà S il centro delle forze.

DIM. S'è possibile sia un'altro punto P il centro delle forze; saranno (284) le perpendicolari calate da P sulle sottoposte rette AD, DE, EC inversamente, come le velocità del mobile ne' luoghi A, B, C. Ma in questo rapporto son per costruzione le perpendicolari calate dal punto S sulle medesime rette. Dunque vi saran due punti in mezzo alle tre rette AD, DE, EC, donde le perpendicolari menate su di esse sien proporzionali a tre grandezze date. Lo che ripugna al cor. della cit. Pren. C. B. D.

PROP.

(a) *Prenoz. XV.*

PROP. LIX. TEOR.

Fig. 35. §. 297. *Se il corpo A, che tende all'immobile*
 n. 2. *centro S delle forze, dal luogo A si proietti*
per la direzione ABD con una data for-
za; ei non potrà descrivere, che
una sola curva determinata.

DIMOST. S'è possibile, il corpo A gittato per la direzione ABD con una data forza descriva l'orbita ABQ, ed altra volta, che si proietti colle medesime condizioni, si pieghi nella Traiettoria ABNF. La retticciuola AB dinoti il primo, e 'l comune elemento di queste due orbite, e BQ e BN sieno due altri elementi delle medesime orbite contigui ad AB. Si prolunghi AB in D, fintantochè BD l'uguagli: e per D si conduca DN parallela a BS, che incontri le due orbite in Q ed N. Ciò posto, il corpo A appena giunto in B piegasi nell'orbita BQL per l'azion di una forza valevole a farlo discendere per BP nello stesso tempo, onde colla forza di proiezione avrebbe percorso lo spazio AB (a). Ma quando deesi piegare nell'elemento BN della seconda orbita, la forza centripeta, che impieghi a quest'uopo, debb'essere efficace a farlo calare in quello stesso tempo per la BR. Dunque la forza centripeta eser-

(a) *Vedi il princ. dell. dim. Prop. LIV.*

citata dallo stesso centro in un dato corpo e nello stesso luogo non sarebbe la stessa. Lo che ripugna. C. B. D. (a)

§. 298. COR. Dunque due *curve osculatrici*, cioè tali, che abbiano comuni alcuni d'oro elementi, non si posson descrivere intorno ad uno stesso centro di forze.

PROP. LX. TEOR.

Fig. 36. §. 299. *Volgasi il corpo A nell'orbita QAD intorno all'immobile centro S, e l'altro B discenda allo stesso centro per la retta MS, e sieno tra se uguali le velocità, onde si muovano cotesti corpi ne' luoghi A, e B ugualmente distanti dal centro S: io dico, che negli altri luoghi de' loro sentieri ugualmente distanti dallo stesso centro debban essi pur anche avere velocità uguali.*

DIM. Prendasi l'archetto AD infinitesimo, e congiunte le rette SA, SD, col centro S, e cogli intervalli SA, SD si descrivano gli archi

(a) Il luogo, donde si proietta un corpo, la velocità di proiezione, la direzione del moto, la quantità assoluta della forza centripeta, e la legge della quantità acceleratrice sono i cinque *Determinanti* dell'Orbita del proietto. Sicchè cangiandosi una di queste cose dovrà emergere un'Orbita diversa o nella specie, o nella grandezza, o nella posizione.

chi circolari AB, DF, che seghino QS ne' punti B, ed F. E finalmente dal punto E si cali EG perpendicolare su di AD. E poichè i due spazietti AD, BF a cagion della loro picciolezza son descritti equabilmente da' corpi A, e B, i quali son dall'ipotesi ugualmente veloci ne' luoghi A, e B; saranno i medesimi spazietti (11) nella ragion de' tempi, in che da' mobili trascorronsi. E perchè gli stessi corpi son benanche ugualmente distanti dal centro S delle forze; dovran quivi esser sollecitati da uguali forze centripete, che si potranno designare per le uguali retticciuole AE, BF.

Ciò premesso la forza BF tutta s'impiega ad accelerare il corpo B nella sua discesa rettilinea: e risoluta l'altra forza AE nelle sue laterali AG, GE, la sola AG dovrà accelerare il corpo A pe' l' sentiero AD: conciossiachè l'altra laterale EG si occupa a ritenerlo nell'orbita. Dunque le forze acceleratrici de' corpi A, e B sono fra loro nella ragione di AG a BF: e quindi gl'incrementi di velocità, ch'essi acquistansi ne' luoghi D ed F, essendo nella ragion composta delle mentovate forze, e de' tempi per AD, e per BF, saranno come (AG : BF) (AD : AE). Dunque come l'è d'uguaglianza la ragion (a) che si compone di queste due,

così

(a) Per la Prop. 8. El. VI. sia $AG : AE :: AE : AD$: dunque sarà d'uguaglianza la ragion che si compone

così quegl' incrementi di velocità saran pure tra se uguali. Per la qual cosa essendosi supposte uguali le velocità di cotesti mobili ne' luoghi A, e B, ed or mostrati uguali que' loro incrementi di velocità, che ricevono trascorrendo gli spazietti AD, BF; saranno altresì uguali quelle intere velocità, onde i medesimi mobili saranno affetti negli altri luoghi D, ed F equidistanti dal centro S delle forze. E così sempre dimostrandosi lo stesso assunto, sarà vero ciò che si è proposto. C. B. D.

§. 300. COR. I. Qualor si volga il corpo A nell' orbita QAD, e la sua velocità nel luogo Q sia quanto quella, ch' ei si acquisterebbe liberamente calando dall' altezza MQ; la velocità, che avrà questo mobile in un' altro luogo A dell' orbita, sarà uguale a quella, che gli conferirebbe la discesa per MB: intendendosi descritto il cerchio AB col centro S intervallo SA.

§. 301. COR. II. Col centro S intervallo SM descrivasi il circolo MN, ed ogni raggio vettore nella divisata orbita si distenda, in sin che incontri la sua circonferenza; saranno le velocità del mobile ne' luoghi A, D, ec. della stessa orbita rispettivamente uguali a quelle, che gli recherebber le discese per NA, PD, ec.

§. 302.

pone da AG ad AE, o a BF, e da AD ad AE.
Prop. III.

§. 302. DEF. XXXVIII. Questo circolo MNP dicesi *Linea di Sublimità*.

§. 303. COR. III. dunque le velocità, che si acquisterebbe un grave calando dalle altezze NA, PD, ec. sono inversamente come le perpendicolari menate dal centro S delle forze sulle tangenti dell' orbita ne' punti A, D, ec.

§. 304. COR. IV. Un grave proiettato dal luogo Q per la direzione QK, e colla velocità, che si acquisterebbe calando per MQ, descriva l' orbita QAD; egli è fuor di dubbio, che avventandosi questo grave dal luogo A per la tangente AL, e colla velocità acquistatasi per NA debba pur anche girne per la medesima Traiettoria.

PROP.

PROP. LXI. TEOR.

Fig. 37. §. 305. *Se il punto C, ch'è un' immobile centro di forze, sia puranche il centro del circolo P S, e dentro di questa figura siavi descritta la curva R a A tale, che le perpendicolari calate dal centro C delle forze sulle tangenti de' punti R, A, ec. sieno inversamente come le velocità, che in tai luoghi si acquisterebbe un grave calando dalle altezze P R, S A, ec.; la curva R a A sarà il sentiero di questo grave, che da un suo punto R si proietterebbe per la tangente R X colla celerità acquistatasi per P R.*

DIM. Dal centro C delle forze si tiri una retta, come la C R, che seghi la curva obliquamente, ovunque ciò ne addivenga: e l'angolo C R A, o C R X sia l'acuto de' due conseguenti.

Ciò premesso, se la curva R a A non sia il sentiero del grave proiettato dal luogo R per la tangente R X, e colla velocità da tal corpo acquistatasi per P R; l'altra curva R b B, che più di quella si accosti, o si allontani dalla loro comun tangente R X, siane cotesto sentiero. Si cali la retta C X perpendicolare sulla R X, che tagli in A quella di queste curve, che n'è al di fuori dell'altra: e poi preso l'archetto A a infinitesimo, si tiri la retta C a, e si

e si descrivano col centro C intervalli C A, C a gli archi circolari A G, a g, i quali seghino l'altra curva in B, e b. E finalmente congiunte le rette C B, C b, e condotte ai punti a, e b delle due curve le tangenti a M, b N, su di queste si calino dal punto C le perpendicolari C M, C N.

E poichè dall'ipot. sta C M a C X, come la velocità acquistatasi da un grave nella discesa per P R a quella, ch'ei si acquisterebbe calando per S a, o per P g; ed in questa medesima ragione (303) l'è anche C N a C X; sarà C M : C X :: C N : C X, e C M uguale a C N. Dunque i due triangoli rettangoli C a M, C b N, che hanno uguali le loro ipotenuse C a, C b, ed i cateti C M, C N, avranno (a) uguali gli altri cateti a M, b N, e gli angoli C a M, C b N, o questi altri r a A, t b B. E quindi i due triangoletti r a A, t b B, che hanno uguali i lati a r, b t, e gli angoli r a A, a r A rispettivamente uguali agli altri due t b B, b t B, dovranno avere pur anche uguali i lati A r, B t. Per la qual cosa essendosi mostrati uguali i due archetti circolari A r, B t, misure degli angoli A C r, B C t, saranno gli angoli A C r, B C t, o pur questi altri A C a, B C b tra se uguali. E questo potendosi dimostrar sempre, sarà l'angolo A C R uguale all'altro B C R: lo che è assurdo. C. B. D.

§. 306.

(a) Prop. 47. ed 8. El. I.

§.306. SCOL. Ogni Problema, che sulle forze centrali si propone, o è diretto, o pur inverso. Nel primo si vuol determinare la legge della forza centripeta, onde un corpo, che si volge in una data Traiettoria, ad un dato punto immobile tendendo. E nell'Inverso poi si domanda la natura, il sito, e la grandezza di quella curva, che descrivesi da un corpo tendente ad un'immobile centro, qualora ci si proietti da un luogo dato con una velocità data, e per una data direzione. Il Teorema quassù dimostrato, ch'è converso del precedente, serve a compier rigide dimostrazioni al Problema inverso delle forze centrali, che andrò in certi casi risolvendo. E l'orditura del metodo, onde alla maniera Newtoniana risolvonsi i Problemi diretti, ho voluto per chiara intelligenza de' giovani quaggiù immediatamente rapportare (a).

PROP.

(a) Prima, che altrove io mi rivolga, non vò tacervi un'insigne proprietà delle Traiettorie rilevata dal Sommo Eulero, che giova nella serie delle scoperte affini quì rapportare.

Aristotile fin da' tempi suoi solea dire, che Natura niente oprasse in vano; ed i Filosofi dell'età recente gli han fatto ecco. L'Immortal Newton ha proferito nella I. Reg. di Filosofare, che la Natura sia semplice, e non usi lusso nelle cagioni: il Gran Leibnitz, ch'ella segua il più facile cammino; ed altri in diverse congiunture hanno ancor detto, che non siavi nel mondo dispendio, o profusione di cause meccaniche: che i fenomeni naturali vengano su pe' sentieri più corti: o che nel menomo tempo si producano. Ma chi mai colla luce della Geometria, e del Calcolo erasi accertato di que-

PROP. LXII. PROBL.

§.307. Esporre il metodo Nevvtoniano, onde sinteticamente risolvesi il Problema Diretto delle forze centrali.

I. Prendansi nell'orbita PQq i due archetti infinitesimi PQ , pq descritti in uguali tem-
puscoli: e condotti ai loro estremi P , e p i
ragg.

Fig. 45.

questa faggia economia della Natura? L' Ill. Sig. de Maupertuis Presid. della Real Acc. di Berlino fu il primo a faggiar con dell' Analisi, che il Minimo d' Azione sia Suprema Legge dell' Universo, da cui ogni altra o si temperi, o ne dipenda. In fatti dopo aver egli stabilito, che l'azione di un mobile si debba misurare dalla dilui massa nella velocità e nello spazio trascorso, dimostrò analiticamente, che nell'urto de' corpi le forze si ripartiscan sempre fra di loro colla menoma quantità di azione. II. Che succedendo un picciol moto ne' corpi equilibrati, la quantità dell'azione sia sempre un minimo. Il Valentuomo poi distese l'applicazione di questo principio a determinar le figure, e l' sito, che prendono più corpi uniti fra loro, e da più forze animati. E si è conosciuto, che una catena sospesa a' suoi estremi si debba sempre incurvare, sicchè il di lei centro di gravità ne giaccia più basso, che sia possibile: che un fluido riempiendo un vaso flessibile debba dargli la più grande ampiezza, affinchè il suo centro di gravità sia nella massima depressione &c. Intanto questo Principio è stato dal Cavalier d'Arcy oppugnato, e difeso dal Sig. Bertrand. Vedi Att. dell' Acc. di Berlin. an 1750.

Il Sommo Eulero immerse in simili pensieri rinvenne, che nelle Traiettorie descritte da' corpi con forze centrali sia sempre un massimo, e un minimo P
Tom. I. M in.

raggi vettori SP , Sp , e le tangenti PY , pY , si tirino dagli altri di loro estremi Q , e q le rette QX , qx rispettivamente parallele a queste tangenti, che incontrino que' raggi vettori in X , ed x . Saranno queste parallele QX , qx uguali agli archi PQ , pq . Imperciocchè per la 13. El. II. CP^2 è uguale a $BC^2 + BP^2 - 2PBx$ (intendendosi dal punto C calata Cx perpendicolare su di SB), e le due grandezze BP^2 , e $2PBx$ son poi trascurabili rispetto a BC^2 per

Fig. 34.

integrale della celerità del mobile nell' elemento della curva. E 'l Principe degli Analisti il Sig. Luigi de la Grange promovendo questa scoperta Euleriana ne ha rilevato il seguente principio generale. *Se i Corpi M , M' , M'' , &c., i quali comunque agiscano fra loro, e si attraggano, descrivano in un tempo t gli spazj S , S' , S'' , &c. e le loro velocità finali sieno u , u' , u'' , &c. sarà sempre $Mfuds + M'f'u'ds' + M''f'u''ds'' + \text{ec.}$ un Massimo, o un Minimo. Vedi Eulero nell' *addiz. al Method. inven. lineas. curv. maxim. &c.* e 'l II. Vol. Acc. Real di Torino. Dunque le leggi de' fenomeni naturali si possono dall' Analista indagar per due vie, per quella cioè delle cause efficienti, e per l' altra delle finali. Nella prima basterà prendere i valori delle forze, e pareggiandoli coi loro effetti; poi trarne con accortezza le leggi del moto. Ma in quella delle cause finali converrà prima calcolar sagacemente la quantità dell' azione del mobile, e poi adattarle il metodo de' Massimi, e de' Minimi. E questo metodo, come v'è noto dal calcolo degl' Infiniti, alle volte restringesi a determinare il valore di una variabile, di cui una certa Funzione sia un massimo, o un minimo: e talvolta impiegasi per una più malagevole impresa, qual è l' indagar quella curva, ove una certa funzione delle sue coordinate sia nel massimo, ovvero nel minimo grado.*

per essere BP una infinitesima (a. 279) della BC : dunque CP^2 sarà uguale a BC^2 , e CP uguale a BC . E poichè gli archetti PQ , pq descritti in uguali tempuscoli dal corpo, che volgesi nell' orbita PQq , son come le velocità (8), ond' essi descrivonsi, cioè come Sy , ed SY perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti de' punti p , e P (284); sarà eziandio $QX : qx :: Sy : SY$, e $QX^2 : qx^2 :: Sy^2 : SY^2$. E sarà altresì PX a px come la forza centripeta in P a quella in p (288).

Fig. 45.

II. Ciò premesso ecco le leggi del diviso metodo.

Si procuri dalle affezioni della curva data PQq determinare una funzione del raggio vettore SP , che sia proporzionale ad SY^2 , ed un' altra del rettangolo SPX , che sia proporzionale a QX^2 . Si troverà agevolmente PX a px , come una funzione di SP ad un' altra simile di Sp : e come queste (288) saran tra di loro le forze centripete in P , e p . C.B.D.

Questo, che ho qui generalmente indicato, ed in accorcio, si vedrà ne' Problemi del Capo seguente esibito in alcuni casi particolari, e a disteso.

C A P. XII.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DIRETTO DELLE FORZE CENTRALI PER LE SEZIONI CONICHE.

PROP. LXIII. TEOR.

Fig. 38. §. 308. *Volgasi il corpo A nel circolo APS con forza centripeta tendente al di lui centro; dico esser costante la forza, che ritiene questo corpo in tal orbita, e ch'ei vi si debba muovere equabilmente. E se il medesimo corpo equabilmente si volga nella periferia del circolo APS, la sua forza centripeta sarà diretta al centro della figura.*

PART. I. DIM. Si prendano i due archetti infinitesimi AL, LP descritti in uguali tempuscoli, e si congiungano i raggi CA, CL, CP: saranno tra se uguali i settori ACL, LCP (284): dunque l'archetto AL sarà uguale all'altro LP, ed AB saetta di questo pareggerà LE saetta di quello. E quindi la forza centripeta in A sarà dell'istessa attività di quella, ch'è in L (288). Ed essendo le velocità del mobile ne' luoghi L ed A, come le perpendicolari calate da C sulle tangenti di A e di L (284), cioè come i raggi CA, CL; saran quelle anche tra

tra se uguali. E quindi il corpo A si volgerà equabilmente nella periferia del circolo APS.

PART. II. Prendansi gli archi uguali AL, LP, qualunque ne sia la loro grandezza; saranno essi per l'equabilità del moto del corpo A descritti in tempi uguali. Ma i settori ACL, LCP son pure tra se uguali (a): dunque il punto C, cioè il centro della figura, sarà il centro delle forze (293). C. B. D.

§. 309. COR. Allorchè un corpo si volge nella periferia di un circolo, l'equabilità del suo moto, e la direzione della forza centripeta al centro della figura son due cose sì strettamente tra loro unite, che da una di esse n'è sempre l'altra determinata. E quindi tanto è dire volgasi equabilmente un corpo nella periferia di un circolo, quanto si aggiri un corpo nella periferia di un circolo con forza centripeta tendente al centro di esso.

M 1

PROP;

(a) Prop. 33. El. VI.

PROP. LXIV. TEOR.

Fig. 38. §. 310. Se i corpi A ed N si volgono equabilmente
39. ne' cerchi APS, NMR; le loro forze centripete sono in duplicata ragion diretta delle velocità, con cui vi si aggirano, ed in ragion inversa de' raggi de' cerchi, che descrivono.

DIM. Gli archetti AT, MN, che suppongansi infinitesimi e descritti in uguali tempuscoli, sono come le velocità de' corpi A ed N: e le loro saette AF, NQ come le forze, che in A ed N, (284, 288) ritengono cotesti mobili ne' cerchi. Or l'archetto AT per la sua estrema picciolezza confondesi colla sua corda; dunque siccome il quadrato di questa pareggia il rettangolo SAF, così il quadrato di quello dovrà lo stesso rettangolo adeguare. E dimostrandosi per simil modo, che il rettangolo RNQ adegui il quadrato dell'archetto NM; sarà AT² ad NM² come SAF ad RNQ: val quanto dire AT²:NM²::(AF:NQ)(SA:RN), e quindi AF:NQ::(AT²:NM²)(RN:SA). Cioè la forza centripeta in A sta a quella in N, come il quadrato della velocità del mobile A al quadrato della velocità del mobile N, e come il raggio GN di questo circolo al raggio CA di quello. C. B. D.

§. 311. COR. I. Che se i medesimi corpi con
ugua

uguali velocità si aggirino nelle disuguali periferie APS, NMR; le di loro forze centripete saranno inversamente come i raggi de' cerchi, che descrivono.

§. 312. COR. II. E se mai in cerchi uguali si volgessero con disuguali velocità; nella duplicata ragione di queste saran le forze, ond' essi son ritenuti in tali orbite.

§. 313. COR. III. La velocità, con cui un corpo equabilmente si volge in un circolo, il raggio di questo circolo, e la forza che quivi lo ritiene, sono tre cose talmente tra lor connesse, che ciascuna di esse può sempre dalle altre due determinarsi.

§. 314. Dunque un corpo, che volgesi equabilmente con una velocità data in un cerchio dato, quivi vuol esserne da una data forza ritenuto.

§. 315. E se volgendosi un corpo in un dato cerchio, con una data forza siane al di lui centro ritenuto, la sua velocità debb' esser data.

§. 316. Finalmente qualora un corpo con una data velocità vada equabilmente radendo la circonferenza di un cerchio, ed una data forza quivi il ritenga, dovrà esser pur anche dato il raggio di esso cerchio.

PROP. LXV. TEOR.

§. 317. *Poste le medesime cose della prop. prec. tali forze saranno direttamente come i raggi de' circoli, ed inversamente come i quadrati de' tempi periodici.*

DIM. Le velocità, con cui i corpi A ed N equabilmente si volgono nelle periferie APS, NMR, sono direttamente come le medesime periferie, o come i loro raggi, ed inversamente come i tempi periodici (15). Dunque i quadrati delle riferite velocità saran direttamente come i quadrati de' raggi, ed inversamente come i quadrati de' tempi periodici. E quindi essendosi mostrato nella prop. prec., che le forze centripete de' corpi A ed N sieno direttamente come i quadrati delle velocità, ed inversamente come i raggi; saranno le medesime forze direttamente come i quadrati de' raggi, inversamente come i quadrati de' tempi periodici, ed inversamente come i medesimi raggi, vale a dire direttamente come i raggi, ed inversamente come i quadrati de' tempi periodici. C. B. D.

§. 318. COR. I. *Che se i corpi A ed N si volgessero equabilmente ed in tempi uguali nelle periferie de' cerchi disuguali APS, NMR; le loro forze centripete dovranno essere nella ragione de' raggi.*

§. 319.

§. 319. COR. II. *E se i quadrati de' tempi periodici sieno come i cubi de' raggi; le medesime forze centripete saranno inversamente come i quadrati de' raggi; imperciocchè sarebber queste direttamente come i raggi, ed inversamente come i cubi de' medesimi raggi (sostituendosi alla ragione de' quadrati de' tempi periodici quella de' cubi de' raggi), cioè a dire inversamente come i quadrati de' raggi.*

§. 320. COR. III. *Ed agevolmente può eziandio rilevarsi, che, se ne' circoli le forze centripete sieno inversamente come i quadrati de' raggi; i quadrati de' tempi periodici esser debbano come i cubi de' raggi: ed essi tempi periodici in sesquuplicata ragion de' raggi (180).*

PROP. LXVI. TEOR.

§. 321. *Se la velocità, ond' equabilmente si volge un corpo nella periferia del circolo NDR sia Fig. 391 dovuta all' altezza NV metà del raggio; la sua forza centripeta sarà quanto il peso, ch' egli avrebbe sulla nostra Terra.*

DIM. Nella circonferenza del circolo NDR, si suppongan presi i due archi NM, ND; quello però infinitesimo, questo uguale al raggio NG: e le rette MO, e K dinotino que' spazj, che il mobile uniformemente animato dalla forza centripeta in N potrebbe trascorrere ne' tempi, in ch' ei si rivolge per gli archi NM, ND. Saranno quegli spazj, come i quadrati

ti di questi tempi (110.2.), o degli archi NM, ND (9): vale a dire starà $K:MO::ND^2:MN^2$. Ma per esser le rette MO, MN, NR continuamente proporzionali l'è ancora $MO:NR::MN^2:NR^2$. Dunque sarà *ex aequo* $K:NR::ND^2:NR^2$: e quindi essendo ND^2 , o NG^2 una quarta parte di NR^2 , sarà pure la retta K un quarto dell'altra NR, cioè quanto NV. Ma tanto tempo v'impiega un grave a calare per NV col suo peso, quanto vi porrebbe (153. n.3.) a descrivere equabilmente la ND colla velocità dovuta all'altezza NV. Dunque gli spazj K, ed NV sono uguali, e descritti in tempi uguali dallo stesso grave, che supponesi uniformemente animato or dalla sua forza centripeta, ed ora dalla gravità terrestre. Per lo che il peso del mobile N sarà quanto la forza centripeta, che nel divisato circolo lo ritiene (113). C. B. D.

Fig. 38. §. 322. Cor. Ne' cerchi uguali NDR, APS
39. volgansi equabilmente due corpi uguali N, ed A colle velocità dovute alle altezze NV ed X; saranno le loro forze centripete (312) come i quadrati di queste velocità, vale a dire (153. n.1) come NV ed X. Ma la forza centripeta del corpo N è uguale al di lui peso, e la massa del corpo N è quanto quella dell'altro A. Dunque il peso, che avrebbe un corpo sulla nostra Terra, sta alla forza centripeta, con cui equabilmente in un dato cerchio si rivolge, come la

la metà del raggio di esso cerchio all'altezza dovuta alla velocità del suo moto (a).

PROP. LXVII. TEOR.

§. 323. Volgendosi il corpo A nell'orbita B A a intorno all'immobile centro S; le forze centripete in A, ed a sono tra loro nella diretta ragione de' raggi vettori SA, Sa, nell'inversa de' raggi de' circoli osculatori FA, fa, e nell'inversa triplicata delle perpendicolari SR, Sr calate dal centro delle forze sulle tangenti dell'orbita ne' punti A, ed a. Fig. 40

DIM. Si prendano gli archetti infinitesimi AB, ab descritti in uguali tempuscoli, e si tirino le rette BD, bd rispettivamente parallele ad AR, ed ar. E poichè le rette AF, ed

(a) La Proposizione converfa di quella, che si è in questo Corollario enunciata, l'è anche vera: cioè se il corpo N, che tende all'immobile centro G come una qualunque potenza della distanza GN, si proietti per la direzione NO perpendicolare a GN, e l'altezza dovuta alla velocità di proiezione stia alla metà della stessa GN, come la forza centripeta in N alla gravità terrestre; ei descriverà sempre un cerchio il di cui centro è G. Dunque volgendosi un corpo nella periferia di un cerchio con forza centripeta tendente al di lui centro, potrà solo saperfi, che quivi n'è da per tutto con ugual forza cotesto mobile ritenuto; ma non si potrà mai conoscer la legge della forza centripeta, che tende ad esso punto.

ed SR sono perpendicolari alla stessa RA' , e quindi tra se parallele, i loro angoli alterni $DA C$, $AS R$ saranno tra se uguali. Dunque i due triangoli rettangoli CAD , $AS R$ saranno equiangoli, e simili: ed essendo $AD:AC::SR:SA$, sarà il rettangolo di SA in AD uguale a quello di SR in CA . Con simile ragionamento si prova esser il rettangolo di Sa in ad uguale all'altro di Sr in ca : dunque saranno i rettangoli di SA in AD , e di Sa in ad in ragione composta di SR ad Sr , e di CA a ca : e quindi sarà vicendevolmente CA a ca in ragion composta del rettangolo SAD all'altro Sad , e di Sr ad SR (a), cioè a dire $CA:ca::(SA:Sa)(DA:da)(Sr:SR)$

Or le rettificuole DA , e da son come le forze centripete ne' circoli osculatori; e queste fra loro (310) come i quadrati delle velocità, onde si volge il mobile ne' luoghi A , ed a , e come fa ad FA cioè come Sr^2 ad SR^2 (284) e come fa ad FA . Dunque sostituendo in luogo della ragione di AD ad ad la composta di Sr^2 ad SR^2 , e di fa ad FA , avrassi $AC:ac::(SA:Sa)(Sr^2:SR^2)(fa:FA)(Sr:SR)$, val quanto dire $AC:ac::(SA:Sa)(fa:FA)(Sr^2:SR^2)$. E quindi (288) le forze centripete ne' luoghi A , ed a saranno direttamente come i raggi vettori SA , ed Sa , inversamente come i raggi de' circoli osculatori, ed inversamente

(a) *Prin. IV.*

come i cubi delle perpendicolari SR , e Sr , $C. B. D.$

§. 324. COR. Dunque, se la quantità della ragione del raggio vettore SA al raggio dell'oscolo FA dividasi pe'l cubo della perpendicolare SR calata dal centro S delle forze sulla tangente del punto A ; il quoto darà l'energia della forza, onde un corpo, che volgesi nell'orbita ANa , n'è ritenuto nel luogo A .

§. 325. SCOL. Questo Teorema, che Ahramo de Moivre insigne Analista Inglese dimostrò egli il primo, piacque oltremodo all'acutissimo Gio: Bernulli, e ad altri Matematici di Europa: perciocchè in quantità finite esprime il valor della forza, onde ad un'immobile centro vien ritenuto quel corpo, che giragli d'intorno. Egli è vero, che nell'enunciazione di questo Teorema non vi sia grandezza infinitesima, che lo involuppi; pur non dimeno nell'analitica espressione, cui sovente giova sottoporlo, sorgon tosto que' differenziali di II. ordine, che nel valore annidavansi del raggio del cerchio osculatore. Dunque par che la formola Moivreana non sia più semplice della Newtoniana, nè diversa da questa: e massime da ch'ella può trarsi immediate dalla Prop. VII. de' *Princ. Mat.* Ciò non pertanto i Problemi sulle forze centrali per mezzo della formola Moivreana subito convertonsi in analitici: ed in certi casi le dimostrazioni al

Pro-

Problema Diretto riescono più agevoli, ed eleganti (a).

Fig. 41. §. 326. ESEMP. Volgasi il corpo R nel circolo A R Q intorno al punto S, che non sia centro della figura. In due punti qualunque n. 1. R ed r di quest' orbita si tirino le tangenti R P, r p, i raggi vettori S R, S r, e le perpendicolari S P, S p su di esse tangenti, e prolungata R S in Q, si tiri per lo centro la retta Q A, e si unisca R A. Ciò supposto, l'angolo S R P è uguale ad R A Q (32. El. III.): dunque i due triangoli rettangoli S R P, Q R A sarauno simili fra loro, ed essendo S P: S R:: Q R: Q A, sarà il rettangolo Q R S uguale al rettangolo della perpendicolare S P nel diametro Q A. Con simil ragionamento si rileva il rettangolo di S p in Q A uguale al rettangolo q r S: dunque sarà S P ad S p come il rettangolo Q R S all' altro q r S, cioè in ragion composta di Q R a q r, e di S R ad S r, e con ciò S P³ ad S p³ in ragion composta di Q R³ a q r³, e di S R³ ad S r³. Or essendo le forze centripete in R ed r direttamente come i raggi vettori, ed inversamente come i cubi delle perpendicolari (poichè i raggi osculatori sono nel circolo sempre uguali a' raggi della figura); esse saranno fra loro come S R ad

(a) Il Cavalier Nevvton avea anteriormente ritrovata una verità affine a questa, che è qui mostrata, come l'attesta lo stesso Moivre.

ad S r, come q r³ a Q R³, e come S r³ ad S R³, cioè come q r³ a Q R³, e come S r³ ad S R³. Vale a dire le forze centripete, onde vien ritenuto nel circolo A R Q il mobile A, che tende al punto S diverso dal centro, sono in triplicata inversa ragione delle corde, che passano pe' l centro delle forze, e per esso mobile, e in duplicata inversa dei raggi vettori.

Fig. 41. §. 327. COR. E se il centro S delle forze all' infinito si discosti dal diametro A B, i raggi vettori S R, ed S r diverranno tra se uguali, e paralleli: dunque in tal caso le forze centripete ne' luoghi R ed r saran fra loro come i cubi delle corde q r, e Q R, o come i cubi di t r, e di T R.

PROP. LXVIII. TEOR.

Fig. 42. §. 328. Se nell' orbita A B O si prenda l' archetto B b infinitesimo; la forza centripeta, onde il corpo è ritenuto al centro S, sarà direttamente come la differenza delle perpendicolari calate da S sulle tangenti di B, e b, inversamente come la differenza de' raggi vettori S B, S b, ed inversamente come il cubo della perpendicolare calata da S sulla tangente di B.

DIM. Descrivasi il circolo L B q osculatore dell' orbita in B, cioè, che sia ugualmente cur-

curvo, che l'archetto Bb : e prolungati i raggi vettori BS , bS in sin che tocchino le circonferenze del circolo in Q , e q , dinoti BR la differenza di essi raggi vettori, e PO quella delle perpendicolari. E poichè (3. El. II.) i rettangoli QBS , qbS sono rispettivamente uguali a $QSB + SB^2$, e $qSb + Sb^2$, sarà la differenza di que' rettangoli uguale alla differenza de' soli quadrati di SB , e di Sb (conciossiachè per la natura del circolo il rettangolo QSB è uguale a qSb) cioè uguale a $2SBR$. Ma essendo i medesimi rettangoli QBS , qbS rispettivamente uguali a' rettangoli del diametro QL nelle perpendicolari calate da S sulle tangenti di B , e b (326); la differenza di quelli dovrà pareggiare il rettangolo di QL in PO differenza di queste perpendicolari. Dunque sarà $2SBR$ uguale a QL in PO , ed SB uguale a CL in PO . Sicchè la ragione di SB raggio vettore a CL , o CB raggio dell'oscuolo sarà uguale a quella di PO a BR : e quindi nell'espressione della forza centripeta recata nel cor. prop. LXVII. sostituendo questa ragione in luogo di quella, sarà l'attività di essa forza nel luogo B come la quantità della ragione di PO a BR applicata al cubo di SP , cioè direttamente come PO differenza delle perpendicolari menate dal centro delle forze sulle tangenti di B , e b , inversamente come la differenza de' raggi vettori SB , Sb , ed inversamente

mente come il cubo della perpendicolare SP
C. B. D. (a)

PROP.

(a) Niuna cosa tanto avviluppa i giovani Analisti, quanto il condurre saggiamente que' calcoli, ove contengonfi grandezze meccaniche di diverso genere, ed agli usi pratici poi adattarne i risultati loro. Or queste grandezze non son, che cinque, lo spazio, il tempo, la velocità, la forza spingente, e la massa; che per intenderle bene giova por mente alle loro misure ed alle unità, cui da' Fisici soglionfi rapportare.

1. La misura dello spazio, il quale è una linea, ben si comprende dalle nozioni di Geometria.

2. L'unità del tempo, come udiste altrove (a. §. 16), non è che il minuto secondo del giorno solare medio.

3. La velocità più comodamente misurasi dallo spazio corso equabilmente in un secondo, che per l'altezza dovuta.

4. Le forze spingenti deggionsi esibire per i pesi, che loro sono uguali. Imperciocchè essendo i pesi, e le forze spingenti grandezze omogenee, si potran queste dinotar per quelli.

5. Finalmente la Massa di un corpo esprimeasi per lo peso, ch'egli avrebbe sulla nostra terra. E ciò si concede dall'esser le masse de' corpi come i pesi loro.

6. Dunque 1. se P dinoti il peso della massa M , sarà sempre $P : M = 1$. E quindi 2. la formola esibita nella (b) §. 115, si cangerà in quest'altra $v = \theta \int dt$

$= \theta t$. Con che se pongasi $t = 1''$, e g sia l'altezza, che da un grave percorresi naturalmente in un secondo; sarà $2g$ la velocità dovuta a quest'altezza. E sostituendo nell'equazione $u = \theta t$ le grandezze $2g$ ed $1''$, in luogo di u e di t , avrassi $2g = \theta$. 3. Di più riducendo le forze a pesi terrestri, converrà nelle formole, ove si è posto θ per coefficiente indeterminato, seriver $2g$. 4. Finalmente nelle formole così preparate non vi faranno, che numeri, e linee: e da ciò potrà conoscersi se i termini di co-

PROP. LXIX. TEOR.

§. 329. *Volgasi il corpo A nella Parabola conica SAs con forza centripeta tendente al fuoco C della figura: dico esser le velocità del mobile ne' luoghi S, ed s in sudduplicata ragione inversa de' raggi vettori CS, Cs.*

Fig. 43.

E qui-

teste equazioni sieno tra loro omogenei, come si conviene, o pur eterogenei.

7. A questa condotta di calcolo propostaci dal Sommo Eulero Theor. Mor. Corp. Rig. è affine la seguente regola, che ne ha data l'acurissimo Sig. de la Grange Mechan. Anal. Part. II. Sect. 2. *Prendasi per unità delle forze la gravità terrestre, e l' minuto secondo per l' unità del tempo; sarà lo spazio, trascorso in un secondo da un grave cadente, l' unità degli spazj, e la dilui velocità finale, l' unità delle velocità.* Dunque l' unità degli spazj sarà pied. parig. 30, 169: e volendoci servire di un n. esatto, ella sarà 250. scrup. renan.

8. Premesse queste cose, le rette SA, FA, SR, cioè il raggio vettore, il raggio dell' oscolo, e la perpendicolare calata sulla tangente si dicano R, r, p, ed F la forza centripeta in S; si avranno in virtù del Teorema Moivreano, e di quello del Sig. Keil esibiti ne' §§. (323, 328) le seguenti equazioni

$$I. F = \frac{R}{r^3 p^3}$$

$$II. F = \frac{d p}{p^2 d R}$$

con ciascuna delle quali si potrà risolvere il Problema diretto, e l'inverso delle forze centrali. Vedi Keil de Virib. Central. Varignonio Att. dell' Acc. delle Scienz. an. 1700, 1701. Eulero Mechan. Cap. V. Rolli de mot. Corp. lib. II.

9. Ma ecco un metodo universale per risolver questi Problemi, ancorchè la forza centripeta non sia diretta ad un punto. Si rapporti il moto del corpo M a due direttrici

E quivi le forze centripete sono in duplicata ragione inversa de' medesimi raggi CS, Cs.

PART. I. DIM. Dall' umbilico C si calino le perpendicolari CG, Cg sulle tangenti dell' Orbita

erici rettangole, e si dicano x, ed y le coordinate dell' orbita parallele ad esse: sia r il corrispondente raggio d' oscolo, ed u la velocità, onde il mobile trascorre lo spazietto ds nel tempuscolo dt. Facciasi $dy = p dx$, sarà $ds^2 = dx^2 + dy^2$; e quindi $ds^2 = dx^2 (1 + pp)$. Laonde essendo $ds^2 = vv dt^2$, sarà $vv dt^2 = dx^2 (1 + pp)$, e con ciò

$$(dt^2):dx^2 = (1+pp):vv \quad A$$

Ma l'è ancora $r = -ds(1+pp):dp$, com' è noto dal calcolo differenziale: dunque sarà

$$dp = -\frac{ds}{r} (1+pp) \quad B$$

Or essendosi fatto $dy = p dx$, sarà $ddy = p ddx + d p dx$: e quindi sostituendo in questa equazione i valori di ddx , e di ddy , che sono (a. 241) rispettivamente $2g P dt^2:M$, e $2g Q dt^2:M$, e fatte le dovute riduzioni, avrassi

$$dp = 2g dt^2 (Q dx - P dy):M dx^2$$

e sostituendo il valore di $dt^2:dx^2$ ritrovato nell'equazione A, dovrà emergere

$$dp = \frac{(1+pp)}{Mv} (Q dx - P dy) 2g \quad C$$

E finalmente pareggiando i secondi membri dell'equazioni B, e C, e riducendole convenevolmente, si avrà

$$Mvv ds = 2gr (P dy - Q dx) \quad D$$

E nella not. a §. 241 ponendo $R = e$, e $\theta = 2g$, otterrassi

$$Mvdv = 2g (P dx + Q dy) \quad E$$

Con queste due equazioni D, ed E esprimersi adeguatamente il moto del corpo, e con facilità se ne indagano i suoi sintomi.

10. Se il grave M si aggiri in un cerchio, il di cui rag-

bita in S , ed s ; saran quelle (a) in sudduplicata ragione de' corrispondenti rami CS , Cs . E quindi essendo le velocità del mobile ne' luoghi S , ed s della Traiettoria $SA s$ inversamente come siffatte perpendicolari (284); esse saranno nell' inversa sudduplicata ragione de' rami

raggio sia $2g$, e la velocità del suo moto sia dovuta a g ; questa dovrà esprimersi per $\frac{2g}{1^n}$ il suo quadrato per $4g^2$, e la sua forza acceleratrice sarà 1. Si concepisca, che lo stesso corpo M movendosi in una qualunque curva abbia in un punto di essa, il cui raggio d' oscolo sia r , la velocità v : e si chiami N la forza normale, e la forza tangenziale T ; dovrà essere la quantità acceleratrice della forza $N = \frac{N}{M}$ e quindi (310) sarà

$$1 : \frac{N}{M} :: (4g^2 : vv) (r : 2g) \text{ e con ciò}$$

Ed è poi (c. 124) $Mvv = 2gNr$ $\frac{F}{G}$
 Dunque con queste due formole $Mvv = 2gNr$, ed $Mvdv = 2gTds$ potrà investigarsi lo stesso moto.

Dunque la forza normale sarà $(Pdy - Qdx) : ds$, e la Tangenziale $\frac{Pdx + Qdy}{ds}$; come può rilevarsi confrontando l'equazioni F , e D , e le altre G ed E .

(a) Prodotto l'asse CA della Parabola $SA s$, finchè incontri in N la tangente SG , le si conduca la tangente verticale AG . Sarà chiaro dalla Prop. 16. lib. I. *Con. del Giann.*, che la congiunta CG sia perpendicolare ad NS : il perchè essendo simili (8. El. VI.) i due triangoli ACG , NCG , sarà CG^2 uguale ad NCA , o ad $SC \cdot CA$ (Cor. I. Prop. 18. lib. I. *Con. Giann.*). E dimostrandosi nella stessa guisa esser $Cg^2 = sC \cdot CA$, sarà $CG^2 : Cg^2 :: SC : sC$.

rami CS , Cs , cioè de' raggi vettori, che passano pei punti S , ed s .

PART. II. Intendasi praticata la costruzione del Probl. LXII. e per S , ed s conducansi i diametri della parabola ST , st , che incontrino QR , e qr in T , e t . Ciò posto, essendo di finita grandezza (a) gli angoli del triangolo RST , ed RS infinitesima rispetto ad RQ (307); il sarà benanche RT infinitesima rispetto ad RQ ; onde sarà QT quasi uguale a QR . E quindi siccome il quadrato di QT (b) adegua il rettangolo di $4CS$ in ST , o di $4Cs$ in SR , così a questo rettangolo sarà puranche uguale il quadrato di QR . Con simil ragionamento rilevandosi qr^2 uguale a $4Cs$ in sr ; sarà $CS \cdot SR : Cs \cdot sr :: QR^2 : qr^2$. Ma si è nella I. Par. dimostrato esser $CG^2 : Cg^2 :: CS : Cs$, e pel §. 307. è $CG^2 : Cg^2 :: qr^2 : QR^2$. Dunque sarà ancora $CS \cdot SR : Cs \cdot sr :: CS : CS$: e quindi (c) $SR : sr :: Cs^2 : CS^2$: cioè le forze centripete ne' luoghi S , ed s in duplicata ragion inversa de' raggi vettori. C. B. D.

§. 330. COR. Dalla I. Par. di questo Teorema

N 3

(a) Questo non si avvera, quando il punto S sia vicinissimo al vertice principale della Parabola. Ma in tal caso combaciando il ramo CS coll' asse, sarà RT evanescente, e QR uguale a QT .

Lo stesso dee si intender nell' Ellisse Prop. LXXI.

(b) Prop. 18. Lib. I. *Con. Giann.*

(c) *Prin. III.*

ma rilevasi, che i quadrato-quadrati delle velocità del mobile sieno inversamente come i quadrati de' rami. Dunque saranno per la II. Par. le forze centripete di un corpo, che volgesi nella Parabola ritenuto al dilei fuoco, come i quadrato-quadrati delle velocità di esso.

PROP. LXX. TEOR.

Fig. 44. §. 331. Se un corpo si rivolga nell' Ellisse QBR con forza centripeta tendente al centro A della figura; le velocità ne' luoghi Q, e C son proporzionali a' semidiametri AK, AT conjugati a quei, che passano pe' punti Q, e C.

E le forze centripete ne' medesimi luoghi Q, e C sono come i semidiametri principali AQ, AC.

PART. I. DIM. Il parallelogrammo compiuto da' semidiametri conjugati QA, AK è uguale a quello, che si formerebbe dagli altri due CA, AT (a). Dunque dovendo cotesti parallelogrammi reciprocarsi le basi, e le altezze loro; sarà AK ad AT, come la perpendicolare calata dal punto A sulla tangente di C all'altra, che da A si menerebbe sulla tangente di Q; vale a dire (284) come la velocità in Q alla velocità in C.

PART. II. Si prendano gli archetti QM, e BC infinitesimi, e descritti in uguali tempuscoli

(a) Prop. 15. Lib. II. Con. Giann.

scoli, e si ordinino su i diametri QR, CS le rette MP, BE; saranno queste (307) proporzionali alle velocità in Q, e C, cioè (per la I. parte) alle rette AK, AT. Laonde essendo $MP : BE :: AK : AT$, sarà $MP^2 : BE^2 :: AK^2 : AT^2$, e permutando $MP^2 : AK^2 :: BE^2 : AT^2$. Ma per la natura dell' Ellisse la prima di queste ragioni pareggia quella del rettangolo RPQ, o del suo uguale RQP (essendo QP evanescente) al quadrato di AQ, cioè alla ragione di 2 PQ ad AQ (a). Ed è similmente l'altra ragione di BE² ad AT² anche uguale a quella di 2 CE ad AC: sarà dunque $2 PQ : AQ :: 2 CE : AC$: cioè $PQ : CE :: AQ : AC$. Val quanto dire le forze centripete in Q, e C, cui son proporzionali PQ, e CE (288), sono tra di loro, come i semidiametri AQ, AC. C. B. D. (b)

N 4

PROP.

(a) 1. El. VI.

(b) Sieno QKR, qkr due Ellissi descritte da' mobili Q, e q intorno al punto A comun centro di esse: ed accanto agli estremi Q, e q degli assi QR, qr si prendano gli archetti QM, qm descritti in uguali tempuscoli, ed agli stessi assi si tirino le semiordinate MP, mp, ed i semiaassi conjugati AK, Ak. Si conchiuderà colla guida della dimostrazione di questo Teorema esser le semiordinate MP, mp come i semiaassi AK, Ak. Dunque i due triangoletti AQM, Aqm, che sono in ragion composta di QA : qA, e di MP : mp, saranno in ragion composta di QA : qA, e di KA : kA, cioè come l' Ellisse QKR all' altra qkr. (Cor. 2. Prop. 35. Lib. II. Con. Gian.) E quindi i tempi periodici per quest' Ellissi, essendo direttamente come le loro aje, ed inversamen-

PROP. LXXX TEOR.

§. 332. *Se un Corpo si volga nel perimetro dell' Ellisse P D d con forza centripeta tendente al fuoco S di tal figura; le velocità, ond'ei si muove ne' luoghi P, e p, sono direttamente come i semidiametri conjugati a que', che passano pe' medesimi punti P, e p, ed inversamente come i raggi vettori SP, Sp.*
E le forze centripete ne' luoghi P, e p sono in duplicata ragione inversa de' medesimi raggi vettori SP, Sp.

DIM. PART. I. S' intenda fatta la costruzione esibita nel Probl. LXII., e si calino da S le perpendicolari SY, Sy sulle tangenti PY, py, e si conducano i semidiametri CD, Cd conjugati agli altri due CP, Cp. E poichè CD è parallela a PY, sarà $SP : PE :: SY : NY$; e quindi il rettangolo di SP in NY uguale all' altro di PE in SY. Nella stessa maniera dimostrandosi tra loro uguali i due rettangoli di Sp in ny, e di pe in Sy; sarà il rettangolo di PE in SY all' altro di pe in

mente come quelle di cotesti triangoletti (287), saranno uguali fra loro. Dunque sono uguali i tempi delle rivoluzioni fatte nell' Ellissi intorno al d' loro comune centro.

in Sy, cioè SY ad Sy (a), come il rettangolo di SP in NY a quello di sp in ny, val quanto dire in ragion composta di SP ad Sp, e di NY ad ny. Ma questa seconda ragione è uguale a quella di Cd a CD (b). Dunque sarà SY ad Sy in ragion composta di SP ad Sp, e di Cd a CD. E quindi essendo le velocità, ond'è affetto il mobile ne' luoghi P, e p della Traiettoria P D d, inversamente come (284) le perpendicolari SY ed Sy, saranno quelle direttamente come CD a Cd, ed inversamente come i raggi vettori SP, Sp.

DIM. PART. II. Essendo a cagione de' triangoli simili EPC, XPV, la ragione di EP a PC uguale a quella di PX a PV; sarà la ragion, che si compone di queste due, duplicata di una di esse. Dunque sarà EPX a CPV ovvero $2EPX$ a $2CPV$ come PE^2 a PC^2 , e permutando $2EPX : PE^2 :: 2CPV : PC^2$. Ma la prima di queste due ragioni è identica a quella di $2PX$ a PE ; e la seconda è per la natura dell' Ellisse uguale alla ragione di QV^2 a CD^2 : sarà dunque $2PX : PE :: QV^2 : CD^2$. Or essendo (c) PE uguale a pe , e dimostrandosi nella stessa guisa esserne $pe : 2px :: Cd^2 : qu^2$, sarà (d) $PX : px ::$

- (a) Cor. 7. Prop. 29. Lib. II. Con. Giann.
 (b) Prop. 15. Lib. II. Lo stesso.
 (c) Cor. 7. Prop. 29. Lib. II. Con. Giann.
 (d) Pren. I.

$px :: (QV^2 : CD^2) (Cd^2 : qu^2)$, cioè (a)
 $PX : px :: (QV^2 : qu^2) (Cd^2 : CD^2)$. Or
 essendo finiti gli angoli del triangolo PVX ,
 tutti i lati di esso saran grandezze dello stes-
 so ordine: e quindi siccome PX è infinitesi-
 ma rispetto a QX (b); così P è pure VX in-
 finitesima rispetto alla stessa QX ; onde QX
 confonderassi con QV , e per simili ragioni
 l'altra qx dovrà confondersi con qu . Dun-
 que dovrà stare $PX : px :: (QX^2 : qx^2)$
 $(Cd^2 : CD^2)$

E poichè nella Prop. LXII. si è dimostrato
 essere $QX^2 : qx^2 :: Sy^2 : SY^2$, e nella pri-
 ma parte di questo Teorema si è conchiuso,
 che stia $Sy^2 : SY^2 :: (CD^2 : Cd^2) (Sp^2 : SP^2)$;
 sarà $QX^2 : qx^2 :: (CD^2 : Cd^2) (Sp^2 : SP^2)$;
 e quindi $PX : px :: (CD^2 : Cd^2) (Sp^2 : SP^2)$
 $(Cd^2 : CD^2)$: val quanto (c) dire $PX : px ::$
 $Sp^2 : SP^2$. Dunque (288) le forze centripete
 ne' luoghi P , e p sono inversamente come i
 quadrati de' raggi vettori, che quivi si condu-
 cono. C. B. D.

§. 333. DEF. XXXIX. Quel punto di quest'
 Orbita, ch'è il più vicino al centro delle for-
 ze dicesi *Perielio*, ed *Afelio* quell'altro, che
 dallo stesso centro ne ha la massima distanza.

II

(a) *Præn. II.*

(b) Vedi (a) §. 279.

(c) *Præn. III.*

al *Perielio*, e l'*Afelio* si chiamano *Assidi*, e
 la retta, che gli unisce, *Linea degli Assidi* si
 domanda.

§. 334. COR. I. Dunque l'asse maggiore del-
 l'Ellisse DAN descritta da un corpo, che ten-
 de al dilei umbilico F , sarà la linea degli as-
 sidi: e quindi i suoi estremi N , e D saranno
 il *Perielio*, e l'*Afelio*. Fig. 47.

§. 335. COR. II. I quadrati delle velocità ne-
 gli assidi N , e D sono (284) come FD^2 ad
 FN^2 , cioè come la forza (332) centripeta in
 N a quella in D . Dunque le forze, che ri-
 tengono negli assidi il corpo A , sono in du-
 plicata ragione delle velocità, ond' ei vi si
 aggira (a).

§. 336.

(a) Il corpo, che volgesi nell'Orbita DAN scen-
 de dal dilei *Afelio* al *Perielio* sempre accostandosi al cen-
 tro delle forze, ed appena giunto al *Perielio*, anzichè
 piombar nel centro, quivi comincia a scostarsene rimon-
 tando all'*Afelio*. Come può ciò addivenire? domandavan
 taluni: ed altri più arditi credettero questa difficoltà qual
 momentosa obiezione, che l'edificio intero delle Nevvto-
 niane Teorie abbattea. Ma ella, Cari Giovanetti, non è
 che lieve, e tosto dileguasi al rammentarvi, che la for-
 za tangenziale vi concorre del pari colla centripeta, ad
 effettuar la divisata rivoluzione. Or siccome la veloci-
 tà di questo mobile va crescendo dall'*Afelio* al *Perielio*
 (284); così dee crescer nella stessa guisa la dilui forza
 tangenziale, e diverrà massima nel *Perielio*. Dunque al
 crescere della gravità del mobile cresce ancora la dilui
 forza tangenziale: e nel *Perielio*, ove quella divien mas-
 sima, questa si rende sì ponderosa, che prevalendo alla
 gravità del corpo gl'impedisce di cader nel centro.

§. 336. COR. III. Le due ragioni di DC a DF , e di FA ad AC sono rispettivamente uguali a queste due di FDC a DF^2 , e di FA^2 ad FAC (a), cioè (sostituendo ai rettangoli FDC , FAC i quadrati di BO , e di BK semidiametri conjugati (b) a que', che passano per D , ed A) alle ragioni di BO^2 a DF^2 , e di FA^2 a BK^2 . Dunque la ragion, che si compone dalle due di DC a DF , e di FA ad AC , è quanto quella, che si comporrebbe dalle altre due di BO^2 a DF^2 , e di FA^2 a BK^2 . Val quanto dire (c) la ragion composta di DC ad AC , e di FA ad FD pareggia quella, che si comporrebbe da BO^2 a BK^2 , e da FA^2 a DF^2 .

§. 337. COR. IV. E perchè si è dimostrato nella I. Part. di questo Teorema, che le velocità, onde passa il mobile pe' luoghi D ed A dell' Orbita ellittica DAN ritenuto al dilei fuoco F , sieno in ragion composta di BO : BK , e di FA : FD ; saranno i quadrati delle mentovate velocità come (BO^2 : BK^2) (FA^2 : FD^2), e quindi ancora come (DC : AC) (FA : FD).

§. 338. COR. V. Dunque i quadrati delle velocità, con cui il mobile si aggira in due qualunque luoghi di quest' Orbita, sono inversamente

- (a) Prop. i. El. VI.
(b) Prop. 28. Lib. II. Con. Giann.
(c) Prop. III.

come i corrispondenti raggi vettori, e direttamente come quelle rette, che da' medesimi luoghi conduconsi all' altro fuoco dell' Orbita.

§. 339. COR. VI. Ed i quadrati delle perpendicolari calate dal fuoco F sulle tangenti di R ed A saranno come FR : FA , e come AC : CR (284).

§. 340. SCOL. Nello stesso modo può dimostrarsi, che volgendosi un corpo in un' Iperbole conica con forza tendente ad un dilei umbilico, debba esserne quivi ritenuto con forza reciprocamente proporzionale al quadrato del raggio vettore.

C A P. XIII.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA INVERSO DELLE FORZE CENTRALI.

PROP. LXXII. PROBL.

§. 341. Il Corpo A , che tende all' immobile centro S delle forze in ragion della sua distanza da esso centro, sia proiettato per la direzione AP con una data forza; determinare la Traiettoria, ch' ei describe. Fig. 46.

1. Si unisca la retta SA , e si prolunghi in R , finchè RA disegni l' altezza, onde conver-

verrebbe discendere il corpo per acquistarsi in A la velocità di proiezione. 2. Col centro S intervallo SR si descriva il quadrante circolare RL , e pel punto A gli si tiri l'ordinata AG . 3. Dal centro S conducasi SQ parallela ad AP , ed eguale ad AG . 4. Finalmente si descriva un'ellisse conica, che abbia S per centro, ed SA , ed SQ per semidiametri coniugati (a). Sarà $ATQN$ l'orbita del proietto.

DIM. Si prendano in questa ellisse due altri semidiametri tra lor coniugati ST , SN : e tagliata SD uguale ad ST , per D si ordini DF nel divisato quadrante, e poi si congiungano i raggi GS , FS . I due quadrati di TS , e di SN sono per la natura dell'Ellisse (a) uguali a' quadrati di SA , e di SQ , cioè a dire a' quadrati di SA , e di AG (essendo AG uguale ad SQ). E poi SA^2 , ed AG^2 son pure uguali ad SD^2 , e DF^2 , per essere non men quelli, che questi uguali al quadrato del raggio. Dunque saranno ST^2 , ed SN^2 uguali ad SD^2 , e DF^2 ; e quindi tolti gli uguali ST^2 , ed SD^2 rimarrà SN^2 uguale a DF^2 , ed SN uguale a DF . Per la qual cosa essendo le perpendicolari calate dal centro S delle forze sulle tangenti de' punti A, e T inversamente come i semidiametri SQ , SN coniugati a que', che passano per A, e T

(331)

(a) Cor. 2. Prop. 4. Lib. IV. Con. Giann.

(331); saran quelle inversamente come le ordinate AG , DF del quadrante circolare RL , cioè (161) inversamente come le velocità, che si acquisterebbe un grave discendendo per le altezze RA , RD . E quindi $ATQN$ è il sentiero del proietto A (305). C. B. D.

§. 342. COR. I. Il Circolo LRE esibito nella cost. di questo Problema è la linea di sublimità dell'orbita ATN . Dunque o che si proietti il corpo A per la tangente AP colla velocità acquistatasi per l'altezza RA , o ch'ei si lanci da un'altro luogo T per la TM tangente di questo colla velocità conferitagli dall'altezza ET ; dovrà descriver sempre la medesima Ellisse ATN .

§. 343. COR. II. Se per avventura sia retto l'angolo RAP di proiezione; il luogo A, donde avventasi cotesto grave, sarà un'estremo dell'asse maggiore, o del minore dell'Ellisse, ch'ei descrive.

§. 344. COR. III. E questa punta A sarà un'estremo dall'asse maggiore, quando sia retto l'angolo SAP di proiezione, e $2SA^2$ maggiore di SR^2 . Imperciocchè togliendosi in tal caso d' ambe le parti SA^2 , resterebbe SA^2 maggiore della differenza di SR^2 , e di SA^2 , cioè di AG^2 . Dunque sarebbe SA maggiore di AG , o di SQ : e con ciò SA il semiasse maggiore, ed SQ il minore della mentovata Ellisse.

§. 345.

§. 345. COR. IV. Finalmente qualor si ritrovi $SR^2 = 2AS^2$; l'orbita descritta dal corpo A coll'angolo retto di proiezione diverrà un circolo, il di cui raggio è SA.

PROP. LXXIII. TEOR.

§. 346. Il corpo A, che graviti al centro F in ragion inversa duplicata della distanza che gliene serba, sia proiettato dal luogo A per la retta AS con quella velocità, ch'ei s'acquisterebbe calando per EA; si domanda l'Orbita di tal proietto.

COST. I. Unita la retta FA, che dovrà giacersi a dirittura colla EA, si formi nel punto A della EA l'angolo CAP uguale al dato SAF, o al dilni verticale PAE. II. Si tagli la retta CA uguale alla data EA, e coi fuochi F, e C, e coll'asse maggiore uguale alla FE si descriva l'Ellisse conica (a) DAON. Sarà questa curva l'Orbita addimandata.

DIM. Si conducano ad un'altro punto R del perimetro di questa Ellissi i due rami FR, CR, e col centro F intervallo FE si descriva l'arco circolare TG, che seghi la retta FG in G. Sarà RC uguale ad RG: imperciocchè le due FR, RC son quanto la FG (b): dunque tolta la FR, dovrà rimanervi RC ugua-

- (a) Prop. 3. Lib. IV. Con. Gian.
(b) Prop. 29. Lib. II. dello stesso.

uguale ad RG. E poichè i quadrati delle velocità, che si acquisterebber due gravi liberamente calando dalle altezze EA, GR, sono (171) come EA : GR, e come FR : FA, cioè come CA : CR, e come FR : FA; essi saran pure come i quadrati delle perpendicolari, che dal fuoco F si calano sulle tangenti dell'Ellisse in R ed A (339). Dunque le dette velocità saranno come le perpendicolari calate dal fuoco F sulle tangenti dell'Ellisse in R, ed A, cioè inversamente come le perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti della curva DAN ne' punti A, ed R. E quindi cotesta curva (305) sarà il sentiero del proietto. C. B. D. (a)

§. 347.

(a) La dignità di questa Ipotesi, ch'è la sola, onde Natura regge le gravitazioni de' corpi, m'impugna a soggiugnervi alcune cose a questo argomento adattare.

In primo luogo la velocità, che si acquista un grave discendendo liberamente per AM metà di AF, è quanto quella, ch'egli otterrebbe calando per l'intera AF uniformemente animato dalla gravità iniziale in A.

Imperocchè supponendo che la velocità acquistata da un grave per AM sia uguale a quella, ch'egli avrebbe in A discendendo per EA; sarà (175) $EA : AM :: EF : FA : FA : FM$, cioè (Prop. I. El. VI.) $EA : AM :: EF : FM$, e permutando $EA : EF :: AM : FM$. Dunque sarà la retta EA uguale ad EF, come AM pareggia la FM: e quindi EA sarà infinita. Ma la velocità, che riceve un grave nel luogo A calando dall'altezza EA infinita, è finita ed uguale a quella, ch'egli avrebbe calando per AF uniformemente animato dalla gravità del luogo A (182). Dunque la velocità, che si acqui-

Tom. I.

O

§. 347. COR. I. Descritto col centro F intervallo FE , (ch'è quanto l'asse maggiore dell'Ellisse DRN), il circolo TEH , si prolunga FD in sin che incontri in T la sua circonferenza; sarà il circolo TEH la linea di sublimità (302) dell'Orbita DRN , e DC uguale a DT . Imperocchè FE , ovvero FT è uguale ad ND : dunque tolta la comune FD dee rimanervi NF , o CD uguale a DT . Similmente essendo FH uguale ad FT , tolte le uguali FN , e DT restan puranche uguali le NH , ed FD .

§. 348. COR. II. Dunque il corpo A per acquistarsi

acquista un grave discendendo per AM metà di AF , è quanto quella, che conseguirebbe calando per l'intera AF uniformemente animato dalla gravità, ch'ei tiene in A .

2. La EA dinoti quell'altezza, onde avrebbe a discendere un grave per acquistarsi in A tanta velocità, quanta gliene conferirebbe la discesa per una qualunque AM , sarà la retta EA finita, infinita, o piucchè infinita, secondo che sia AM minore, uguale, o maggiore della metà di AF . Questo intenderli facilmente da ciò, che si è detto quì sopra.

3. Data la velocità, che in A abbiassi acquistata un grave calando da una qualunque altezza, la magnitudine di questa può determinarsi nel seguente facilissimo modo. Prendasi EA ad EF in duplicata ragione della velocità data a quella, che un grave si acquisterebbe calando per AM metà di AF ; sarà AE la richiesta altezza. Imperocchè i quadrati di queste velocità farebber fra loro (175) in ragion composta di $EA:AM$, e di $AF:FM$; $EF:AF$, cioè in ragion composta di $EA:AM$, e di $FM:EF$, cioè come $EA:EF$

starsi la velocità, che ha nel suo Afelio, dovrebbe quivi discendere da un'altezza uguale alla distanza del Perielio dal centro delle forze. E per ottener quell'altra, ch'ei tiene nel Perielio, avrebbe a calarne da un'altezza uguale alla distanza dell'Afelio dal centro delle forze.

§. 349. COR. III. Se dal luogo D si proietti un grave per la direzione DU perpendicolare a DF , e con una velocità, ch'ei per acquistarsela in D dovrebbe discender dall'altezza DT uguale a DF ; la sua orbita sarà un cerchio. Imperocchè essendo (348) DT uguale ad NF , e per supposizione la stessa DT uguale a DF ; saranno le due NF , e DF tra se uguali; e l'Ellisse DRN si cangerà in cerchio.

§. 350. SCOL. I. In questa ipotesi di accelerazione può succeder bene, che la velocità, onde si lanci un grave, sia finita; ma ch'ei per acquistarsela dovrebbe piombare al luogo della proiezione da un'infinita altezza (182). Come dunque, Voi mi direte, dovrà in tal caso regolarsi la rapportata costruzione? Eccolo. Sia PA la direzione del proietto, F il centro delle forze, e la retta FA passi pei punti F , ed A . Facciasi l'angolo CAP uguale al dato Fig. 48. PAE , e tirata da F la parallela FN alla CA , si meni FS perpendicolare ad AS , e dal punto S la SN perpendicolare ad FN . Dipoi col vertice principale N , coll'asse ND , e col parametro quadruplo di FN si descriva la parabola

parabola conica NRA (a), la quale, com'è chiaro da' Conici, dee toccare in A la retta PAS, e sarà l'orbita del proietto. Imperocchè se dal luogo E infinitamente distante dal centro F delle forze s'intenda cadere un grave; i quadrati delle velocità, ond'ei perverrebbe in A, ed M, saranno (171) in ragion composta di EA ad EM, e di FM, o della sua uguale FR ad FA, cioè come FR ad FA: essendo i termini della prima ragione quasi uguali fra loro come grandezze infinite tra se differenti per la MA di magnitudine finita. Ma le due rette FR, ed FA son come i quadrati delle perpendicolari calate dal fuoco F sulle tangenti della parabola in R, ed A (b). Dunque i quadrati delle velocità, colle quali giugnerebbe lo stesso grave in A, ed M, sono inversamente come i quadrati delle mentovate perpendicolari: e quindi le semplici velocità nell'inversa ragione di queste perpendicolari. Or se suppongasi FG uguale ad FE; la velocità, che otterrebbe un grave calando dall'altezza GR, è quanto quella, ch'ei si acquisterebbe calando per EM. Dunque le velocità acquistatesi da un grave nelle discese per EA, GR, ec. sono inversamente come le perpendicolari abbassate da F sulle tangenti di A, di R, ec. E quindi

- (a) Prop. 6. Lib. IV. Con. Giannat.
(b) Vedi not. (a) pag. 196.

quindi la parabola, che si è descritta, (305) è l'orbita addimandata (a).

§. 351. SCOL. II. L'orbita di un proietto, come si è mostrato qui sopra, l'è una parabola

O 3

(a) Qualora un corpo è proiettato per la direzione AS con una velocità maggiore di quella, che potrebbe acquistarsela calando dall'altezza AF uniformemente animato dalla gravità iniziale; la sua Orbita nè sarà un'Ellisse, nè tampoco una Parabola, ma sì bene un'Iperbole: come può vedersi nel §. 247. de motu Curvil. Corp. del nostro Ab. Rolli, ed in altri Scrittori di Meccanica. Dunque nell'Ipotesi della gravità decrescente come il quadrato della distanza, le Orbite de' Proietti non son, che le curve di primo genere, cioè a dire le sezioni coniche.

L'acutissimo Gio. Bernulli in una lettera, che direbbe a Giacomo Ermanno, e che or si legge nel Vol. del R. Acc. dell. Sc. di Parigi. an. 1710, dopo avergli mostrate certe di lui sconcezze nell'analitica soluzione del Problema Inverso delle forze centrali, e l'ottima condotta da tenersi nel risolverlo, si dolse, che il Gran Nevvton avea supposto senza dimostrarlo esser le curve coniche le sole Orbite de' Corpi proiettati nel vero sistema della gravità decrescente come il quadrato della distanza. I seguaci del Nevvton, e i dilui Commentatori han procurato toglier quest'onta dal Geometra Inglese: e l'giudizioso Gio. Keil in un'Opusculo de Viribus centralibus, ha dimostrato tra le altre cose, che la soluzione Bernulliana del Problema Inverso delle forze centrali sia identica a quella, che aveane recata l'Imm. Nevvton nella Prop. 41. Lib. I. Princ. Mat., e che da identici principj entrambe sien derivate. Ciò è vero: ma l'è anche fuor di dubbio, che nella I. Ediz. de' Princ. Mat. non si ritrovi veruna formale dimostrazione della verità divisata, e che nelle posteriori edizioni ella esprima oscuramente nel Cor. I. Prop. 13. Lib. I. con qu. parol. „Ex tribus novissimis Prop. „ po-

bola conica, se la velocità di proiezione sia tale, ch'ei per acquistarsela dovrebbero quivi discendere da un'altezza infinita. Ma v'ha un' altro caso, e tutto opposto al precedente, in che

„ positionibus consequens est, quod si corpus quodvis se-
 „ cundum quamvis lineam rectam quacumque cum velo-
 „ citate exeat de loco dato, & vi centripeta, quæ sit
 „ reciproce proportionalis quadrato distantia locorum a
 „ centro simul agitetur, movebitur hoc corpus in aliqua
 „ sectionum Conicarum umbilicum habente in centro vi-
 „ rium, & contra. Nam datis umbilico, & puncto
 „ contactus, & positione tangentis describi potest se-
 „ ctio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud
 „ habebit. Datur autem curvatura ex data vi centri-
 „ petæ, & Orbes duo se mutuo tangentes eadem vi
 „ centripeta describi non possunt. „ Ma ecco, per quan-
 „ to ne sembra, un distinto sviluppo di questa ristrettissima
 dimostrazione.

Fig. 40. Un corpo, che graviti all' immobile centro S inversa-
 mente come il quadrato della distanza, sia proiettato dal
 luogo A per la direzione AR colla velocità u . Si elevi
 AF perpendicolare ad AR , si unifca SA : e poi si ti-
 ri ovunque la GD parallela ad AR . Sarà dato di spe-
 cie il triangolo DAC , e quindi la ragione di CA ad
 AD , cioè della forza (Dim. Prop. 67.), che ritiene il
 proietto nella parte iniziale della sua Orbita a quella,
 che il riterrebbe nel dilei cerchio osculatore. Dunque se
 facciasi $CA:AD::m:n$, e sia g la gravità del cor-
 po nel luogo A , farà $ng:m$ la forza centripeta nel
 cerchio osculatore, e 'l dilui raggio AF (316) farà
 $muu:2ng$. Intanto si descriva la sezione conica ANA ,
 che abbia S per un suo fuoco, e che FA sia il raggio
 dell' oscolo nella sua parte A (il qual problema è stato
 risoluto dal Keil nell. Trans. Anglic. an. 1708, da' Com-
 ment. del Nevvton, e da altri): farà questa curva l' Orbi-

che il proietto piegasi puranche in un sentie-
 ro parabolico: ed è quando l'altezza, dalla qua-

O 4 le

Orbita addimandata. Lo che si dimostra nel seguente
 modo.

Il proietto uscendo dal luogo A per la direzione AR
 colla velocità u può esser ritenuto nella curva conica
 ANA da una forza sempre diretta al punto S . Di que-
 sta s' ignori l' intensità, e la legge di agire: si fa non di
 meno, ch' ella debba essere uguale a g nel principio del
 moto: imperocchè essendo per costruzione $FA=muu:$
 $2gn$, e la velocità in $A=u$, farà la forza centripeta
 nel cerchio osculatore (314) uguale ad $uu:2FA$, cioè
 uguale a $gn:m$. E facendo DA ad AC , cioè n ad
 m , così $gn:m$ ad un quarto, ch' è uguale g ; la gran-
 dezza g dovrà dinotar la forza assoluta, con che il pro-
 ietto nel principio del suo moto si piegherebbe nella cur-
 va conica ANA . Ma essendo lo stesso corpo continua-
 mente ritenuto al fuoco S della sezione conica ANA , ch'
 ei descrive; la forza centripeta debb' essere nella duplica-
 ta ragion inversa della sua distanza dallo stesso fuoco
 (329, 332, 340). Dunque la sezione conica ANA è l'
 Orbita del Proietto, come quella, in che si rinvencono
 tutti e cinque i dilei determinanti (not. a. §. 197.).

Finalmente ecco una soluzione generale del Problema
 inverso delle forze centrali più agevole di quelle, che si
 potrebbero ottenere colle formole D ed E , o F e G del
 n. 9., e 10. not. a. §. 328. Sia QAD l' Orbita di un
 corpo, che rendendo al dilui immobile centro S ven-
 ga lanciato per la direzione QH colla velocità c . Il
 cerchio QRg sia descritto col centro S intervallo SQ :
 e preso nella stessa Orbita l' archetto AD infinitesimo
 vi si conducano i due raggi vettori SA , SD , i qua- Fig. 36.
 li distendansi fino al cerchio descritto. E finalmente
 col centro S , e cogli intervalli SA , SD si descrivan
 puranche gli archi circolari AB , DF . Intanto sia SD
 $=SF=x$, $SQ=a$, $Qg=z$; farà $QF=a-x$, AE
 $=BF=-ax$, $Rg=az$. La velocità, che ha il pro-
 ietto

le ei ne dovrebbe discendere per ottenere la velocità di proiezione, sia infinitamente piccio-

la
 letto nel luogo A , si chiami u , e dt il tempuscolo, onde si descrive l'archetto AD ; sarà chiaro dal §. 300, che la stessa velocità u dovrebbe in B acquistarsi il proietto se dal luogo Q colla velocità c si lancia in giù per QS . Dunque chiamando p la gravità, che ha lo stesso corpo in B , sarà (not.c.124) $uu = C + 2 \int p dx$:

M . Or perchè questa formola si adatti al nostro caso, sia $2 \theta p$: M uguale ad X , ch'è una qualunque funzione di x ; in luogo di dx vi si ponga $-dx$, perciocchè è tale l'elemento dello spazio $QB = a - x$; e la costante C (intendendosi determinata dal supporre $u = c$, quando l'è $x = a$) sia uguale ad a moltiplicata per una grandezza f ; sarà $uu = af - \int X dx$. Inoltre essendo

$SR : Rg :: SE : ED$, cioè $u : dz :: x : ED$; sarà $ED = x dz : a$, ed $SDA = xx dz : 2a$. Con che essendo (284) dt proporzionale al settore SDA , sarà $dt = xx dz : aqq$, ove qq si è posto per serbare l'omogeneità dell'espressione, che dev'essere un numero, e con ciò di niuna dimensione. Ciò premesso a cagion del triangolo rettangolo AED è

$$AD^2 = dx^2 + xx dz^2 : aa \quad A$$

E per esser lo spazietto $AD = u dt$ (vedi not. a §. 15), è $AD^2 = uu dt^2$. Dunque sostituendo i valori di uu , e di dt^2 di già ritrovati, sarà

$$AD^2 = (af - \int X dx) (x^2 dz^2) : aqq \quad B$$

E quindi pareggiando i secondi membri dell'Equazioni A , e B , avrassi

$$aadx^2 + xx dz^2 = (af - \int X dx) (x^2 dz^2) : q^2$$

$$\text{cioè } dz = \frac{aqq dx}{x\sqrt{(afx - \int X dx - q^2)}} \quad C$$

la rispetto alla sua distanza dal centro delle forze. L'utilità di questo argomento, e la di lui estensione m'induce a racchiuderlo nel capo seguente.

C A P. XIV.

DEL MOTO DE' GRAVI PROIETTATI DALLA SUPERFICIE TERRESTRE PER DIREZIONI NON VERTICALI.

PROP. LXXIV. TEOR.

§. 352. Se dal luogo A della superficie terrestre si proietti un grave per la direzione AP non verticale, e colla velocità dovuta all'altezza AE ; il suo sentiero sarà una Parabola conica, di cui la verticale condotta pe'l luogo della proiezione n'è un diametro, che ha per parametro il quadruplo dell'altezza AE , e per ordinate le parallele alla direzione AP .

Fig. 47.

DIM. La gravità di questo proietto decresce come il quadrato della sua distanza dal centro F di nostra Terra (276). Dunque se facciasi l'angolo CAP uguale al dato PAE , ed AC uguale ad AE ; i punti C , ed F saranno i fuochi del.

dell'orbita ellittica, in ch'ei si muove, ed $FA \perp AC$ il dilei asse maggiore (346). E poichè le rette, che da ciascun punto dell'arco DA conduconsi al centro F della Terra, sono altrettante linee verticali; esse saranno ad un di presso parallele fra loro.

Ciò premesso per due qualunque punti Q, q dell'arco, che descrive il proietto, si tirino all'asse DN le semiordinate QC, qc: egli è di per se chiaro, che le NC, Nc loro corrispondenti ascisse dal vertice remoto N abbiansi ad avere per uguali; perciocchè non differiscono fra loro, che per la Cc evanescente riguardo ad NC. Dunque i quadrati di QC, e di qc, che son proporzionali (a) a' rettangoli di NC in CD, e di Nc in cD, saranno come le ascisse CD, cD (b). E quindi la curva ADQ sarà una Parabola conica (c), di cui la verticale condotta per A n'è un diametro, che ha per parametro il quadruplo di AC, o di AE (d), e le ordinate dello stesso diametro son le corde parallele alla PA. C. B. D.

§. 353. COR. I. Da ciò che si è mostrato ben si rileva, che l'angolo TFE sia infinitesimo, e che l'arco circolare TE abbiasi ad avere qual

- (a) Prop. 8. Lib. II. Con. Giannat.
 (b) Prop. 1. El. VI.
 (c) Prop. 7. Lib. I. degli stessi Con.
 (d) Prop. 18. Lib. I. dello stesso.

qual retta perpendicolare alla TN. Dunque la linea di sublimità dell'Orbita parabolica ADQ (302), sarà la direttrice di essa curva (a).

§. 354. COR. II. I rami CA, CX della Parabola AXQ son quanto le perpendicolari (b) Fig. 49. AE, XY condotte da' loro estremi sulla direttrice EP. Dunque le velocità, che ha il proietto ne' luoghi A, ed X, essendo in sudduplicata ragione delle altezze AE, XY, cui son dovute (153. n. 1.), saranno ancora in sudduplicata ragione de' rami, che ad essi luoghi corrispondono.

PROP. LXXV. TEOR.

§. 355. Poste le medesime cose della Proposizione precedente, tanto tempo v'impiega il proietto a descriver l'arco parabolico CT, quanto vi porrebbe a condursi equabilmente e colla velocità di proiezione per la semior- dinata TB, che ad esso arco corrisponde, o a calar naturalmente per la di lui ascissa CB.

Fig. 50.

DIM. PART. I. Dinoti S il centro della nostra Terra, ed SO l'asse della Parabola COA, al quale sien ordinate le rette TN, CM. Congiunte le rette ST, SC s'intenderà di leggieri, che il settore parabolico STF O sia quan-

- (a) Def. 8. Lib. I. Con. Giann.
 (b) Prop. 19. dello stesso.

quanto il triangolo rettilineo STO : imperciocchè la loro differenza non è che il segmento parabolico TFO grandezza trascurabile rispetto a ciascun di essi. E quindi il settore $STFO$ al par del triangolo STO adeguerà il rettangolo di TN nella metà di SO . E dimostrando nella stessa guisa, che l'altro settore parabolico SCO pareggi il rettangolo di CM nella metà della medesima SO ; saranno i due settori SCO , STO nella ragion di CM a TN : onde sarà convertendo il settore SCO all'altro SCT , cioè il tempo per CO al tempo per CT (284), come CM a $CM - TN$, cioè (compiti i parallelogrammi $MOKC$, $NOKL$) come KO ad LT . Or per esser simili fra loro i due triangoli OKG , TLB sta $KO : LT :: OG : TB$: dunque sarà il tempo per CO a quello per CT , come OG a TB .

Suppongasi impertanto esser l'archetto Ct infinitesimo, e si ordini tb al diametro CG ; saran pure tb , TB semiordinate di questo nella ragion de' tempi, onde il proietto percorre gli archi parabolici Ct , CT . E quindi siccome le rette tb , TB son come i tempi (11), ne' quali sarebbon esse descritte equabilmente colla velocità di proiezione; così questi tempi son come quelli, ne' quali si conduce il proietto per gli archi Ct , CT . Ma tanto tempo ei ne impiega a trascorrer l'archetto Ct , quanto nel girne equabilmente nella tb colla velo-

velocità di proiezione (a): dunque anche il tempo per CT sarà uguale a quello, che ci vorrebbe, affinchè un corpo equabilmente e colla velocità di proiezione descrivesse la semiordinata TB .

PART. II. Le ascisse Cb , CB della Parabola CTO sono in duplicata ragione delle loro semiordinate bt , BT (6), cioè (Part. I.) de' tempi, in che il proietto descrive gli archi parabolici Ct , CT . Ma le medesime rette Cb , CB sono anche in ragion duplicata de' tempi, ne' quali un grave cadente le descriverebbe (153. n. 1.): dunque saranno quei tempi come questi. Laonde siccome il tempo della discesa libera del proietto per Cb è uguale a quello, ch'ei v'impiega a descriver l'archetto Ct ; così il tempo per l'arco CT sarà uguale a quello, che vi porrebbe un grave a calar verticalmente per la di lui ascissa CB . C.B.D.

§. 356. COR. I. Da quel che si è recato in questa dimostrazione può inferirsene di leggieri, che, condotta la verticale TP sull'orizzontale CA , i tempi, ne' quali un proietto trascorre gli archi parabolici CT , TO , sien come le rette CP , PM . E quindi se la stessa CA dividasi nelle parti uguali CP , PM , MU , VA ec., e pei punti delle divisioni si ergan delle

(a) Vedi la dim. dell. Prop. LIV.
(b) Prop. 7. Lib. I. Con. Giann.

delle verticali PT , MO , VD , ec.; saranno gli archi parabolici CT , TO , OD , DA , ec., descritti in tempi uguali,

§. 357. COR. II. Dunque sebbene un corpo, che si lanci dalla nostra terra, non vada equabilmente pel suo sentiero parabolico; pur non di meno in tempi uguali passa al di sopra di uguali parti dell'orizzontale condotta dal luogo della proiezione.

Fig. 49. §. 358. DEF. XL. L'angolo EAP formato dalla PA direzion del proietto, e dalla verticale AE dicesi *angolo della proiezione*. E l'angolo suo complemento PAD , cioè quell'angolo, che formasi dalla direzion del proietto, e dall'orizzontale AD , suol dirsi *angolo di elevazione*, o semplicemente *elevazione*.

§. 359. DEF. XLI. L'*Ampiezza della Parabola* AQD è quella dilei corda AD , che dal luogo della proiezione orizzontalmente si distende,

§. 360. DEF. XLII. La retta AQ , che unisce il luogo della proiezione col bersaglio Q , chiamasi *lunghezza del tiro*,

§. 361. DEF. XLIII. La *velocità iniziale*, o di *proiezione* è quella, onde vien lanciato un grave.

PROP. LXXVI. TEOR.

§. 362. L'*ampiezza della Parabola*, la *velocità iniziale*, e l'*angolo d'elevazione*, hanno un tal nesso fra loro, che ciascuna di esse può dalle altre due agevolmente rilevarsi.

DIM. Un grave proiettato dal luogo A per la direzione AT descriva la Parabola AMO , Fig. 51. La retta BA sia l'altezza dovuta alla velocità iniziale, l'angolo PAT sia quello d'elevazione, l'altro BAT di proiezione, ed AO l'ampiezza della Parabola AMO . Si tiri la retta FA dal fuoco F di questa curva al luogo della proiezione, e si calino FH , FP rispettivamente perpendicolari sulle rette BA , AO . Sarà la retta FH uguale alla PA , cioè ad un mezzo dell'ampiezza AO della Parabola; e s'intenderà dai conici (a), che il ramo FA sia quanto la BA altezza dovuta alla velocità di proiezione, e che l'angolo FAB sia duplo dell'angolo di proiezione TAB . Per la qual cosa siccome il cateto FH , l'ipotenusa FA , e l'angolo acuto FAH son tre parti del triangolo rettangolo FAH , da due delle quali può sempre l'altra rilevarsi; così l'ampiezza della Parabola, la velocità iniziale, e l'angolo d'elevazione, ch'è complemento di quello della

(a) Prop. 19. Lib. I. Con. Giann.

della proiezione, hanno tal nesso fra loro, che ciascuna di esse può agevolmente rilevarsi dalle altre due. C. B. D.

§. 363. DEF. XLIV. Quel triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa l'altezza dovuta alla velocità di proiezione, per un de' suoi cateti la metà dell'ampiezza della Parabola, e l'angolo acuto, che sottende tal cateto, è duplo dell'angolo di proiezione, può chiamarsi *Triangolo Balistico*.

§. 364. COR. I. Da' punti M, e B conducansi le rette MG, BQ parallele alla FH; sarà BG uguale a GH, com'è QM uguale ad MF (a). Dunque AG è media aritmetica tra BA, ed AH.

§. 365. COR. II. Vale a dire l'altezza massima, cui ascende il proietto, è la semisomma dell'altezza dovuta alla velocità iniziale, e del rimanente cateto del triangolo balistico.

§. 366. COR. III. Congiunta la BF, sarà BT: TF :: BG: GH, e quindi BT uguale a TF. Dunque i due triangoli ATB, ATF, che hanno le condizioni dell. 8. El. I., dovranno aver uguali gli angoli ATB, ATF, ed esser rettangoli. Laonde per la Prop. 8. El. VI. sarà AB: AT :: AT: AG: e quindi AB: AG :: AB': AT'.

§. 367. COR. IV. L'altezza dovuta alla velocità iniziale sta alla massima altezza, cui ascende il pro-

(a) Cor. I. Def. 8. Con. Giann.

proietto, in duplicata ragione del raggio al coseno dell'angolo di proiezione.

PROP. LXXVII. TEOR.

§. 368. *Poste le medesime cose dell. prec. prop. l'ampiezza della Parabola è quanto l'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel doppio seno del doppio angolo di proiezione.*

E l'altezza massima, cui ascende il proietto, adegua l'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel quadrato del coseno dell'angolo di proiezione.

DIM. PART. I. Nel triangolo balistico FAH, (ove il cateto FH dinoti la metà dell'ampiezza della Parabola, l'angolo FAH il duplo di quello della proiezione (363), ed FA l'altezza dovuta alla velocità iniziale), sta FH ad FA, come il seno dell'angolo FAH al raggio, che si ponga 1. Dunque sarà FH uguale alla FA moltiplicata pel seno di FAH; e quindi prendendo i doppj, sarà AO, cioè l'ampiezza della Parabola, uguale all'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel doppio seno di FAH, ch'è duplo dell'angolo di proiezione.

PART. II. E poichè (367) l'altezza massima, cui ascende il proietto, sta all'altezza dovuta alla velocità iniziale, come il quadrato del coseno dell'angolo di proiezione al quadrato del

Tom. I.

P

del

del raggio; sarà l'altezza massima del proietto uguale all'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel quadrato del coseno dell'angolo di proiezione . C. B. D.

§. 369. COR. I. Dunque le ampiezze delle Parabole, che descrivonsi da' gravi lanciati con uguali velocità di proiezione, sono fra di loro come i seni de' doppj angoli di proiezione. E le altezze massime, alle quali ascendon cotesti gravi, sono in duplicata ragion de' coseni degli angoli di proiezione.

§. 370. COR. II. Suppongasi esser semiretto l'angolo BAT di proiezione; il fuoco della Parabola, che descrive il proietto, dovrà cadere nel punto medio della dilei ampiezza, cioè in P . E dovrà in tal caso, come appare da' conici, essere AP metà di AO , ed MP di AP . Dunque l'ampiezza della Parabola descritta da un corpo lanciato sotto l'angolo semiretto, l'altezza dovuta alla velocità iniziale, e la massima altezza, cui ascende il proietto, son come 4, 2, 1.

§. 371. SCOL. In un solo tiro di Mortaro, o di Cannone, che facciasi per saggio in un campo ben ampio, ed orizzontale, si misuri l'ampiezza della Parabola descritta dal proietto, e dall'ampiezza se ne calcoli l'altezza dovuta alla velocità iniziale. Conosciuta in tal modo quest'altezza si potranno coi principj di questa Prop. determinar le ampiezze delle Pa-

ra-

rabole, e le loro massime altezze in qualunque altra elevazione, che voglia darsi al pezzo.

PROP. LXXVIII. TEOR.

§. 372. Di tutte le Parabole, che descrivonsi da' gravi proiettati con velocità uguali, e con diverse elevazioni, quella terrà la massima ampiezza, che ha semiretto l'angolo d'elevazione.

E saranno uguali le ampiezze di due Parabole descritte da' gravi proiettati con velocità uguali, se i loro angoli di proiezione sieno equidifferenti dal semiretto.

DIM. PART. I. Essendo semiretto l'angolo d'elevazione, e con ciò anche quello di proiezione; il duplo di questo sarà retto, ed avrà il massimo seno. Dunque l'ampiezza della Parabola descritta coll'angolo semiretto d'elevazione sarà la massima in parità di altre circostanze (369).

PART. II. I due angoli di proiezione BAT , BAt differiscano ugualmente dal semiretto, quello però per difetto, questo per eccesso; i loro doppj dovranno pure differire ugualmente dal retto, ed avranno uguali seni. Dunque le ampiezze delle Parabole descritte coi mentovati angoli di proiezione, e con pari velocità iniziali, essendo nella ragion de' seni di questi angoli (369), saranno tra loro uguali. C.B.D.

§. 373. COR. I. Sia l'angolo BAT di 15° ; e l'altro BAI di 75° , i quali angoli sono dal mezzo retto equidifferenti; saranno uguali le ampiezze delle Parabole, che con questi angoli di proiezione, e con uguali velocità iniziali descrivonsi da' proietti.

§. 374. COR. II. Ma poichè il duplo di BAT è in tal caso di 30° , il di cui seno è una metà del raggio; sarà l'ampiezza della Parabola descritta da un corpo, che avventasi sotto l'angolo di proiezione di 15° , o di 75° , uguale all'altezza dovuta alla velocità iniziale.

PROP. LXXIX. PROBL.

§. 375. *Data la velocità iniziale, e lo scopo I, che vuol ferirsi dal luogo A, ritrovare il convenevole angolo di proiezione.*

Fig. 52.

Costr. Sia RA l'altezza dovuta alla velocità iniziale, AI la retta, che unisce il luogo della proiezione con quella del bersaglio, ed AG sia perpendicolare ad AI . Ciò posto 1. si bisechi in C la linea della velocità, di dove le si erga la perpendicolare CG , che incontri in G la retta AG . 2. Col centro G intervallo GA si descriva il circolo $APQR$. 3. Si tagli AB quarta parte di AI , e per B si conduca BQ parallela ad RA .

Se questa non incontri il circolo di già descritto; il problema sarà impossibile, cioè la velocità di proiezione non sarà sufficiente per con-

condurre il proietto dal luogo A nell'altro I . E se tal retta incontri il circolo ne' punti P , e Q ; congiunte le rette, AP , AQ , gli angoli RAP , RAQ saranno quelli della proiezione.

Dim. Si distenda la retta AP , in sin che incontri la IF condotta per I parallela ad AR , e si compia il parallelogrammo $AFIT$. E poichè l'angolo PAB è uguale a PRA (a), e son poi tra se uguali gli angoli alterni APB , PAR delle parallele PB , RA ; sarà il triangolo APR equiangolo, e con ciò simile al triangolo APB , o all'altro AFI . E quindi starà $RA:AP::AF:FI$, e l rettangolo di RA in FI pareggerà quello di AP in AF . Dunque prendendo i loro quadrupli sarà $4RA$ in FI , o in AT uguale al quadrato di FA , o di TI : imperciocchè essendo dalla costruzione AB quarta parte di AI , l'è pure AP quarta parte di AF ; e con ciò AF in $4AP$ è lo stesso, che AF^2 , o TI^2 . Ma la Parabola descritta dal corpo A lanciato per AP colla velocità dovuta all'altezza RA tien per parametro di AT il quadruplo di essa altezza, le sue ordinate son parallele ad AP , e le ascisse son le parti della verticale TA . Dunque essendosi mostrato essere il quadrato di TI uguale al rettangolo di AT in $4AR$, fia mestiere, che IT sia una semiordinata della curva del proietto, e che questa passi per lo scopo

P. 3.

I.

(a) Prop. 32. El. III.

I. In simil modo proverassi, che il corpo A, qualor si proietti colla medesima velocità per l'altra direzione A Q, ancor ne debba pervenire allo scopo I, sebbene per un'altra Parabola. C. B. D.

§. 376. COR. I. Dunque volendo colla velocità dovuta all'altezza R A lanciare una palla da A ad I, tanto è incamminarla per A P, che per A Q. Ma il primo sentiero è più basso del secondo: onde qualor si voglia sfondare un piano orizzontale converrà servirsi di questo, e per abbattere un muro verticale gioverà usar quello.

§. 377. COR. II. Intendasi lanciato il corpo A per una qualunque direzione A P, e la Parabola, ch'ei descrive, tagli la linea del tiro A I in un punto qualunque I. Per I conducasi la verticale I F, che incontri la retta A P in F, e si compia il parallelogrammo T F, e per P si tiri P Q parallela ad A R: sarà il rettangolo F A P uguale all'altro R A T (lo che mostrerassi come nella propos. pres.): e con ciò al par di questo sarà suquadruplo del quadrato di A F. Dunque A P l'è quarta parte di A F, e pe' triangoli simili A B P, A I F, il sarà benanche A B quarta parte di A I.

§. 378. COR. III. Dunque proiettandosi un corpo per una corda qualunque A P del segmento circolare A P Q R, e colla velocità dovuta all'altezza R A; la lunghezza del tiro sarà quadrupla del-

della retta A B, che sulla linea del tiro ne ascende la verticale P B condotta per l'estremo di essa corda.

PROP. LXXX. TEOR.

§. 379. Il più ampio tiro, che può farsi sulla retta A I, lanciando un corpo dal luogo A colla velocità dovuta all'altezza R A, è quando l'angolo di proiezione R A N è metà dell'altro R A I fatto dalla linea del tiro, e dalla verticale R A.

E gli angoli di proiezione R A P, R A Q sotto de' quali deesi spingere un grave colla velocità dovuta alla R A, affinchè dal luogo A ei possa girne a colpire uno stesso punto della retta A I, sono equidifferenti dall'angolo R A N del massimo tiro.

DIM. PART. I. La retta C G protraggasì, finchè tagli l'arco A N R in N, e per N poi si conduca la verticale N b: l'angolo b N C sarà retto al par del suo esterno A C G, e quindi N b sarà (a) tangente del circolo in N. E poichè la retta A b è il massimo de' segmenti, che possono ascendere sulla retta A I le verticali condotte pe' punti dell'arco A N R; unita la ret-

P 4 ta

(a) Prop. 18. El. III.

ta AN , l'angolo di proiezione RAN sarà quello, che converrà dare ad un corpo, perchè lanciato colla velocità dovuta all'altezza RA vada a ferirne un punto della retta AI il più distante dal luogo A . Or la retta GCN perpendicolare ad AR biseca l'arco RNA : dunque sarà l'angolo NAR uguale ad NRA , o ad NAB , che a questo è uguale (a). E quindi nel caso del massimo tiro l'angolo della proiezione RAN sarà metà di RAB , che vien formato dalla linea del tiro, e dalla verticale.

PART. II. Ed essendo per la medesima ragione l'arco QN uguale ad NP ; sarà l'angolo QAN uguale ad NAP : e quindi l'eccesso di RAP su di RAN pareggerà il difetto di RAQ dallo stesso RAN . Dunque gli angoli di proiezione RAP , RAQ , sotto cui deesi spingere un corpo colla velocità dovuta all'altezza RA , perchè ne colpisca dal luogo A lo stesso bersaglio I , sono equidifferenti dall'angolo RAN del massimo tiro. C. B. D.

(a) Prop. 32. El. III.

PROP.

PROP. LXXXI. PROBL.

§. 380. Data di posizione la linea AI del tiro, e di grandezza l'angolo PAR di proiezione, determinare la lunghezza AI del tiro dalla velocità iniziale: e vicendevolmente determinar questa dalla lunghezza AI del tiro.

Fig. 32.

DIM. PART. I. Essendo dato nel triangolo RAP tanto l'angolo della proiezione PAR , che l'altro APR uguale al dato BAT , sarà data la ragione di RA ad AP . E quindi essendo data di lunghezza la RA altezza dovuta alla velocità di proiezione; sarà benanche data di magnitudine la retta AP . Ma il triangolo APB l'è ancor esso dato di specie: dunque determinata la grandezza del lato AP , si potrà determinare agevolmente la retta AB , il dicui quadruplo sarà la AI lunghezza del tiro.

PART. II. E volendosi determinare dalla lunghezza AI del tiro la retta RA , s' invertirà la rapportata soluzione, cioè si prenderà 1. AB quarta parte di AI . 2. Si determinerà AP essendo dato di specie il triangolo ABP e di grandezza il lato AB . 3. dalla retta AP di già determinata si farà noto l'altro lato AR del triangolo RAP dato di specie, cioè a dire l'altezza dovuta alla velocità iniziale. C. B. D.

§. 381.

§. 381. COR. I. Qualor ne aggrada cogli artifizi trigonometrici snodar questo problema; dovrà riguardo alla prima parte farsi 1. RA ad AP come il seno di RPA , o del suo uguale BAT al seno di PRA , o di PAB . 2. si farà come AP ad AB , così il seno di PBA o di BAT al seno dell'angolo BPA . Sarà il quadruplo di AB la desiderata lunghezza del tiro. E nello stesso modo si guiderà la soluzione della seconda parte di questo problema, qualora ella si voglia trigonometricamente effettuare.

§. 382. COR. II. Dunque essendo noto l'angolo RAB , che fa la linea del tiro colla verticale; l'angolo della proiezione RAP , l'altezza RA dovuta alla velocità iniziale, e la lunghezza AI del tiro son pure tre cose talmente fra loro unite, che ciascuna di esse può dall'altre due determinarsi agevolmente.

PROP.

PROP. LXXXII. TEOR.

§. 383. I tempi, ne quali il corpo A lanciato con una stessa forza, e per le direzioni AP , AQ va a ferirne la stessa retta AI condotta pel luogo della proiezione, son come i seni degli angoli PAB , QAB , che questa linea forma con quelle direzioni.

DIM. Il corpo A lanciato per AP colla velocità dovuta all'altezza RA tanto tempo v impiega a percorrere il sentiero parabolico AMI (intendendosi praticata la costruzione del Probl. LXXIX.), quanto nel correre equabilmente la retta AF , cioè il quadruplo di AP colla velocità iniziale (355). E s'ei verrebbe colla medesima velocità proiettato per AQ , tanto tempo v impiegherebbe a discendere per un sentiero parabolico sulla retta AI , quanto vi spenderebbe nel descrivere equabilmente il quadruplo di AQ colla velocità di proiezione. Dunque i tempi, onde un corpo lanciaosi colla mentovata celerità, ora per la direzione AP , ed ora per l'altra AQ , cade per due sentieri parabolici sulla retta AI , son come i tempi ne quali equabilmente e con una stessa velocità percorronsi i quadrupli di AP , e di AQ (11), cioè come $4AP$ a $4AQ$, o come $\frac{1}{2}AP$ ad $\frac{1}{2}AQ$. Ma $\frac{1}{2}AP$, ed $\frac{1}{2}AQ$ sono i seni delle

delle metà degli archi AP , ed APQ , cioè degli angoli ARP , ARQ , di cui coteste metà ne son misure, o pur degli angoli BAP , BAQ ad essi uguali. Dunque i seni degli angoli BAP , BAQ son proporzionali ai tempi, onde un corpo proiettato per le direzioni AP , ed AQ discende per due sentieri parabolici sulla retta AI . C.B.D.

§. 384. COR. Se mai la retta AI sia orizzontale, gli angoli PAB , QAB saranno quelli d'elevazione. Dunque i tempi, ne quali un corpo lanciato da uno stesso luogo, e con una medesima forza, ma per diverse direzioni discende al piano orizzontale che passa per esso luogo, saranno fra di loro, come i seni degli angoli di elevazione.

CAP.

CAP. XV.

DE' MOVIMENTI ESEGUITI IN ORBITE ELLITTICHE CON FORZE CENTRIPETE TENDENTI AD UN COMUNE DI LORO UMBILICO.

PROP. LXXXIII. TEOR.

§. 385. Se i corpi D , e d si aggirino nelle Orbite Ellittiche DRA , dra con forze centripete tendenti al di loro comune umbilico S ; i parametri principali di quest' Ellissi saranno direttamente come i quadrati delle velocità, ond' essi muovonsi ne' loro *Afelj*, o pur ne' *Perielj*, ed inversamente come le forze acceleratrici negli stessi assidi.

Fig. 53.

DIM. Prendansi accanto agli *Afelj* D , e d , o a' *Perielj*, i due archetti infinitesimi DT , dt descritti in uguali tempuscoli: egli è chiaro, che ordinate le retticciuole TN , tn agli assi maggiori DA , da debbano essere le ascisse DN , dn come le forze acceleratrici negli *Afelj* D , e d : ed esse ordinate come le velocità, con cui si muovono i corpi D , e d ne' loro *Afelj*. E poichè la retta DN è infinitesima, il rettangolo AND confonderassi coll'

altro ADN : dunque siccome quello (a) così questo starà al quadrato di TN , come AD a DQ , o come ADN a QDN , vale a dire sarà $ADN:TN^2::ADN:QDN$: e quindi TN^2 uguale a QDN . Similmente dimostrandosi, che il rettangolo qdn pareggi tn^2 , sarà $QDN:qdn::TN^2:tn^2$, e perciò (b) QD starà a qd in ragion composta di TN^2 a tn^2 , e di dn a DN . Val quanto dire i parametri principali di queste Orbite Ellittiche sono fra loro come i quadrati delle velocità, onde muovonsi i corpi negli Afelji, o pur ne' Perielji, ed inversamente come le forze, che quivi li ritengono. C. B. D.

§. 386. COR. I. Ed essendo le forze acceleratrici ne' luoghi D , e d come Sd^2 ad SD^2 , sarà DQ a dq in ragion composta di TN^2 a tn^2 , e di SD^2 ad Sd^2 , cioè DQ a dq in duplicata ragione dell'aja SDT all'altra Sdt .

§. 387. COR. II. Dunque i parametri principali delle riferite Orbite sono in duplicata ragione di due aje, che in esse descrivono i raggi vettori in uguali tempuscoli. E queste aje in suduplicata ragione de' medesimi parametri.

§. 388. COR. III. Prendansi nelle Orbite DRA , dra le due aje infinitesime SRO , Sro descritte in tempi uguali, e si calino le perpendico-

dicolari SM , Sm sulle loro tangenti in R ed r ; saranno questi triangoletti SRO , Sro in ragion composta di SM ad Sm , e di RO ad ro , cioè del perpendicolo SM all'altro Sm , e della velocità in R a quella in r .

§. 389. COR. IV. Dunque i parametri principali di queste Orbite Ellittiche sono come i quadrati delle velocità, onde i corpi si muovono in due qualunque punti di esse, e come i quadrati delle perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti, che loro conduconsi per gli stessi punti.

§. 390. COR. V. Si tagli DL uguale a DQ ; il quadrato di TN , che si è mostrato uguale al rettangolo QDN , sarà puranche uguale all'altro LDN , ovvero ad LND . Dunque il diametro del circolo osculatore dell'ellisse nel di lei Afelio, o nel Perielio pareggia DQ parametro principale di tal curva.

(a) Prop. 9. Lib. II. Conic. di Giannat.
(b) Pren. IV.

PROP. LXXXIV. TEOR.

§. 391. *La velocità colla quale un corpo si muove in un luogo qualunque N dell'Orbita Ellittica ANB descritta intorno all'immobile umbilico S, sta alla velocità, con cui un'altro mobile si volgerebbe circolarmente alla medesima distanza SN intorno al centro S, in sudduplicata ragione dell'altro ramo NQ al semiasse maggiore BC.*

Fig. 54.

DIM. Le proposte velocità de' mobili son quanto quelle, ch'essi potrebbonsi acquistare calando per le altezze RN, e PN rispettivamente uguali (342) ad NQ, ed NS. Dunque (175) i quadrati di queste velocità saranno fra loro in ragion composta di RN a PN, e di SP ad SR, (intendendosi nella composizione di queste ragioni omessa la terza ragione di SN ad SN, perchè di uguaglianza): cioè in ragion composta di 2 RN a PS, e di PS ad SR, vale a dire come 2 RN prima ad SR terza, o sia (prendendo le metà di questi termini), come RN, o la sua uguale NQ a BC. Dunque la velocità, con cui quel corpo che aggirandosi nell'ellisse ANB perviene al punto N, sta a quella onde nel circolo del raggio SN si volgerebbe intorno ad S, in sudduplicata ragione di NQ a BC. C. B. D.

§. 392.

§. 392. COR. I. Che se il punto M sia un'estremo dell'asse minore, l'inclinata QM sarà uguale al semiasse maggiore (a). Dunque in tal luogo la velocità del mobile, che aggirasi nell'Orbita ellittica, sarà uguale a quella, con cui il medesimo si volgerebbe circolarmente intorno allo stesso centro S alla medesima distanza SM.

§. 393. COR. II. Ed essendo le velocità, onde quel corpo, che volgendosi nell'Ellisse BMA a' luoghi M ed A ne perviene, come le perpendicolari calate dal centro S delle forze sulle tangenti de' punti A, ed M (284), cioè come SA ad MC; anche in questa ragione sarà la velocità, con cui un corpo circolarmente intorno ad S si aggira nella distanza SM, a quella, onde un'altro corpo volgendosi nell'Ellisse BNA ne giugne all'Afelio A.

PROP. LXXXV. TEOR.

§. 394. *Tanto tempo v'impiega un corpo a volgersi nella semiellisse BMA con forza centripeta tendente all'immobile umbilico S, quanto nel discendervi per l'altezza DS uguale al di lei asse maggiore.*

Fig. 55.

DIM. Passi la retta SD per un'estremo M dell'asse minore, e s'intenda volgersi un corpo

Tom. I.

Q

po

(a) Prop. 25. Lib. II. Con. Giann.

po intorno al centro S delle forze nel circolo $M T V$. Si prendano i due archetti $M m$, $A a$ descritti in uguali tempuscoli, e si congiungano i raggi vettori $S M$, $S m$, $S A$, $S a$. Sarà, come l'è chiaro da' conici, $S M$ metà di $B A$, o della sua uguale $S D$.

Or i due triangoletti $M S m$, $A S a$ potendosi aver come rettilinei sono fra loro in ragion composta di $S M$ ad $S A$, e di $M m$ ad $A a$. Ma la seconda di queste due ragioni componenti (8) è uguale alla ragione della velocità, colla quale un corpo aggirasi nel circolo $M T V$ intorno ad S , a quella, con cui il mobile ne arriva all'Afelio A dell'Orbita $B M A$, cioè (393) nella ragione di $S A$ ad $M C$: dunque i medesimi triangoletti saran fra di loro in ragion composta di $S M$ ad $S A$, e di $S A$ ad $M C$, val quanto dire come la prima $S M$ alla terza $M C$. Ed essendo i tempi periodici pel semicircolo $M T V$, e per la semiellisse $B M A$ direttamente come il semicircolo $M T V$ alla semiellisse $B M A$, ed inversamente come le aje $M S m$, $A S a$ (287); essi saranno come $S M$ ad $M C$ (la qual ragione (a) pareggia quella del semicircolo alla semiellisse), e come $M C$ ad $S M$, vale a dire in ragion di uguaglianza. Ma il tempo, in che si descrive il semicircolo $M T V$, è uguale a quello della discesa verticale per $D S$ (177). Dunque tanto

(a) Prop. 35. Lib. II. Con. Giann.

to tempo v'impiega il mobile A nel discendere per la semiellisse $A M B$ dall'Afelio al Perielio, quanto nel calare al centro S delle forze per la retta $D S$ uguale all'asse maggiore. C.B.D.

PROP. LXXXVI. TEOR.

§. 395. *I quadrati de' tempi periodici, onde rivolgonsi i corpi D , e d nelle Orbite ellittiche $D R A$, $d r a$ intorno al comune umbilico S , sono in triplicata ragione de' loro Assi maggiori $D A$, $d a$.* Fig. 56.

E se i corpi D ed M si volgessero nelle Orbite ellittiche $D R A$, $M Q L$ intorno a diversi umbilichi S ed F ; i quadrati de' tempi periodici saranno come i cubi degli assi maggiori, ed inversamente come le forze assolute degli stessi centri. Fig. 56. e 60.

DIM. PART. I. Si prolunghino le rette $S D$, $S d$, sinchè $S G$, ed $S g$ pareggino rispettivamente gli assi $A D$, $a d$ delle proposte Ellissi. Ei sarà chiaro da ciò, che si è dimostrato nel Teor. precedente, che i tempi delle rivoluzioni de' corpi D , e d nelle semiellissi $D R A$, $d r a$ sien quanto quelli, ch'essi corpi v'impiegherebbero a discendere per le rispettive altezze $G S$, $g s$ al centro S delle forze. E quindi siccome i quadrati di questi tempi sono in triplicata ragione delle altezze $G S$, $g s$ (181); così i quadrati de' tempi, onde i corpi D , e d si volgono nelle semiellissi $D R A$, $d r a$, o nelle

nelle intere Ellissi, saranno come i cubi delle altezze GS , gS , o degli assi maggiori AD , a d.

PART. II. Si tirino da' fuochi S , ed F le inclinate SR , FQ uguali a' semiassi maggiori dell'Ellissi $ANRD$, $LQM V$: saranno i tempi delle rivoluzioni de' corpi D , ed M nelle intere Ellissi $ANRD$, $LQM V$ uguali a que' tempi, ch' essi vi porrebbero a descrivere intorno a' centri S , ed F i circoli de' raggi SR , FQ (a). Or i quadrati di questi tempi sono fra loro direttamente come i raggi SR , FQ de' montovati circoli, ed inversamente come le forze (b) centripete, onde i corpi R e Q qui vi ne vengon ritenuti (c): e queste forze centripete son direttamente come le forze assolute de' centri, ed inversamente come i quadrati delle distanze (per l'ipot.). Dunque i quadrati de' tempi, onde ne' circoli de' raggi SR , FQ volgonsi essi corpi intorno ad S ed F , sono fra loro come SR ad FQ , come SR^2 ad FQ^2 , e come la forza assoluta del centro F a quella del centro S , cioè come SR^3 ad FQ^3 , e come la forza del centro F a quella del cen-

(a) Vedi la dim. del Teor. prec. verso la fine.

(b) Cioè come le quantità acceleratrici delle forze centripete.

(c) Niente osta, che quì si prendan corpi disuguali: perciocchè le forze acceleratrici di due uguali elementi di materia (93) pareggian quelle di due masse comunque grandi, e disuguali fra loro, potte però ne' luoghi ove sieno quegli elementi.

centro S . Dunque anche i quadrati de' tempi delle rivoluzioni nelle Orbite ellittiche $ANRD$, $LQM V$ saranno come SR^3 ad FQ^3 , e come la forza assoluta del centro F a quella del centro S : cioè come AD^3 ad LM^3 , e come la forza del centro F a quella del centro S . $C. B. D.$

§. 396. COR. I. Dunque se più corpi si volgono in Orbite ellittiche intorno ad un loro comune umbilico; i tempi periodici saranno in sesquiplata (180) ragione degli assi maggiori di queste Orbite, o delle medie distanze (a) di essi corpi dal comun centro delle forze.

§. 397. COR. II. Questa è quella famosa legge armonica Kepleriana, onde Natura tempera mirabilmente i moti de' Pianeti intorno al Sole. Ella fu conosciuta a posteriori dal sagacissimo Keplero: e deesi la gloria al Gran Newton d'averla dimostrata a priori, come si è praticato quì sopra.

§. 398. COR. III. Dalla II. Parte di questo Teor. rilevasi, che nel vero sistema d'attrazione le forze assolute di più centri, intorno a cui girino altrettanti corpi, sono nella ragion diretta triplicata delle medie distanze di questi da quelli, e nell'inversa duplicata de' tempi periodici degli stessi corpi.

§. 399. COR. IV. Dunque sapendosi per le

Q 3

os-

(a) Prop. 25. Lib. II. Con. Giann.

osservazioni Astronomiche i tempi delle rispettive rivoluzioni di Venere, e della Terra intorno al Sole, dell'estimo Satellite Gioviale intorno a Giove, e del Satellite Ugeniano intorno a Saturno, e conoscendosi eziandio le loro medie distanze dai centri del Sole, della Terra, di Giove, e di Saturno; agevolmente si potran ritrovare le forze assolute de' centri del Sole, della Terra, di Giove, di Saturno: dividendo i cubi di queste medie distanze pe' quadrati de' rispettivi tempi periodici.

§. 400. COR. V. E poichè le forze assolute di questi centri (96) son que' pesi, che avrebbero masse uguali a distanze uguali da' medesimi centri, cioè alla distanza 1; colla sola regola aurea potran rilevarsi i pesi di queste masse allegate nelle superficie del Sole, della Terra, di Giove, e di Saturno. Imperocchè se facciasi come il quadrato del semidiametro del Sole ad 1, così la forza centripeta, o il peso di una di tali masse nella distanza 1 dal centro del Sole, ad un quarto proporzionale; questo indicherà il peso di tal massa in sulla superficie del Sole. Similmente facendosi come il quadrato del semidiametro terrestre ad 1, così il peso di una delle divisate masse nella distanza 1 dal centro di nostra Terra ad un quarto; tal quarto proporzionale darà il di lei peso nella superficie terrestre (143). E così degli altri.

§. 401. SCOL. I. Questi sono i principj, onde il Cavalier Newton, ed altri Geometri se-

guen-

guendo le di lui orme han ritrovato i pesi, che terrebbe uno stesso corpo in sulle superficie del Sole, della Terra, di Giove, e di Saturno. La loro proporzione è quella de' numeri 10000, 104, 835, 525, qual si è indicata dal Newton nel Cor. I. prop. VII. Lib. III, o altra, che le si approssima.

§. 402. SCOL. II. Il Sole (per dir qualche cosa del sistema mondano, le cui irregolarità vo' qui appresso esaminare) è il massimo corpo del nostro Planetario sistema, e la più fulgida Fissa di quante irradino sulla nostra Terra. Egli n'è come impiantato in un luogo entro le Orbite di que' Pianeti, che gli giran d'intorno in diversi tempi periodici: e quivi senza aver moto progressivo si volge in 27. giorni intorno al suo asse, che al piano dell'Ecclittica, cioè dell'Orbita della nostra Terra, è sotto l'angolo di 7. gradi inclinato. Le Orbite de' Pianeti non sono circolari, come il si credea ne' tempi anteriori al gran Keplero; ma altrettante Ellissi fra loro diverse nella grandezza, nella specie, nella posizione, e sotto disuguali angoli inclinate al piano dell'Ecclittica. Intorno al Sole, che sta in un comune umbilico di tali Orbite, l'è così temperato il movimento di questi corpi celesti, che i tempi in ciascuna di esse son come que' settori ellittici, che intorno al Sole descrivonsi dai loro raggi vettori. Ed in diverse Orbite i quadrati de' tempi periodici son come i cubi de' loro

Q 4

assi

assi maggiori: o, che torna allo stesso, i tempi periodici seguono la sesquiplicata ragione delle distanze medie de' Pianeti dal Sole. Tutti questi corpi celesti si muovon sempre in conseguenza de' segni: i nodi delle Orbite, cioè que' punti, ove queste tagliano la nostra Eclittica, progrediscono lentissimamente, come il fan pure i loro Afelj, ed i Perielj. Ed intorno ad alcuni di questi Pianeti vi girano altri corpi opachi, che diconsi Pianeti secondarj: serbando nelle loro rivoluzioni quelle stesse leggi, che a' primarj competono intorno al Sole. Premesse queste cose è di bene, ch'io vi dichiaro coi principj della Meccanica certe irregolarità, che han luogo nelle divise rivoluzioni.

C A P. XVI.

DELLE ANOMALIE DE' PIANETI.

§. 403. DEF. XLV. L' *Eccentricità* dell' Orbita di un Pianeta è la distanza del centro del Sole da quello dell' Orbita.

§. 404. COR. Dunque l' *Eccentricità* dell' Orbita di un Pianeta è una metà della distanza de' di lei fuochi: imperocchè tali Orbite non sono, che altrettante Ellissi, ed in un comune d' loro umbilico n'è impiantato il Sole (402).

§. 405. DEF. XLVI. *Circolo Eccentrico* è un circolo

solo circoscritto ad un' Orbita ellittica, cioè che ha per un diametro l'asse maggiore della medesima Ellisse.

§. 406. DEF. XLVII. *Anomalia Vera*, o *Coequata* è l'angolo formato al centro del Sole dal massimo raggio vettore di un' Orbita, e da quell'altro, che passa per lo centro del Pianeta, che la percorre.

§. 407. DEF. XLVIII. *Anomalia Eccentrica* è l'angolo formato al centro dell' Orbita dal semiasse maggiore, che va all'Afelio, e dal raggio del cerchio eccentrico, che congiunge l'estremità della di lui semiordinata condotta per lo centro del Pianeta.

§. 408. DEF. XLIX. L' *Anomalia Media* o *Equabile* è un settore ellittico compreso dal raggio vettore che va all'Afelio; da quell'altro che passa per lo centro del Pianeta, e dall'arco ellittico ch'è in mezzo ad essi, e che in conseguenza de' segni misurasi dall'Afelio insino al centro del Pianeta.

§. 409. Sia AMP l'Orbita di un Pianeta, per cagion di esempio della nostra Terra, che dal suo Afelio A conducasi per AMP al suo Perielio P: PA sia l'asse maggiore di questa Ellisse: ANP dinoti il dilei circolo eccentrico: il Sole stiane impiantato nell'umbilico S, e la Terra si ritrovi nel punto M della sua traiettoria in un qualche tempo. Per M conducasi nel circolo eccentrico la semiordinata RN, e si uniscano le rette SN, SM, CN, CM. L'An-

Fig. 57.

L'Angolo ASM dirassi l'Anomalia vera, o coequata della Terra, ch'è in M .

L'angolo NCA è l'Anomalia eccentrica.

E l'aja ellittica ASM è poi l'anomalia media.

§. 410. COR. I. Or essendo, come apparisce da' conici, l'aja ellittica ASM alla corrispondente aja circolare ASN nella costante ragione dell'asse minore al maggiore; anche l'aja circolare ASN potrà prendersi per l'anomalia media della Terra, che si ritrovi nel luogo M della sua Orbita.

§. 411. COR. II. Ed essendo il settore ellittico ASM proporzionale al tempo, che v'impiega la Terra nel trasferirsi dall'Afelio A al luogo M ; a questo stesso tempo sarà pur anche proporzionale il settore circolare ASN .

§. 412. COR. III. Quindi perchè la Terra v'impiega 6. mesi nel condursi dall'Afelio al Perielio della sua Orbita; alla fine di un mese sarà di 30° la sua anomalia media, di 60° alla fine di due mesi, ec. E generalmente il tempo periodico, in che un Pianeta si volge nella sua Orbita AMP , suol dividersi in 360 parti uguali, e la di lui Anomalia media, quando ei si trovi in M , sarà di tanti gradi, quante son le parti 360^{me} di esso tempo periodico, nelle quali vi è giunto dall'Afelio A .

PROP.

PROP. LXXXVII. PROBL.

§. 413. *Data l'eccentricità SC di un Pianeta, che volgesi nell'Orbita ADP intorno al Sole S , e la di lui Anomalia eccentrica NCA , ritrovare l'Anomalia media MSA , e la vera MSA , che le corrispondono.*

1. Si moltiplichino il dato arco NA per la metà del raggio del circolo eccentrico, e l' suo seno per la metà della data eccentricità. 2. Si uniscano insieme siffatti prodotti: onde avrassi il settore circolare NCA , e l' triangolo NCS , cioè l'aja circolare NSA . 3. Facciasi come l'asse maggiore dell'Ellisse ADP al minore, così l'aja NSA ad un quarto: che sarà l'aja ellittica MSA , cioè l'anomalia media del Pianeta, corrispondente alla data eccentrica.

Ma per aversi l'anomalia vera si determini 1. l'angolo NSC del triangolo NSC , di cui son dati i due lati SC , e CN , e l'angolo SCN conseguente al dato NCA . 2. Facciasi come l'asse maggiore dell'Orbita al minore, così la tangente di questo angolo di già determinato ad un quarto proporzionale: che sarà la tangente dell'angolo MSR , cioè dell'addimandata Anomalia vera corrispondente alla data eccentrica NCA .

La dimostrazione di questo Problema immantinente si rileva dalla medesima costruzione.

PROP.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

§. 414. *Data l' Eccentricità dell' Orbita , in che si volga un Pianeta , e la di lui Anomalia media , calcolarne la corrispondente Anomalia vera .*

Fig. 58.

Costr. Premesse le cose dianzi esposte, nel fuoco F dell'orbita ALB ne stia il Sole, e sien date di magnitudine la FC eccentricità di lei, e la CA ch'è un semiasse maggiore di essa.

1. Prendasi nel cerchio eccentrico AMB l'arco ADM di tanti gradi, e minuti, quanti se ne contengono nella data anomalia media (412). 2. Si unisca la retta FM, e dal centro C dell'Orbita le si conduca la parallela CD. 3. Si tiri la corda DM, e poi si faccia il settore DFD uguale al segmento circolare DdM. 4. Si cali DQ perpendicolare su di BA, e si unisca FL: Sarà l'angolo AFL l'anomalia coequata, che alla data media corrisponde (a).

DIM.

(a) Uno de' più preclari, ed utili Problemi, che suol proporsi in Astronomia, è quello di *ris trovare il luogo di un Pianeta, dato il tempo, da ch'ei s'è partito dall' Afelio*. Questo Problema nell'Ipotesi, che i Pianeti si rivolgano in Orbite ellittiche intorno al Sole impiantato in un comune umbilico di esse, riducesi ad *indagarne dell' Anomalia media la coequata*, o (convertendolo in geometrico) *a dividere una semiellisse in una data ragione per una retta, che passi per un dilei fuoco, o final-*

DIM. I due triangoli DMC, DFC posti sulla comun base CD, e rinchiusi tra le stesse parallele CD, FM sono tra se uguali. Dunque aggiungendo al primo di essi il segmen-

finalmente a dividere nella stessa ragione il dilei semicerchio eccentrico per mezzo di una retta, che passi per quel fuoco. Or non potete Voi immaginarvi quai smarrimenti non abbia nello spirito degli Astronomi un tal Problema cagionati! Il sagace Keplero per l'eterogeneità, com'ei dicea, degli archi, e de'leni, o piuttosto pel trascendente rapporto, ch'evvi tra essi, non si fidando scioglierlo a priori andò a tentoni risolvendolo con della regola del falso. Altri Astronomi dal non saperlo sciogliere direttamente conchiuser male, ch'ei non si potesse geometricamente disnodare: e più stranamente ne inferirono, che l'Ipotesi Kepleriana, avvegnacchè poco favorita dalla Geometria, dovesse proscriversi dal sistema de' Pianeti. Infatti Ismaele Bulialdo, e Set Wardo due famosi Astronomi Oltramontani supposero, che ciascun Pianeta si volgesse in un' orbita ellittica intorno al Sole posto in un dilei umbilico, e che gli angoli descritti intorno all'altro fuoco, e non le aje intorno al Sole, fossero proporzionali ai tempi. Ed in tal modo con un metodo agevole, ed approssimante risolvean essi cotesto Problema delle Anomalie. Ma il Gran Newton avendo dimostrata a priori l'Ipotesi Kepleriana, pensò di sciogliere lo stesso Problema compiutamente: onde dopo averlo costruito colla combinazione del Circolo, e della Cicloide, come avealo anteriormente risoluto l'Illustre Cavalier Wren, propose nell. *Scol. del Probl. 22. del I. Lib. de' Princ. Mat.* una serie d'angoli convergente, che fu dai Signori David Gregori, e Gio. Keil illustrata. Dopo di ciò i valentissimi Astronomi Filippo de la Hire, il Signor Cassini, e Pietro Horrebowv ne diedero delle altre soluzioni nell. *Mem. dell' Acc. di Par. ann. 1719, 1719, e nel volum. VI. Suppl. di Lips.* E Giacomo Er-

mento DdM , ed al secondo il settore DFd , dee risultarne il settore $DCMd$ uguale al trapezio mistilineo $DCFd$. Ed aggiungendo a questi spazj il comun settore circolare DCA , n'è

Ermanno nel I. Vol. degl. *Art. Ant. Pietr.* non pure volle risolverlo geometricamente insiem combinando il cerchio, e la quadratrice di Tschirnhausen; ma con un' approssimazione adattata agli usi Astronomici, (qual è quella, che ho quassù rapportata) ne guidò a fine una facilissima soluzione. Finalmente i sommi Analisti Leonardo Eulero, e Luigi de la Grange si sono ancor essi ingegnati risolvere tutti i Problemi delle Anomalie per mezzo dell' equazioni differenziali, che le dinotano.

Ma qui da ultimo giova esibirvi quella formola proposta dal Dottor Machin nelle *Trans. Angl. an.* 1738., ond' ei dall' Anomalia media raccoglieane la coequata tanto nelle orbite di poca eccentricità, che nelle molto eccentriche. Eccone i risultati. Il semiasse di un' orbita, la di lei eccentricità, e la differenza di quello e di questa dicansi r, f, e, p : e sia $n = \sqrt{5 + \sqrt{25 + p:f}}$, la qual grandezza nelle orbite assai eccentriche, come son quelle delle Comete, è ad un di presso uguale a $\sqrt{10}$. Inoltre sieno T , e P rispettivamente uguali a $2r : (nnr - (nn - 1)p)$, ed a $pT : r$; ed M esprima il numero de' grad. dell' Anomalia media computata dal Perielio, e sia $R = 57^\circ$, 2937, ed $N = \sqrt{3TM : nR}$, e finalmente sia

$$Q = N \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + P^2 : N^6\right)}\right)} \\ + N \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + P^2 : N^6\right)}\right)}$$

ed $A = \text{Arc. sen. } Q$ sarà ad un dipresso nA la ricercata Anomalia eccentrica. Egli stabilisce certe limitazioni, ed illustra questa formola con molti esempi, che qui per brevità ometto.

n'emergerà il settore MCA uguale all'aja dFA . Dunque il semicerchio BMA starà al settore ACM , come lo stesso semicerchio all'aja AFd . Ma il semicerchio BMA sta al settore ACM , come 180 grad. al num. de' grad. dell' arco AM : e lo stesso semicerchio sta all'aja dFA , come la semiellisse BLA all'aja AFL . Dunque saranno 180 gr. al num. de' gr. dell' arco AM , come la semiellisse BLA all'aja AFL : e quindi essendo l'aja AFL l'anomalia media (408), l'angolo AFL (406) sarà la coequata, che si chiede. C. B. D.

§. 415. COR. I. Sapendosi i gradi dell'arco ADM , e con ciò dell'angolo ACM , si saprà l'angolo McF conseguente ad ACM . Ma son puranche noti i suoi lati CF , CM rispettivamente uguali all' eccentricità dell'Orbita, ed al dilei semiasse maggiore. Dunque per le regole della Trigonometria potrà determinarsi l'angolo MFC , e quindi il suo uguale DCA . Per la qual cosa conosciuto l'angolo DCF conseguente di DCA , ed essendo noti i lati FC , CD , che il contengono, potrà collo stesso artificio sapersi l'angolo CFD ; il quale nelle Orbite de' Pianeti, che non son molto eccentriche, pareggerà ad un di presso l'anomalia coequata: senza praticar il resto della costruzione del Problema.

§. 416. COR. II. Questo Problema s'intenderà risoluto, sol che dall'Anomalia media si raccol-

colga l'eccentrica: imperciocchè da questa facilmente ritrovasi la coequata (413).

§. 417. ESEMP. A L B rappresenti l'Orbita di Marte, e nel dilei fuoco F siavi posto il Sole. La F C eccentricità di essa contenga 1410 di quelle parti, delle quali il semiasse C A ne tiene 15237: e l'Anomalia media suppongasì esser di 45° . Dunque preso l'arco A M, e quindi l'angolo A C M di 45° , e condotta la C D parallela alla retta F M, che unisce i punti F, ed M; sarà l'angolo D C A di $41^\circ, 29'$: come può saggiarlo talun di Voi, risolvendo il triangolo D C A, di cui son dati i lati M C, C F, e l'angolo M C F, ch' essi comprendono. Or quest'angolo è pressochè uguale all'Anomalia eccentrica, e l' di lui valore è quanto quello, che il Sig. Keil con una serie Newtoniana ha rinvenuto per l'Anomalia media di 45° (a).

CAP.

(a) Vedi Keil Introd. ad Astr. Leff. 25. Exemp. 4. e not. (a) §. 414.

C A P. XVII.

SAGGIO DI ALCUNE TURBAZIONI NEL MOTO DE' PIANETI SECONDARI, E DEL MOVIMENTO DEGLI ASSIDI.

PROP. LXXXIX. PROBL.

§. 418. Muovasi il corpo L nell' Orbita ellittica L Q E con forza centripeta tendente ad un di lei umbilico T; abbozzare il metodo Newtoniano, onde valutansi le turbazioni quivi prodotte da un altro corpo S, Fig. 59.

COSTR. Esprima la retta L C quella forza, con cui il corpo L tende ad S: si congiunga la L T, e per L distesa la retta L B parallela a T S, si conducano dal punto C le altre due C B, C A rispettivamente parallele ad L A, e T S. E finalmente la forza L C risolvasi nelle due laterali L A, L B, le quali si dicano f , ed f' : e quell'altra, onde il corpo L tende a T, si chiami f .

E poichè le due forze f , ed f' tendono amendue al punto T; il corpo L, che da esse n'è investito, descriverà benanche intorno a T le aje proporzionali ai tempi (284). Dunque l'accesione, che fassi al corpo L della forza laterale f , non turba mica l'equabilità delle

Tom. I.

R

aje

aje intorno a T; ma sol ne induce una deformità nella figura ellittica: conciossiachè l'aggregato delle forze f , ed f' non è in ragion inversa duplicata della distanza LT, qual dovrebbe essere, affinchè la Traiettoria del corpo L sia un'Ellisse conica avente il punto T per un dilei umbilico (346).

2. Ma quai cangiamenti la forza LB, o F' a tal Orbita non arreca? Primieramente la forza, che si compone da F' , e da $f + f'$, non tende al punto T, com'è chiaro di per se stesso. Dunque la forza F' turba l'equabilità delle aje descritte intorno a T. II. La direzione media, che prende il corpo L animato dalle forze F' ed $f + f'$, non è, che in qualche caso, coincidente coll'archetto, che sta il mobile descrivendo. Dunque a cagion della forza F' deformasi grandemente cotesta figura ellittica. III. E se la TS, o la LB non istia sempre nel pian dell'orbita DQE; le infinite diverse direzioni medie, che il mobile sarà obbligato a prendere successivamente, comporranno una linea a doppia curvatura.

3. Supponete, che in T siavi un'altro corpo, anche attratto da S, ma colla forza Φ ; sarà chiaro, che niuna perturbazione debba produrre la forza LB sul moto del corpo L, qualora Φ uguagli F' . Imperocchè in tal caso i corpi L e T sarebbero da uguali forze agitati, e per le direzioni parallele LB, TS. Dunque L dovrebbe muoversi intorno a T, come se la

la forza F' punto non lo investisse. E non essendo la forza Φ uguale all'altra F' , dalla differenza di queste dovranno ripetersi quelle turbazioni, che nel numero II.º indicai addivenire all'orbita LQD.

4. Il corpo T sia un Pianeta, che giri intorno al Sole S, ed intorno a T vi si rivolga l'altro Pianeta L, che suol dirsi *Satellite* del primo, o *Secundario* di esso, e T *Primario* di L. Il punto Q dell'orbita di questo Satellite, ov'ei dal Primario T vedrebbe in congiunzione col Sole S, e l'altro punto P nel quale giunto il Satellite si vedrebbe opposto al Sole, diconsi *Sizigie*. E i due punti D, ed E di questa Orbita del Satellite equidistanti dalle Sizigie appellansi *Quadrature*.

5. Dunque un *Satellite* dee descrivere intorno al suo *Pianeta* le aje tanto più proporzionali ai tempi, ed un'Orbita, che vie più si approssima ad un'Ellisse avente T per un di lei umbilico, quanto più in parità di altre circostanze si minori la differenza delle forze Φ ed F' .

§. 419. SCOL. I. Di quì si potrebbero raccogliere tante altre verità insigni, che a questo argomento si appartengono: ma il dimostrarvele adeguatamente farebbemi ecceder la meta, che mi son proposto. Dunque sarà convenevole, che ve ne indichi solamente le principali: cioè il *Satellite* va più veloce nelle *Sizigie*, che nelle *Quadrature*: la sua Orbita è più curva nelle *Quadrature*, che nelle *Sizigie*: l'asse di quest'

Ellisse, o la linea degli Assidi, ha un vecendevole progresso, e regresso angolare: i dilei nodi muovonsi in antecedentia, cioè a parte contraria di quella per cui ne progredisce il Satellite: ed altre, che potrete leggerle ne' 22. Coroll. dell. Prop. 66. Lib. I. Princ. Mat. del Nevv. e nell' Astron. di David Gregori nell. Sect. de Error. quos sol. produc. in motu satell. (a)

§. 420. SCOL. II. Da ciò, che han dimostrato questi due Valentuomini, ed altri, ben si riveva, che *mentre un Satellite va descrivendo la sua orbita eccentrica intorno al suo primario, il dilei asse con moto angolare aggirasi intorno al centro del primario ora in antecedentia ed ora in consequentia*. Dunque è ragionevole, ch' io quì intraprenda la disamina del moto degli Assidi.

Fig. 61. §. 421. DEF. L. L' Orbita ABE, in quel tempo, che il mobile avrebbesi descritto un qual-

(a) Questo argomento considerato nel più grande aspetto forma il famoso Problema *de' tre corpi*, che come dicea il dottissimo Lambert, l'è oramai divenuto seria occupazione de' Sagaci Astronomi, e degli Acuti Analisti: e si è lasciato ai Tironi delle Matematiche, che si rodano il cervello sulla quadratura del cerchio. Or molti Geometri in varie guise si sono distinti nel risolverlo, e specialmente l' acutissimo de la Grange ne ha dati diversi Opuscoli nel Vol. II. *Miscell. Taurin. nel Probl. 3. dell' Applic. del suo Nuovo Metodo de' Massimi, e Minimi delle formole integrali indefinite: negli Atti di Berlin. an. 1777. e finalmente nella pag. 286. della Mechaniq. Analysis.*

Qualche arco AB, intendasi con moto angolare aggirarsi intorno al centro C delle forze, e con tal legge, che l' angolo ACA descritto dalla CA linea degli assidi stia sempre all'angolo ACB in una costante ragione (a): un tal movimento dell'asse AE si dirà *moto degli Assidi*. L'Orbita ABE dirassi *Immobile*, o *Quiescente*, e l'altra a be *Mobile*, o *Rivolvente*. E dirò *Pianeta* il corpo, che la percorrere, perciocchè nei Pianeti Secundarj si è dimostrato aver luogo un tal moto.

§. 422. COR. I. Dinoti a be la situazione, che abbiassi presa l'orbita del Pianeta alla fine del divisato tempo: e si descriva col centro C intervallo CB l'arco circolare Bb, che incontri l'orbita mobile a be nel punto b; saranno uguali e simili gli archi ellittici AB, ab, e sotterranno gli angoli uguali ACB, aCb. Imperciocchè nelle due Ellissi ABE, a be perfettamente uguali, i rami uguali CB, Cb debbon troncarvi d'accanto ai vertici prin-

R 3 cipa-

(a) Il Cavalier Nevvton nell. *Prop. 43. Lib. I. Princ. Mat.* e David Gregori nell. *Prop. 3. Sez. II. Lib. IV. El. Astron.* dimostrano, che il moto angolare dell' asse di un' Orbita mobile debba serbar questa legge, affinchè il Pianeta quivi si muova nello stesso modo, che nell' Orbita immobile: vale a dire perchè ei descriva gli archi dell' Orbita mobile in que' tempi, in che avrebbeli percorsi nella immobile. Ma quì ho supposto possibile un tal movimento: e da questa nozione ho voluto indagarne le sue leggi, e risolvere i principali Problemi, che su tale argomento soglion proporsi.

cipali A , ed a gli archi AB , ab uguali, e simili: e questi deggion sottendere gli angoli uguali ACB , aCb .

§. 423. COR. II. Essendo costante la ragion dell'angolo ACa all'angolo ACB , o al dilui uguale aCb ; sarà componendo l'angolo ACb all'altro aCb in una costante ragione.

§. 424. DEF. LI. La ragion dell'angolo ACb all'altro aCb suol indicarsi per quella di G ad F .

§. 425. COR. III. Se dopo un dato tempo il Pianeta nell'Orbita immobile avrebbe percorso l'arco AB , potrà rinvenirsi il luogo b , ov'ei si ritrovi nell'orbita mobile; se facciassi l'angolo ACb ad ACB come G ad F , e poi Cb uguale a CB .

§. 426. DEF. LII. La curva APb , che risulta dal moto proprio del Pianeta, e da quello della dilui orbita, chiamerassi *la vera Traiettoria del Pianeta*.

§. 427. COR. IV. Essendo sempre l'aja ACb all'altra ACB nella costante ragione di G ad F , e Cb uguale a CB ; la vera Traiettoria del Pianeta potrà agevolmente descriversi col'assegnazione de' punti, pei quali ne passa. Ma la dilei natura può anche analiticamente definirsi per mezzo di quella equazione differenziale, che le appartiene: come lo ha eseguito il Sig. Varignonio negli Atti dell'Acc. delle Scienze di Parigi 1705.

PROP.

PROP. XC. TEOR.

§. 428. Il corpo A , col suo moto proprio nell'orbita quiescente ABE , e col moto della medesima orbita intorno al centro C delle forze, puranche descrive le aje proporzionali a' tempi intorno allo stesso punto C .

DIM. Preso ovunque nell'Orbita quiescente l'archetto infinitesimo BD , si congiungano le rette CB , CD . Dipoi intendasi fatto l'angolo ACb all'altro ACB come G ad F , e nella stessa ragione di G ad F sia pure l'angolo ACd all'altro ACD ; sarà (a) il rimanente angolo bCd al rimanente BCD nella stessa ragione di G ad F . E se i lati dell'angolo bCd si concepiscano distesi, finchè incontrino in b , e d la vera Traiettoria del Pianeta; l'archetto bd sarà descritto nello stesso tempo, che l'altro BD nell'orbita quiescente (425).

S'intendano col centro C e cogli intervalli CB , CD descritti gli archi circolari Bb , Dd ; saranno le due aje bCd , BCD pressochè uguali ai settori circolari mCd , MCD : e quindi quelle al par di questi (b) saranno come gli angoli mCd , MCD , cioè come G ad F .

R 4

Dun-

(a) Prop. 19. El. V.

(b) Prop. 33. El. VI.

Dunque sarà (Prop. 12. El. V.) l'intera aja ACdP nella vera Traiettoria, alla corrispondente aja ACD nell'orbita quiescente, anche come G ad F. Per la qual cosa essendo le aje, che nella vera Traiettoria del Pianeta ne taglian sempre i di lei raggi vettori, come le corrispondenti nell'orbita quiescente; siccome queste son proporzionali ai tempi, ne' quali vengon descritte (284), così il saranno ancora quelle. C.B.D.

§. 429. COR. I. Dunque la forza centripeta; onde il Pianeta n'è incessantemente ritenuto nella sua vera Traiettoria, tende (293) pur anche all'immobile centro C.

§. 430. COR. II. E quindi, per definire la quantità di questa forza centripeta, converrebbe tagliare nella vera Traiettoria del Pianeta due archetti minimi contemporaneamente descritti, e poi saggiarne la ragione delle loro saette (288).

§. 431. SCHOL. Ma questa ragion delle saette difficilmente si rileva dalla genesi della vera Traiettoria, o dalla dilei equazione; perciò ho stimato dimostrarvi in un nuovo modo il seguente Teorema Newtoniano, donde di leggieri comprenderete il rapporto delle forze centripete, con cui il Pianeta in questa curva incessantemente n'è ritenuto.

PROP.

PROP. XCI. TEOR.

§. 432. La differenza delle forze, onde il Pianeta ne' luoghi equealti b, e B della sua orbita mobile a b e, e dell'immobile A B E vien ritenuto in giro, sta alla forza centripeta nell'Afelio A dell'orbita immobile, come $G^2 - F^2$ ad F^2 , e come AC^2 in AO, prodotto del quadrato del raggio vettore nel raggio dell'oscolo nell'Afelio, a BC', cubo del raggio vettore nel luogo B (a).

Fig. 62.

DIM. I due punti b, e B della Traiettoria mobile a b e, e della immobile A B E sieno ugualmente distanti dal centro C delle forze: e su de' raggi vettori bC; e BC, che passino pe' medesimi punti, si tronchino le due retticciuole uguali ed infinitesime bm, BM, le quali suppongansi dinotar l'energie di quelle forze centripete, onde il Pianeta ne' luoghi

(a) L'acutissimo Gio. Bernulli in una sua dissertazione inserita nel X. Vol. degli Att. Ant. di Pietroh. si dolse, che questa Verità erasi oscuramente dimostrata dal Newton Prop. 44. Lib. I. Princ. Mat. e che Giacomo Ermanno aveane alla dimostrazione del Newton sostituita un'altra, cui v'eran de' sofismi. Or che che ne sia del giudizio del Sig. Bernulli, ho stimato conveniente illustrarvi questa verità con una dimostrazione, ch'è immune, per quanto ne sembra, da' riferiti nei.

ghi b , e B dell'orbita mobile, e della immobile tenderebbe al centro C . Da' punti m , ed M si ergano su de' medesimi raggi le perpendicolari mr , MD proporzionali alle velocità angolari de' raggi vettori Cb , CB , cioè a dire agli angoli ACb , ACB , ovvero a G ed F (424): e s'intendano compiuti due parallelogrammi dalle rette bm , mr , e dalle altre BM , MD . Egli è chiaro, che il Pianeta b secondando al moto centrale bm , ed all'angolare mr debbasi trasferire da b in r per la diagonale del primo parallelogrammo in tanto tempo, in quanto si (212) sarebbe condotto da B in D per la diagonale dell'altro, secondando al moto centrale BM , ed al trasversale MD . Ma descritto col centro C intervallo CD l'arco circolare gDT , il Pianeta b alla fine di questo tempo trovasi effettivamente in g (425), e non in t . Dunque le forze centrali, onde il Pianeta sarebbe animato ne' luoghi equealti b , e B verso C , non sono uguali, come si è supposto: e lo spazietto gr è dovuto alla loro differenza, e l'è benanche proporzionale.

E poichè si è fatta rm a DM , o alla sua uguale dm , come G ad F : sarà $rm^2 : dm^2 :: G^2 : F^2$; e dividendo $rm^2 - dm^2 : dm^2 :: G^2 - F^2 : F^2$. Ma $rm^2 - dm^2$ è uguale (a) a Trg , cioè al rettangolo di $2Cg$ in gr ;

es-

(a) Prop. 36. El. III.

essendo gr infinitesima rispetto a Tg : e dm^2 l'è pure uguale a $dC^2 - Cm^2$, cioè a dire al rettangolo di $2Ct$ in tm . Dunque sarà $2Cg.gr$ a $2Ct.tm$, cioè (per essere $2Cg$, e $2Ct$ uguali fra loro) gr a tm , come $G^2 - F^2$ ad F^2 .

Prendasi di vantaggio il settore ACp uguale all'altro tCd , o a quest'altro bCd ; saranno le basi tC , CA di questi due triangoletti tCd , ACp rettangoli in t ed A nella reciproca ragione delle diloro altezze dt , Ap . Dunque sarà ancora $dt^2 : Ap^2 :: CA^2 : Ct^2$. Ma dt^2 , ed Ap^2 son rispettivamente uguali a' rettangoli $2Ct.tm$, (a) e $2AO.Av$ (intendendosi calata p v perpendicolare su di CA). Dunque sarà $2Ct.tm : 2AO.Av :: CA^2 : Ct^2$, e quindi (b) $tm : Av$, come CA^2 a Ct^2 , e come AO a Ct : val quanto dire $tm : Av :: CA^2 . AO : Ct^2$.

Ciò premesso, perchè lo spazietto rg è dovuto alla differenza delle forze centripete, che animerebbero il Pianeta ne' luoghi equealti b , e B dell'orbita mobile, e dell'immobile, ed Av esprime la forza centripeta nell'Asside A ; sarà la differenza di quelle forze a questa forza centripeta come rg ad Av (288), o in ragion composta di rg a tm , e di tm ad Av (c). Ma, come si è dimostrato ne' due para-

gra-

(a) Prop. 31. El. III. e Cor. Prop. 3. El. VI.

(b) Pren. IV.

(c) Pren. I.

grafi antecedenti, sta rg a tm come $G^2 - F^2$ ad F^2 , e tm ad Av come CA^2 . AO a Ct^1 , o a BC^1 . Dunque sostituendo queste ragioni in luogo di quelle di rg a tm , e di tm ad Av , avrassi la differenza delle forze centripete ne' luoghi b , e B dell'orbita mobile, e dell'immobile equidistanti dal centro delle forze, alla forza centripeta nell'Afelio A , come $G^2 - F^2$ ad F^2 , e come AO . AC^2 a BC^1 . C . B . D .

§. 433. COR. I. Dunque ritrovandosi il Pianeta in un luogo b della sua orbita mobile, la cui distanza dal centro delle forze si dica x ; sarà la divisata differenza delle forze nel luogo b a quella, che il ritiene nell'Asside, ove il raggio vettore sia r , ed r quello dell'oscolo, come $(G^2 - F^2) r$ ad $F^2 x^1$.

§. 434. COR. II. Similmente la forza centripeta, che ritiene cotesto Pianeta nell'Asside medesimo starebbe alla differenza delle forze per un'altro luogo P , come $F^2 X^1 : (G^2 - F^2) r$. (supposto, che si chiami X la distanza del luogo P dal centro delle forze). Dunque per uguaglianza perturbata sarebbero ne' luoghi b , e P tali differenze delle forze, come $F^2 X^1$ ad $F^2 x^1$, o come X^1 ad x^1 ; cioè in triplicata ragion inversa delle distanze de' luoghi b , e P dal centro delle forze.

§. 435. COR. III. Con che chiamando A la forza centripeta, che ritiene il Pianeta nell'Afelio della di lui orbita immobile; sarà la di-

vi-

visata differenza delle forze, qualora ei si ritrovi in b , uguale ad Ar . $(G^2 - F^2) : F^2 x^1$. E supposto che ABE sia un'Ellisse, facciassi x^1 ad 1 , così A ad un quarto, ch'è $A : x^2$, questo dovrà dinotare la forza centripeta del Pianeta nel luogo B della di lui Orbita immobile. E quindi sarà $A : x^2 + Ar (G^2 - F^2) : F^2 x^1$ quella, che il ritiene nel punto equealto b dell'Orbita mobile.

§. 436. COR. IV. E se l'orbita ABE sia un'Ellisse, e la forza in B pongasi uguale ad $F^2 : x^2$, sarà la forza nell'Asside A a quella nel luogo B , come BC^2 a CA^2 , cioè $A : \frac{F^2}{x^2} ::$

$x^2 : 1$, ed $A = F^2$. Dunque in tal caso la differenza delle forze, che avrebbe il Pianeta ne' luoghi equealti B , e b , sarà $F^2 r (G^2 - F^2) : F^2 x^1$, cioè uguale ad $r (G^2 - F^2) : x^1$. E l'intera forza, che il ritiene nel luogo b dell'orbita mobile, come quella, ch'è uguale alla mentovata differenza, ed alla forza centripeta nel luogo B , sarà

$$\frac{F^2}{x^2} + \frac{r G^2 - r F^2}{x^1} = \frac{F^2 x + r G^2 - r F^2}{x^1}$$

§. 437. COR. V. E ponendo $x = 1 - y$ nel solo numeratore di quest'ultima frazione; sarà la forza centripeta, che ritiene il Pianeta nel luogo b della sua orbita mobile, uguale ad

$$\frac{F^2 - F^2 y + r G^2 - r F^2}{x^1}$$

§. 438.

§. 438. SCOL. Su questo argomento soglionsi proporre due principali Problemi, uno inverso dell'altro, ch'esigon de' metodi particolari per risolversi. Il primo propone a rinvenir dal moto degli Assidi la forza, con cui un Pianeta è nella sua orbita mobile ritenuto: e questo Problema dalle cose sin qui dette sembra esser adeguatamente risoluto. Ma l'altro, di cui quaggiù ne arredo due analitiche soluzioni, vuol calcolare il moto degli Assidi data la legge, onde il Pianeta nella sua orbita mobile incessantemente al centro delle forze è ritenuto.

PROP. XCII, PROBL.

§. 439. Data la forza, colla quale è ritenuto in giro un Pianeta in un'Ellisse mobile, che abbia un' eccentricità picciolissima, calcolarne il movimento degli Assidi.

SOLUZ. Premesse le verità, e gli artifizj del Teor. prec., e de' suoi Corollarj, ecco la Sol.

1. Si chiami P la forza, onde il Pianeta è ritenuto in giro nel punto b dell'orbita mobile abe . Questa si riduca ad un fratto, che abbia per denominatore x' , e l di cui numeratore, che dee essere una funzione della variabile x , si chiami X .

2. Si sostituisca in X il binomio $1 - y$ in luogo della variabile x ; onde ne diventi X uguale ad $a + by + cy' + ey' + ec.$ qualunque

que sieno le grandezze $a, b, c, e, ec.$ Sarà $G' = a$, ed $F' = -b$.

DIM. La forza, ond'è ritenuto il Pianeta nel luogo b della sua orbita mobile abe , è

uguale ad $\frac{F^2 - F'y + rG - rF^2}{x'}$ (437). Ma el-

la si è puranche espressa per $X: x'$, cioè per $\frac{a + by + cy' + ey' + ec.}{x'}$. Dunque sarà $F' =$

$F'y + rG - rF^2$ uguale ad $a + by + cy' + ey' + ec.$ Ma essendo quest'orbita quasi un cerchio, il raggio r dell'oscolo, che nell'Afelio è uguale (390) al semiparametro principale, diventa 1: dunque $F' - rF^2$ è zero. E poi per essere y una grandezza picciolissima, come quella, che dinota l'insensibile differenza di CA , e di CB , le grandezze $cy', ey', ec.$ sono trascurabili rispetto agli altri termini, che si adunano nel II. membro dell'Equazione. Dunque sarà $-F'y + rG = a + by$. E quindi sarà $G' = a$, ed $F' = -b$. Imperciocchè contenendosi in quest'equazione la variabile y , debbon esser tra se uguali non pur le grandezze costanti, che in ambe le dilei parti si contengono; ma benanche que' termini di lei, ove la variabile trovasi ascendere ad una stessa dimensione. Altrimenti ne addiverrebbe $rG' - a = F'y + by$, cioè una grandezza costante uguale ad una parte variabile: lo che ripugna. Dunque sarà $G' = a$, ed $F' = -b$. C. B. D.

§. 440. ESEMP. I. Suppongasi esser costante la forza, che ritiene il Pianeta nella sua orbita mobile a b c. Ella dunque sarà $\frac{x^n}{x^1}$, cioè $(1-y)^1: x^1$, o finalmente $(1-3y + 3y^2 - y^3): x^1$. E quindi sarà $1-3y = G^2 - F^2$, cioè $G = 1$, ed $F = \sqrt{3}$.

§. 441. ESEMP. II. E se la forza sia come x^{n-3} , cioè come $\frac{x^n}{x^3}$, o come $\frac{(1-y)^n}{x^3}$: o fi-

nalmente come $(1 - ny + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} y^2 - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 \text{ ec.}): x^3$. Sarà $1 - ny =$

$G^2 - F^2$, e quindi $G = 1$, $F = \sqrt{n}$. E questi risultati sono identici a quei, che con un metodo alquanto più lungo il Cavalier Newton, ha esposti negli Esemp. 1. e 2. Prop. 45. Princ. Mat.

§. 442. Altro metodo più agevole del Newtoniano, onde risolvesi lo stesso Problema.

Questo metodo, che vo' proporvi, è diverso dal Newtoniano, che si è qui sopra esposto e dimostrato, ed è affine a quello, che ha rapportato Giacomo Ermano nella sua Foronomia §. 195.

La forza del Pianeta nel punto b della sua orbita mobile a b c esprimasi, come si è fatto nel princ. del. prec. sol., per $X: x^1$: Sarà $G: F:: \sqrt{X}: \sqrt{(dX: dx)}$.

DIM.

DIM. Imperocchè essendo $\frac{X}{x^1} =$

$$\frac{Ax + A(G^2 - F^2): F^2}{x^1} \quad (435);$$

sarà $X = Ax + A(G^2 - F^2): F^2 \quad L$

e quindi $\frac{X - Ax}{A} = \frac{G^2 - F^2}{F^2}$, cioè

$$X - Ax: A:: G^2 - F^2: F^2$$

e componendo $X: A:: G^2: F^2$: imperocchè essendo $x = 1$, sarà Ax quanto A , ed $X - Ax + A = X$.

Ma l'equazione L differenziata ne somministra $dX = Adx$, ed $A = dX: dx$.

Dunque sarà $X: \frac{dX}{dx}:: G^2: F^2$

e perciò $G: F:: \sqrt{X}: \sqrt{(dX: dx)}$.

§. 443. ESEMP. I. Sia la forza in b costante, ond'ella debbasi esprimere per $x^1: x^1$; sarà $X = x^1$, e $\frac{dX}{dx} = 3x^2$. Dunque sarà $G^2: F^2:: x^1: 3x^2:: x: 3:: 1: 3$: essendo $x = 1$: e quindi $G: F:: 1: \sqrt{3}$

§. 444. ESEMP. II. Che se la forza in b si di-

noti per x^{n-3} , cioè per $\frac{x^n}{x^3}$; dovrà essere $X =$

x^n , e $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$. Dunque starà $G^2:$

Tom. I.

S

F^2::

$F'::x^n:nx^{n-1}$, cioè per essere $x=1$;
 $G':F'::1:n$, e $G:F::1:\sqrt[n]{n}$ (a).

C A P. XVIII.

DELLA DISCESA DE' GRAVI PER LE CONCAVITA' DI QUELLE CURVE, I DI CUI ASSI SON POSTI VERTICALMENTE: E DELLE CURVE ISOCRONE.

PROP. XCIII. TEOR.

§. 445. *Se un grave si lasci discendere liberamente per la curva BER; la forza, che lo accelera in un punto qualunque B del suo cammino, starà al suo peso, come*

Fig. 63.

*BD semiordinata dell'asse CE
 a BC normale della curva in B.*

DIM. Per B conducasi la verticale BF, che rap-

(a) I principj di questo secondo metodo, che qui ho dimostrato, sono del chiariss. Ermano §. 195. Foron; e gli artifizi euristici del primo sono del Gran Nevvton oscuramente da lui esposti nell. Prop. 45. Lib. I. Princ. Mat., e colle parole stesse da Nevvtoniani esibiti: eccole. *Reducenda similiter est vis alia quavis centripeta ad fractionem cujus denominator sit x^3 , & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi.* Cioè (come spiega negli esempi) *collatis numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis.*

rappresenti il peso del corpo B: e tirata per B la retta BA, che tocchi in B la curva BER, si cali dal punto F la retta FA perpendicolare a BA. Saranno simili fra loro (a) i due triangoli rettangoli FBA, DBC; e quindi sarà $BA:BF::BD:BC$.

E poichè il peso del corpo B equivale alle due forze laterali FA, BA (212), e di queste la prima elidesi interamente dai pareti della curva BER, che si suppone ben rigida, ed immobile; l'altra BA ne rimarrà sola ad accelerare il medesimo corpo. Dunque l'energia di una tal forza acceleratrice sarà al peso del corpo B, come BA a BF, cioè come BD a BC. C. B. D.

§. 446. COR. I. Suppongasi essere un circolo la curva BER; sarà la mentovata forza acceleratrice al peso del corpo B, come la semiordinata BD al raggio BC. Ma sta il peso del corpo B a quella forza, che lo accelera nell'altro luogo R, come il raggio CR ad RP. Dunque per uguaglianza ordinata saranno le forze, che accelerano il medesimo grave, qualora si ritrovi ne' luoghi B, ed R del circolo BER, come le semiordinate BD, RP di questa curva, cioè come i seni degli archi da descriversi BE, RE.

§. 447. COR. II. Dunque, *lasciatis cadere li-*
 S 2 be

(a) *Prin. IX. n. 1.*

beramente un grave nella parte concava della periferia di un circolo, le sue forze acceleratrici saranno come i seni degli archi da descriversi insino al punto infimo; e quindi in minor ragione de' medesimi archi.

Fig. 64. §. 448. COR. III. E se la curva BMR, entro di cui facciasi liberamente discendere il corpo B, sia una Cicloide volgare; sarà la forza, che accelera in B il medesimo corpo, al dilui peso, come RC corda corrispondente nel circolo generatore ad RE asse della Cicloide: (essendo per la natura di questa curva (a) il triangolo BAE simile ad ERC). Ed essendo per un simile ragionamento il peso dello stesso corpo alla forza, che lo accelera in M, come ER ad RN; saranno per uguaglianza ordinata le forze acceleratrici di esso grave ne' luoghi B ed M, come RC ed RN.

§. 449. COR. IV. Or le corde RC, ed RN del circolo generatore sono metà de' corrispondenti (b) archi Cicloidali RB, RM; dunque saran le forze acceleratrici del grave ne' luoghi B, ed M della Cicloide BMR, entro di cui ne discende, come gli archi BR, MR, che si stendono in sino al punto infimo R.

Fig. 65. §. 450. DEF. LIII. La curva ABF, dicesi *Tautocrona*, o *Isocrona*, se un grave nel discendere per gli archi disuguali AF, BF in sino al pun-

- (a) *Prin. XIX. n. 1.*
(b) *Prin. XVIII.*

punto infimo F v'impieghi lo stesso tempo.

§. 451. DEF. LIV. Cotesta uguaglianza di tempi dicesi *Isocronismo*, che si distingue in *semplice*, e *perfetto*. Il primo si verifica, quando i tempi totali per le discese AF, a F sono solamente tra se uguali. E l'altro è quando sien pure tra se uguali i tempi, onde percorronsi le parti AB, a b proporzionali ai tutti AF, a F.

PROP. XCIV. TEOR.

§. 452. Se il diametro del semicircolo ABF sia posto verticalmente, un grave v'impiegherà più tempo a discendere al punto infimo F per l'arco maggiore AF, che pel minore a F. Fig. 65.

DIM. Si prendano i due archi AB, a b proporzionali agl'interi AF, a F, e da' medesimi sene tronchino le parti infinitesime BC, b c proporzionali agli stessi archi AF, ed a F, o agli altri AB, a b. Si ordinino al diametro GF le rette BE, b e, cui conducansi parallele le rette CD, c d, e su di queste si calino le perpendicolari BD, b d.

Ciò posto pe' triangoli simili GEB, BDC sta BE : BG :: BD : BC : dunque sarà il rettangolo di BG in BD uguale all' altro di BE in BC. E dimostrando per simil modo, che il rettangolo di bG in b d pareggi quest' altro di b e in b c; sarà la ragione de' rettangoli

goli di BG in BD, e di bG in bd uguale a quella, che il rettangolo di BE in BC serba all'altro di be in bc: cioè, prendendo due ragioni rispettivamente identiche ad esse, sarà (a) BD a bd in ragion composta di BC a bc, o sia di BF a bF, e di BE seno del primo arco a be seno dell'altro. Or la ragione de' seni è minore di quella degli archi, cui appartengono: dunque la ragion composta di BE a bF, e di BE a be sarà minore della duplicata di BF a bF, o della duplicata di AF ad aF. Laonde distendendo le due BD, e bd in sin che incontrino in P, e p le orizzontali AP, ap, sarà (b) BP a bp (le quali rette sono le rispettive somme di tutte le BD, e delle altre bd) anche in minor ragione di AF² ad aF², val quanto dire come AF² ad N² maggiore di aF². Or lasciandosi cader due gravi da' luoghi A ed a su per gli archi AB, ab, i quadrati delle velocità, ond'essi pervengono in B, e b, essendo fra loro come BP a bp (153.n.1), saran pure come AF² ad N². E quindi i quadrati de' tempi, ne' quali i medesimi corpi avran percorsi gli archetti BC, bc, saranno fra loro (15) come BC² a bc², cioè come AF² ad aF², e come N² ad AF², cioè come N² ad aF² (c): e 'l tempo per BC al tempo

(a) *Prin. VII.*(b) *Prop. 1. El. VI.*(c) *Prin. II.*

po per bc, come N ad aF. Dunque il tempo per BC sarà maggiore di quello per bc: e quindi (Prop. 12. El. V.) il tempo della discesa di un grave per l'arco maggiore AF sarà maggiore del tempo, ch'egli stesso, o un' altro v' impiegherebbe a discendere per l'altro minore aF. C. B. D.

§. 453. COR. Dunque il circolo nell'ipotesi della gravità costante non può essere una curva isocrona.

§. 454. SCOL. Dal Cor. II. della Prop. CXIII. può concludersi, che nell'ipotesi della gravità costante il circolo non sia una curva perfettamente isocrona: perciocchè in essa non si ritrova quel criterio del perfetto isocronismo, che fu stabilito nel Cor. Prop. XXVII. Restavami a dimostrare, che nemmeno al circolo competesse il semplice isocronismo. E questo nel presente Teorema ho procurato eseguire.

PROP. XCV. TEOR.

§. 455. *Se due gravi calino per gli archi circolari simili BT, PS ai loro punti infimi T, ed S; i tempi di tali discese saranno in sudduplicata ragione de' loro raggi AT, AS.* Fig. 66.

DIM. S' intendano i mentovati archi posti d'intorno ad un comun centro A, e che i loro punti infimi T ed S giacciono in una medesi-

ma verticale. Si ritrovi AL media proporzionale tra AT, ed AS: e presa nell'arco BT una qualunque parte BQ si congiungano i raggi AB, AQ, e le corde BQ, PR: e poi condotte per B, e P le orizzontali BG, PO, si calino su di esse le perpendicolari QG, RO.

Essendo AP:PB::AR:RQ, saran parallele le due rette QB, ed RP. Laonde essendo simili i triangoli ABQ, APR, sarà QB:RP::AQ:AR. Ma BG è parallela a PO, e QG ad RO: dunque anche i triangoli QBG, RPO saranno simili fra loro, e sarà QG:RO::QB:RP::QA:AR: E quindi, la sudduplicata ragione di QG ad RO, cioè quella che ha la velocità di un grave disceso per l'arco BQ alla velocità di un'altro disceso per l'altro PR (153. n.1), sarà uguale alla sudduplicata ragione de' raggi QA, AR, cioè a quella di AL ad AS. Si prendano in pertanto gli archetti infinitesimi Qq, Rr proporzionali a BQ, e PR, e con ciò ai raggi AT, AS: saranno i tempi, ne' quali vengon essi descritti dai gravi, che si lasciano cadere da B, e P, come AT ad AS, e come AS ad AL (essendo la prima ragione uguale a quella degli spazietti descritti, e la seconda inversa di quella delle velocità), cioè a dire come AT ad AL (a), o in sudduplicata ragione di AT ad AS. E ciò sempre dimostrandosi sarà il tempo della discesa per l'arco BT

(a) *Prin. 1.*

BT a quello per PS anche in sudduplicata ragione di AT ad AS (a). C. B. D.

PROP. XCVI. TEOR.

§. 456. *Se intorno all'asse RA, che passi per lo centro S delle forze, descrivasi la scala QG delle forze centripete, e l'altra curva CBA di tal natura, che il quadrato di un qualunque suo arco CA, tagliato dal circolo descritto col centro S intervallo SC, stia alla corrispondente aja ARQG nella costante ragione di P a Q; la curva CBA sarà perfettamente isocrona.*

E se la curva CBA sia perfettamente isocrona; i quadrati degli archi AB, Ab saran come le corrispondenti aje ATPG, AtpG:

DIM. PART. I. Si prendano i due archi CB, cb proporzionali agl'interi CA, cA: e col centro S e cogl'intervalli SC, SB, Sc, Sb si descrivano gli archi circolari CR, BT, cr, bt; e poi da'punti R, T, r, t si ordinino RQ, TP, rq, tp nella scala delle forze centripete. E poichè dalla costruzione sta $CA^2:AB^2::cA^2:Ab^2$, sarà convertendo $CA^2:CA^2-AB^2::cA^2:cA^2-Ab^2$. Ma sta $CA^2:AB^2::ARQG:ATPG$. Imperocchè essendo per supposizione $CA^2:ARQG::P:Q$, ed $AB^2:$

(a) *Prop. XII. El. V.*

$AB^2 : ATPG :: P : Q$, sarà $CA^2 : ARQG :: AB^2 : ATPG$, e quindi $CA^2 : AB^2 :: ARQG : ATPG$. Dunque di nuovo convertendo sarà $CA^2 : CA^2 - AB^2 :: ARQG : RTPQ$. E dimostrandosi nello stesso modo, che stia $CA^2 : CA^2 - AB^2 :: ArqG : rtpq$; siccome, da quel che si è dimostrato, sono tra se uguali le due prime ragioni di queste analogie, cioè quelle di CA^2 a $CA^2 - AB^2$, e di CA^2 a $CA^2 - AB^2$; così sarà parimenti $ARQG : RTPQ :: ArqG : rtpq$, e permutando $ARQG : ArqG :: RTPQ : rtpq$. Ma le due aje $ARQG$, $ArqG$ sono fra loro come i quadrati degli archi CA , cA , o degli altri CB , cb , che ad essi son proporzionali: e le altre aje $RTPQ$, $rtpq$ son come i quadrati delle velocità (124), che si acquisterebbero due gravi calando per le altezze RT , rt , o per gli archi CB (a), cb . Dunque i quadrati di queste velocità saran fra loro come i quadrati degli archi CB , cb : e quindi le velocità acquistatesi per CB , e cb da due gravi, che vi si lascino cadere da' luoghi C , e c , saranno tra di essi come i medesimi archi. Dunque non solamente gli archi CB , cb , ma gl'interi CA , cA dovranno essere (32) contemporaneamente descritti, e la curva CBA (451) sarà perfettamente isocrona.

PART. II. Prendansi gli archetti BH , bh infinitesimi,

(a) Questa verità può dimostrarsi come la Prop. LX, di cui n'è un caso.

infinitesimi, e proporzionali agli archi CB , cb , o agl'interi CA , cA . Saranno, a cagion del perfetto isocronismo (451) della curva CBA , descritti in tempi uguali tanto gli archi CB , cb , che gli altri CH , ch da due gravi, che da' luoghi C , e c si lascino calar giù per la concavità di lei. Dunque anche gli archetti BH , bh saranno percorsi in uguali tempuscoli: il perchè dovrà stare (14. n. 5) BH a bh , come la velocità per CB all'altra per cb : e BH^2 a bh^2 , come il quadrato di quella velocità al quadrato di questa. E prendendo due ragioni, che le pareggino rispettivamente, sarà $CB^2 : cb^2 :: RTPQ : rtpq$ (a). Ma sta benanche $CA^2 : cA^2 :: RAGQ : rAGq$, come può arguirsi collo stesso filo della dimostrazione. Dunque essendo per costruzione $CB^2 : cb^2 :: CA^2 : cA^2$, sarà ancora $RTPQ : rtpq :: RAGQ : rAGq$: e quindi (b) $TAGPa$ a $tAGp$ come $RAGQ$ ad $rAGq$, cioè come CA^2 a cA^2 , o come BA^2 a bA^2 . Vale a dire $TAGP : tAGp :: BA^2 : bA^2$, C. B. D.

PROP.

(a) Per supposizione, e pel §. 124.

(b) Prop. 19. El. V.

PROP. XCVII. PROBL.

§. 457. *Poste le medesime cose della Prop. prec. ritrovar la ragione di P a Q.*

SOL. Suppongasi esser l'arco bA di una grandezza infinitesima, e si descriva col centro S intervallo Sb l'archetto circolare bt. Si cali b o perpendicolare su di St, e s'intenda essere AF il raggio dell'oscolo nel vertice A della curva BA.

Ciò premesso essendo le saette to, A o degli archi minimi tb, bA grandezze infinitesime rispetto a' medesimi archetti (a), sarà la diloro somma benanche un'infinitesimo rispetto all'archetto Ab, ipotenusata del triangolo Abt rettangolo in t. Dunque il quadrato di Ab superando il quadrato del cateto bt per lo quadrato dell'altro cateto At, (che si è detto essere rispetto ad essi un'infinitesimo), il sarà uguale. Ma i due quadrati di Ab, e di bt son rispettivamente uguali a' rettangoli di 2FA in A o, e di 2St in t o (b). Dunque questi rettangoli al par di que' quadrati saranno tra se uguali. E reciprocando le loro basi

(a) Imperocchè essendo $\therefore A o, A b, 2AF$; ed Ab infinitesima rispetto a 2AF; sarà pure A o infinitesima riguardo ad Ab. E così ancora t o infinitesima rispetto a tb.

(b) Prop. 31. Elem. III., e Cor. Prop. 8. El. VI.

basi colle altezze sarà A o : t o, come St, o SA ad FA, e quindi A o : A t :: SA : SF. E poichè P sta a Q come a b² a GAtp (456); ed a b², e GAtp son rispettivamente uguali a' rettangoli di 2FA in A o, e di GA in A t; sarà P a Q in ragion composta di A o ad A t, e di 2FA a GA, cioè in ragion composta di SA ad SF, e di 2FA a GA (sostituendo la ragione di SA ad SF invece di quella di A o ad A t): val quanto dire P, a Q, come 2FA in AS a GA in SF.

§. 458. COR. I. Qualor si voglia dimostrare, che la curva Acc sia isocrona, converrà concludere che stia AB' : A T P G :: 2FA . AS : GA . SF.

§. 459. COR. II. Se il centro S delle forze disti infinitamente dal vertice A della curva isocrona; la ragione di P a Q restringesi a quella di 2FA a GA: imperciocchè in tal caso le rette AS, ed SF differendo per la grandezza finita FA si possono avere per uguali, e la ragione di 2FA, AS a GA . SF si fa uguale a quella di 2FA a GA.

§. 460. COR. III. Data la magnitudine di FA raggio dell'oscolo nell'apice A della curva isocrona ABC, e data la distanza AS, ch'è tra il divisato apice, e 'l centro delle forze, sarà data la ragione di 2FA . AS : GA . SF, e quindi la sua uguale di P a Q.

§. 461. COR. IV. E vicendevolmente data la

la ragione di P a Q, e la distanza del vertice della curva isocrona dal centro delle forze, potrà facilmente rinvenirsi il raggio dell'oscolo in tal punto. Facciasi a tal uopo $Q : P :: GA : AM : (457)$ sarà $2 FA$. $AS : FS$. $GA :: AM : AG :: AM, FS : AG, FS$; e quindi il rettangolo (a) di $2 FA$ in AS sarà quanto quello di AM in SF , e sarà poi $2 AS : AM :: SF : FA$. Con che dividendo otterrassi $2 AS - AM : AM :: SA : FA$.

PROP. XCVIII. TEOR.

§. 462. *Nell'ipotesi della gravità costante la Cicloide volgare è una curva perfettamente isocrona. Nè v'ha altra curva, che sia tale (b).*

DIM. PART. I. A c C sia una semicicloide volgare, il di cui asse AB giaccia verticalmente col-

(a) Prop. 9. Et. V.

(b) Cristiano Ugenio sottilmente ragionando scoprì, che la Cicloide volgare tra le belle proprietà, ond'è fregiata, abbian ancor quella dell'isocronismo. Il Gran Newton, e l'Chiarissimo Ermanno stabilirono, dover esser isocrona una curva, se le forze acceleratrici del grave, che si fa liberamente discendere entro la cavità di lei, seguano la ragion di quegli archi, che gli restano fino al punto infimo a descrivere: e quindi questi Geometri dimostrarono lo stesso assunto Ugeniano, e vi aggiunsero altresì, che l'Epicicloide inferiore era la Tautocrona nell'Ipotesi della gravità crescente come la distanza dal centro. Or il Sommo Eu-

coll'apice in giù, ed intorno ad esso stia il di lei cerchio generatore APB, e'l rettangolo RAGQ scala della gravità costante (87).
Si

lero speculando tali cose seco dicea sovente: chi mai resterà pago senza punto dubitarne, che la sola Cicloide, e niun'altra curva sia la Tautocrona nell'Ipotesi della gravità costante? E perchè mai con un principio meccanico diverso dal Newtoniano non potrà l'isocronismo in altre curve rilevarsi? Per la qual cosa il Valentuomo si pose a rintracciar la curve isocrone con un metodo diretto ed universale, derivandole col calcolo integrale dalla sola natura dell'isocronismo, e non già da qualche proprietà di questo, o di quelle: e ne somministrò su questo argomento alcune dotte Dissertazioni negli Att. Ant. Pietrob. Vol. IV. e V. e sciolse parecchi problemi affini nel II. Vol. dell. sua Meccan. Ma da questi scientifici lavori raccogliessi, I. che nell'Ipotesi della gravità costante si possan dare infinite Tautocrone, i di cui rami di qua, e di là dal punto infimo sien diversi fra loro. II. Che data una curva, le si possa aggiungere dalla stessa parte un'altra da lei diversa, sicchè discendendo un grave per questa, e per quella arrivi sempre nello stesso tempo all'infimo punto di loro. III. Ma qualor si chiegga una curva isocrona, i di cui rami d'ambè le parti dell'asse verticale sieno simili fra loro, e ciascheduno di una continua curvatura, non può concepirsi altra curva, che la Cicloide.

Il Signor Giovanni Bernulli nell'an. 1730 avea comunicato all'Acc. dell. Scien. di Par. un'elegante dissertazione sulle Tautocrone investigandole col metodo diretto; siccome il fecer poi i Chiariss. Signori d'Alembert, e de la Fontaine. E da ultimo gl'insigni Analisti Luigi de la Grange negli Att. di Berlin. 1770, e Leonardo Eulero negli Att. Nuov. di Pietr. Vol. X. hanno avuto il coraggio di rinvenir le isocrone ne' mezzi resistenti, ed hanno altresì risolti alcuni Problemi inversi di tal genere.

Si tiri sull'asse AB la semiordinata CR, ovunque ne piaccia, e si congiunga la PA. Sarà AP^2 uguale a BAR , e con ciò $4PA^2$ uguale a $4BAR$. Ma l'arco cicloidale AC (a) è duplo della corda AP, che gli corrisponde nel circolo generatore; e quindi $4PA^2$ è quanto CA^2 . Dunque sarà CA^2 uguale a $4BA$ in AR, e con ciò $CA^2:ARQG::4BAR:ARQG::4BA:AG$. Ma $4BA$ è uguale al doppio di FA raggio dell'oscolo nel vertice della Cicloide (b): dunque sarà CA^2 ad $ARQG$, come $2FA$ ad AG . E quindi la Cicloide Acc sarà (459) la curva isocrona nell'Ipotesi della gravità costante (c).

PART. II. Suppongasi, s'è possibile, che la curva Acc diversa dalla Cicloide volgare sia la Tautocrona nell'ipotesi della gravità costante: ed FA dinoti il raggio dell'oscolo nel di lei vertice A. Si prenda nella stessa curva l'archetto Ac infinitesimo, e l'altro AC di una finita grandezza, e si conducano sul di lei asse verticale AB le semiordinate CR, cr. Sarà manifesto dalla seconda Par. della Prop. XCVI. che debba essere $Ac^2:AC^2::ArqG:ARQG::Ar:AR$. Ma sta $Ar:AR::2FA:AR::2FA:AR$. Dunque sarà $Ac^2:AC^2::2FA:AR:2FA:AR$: e quindi (d) siccome Ac^2 è ugua-

(a) *Præn. XVII.* (b) *Præn. XIX. n. 1.*

(c) Questa dimostr. potea anche trarsi da' foli §§. 170, 449.

(d) *Prop. 31. El. III. e Cor. Prop. 3. El. VI.*

è uguale a $2FA$. Ar, così dovrà essere anche AC^2 uguale a $2FA$. AR. Ciò premesso si descriva il semicerchio APB sul diametro AB metà di AF, e si congiunga AP: sarà il quadrato di tal corda uguale al rettangolo di BA in AR, e quello al par di questo sarà quarta parte del rettangolo di $2FA$ in AR. Dunque sarà anche PA^2 quarta parte di CA^2 , e PA metà di CA: cioè a dire l'arco AC, qualunque ei sia, è sempre duplo della corda AP, che gli corrisponde nel semicerchio APB: e quindi la curva Acc sarà una Cicloide (a): contro di quello, che si era supposto. C.B.D.

PROP. XCIX. TEOR.

§. 463. *L'asse AB della Semicicloide CPB sia posto verticalmente, e'l dilei vertice B siane il punta infimo; io dico che il tempo della discesa di un grave per l'asse AB stia a quel tempo, che dee spendervi un' altro a calare per la semicicloide CPB al punto infimo, come il diametro di un circolo alla sua semicirconferenza.*

Fig. 69.

DIM. Si prenda ovunque in questa semicicloide l'archetto minimo Pp, ed ordinate all'asse AB le rette PE, pe, si tirino da' di lui estremi, e dal punto medio le tre rette AM, Tom.I. T BM,

(a) *Præn. XVIII.*

BM, DM al punto M. Dai punti p ed M si tirino p i, ed ML parallele all'istesso asse, Ed in fine si concepisca un corpo muoversi per AB equabilmente, e colla velocità dovuta all'altezza AB; sarà il tempo, in ch'ei percorrerebbe con tal moto la AB, metà di quello, che v'impiegherebbe un grave a discender per esso (153.n.3) col suo moto naturale.

Ciò posto la velocità, onde il corpo A muovesi per AB equabilmente, sta a quell'altra, che si acquisterebbe un grave dopo di aver percorso l'arco cicloidale CP, in sudduplicata ragione di AB ad AE (imperocchè la prima velocità si è supposto doversi all'altezza AB, e l'altra alla PN, ovvero ad AE); cioè a dire per la natura del circolo AMB come AB ad AM. E per la natura della Cicloide CPB il triangoletto P p i è simile al triangolo AME (a): dunque sarà p i, o la sua uguale E e a P p, come ME ad AM. Dunque il tempo, in che percorresi dal mobile A lo spazietto E e colla velocità dovuta all'altezza AB, sarà a quello, che v'impiega un grave a discendere per l'archetto P p colla velocità dovuta all'altezza PN, in ragion composta di ME ad AM, e di AM ad AB (15), cioè a dire come ME ad AB (b), o a 2 DM. Ma il triangolo DME è ancor esso simile al triangoletto MSL.

(a) *Pren. XIX. n. 1.*

(b) *Pren. I.*

MSL. Dunque sarà ME : 2 DM :: ML : 2 SM. E quindi i divisati tempuscoli saranno fra loro come ML, ovvero E e a 2 MS: e (a) sarà poi il tempo, nel quale il corpo A equabilmente muovesi per AB colla velocità dovuta all'altezza AB, al tempo della discesa di un grave per la semicicloide CPB, come il diametro AB alla sua circonferenza. Sicchè duplicando gli antecedenti sarà il tempo, nel quale un grave naturalmente discende per AB (153.n.3), al tempo, che un'altro v'impiegherebbe a calare per la semicicloide CPB, come il doppio diametro di un cerchio alla sua circonferenza, o come il diametro alla semicirconferenza, C. B. D.

PROP. C. TEOR.

§. 464. *Se la gravità di un corpo sia come la distanza dal centro S, e dal rotolamento del circolo DCH entro la concavità dell'altro MHP, che abbia S per centro, descrivasi l'Epicycloide inferiore MCA (b): questa curva sarà la isocrona in tal ipotesi di gravità.* Fig. 70.

Dim. A sia il vertice di questa Epicycloide, ed S il centro delle forze. Sulla retta SA, che unisce cotesti punti, siavi descritto nel

T 2

pia-

(a) *Pren. VI.*

(b) *Vedi Pren. XVI.*

piano SPM il triangolo rettangolo SRQ scala delle forze centripete per la proposta ipotesi (87). Nel perimetro della stessa curva ACM si prenda ovunque il punto C, e l'idei cerchio generatore si trovi nel sito HCD, quando il suo punto *descrivente* cada in C. Si unisca il centro S delle forze col centro E di questo cerchio, e si meni da C la CK perpendicolare sulla SE. Ed in fine congiunta la retta SC si descriva col centro S intervallo SC il cerchio CR.

Ciò premesso, essendo (a) SC^2 uguale ad SD^2 , a DC^2 , ed al rettangolo di $2SD$ in DK ; sarà (tolto SD^2 d' ambe le parti) $SC^2 - SD^2$ uguale a DC^2 una col rettangolo di $2SD$ in DK . Ma le rette SC, SD sono rispettivamente uguali ad SR, ed SA (b): ed è poi DC^2 uguale a $2DE$ in DK . Dunque sarà $SR^2 - SA^2$ uguale ai due rettangoli di $2DE$ in DK , e di $2SD$ in DK , cioè al solo rettangolo di $2SE$ in DK (c). E sarà $DC^2 : SR^2 - SA^2 :: DE : SE :: 4SE . DE : 4SE^2$.

Si prenda SF terza proporzionale in ordine ad SA, ed SP; sarà $SF : SA :: SP^2 : SA^2$, e convertendo $SF : FA :: SP^2 : SP^2 - SA^2$. Ma distesa la retta SE, finchè tocchi il cerchio

(a) Prop. 11. El. II.

(b) Com'è chiaro dalla genesi di tal curva.

(c) Prop. 1. El. II.

chio MP in H, le due SP, SA pareggiano queste altre SH, SD: dunque sarà $SP^2 - SA^2$ uguale ad $SH^2 - SD^2$, cioè a $4SE$ in ED (a). E quindi sarà $4SE$ in DE ad SP^2 , o ad SH^2 , come FA ad SF.

E poichè dalla natura dell'Epicicloide ACM (b) sta $CA^2 : CD^2 :: 4SE^2 : SH^2$; e si è poi dimostrato esser $CD^2 : SR^2 - SA^2 :: 4SE . DE : 4SE^2$, sarà per equalità perturbata $CA^2 : SR^2 - SA^2 :: 4SE . DE : SH^2$, cioè $CA^2 : SR^2 - SA^2 :: FA . SF$. Ma i quadrati di SR, e di SA, lati omologhi de' triangoli simili SRQ, SAG, son come le aje di questi: dunque sarà dividendo $SR^2 - SA^2$ ad SA^2 , come il trapezio ARQG al triangolo SAG, o al rettangolo di SA in $\frac{1}{2}AG$: e sarà permutando $SR^2 - SA^2 : ARQG :: SA^2 : SA . \frac{1}{2}AG :: 2SA : AG$. Per la qual cosa essendosi dianzi mostrato essere $CA^2 : SR^2 - SA^2 :: FA : SF$, è qui finalmente conchiuso, che sia $SR^2 - SA^2 : ARQG :: 2SA : AG$; sarà (c) $CA^2 : ARQG :: FA . 2SA : SF . AG$: e quindi (456) la curva MCA sarà isocrona. C. B. D.

§.465. DEF. LV. La linea AMB posta verticalmente dicesi *Brachistocrona*, cioè di celere discesa, se quivi fattovi liberamente cadere un grave, ne pervenga dal luogo A all'altro B in minor tempo, che per qualunque altra linea contermine ACB.

Fig. 71.

T 3 §.466.

(a) Prop. 8. El. II.

(b) Prem. I.

(c) Prem. XVI.

§. 466. SCOL. Qui si richiede, che i punti dati A, e B non giacciano in una stessa retta verticale: poichè in tal caso quella retta, che gli unisce, sarebbe la linea Brachistocrona.

PROP. CI. TEOR.

Fig. 71. §. 467. La Cicloide volgare è la curva Brachistocrona nell'ipotesi della gravità costante (a).

DIM. Sia A M B una semicicloide volgare, il di cui asse sia posto verticalmente col verti-

(a) Il Gran Galilei avendo rigidamente dimostrato (Scol. Prop. 36. Dial. III. sul moto), che un grave nel discendere per un' arco di cerchio v'impieghi meno tempo, che a calarne per la dilui corda, ne trasse incauto una conseguenza delle premesse più generale: cioè *lotionem omnium velocissimam* (avrebbe dovuto dire *velociorem*) *ex termino ad terminum non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri*. E quindi non pure da' contemporanei del Galilei, ma da que' Geometri ancora, che possedeano il calcolo degl' infiniti, come dal Leibnitz, da Giacomo Bernulli, e forse dallo stesso Gio. Bernulli (se si fosse imbattuto in questo Teorema del Galilei), teneasi per certo, che il cerchio fosse la Brachistocrona nell'ipotesi della gravità costante. Intanto Gio. Bernulli, ignorando, com'ei scrisse al Dottor Basnage, che la Brachistocrona erasi tentata dal Galilei, ne propose a' Geometri la di lei investigazione, come di una cosa nuova, e che un nuovo metodo esigea nel rinvenirsi. Egli accordò loro il termine di sei mesi da potervisi applicare, spirato il quale avrebbe pubblicato le sue soluzioni. Ma poi in grazia del Leibnitz il prorogò per sei altri mesi, vale a dire in sino a Pa-

rice in giù: io dico, che la discesa libera di un grave per l'arco A B compiasi in meno di tempo, che per l'arco A C B di una qualunque altra linea contermine. Suppongasi, che la

T 4 retta

a Pasqua dell'an. 1697. ed in questo tempo compironsi tre altre soluzioni dai sublimi Geometri Isacco Nevvton, Giacomo Bernulli, e l' Marchese de l' Hospital, che ornavano la Gran Brettagna, la Germania, e la Francia. Delle quali cose eccone breve narrazione.

L'Immortale Nevvton non sì tosto ebbe contezza di questo Problema Bernulliano, (lo che accadde nel princ. dell'an. 1697), che lo sciolse nella più semplice, ed elegante maniera: esibendone la sola costruzione nel n. 224 delle *Filosof. Trans.* E sebbene questo Geometra avesse quivi per eccesso di modestia celato il suo nome; pur nondimeno Gio. Bernulli al percepirne il merito della soluzione il riconobbe.

L'Eruditissimo Leibnitz sciolse ancor egli il rammentato Problema con pari eleganza, e rinvenne, come il Nevvton, che la Brachistocrona nell'ipotesi della gravità costante era la Cicloide volgare. Ma in risolvendolo scoperse alcune belle verità, tra le quali giova rapportarvi la seguente. *I due falli* (dicea Libnitz), *ne' quali incorse il Galilei pel difetto del calcolo degl' Infiniti, cioè l'aver ei creduto esser la Brachistocrona un Cerchio, ed una Parabola la Catenaria, non furono in realtà, che due divinazioni di cose prossime al vero*. Imperocchè la Brachistocrona, che non è un Cerchio, cogli archi di cerchio si costruisce: e la Catenaria sebben diversa dalla Parabola deesi cogli archi parabolici determinare.

La soluzione del Marchese de l'Hospital, che apparve nel Magaz. dell'an 1697 negli *Att. di Lips.* accordavasi perfettamente con quella, che tenea nascosta Gio: Bernulli. Egli al par del Nevvton, e del Leibnitz non vi recò l'Analisi, ed i principj, coi quali aveala determi-

retta AL sia la base della Cicloide: e prendasi in essa curva l'archetto infinitesimo Mm ; e condotte in M, ed m le normali alla curva MK, mK, che si uniscono in K, si prolunghi-

minata; ma in una lettera, che dicesse a Gio: Bernulli, gli confessò sinceramente, che il metodo della soluzione era identico a quello, che dianzi per le *Funicularie* aveane da lui appreso.

Giacomo Bernulli sciolse ancora questo Problema, ma con un metodo, che ne' principi perfettamente combaciavasi con quello del Leibnitz, e che nell'orditura era più involupato del Leibniziano.

Finalmente Gio: Bernulli, che avea proposto a' Geometri il Problema della Brachistocrona, il tenea preso di se risoluto in due maniere, una diretta, indiretta l'altra. Egli col metodo indiretto dimostrò che la Brachistocrona era identica alla curva della rifrazione; onde quella al par di questa esser dovea la Cicloide volgare. Ma la soluzione diretta era guidata da questo principio, „ che non solo l'intera Brachistocrona era trascorsa in un „ tempo brevissimo dal grave, che vi si lasciava cader dentro; ma che ancora ogni d'lei elemento dovea della „ stessa proprietà esser fregiato „. Intanto questo Geometra non pubblicò, che la soluzione indiretta: e contentandosi di comunicar privatamente la diretta al Leibnitz, ed all'Hospital (perciocchè temea, che i suoi rivali non gli avessero involati i stami di un metodo nuovo) la diede finalmente in luce nell'an. 1718.

Il Problema della Brachistocrona se fu chiaro per quel che proponea, e pe' tanti Valentuomini, che vi si applicarono a risolverlo; il sarà mai sempre alla posterità dotta memorando per aver data l'occasione agli Analisti di ritrovar l'insigne metodo de' Massimi, e de' Minimi delle formole integrali indefinite. Questo metodo non è identico a quello che suol proporsi nel calcolo differenziale: ove si vuol determinare la magnitudine

ghino, in sin che incontrino l'altra linea ACB in C, e c. Col centro K intervallo KC si descriva l'archetto circolare Ce, e da' punti C, ed M si calino CG, MD perpendicolari su

dine della variabile x , affinchè una di lei funzione X ottenga il massimo, o il minimo valore; ma a questa più sublime investigazione si destina. „ Una formola „ integrale indefinita sia dinotata per $\int X$, (ove X com-

„ prenda le variabili x, y, z , &c. ed i loro differenziali dx, dy, dz , &c. ddx, ddy, ddz , &c.) „ si dee ritrovare il rapporto delle variabili, affinchè $\int X$ „ diventi un Massimo, o un Minimo.

Dalla Brachistocrona si prefero le primizie di questo metodo; ma una più ubertosa ricolta ne arrecarono le ingegnose ricerche sugl'Isoperimetri fatte dai Geometri Fratelli, e rivali Giacomo, e Giovanni Bernulli. Il Sommo Eulero nel Vol. VI. Att. Ant. Pietrob.; e nell'opera, che ha per tit. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes* cercò di sistemare le regole di questo metodo, e di dar loro la più grande estensione: pur nondimeno, com'egli stesso lo agognava, un tal metodo avea bisogno di esser vie più semplificato, e generalizzato. Dunque l'acutissimo Signor Luigi de la Grange soddisfacendo a' voti degli Analisti diede nel Vol. II. dell'Acc. di Turin. la massima nettezza ed universalità al divisato metodo, com'ei suol fare in tutte le sue produzioni. Sicchè lo stesso Eulero, quasi ripudiando l'orditura del suo metodo, non ha isdegnato d'illustrar quello del Sig. de la Grange: pubblicando gli *Elementi del Calcolo delle variazioni* nel III. Vol. del suo Calc. Integr. e nel X. Vol. degli Att. Nuov. Pietrob. E quindi (se mi lecito qui alquanto digredire) se l'Italia ne' tempi verusti vide nascervi nelle regioni Meridionali il Principe de' Geometri Archimede, ed al rinascere delle Scienze ammirò nell'Etruria il Galilei Padre de' Contemplatori

su di AL . Sarà NM metà di KM (a): onde bisecata la MC in O , sarà eziandio NO metà di KC . E finalmente se prendasi Nf media proporzionale tra NM , ed NC ; questa sarà minore di NO , (ch'è metà di KC), o ch'è la semisomma di NM , ed NC (b).

Ciò posto pe' triangoli simili KMm , KCe sta $Mm : Ce$ come $KM : KC$, o come $NM : NO$. Ma la ragione di NM ad NO è minore di quella di NM ad Nf , cioè della sudduplicata ragione di NM ad NC , o della sudduplicata di MD a CG (essendo tra se simili i due triangoli NMD , NCG). Dunque sarà Mm a Ce , o alla sua uguale Cc in minor ragione della sudduplicata di DM a GC , cioè della velocità acquistatasi da un grave nella libera discesa per AM , a quella ch'ei si acquisterebbe per AC . Facciassi intanto come la prima di queste velocità alla seconda così Mm a Cq , che sarà minore di Cc . Dunque (15). sarà il tempo per Mm a quello per Cc come Mm a Cc , e come Cq ad Mm , cioè come Cq minore a Cc maggiore. Sic-

tori della Natura; or ne gioisce, che il Principe degli Analisti il Sig. de la Grange nato nella dilei parte Settentrionale, dopo aver sostenute le Accademie Reali di Torino, e di Berlino, l'è ormai divenuto ornamento dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

(a) *Pren. XX. n. 1.*

(b) Questo è chiaro dalla sola maniera, onde si ritrova la media proporzionale. *Prop. 13. El. VI.*

Sicchè il tempo per Mm l'è minore di quello per Cc , e'l tempo intero per AMB il sarà ben anche minore di quello per ACB . $C. B. D.$

C A P. XIX.

DELL' OSCILLAZIONE DE' PENDOLI.

§. 468. DEF. LVI. *Pendolo o corpo funependolo* Fig. 72.
appellasi il grave RC , che in forza del suo peso può reciprocare le sue discese, e salite intorno al punto C , ov' è sospeso.

§. 469. DEF. LVII. Il punto immobile C dicesi *centro di rotazione*, o *punto di sospensione*.

§. 470. DEF. LVIII. La discesa del Pendolo CR per l'arco NR , e la di lui salita per l'altro RO , dicesi *Vibrazione*, ovvero *Oscillazione del Pendolo*.

§. 471. DEF. LIX. *Pendolo semplice* è quello, che si concepisce come una verga sottilissima, diritta, rigida, e priva di gravità, e che nel solo estremo inferiore abbia concentrato un peso.

Tal è per appunto il pendolo CR , ove si consideri la sua asta come una retta geometrica, e che nel suo estremo R abbia rammasato un peso.

§. 472.

§. 472. DEF. LX. Ogni Pendolo, che non è semplice, dicesi *composto*.

§. 473. DEF. LXI. Quella retta orizzontale, che dal punto di sospensione di un Pendolo conduce nel piano, ov' egli oscilli, si chiama *Asse di Oscillazione*.

§. 474. DEF. LXII. Quel punto di un Pendolo composto, che tanto disti dall'asse d'oscillazione, quant'è la lunghezza di un pendolo semplice isocrono ad esso pendolo composto, si dice *Centro d'oscillazione*.

§. 475. Vale a dire le vibrazioni di un pendolo composto sono isocrone a quelle, ch'ei farebbe, se l'intera gravità delle sue parti s'intendesse riunita nel suo centro di oscillazione. Ed in questo modo potrebbesi anche formare quest'ultima definizione.

§. 476. SCOL. De' Pendoli semplici solamente io qui ragiono: e nella seconda parte della Statica mi riservo a trattar de' Pendoli Composti, de' loro centri di oscillazione, e di altre cose affini.

PROP. CII. TEOR.

§. 477. *Il Pendolo CR se mai si rimuova dal sito verticale, e poi si lasci cadere; dee vibrar circolarmente intorno al punto C di sospensione.*

DIM. Cotesto pendolo rimosso dal suo perpendicolo all'angolo $R\ C\ N$, se mai si lasci a se stesso, dee piombare per l'arco NR al punto infimo R : acquistando in siffatta discesa tanta velocità, ond'è obbligato a risalire per l'arco circolare RO al punto O tant'alto sull'orizzonte, che l'altro L . Arrivato in O ei fermerassi poch'istanti, e quindi forzato dal suo peso ricaderà per l'arco OR : e nel punto infimo di questo acquisterà tanta forza, sicchè dovrà ascendere per l'arco RN . Dal punto N il pendolo di bel nuovo discenderà in R , e da R monterà ad O . E perpetuerebbe eternamente coteste oscillazioni, se la frizione del filo intorno al perno C , e la resistenza dell'aria affievolendo il suo moto non riducessero alla quiete. $C. B. D.$

PROP.

PROP.

PROP. CIII. TEOR.

Fig. 63. §. 478. *Le forze acceleratrici di un pendolo, che vibra in archi circolari, sono come i seni degli archi, che gli restano a descrivere in sino al punto infimo.*

E le velocità, ch' esso pendolo acquista nel punto infimo, sono come le corde degli archi, dond' è disceso.

DIM. PART. I. La dimostrazione della prima parte rilevasi immediatamente dal Cor. II. Prop. XCIII; ond' ella può qui omettersi.

PART. II. E poichè tanta velocità acquista il pendolo calando per l'arco RE, quanta ne otterrebbe discendendo per l'altezza di esso PE: e tant'altra ne acquisterebbe nella discesa per BE, quanta gliene verrebbe in calando verticalmente per DE (262); saranno queste velocità in sudduplicata ragione delle riferite PE, DE (153.n.1); cioè per la natura del circolo BER, come le corde RE, BE degli archi descritti RE, BE (a). C. B. D.

PROP.

(a) Prop. 31. El. III. e Cor. Prop. 8. El. VI.

PROP. CIV. TEOR.

§. 479. *Se due Pendoli oscillino in archi circolari simili, le durate delle loro vibrazioni saranno in ragion sudduplicata delle lunghezze di essi.*

La Dim. di questo Teorema è identica a quella della Prop. XCV.

PROP. CV. TEOR.

§. 480. *I numeri delle Oscillazioni, che due Pendoli vibrando in archi circolari simili compiono in un dato tempo, sono in sudduplicata ragion inversa delle loro lunghezze.*

DIM. Il numero delle Oscillazioni, che fa un Pendolo in un dato tempo, sta al numero delle vibrazioni, che un' altro ne compie nello stesso tempo, come la durata di una di queste alla durata di una di quelle. Ma queste durazioni, avvegnachè i Pendoli suppongonsi vibrare in archi circolari simili, sono (455) nella sudduplicata ragione delle lunghezze de' medesimi Pendoli. Dunque i numeri delle oscillazioni, ch' essi Pendoli compiono in uno stesso tempo, sono in sudduplicata ragione inversa delle loro lunghezze, quando gli archi descritti sieno simili fra loro. C.B.D.

§. 481.

§. 481. COR. Per la qual cosa se mai un Pendolo della lunghezza di 4 palmi compia in un minuto 60 oscillazioni; un' altro di un palmo, vibrando in un' arco circolare simile a quello del primo, dovrà farne 120 in un minuto: imperocchè 60, numero delle oscillazioni del primo, sta a 120, numero delle oscillazioni dell' altro, come 1 a 2, cioè come la radice quadrata della lunghezza di questo pendolo alla radice quadrata della lunghezza di quello.

PROP. CVI. TEOR.

§. 482. *Le Oscillazioni, ch' esegue un Pendolo per archi Cicloidali, sono isocrone.*

La Dimostr. di ques. Teor. è una conseguenza immediata di ciò, che si è detto nella Prop. XCVIII.

§. 483. SCOL. I. L' ingegnossissimo Cristiano Ugenio, cui deesi la gloria di aver caricati di pendolo gli oriuoli, si avvide, che le vibrazioni per archi cicloidali erano le sole isocrone nell' ipotesi della gravità costante; e che conveniva determinare il modo, onde un pendolo potesse girne nel perimetro della Cicloide, affinchè il tempo venisse con esattezza misurato. Or questa ricerca, come il potete intendere di leggieri, non era più meccanica, ma geometrica. Con che postosi il Valentuomo a spe-

speculare le insigni proprietà, di cui va fregiata la Cicloide, vi rinvenne, ch' ella può generarsi dall' evoluzione di un' altra a lei simile ed uguale (a): ond' ei per riuscir nel suo intento guidossi nel seguente modo.

„ Prese due lamine semicicloidali C N A ,
 „ C M B scanalate nelle parti convesse, e Fig. 74.
 „ ch' eran simili fra loro, ed uguali: le
 „ adattò poi, che si toccassero ne' punti estre-
 „ mi delle loro basi, cioè in C: e che la
 „ loro comun tangente in questi punti giaces-
 „ se verticalmente. In fine ei sospese in
 „ mezzo ad esse il filo flessibile C N F uguale
 „ a ciascuna lamina, ed avente all' estremo
 „ il peso F „. Egli è chiaro da siffatta co-
 „ struzione, che il pendolo C N F spinto dal-
 „ l' oriuolo, cui l' è raccomandato, debba impli-
 „ carsi alla lamina C N A, qualora ei sale per
 „ l' arco R A, e svilupparsene nel discendere. E
 „ che salendo per l' arco R G B debba avvolgersi
 „ all' altra lamina C M B, e da questa svilupparsene
 „ in discendendo: e così segnar la Cicloide A R B.

§. 484. SCOL. II. Quantunque la Cicloide vol-
 gare, come si è dimostrato nella Prop. XCVIII,
 sia una curva perfettamente isocrona; pur non-
 dimeno le vibrazioni de' Pendoli per archi ci-
 cloidali non sono equidiurne, nè quindi all'
 esatta misura del tempo adattate. Imperocchè
 l' aria, che offre sensibile resistenza al pendo-

Tom. I.

V

lo

(a) *Pren. XIX.*

lo mosso velocemente per la Cicloide, la frizione di esso intorno al perno, da cui è sospeso, il continuo stropicciamento del filo colle divise lamine, alle quali in ciascuna oscillazione or se ne svolge, or si avviluppa, ed altre cagioni esterne turbano grandemente l'isocronismo. Onde i Meccanici per l'esatta misura del tempo han dovuto prevalersi delle oscillazioni per archi minimi di cerchio, delle quali fa mestiere, ch'io qui v'esponga compiutamente, ed in breve la Teoria.

PROP. CVII. TEOR.

Fig. 73. §. 485. *Le oscillazioni, ch' esegue il Pendolo CB negli archi circolari minimi BAQ, bAq, sono isocrone (a). E' il tempo di ciascheduna oscillazione sta a quello della discesa di un grave per la doppia lunghezza di esso Pendolo, come la semicirconfenza di un cerchio al suo diametro,*

DIM. PART. I. Gli archi circolari minimi BA, bA, pe' quali discenda il Pendolo CB, son proporzionali ai loro seni BD, bd, cioè a dire

(a) L'oscillazione delle catene, e de' corpi legati a fili flessibili l'è stata una degna occupazione de' Sublimi Geometri di questo Secolo. Il Sig. Daniele Bernulli, e Leonardo Eulero ne han date più dissertazioni negli *Att. Acc. di Pietrobb.* e 'l Sig. de la Grange nell. pag. 241. *Mech. Analyt.* ha scritto con pari eleganza sullo stesso soggetto.

dire (447) alle forze, che lo accelerano ne' punti B, e b. Dunque queste forze son come gli archi, che deve il pendolo descrivere in sino all'infimo punto A. E quindi tanto le discese del pendolo per gli archetti minimi BA, bA, che le vibrazioni di esso pe' loro dupli BAQ, bAQ saranno (170) isocrone.

PART. II. Supponete, che un grave discenda naturalmente per la RA diametro del cerchio BAQ, e che un' altro corpo si muova per la metà dell' archetto BbA costantemente animato dalla forza, che accelera il pendolo in B. Saranno (445) le forze acceleratrici di quel corpo, e di questo, come BC a BD, o come RA a 2 BD. Ed i quadrati dei tempi, ne' quali essi descrivono RA, ed $\frac{1}{2}$ BbA coi divisati moti, essendo (110.4) direttamente come gli spazj, ed inversamente come le forze, saranno come RA ad $\frac{1}{2}$ BbA, e come 2 BD ad RA; cioè (a) come RA ad RA, e come 2 BD ad $\frac{1}{2}$ BbA, vale a dire come 2 BD ad $\frac{1}{2}$ BbA, o come 2 ad $\frac{1}{2}$ (essendo l'archetto BbA per la sua picciolezza uguale al seno BD), o finalmente come 4 ad 1. Dunque il tempo della discesa libera di un grave per la RA sta al tempo, che v'impiegherebbe un corpo a descrivere $\frac{1}{2}$ BbA, uniformemente animato dalla forza acceleratrice del pendolo in B, come 2 ad 1. Or il tempo, nel

V 2 quale

(a) *Prin. II.*

quale percorresi $\frac{1}{2}$ BbA colla costante forza; che muove il pendolo in B, sta a quell'altro tempo, ch'esso pendolo, accelerato nella ragione degli archi da descriversi, impiega a discendere per l'archetto BA, (a) come il diametro di un cerchio alla semicirconfenza. Dunque per uguaglianza ordinata sarà il tempo della discesa libera di un grave per la doppia lunghezza del pendolo al tempo di una mezza oscillazione di esso, come 2 ad 1, e come il diametro alla semicirconfenza, cioè come il diametro al quadrante. E quindi duplicando i conseguenti sarà il tempo della libera discesa di un grave per la doppia lunghezza di quel pendolo, che vibra in archi circolari minimi, ad un'intera oscillazione di esso, come il diametro alla semicirconfenza. C. B. D.

§. 486. COR. I. Essendo costante la ragione della semicirconfenza di un circolo al suo diametro; sarà anche costante quella del tempo di una oscillazione al tempo della caduta verticale di un grave per la doppia lunghezza del pendolo.

§. 487. COR. II. E quindi se in due regioni della nostra Terra i tempi delle oscillazioni di uno stesso pendolo sieno fra loro come m ad n; questa stessa ragione dovran serbare i

(a) Questa verità suolce dalla Propof. XCIX.

tempi, ne' quali un grave quivi discenderebbe da un'altezza dupla della lunghezza del pendolo. Or, quando le altezze sono uguali, le forze acceleratrici deggion esser fra loro nell'inversa duplicata ragion de'tempi (110. n. 3). Dunque in queste regioni della Terra le forze acceleratrici dovranno essere nell'inversa duplicata ragione di m ad n, cioè come n' ad m².

§. 488. SCOL. Il Sig. Richerio volendo osservare nel mese di Agosto del 1672. il passaggio delle Fisse per lo meridiano della Cajenna, isola distante per 5. gr. dall'Equatore terrestre, si avvide, che il suo oriuolo a pendolo quivi givane più lento del moto medio del Sole, cui erasi temperato a Parigi, e che la differenza di tempo montava in ogni giorno a 2', 28". Ei dunque colla guida di replicate osservazioni fu obbligato ad accorciar di una linea ed un quarto la lunghezza di cotesto pendolo, ch'era pied. 3. lin. $8\frac{1}{5}$. Il Sig. Hallei nel 1677 ritrovò, che il suo oriuolo, il quale a Londra oscillava a secondi, più lentamente vibrava nell'isola di S. Elena. Nel 1682 i Signori Varin, e des Hayes rinvennero, che nell'isola Gorea un pendolo dovea esser lungo pied. 3, e lin. $6\frac{2}{3}$ per essere sincro a quello di 3. piedi, ed $8\frac{2}{7}$ lin., che nell'Osservatorio Reale di Parigi oscillava a secondi: e che nella Guadalupa, e nella Martinicca cotesto pendolo dovea essere di pied. 3. lin. $6\frac{1}{2}$. Altri Astronomi in altri tempi, ed in altre regioni del-

della nostra Terra osservarono lo stesso: onde da tante osservazioni siamo sicuri, che la gravità sotto dell' Equatore terrestre sia minore di quella, ch' è sotto a' Poli di nostra Terra, e nelle regioni intermedie.

PROP. CVIII. TEOR.

§. 489. *Qualora due Pendoli semplici ugualmente lunghi vibrino in archi minimi di cerchio; i quadrati de' tempi delle loro oscillazioni son direttamente come le masse, ed inversamente come i pesi degli stessi Pendoli.*

DIM. Le masse di questi pendoli dicansi rispettivamente M ed m , P e p i loro pesi, L la lunghezza di ciascheduno di essi, ed entrambi oscillino in archi circolari minimi nelle regioni R , ed r della nostra Terra; sarà la durata di una vibrazione del primo pendolo (486) alla durata di una vibrazione dell' altro, come il tempo della discesa naturale del grave P per L nel luogo R al tempo della discesa di p per la stessa L nell' altro r . Ed i quadrati di quelle durazioni saranno come i quadrati de' tempi, onde i corpi P , e p qui vi discenderebbero naturalmente per la stessa altezza L . Ma i quadrati di questi tempi sono (110. n.3) inversamente come le forze acceleratrici de' pesi P , e p , cioè (91) come M ad m , e come p a P . Dunque sarà pure il qua-

drato del tempo di una vibrazione di P al quadrato del tempo di un' altra vibrazione di p (quella però fatta nel luogo R , questa in r) come M ad m , e come p a P : cioè direttamente come le masse de' pendoli, ed inversamente come i loro pesi. C. B. D.

§. 490. COR. I. E verificandosi per esperienza, che in una stessa regione della Terra questi pendoli P , e p sempre oscillino in tempi uguali; potrà concludersi, che le loro masse M , ed m seguano la ragione de' pesi P , e p . E questa è la dimostrazione di ciò, che v'indicai nel §. 149.

§. 491. COR. II. Questa proposizione può generalizzarsi nel seguente modo: *i quadrati delle vibrazioni, che in archi circolari minimi eseguon due pendoli, i cui centri di oscillazione equidistano da quei di sospensione, son direttamente come le loro masse, ed inversamente come i pesi.*

§. 492. DEF. LXIII. *Piede orario* è la terza parte di un pendolo semplice, che compie in un secondo una minima oscillazione.

PROP. CIX, PROBL.

§. 493. *Determinare il piede orario in una data Regione della Terra.*

SOL. In questa data regione della Terra un pendolo semplice della lunghezza L (a) oscillando in archi circolari minimi compia in un' ora il numero n di vibrazioni: cioè sia n il numero delle vibrazioni da esso eseguite in $3600''$. Sarà la durata di ciascheduna di lui oscillazione uguale a $(3600'') : n$. Sia intanto x la lunghezza di quel pendolo semplice, che quivi oscilli a secondi, cioè che faccia una minima oscillazione circolare in un secondo; sarà $(479) \sqrt{L} : \sqrt{x} :: \frac{3600''}{n} : 1''$. Ed $x = (nnL) : 12960000$. Dunque un piede orario, ch'è $\frac{x}{3}$, sarà $(nnL) : 38880000$.

§. 494. SCOL. I. Niuna cosa dovrebbe tanto preservare dall'alterazione, quanto le unità delle misure, che ciascun popolo suole adottarsi per

(a) Il centro di oscillazione di una palla ponderosa, che penda da un sottilissimo filo, si rinviene nel seguente modo. Facciasi come la distanza del centro di sospensione e del centro della sfera al raggio della sfera, così questo raggio, ad un quarto; e di questo se ne prendano due quinti. Sarà il centro di oscillazione per questi due quinti più depresso del centro della sfera.

per valutar le altre, e ch'ei sovente è obbligato a quelle delle straniere nazioni rapportare. Ma come mai ella può garantirsi dal tempo edace, e da tante segrete potentissime cagioni, onde frequentemente ne viene alterata? Il solo mezzo dovuto alla perspicacia di Cristiano Ugenio è di regolar queste unità delle misure col piede orario, ch'è una grandezza costante, ed universale presso tutte le nazioni.

§. 495. SCOL. II. Oltre a questo vantaggio, che ritragghiamo da' pendoli, evvi quell'altro di conoscere quanto spazio in un secondo trascorasi da un grave, che si lasci giù cadere nelle vicinanze di nostra Terra. Per intenderne l'artificio basta por mente alla verità della Propos. CVII. Infatti essendo di $881\frac{1}{5}$ lin. parig. la doppia lunghezza del pendolo, che oscilla a secondi (488); sarà $1''$ al tempo della discesa di un grave per $881\frac{1}{5}$ lin. parig., come la semicirconferenza di un cerchio (485) al suo diametro, cioè ad un di presso come 11 a 7. E quindi il tempo della natural discesa di un grave per $881\frac{1}{5}$ lin. parig. sarà $(7'') : 11$. E facendosi come il quadrato di questo tempo al quadrato di un secondo, così $881\frac{1}{5}$ lin. par. allo spazio trascorso in un secondo $(153. n. 1)$; questo sarà pied. par. $157\frac{1}{2}$.

C A P. XX.

DELLA COLLISIONE DE' CORPI.

§. 496. Le forze motrici de' corpi, che si percuotono, con certe leggi vengonsi a modificare. Dunque è ragionevole, che da' principj Meccanici io le ritragga, e distintamente ve le dimostri.

§. 497. DEF. LXIV. Un corpo dicesi *duro*, se comunque premuto, o percosso non cangi di figura (a).

§. 498. DEF. LXV. Chiamasi corpo *molle* quell' altro, che ad ogni urto, o pressione, che gli si arrèchi, comprimesi agevolmente, senza che tenti di racquistare la sua prima figura.

§. 499. DEF. LXVI. Un corpo dicesi *elastico*, se per mezzo della percossa, o della pressione gli si cangi la figura; ma ei può racquistarsela, tosto che l'azion del corpo premente, o percuziente sia cessata. Ed un corpo si dirà *perfettamente elastico*, se la restituzione della

(a) I corpi duri son protetti in Inghilterra, tollerati in Francia, proscritti dalla Germania. E v'è ancora chi dimostra, come il Sign. Beguelin, che ammettendosi de' corpi duri, la legge di *Continuità* non si venga ad alterare.

la figura esegua si con forza uguale a quella, che gli s'impresse.

§. 500. DEF. LXVII. I corpi duri, ed i molli soglionsi chiamare *Corpi inerti*: e que', che sono perfettamente elastici, si dicono semplicemente *elastici*, o *attuosi*.

§. 501. SCOL. In questa disamina i corpi, che si percuotono, si sogliono da' Meccanici considerare come tante sfere, ciascuna delle quali abbia la materia uniformemente nel suo volume distribuita; affinchè il centro di gravità cada in quello della figura.

§. 502. DEF. LXVIII. Un corpo si dice *imbattere direttamente* in un' altro, qualora quello solamente, o tutti e due muovansi nella retta, che attraversi i loro centri, e poi si urtino. Ed in ogni altro caso l'urto sarà *obbliguo*.

§. 503. DEF. LXIX. Il corpo A *incorre* nell'altre B, se questo stia in quiete, o pur si muova lentamente per la stessa direzione di A, che direttamente lo investe.

§. 504. DEF. LXX. Due corpi *incontransi* fra loro, se venendo da parti opposte si urtino direttamente.

§. 505. DEF. LXXI. L' *impressione*, che fa un corpo su di un' altro, è quanto il moto, che si acquista da uno, o che perdesi dall'altro.

§. 506. DEF. LXXII. Dirò *Potenza immateriale* quel principio motore, che si concepisce risiedere in un soggetto sgombro d'inerzia.

§. 507.

§. 507. SCOL. I vapori rammassati in angusto luogo hanno una forza quasi infinita rispetto all'inerzia della materia, ch' essi racchiudono. Un poco d'aria assai condensata, o assai rarefatta acquista un'elatero ben mille volte maggiore dell'inerzia di lei. Ed in simil guisa su di certi altri corpi ragionando può concludersi, che in Natura vi sieno delle Potenze spingenti pressochè immateriali; sicchè queste tali Potenze, che qui ho definite, e delle quali quaggiù mi avvalgo per dimostrarvi con un metodo diretto le leggi della collisione de' corpi, non sono meri concetti della mia mente, ma sembrano aver fondamento in Natura.

§. 508. ASS. La quantità di moto di un corpo è quanto la Potenza immateriale, che quivi varrebbe a produrla.

§. 509. COR. Se il momento del corpo C esprimasi per M, e per P l'energia di quella Potenza immateriale, che avrebbelo prodotto in esso corpo; la velocità di C sarà il quoto, che nasce dividendo P per la massa di C. Imperocchè (70) il momento diviso per la massa ne reca la velocità del mobile.

PROP.

PROP. CX. PROBL.

§. 510. *Esporre un Metodo genuino, onde nell'urto diretto de' Corpi A, e B si possano definire i loro moti dopo dell'urto, dati quelli, che ne avean prima.*

SOLUZ. Il momento del corpo A prima dell'urto è quanto una Potenza immateriale P, che quivi potrebbelo produrre: e l' momento dell' altro B prima dell' urto è anche uguale (508) alla Potenza immateriale p, che varrebbe a produrlo in questo altro corpo. Dunque sostituendo le Potenze immateriali P, e p in luogo delle quantità de' moti de' corpi A, e B prima dell' urto; potrem supporre, che la somma de' corpi A, e B, i quali nell' atto del conflitto tengonsi fermi per poch'istanti, e come uniti fra loro, sia spinta dalla somma, o dalla differenza delle Potenze P, e p, secondochè i medesimi corpi si urtino dalla stessa parte, o a parti opposte (190, 191). Ma, qualora la Potenza $P \pm p$ spinge la massa de' corpi A, e B congiunti fra loro, la velocità che ciascuno di essi ne riceve, è quanto il quoto, che nasce dividendo $P \pm p$ per $A + B$ (70). Dunque la medesima velocità otterrassi ne' corpi A, e B dopo dell' urto, dividendo per l'aggregato di essi la somma, o la differenza de' loro

loro momenti prima dell'urto, secondochè vadano entrambi in ver la stessa parte, o a parti opposte. E di qui poi, moltiplicando la massa di A per questa velocità comune, avrassi il momento di A dopo dell'urto: e moltiplicando la massa di B per la stessa velocità comune, si otterrà il momento di B dopo dell'urto.

Or questo l'è vero ne' soli corpi inerti; ma ne' corpi attuosi oltre a questo moto, che per l'inerzia della materia in siffatto modo loro si distribuisce, un' altro per lo spiegamento delle loro parti ad essi pur si arreca: la di cui quantità, e direzione sarà quaggiù divisa (a).

§. 511.

(a) Gio: Alfonso Borelli insigne Geometra Napoletano fu il primo, che nella sua Opera *de vi percussio- nis* legò a' principj della Geometria il moto emergente dalla collision de' corpi. Ma le nozioni fisiche, ch'egli ebbe su questa Teoria, non furono interamente gradevoli a' Dotti. Sicchè il Dottor Wallis, il Cavalier Wren, e Cristiano Ugenio tre preclarissimi Geometri del secolo trascorso, soddisfacendo ai desiderj della Società Reale di Londra, dimostrarono compiutamente colla Geometria, e co' veri principj della Fisica le regole, onde collidonfi i corpi inerti, e gli attuos, e le confermaron poi colla spe- rienza. Ma ciò non ostante il Sommo Eulero nel *Vol. V. Art. Ant. Pietsrob.* stimò non esser genuine coteste loro Teorie, perciocchè da' principj stranieri son derivate: oltre a che, com'ei soggiunse, vorrebbe quivi additare la cagion vera dell'alterazione de' moti de' corpi percu- zienti, ed esprimerne distintamente il modo, ond'essi agi- scono fra loro. Dunque parmi convenevole, ch'io chiara- mente quì vi spieghi come ciò vada.

Im-

§. 511. DEF. LXXIII. Il centro di gravità de' due corpi A, e B è il punto C nella distan- za AB de' loro centri, ove i dilei segmenti sieno inversamente come le masse di quelli: cioè ove stia $AC : CB :: B : A$.

PROP. CXI. PROBL.

§. 512. Date prima dell'urto le velocità, e le masse di due corpi inerti, de' quali uno di- Fig. 79.
n. 1. rettamente incorre nell'altro; ritrovare le loro velocità dopo dell'urto.

SOLUZ. Muovansi equabilmente i due corpi A, e B per la medesima direzione AO, e l' cor-

Immaginatevi, che il corpo A movendosi per dritto vada ad urtar direttamente nell'altro B, ch'è in quiete. In tal rincontro la solidità di questi corpi non permette- rà, che si abbiano essi a compenetrare, sicchè di due un sol ne risulti di entrambi minore. Nè farà poi possibile, che quello perseveri nel moto, questo nella quiete, come l'inerzia della loro materia l'esigerebbe. Che ne dovrà dunque addivenire? Eccolo. „ La forza motrice del cor- „ po A è quanto una potenza immateriale P, che quivi „ varrebbe a produrla. Dunque potendosi questa a quella „ sostituire, potrà supporfi senza traviar dal vero, che „ nel momento della collisione de' corpi A, e B, (i „ quali tengonsi in questo mentre fermi, e come con- „ giunti fra loro), la Potenza P ne spingesse la som- „ ma delle loro masse. Or, com'è chiaro di per se stesso, „ l'entità motrice della potenza P dovrebbe in tal caso „ diffonderfi nella somma delle masse de' corpi A, e B: „ rimanendone una parte in A, ed un' altra trasfonden- „ dosi in B. Dunque farà anche vero, che incorrendo il „ cor

corpo A inseguendo con maggior velocità il corpo B, lo raggiunga nel luogo O, e quivi lo urti; saranno le loro velocità prima dell'urto come AO, BO. Si prenda de' medesimi corpi il centro di gravità, e sia il punto C. Io dico, che la velocità, ond' essi unitamente si muoveranno dopo dell'urto, debbasi esprimere dalla CO.

DIM. Gli spazj AO, BO insiem descritti da' corpi A, e B, che muovonsi equabilmente, son proporzionali alle loro velocità. Ma per costruzione BC, ed AC disegnano le masse de' corpi A, e B: dunque i due rettangoli di AO in BC, e di BO in AC dovran dinotare le loro quantità

„ corpo A nell' altro B quiescente, una parte della sua
 „ forza motrice, quasi staccandosi da esso abbiane ad in-
 „ vestire l' altro B, ch' è in quiete. Se non che, quan-
 „ do la potenza immateriale P spinge le due masse A,
 „ e B realmente congiunte, e quiescenti, il ripartimento
 „ della forza motrice si fa in essi con una quieta trasfu-
 „ sione, senza che in verun modo si alteri delle loro par-
 „ ti il sito: laddove all' imbattere del corpo A nell' al-
 „ tro B lo stesso scompartimento di forze tra lor si esegue,
 „ ma con una viva impressione, la quale cangia le figure
 „ de' corpi percuzienti, se per avventura sieno essi molli,
 „ o elastici. Or le parti premute de' corpi elastici hanno
 „ un natio potere di restituirsi, e d' imprimerfi una
 „ nuova forza. Dunque in tali corpi dovrà benanche
 „ tenerfi conto della forza, con cui riprendono la primie-
 „ ra figura, e convenevolmente combinarla con quella,
 „ che aveano come inerti. Che se il corpo A imbatta
 „ nell' altro B, che ancor si muova, sarà facile da ciò
 „ che si è detto indagarne i loro moti dopo dell'urto.

tità di moto prima dell' urto (72): e quindi anche il rettangolo di AB in CO, che ad essi (a) è uguale, esporrà la somma delle loro quantità di moto prima dell' urto. Ma i mentovati corpi, avvegnachè inerti, non han forza di risaltare dopo dell' urto: dunque dovran di poi muoversi congiuntamente, come se formassero un sol corpo, e fossero investiti da una sola Potenza immateriale espressa dal rettangolo di AB in CO. Per la qual cosa dinotando AB la somma delle medesime masse; la CO dovrà esporre la loro comune velocità dopo dell' urto (509). C. B. D.

§. 513. COR. I. Se il corpo B fosse in riposo, e l' altro A venisse ad urtarlo direttamente per AB; la loro quantità di moto dopo dell' urto sarà disegnata dal rettangolo di AB in CB; e quindi la comune velocità, che avranno tai corpi dopo dell' urto, sarà espressa da BC. Val quanto dire, *cotesta velocità dopo del conflitto sarà ad AB velocità del corpo in-corrente, come la massa di questo alla massa di entrambi i corpi.*

§. 514. COR. II. Se i corpi A, e B sieno di uguali masse; il centro di gravità di essi dovrà cadere in mezzo alla retta AB: e saranno aritmeticamente proporzionali le tre rette AO, CO, BO. Onde la CO velocità comune de' corpi

Tom. I.

X

dopo

(a) *Prin. XX.*

dopo del conflitto sarà la semisomma delle velocità, ch'essi aveano prima di urtarsi.

§. 515. COR. III. Se il corpo B, ove A ne incorra, sia d'infinita mole rispetto ad esso incorrente; sarà BC di una infinitesima grandezza riguardo ad AC. Dunque in questo caso non vi sarà moto dopo dell'urto.

§. 516. COR. IV. Il rettangolo di AO in BC (come si è veduto in questa proposizione) disegna la quantità di moto del corpo A prima di urtar B; e l'altro di CO in BC è quella, che gliene rimane dopo dell'urto. Dunque la differenza di essi rettangoli, val quanto dire il rettangolo di AC in CB esporrà la quantità di moto, che si è perduta dal corpo A, ed acquistata da B.

§. 517. COR. V. E quindi il rettangolo di AC in CB dinoterà l'energia della percossa recata dal corpo A all'altro B (§. 505).

PROP.

PROP. CXII. PROBL.

§. 518. Date le velocità, e le masse de' due corpi inerti A, e B, che direttamente incontrinsi l'un l'altro; ritrovare le loro velocità dopo dell'urto. Fig. 79.
n. 2.

SOLUZ. Sia C il centro di gravità de' due corpi A, e B, i quali venendo equabilmente dai luoghi A, e B s'incontrino in O, e qui vi collidansi: sarà CO la comune velocità, ond'essi dopo dell'urto si dovranno muovere per la direzione del moto prevalente.

DIM. Imperocchè il rettangolo di AB in CO, ch'è (a) la differenza degli altri due di AC in BO, e di BC in AO, cioè delle quantità di moto de' corpi A, e B prima del loro incontro, può dinotar l'energia di una potenza immateriale, che spinga la somma delle loro masse congiunte fra loro nell'atto della collisione, ed incapaci di risaltare (§. 510). Ma AB rappresenta la somma delle masse de' medesimi corpi: dunque CO dovrà esporre la velocità, onde si moveranno dopo l'urto per la direzione di quel corpo, che ha più quantità di moto dell'altro. C. B. D.

§. 519. COR. I. Se i corpi, A, e B sieno uguali; il centro di gravità di loro dovrà giacere

X 2

(a) Pren. XX. e cost. Probl. prec.

cerne in mezzo ad essi, come è il punto c . Dunque la velocità di questi corpi dopo del loro incontro sarà la semidifferenza delle velocità, ch'essi ne avean prima. Imperocchè la cO , come appare dalla Geometria, è la semidifferenza delle due AO , BO .

§. 520. COR. II. Se i due corpi s'incontrino nel centro di gravità C ; non vi resterà moto dopo dell'urto, ed essi corpi quivi si fermeranno. E perchè in tal caso le velocità prima dell'urto esser debbono inversamente come le masse de' corpi, che s'incontrano; ne seguirà la quiete in due corpi, che direttamente s'incontrino con uguali quantità di moto.

Fig. 77. n. 2. §. 521. COR. III. Suppongasì il momento del corpo A maggiore di quello dell'altro B , sicchè dopo l'urto si abbiano essi a muovere colla velocità CO per AO ; sarà il rettangolo di BC in AO , ch'è il momento del primo, maggiore del rettangolo di AC in BO , ch'è il momento dell'altro. Dunque sarà BC ad AC in maggior ragione di BO ad AO : e l punto O cascherà tra C , e B . Ed esprimendo i rettangoli di BC in AO , e di BC in CO i momenti del corpo A prima, e dopo dell'urto; la differenza di questi momenti, cioè l'impressione, che (505) arreca al corpo A incontrando B , sarà espressa dal rettangolo di BC in AC .

PROP.

PROP. CXIII. PROBL.

§. 522. Date le velocità, e le masse de' due corpi A , e B perfettamente elastici, di cui il primo incorra nell'altro; si addimandano i loro moti dopo dell'urto.

Fig. 77. n. 1.

SOLUZ. I corpi A , e B perfettamente elastici si partano da' luoghi A , e B per la direzione AO : e l primo di essi, che dell'altro sia più veloce, lo raggiunga in O : ed in C cada il centro di gravità di questi due corpi nel principio del lor cammino. Ciò posto si prenda 1. la retta CT , o Ct differenza delle due CO , e CA , e questa si segni a destra del punto C , se mai CO sia maggiore di CA ; ed a sinistra, se quella di questa sia minore. 2. Protraggasi CO in Q , fintantochè sia OQ uguale a CB . Sarà dopo l'urto CQ la velocità del corpo B per la direzione CQ ; e CT , o Ct la velocità dell'altro A mosso per la direzione CT , o Ct .

DIM. I due corpi A , e B nel momento, che si urtano, sono come non elastici: onde il primo avrà la quantità di moto espressa dal rettangolo di CO in CB , e l'altro per quantità di moto il rettangolo AC in CO . Ma appena fatta l'impressione della forza dal corpo A nel corpo B , mutansi le diloro figure con tanta forza, con quanta il corpo A ha agito nell'altro B , cioè (517) colla forza espres-

sa dal rettangolo ACB . Dunque, per la perfetta elasticità di essi corpi, colla medesima forza si dovranno restituire le loro figure dopo dell'urto (499). Or dopo l'urto questi due corpi non si possono spiegare verso quella parte, ove si toccano: poichè ivi per le uguali e contrarie azioni e reazioni si tengono quasi fermi, ed immobili. Dunque le parti del corpo A debbonsi spiegare per OA , e quelle del corpo B per OQ : e la forza, onde in entrambi i corpi si esegue un tale spiegamento, sarà proporzionale ad AC in CB . Per la qual cosa il moto che avrà il corpo A dopo dell'urto, sarà come CO in CB meno AC in CB , cioè come CB in CT . Ed essendo CB la sua massa, sarà CT la velocità, ond'ei si moverà per CO , se la differenza di CO , e di CA sia positiva, e per CA , s'ella sia negativa. E 'l corpo B avrà per quantità di moto dopo dell'urto la somma de' due rettangoli di AC in CO , e di AC in CB , cioè il rettangolo di AC in $CO + CB$, o finalmente il rettangolo di AC in CQ : e sarà CQ la velocità, ond'ei dovrà muoversi per BO dopo l'urto. $C.B.D.$

§. 523. COR. I. Sieno i due corpi A , e B uguali fra loro; sarà AC uguale a CB , e quindi la differenza di AC , e CO sarà la stessa, che la differenza di CB , e di CO , cioè quanto la BO : e la somma di CB , e di CO

pareggerà AO , ch'è somma delle due AC , e CO . Dunque essendo uguali i corpi A , e B , si moveranno dopo l'urto colle velocità BO , ed AO . Cioè *quando due corpi sono uguali, ed elastici, ed uno di essi nell'altro incorra, amendue si moveranno dopo l'urto per la comune direzione, scambiandosi fra loro quelle velocità, che ne avean prima.*

§. 524. COR. II. Laonde se il corpo B sia quiescente; dopo dell'urto l'incorrente A resterà in quiete, e 'l corpo B muoverassi colla velocità del corpo A , e per la medesima direzione di esso.

§. 525. COR. III. Sia AC maggiore di CO , sarà il rettangolo di AC in AB eziandio maggiore del rettangolo di CO in AB . Ma questo rettangolo nella Pren. XX. si è mostrato uguale ai due rettangoli di BC in AO , e di AC in BO : dunque questi sono minori del rettangolo di AC in AB . E quindi togliendo da essi il medesimo rettangolo di AC in BO , rimarrà il rettangolo di BC in AO minore della differenza dei rettangoli di AB in AC , e di BO in AC ; cioè del rettangolo di AC nella differenza di AB e BO , ovvero di AC nella differenza di AO e $2BO$. Per la qual cosa, essendo il rettangolo di BC in AO minore del rettangolo di AC nella differenza di AO e $2BO$, starà AC a CB in maggior ragione di AO alla differenza di AO e $2BO$.

§. 526. COR. IV. Dunque perchè il corpo A

dopo dell'urto risalti per la parte opposta, restare la massa del corpo B a quella di A in maggior ragione della velocità di A a questa velocità diminuita della doppia velocità del corpo B.

§. 527. COR. V. L'impressione, che fa il corpo A nell'altro B, allorchè si muovono tutti e due verso la medesima parte colle velocità AO, e BO, si è mostrata proporzionale al rettangolo di BC in AC, cioè al rettangolo della massa del corpo A nella differenza delle velocità AO, e CO, ch'egli ne ha prima, e dopo dell'urto.

PROP. CXIV. PROBL.

Fig. 77. n. 2. §. 528. Date le velocità AO, BO de' corpi elastici A, e B, che partendo dai luoghi A, e B, direttamente s'incontrino in O; ritrovare le loro velocità dopo dell'urto.

SOLUZ. Sia C il centro di gravità de' corpi A, e B, ed O il luogo del loro incontro; saranno AO, e BO le loro velocità prima dell'urto, e CO la velocità, ond'essi congiuntamente si moverebbero, se fossero inerti. Prendasi CE uguale a CO. Io dico, che la retta EA dinoti la velocità del corpo A da E verso A, ed EB quella di B da E verso B.

DIM. Da ciocchè si è detto nel §. 521 il moto perduto si dal corpo A, che dall'altro B nell'affrontarsi in O colle velocità AO, BO, vien

vien espresso dal rettangolo di AC in BC. Onde a questo sarà ben anche proporzionale la forza, che ciascuno all'altro imprime; e quindi ancora quella, colla quale cercano di riacquistare le loro primitive figure. Per la qual cosa essendo BC in CO il moto, che per OB avrebbe dopo l'urto il corpo A come inerte; ed AC in BC quello che dal riprender la primiera figura gli si comunica per OA; sarà la differenza di questi rettangoli, cioè il rettangolo di AE in CB il moto del corpo A per la direzione EA, e la velocità di esso sarà disegnata dalla retta EA (509).

Similmente aggiungendosi al moto del corpo B come inerte, cioè al rettangolo di AC in CO, quello di AC in BC, nato dello spiegamento delle dilui parti per CB, ne risulterà il rettangolo di AC in BE, che disegna il moto del corpo B per la direzione EB. Ma AC rappresenta la massa del medesimo corpo. Dunque EB disegnerà la velocità, ond'ei dopo dell'urto camminerà per EB. C. B. D.

§. 529. COR. I. Se i due corpi A, e B siano tra se uguali, il loro centro di gravità dovrà cadere nel punto medio della loro distanza AB. E quindi EA, ch'è differenza delle due AC, e CE, sarà pur anche differenza delle altre BC, e CO, che a quelle rispettivamente sono uguali: vale a dire, sarà EA uguale a BO. Dippiù la retta BE, che adegua la

som-

somma di BC , e CE , sarà uguale ad AO ; somma delle due AC , e CO .

§. 530. COR. II. Dunque, se due corpi elastici, ed uguali, s'incontrino direttamente; dopo dell'urto dovranno risaltare con iscambiarsi le velocità, ch'essi ne avean prima.

§. 531. COR. III. Se le velocità di cotesti corpi, che s'incontrano, sieno inversamente come le loro masse, il punto O dell'incontro caderà nel diloro comun centro di gravità C . Onde sarà OA la velocità del corpo A , che dopo l'urto diriggesi per OA : ed OB quella, colla quale il corpo B muovesi per OB .

§. 532. COR. IV. Dunque se le masse de'corpi elastici, che direttamente incontrinsi, sieno inversamente come le loro velocità; dopo dell'urto dovranno discostarsi l'un l'altro colle medesime velocità, onde prima si erano accostati.

§. 533. SCOL. I. In questa proposizione ho omissi alcuni casi: poichè agevolmente si possono supplire da chi porrà mente alla di lei costruzione.

§. 534. SCOL. II. Se i moti de'corpi A , e B si vogliano esprimere analiticamente, ne sarà agevole conoscere le velocità, e le direzioni de' corpi A , e B dopo dell'urto, date le masse, e le velocità di loro prima dell'urto. E questa cosa si vuol intender ben anche per l'urto obliquuo, ch'esporrò quì appresso.

PROP.

PROP. CXV. PROBL.

§. 535. Ridurre l'urto obliquuo di due corpi all'urto diretto (a).

SOLUZ. I due corpi E , e D muovendosi dai Fig. 78. luoghi E , e D per le direzioni e colle velocità EB , DA si percuotano obliquamente in A ; si vuol ridurre quest'urto al diretto, perchè si possano conoscere le velocità, e le direzioni di essi dopo l'urto.

Sia GAg un piano, che tocchi i medesimi corpi, ov'essi percuotonsi in A , e su di esso si calino da D , ed E le perpendicolari DG , EF , e si compiano i parallelogrammi $GDR A$, $EFBC$. Saranno dati di specie i due triangoli ADR , $EB C$, poichè son date le direzioni, per cui si muovono i dati corpi prima dell'urto rispetto a GAg . Ma son date eziandio le ipotenuse AD , BE de' medesimi triangoli, come quelle che disegnano le velocità de' dati corpi prima dell'urto: dunque saran dati ben anche i cateti RA , CB di questi triangoli.

Ciò

(a) Varj Opuscoli su argomenti analoghi a questo, che ho per le mani, sono stati scritti da valenti Geometri. Per non riferirli tutti v'indico solamente due Dissert. di Daniele Bernulli *de Corporibus oscillando se se percutientibus*, e *de Percussione excentrica* Vol. VII. e IX. Att. Ant. Pierr. ed un'altra di Eulero *de communicatione motuum in collisione corporum se se non directe percutientium*. Vol. IX. Att. Ant. Pierr. et.

Ciò premesso, la forza DA si scinda nelle due laterali GA , AR : e la BE , forza dell'altro corpo, ancor si risolva nelle sue laterali FA , AC ; saranno RA , AC quelle forze, onde direttamente percuotonsi: e le altre due GA , FA esercitate per direzioni tra se parallele non si comunicheranno in verun modo ai corpi nel momento, in che si urtano. Sicchè l'urto obbliquo per le direzioni DA , EB ridurrassi al diretto per RA , CB colle velocità RA , CB . Si ritrovino dunque (pei probl. préc.) le velocità di questi corpi dopo tal urto diretto, e sieno queste Ar , Bc . Si prendano Ag , ed Af rispettivamente uguali ad AG , ed AF . Si compiano i parallelogrammi $Ar dg$, $Bc ef$, e si tirino le due diagonali Ad , Be . Queste dinoteranno le velocità, e le direzioni de' dati corpi A , e B dopo dell'urto obbliquo.

La dimostrazione intendosi dalla medesima costruzione.

F I N E.

IN-

INDICE DE' CAPITOLI.

<i>Prefazione dell' Autore .</i>	pag. v
<i>Prenozioni Geometriche .</i>	vii

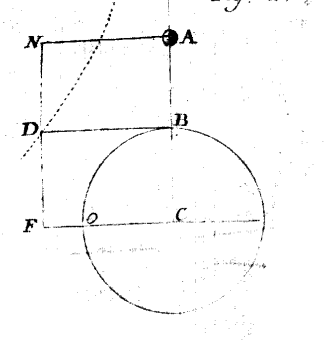
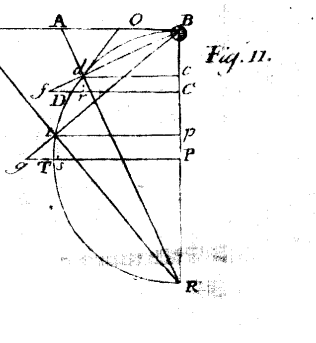
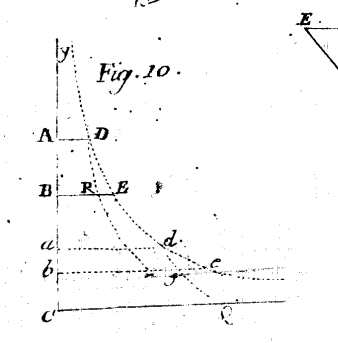
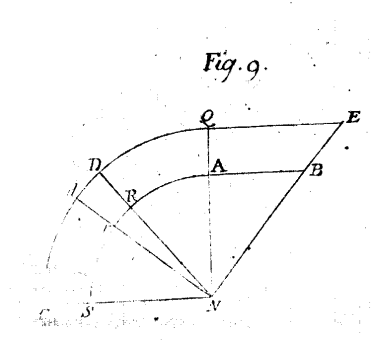
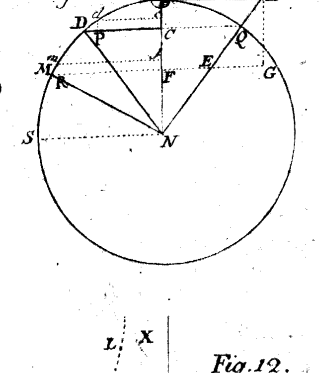
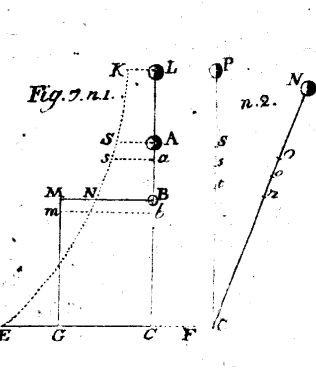
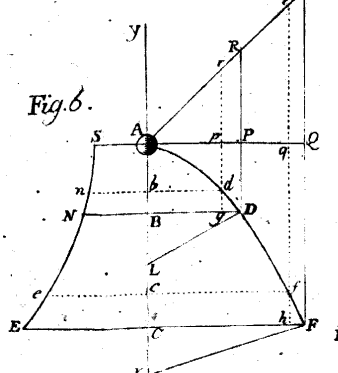
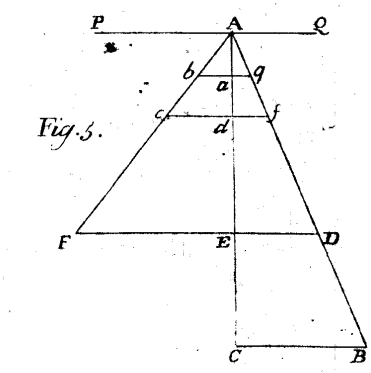
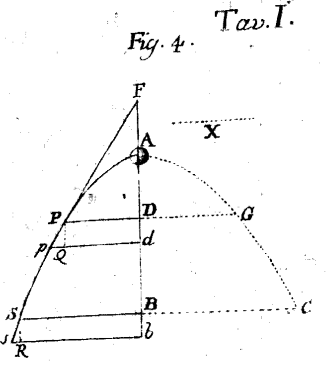
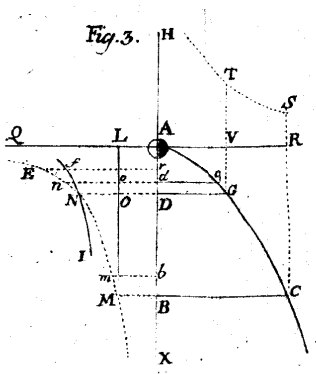
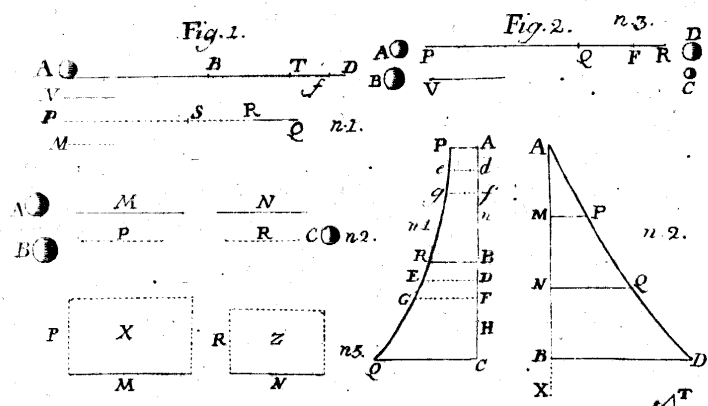
DELLA MECCANICA .

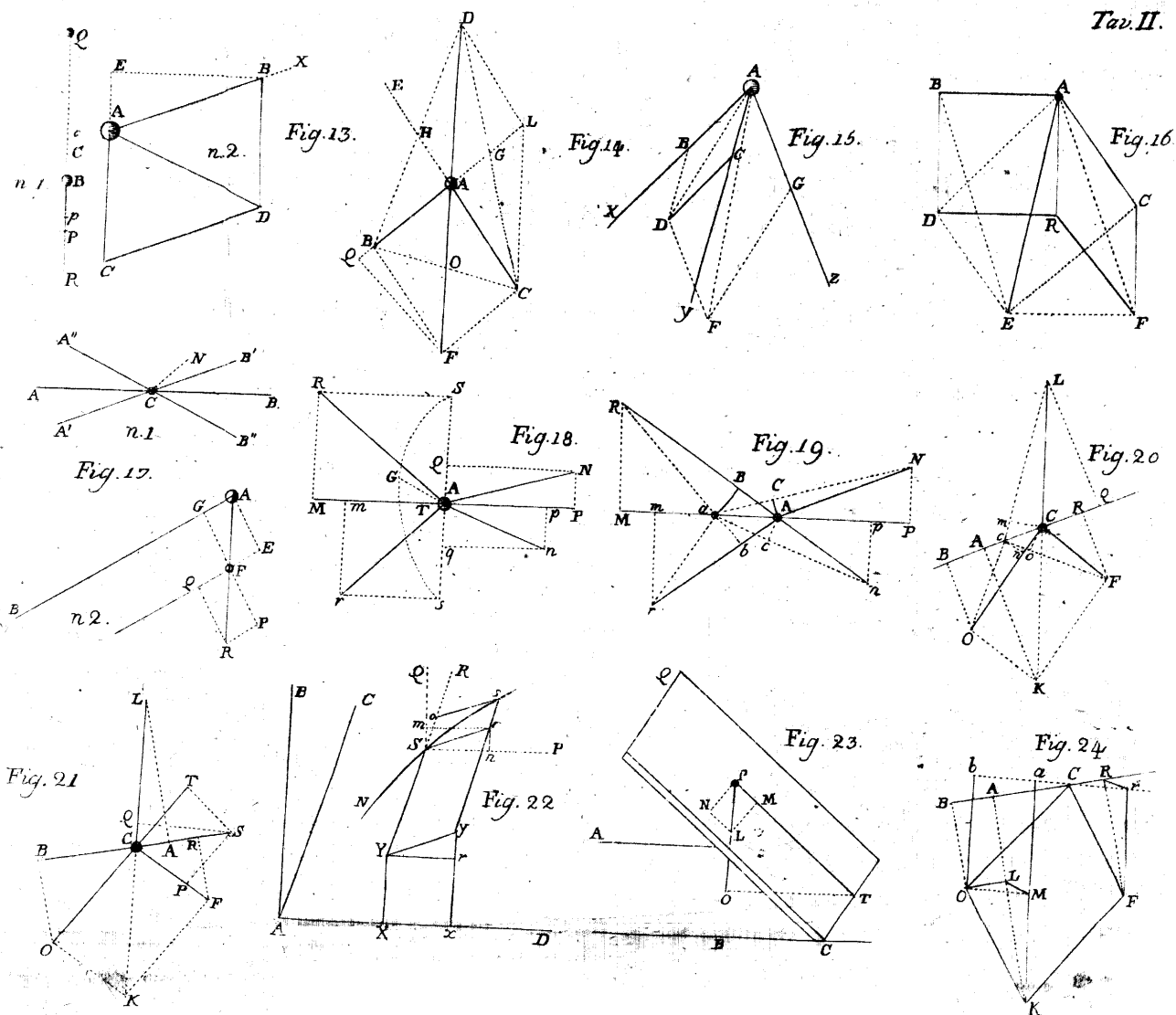
CAP. I.	<i>Del Moto Equabile.</i>	pag. vi
CAP. II.	<i>Teoria Generale del Moto Variabile .</i>	10
CAP. III.	<i>Delle Forze .</i>	24
CAP. IV.	<i>Nozioni delle Forze Centripete.</i>	47
CAP. V.	<i>Rapporto delle forze Centripete ai moti de' Gravi .</i>	54
CAP. VI.	<i>Delle vere Ipotesi di Gravità, che han luogo nella nostra Terra, e de' Moti rettilinei, che ne son determinati .</i>	76
CAP. VII.	<i>Della Composizione delle forze.</i>	102
CAP. VIII.	<i>Principj, che si derivano dalla composizione delle forze .</i>	115
CAP. IX.	<i>Della libera discesa de' Gravi per Piani declivi .</i>	132
CAP. X.	<i>Dell' attrazione de' Corpi sferici.</i>	145
CAP. XI.	<i>Generali considerazioni sul moto de' Corpi, che ne' mezzi liberi si aggirano intorno ad immobili centri delle forze.</i>	157
	CAP.	

CAP. XII.	<i>Risoluzione del Problema diretto delle forze Centrali per le Sezioni Coniche.</i>	180
CAP. XIII.	<i>Soluzione del Problema inverso delle forze Centrali.</i>	205
CAP. XIV.	<i>Del moto de' gravi proiettati dalla superficie terrestre per direzioni non verticali.</i>	217
CAP. XV.	<i>De' movimenti eseguiti in Orbite Ellittiche con forze centripete tendenti ad un comune di loro Umbilico.</i>	237
CAP. XVI.	<i>Delle Anomalie de' Pianeti.</i>	248
CAP. XVII.	<i>Saggio di alcune turbazioni nel Moto de' Pianeti Secondarj, e del movimento degli Assidi.</i>	257
CAP. XVIII.	<i>Della discesa de' gravi per le concavità di quelle curve, e di cui assi son posti verticalmente: e delle Curve Isocrone.</i>	274
CAP. XIX.	<i>Dell'Oscillazione de' Pendoli.</i>	299
CAP. XX.	<i>Della Collisione de' Corpi.</i>	314

E R R O R I

Pag.	vers.	CORREZ.
17	8	Lasciatisi
20	4	La qual cosa
24	16	della
72	11	in A, e B.
85	30	è esattamente 125
122	17	le direzioni delle
128	21	l'adequi, e
151	16	Si calino DE
190	19	all'altro q r S
194	24	forza centripeta in A.
208	6	PROBL.
246	2	di Venere intorno al Sole;
		della Luna intorno alla
		Terra;
256	13	il triangolo MCF:
262	21	l'angolo A c b all'altro
319	13	i due corpi di A, e B





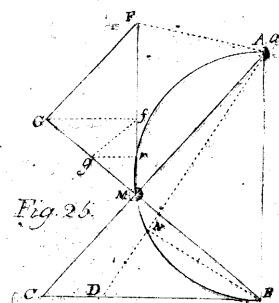


Fig. 25.

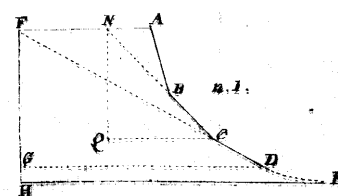


Fig. 26.

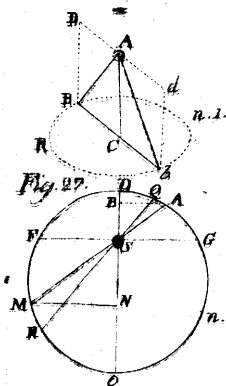


Fig. 27.

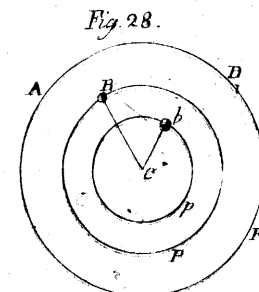


Fig. 28.

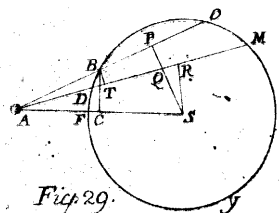


Fig. 29.

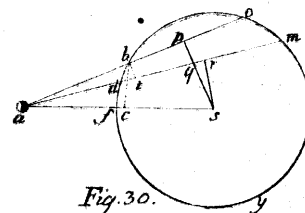


Fig. 30.

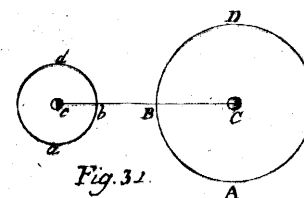


Fig. 31.

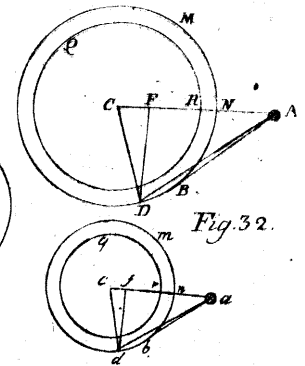


Fig. 32.

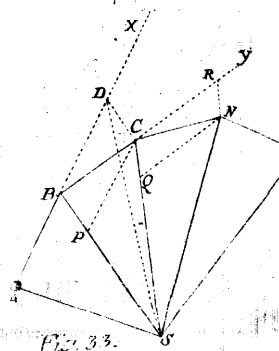


Fig. 33.

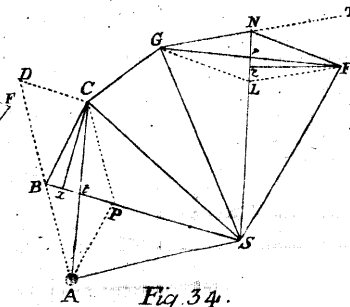


Fig. 34.

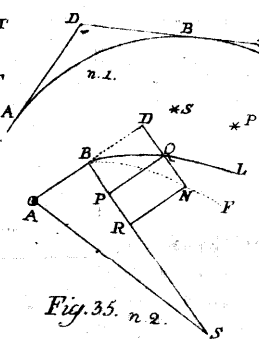


Fig. 35.

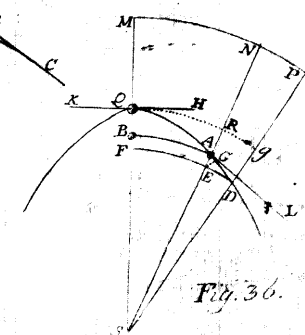
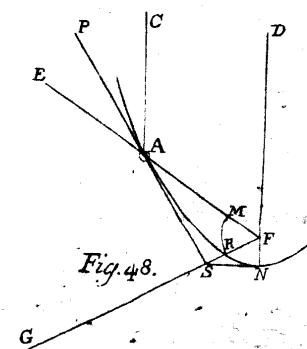
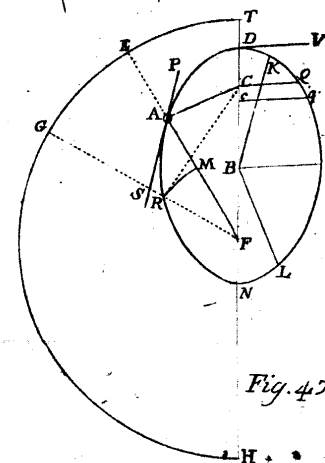
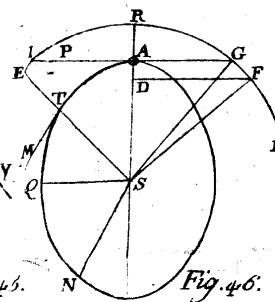
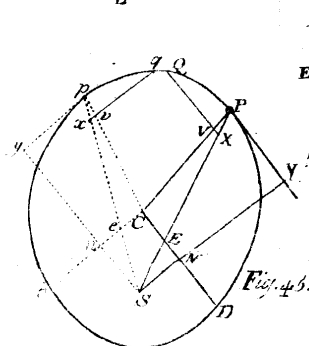
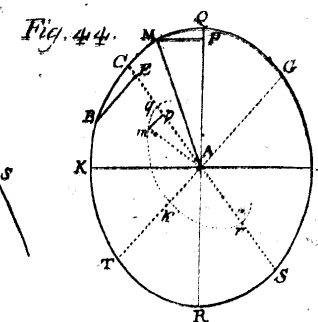
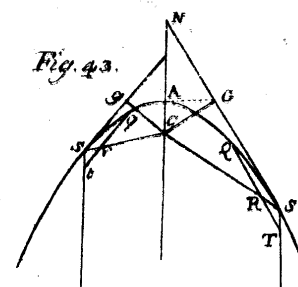
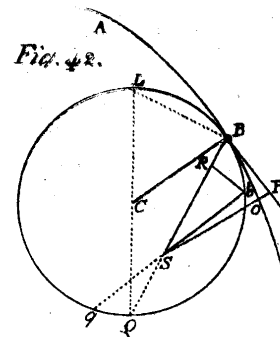
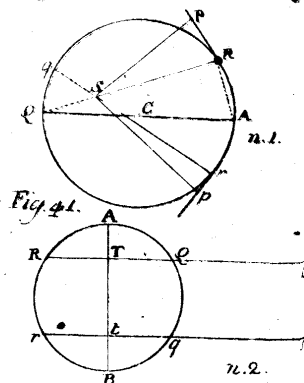
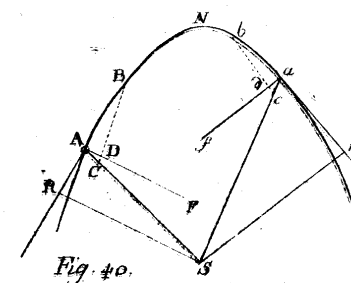
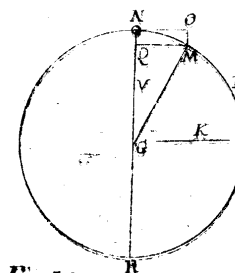
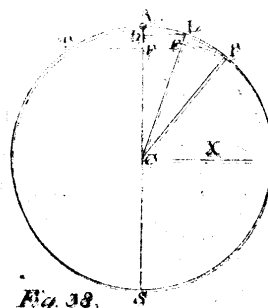
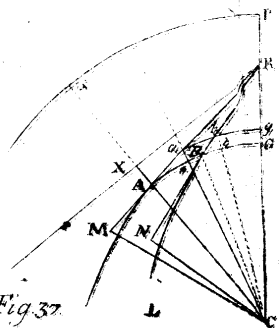


Fig. 36.



Cinereus Incise

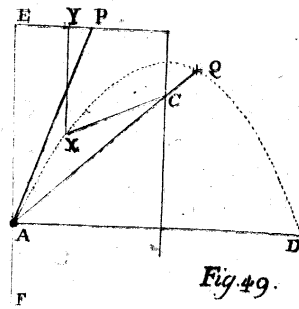


Fig. 49.

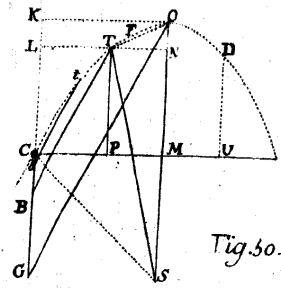


Fig. 50.

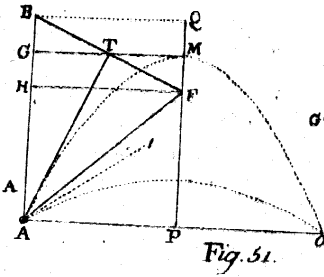


Fig. 51.

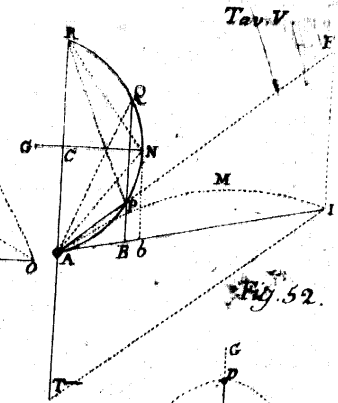


Fig. 52.

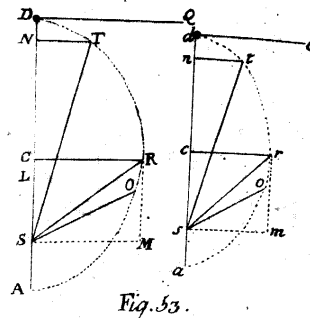


Fig. 53.

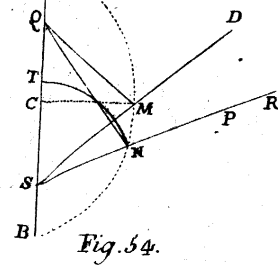


Fig. 54.

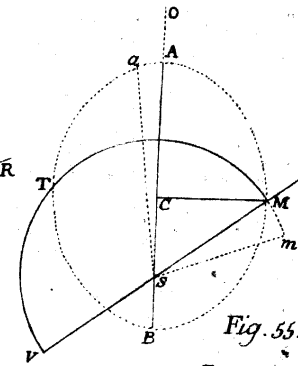


Fig. 55.

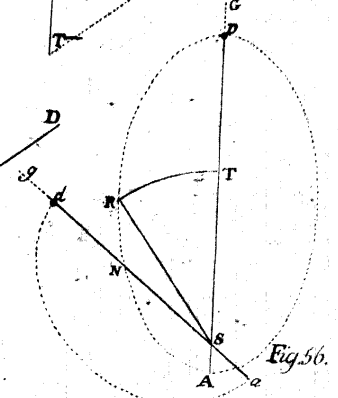


Fig. 56.

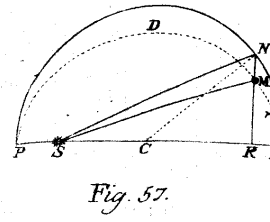


Fig. 57.

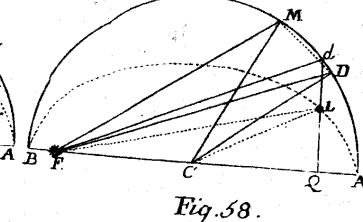


Fig. 58.

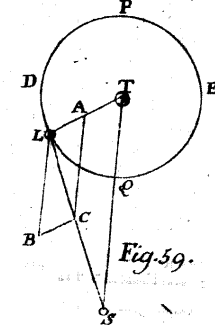


Fig. 59.

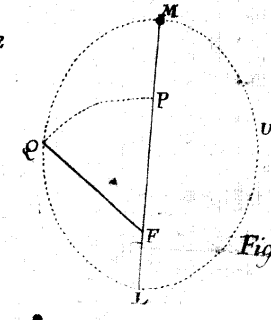
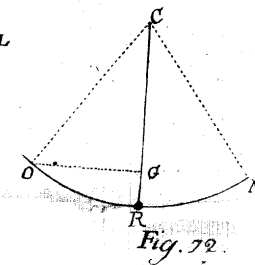
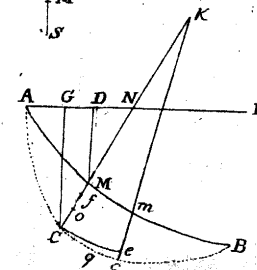
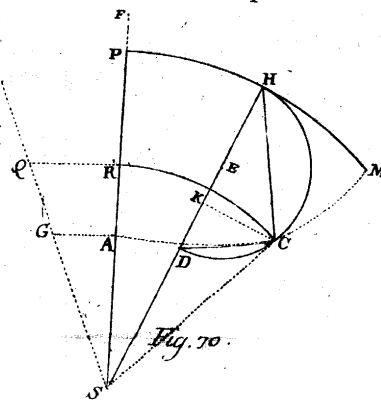
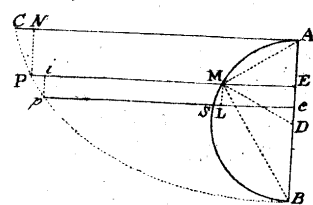
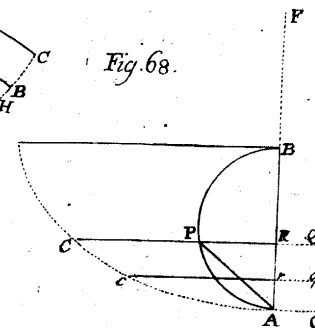
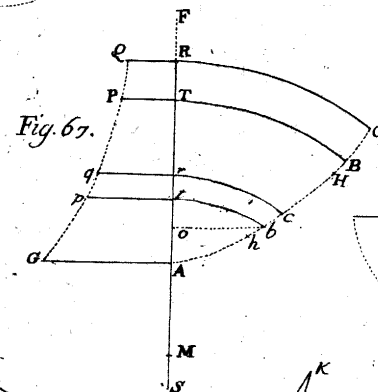
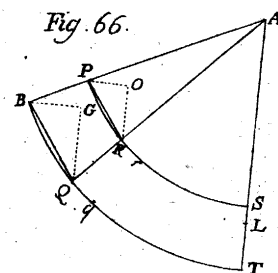
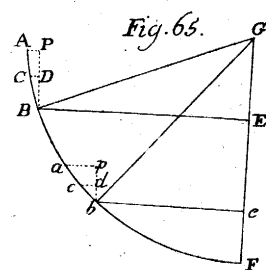
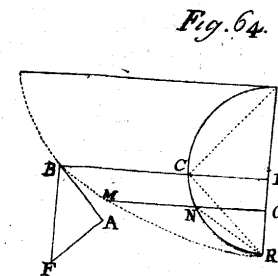
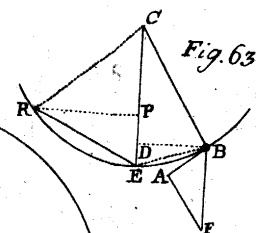
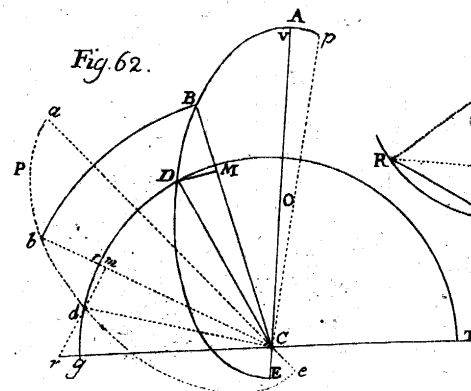
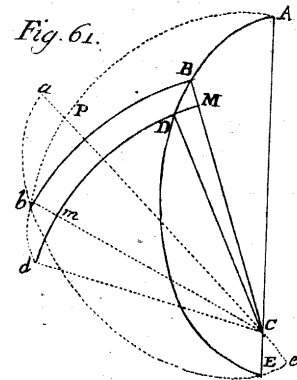
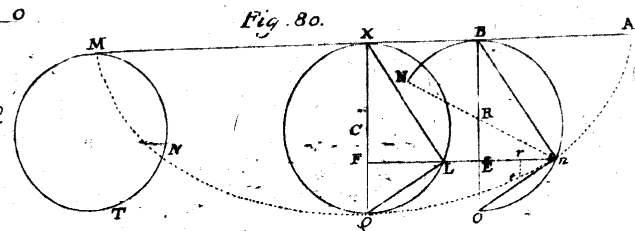
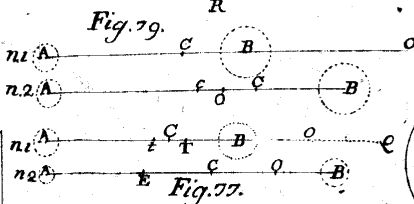
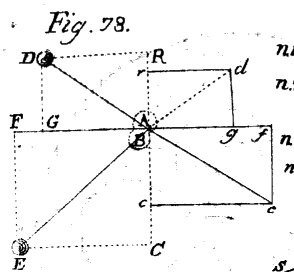
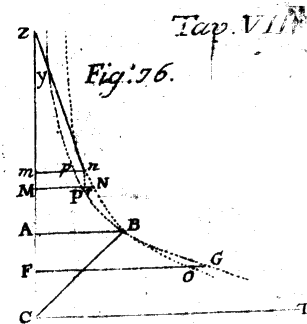
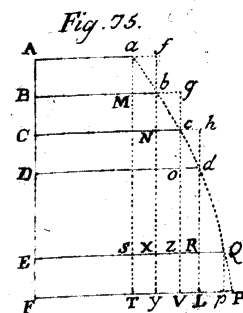
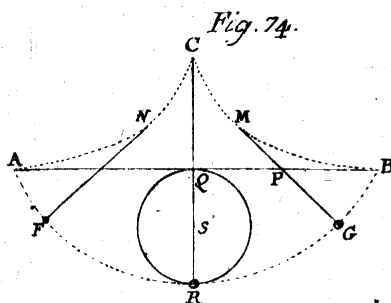
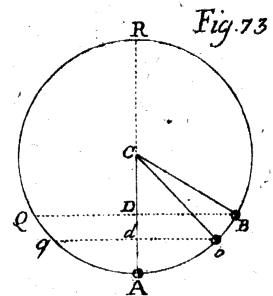


Fig. 60.





M ———
N - - - -
P - - - -

Fig. 81.

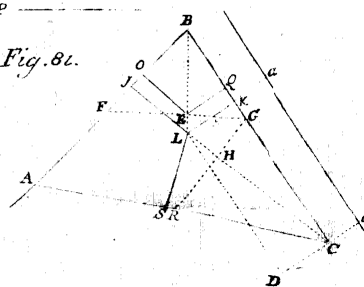


Fig. 82.

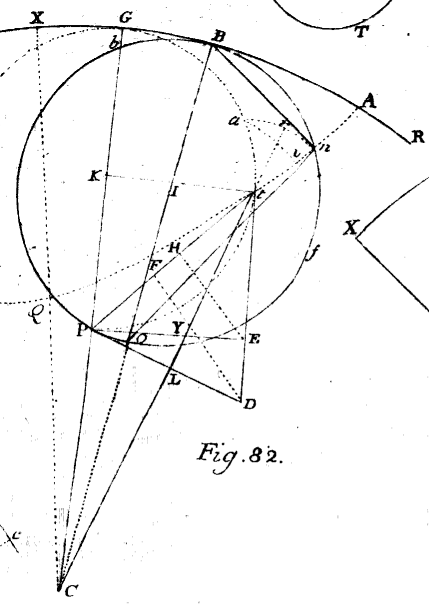


Fig. 83.

