PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL MARCHESE GIULIO CARLO DE' TOSCHI DI FAGNANO,

COMPRESE IN DUE TOMI.

PRODUZIONI MATEMATICHE

DEL CONTE GIULIO CARLO DI FAGNANO, MARCHESE DE' TOSCHI, E DI SANT' ONORIO

NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE

ALLA SANTITA' DI N. S.

BENEDETTO XIV.

PONTEFICE MASSIMO.

TOMO PRIMO.

IN PESARO

L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.

NELLA STAMPERIA GAVELLIANA

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

FA

BEATISSIMO PADRE.

MEntre consacro umilissimamente alla SANTITA' VOTSRA le mie Produzioni Matematiche, sento attenuarsi in me quella vantaggiosa opinione, che suol concepire delle proprie fatiche chiunque si avanza a pubblicarle. Io ben comprendo quanto poco tale offerta convenga ad un tanto Sovrano; o si consideri la grandezza del doppio Principato, che nella di Lei Sacratissima Persona risiede; o si abbia riflesso all' ampiezza di sua Dottrina, che lascia di se monumenti immortali alla Posterità. Tutto questo è valevole a disanimare non me solamente, ma qualunque Ingegno di sicuro volo, che osi esporsi a Lumi sì penetranti. Nientedimeno l' Amor

gene-

generoso di VOSTRA BEATITUDINE verso le Lettere, e l'applaudita Clemenza, onde risguarda chi le professa, m'ispirano il coraggio di presentarle due Volumi, che riceveranno il maggiore, anzi l'unico pregio dalla sua magnanima accettazione: poichè questa sola farà noto ai Viventi, e spingerà più oltre l'oscuro Nome dell'Autore. Egli dunque, benchè infimo tra' suoi Vassalli, ardisce comparire avanti l'Appostolico Trono con omaggio di venerazione, e di riconoscenza: lieto di vivere in un tempo, in cui le Scienze, e le belle Arti sono da un ottimo Pontefice altamente promosse; da un Principe dissi, che sì a quelle, come all' ardue cure del Governo sa estendere del pari gl' illimitati suoi pensieri, e non ama di comandare agli Uomini, se non per renderli più perfetti. Ma non è permesso ad un Geometra l' inoltrarsi ad esprimere il singolare, e l'egregio, che in VOSTRA SANTITA` si ravvisa. Altre formole, che le Analitiche si richiedono al sublime assunto. Sorgeranno più felici Penne ad intraprendere un' opera sì degna, e giusta.

Frattanto i Popoli Sudditi, e Stranieri danno veraci encomj a VOSTRA BEATITUDINE per le Virtù, che veggono regnar seco nel Vaticano, e spandere la loro luce dovunque il Sole la sua diffonde. Commendano essi tra l'altre la nobile Degnazione, che appellar mi giova affabile Maestà: esaltano la Magnificenza, che fa trionfare nel medesimo eccelso luogo una volta destinato al trionfo de' Cesari: ed ammirano quell' eroico, e all' Umanità sì malagevole distaccamento, che sarà il grand' Esempio dell' Età venture. Implorano in fine concordemente la durevolezza de' ſuoi prezioſi giorni: con fiducia, che l'avanzamento della Religione, la ſtabilità della Pace nel Mondo Cattolico, e ciò che di fauſto ne dee ſeguire ſiano eventi riſerbati alle Paterne ſollecitudini della SANTITA' VOSTRA. Uniſce ai comuni preſagj, e voti il fervore de' proprj, e a' ſuoi Santiſſimi Piedi à la gloria di genufletterſi

Di VOSTRA BEATITUDINE

Il fedeliſſimo ſuddito
Giulio Carlo de' Toſchi di Fagnano.

AVVERTIMENTO.

Nella raccolta di questi scritti non si è osservato l' ordine del tempo, in cui furono composti, o pubblicati: nientedimeno è facile a conoscere, che sono stati così distribuiti con qualche discernimento.

I due presenti volumi, oltre le Produzioni già date alla luce dall' Autore, ne comprendono anche di quelle, ch' erano rimaste inedite. Appiè delle prime si nota ove se ne fece già l' edizione, e non si lascia di aggiungere il catalogo dell' une, e dell' altre.

Si stima ancora a proposito di accennare, che avendo Sua Santità commessa la revisione di questa medesima Raccolta fin dall' anno 1743. *ai celebri matematici i Padri Francesco Jaquier, e Tommaso le Seur dell' Ordine de' Minimi, ed essendo il primo passato di poi per qualche tempo in Francia; ne fece il secondo nell' anno seguente la relazione, la quale s' inserisce qui immediatamente, e dopo di essa il catalogo, affinchè da questo, e da quella possa formarsi una tal quale anticipata idea di ciò, che in questi due volumi si contiene.*

RELAZIONE

DEL CHIARISSIMO PADRE

LE SEUR

Esibita nel mese di Maggio dell' anno 1744.

M*Anuscriptum volumen, cui titulus* Generalis proportionum geometricarum Theoria cum aliis scriptis mathematicis Auctore Comite Julio Carolo de Fagnani *legi diligentissime. Illustrissimus Auctor pluribus jam editis dissertationibus orbi erudito notus tria potissimum hoc suo opere complexus est, videlicet proportionum theoriam, triangulorum rectilineorum proprietates, & plura ad calcolum finitarum, infinitesimarumque quantitatum spectantia; a quibus omnium fere veritatum mathematicarum, quæ paulo altioris sunt indaginis, inventio, atque demonstratio pendent. Plurima, & maxime universalia theoremata invenit proprio marte: quæ ab aliis jam erant inventa aut ad majorem universalitatem adduxit, aut suis propriis sedibus restituta novis demonstrationibus munivit: ubique veterum demonstrandi rigorem cum Recentiorum perspicuitate conjunxit. Totum igitur opus tum ob præclara inventa, quæ continet, tum ob methodum accuratissimam, tum ob demonstrationum veritatem, & copiam, rerumque usum amplissimum luce publica dignissimum judicarem.*

FR. THOMAS LE SEUR ORD. MINIM:

CATALOGO
DEGLI SCRITTI
CONTENUTI IN QUESTI DUE TOMI.

TOMO PRIMO.

TO-

TOMO SECONDO.

corun

Addì 2. Dicembre 1747.

Il Remo Sig. GIANNANTONIO SIGONFREDI, Canonico della Cattedrale di Pesaro, e professore di matematica, veda, e riferisca.

GIAMBATISTA PASSERI VIC. GEN.

O' Veduto d'ordine di Monsignor Illustrissimo Vic. Gen. di questa città l'opera compresa in due tomi, il titolo della quale è il seguente: *Produzioni Matematiche del Conte Giulio Carlo di Fagnano, Marchese de' Toschi, e di Sant' Onorio*, ec. e non solo non vi ò letta cosa alcuna, che ripugni a' buoni costumi, al rispetto de' principi, ed alla purità de' dogmi cattolici, ma anzi ò trovato, ch' essa contiene speculazioni profonde nell' Algebra, nella Geometria, e segnatamente nella scienza delle Curve, e che di più vi sono inserte delle nuove scoperte fatte dall' Autore, e tra queste l' invenzione del *nuovo Algoritmo* con leggi diverse da quelle dell' algoritmo comune; laonde non può se non esserne utilissima l' edizione; tanto più che la materia vien trattata con una facilità, e chiarezza maravigliosa, ed atta ad interessare in questo studio tutti gli amanti delle più sublimi, ed utili scienze. Non è questo il primo saggio, che ci dà della sua profonda dottrina questo insigne Scrittore, noto non meno agl' Italiani, che agli stranieri letterati, e riconosciuto da questa nostra provincia per uno de' suoi più belli ornamenti. Resta ch' egli goda prospera, e lunga vita, acciocchè possa darci il vantaggio di altre sue illustri fatiche a benefizio della repubblica letteraria, e a gloria del nostro secolo.

Di casa questo dì 8. Gennajo 1748.

GIANNANTONIO CANONICO SIGONFREDI.

Addì 9. Gennajo 1748.

Attesa la suddetta relazione s' imprima in quanto a noi, ec.

GIAMBATISTA PASSERI VIC. GEN.

Die 9. Januarii 1748.

Committimus Perillustri, & Reverendo Domino HERMETI ANTONIO GUERRIO *J. U. D. examinatori Synodali, ecclesiæ parochialis S. Michaelis Arcangeli Pisauri Abbati, & S. Officii Consultori, ut videat, & referat, an sit aliquid contra fidem, bonos mores, necnon contra principes, &c.*

FR. HYACINT. ANT. MAZZOLI S. THEOL. MAG. AC VIC. S. OFF. PISAURI.

ADmodum Reverendi Patris Hyacinti Ant. Mazzoli Prædicatorum Ordinis Sac. Theol. Magistri, ac S. Off. Pisauri Vicarii jussu opus in duobus tomis divisum, cui titulus: Produzioni Matematiche del Conte Giulio Carlo di Fagnano, Marchese de' Toschi, e di Sant' Onorio, *&c. accurate perlegi, in quo nil prorsus a fide orthodoxa, moribusque christianis, ac principum observantia aversum, nec dissonum inveni, quinimo opus egregium cum stylo brevi, miraque claritate compositum, addiscentibus commodum, doctisque congruum sane conspexi. Ex ædibus meis quinto idus Februarii 1748.*

HERMES ANTONIUS GUERRIUS Abbas S. Michaelis Arcangeli, & S. Off. Consultor.

Die 14. Februarii 1748.

Habita supradicta attestatione concedimus licentiam ut imprimatur.

Ita est F. HYACINTUS ANT. MAZZOLI Vic. S. Officii Pisauri.

PRE-

PREFAZIONE

AL TRATTATO DELLE PROPORZIONI.

DOpo il mio supplimento al quinto libro d' Euclide, che trovasi impresso nella prima parte del Tomo XXXVIII. del Giornale de' letterati d' Italia, giungerà forse inaspettato ai Lettori, che nel presente Trattato delle Proporzioni Geometriche io mi vaglia per ispiegarne la natura non già della proprietà degli Egualmente moltiplici, *ma bensì di quella delle* Aliquote simili. *Nientedimeno la ragione, che mi à mosso a cangiar metodo, sarà da essi facilmente approvata, qualora rifletteranno, che il mio fine in comporre questo libro è stato di rendere più intelligibili le Proporzioni composte, la cognizione delle quali è così utile alla Geometria.*

E' vero, che il dottissimo Padre Gregorio di San Vincenzo à trattato ampiamente delle Proporzioni composte, altro non supponendo, che il quinto libro degli Elementi, ma è ugualmente vero, che dalla proprietà degli Egualmente moltiplici *non si deduce così chiaramente, che la proporzione geometrica sia una specie di grandezza, come s' inferisce dalla* contenenza delle aliquote simili de' conseguenti, la quale ai respettivi antecedenti compete.

Non solamente l' indole delle Proporzioni composte, ma ancora molte proprietà delle proporzioni semplici si spiegano con particolar naturalezza, e facilità mediante questo importantissimo principio, che la Proporzione sia grandezza; e non può abbastanza lodarsi il celebre Autore degli Elementi di Geometria di Porto-Reale, che ne à fatto un sì bell' uso nel secondo, e terzo libro della sua opera, alcune dimostrazioni della quale, e segnatamente quelle de' Teoremi 2, 3, 7, e 8 del secondo libro ò io voluto frapporre per la loro eleganza in questo trattato tra l' altre pruove, che de' medesimi Teoremi vi ò inserte di mia invenzione. Ma siccome le accennate dimostrazioni di quel Geometra dipendono dagli Assiomi 4, e 5 del suo secondo libro, i quali possono, e debbono dimostrarsi anch' essi, così mi è convenuto provarli esattamente, e rettificare in tal guisa le pruove, che da quel libro ò tratte per aumentare il numero delle mie. Il primo di questi Assiomi è, che le proporzioni, le quali anno un medesimo conseguente, sono tra esse come i loro antecedenti.

Il secondo, che le proporzioni, le quali anno un medesimo antecedente, sono tra esse come i loro conseguenti presi con ordine reciproco, o sia inverso.

Ben potrà considerare il perito Leggitore, che non era così facile il dimostrare, come ò fatto, il secondo de' suddetti Assiomi, senza supporre quella maniera d'argomentare, che chiamasi permutando, *ovvero* alternando, *la quale per mezzo appunto di detto Assioma dee provarsi secondo il metodo dell'autore sopralodato.*

Similmente in tutto il corso del presente libro ò posto ogni mio studio per dimostrare con la possibile esattezza le proposizioni, che vi si contengono: e oltre di ciò vi ò provati quasi sempre con maniera nuova gli antichi teoremi, e moltissime volte in più modi, così convenendo ad una scienza, che è il primo fondamento delle matematiche discipline.

O' bensì lasciato quasi sempre in grazia della brevità di addurre degli esempj, bastandomi di aver parlato con tanta chiarezza, che ogni persona non ottusa, la quale userà mediocre attenzione, potrà perfettamente intendermi. Chi vorrà applicarsi alle sole proposizioni elementari, riconoscerà, ch' esse dipendono nel presente trattato dalla connessione di poche proposizioni, e che l' altre servono a chi brama una piena teoria delle proporzioni, al qual oggetto ò presi dal prenominato Padre Gregorio di san Vincenzo molti teoremi, e gli ò per lo più corredati di nuove, e a me proprie dimostrazioni.

Da questa medesima teoria mi à piacciuto dedurre, e dimostrare i principj del calcolo analitico, e parmi di aver ciò eseguito non solo con maggior evidenza, ma ancora più universalmente, che per l' addietro non era stato fatto dagli altri, come resterà agevolmente convinto chiunque confronterà le nozioni generali, che io propongo della moltiplicazione, e della divisione con quelle, che ne anno date sino a questo tempo gli scrittori dell' Algebra.

Nè di ciò contento, ò voluto ancora fondare sui principj da me stabiliti in questo trattato un nuovo *Algoritmo, che forse non sarà disapprovato da' conoscitori, se non per altro, almeno per i lumi, che somministra in ordine alla natura oscurissima di quella sorta di grandezze, che si chiamano* Immaginarie pure.

Se debbono aver lode quei nocchieri, che scuoprono strade differenti dalle praticate per navigare ai remoti paesi, sperar mi giova, che il mio novello *Algoritmo sia per meritarmi il favore degli Analisti; perchè apre loro un cammino diverso dal comune, e valevole a condurli con pari felicità nelle Matematiche.*

Altro non mi resta ad esprimere per dar qualche idea dell' opera, che espongo agl' intendenti; lascio ad essi tutto il diritto, che loro compete, per giudicarne, e solamente desidero, che la medesima riesca di profitto agli studiosi delle più solide scienze, poichè questo è l' unico motivo, che mi à indotto a produrla, e a pubblicarla.

IN-

INDICE

Per trovare in questo Trattato il luogo delle Definizioni, degli Assiomi, de' Corollarj de' Principj, e de' Teoremi.

DEFINIZIONI

ASSIOMI

COROLLARJ DE' PRINCIPJ

TEOREMI

INDICE

Per trovare in questo Trattato la Dimostrazione delle Proposizioni del quinto libro d' Euclide.

Proposizioni del quinto libro d' Euclide.	*Teoremi, e Corollarj di questo Trattato.*
Definizione V.	Teorema CLXXXIX.
Definizione VII.	Teorema CXC.
Proposizione I.	Si riduce all' Assioma IV.
Proposizione II.] Proposizione III.]	Sono lemmi nel Metodo d' Euclide, e Superflue nel mio.
Proposizione IV.	Corollario III. del Teorema XII.
Corollario	Teorema X. Corollario IV. del Teorema XXIV, e Corollario VI. del Teorema XXIX.
Proposizione V.	Si riduce al Corollario XXVII. de' Principj.
Proposizione VI.	E' Lemma nel metodo d' Euclide, e nel mio è superflua.
Prop. VII. Parte I., e II.	Corollario VIII. de' Principj.
Prop. VIII. Parte I.	Corollario XVII. de' Principj.
Prop. VIII. Parte II.	Corollario XIX. de' Principj, e Corollario I. del Teorema IX. Parte I.
Prop. IX. Parte I., e II.	Corollario XXI. de' Principj.
Prop. X. Parte I.	Corollario XVI. de' Principj.
Prop. X. Parte II.	Corollario XVI. de' Principj, e Corollario I. del Teorema IX. Parte II.
Proposizione XI.	Corollario XI. de' Principj.
Proposizione XII.	Corollario XXIV. de' Principj, Corollario II. del Teorema XXXVI., e Corollario II. del Teorema XXXVII. con lo scolio annesso.
Proposizione XIII.	Corollario VI. del Teorema II. Parte II.
Proposizione XIV.	Corollario I. del Teorema XI.
Proposizione XV.	Corollario XXVI. de' Principj, Corollario II. del Teorema XI.
Proposizione XVI.	Teorema XI. Corollario V. del Teorema XXIV. Corollario VI. dello stesso Teorema XXIV., e Corollario II. del Teor. XXIX.
Proposizione XVII.	Corollario XII. del Teorema II.

Propo-

Proposizione XVIII.	Corollario XII. del Teorema II.
Proposizione XIX.	Corollario XXVIII. de' Principj, e Teorema XXXV.
Corollario	Teorema XXXIII. Parte II.
Proposizione XX. Proposizione XXI.	Sono Lemmi nel Metodo d' Euclide, e nel mio superflue.
Proposizione XXII.	Teorema XII., e Teorema XXVI.
Proposizione XXIII.	Teorema XIII. e Teorema XXVII.
Proposizione XXIV.	Corollario XIII. del Teorema II.
Proposizione XXV.	Teorema XXXII.
Proposizione XXVI.	Corollario VI. del Teorema XXIX.
Proposizione XXVII.	Corollario III. del Teorema XXIX.
Proposizione XXVIII.	Corollario XII. del Teorema II.
Proposizione XXIX.	Corollario XII. del Teorema II.
Proposizione XXX.	Teorema XXXIII Parte II.
Proposizione XXXI.	Teorema XXVI.
Proposizione XXXII.	Teorema XXVII.
Proposizione XXXIII.	Teorema XXXV.
Prop. XXXIV. Parte I., e II.	Corollario III. del Teorema XXXVI. Parte I., e II.
Prop. XXXIV. Parte III.	Corollario I. del Teorema XXXVI.

Errori occorsi nell' impressione di questo primo Tomo.

Pag.	lin.	Errore	Correzione.
373.	20.	articolo sesto	articolo VII.
384.	26.	$:\pm(FG)$	$:\pm(F:G)$
446.	1.	$\sqrt[3]{p-\sqrt{p^3-qq}}$	$\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3-qq}}$
493.	8. *in fine*	$-4b6)^{\frac{1}{2}}$	$-4b^6)^{\frac{1}{2}}$
495.	26.	$\pm\sqrt{-9}$	$\pm\sqrt{-s}$

TEORIA GENERALE

DELLE PROPORZIONI GEOMETRICHE.

Significazioni di alcune note, ed eſpreſſioni.

IL ſegno + ſignifica più, cioè addizione, v. g. $A + B$ ſignifica A più B, cioè l' aggregato di A, e di B, ed $A + B + C$ l'agregato di A, di B, e di C, e così, ec.

Il ſegno — ſignifica meno, cioè ſottrazione, v. g. $A - B$ ſignifica A meno B, cioè quello, che riſulta ſottraendo B da A, e $T + S - M$ eſprime ciò, che proviene ſottraendo M dall' aggregato di T, e di S.

Il ſegno ( ) denota, che l' eſpreſſione, la quale è ſcritta fra le due parenteſi, va conſiderata con particolar diſtinzione; v. g. $T + (S - M)$ ſignifica l' aggregato di T, e di ciò che riſulta ſottraendo M da S. L' uſo, che di queſta nota ſi verrà facendo, ne farà meglio comprendere il ſignificato.

Il ſegno doppio $\pm$ ſignifica in una ſola eſpreſſione più, ovvero meno, cioè ſignifica più, ſe ſi fa valere il ſegno +, e ſignifica meno, ſe ſi fa valere il ſegno —; in ſomma il ſegno $\pm$ ſerve per racchiudere i due caſi del più, e del meno in una ſola eſpreſſione, v. g. $A \pm B$ ſignifica nel primo caſo l' aggregato di A, e di B, e nel ſecondo caſo eſprime ciò, che riſulta dal ſottrarre B da A.

Similmente il ſegno doppio $\mp$ ſignifica in una ſola eſpreſſione meno, ovvero più, ec.

Il ſegno $=$ denota, che ciò, che gli ſta ſcritto avanti, è uguale a ciò, che gli ſta ſcritto dopo, v. g. $A = B$ ſignifica, che A è uguale a B, ed $A = B = C$ ſignifica, che oltre l' eſſere A eguale a B, anche B è uguale a C.

Il medeſimo ſegno $=$ qualche volta denota, che quello, che gli ſta ſcritto avanti, è una medeſima coſa con ciò, che gli ſta ſcritto dopo.

Il ſignificato delle altre eſpreſſioni, che occorreranno, ſi eſporrà nel proſeguimento di queſto trattato, e ne' proprj luoghi.

DEFINIZIONE I.

CHiamo grandezza tuttociò, che è capace di aumento, e di diminuzione.

COROLLARIO I.

TUtto ciò, che è diviſibile in parti, è una grandezza, perchè tutto ciò, che è diviſibile in parti, è capace di aumento, e di diminuzione; d'aumento, ſe all'aggregato delle parti, che lo compongono, ſi aggiunge qualche altra parte; di diminuzione, ſe dall' aggregato ſuddetto delle parti ſi toglie qualche parte.

DEFINIZIONE II.

DIco, che una grandezza A è moltiplicata per un numero L, quando la A ſi prende tante volte, quante unità contiene il numero L.

Ciò, che riſulta dal prendere A tante volte, quante unità contiene il numero L, ſi rappreſenta così LA.

Se in luogo del numero L, generalmente rappreſentato, ſi poneſſe un numero particolare in cifra, v. g. 3, allora ciò, che riſulta dal prenderſi A tante volte, quante unità contiene il numero, ſi rappreſenterebbe ſimilmente in queſta forma, $3A$. Ma ſe in luogo ancora di A ſi ſurrogherà un numero particolare in cifra, v. g. 5, allora ciò, che riſulta dal prendere il nume-

numero 5 tante volte, quante unità contiene il numero 3, si denoterà così, 3 . 5.

DEFINIZIONE III.

GRandezze omogenee, ovvero della medesima specie, si dicono quelle, che sono tra loro eguali, ovvero maggiori, o minori, in modo che le minori, moltiplicate per qualche numero, possono superar le maggiori.

SCOLIO.

E' Un principio evidente, il quale non à bisogno di prova, a chi lo considera con attenzione, che se due grandezze *A*, e *B* sono tra loro omogenee, cioè della medesima specie, e un' altra grandezza *C* è omogenea alla *A*, la stessa *C* è omogenea anche alla *B*.

Ovvero più generalmente, che se molte grandezze sono omogenee tra loro, cioè della medesima specie, e una grandezza *C* è omogenea ad una di quelle, la medesima *C* è omogenea a tutte l' altre.

Nel progresso del presente trattato io mi valerò di questo principio, come notissimo, senza citarlo particolarmente.

DEFINIZIONE IV.

DIco, che una grandezza *y* è aliquota d' un' altra grandezza *A*, quando la *y* è contenuta una volta o qualunque numero di volte, e senza resto in *A*. In questo senso ogni tutto è aliquota di se stesso, perchè è contenuto una volta, e senza resto in se medesimo.

DEFINIZIONE V.

DIco, che *y*, ed *yo* sono aliquote simili di *A*, e respettivamente di *B*, quando la *y* è contenuta senza resto in *A tante* volte, *quante* la *yo* è contenuta senza resto in *B*. In questo senso qualsivoglia tutto è aliquota simile di se medesimo, come qualsivoglia altro tutto lo è di se stesso, cioè *A* è aliquota simile di *A*, come *B* di *B*.

ASSIOMA I.

QUalsivoglia tutto può concepirsi diviso in qualsivoglia numero d' aliquote.

COROLLARIO II.

SE un tutto è diviso in qualunque numero d' aliquote, qualsivoglia altro tutto può dividersi nello stesso numero d' aliquote.

COROLLARIO III.

QUalsivoglia tutto può concepirsi talmente diviso in aliquote, che le medesime aliquote sieno minori d' una grandezza data per piccola che sia; poichè è evidente, che quanto più cresce il numero delle aliquote, tanto minori sono le stesse aliquote.

COROLLARIO IV.

LE *aliquote* delle aliquote d' un tutto *A* sono anch' esse aliquote del medesimo tutto *A*; perchè è chiaro, che anche le *aliquote* delle aliquote sono contenute un numero di volte, e senza resto in *A*.

ASSIOMA II.

SE le aliquote d' una grandezza *A* sono eguali, ovvero maggiori, o minori delle aliquote *simili* d' una grandezza *B*, anche *A* è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di *B*. Esprimendo con y, ed yo le rispettive aliquote *simili* di *A*, e di *B*, la *A* è uguale ad $y + y + y + y$, ec., e la *B* è similmente uguale ad $yo + yo + yo + yo$ ec., e *tante* essendo le y, quante le yo, ciò mostra ad evidenza l' egualità, maggioranza, o minorità di *A* in ordine a *B*.

ASSIOMA III.

SE la grandezza *A* è uguale, ovvero maggiore, o minore della grandezza *B*, anche le aliquote di *A* sono eguali, ovvero respettivamente maggiori, e minori delle aliquote *simili* di *B*.

Sco-

SCOLIO.

CHi voleſſe la prova di queſta aſſerzione, che è chiara per ſe medeſima, potrebbe dedurla dal ſecondo aſſioma così:

Se *A* è uguale a *B*, le aliquote di *A* non poſſono eſſere maggiori, nè minori delle aliquote *ſimili* di *B*, altramente pel ſecondo aſſioma anche *A* ſarebbe maggiore, e reſpettivamente minore di *B*, il che ripugna all' ipoteſi; adunque le aliquote di *A* ſono eguali alle aliquote *ſimili* di *B*.

Se *A* è maggiore di *B*, le aliquote di *A* non poſſono eſſer eguali, o minori delle aliquote *ſimili* di *B*, altramente anche *A* ſarebbe eguale, o reſpettivamente minore di *B* pel ſecondo aſſioma, il che roveſcia la ſuppoſizione; adunque le aliquote di *A* debbono eſſere maggiori delle aliquote *ſimili* di *B*.

Finalmente, ſe *A* è minore di *B*, le aliquote di *A* non poſſono eſſere eguali, o maggiori delle aliquote *ſimili* di *B*, altramente pel ſecondo aſſioma anche *A* ſarebbe eguale, o reſpettivamente maggiore di *B*, il che ſi oppone all' ipoteſi; adunque le aliquote di *A* ſono minori delle aliquote *ſimili* di *B*.

DEFINIZIONE VI.

DUe, o più grandezze omogenee ſi dicono tra loro *commenſurabili*, quando qualche grandezza può eſſere aliquota comune di tutte.

E due, o più grandezze omogenee ſi dicono tra loro *incommenſurabili*, quando niuna grandezza può eſſere aliquota comune di tutte.

SCOLIO.

SI dimoſtra in geometria darſi nella quantità continua grandezze tra loro incommenſurabili.

DEFINIZIONE VII.

SE la grandezza *A* ſi paragona alla grandezza *B* a ſe omogenea, cioè ſe la *A* ſi conſidera relativamente alla *B*, la grandezza *A*, che è paragonata alla *B*, chiamaſi l' *antecedente* della la comparazione, e la grandezza B, cui la A si paragona, dicesi il *conseguente*, e tanto l' antecedente A, quanto il conseguente B si chiamano i due termini della comparazione.

SCOLIO.

SE il conseguente B si concepisce diviso in qualsivoglia numero d' aliquote, v. g. se $B = ny$ (n esprime qualsivoglia numero, e anche l' unità), egli è certo, che l' antecedente A, o non contiene intieramente l' aliquota y (il che avviene allorchè la y è maggiore di A), o contiene un preciso numero delle aliquote y con qualche resto minore di y, ovvero contiene un preciso numero delle aliquote y senza resto; adunque sarà sempre $A = my + r$, purchè m denoti *quante* volte la y è contenuta in A (di modo che m può significare anche l' unità, e lo zero) e purchè r rappresenti il resto nullo, o reale, cioè rappresenti il resto, quando vi è il resto, e lo zero, quando il resto non vi è.

Dee pertanto notarsi, che quando il conseguente B è rappresentato per ny, e l' antecedente A per $my + r$, la lettera y significa non già una *sola* specie delle aliquote di B, ma *qualsivoglia* specie delle aliquote della stessa B, e che determinando il numero n a significare qualche numero particolare, si determina *di quale specie* sia l' aliquota y; v. g. se $n = 2$, la y è la metà di B, se $n = 3$ la y è il terzo di B, e così, ec.

Dee parimente notarsi, che al crescere di n cresce anche m, ma decresce l' aliquota y, e tal volta il resto r. All' incontro al decrescere di n decresce anche m, ma cresce l' aliquota y, e tal volta il resto r; e quando m è nullo, il resto r è uguale all' antecedente A.

Dee notarsi in fine, che il resto r non può mai esser nullo, quando i due termini A, e B della comparazione sono tra loro incommensurabili (altramente non sarebbero tali); e che il resto r non può esser nullo, quando m è uguale a zero.

DEFINIZIONE VIII.

LA *contenenza*, all' antecedente A spettante, di *qualsivoglia* aliquoliquota del conseguente B, questa *contenenza*, dico, *insieme col resto nullo, o reale*, il quale corrisponde alla medesima aliquota, e di essa è minore (conforme si è distintamente spiegato nello scolio antecedente), chiamasi da me proporzione geometrica, e la designo così: $\frac{A}{B}$, ovvero $\frac{my+r}{ny}$

AVVERTIMENTO.

IN questo trattato col semplice nome di proporzione s' intenderà sempre la proporzione geometrica.

Quelle grandezze, che nella definizione VII. si sono chiamate i termini della *comparazione*, cioè, l'antecedente, e il conseguente della *comparazione*, si chiameranno in avvenire i termini della *proporzione*, cioè, l' antecedente, e respettivamente il conseguente di essa.

DEFINIZIONE IX.

QUelle proporzioni, l' antecedente delle quali è uguale al loro conseguente, si chiamano proporzioni d' egualità; e quelle proporzioni, l' antecedente delle quali è maggiore, ovvero minore del suo conseguente, si chiamano proporzioni d' ineguaglità; cioè di maggiore inegualità, se l' antecedente è maggiore, e di minore inegualità, se l' antecedente è minore del suo conseguente.

DEFINIZIONE X.

COnsiderando ora due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, se uno degli antecedenti A contiene *tante* volte *qualsivoglia* aliquota del conseguente B senza verun resto, o con un resto minore di essa, *quante* volte l' altro antecedente C contiene l' aliquota *simile* del conseguente D, parimente senza verun resto, o con un resto minore di essa, questa egualità di *contenenza, e corrispondenza continua di resti nulli, o reali*, chiamasi da me egualità, ovvero similitudine di proporzioni; cioè, dico, che in tal caso la proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero simile alla proporzio-

ne

ne $\frac{C}{D}$; oppure, che le quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D* ſono proporzionali; dico medeſimamente, che la *A* ſta alla *B*, come la *C* ſta alla *D*, o verſo la *D*.

SCOLIO.

QUeſta definizione è di nome, per conſeguenza non può contraſtarſi; ſe poi a taluno pareſſe per avventura meno ſemplice, conſideri, che eſſa è generale, e comprende in un *ſolo uniforme*, *intelligibile*, *e poſitivo concetto* tanto l'eguaglianza di quelle proporzioni, che anno gli antecedenti *commenſurabili* ai loro conſeguenti, quanto l'eguaglianza di quell'altra ſorta di proporzioni, che anno gli antecedenti *incommenſurabili* ai loro conſeguenti.

Per altro la proprietà generale eſpreſſa in queſta definizione è poſſibile; poichè non ſolamente ſenza veruna ripugnanza eſſa ſi concepiſce; ma in geometria ne occorrono gli eſempj, conforme può vederſi ne' nuovi elementi di geometria de' ſignori di Porto-Reale, libro decimo, propoſizione fondamentale, e corollario I., e II. del primo teorema, e negli elementi di geometria del Padre Tacquet, e in altri autori, ec.

DEFINIZIONE XI.

L'Eguaglianza di due proporzioni diraſſi ancora da me *proporzionalità*, e ſi eſprimerà molte volte con le ſeguenti note, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, ovvero $A.B::C.D$, oppure $\frac{my+r}{ny}=\frac{myo+ro}{nyo}$; rappreſentando con y, e con yo qualunque aliquota ſimile de' reſpettivi conſeguenti *B*, e *D*, ed eſprimendo con r, e ro i reſti (nulli, o reali) che ſpettano ai riſpettivi antecedenti *A*, e *C*.

DEFINIZIONE XII.

IL primo, e quarto termine d'una proporzionalità ſi chiamano gli *eſtremi* di eſſa, e il ſecondo, e terzo termine i ſuoi *medj*.

COROLLARIO V.

ACciò ſuſſiſta queſta proporzionalità $AB::C.D$, non è punto ne-to necessario, che i due ultimi suoi termini C, e D sieno omogenei ai due primi A, e B, richiedendosi solamente, che C, e D sieno omogenei tra loro; imperciocchè l' egualità di *contenenza* con la continua *corrispondenza* de' resti nulli, o reali, che costituisce la *proporzionalità*, o sia l' egualità di due proporzioni, può competere agli antecedenti in ordine alle aliquote *simili* de' loro rispettivi conseguenti, quantunque i due termini di una proporzione sieno d' una specie di grandezza, e i due termini dell' altra proporzione sieno di specie diversa di grandezza.

Corollario VI.

Se sarà $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, sarà ancora $\frac{C}{D}=\frac{A}{B}$, cioè se si à $A.B::C.D.$, si à altresì $C.D::A.B$.

Definizione XIII.

Questo modo di argomentare, dicesi, *trasponendo*; egli è così facile, e naturale, che il più delle volte vien supposto ne' raziocinj senza accennarlo.

Corollario VII.

Tutte le proporzioni d' egualità sono tra loro eguali, v. g. $\frac{A}{A}=\frac{B}{B}=\frac{C}{C}$, ec. perchè è manifesto, che l' antecedente di ciascuna di esse contiene in egual numero *qualsivoglia* aliquota simile del suo conseguente.

Corollario VIII.

Due antecedenti eguali verso due conseguenti eguali anno egual proporzione, cioè se $A=C$, e $B=D$, sarà $A.B::C.D.$, perchè per l' assioma III. i conseguenti B, e D anno eguali le loro aliquote *simili*, ed è evidente, che nelle grandezze eguali A, e C si contengono in egual numero, e con resti eguali le suddette aliquote *simili*, ed eguali.

Questo corollario comprende l' una, e l' altra parte della proposizione VII. del V. libro di Euclide, poichè gli antecedenti, ovvero i conseguenti, che sono i medesimi, sono eguali.

SCOLIO.

I. QUando ſi tratta ſemplicemente della grandezza in *generale*, una ſteſſa grandezza poſta in due, o più circoſtanze può, e ſuole conſiderarſi come due, o più grandezze *eguali*, perchè ogni grandezza è uguale a ſe medeſima.

II. E all' incontro, quando ſi tratta ſemplicemente del più, e del meno, due, o molte grandezze eguali poſſono, e ſogliono conſiderarſi, come ſe foſſero una medeſima grandezza, e deſignarſi con una ſteſſa lettera.

COROLLARIO IX.

I. SE ſi ſoſtituiſcono in una *proporzione* grandezze eguali in luogo dell' antecedente, o del conſeguente, o d' ambedue, la *proporzione* non ſi muta, e ciò per la ſteſſa ragione, che moſtra la verità del precedente corollario VII.

II. Similmente, ſe ſi ſoſtituiſcono in una *proporzionalità* grandezze eguali in luogo di una, di due, di tre, e anche di tutti e quattro i ſuoi termini, la *proporzionalità* non ſi muta. Ciò è chiaro per la prima parte di queſto corollario, poichè la *proporzionalità* è coſtituita di due *proporzioni*, e quando queſte non ſi mutano, nemmeno la *proporzionalità* ſi muta.

AVVERTIMENTO.

IO mi valerò ſovente di queſto corollario, e non ſempre lo citerò, per abbreviare le dimoſtrazioni.

COROLLARIO X.

POſte due proporzioni eguali $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ ſe l' antecedente di una è uguale, maggiore, o minore del conſeguente, anche l' antecedente dell' altra è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſuo conſeguente.

Imperocchè rappreſentando le due proporzioni eguali così: $\frac{my+r}{ny}=\frac{myo+ro}{nyo}$, è manifeſto, che quando r, e ro denotano zero, acciò uno degli antecedenti ſia eguale, ovvero reſpettivativamente maggiore, e minore del ſuo conſeguente, il numero m dev' eſſere eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del numero n, e appunto da queſta egualità, maggioranza, o minorità di m in ordine ad n naſce la reſpettiva egualità, maggioranza, o minorità dell' altro antecedente riſpetto al ſuo conſeguente.

Allorchè i reſti r, e ro ſuſſiſtono, è viſibile, che niuno degli antecedenti può eſſere uguale al ſuo conſeguente. Un antecedente poi non può eſſer *maggiore* del ſuo conſeguente, ſe m non ſupera, o almeno non eguaglia n; e lo ſteſſo antecedente eſſer non può *minore* del ſuo conſeguente, ſe m non è minore di n, oppure non è nullo, e da tutto ciò riſulta la reſpettiva maggioranza, o minoranza dell' altro antecedente in riguardo al ſuo conſeguente.

SCOLIO.

ALlorchè ſi anno da conſiderare molte proporzioni tra loro eguali, le aliquote ſimili de' molti conſeguenti potranno eſprimerſi così y, yo, yoo, $yooo$, ec., dovendo in queſti caſi la cifra o ſola, ovvero replicata ſervire unicamente per diſtinguere le aliquote *ſimili* de' diverſi tutti; i reſti poi [nulli, o reali] che corriſponderanno alle ſuddette aliquote, potranno così deſignarſi: r, ro, roo, $rooo$, ec.

COROLLARIO XI.

I. SE due proporzioni $\frac{F}{G}$, e $\frac{H}{I}$ ſono eguali ad un' altra proporzione $\frac{A}{B}$, ſaranno eguali tra loro.

II. E ſe una proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale a due altre proporzioni $\frac{F}{G}$, e $\frac{H}{I}$, queſte altre due ſaranno tra loro eguali.

Imperocchè eſprimendo $\frac{A}{B}$ per $\frac{my+r}{ny}$, ſarà egualmente nelle ſuppoſizioni de' due primi punti di queſto corollario $\frac{F}{G}=\frac{myo+ro}{nyo}$, e $\frac{H}{I}=\frac{myoo+roo}{nyoo}$, adunque per le definizioni X., e XI. ſarà egual-

 men-

mente in ambedue le ſuppoſizioni ſuddette $\frac{F}{G} = \frac{H}{I}$.

III. Se $\frac{A}{B}$ è uguale ad $\frac{F}{G}$, e $\frac{F}{G} = \frac{H}{I}$.

IV. Ovvero ſe $\frac{F}{G}$ è uguale ad $\frac{H}{I}$, ed $\frac{A}{B}$ è uguale ad $\frac{F}{G}$, ſarà $\frac{A}{B}$ eguale ad $\frac{H}{I}$.

Perchè ſe $\frac{F}{G}$ ſi deſigna per $\frac{myo + ro}{nyo}$, ſarà egualmente nelle ſuppoſizioni de' due ultimi punti di queſto corollario $\frac{H}{I} = \frac{myoo + roo}{nyoo}$, ed $\frac{A}{B} = \frac{my + r}{ny}$; adunque in virtù delle definizioni X., e XI. ſarà del pari in ciaſcuna delle due ſopraddette ſuppoſizioni $\frac{A}{B} = \frac{H}{I}$.

Queſto corollario comprende la propoſizione XI. del V. libro d' Euclide.

Corollario XII.

Dato che ſi abbia $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, e che ſia $\frac{F}{G} = \frac{A}{B}$, ed $\frac{H}{I} = \frac{C}{D}$, ſarà ancora $\frac{F}{G} = \frac{H}{I}$; imperocchè la proporzionalità $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ſi deſignerà in queſta guiſa: $\frac{my + r}{ny} = \frac{myo + ro}{nyo}$, e ſecondo l'ipoteſi $\frac{F}{G}$ ſarà $= \frac{myoo + roo}{nyoo}$, ed $\frac{H}{I}$ ſarà $= \frac{myooo + rooo}{nyooo}$; adunque per le definizioni X., e XI. ſi avrà $\frac{F}{G} = \frac{H}{I}$.

Altra dimoſtrazione di queſto corollario.

I. Per l'ipoteſi $\frac{F}{G}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$, ed $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{C}{D}$, adunque pel III. punto del corollario precedente $\frac{F}{G}$ è uguale a $\frac{C}{D}$.

II. Nel primo punto di queſta dimoſtrazione ſi è provato, che $\frac{F}{G}$ è uguale a $\frac{C}{D}$; ma per l' ipoteſi $\frac{H}{I}$ è uguale a $\frac{C}{D}$; adundunque pel I. punto del corollario antecedente $\frac{F}{G} = \frac{H}{I}$.

COROLLARIO XIII.

DInotino F, e G due grandezze anche di ſpecie diverſa, ed L qualunque numero; io dico, che $\frac{LF}{F}$ è uguale ad $\frac{LG}{G}$.

Imperocchè chiamando y, ed yo qualſivoglia aliquota ſimile delle riſpettive grandezze F, e G, ed n la quantità di volte, che dette aliquote ſono contenute reſpettivamente in F, e in G, ſarà $F = ny$, $G = nyo$, e la proporzionalità da provarſi $\frac{LF}{F} = \frac{LG}{G}$ potrà così rappreſentarſi $\frac{Lny}{ny} = \frac{Lnyo}{nyo}$, cioè $\frac{Ln(y)}{ny} = \frac{Ln(yo)}{nyo}$, la qual' eſpreſſione manifeſta chiaramente la ſuſſiſtenza della proporzionalità ſopraddetta.

SCOLIO.

DAl preſente corollario XIII. naſce il ſeguente

TEOREMA.

QUalſiſia tutto ſta a qualunque ſua aliquota, come qualſivoglia altro tutto alla ſua aliquota ſimile:

I due tutti poſſono eſſere non omogenei tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

CHiamando A il primo tutto, ed F qualunque ſua aliquota, come pure L il numero delle volte, che detta aliquota entra nel medeſimo tutto, ſarà LF eguale ad A; chiamando poi B il ſecondo tutto, e G la ſua aliquota ſimile, ſarà LG eguale a B; ma pel preſente corollario XIII. ſi à $LF.F::LG.G$; adunque ſe in queſta proporzionalità ſi ſoſtituiſce A in luogo di LF, e B in cambio di LG, ſi avrà pel corollario IX. de' principj $A.F::B.G$; il che doveva dimoſtrarſi.

DEFINIZIONE XIV.

POſte le due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$; ſe l' antecedente A contie-

ne

ne *qualche* aliquota del ſuo conſeguente *B* (o la contenga con un reſto minore di eſſa, o ſenza) più volte, che l' altro antecedente *C* non contiene l' aliquota *ſimile* del ſuo conſeguente *D* (o la contenga con un reſto minore di eſſa, o la contenga ſenza un tal reſto) queſta *maggior contenenza inſieme col ſuddetto reſto nullo, o reale*, la quale appartiene all' antecedente *A*, chiamaſi da me *maggior proporzione*, e in tal caſo dico, che $\frac{A}{B}$ è maggiore di $\frac{C}{D}$.

DEFINIZIONE XV.

MA ſe l' antecedente *A* contiene *qualche* aliquota del ſuo conſeguente B (o la contenga con un reſto minore di eſſa, o ſenza) ſe la contiene, dico, *meno* volte, che l' altro antecedente *C* non contiene l' aliquota *ſimile* del ſuo conſeguente D (o contenga *C* la ſua aliquota con un reſto minore di eſſa, o la contenga ſenza un tal reſto) *queſta minor contenenza inſieme col ſuddetto reſto nullo, o reale*, la quale appartiene all' antecedente *A*, da me ſi chiama *minor proporzione*, e in tal caſo dico, che $\frac{A}{B}$ è minore di $\frac{C}{D}$.

SCOLIO.

PEr provare ſemplicemente, che la proporzione $\frac{A}{B}$ ſia maggiore, ovvero minore della proporzione $\frac{C}{D}$, baſterà provare, che qualche aliquota del conſeguente *B* ſia contenuta nel ſuo antecedente *A più*, ovvero reſpettivamente *meno*, che l' aliquota ſimile dell' altro conſeguente *D* non è contenuta nel ſuo antecedente *C*; ma a coſtituire la *preciſa* maggioranza, o reſpettivamente la *preciſa* minorità di $\frac{A}{B}$ in ordine a $\frac{C}{D}$, influiſcono quei reſti (nulli, o reali) che riſultano dal ſottrarre quante volte ſi può la ſuddetta aliquota del conſeguente *B* dal ſuo antecedente *A*, e l' aliquota *ſimile* del conſeguente *D* dal ſuo antecedente *C*.

COROL-

COROLLARIO XIV.

SE $\frac{A}{B}$ è maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$ sarà trasponendo $\frac{C}{D}$ minore, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{A}{B}$.

COROLLARIO XV.

SE due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ sono tra loro eguali, non può essere $\frac{A}{B}$ maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$.

Imperocchè, se $\frac{A}{B}$ fosse maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, l'antecedente A conterebbe *più*, ovvero respettivamente *meno* volte qualche aliquota del suo conseguente B, che l'altro antecedente C non contiene l'aliquota simile del suo conseguente D; adunque alle due proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ non competerebbero le definizioni X., e XI., che pur competono loro per l'ipotesi, il che è assurdo; adunque, ec.

COROLLARIO XVI.

I. LA maggiore, ovvero minore di due proporzioni, che anno il medesimo conseguente, à il maggiore, ovvero respettivamente minore antecedente.

II. E la maggiore, ovvero minore di due proporzioni, che anno il medesimo antecedente, à il *minore*, ovvero *maggior* conseguente.

Imperocchè primieramente se $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero minore di $\frac{C}{B}$ è forza che l'antecedente A contenga *più*, ovvero respettivamente *meno* volte qualche aliquota del conseguente comune B, che non contiene l'altro antecedente C.

E secondariamente, se $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{F}$ è necessario, che il comune antecedente A contenga *più*, ovvero *meno* volte qualche aliquota del primo conseguente B, che

non

non contiene l' aliquota *ſimile* del ſecondo conſeguente F; adunque qualche aliquota di B è *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore dell' aliquota ſimile di F, e quindi per l' aſſioma III. B è *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore di F.

Queſto corollario contiene la propoſizione X. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO XVII.

RAppreſenti H qualunque grandezza omogenea alla A, io dico, che $\frac{A+H}{B}$ è maggiore di $\frac{A}{B}$, e che $\frac{A-H}{B}$ è minore di $\frac{A}{B}$.

Imperocchè primieramente è manifeſto, che tutte le aliquote del conſeguente B, le quali ſono minori di A, e di H, ſono contenute più volte nell' antecedente maggiore $A+H$, che nell' antecedente minore A: e ſecondariamente è manifeſto altresì, che tutte le ſuddette aliquote del conſeguente B, le quali ſono minori di A, e di H, ſono contenute *meno* volte nel minore antecedente $A-H$, che nell' antecedente maggiore A.

Nel preſente corollario ſi contiene la prima parte della propoſizione VIII. del V. libro d' Euclide.

Queſto corollario può enunciarſi così:

Se la grandezza G è maggiore della grandezza A, la prima à maggior proporzione, che la ſeconda ad una terza grandezza omogenea B: e ſe la grandezza F è minore della grandezza A, la prima à minor proporzione, che la ſeconda ad una terza grandezza B omogenea.

COROLLARIO XVIII.

NEllo ſteſſo modo, e con più forte ragione ſi dimoſtrerà, che ſe P è minore di B, la proporzione $\frac{A+H}{P}$, è maggiore di $\frac{A}{B}$:

E ſe Q è maggiore di B, la proporzione $\frac{A-H}{Q}$ è minore di $\frac{A}{B}$.

Imperocchè primieramente rappreſenti Y quelle aliquote del conſeguente B, che ſecondo il precedente corollario XVII. ſono contenute in $A+H$ più volte, che in A, ed Yo rappreſenſenti l' aliquota *ſimile* del conſeguente P, il quale per l' ipoteſi è minore di B, ſarà per tanto in virtù dell' aſſioma III., la Yo minore della Y, e per conſeguenza la Yo ſarà contenuta *almeno* tante volte (ſe non più) in $A+H$ quante volte vi è contenuta la Y, ma la Y è contenuta *maggior* numero di volte in $A+H$, che in A, e quindi per la definizione XIV., $\frac{A+H}{P}$ ſarà maggiore di $\frac{A}{B}$.

Secondariamente denoti la Y quelle aliquote del conſeguente B, che pel corollario XVII. ſi contengono meno molte in $A-H$, che in A, ed Yoo eſprima l' aliquota ſimile del conſeguente Q, il quale eſſendo per la ſuppoſizione maggiore di B, la Yoo per l' aſſioma III. dovrà eſſere maggiore della Y, e per conſeguenza la Yoo ſarà contenuta *al più* tante volte (ſe non meno) in $A-H$ quante volte vi è contenuta la Y, ma la Y è contenuta minor numero di volte in $A-H$, che in A; adunque la Yoo ſarà ſempre contenuta *meno* volte in $A-H$, che in A; laonde per la deſinizione XV., $\frac{A-H}{Q}$ ſarà minore di $\frac{A}{B}$.

Il preſente corollario potrebbe eſprimerſi in queſta guiſa:

Poſte due proporzioni $\frac{G}{P}$, ed $\frac{A}{B}$, ſe la prima à *maggior* antecedente, e inſieme *minor* conſeguente della ſeconda, eſſa è maggiore della ſeconda; e poſte due proporzioni $\frac{F}{Q}$, $\frac{A}{B}$, ſe la prima à *minor* antecedente, e inſieme *maggior* conſeguente, che la ſeconda, eſſa è minore della ſeconda.

COROLLARIO XIX.

CONtinui la H a rappreſentare qualſivoglia grandezza omogenea alla A; io dico, che $\frac{A}{B}$ è maggiore di $\frac{A}{B+H}$:

E che $\frac{A}{B}$ è minore di $\frac{A}{B-H}$.

Dimoſtrazione della prima parte.

QUalſivoglia aliquota del conſeguente *minore* B eſſendo per l' aſſioma III. minore dell' aliquota *ſimile* dell' altro conſeguen-

 te

te *maggiore* $B+H$, egli è evidente, che niuna aliquota di B sarà contenuta *minor* numero di volte in A di quello, che vi sia contenuta l' aliquota *simile* di $B+H$; di modo che denotando con Y qualche aliquota del conseguente B, e con Yo l' aliquota *simile* del conseguente $B+H$, se non si vorrà concedere, che la Y minore sia contenuta in A *più* volte, che la Yo maggiore, almeno dovrà concedersi, che la stessa Y minore sia tante volte contenuta in A, quante la Yo maggiore è contenuta nella medesima A; e in questo caso, se si chiama M la quantità di volte, che tanto la Y minore quanto la Yo maggiore sono contenute in A, la stessa A sarà eguale ad $MY+R$, e ad $MYo+Ro$, designando con R il resto, che lascia la Y minore, tolta quante volte si può dalla A, e con Ro il resto, che può lasciare la Yo maggiore, tolta quante volte si può dalla medesima A.

Questo secondo resto Ro può talora esser nullo, ma non già il primo resto R, il quale in oltre sarà sempre maggiore di Ro; imperocchè $MY+R$ è uguale ad $MYo+Ro$, ma per l' assioma secondo MY è minore di MYo (perchè Y è minore di Yo); adunque togliendo dalla medesima grandezza A la MY minore, e la MYo maggiore, il resto R, che sempre lascia MY, esser dee maggiore del resto Ro lasciato da MYo.

Chiamasi pertanto d la differenza de' due resti R, e Ro, e il resto maggiore R sarà $=Ro+d$, chiamasi in oltre N la quantità di volte, che le aliquote simili Y, ed Yo sono contenute ne' respettivi conseguenti B, e $B+H$, e si avrà $\frac{A}{B}=\frac{MY+Ro+d}{NY}$, ed $\frac{A}{B+H}=\frac{MYo+Ro}{NYo}$; laonde concependo qualunque *aliquota simile* x, ed xo delle respettive aliquote Y, ed Yo, e nominando f la quantità di volte, che le due prime sono contenute respettivamente nelle due ultime, sarà $Y=fx$, ed $Yo=fxo$, e sostituendo ne' sopraddetti valori di $\frac{A}{B}$, e di $\frac{A}{B+H}$ in vece di Y, e di Yo queste loro espressioni, si avrà $\frac{A}{B}=\frac{Mfx+Ro+d}{Nfx}$, ed $\frac{A}{B+H}=\frac{Mfxo+Ro}{Nfxo}$, vale a dire $\frac{A}{B}=\frac{Mf(x)+Ro+d}{Nf(x)}$, ed $\frac{A}{B+H}=\frac{Mf(xo)+Ro}{Nf(xo)}$.

Si

Si consideri in fine, che x, ed xo sono aliquote simili de' respettivi conseguenti B, cioè $Nf[x]$, e $B+H$, cioè $Nf[xo]$, e che pel coroll. III. tra le infinite aliquote di B, che rappresenta la x, ve ne à di quelle, che sono minori di d; adunque $\frac{A}{B}\left[\text{cioè } \frac{Mf[x]+Ro+d}{Nf[x]}\right]$ contiene più volte qualche aliquota del suo conseguente B, che $\frac{A}{B+H}\left[\text{cioè } \frac{Mf[xo]+Ro}{Nf[xo]}\right]$ non contiene l' aliquota *simile* del suo conseguente $B+H$; e quindi per la definizione XIV. $\frac{A}{B}$ è maggiore di $\frac{A}{B+H}$.

Il che dovea dimostrarsi.

La seconda parte di questo corollario, che $\frac{A}{B}$ sia minore di $\frac{A}{B-H}$ si può dimostrare con un raziocinio similissimo a quello, con cui si è provata la prima, assumendo Y per rappresentare le aliquote di $B-H$ grandezza minore, ed Yo per denotare le aliquote *simili* di B grandezza maggiore, ec. Ma per non replicarlo, basta riflettere, che siccome il conseguente B è minore del conseguente $B+H$, così il conseguente $B-H$ è minore del conseguente B; adunque per la dimostrazione della I. parte $\frac{A}{B}$ è minore di $\frac{A}{B+H}$.

Il presente corollario può enunciarsi in questo modo:

Se la grandezza G è maggiore della grandezza F, una medesima grandezza A à *maggior* proporzione verso la F minore, ed à minor proporzione verso la G maggiore.

In questo corollario si comprende la seconda parte della proposizione VIII. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO XX.

DAi corollarj XVII., XVIII., e XIX. si raccoglie, che

I. Se si aumenta l' antecedente, o si diminuisce il conseguente, la proporzione cresce:

II. E se si diminuisce l' antecedente, ovvero si aumenta il conseguente, la proporzione decresce:

III. Se poi ſi aumenta l'antecedente, e nel tempo ſteſſo ſi diminuiſce il conſeguente, vieppiù creſce la proporzione:

IV. E ſe ſi diminuiſce l'antecedente, e nel medeſimo tempo ſi aumenta il conſeguente, vieppiù decreſce la proporzione.

COROLLARIO XXI.

SE le due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ ſono eguali, e il conſeguente dell'una è uguale al conſeguente dell'altra, anche gli antecedenti ſaranno eguali: e ſe gli antecedenti ſono eguali, vi ſarà eguaglianza anche ne' conſeguenti.

Imperocchè nella prima ipoteſi di B eguale a D, ſe la C non foſſe eguale alla A, ſarebbe maggiore, o minore di eſſa d'una differenza, che ſi chiami H, e ſoſtituendo B in vece di D ſua eguale, ed $A \pm H$ in luogo della ſua preteſa eguale C, ſi avrebbe $\frac{A}{B} = \frac{A \pm H}{B}$; ma pel corollario XVII. $\frac{A}{B}$ è minore, ovvero maggiore di $\frac{A \pm H}{B}$; adunque due proporzioni ſarebbero eguali inſieme, e diſuguali tra loro, il che non può eſſere pel corollario XV.; adunque la C non è maggiore, nè minore della A, e conſeguentemente è ad eſſa eguale.

Nella ſeconda ipoteſi di A eguale a C, chiamando parimente H la differenza tra i conſeguenti B, e D, quando ſi voleſſero ſupporre diſuguali, e ſurrogando $B \pm H$ in cambio della ſua preteſa eguale D, come pure ponendo A in vece della ſua eguale C, avrebbeſi $\frac{A}{B} = \frac{A}{B \pm H}$; ma pel corollario XIX., $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{B \pm H}$; adunque due proporzioni ſarebbero di bel nuovo eguali inſieme, e diſuguali tra loro, e non potendo ciò eſſere pel corollario XV., dee conchiuderſi, che B non è minore, nè maggiore di D, e che per conſeguenza gli è eguale.

Queſto corollario comprende ambedue le parti della propoſizione IX. del V. libro d' Euclide, mentre gli antecedenti, e i conſeguenti, che ſono i medeſimi, ſi conſiderano come grandezze eguali.

ASSIO-

ASSIOMA IV.

UN tutto, moltiplicato per qualſivoglia numero, è uguale a tutte le parti del medeſimo tutto moltiplicate *ad una ad una* per lo ſteſſo numero.

SCOLIO.

V. G. $3\,(A+B+C)$ è uguale à $3A+3B+3C$, e ſe L rappreſenta qualunque numero, $L\,(A+B+C+D$, ec.) è uguale ad $LA+LB+LC+LD$, ec.

La propoſizione I. del V. libro d' Euclide ſi riduce al preſente aſſioma.

COROLLARIO XXII.

QUalunque eſpreſſione litterale, ove entrino grandezze affette col ſegno $+$, venendo moltiplicata per qualſivoglia numero, è uguale a tutte le grandezze, che entrano in detta eſpreſſione, moltiplicate ad una ad una per lo ſteſſo numero.

V. G. ſe m, e n dinotano qualunque numero $m\,(y+yo+yoo)$ è uguale ad $my+myo+myoo$, e $n\,(y+yo+yoo)$ è uguale ad $ny+nyo+nyoo$.

Imperocchè ogni eſpreſſione litterale, ove entrino grandezze affette col ſegno $+$, dee conſiderarſi come un tutto, le di cui parti ſieno le medeſime grandezze.

COROLLARIO XXIII.

SE K, e L eſprimono qualſivoglia numero, ed E qualunque grandezza; io dico che KE moltiplicato per L è uguale ad LE moltiplicato per K, cioè $L\,[KE] = K\,[LE]$.

Imperocchè KE è un tutto, e tutte le ſue parti ſono E, E, E, E, ec. cioè tante E quante unità contiene il numero K; ſi à per tanto $KE = E+E+E+E$, ec., vale a dire KE è uguale alla E preſa tante volte, quante unità contiene il numero K; adunque per l' aſſioma IV. KE moltiplicato per L, cioè $L\,[KE]$ è uguale ad $LE+LE+LE+LE$, ec. vale a dire ad LE preſo tante volte, quante unità con-

contiene il numero K, e conseguentemente per la definizione II., L [KE] è uguale ad LE moltiplicato per K, cioè L [KE] $=$ K [LE].

COROLLARIO XXIV.

Sia qualunque numero di proporzioni eguali, v. g. $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{F}{G}$, ec. io dico, che la somma degli antecedenti tutti sta alla somma di tutti i conseguenti, come l'antecedente di una delle suddette proporzioni sta al suo conseguente.

Imperocchè rappresentando le suddette proporzioni respettivamente così: $\frac{my+r}{ny}$, $\frac{myo+ro}{nyo}$, $\frac{myoo+roo}{nyoo}$, ec. la somma di tutti gli antecedenti sarà $my+r+myo+ro+myoo+roo$, cioè [$my+myo+myoo$, ec. $+r+ro+roo$, ec.] ma per l'assioma IV. m ($y+yo+yoo$, ec.) è uguale ad $my+myo+myoo$, ec.; adunque la somma di tutti gli antecedenti potrà esprimersi in questa guisa: $m(y+yo+yoo$, ec.$)+r+ro+roo$, ec.

La somma poi di tutti i conseguenti sarà $ny+nyo+nyoo$, ec. cioè in virtù del citato assioma IV., n ($y+yo+yoo$, ec.) e perciò la proporzione $\frac{A+C+F, \text{ ec.}}{B+D+G, \text{ ec.}}$ si denoterà nell' infrascritto modo:

(a) $\frac{m(y+yo+yoo, \text{ ec.})+r+ro+roo, \text{ ec.}}{n(y+yo+yoo, \text{ ec.}}$

ma quest' ultima proporzione (a) è uguale a ciascuna delle proporzioni $\frac{my+r}{ny}$, $\frac{myo+ro}{nyo}$, $\frac{myoo+roo}{nyoo}$, ec. poichè ($y+yo+yoo$, ec.) rappresenta qualunque aliquota del conseguente della proporzione (a) ed $r+ro+roo$, ec. denota il resto (nullo, o reale) che appartiene all' antecedente della medesima proporzione (a), siccome le y, yo, yoo, ec. rappresentano le aliquote simili de' rispettivi conseguenti B, D, G, ec. e le r, ro, roo, ec. denotano i resti corrispondenti (nulli, o reali) che appartengono ai rispettivi antecedenti A, C, F, ec. adunque per le definizioni X., e XI. la proporzione $\frac{A+C+F, \text{ ec.}}{B+D+G, \text{ ec.}}$ è uguale a ciascuna delle proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{F}{G}$, ec.

Questo corollario contiene la proposizione XII. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO XXV.

LE lettere g, e h denotino qualunque numero (h può significare anche l' unità) ed A, e B rappresentino qualsisia grandezza; io dico, che sussiste questa proporzionalità.

(1) $\frac{gA}{gB} = \frac{hA}{hB}$.

Imperocchè designando A per $my + r$, e B per ny in conformità della definizione VIII., e ponendo in luogo di A, e di B questi loro valori nella proporzionalità (1) si avrà quest' altra proporzionalità equivalente.

(2) $\frac{gmy + gr}{gny} = \frac{hmy + hr}{hny}$.

Atteso chè pel corollario XXII. l' espressione $g\ (my + r)$ che rappresenta gA è uguale a $gmy + gr$, e l' espressione $h\ [my + r]$ che denota hA è uguale ad $h\ my + hr$; ma pel corollario XXIII. si à $gmy = mgy =$, $hmy = mhy$, $gny = ngy$, ed $hny = nhy$; adunque surrogando in vece di gmy, hmy, gny, hny i suddetti loro valori nella proporzionalità (2), essa, e per conseguenza la proporzionalità (1), che gli equivale, diverrà l' infrascritta:

(3) $\frac{mgy + gr}{ngy} = \frac{mhy + hr}{nhy}$.

Che per le definizioni X., e XI. manifestamente sussiste, mentre gy rappresenta qualunque aliquota del primo conseguente hy, l' aliquota simile del secondo conseguente, e gr, ed hr i respettivi resti, in ordine a' quali si rifletta, che essendo r minore di y, sarà per l' assioma II. gr minore di gy, ed hr minore di hy.

Adunque essendosi provata sussistente la proporzionalità (3) sussiste anche la proporzionalità (1), che gli equivale.

COROLLARIO XXVI. dedotto dal XXV.

ALlorchè h denota l' unità, la proporzionalità (2) del precedente corollario diviene $\frac{mgy + gr}{ngy} = \frac{my + r}{ny}$, e la proporzionalità tà (1) del medesimo diventa $\frac{gA}{gB}=\frac{A}{B}$, che in virtù di esso corollario XXV. dee sussistere.

Questo corollario contiene la proposizione XV. del V. libro d' Euclide.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Rappresenti gA l' aggregato degli antecedenti $A+A+A$, ec. e gB l' aggregato de' conseguenti $B+B+B$, ec. di tante proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{B}$, ec. tra loro eguali, quante unità contiene il numero g; adunque pel corollario XXIV. $\frac{gA}{gB}=\frac{A}{B}$.

ASSIOMA V.

Possono togliersi dalle espressioni litterali quelle grandezze, che vi sono prima poste, e poi sottratte, ovvero prima sottratte, e poi poste, senza che si muti il valore delle medesime espressioni litterali: v. g. senza cangiar il valore dell' espressione $C-D+B+D$, se ne può togliere $-D+D$, e ridurla a questa $C+B$.

E dall' espressione $A+B+C+D+E-B-C-D-E-F$ possono togliersi $B+C+D+E-B-C-D-E$, e ridurla a questa $A-F$, che gli equivale.

Ciò è manifesto, poichè una grandezza prima posta, e poi sottratta, ovvero prima sottratta, e poi posta, equivale a zero.

COROLLARIO XXVII.

Rappresentino P, e Q due grandezze omogenee, e m qualunque numero, io dico, che $m(P-Q)=mP-mQ$.

Imperocchè supponendo $P-Q=C$, sarà $P-Q+Q=C+Q$, cioè per l' assioma V. $P=C+Q$, e quindi $mP=m(C+Q)$ ma pel corollario XXII. $m(C+Q)$ è uguale ad $mC+mQ$; adunque $mP=mC+mQ$, e conseguentemente $mP-mQ=mC+mQ-mQ$, cioè pel citato assioma V., $mP-mQ=mC$, vale a dire $mC=mP-mQ$, e ponendo in luogo di C il suo valore $P-Q$, sarà finalmente $m(P-Q)=mP-mQ$.

Sco-

SCOLIO.

LA proposizione V. del V. libro d' Euclide si riduce al corollario presente.

COROLLARIO XXVIII.

SIeno due proporzioni eguali $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, e C sia minore di A, come D di B; io dico, che $\frac{A-C}{B-D}$ è uguale a ciascuna delle due proporzioni suddette.

Imperocchè designando $\frac{A}{B}$ con quest' espressione $\frac{my+r}{ny}$, e $\frac{C}{D}$ con quest' altra $\frac{myo+ro}{nyo}$, sarà $A-C$ eguale ad $my+r-myo-ro$, ad $my-myo+r-ro$, ovvero ad $m\,[y-yo]+r-ro$, perchè $m\,[y-yo]$ è uguale ad $my-myo$ in virtù del corollario XXVIII., sarà eziandio $B-D$ eguale ad $ny-nyo$, cioè per lo stesso corollario XXVIII., ad $n\,[y-yo]$; adunque $\frac{A-C}{B-D}$ potrà designarsi così:

[1] $\frac{m\,[y-yo]+r-ro}{n\,[y-yo]}$.

Ma questa proporzione [1] è uguale a ciascuna delle due proporzioni $\frac{my+r}{ny}$, $\frac{myo+ro}{nyo}$; mentre $[y-yo]$ esprime qualsivoglia aliquota del conseguente della proporzione [1], conforme y, ed yo esprimono le aliquote simili de' respettivi conseguenti B, e D; ed $r-ro$ rappresenta il resto [nullo, o reale] che appartiene all' antecedente della stessa proporzione [1] conforme r, ed ro rappresentano i resti corrispondenti [nulli, o reali] che appartengono ai respettivi antecedenti A, e C; adunque in virtù delle definizioni X., e XI., $\frac{A-C}{B-D}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

Questo corollario contiene la proposizione XIX. del V. libro d' Euclide.

ASSIOMA VI.

POste le due grandezze omogenee A, e B tali, che la A

non possa crescere, senza divenir maggiore della *B*, e non possa diminuire senza divenir minore della medesima *B*, la *A* è uguale alla *B*. Questa asserzione è chiara a chi attentamente la considera, tuttavia chi ne volesse la prova potrà formarla così.

I. Primieramente *A* non è minore di *B*, mentre se fosse minore potrebbe *A* crescere in modo, che divenisse *eguale* a *B*, il che è contro l'ipotesi, la quale esige, che *A* non possa crescere senza divenir *maggiore* di *B*.

II. Secondariamente la stessa *A* non è maggiore di *B*, poichè se fosse maggiore, potrebbe *A* diminuire in maniera, che divenisse *eguale* a *B*, il che parimente repugna all'ipotesi, la quale richiede, che *A* non possa diminuire senza divenire minore di *B*; adunque *A* non è maggiore di *B*.

Si è provato nel primo punto, che *A* non è minore di *B*, e nel secondo, che *A* non è maggiore della stessa *B*; adunque la *A* è uguale alla *B*.

AVVERTIMENTO.

NE' due seguenti assiomi VII., ed VIII. allorchè si dirà: la *contenenza*, ec. che appartiene ad un antecedente in ordine a *qualsivoglia* aliquota del conseguente, non s'intenderà semplicemente la sola contenenza, che appartiene al medesimo antecedente in ordine a *qualsivoglia* aliquota del suo conseguente, ma quest'istessa *contenenza* con di più il resto, che può lasciare la medesima aliquota, sottratta quante volte è possibile dall'antecedente suddetto; dimodochè quando tal resto è nullo, con l'espressione *contenenza*, ec. s'intenderà la sola contenenza, che appartiene all'antecedente in ordine alla stessa aliquota, ma quando tal resto è reale, l'espressione *contenenza*, ec. denoterà la *contenenza* soprammentovata col *più* il detto resto. Servirà quest'avvertimento per esporre i due assiomi, che sieguono, con maggior brevità, e chiarezza.

ASSIO-

ASSIOMA VII.

SE una proporzione $\frac{C}{B}$ è ſottratta da un' altra $\frac{A}{B}$, che abbia lo ſteſſo conſeguente, la differenza di queſte due proporzioni è la medeſima coſa con la proporzione, che l' antecedente *A mutilato* dell' antecedente *C* à verſo il comune conſeguente *B*; cioè $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}$ è lo ſteſſo che $\frac{A-C}{B}$.

Non potrà dubitare di queſt' aſſerzione chi rifletterà, che $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}$ ſignifica la *contenenza*, ec. che appartiene all' antecedente *A* in ordine a *qualſivoglia* aliquota del conſeguente *B*, diminuita (tal contenenza) della *contenenza*, ec. che appartiene all' antecedente *C* in ordine alla ſteſſa aliquota di *B*, e queſto appunto chiaramente ſignifica l' eſpreſsione $\frac{A-C}{B}$; egli è adunque manifeſto, che $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}$ è lo ſteſſo, che $\frac{A-C}{B}$

COROLLARIO XXIX.

SIeno *D*, e *B* due grandezze omogenee, e ſia *D* eguale ad $A-C$; io dico, che la proporzione $\frac{D}{B}$ è uguale alla differenza delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$; cioè $\frac{D}{B}=\frac{A}{B}-\frac{C}{B}$.

Imperocchè eſſendo $D=A-C$ la proporzione, che la *D* à verſo *B* è viſibilmente eguale alla proporzione, che la grandezza *A mutilata* della grandezza *C* à verſo *B*, cioè $\frac{D}{B}$ è uguale ad $\frac{A-C}{B}$, ma per l' aſsioma VII., $\frac{A-C}{B}$ è lo ſteſſo, che $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}$; adunque $\frac{D}{B}$ è uguale ad $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}$.

ASSIOMA VIII.

L' Aggregato di due o più proporzioni, che anno lo ſteſſo conſeguente, v. g. $\frac{A}{B}+\frac{C}{B}+\frac{D}{B}$, ec. è la medeſima coſa con la proporzione, che à l' aggregato degli antecedenti $A+C+D$, ec.

 ver-

verso il comun conseguente B; cioè $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} + \frac{D}{B}$, ec. è lo stesso, che $\frac{A+C+D}{B}$, ec.

Quest' asserzione è chiara a chi considera, che $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} + \frac{D}{B}$, ec. significa la *contenenza*, ec. che appartiene all' antecedente A in ordine a *qualsivoglia* aliquota del conseguente B, *accresciuta* della *contenenza*, ec. che appartiene all' antecedente C in ordine alla stessa aliquota di B, *accresciuta* ancora della *contenenza*, ec. che appartiene all' antecedente D in ordine alla medesima aliquota di B, e così in qualunque numero di proporzioni, e questo appunto chiaramente significa l' espressione $\frac{A+C+D}{B}$, ec. egli è pertanto evidente, che $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} + \frac{D}{B}$, ec. è lo stesso, che $\frac{A+C+D}{B}$, ec.

COROLLARIO XXX.

IMmaginando diviso l' antecedente d' una proporzione in più parti eguali, o disuguali, io dico, che la proporzione dell' antecedente intiero al conseguente è una medesima cosa con l' aggregato di tutte le proporzioni [minori di essa pel corollario XVII.] che le parti dello stesso antecedente anno verso il conseguente. Sia per cagion d' esempio la proporzione $\frac{S}{B}$, e l' antecedente S s' immagini diviso ad arbitrio nelle parti A, C, D, ec. io dico, che la proporzione $\frac{S}{B}$ è una medesima cosa con l' aggregato $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} + \frac{D}{B}$, ec.

Imperocchè essendo S lo stesso, che $A+C+D$, ec. egli è visibile, che $\frac{S}{B}$ è lo stesso, che $\frac{A+C+D}{B}$, ec. ma per l' assioma VIII. $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} + \frac{D}{B}$, ec. è lo stesso, che $\frac{A+C+D}{B}$, ec. adunque la proporzione $\frac{S}{B}$ è la medesima cosa con l' aggregato $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} + \frac{D}{B}$, ec.

SCOLIO.

NOn è difficile a concepire, che aggiungendo insieme quelle *contenenze minori* coi loro *resti* corrispondenti, le quali competono a ciascuna delle parti A, C, D, ec. dell' antecedente S rispetto alle aliquote del comun conseguente B, ne risulti un aggregato di *contenenze minori*, e di *resti* corrispondenti, che è uguale alla *contenenza totale* congiunta al suo *resto* corrispondente, la quale appartiene all' intiero antecedente S rispetto alle medesime aliquote del conseguente B; di modo che la proporzione *totale* $\frac{S}{B}$ non è punto diversa dall' aggregato delle proporzioni parziali $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{B}$, ec.

COROLLARIO XXXI.

LE proporzioni minori $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{B}$, ec. dall' aggregato delle quali è costituita la proporzione maggiore $\frac{S}{B}$, sono le parti di essa; onde rappresentando l' espressione generale $\frac{S}{B}$ qualunque proporzione, ne siegue, che qualunque proporzione è divisibile in parti, anzi in qualsivoglia numero di parti, perchè l' antecedente S è divisibile in qualsivoglia numero di parti A, C, D, ec. alle quali corrispondono respettivamente le proporzioni minori $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{B}$, ec.

COROLLARIO XXXII.

SE sono tra loro eguali tutte le parti A, C, D, ec. nelle quali s' immagina diviso l' antecedente S, è chiaro pel corollario VIII., che saranno tra loro eguali tutte le proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{B}$, ec. che in virtù del corollario precedente sono parti della proporzione $\frac{S}{B}$; adunque per la definizione IV., ciascuna delle proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{B}$, ec. è aliquota della propor-

zio-

zione $\frac{S}{B}$; anzi per la definizione V. ciaſcuna delle dette proporzioni è aliquota *ſimile* di $\frac{S}{B}$, come ciaſcuna delle parti A, C, D, ec. la è di S.

COROLLARIO XXXIII.

E Quindi ſiegue, che rappreſentando con la lettera p qualſivoglia numero, e con $\frac{a}{B}$ qualunque proporzione, la medeſima proporzione $\frac{a}{B}$ è aliquota della proporzione $\frac{pa}{B}$; anzi è aliquota *ſimile* di $\frac{pa}{B}$, come a la è di pa.

Imperocchè l' antecedente pa della proporzione $\frac{pa}{B}$ può concepirſi diviſo in tante parti tra loro eguali, quante unità contiene il numero p.

AVVERTIMENTO.

VEnendo occaſione di citare nel proſeguimento di queſto trattato qualcuno dei XXXIII. corollarj regiſtrati di ſopra, queſti ſi chiameranno *corollarj de' principj*.

POSTULATO.

MI ſi conceda, che data qualunque proporzione $\frac{A}{B}$, e un' altra grandezza P di qualſivoglia ſpecie, poſſano aſſumerſi due altre grandezze S, ed X omogenee alla P tali, che ciaſcuna delle due proporzioni $\frac{P}{S}$, ed $\frac{X}{P}$ ſia eguale alla data proporzione $\frac{A}{B}$.

Non involve alcuna repugnanza il concepire una grandezza S tale, che tutte le aliquote *ſimili* di B, e di S ſieno *egualmente contenute*, e con la continua *corriſpondenza* di reſti [nulli, o reali] ne' reſpettivi antecedenti A, e P.

E nemmeno repugna il concetto di una grandezza X tale, che tutte le aliquote *ſimili* di B, e di P ſieno *contenute egualmente*, e con la continua corriſpondenza di reſti [nulli, o reali] degli antecedenti reſpettivi A, ed X; onde il poſtulato non può ragionevolmente rifiutarſi.

TEOREMA I.

SE nelle due ſeguenti proporzionalità $A.B::C.D$, ed $a.b::c.d$ tre termini della prima ſono eguali a tre termini della ſeconda preſi col *medeſimo ordine*, anche l' altro termine della prima proporzionalità è uguale all' altro termine *corriſpondente* della ſeconda.

Non è punto neceſſario, che i due ultimi termini delle ſuddette proporzionalità ſieno omogenei ai due primi.

DIMOSTRAZIONE.

ALlorchè la A, o la B dee provarſi eguale alla ſua corriſpondente a, ovvero b, ſi à per la ſuppoſizione $C=c$, e $D=d$; onde pel corollario VIII. de' principj, ſi à $C.D::c.d$; ma per l' ipoteſi $A.B::C.D$, ed $a.b::c.d$; adunque pel corollario XII. de' principj $A.B::a.b$, e pel corollario XXI. de' principj, ſe $A=a$, ſarà $B=b$, e ſe $B=b$, ſarà $A=a$.

Quando poi dovrà dimoſtrarſi l' eguaglianza della C, o della D con la ſua corriſpondente c, ovvero d, ſarà per l' ipoteſi $A=a$, e $B=b$; di modo che in virtù del corollario VIII. de' principj ſi avrà $A.B::a.b$; ma per la ſuppoſizione, e *traſponendo* $C.D::A.B$, come pure $c.d::a.b$; adunque pel corollario XII. de' principj $C.D::c.d$, e pel corollario XXI. de' principj, ſe $C=c$, ſarà $D=d$, e ſe $D=d$, ſarà $C=c$; il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA II.

LA proporzione è una ſpecie di grandezza:

E qualſivoglia proporzione $\frac{A}{B}$ è una grandezza omogenea a qualſivoglia altra proporzione $\frac{C}{D}$, quantunque i termini dell' una non ſieno omogenei ai termini dell' altra.

Dimoſtrazione della prima parte.

PEl corollario XVII. de' principj, ed anche pe' corollarj XVIII., e XIX. de' principj, la proporzione è capace d' aumento, e di dimi-

diminuzione; adunque per la definizione I., la proporzione è una ſpecie di grandezza. Il che dovea dimoſtrarſi in primo luogo.

Altra dimoſtrazione della prima parte.

PE' corollarj XXVIII., e XXIX. de' principj, la proporzione è diviſibile in parti; adunque pel coroll. I. de' principj la proporzione è una ſpecie di grandezza. Il che dovea primieramente dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

ALla proporzione $\frac{A}{B}$ in ordine alla proporzione $\frac{C}{D}$, o compete la definizione X., o la definizione XIV., oppure la definizione XV.

Nel primo caſo ambedue le proporzioni ſuddette ſono eguali; nel ſecondo caſo $\frac{A}{B}$ è minore di $\frac{C}{D}$, e nel terzo caſo $\frac{A}{B}$ è maggiore di $\frac{C}{D}$, cioè pel corollario XIV. de' principj $\frac{C}{D}$ è minore di $\frac{A}{B}$.

Allorchè $\frac{A}{B}$ è minore di $\frac{C}{D}$, ſi moltiplichi pel numero L l' antecedente A di $\frac{A}{B}$; egli è chiaro, che il numero L può eſſere così grande, che la proporzione di LA verſo B ſuperi la proporzione di C verſo D; poichè pel corollario XX. de' principj, ſe ſalvo il conſeguente di una proporzione, creſce il ſuo antecedente, creſce anche la medeſima proporzione.

Quando poi $\frac{C}{D}$ è minore di $\frac{A}{B}$, ſi moltiplichi l' antecedente C pel numero K, e ſi proverà ſimilmente, che il numero K eſſer può così grande, che $\frac{KC}{D}$ ſia maggiore di $\frac{A}{B}$; ma pel corollario XXXIII. de' principj, $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ ſono aliquote reſpettivamente di $\frac{LA}{B}$, e di $\frac{KC}{D}$, conforme A è aliquota di LA, e C di KC; adunque ſiccome LA, e KC ſono reſpettivamente lo ſteſſo, che A moltiplicato per L, e C moltiplicato per K, così $\frac{LA}{B}$, e $\frac{KC}{D}$

ſo-

ſono reſpettivamente la medeſima coſa, che $\frac{A}{B}$ moltiplicata per L, e $\frac{C}{D}$ moltiplicata per K, e ciò in virtù della definizione II.; poichè ſiccome A ſi prende per concepire LA, e C ſi prende per concepire KC tante volte, quante unità contengono i reſpettivi numeri L, e K, così $\frac{A}{B}$ ſi prende per formare $\frac{LA}{B}$, e $\frac{C}{D}$ ſi prende per formare $\frac{KC}{D}$ tante volte, quante unità contengono gl' iſteſsi numeri reſpettivi L, e K.

E quindi le proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ ſono due grandezze, o eguali tra loro, ovvero l' una è minore, o maggiore dell' altra in modo che la minore, moltiplicata per qualche numero, può ſuperar la maggiore; adunque per la definizione III. $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ ſono due grandezze omogenee. Il che dovea dimoſtrarſi in ſecondo luogo.

COROLLARIO I.

GIacchè la proporzione è una ſpecie di grandezza, poſſono attribuirſi alla proporzione tutte quelle proprietà, che competono alla grandezza in generale.

COROLLARIO II.

I. POſte due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$; io dico, che la prima in ordine alla ſeconda à proporzione geometrica.

Imperocchè dividaſi l' antecedente C della ſeconda proporzione $\frac{C}{D}$ in qualſivoglia numero n d' aliquote x; ſarà $C = nx$, e $\frac{C}{D} = \frac{nx}{D}$ prendaſi pel poſtulato una parte z dell' antecedente A di $\frac{A}{B}$ tale, che ſia $\frac{z}{B}$ eguale ad $\frac{x}{D}$ (il che è ſempre poſsibile, purchè la $\frac{x}{D}$ non ſia maggiore di $\frac{A}{B}$); eſprima m la quantità di volte, che la z è contenuta in A, ed R, il reſto (nullo, o reale), che laſcia la ſteſſa z tolta da A quante volte ſi può, e ſi e si avrà $A = mz + R$, ed $\frac{A}{B} = \frac{mz + R}{B}$, ma per l'asſioma VIII. $\frac{mz}{B} + \frac{R}{B}$ è lo stesso, che $\frac{mz + R}{B}$; adunque $\frac{A}{B} = \frac{mz}{B} + \frac{R}{B}$. Se $\frac{x}{D}$ fosse maggiore di $\frac{A}{B}$, allora m sarebbe eguale a zero, ed R eguale ad A. Ora egli è visibile, che la proporzione $\frac{A}{B}$, cioè $\frac{mz}{B} + \frac{R}{B}$ contiene tante volte la proporzione *parziale* $\frac{z}{B}$, quante unità sono in m, e la contiene con una porzione residua $\frac{R}{B}$, che pel corollario XVII. de' principj è minore di $\frac{z}{B}$; ma $\frac{z}{B}$ è uguale per la costruzione ad $\frac{x}{D}$, che per cagione del numero arbitrario n, e in virtù del corollario XXXIII. de' principj, rappresenta qualsisia aliquota della proporzione $\frac{C}{D}$; adunque per la definizione VIII. $\frac{A}{B}$ à proporzione geometrica verso $\frac{C}{D}$.

II. Similmente considerando due altre proporzioni $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$; io dico, che la terza proporzione $\frac{E}{F}$ rispetto alla quarta $\frac{G}{H}$ à proporzione geometrica.

Imperocchè se si divide l'antecedente G della quarta proporzione $\frac{G}{H}$ nel numero arbitrario n d'aliquote xo, sarà $G = nxo$, e $\frac{G}{H} = \frac{nxo}{H}$; se poi si assume pel postulato una parte zo dell' antecedente E della terza proporzione $\frac{E}{F}$ in modo, che abbiasi $\frac{zo}{F} = \frac{xo}{H}$, e si designa con q la *quantità* di volte, che la zo è contenuta in E, col residuo di se minore, che si chiami Ro, sarà $E = qzo + Ro$, ed $\frac{E}{F} = \frac{qzo + Ro}{F}$, cioè per un'immediata conseguenza dell' asſioma VIII., sarà $\frac{E}{F} = \frac{qzo}{F} + \frac{Ro}{F}$, e siccome $\frac{zo}{F}$ è uguale per la costruzione ad $\frac{xo}{H}$, che rappresenta *qualsivoglia* aliquota di $\frac{G}{H}$ per cagione del numero arbitrario n, e pel co-

rol-

rollario XXXIII. de' principj, e siccome in oltre, il resto $\frac{Ro}{F}$ è minore di $\frac{zo}{F}$ pel corollario XVII. de' principj; così per la definizione VIII. $\frac{E}{F}$ à proporzione geometrica verso $\frac{G}{H}$. E' superfluo l'avvertire, che se $\frac{xo}{H}$ fosse maggiore di $\frac{E}{F}$, in tal caso q sarebbe zero, ed Ro sarebbe eguale ad E.

COROLLARIO III.

Poste quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$; io dico, che la prima verso la seconda à eguale, ovvero maggiore, o minor proporzione, che la terza verso la quarta.

I. Imperocchè in virtù del primo punto del corollario II., $\frac{C}{D}=\frac{nx}{D}$, ed $\frac{A}{B}=\frac{mz}{B}+\frac{R}{B}$, cioè ponendo in luogo di $\frac{z}{B}$ la sua eguale $\frac{x}{D}$, $\frac{A}{B}=\frac{mx}{D}+\frac{R}{B}$.

In virtù poi del secondo punto dello stesso corollario II., $\frac{G}{H}=\frac{nxo}{H}$, ed $\frac{E}{F}=\frac{qzo}{F}+\frac{Ro}{F}$, cioè sostituendo in cambio di $\frac{zo}{F}$ la sua eguale $\frac{xo}{H}$, $\frac{E}{F}=\frac{qxo}{H}+\frac{Ro}{F}$.

Ciò posto, in vece delle quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ si surroghino le loro quattro respettive espressioni, che sieguono $\frac{mx}{D}+\frac{R}{B}$; $\frac{nx}{D}$; $\frac{qxo}{H}+\frac{Ro}{F}$; $\frac{nxo}{H}$, e si vedrà, che se il numero indeterminato n è sempre eguale nelle due espressioni $\frac{nx}{D}$, ed $\frac{nxo}{H}$; e q è sempre eguale ad m, e se il resto $\frac{Ro}{F}$ corrisponde sempre all'altro resto $\frac{R}{B}$ nell'esser nullo, o reale, la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è uguale alla proporzione di $\frac{E}{F}$ verso $\frac{G}{H}$, e questo per le definizioni X., e XI.

II. Si vedrà eziandio, che se *qualcuna* delle proporzioni parziali $\frac{x}{D}$ è tale, che la *quantità m* di volte correlativa ad

 essa

essa $\frac{x}{D}$ nell' espressione di $\frac{A}{B}$ $\left[\text{cioè in } \frac{mx}{D} + \frac{R}{B}\right]$ sia maggiore, ovvero minore della *quantità* q di volte, che gli corrisponde in ordine ad $\frac{xo}{H}$ nell' espressione di $\frac{E}{F}$ $\left[\text{cioè in } \frac{qxo}{H} + \frac{Ro}{F}\right]$; allora la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore della proporzione di $\frac{E}{F}$ verso $\frac{G}{H}$; e questo per le definizioni XIV., e XV.

SCOLIO.

I. Tutto quello, che si è dedotto in molti de' corollarj de' principj in ordine alla *proporzione*, che anno tra di loro le grandezze *considerate in generale*, conviene ancora alla proporzione, che tra loro aver possono le *proporzioni considerate come grandezze*, e perciò i suddetti corollarj de' principj saranno in avvenire immediatamente applicati alla *proporzione*, che anno tra loro le proporzioni *considerate come grandezze* senza fare altra menzione del presente scolio.

II. Per comprendere la verità de' due corollarj precedenti II., e III. è sufficiente la loro illazione immediata dal presente teorema, nientedimeno ò voluto darne le dimostrazioni particolari, per assuefare il lettore a ben considerare la proporzione come *grandezza*.

Per ciò, che risguarda gli altri corollarj, che seguiranno, basterà dedurli immediatamente dal corollario I., che attribuisce alla proporzione tutte quelle proprietà, che convengono alla *grandezza in generale*. Dallo stesso corollario I. di questo teorema potrebbero speditamente dedursi anche i corollarj XI., e XII. de' principj.

COROLLARIO IV.

Sieno le due proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$;

Io dico in primo luogo, che se qualunque aliquota della proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore dell' aliquoliquota ſimile della proporzione $\frac{C}{D}$; anche $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$.

Io dico in ſecondo luogo, che ſe la proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione $\frac{C}{D}$; anche qualunque aliquota della proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore dell' aliquota ſimile della proporzione $\frac{C}{D}$: applicando l' aſſioma II. alla prima parte, e l' aſſioma III. alla ſeconda parte di queſto corollario, e conſiderando, che pel preſente teorema, le proporzioni ſono *grandezze*, ſi renderà manifeſta la verità d' ambedue le parti di queſto medeſimo corollario.

COROLLARIO V.

I. SE di tre proporzioni la prima è maggiore, o minore della ſeconda, e la ſeconda è maggiore, o reſpettivamente minore della terza, tanto più la prima ſarà maggiore, o reſpettivamente minore della terza.

II. Ovvero ſe la prima delle proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ è maggiore, o minore della ſeconda, e la proporzione $\frac{F}{G}$ è maggiore, o reſpettivamente minore della prima $\frac{A}{B}$, tanto più la medeſima $\frac{F}{G}$ ſarà maggiore, o reſpettivamente minore della ſeconda $\frac{C}{D}$.

SCOLIO.

QUi ſi dà luogo a provare il ſeguente

TEOREMA.

POſta queſta proporzionalità
$A.B::B.A$,

Io dico, che A è uguale a B.

DIMOSTRAZIONE.

SE la A non è uguale alla B, sarà maggiore, ovvero minore di B, e conseguentemente la B sarà minore, ovvero respettivamente maggiore della A; adunque pel corollario XVII. de' principj $\frac{A}{B}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{B}{B}$, e pel corollario XIX. de' principj $\frac{B}{B}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{B}{A}$; e quindi per la prima parte del presente corollario V., tanto più $\frac{A}{B}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{B}{A}$, il che ripugna all' ipotesi di $\frac{A}{B}$ eguale a $\frac{B}{A}$; adunque A non può esser maggiore, nè minore di B, e per conseguenza è uguale a B; il che doveva dimostrarsi.

Nello scolio annesso al corollario II. del teorema LXXVII., si darà un' altra dimostrazione di questo teorema, che sarà positiva.

COROLLARIO VI.

I. POste tre proporzioni, se due di esse sono eguali tra loro, e l' altra è maggiore, ovvero minore di una di quelle, sarà essa maggiore, o respettivamente minore anche dell' altra dell' eguali.

II. E ancora poste tre proporzioni, se due di esse sono tra loro eguali, e una di queste due è maggiore, o minore della terza, anche l' altra (cioè dell' eguali) è maggiore, ovvero respettivamente minore della terza.

La seconda parte di questo corollario comprende la proposizione XIII. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO VII.

POsta la proporzione $\frac{A}{B}$ maggiore, ovvero minore della pro-

por-

porzione $\frac{C}{D}$, ſe la proporzione $\frac{F}{G}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$, e la proporzione $\frac{H}{I}$ è uguale a $\frac{C}{D}$, ſarà ancora la proporzione $\frac{F}{G}$ maggiore, o reſpettivamente minore della proporzione $\frac{H}{I}$.

Imperocchè per la ſeconda parte del corollario VI. $\frac{F}{G}$ ſarà maggiore, o reſpettivamente minore di $\frac{C}{D}$, ed eſſendo $\frac{C}{D}=\frac{H}{I}$ ſarà ancora per la prima parte del medeſimo corollario VI. $\frac{F}{G}$ maggiore, o reſpettivamente minore di $\frac{H}{I}$.

COROLLARIO VIII.

POſto che ſi abbia $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, e che ſia $\frac{F}{G}$ maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{B}$, ed $\frac{H}{I}$ *minore*, ovvero *maggiore* di $\frac{C}{D}$; io dico, che $\frac{F}{G}$ ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{H}{I}$.

Imperocchè, pel corollario VI. di queſto teorema $\frac{F}{G}$ ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{C}{D}$; ma ſupponendoſi $\frac{H}{I}$ *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{C}{D}$, ſarà *traſponendo* pel corollario XIV. de' principj $\frac{C}{D}$ maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{H}{I}$; adunque pel corollario V. di queſto teorema $\frac{F}{G}$ ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{H}{I}$.

COROLLARIO IX.

SIccome in luogo di una grandezza può ſoſtituirſi un' altra grandezza eguale, così in luogo di una proporzione può ſoſtituirſi un' altra proporzione eguale.

COROLLARIO X.

DAte tre grandezze A, B, C, le due prime delle quali ſieno omogenee tra loro, e la terza ſia di qualunque ſpecie; io dico, che ſe A è maggiore, ovvero minore di B, anche $\frac{A}{B}$ ſarà maggiore, o reſpettivamente minore di $\frac{C}{C}$.

Imperocchè pel corollario XVII. de' principj $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{B}{B}$, ma pel corollario VII. de' principj $\frac{B}{B}$ è uguale a $\frac{C}{C}$; adunque per la prima parte del corollario VI. di queſto teorema $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{C}{C}$.

COROLLARIO XI.,

Che contiene il modo di aggiugnere una proporzione ad un' altra, o di ſottrarre una proporzione da un' altra.

SE ſi debba aggiungere la proporzione $\frac{C}{D}$ alla proporzione $\frac{A}{B}$ ovvero dee ſottrarſi da eſſa, prendaſi pel poſtulato $\frac{X}{B}=\frac{C}{D}$, e ſurrogando in virtù del corollario IX. la prima di queſte due proporzioni in luogo della ſeconda, ſarà per l' aſſioma VIII. $\frac{A+X}{B}$ uguale ad $\frac{A}{B}+\frac{X}{B}$, vale a dire ad $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$; e per l' aſſioma VII. $\frac{A-X}{B}$ ſarà eguale ad $\frac{A}{B}-\frac{X}{B}$, cioè ad $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$.

Oppure prendaſi pel poſtulato $\frac{Y}{D}=\frac{A}{B}$, e ſi avrà per le ſteſſe ragioni $\frac{Y+C}{D}$ eguale alla ſomma, e $\frac{Y-C}{D}$ eguale alla differenza delle proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$.

COROLLARIO XII.

Sieno le due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$; io dico, che se $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, anche $\frac{A \pm B}{B}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C \pm D}{D}$.

Imperocchè $\frac{B}{B} = \frac{D}{D}$ pel corollario VII. de' principj; adunque aggiungendo, ovvero sottraendo queste grandezze eguali dalle due grandezze $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$; la prima somma, ovvero differenza $\frac{A}{B} \pm \frac{B}{B}$ (cioè per gli assiomi VIII., e VII. $\frac{A \pm B}{B}$) sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della seconda somma, o differenza $\frac{C}{D} \pm \frac{D}{D}$ (cioè per gli assiomi VIII., e VII. $\frac{C \pm D}{D}$).

Il presente corollario comprende nella sua universalità le proposizioni XVIII., e XXVIII.; XVII., e XXIX. del V. libro d' Euclide.

DEFINIZIONE XVI.

Quando in questo corollario XII. il segno doppio $\pm$ si prende per positivo, tal modo d' argomentare dicesi *componendo*, ma quando il medesimo segno doppio prendesi per negativo, questo modo d' argomentare dicesi *dividendo*.

COROLLARIO XIII.

Sieno le quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{F}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{G}{D}$, le due prime delle quali anno un medesimo conseguente, e le due ultime anno anch' esse uno stesso conseguente; sia in oltre la seconda proporzione $\frac{F}{B}$ eguale alla quarta $\frac{G}{D}$, e la prima proporzione $\frac{A}{B}$ sia eguale, ovvero maggiore, o minore della terza $\frac{C}{D}$; io dico, che la proporzione $\frac{A \pm F}{B}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione $\frac{C \pm G}{D}$.

Imperocchè essendo per l' ipotesi, $\frac{F}{B} = \frac{G}{D}$, queste due grandezze eguali aggiunte all' altre due $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, o da esse sottratte, renderanno $\frac{A}{B} \pm \frac{F}{B}$ (cioè per gli assiomi VIII., e VII. $\frac{A \pm F}{B}$) eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D} \pm \frac{G}{D}$ (cioè per gli assiomi VIII., e VII. di $\frac{C \pm G}{D}$.

Questo corollario abbraccia nella sua universalità la proposizione XXIV. del V. libro d' Euclide: anzi potendosi in oltre supporre, che *F* significhi *B*, e che *G* significhi *D*, anche il precedente corollario XII. è compreso nel presente.

COROLLARIO XIV.

SIeno le quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{F}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{G}{D}$, le due prime delle quali abbiano come sopra un conseguente medesimo, e le due ultime abbiano anch' esse uno stesso conseguente: e sia ancora la prima proporzione $\frac{A}{B}$ eguale, ovvero maggiore, o minore della terza $\frac{C}{D}$, come pure la seconda proporzione $\frac{F}{B}$ sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della quarta proporzione $\frac{G}{D}$; io dico, che la proporzione $\frac{A + F}{B}$ è eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione $\frac{C + G}{D}$.

Imperocchè essendo $\frac{A}{B}$ una grandezza eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, ed essendo altresì $\frac{F}{B}$ una grandezza eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{G}{D}$; egli è visibile, che $\frac{A}{B} + \frac{F}{B}$ (cioè per l' assioma VIII. $\frac{A + F}{B}$) sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D} + \frac{G}{D}$

(cioè

(cioè per l' assioma VIII., di $\frac{C+G}{D}$).

Anche questo corollario comprende nella sua generalità la proposizione XXIV. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO XV.

POste due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, se A è maggiore, ovvero minore di B, e C non è maggiore, ovvero respettivamente non è minore di D; io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore della proporzione $\frac{C}{D}$.

Imperocchè, pigliando pel postulato la grandezza V omogenea alla D, in modo che $\frac{A}{B}$ sia eguale ad $\frac{V}{D}$; sarà pel corollario X. de' principj V maggiore, ovvero respettivamente minore di D, secondo che A sarà maggiore, ovvero minore di B; adunque V sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di D, quando C non sarà maggiore, ovvero respettivamente non sarà minore di D; e per conseguenza V sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di C; laonde pel corollario XVII. de' principj $\frac{V}{D}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{C}{D}$; ma $\frac{A}{B}$ per la costruzione è uguale ad $\frac{V}{D}$; adunque pel corollario VI. del presente teorema, $\frac{A}{B}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{C}{D}$.

AVVERTIMENTO.

LE proporzioni in avvenire saranno da me trattate come *grandezze*, e non sempre citerò questo secondo teorema, nè alcuni de' suoi corollarj, le verità de' quali supporrò notissime.

TEOREMA III.

DUe proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{D}{B}$, che anno gl' istessi conseguenti, sono tra loro come gli antecedenti, cioè $\frac{A}{B} . \frac{D}{B} :: A . D$.

DIMOSTRAZIONE.

IMmaginando l'antecedente D della seconda proporzione $\frac{D}{B}$ diviso in qualsivoglia numero n d'aliquote y, delle quali l'antecedente A della prima proporzione $\frac{A}{B}$ contenga la *quantità* m, con un resto r (nullo, o reale), si avrà $D = ny$, $\frac{D}{B} = \frac{ny}{B}$ $A = my + r$, ed $\frac{A}{B} = \frac{my + r}{B}$, cioè per l'assioma VIII. $\frac{A}{B} = \frac{my}{B} + \frac{r}{B}$; ma pel numero arbitrario n, e pel corollario XXXIII. de' principj $\frac{y}{B}$ rappresenta qualsisia aliquota della seconda proporzione $\frac{D}{B}$, e per la definizione VIII. quest' aliquota $\frac{y}{B}$ è simile alla y aliquota di D; in oltre la stessa aliquota $\frac{y}{B}$ è *tante* volte contenuta nella prima proporzione $\frac{A}{B}$, cioè in $\frac{my}{B} + \frac{r}{B}$ con un resto $\frac{r}{B}$ (nullo, o reale) *quante* volte l'aliquota y è contenuta in A con un resto r, nullo, o reale (poichè pel corollario XIX. de' principj $\frac{r}{B}$ è minore di $\frac{y}{B}$); adunque per le definizioni X., e XI. sussiste questa proporzionalità $\frac{my}{B} + \frac{r}{B} . \frac{ny}{B} :: my + r . ny$, cioè sussiste la proporzionalità equivalente $\frac{A}{B} . \frac{D}{B} :: A . D$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

DI due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{D}{B}$, che anno un medesimo conseguente, se l'una è uguale, ovvero maggiore, o minore dell' altra, anche l'antecedente di essa è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore dell' antecedente dell' altra;

Imperocchè essendo per questo teorema $\frac{A}{B} . \frac{D}{B} :: A . D$, il corollario X. de' principj fa conoscere, che se $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero

vero maggiore, o minore di $\frac{D}{B}$, anche A ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di D.

Queſto corollario contiene una nuova dimoſtrazione della prima parte del corollario XXI de' principj, cioè della prima parte della propoſizione IX. del V. libro d'Euclide.

E contiene ancora una nuova dimoſtrazione della prima parte del corollario XVI. de' principj, cioè della prima parte della propoſizione X. del V. libro d'Euclide.

COROLLARIO II.

SIa qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ e qualſivoglia grandezza C; io dico, che $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{C}$, come A a B.

E che $\frac{C}{C}$ ſta ad $\frac{A}{B}$, come B ad A.

Imperocchè primieramente pel coroll. VII. de' principj $\frac{C}{C}$ è uguale a $\frac{B}{B}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{C} :: \frac{A}{B} . \frac{B}{B}$; ma per queſto teorema $\frac{A}{B} . \frac{B}{B} :: A . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{C} :: A . B$.

Similmente, e in ſecondo luogo pel corollario VIII. de' principj $\frac{C}{C} . \frac{A}{B} :: \frac{B}{B} . \frac{A}{B}$, e pel teorema preſente $\frac{B}{B} . \frac{A}{B} :: B . A$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{C} . \frac{A}{B} :: B . A$.

COROLLARIO III.

DInotino A, B, C, D, E cinque grandezze omogenee in generale; io dico, che la proporzione di $\frac{D}{A}$ verſo $\frac{C}{B}$ ſta alla proporzione di $\frac{E}{A}$ verſo la ſteſſa $\frac{C}{B}$, come D ſta ad E.

Imperocchè per queſto teorema la proporzione di $\frac{D}{A}$ verſo $\frac{C}{B}$ ſta alla proporzione di $\frac{E}{A}$ verſo la ſteſſa $\frac{C}{B}$, come $\frac{D}{A}$ ſta ad $\frac{E}{A}$;

ma

ma per questo medesimo teorema $\frac{D}{A}$ sta ad $\frac{E}{A}$, come D sta ad E; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{D}{A}$ verso $\frac{C}{B}$, sta alla proporzione di $\frac{E}{A}$ verso la stessa $\frac{C}{B}$, come D sta ad E.

Avvertimento.

Per più distinta intelligenza di questo corollario può vedersi lo scolio, che segue la dimostrazione del teorema XVIII.

Corollario IV.

Sieno due grandezze A, B tra loro omogenee, e due altre grandezze C, D omogenee tra loro;

Io dico primieramente, che se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come A a B, la C è uguale alla D;

E dico secondariamente, che se $\frac{C}{D}$ sta ad $\frac{A}{B}$, come B sta ad A, la C è ancora eguale alla D;

Imperocchè primieramente abbiamo per l' ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: A . B$, e per questo teorema $\frac{A}{B} . \frac{B}{B} :: A . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{A}{B} . \frac{B}{B}$, e conseguentemente pel corollario XXI. de' principj $\frac{C}{D} = \frac{B}{B}$; e quindi pel corollario X. de' principj $C = D$.

Secondariamente si à per la supposizione $\frac{C}{D} . \frac{A}{B} :: B . A$, e pel presente teorema $\frac{B}{B} . \frac{A}{B} :: B . A$; laonde pel collorario XI. de' principj $\frac{C}{D} . \frac{A}{B} :: \frac{B}{B} . \frac{A}{B}$, e pel collorario XXI. de' principj $\frac{C}{D} = \frac{B}{B}$, cioè pel corollario X. de' principj $C = D$.

Teorema IV.

Se di quattro proporzioni, v. g. $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, $\frac{C}{Q}$, $\frac{D}{Q}$, la prima, e

la

la ſeconda anno un medeſimo conſeguente, e la terza, e la quarta anno anch' eſſe un medeſimo conſeguente, e ſe di più l'antecedente A della prima ſta all' antecedente B della ſeconda, come l' antecedente C della terza ſta all' antecedente D della quarta; io dico, che la prima di dette proporzioni ſta alla ſeconda, come la terza alla quarta.

Dee provarſi queſta proporzionalità: (1) $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: \frac{C}{Q} . \frac{D}{Q}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipoteſi, e per la definizione XI. i quattro antecedenti proporzionali A, B, C, D poſſono rappreſentarſi reſpettivamente così: $my + r$, ny, $myo + ro$, nyo, di modo che ponendo nella proporzionalità (1) in luogo de' quattro antecedenti queſti loro quattro valori, eſſa prenderà queſto aſpetto:

$\frac{my + r}{P} . \frac{ny}{P} :: \frac{myo + ro}{Q} . \frac{nyo}{Q}$.

E ſoſtituendo in queſt' ultima proporzionalità $\frac{my}{P} + \frac{r}{P}$ in luogo di $\frac{my + r}{P}$, ch' è lo ſteſſo per l' aſſioma VIII., e $\frac{myo}{Q} + \frac{ro}{Q}$ in cambio di $\frac{myo + ro}{Q}$, ch' è la medeſima coſa pel citato aſſioma VIII., la ſteſſa ultima proporzionalità, e conſeguentemente la proporzionalità (1), che gli equivale, diverrà in virtù del corollario IX. de' principj la ſeguente:

(2) $\frac{my}{P} + \frac{r}{P} . \frac{ny}{P} :: \frac{myo}{Q} + \frac{ro}{Q} . \frac{nyo}{Q}$.

Ma pel corollario XXXIII., e per la generalità del numero n, la $\frac{y}{P}$ eſprime qualſivoglia aliquota di $\frac{ny}{P}$, cioè di $\frac{B}{P}$, e la $\frac{yo}{Q}$ denota l' aliquota ſimile di $\frac{nyo}{Q}$, vale a dire di $\frac{D}{Q}$, e di più pel corollario XIX. de' principj $\frac{r}{P}$, e $\frac{ro}{Q}$ ſono minori delle reſpettive $\frac{y}{P}$, e $\frac{yo}{Q}$; adunque per le definizioni X., ed XI. la proporzionalità (2) ſuſſiſte, e in conſeguenza la proporzionalità (1), che gli equivale, ſuſſiſte anch' eſſa. Il che doveva dimoſtrarſi.

Altra

Altra dimostrazione di questo teorema.

ABbiamo per l' ipotesi $A . B :: C . D$, e pel teorema III. $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: A . B$, come pure $\frac{C}{Q} . \frac{D}{Q} :: C . D$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: \frac{C}{Q} . \frac{D}{Q}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

SE di quattro proporzioni, v. g. $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, $\frac{A}{Q}$, $\frac{B}{Q}$, la prima, e la seconda anno un medesimo conseguente P, e la terza, e la quarta anno anch' esse un medesimo conseguente Q: e di più la prima, e la terza anno un medesimo antecedente A, e la seconda, e la quarta anno anch' esse un medesimo antecedente Q; io dico, che la prima di dette proporzioni sta alla seconda, come la terza alla quarta.

Dee provarsi questa proporzionalità $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: \frac{A}{Q} . \frac{B}{Q}$.

E' chiaro, che questo corollario è un caso del presente teorema, poichè pel corollario VIII. de' principj, il primo antecedente A sta al secondo antecedente B, come il terzo antecedente A sta al quarto antecedente B; e la prima dimostrazione del teorema è manifestamente applicabile a questo suo corollario, purchè in vece di yo scrivasi y, e in cambio di ro scrivasi r, conforme esige la presente ipotesi di D (cioè nyo) eguale a B (cioè ad ny) e di C (cioè $nyo + ro$) eguale ad A (cioè ad $ny + r$).

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEl teorema III. $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: A . B$, ed $\frac{A}{Q} . \frac{B}{Q} :: A . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: \frac{A}{Q} . \frac{B}{Q}$.

COROLLARIO II.

SE di quattro proporzioni, che costituiscono una proporzionalità, v. g. (1) $\frac{A}{P} . \frac{B}{P} :: \frac{C}{Q} . \frac{D}{Q}$.

La prima, e la seconda anno un medesimo conseguente, e la terza, e la quarta anno anch' esse un medesimo conseguente; io dico, che gli antecedenti delle medesime proporzioni, ordinatamente presi, sono anch' essi proporzionali.

Dee provarsi questa proporzionalità $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Suppongasi in virtù del postulato quest' altra proporzionalità, $A.B::C.X$, e si avrà pel presente teorema $\frac{A}{P}.\frac{B}{P}::\frac{C}{Q}.\frac{X}{Q}$; adunque pel teorema I. il quarto termine di questa proporzionalità sarà eguale al quarto termine della proporzionalità (1), cioè $\frac{X}{Q}$ sarà eguale a $\frac{D}{Q}$, e conseguentemente pel corollario XXI. de' principj, X sarà eguale a D; ma si è supposto $\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$, adunque ponendo in vece di X la sua eguale D sarà eziandio pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEr l' ipotesi $\frac{A}{P}.\frac{B}{P}::\frac{C}{Q}.\frac{D}{Q}$, ma pel teorema III., e *trasponendo* $A.B::\frac{A}{P}.\frac{B}{P}$, come pure per lo stesso teorema III., e *trasponendo* $C.D::\frac{C}{Q}.\frac{D}{Q}$; adunque pel corollario XI. de' principj $A.B::C.D$.

TEOREMA V.

POste le quattro grandezze omogenee A, B, C, D, e divise le due ultime C, D in qualunque numero d' aliquote simili.

Posto ancora, che la prima A contenga *tante* volte le suddette aliquote della terza C con un resto minore di esse, o senza, *quante* volte la seconda B contiene le aliquote *simili* della quarta D con un resto minore di esse, o respettivamente senza; io dico, che sussiste questa proporzionalità (1) $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. SIgnifichi n qualunque numero, ed anche l' unità; m rap-

 pre-

presenti qualsivoglia numero, ed anche l'unità, e zero; dinotino y, ed yo le respettive aliquote simili di C, e di D, e in fine r, ed ro esprimano i resti, nulli, o reali appartenenti respettivamente ad A, ed a B; sarà sempre per le supposizioni del teorema, $A = my + r$, $B = myo + ro$, $C = ny$, $D = nyo$, ed $\frac{A}{B}$ sarà la stessa proporzione, che $\frac{my + r}{myo + ro}$, siccome $\frac{C}{D}$ sarà la stessa, che $\frac{ny}{nyo}$.

Egli è chiaro pel corollario XXV. de' principj, che quando i resti r, ed ro sono nulli, $\frac{A}{B}$ $\left[\text{cioè } \frac{my}{myo}\right]$ è uguale a $\frac{C}{D}$ $\left[\text{cioè ad } \frac{ny}{nyo}\right]$. Ma quando i suddetti resti sono reali, si designi con G qualsivoglia grandezza omogenea alla A, ed $\frac{A \pm G}{B}$ sarà la stessa proporzione, che $\frac{my + r \pm G}{myo + ro}$.

II. Ora pel corollario XVII. de' principj $\frac{A + G}{B}$ è maggiore di $\frac{A}{B}$, ma $\frac{A + G}{B}$ è la medesima proporzione, che $\frac{my + r + G}{myo + ro}$, e questa è maggiore di $\frac{my + y}{myo + yo}$, pel corollario XVIII. de' principj, perchè concependo l' aliquota y minore di G (il che è possibile pel corollario III. de' principj) la proporzione $\frac{my + r + G}{myo + ro}$ à maggior antecedente, e minor conseguente, che non à la proporzione $\frac{my + y}{myo + yo}$; adunque pel corollario VI. del teorema II. $\frac{A + G}{B}$ è maggiore di $\frac{my + y}{myo + yo}$, cioè di $\frac{(m + i)\, y}{(m + i)\, yo}$; ed essendo quest' ultima proporzione eguale pel corollario XXV. de' principj ad $\frac{ny}{nyo}$ $\left[\text{cioè a } \frac{C}{D}\right]$ ne siegue pel corollario VI. del teorema II., che $\frac{A + G}{B}$ è maggiore di $\frac{C}{D}$.

III. Similmente pel corollario XVII. de' principj $\frac{A - G}{B}$ è minore di $\frac{A}{B}$, ma $\frac{A - G}{B}$ è la medesima proporzione, che

$\frac{my + r - G}{myo + ro}$, e questa è minore di $\frac{my}{myo}$ pel corollario XVIII. de' principj [poichè concependosi G maggiore dell' aliquota y, tanto più la stessa G è maggiore del resto r, il quale è minore della y, di modo che la proporzione $\frac{my + r - G}{myo + ro}$ à minor antecedente, e maggior conseguente, che non à la proporzione $\frac{m}{myo}$]; adunque pel corollario VI. del teorema II. $\frac{A - G}{B}$ è minore di $\frac{my}{myo}$, e siccome pel corollario XXV. de' principj $\frac{my}{myo}$ è uguale ad $\frac{ny}{nyo}$ [cioè a $\frac{C}{D}$], così pel detto corollario VI. del teorema II. $\frac{A - G}{B}$ è minore di $\frac{C}{D}$.

IV. Si è provato nel secondo punto, che $\frac{A + G}{B}$ è maggiore di $\frac{C}{D}$, e nel terzo punto si è provato, che $\frac{A - G}{B}$ è minore di $\frac{C}{D}$; ma essendo G una grandezza arbitraria $\frac{A + G}{B}$ in virtù del corollario XVII. de' principj denota la proporzione $\frac{A}{B}$ accresciuta così poco, che si vorrà, ed $\frac{A - G}{B}$ pel medesimo corollario XVII. de' principj esprime la stessa proporzione $\frac{A}{B}$ diminuita così poco, che si vorrà; adunque la proporzione $\frac{A}{B}$ non può crescere senza divenir maggiore della proporzione $\frac{C}{D}$, e la medesima proporzione $\frac{A}{B}$ non può diminuire, senza divenir minore di $\frac{C}{D}$, e conseguentemente per l' assioma VI. $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{C}{D}$; poichè pel teorema II. le proporzioni sono grandezze tra loro omogenee.

COROLLARIO.

LA proporzionalità (1) così contrassegnata nell' esposizione del presente teorema, cioè la proporzione $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, si designi con questa espressione $\frac{my + r}{myo + ro} = \frac{ny}{nyo}$, che gli equivale, per quanto si è spiegato nel primo punto della dimostrazione di questo medesimo teorema; io dico, che $\frac{r}{ro} = \frac{ny}{nyo}$.

Imperocchè pel corollario XXV. de' principj $\frac{ny}{nyo} = \frac{my}{myo}$, e pel presente teorema $\frac{my + r}{myo + ro} = \frac{ny}{nyo}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{my + r}{myo + ro} = \frac{my}{myo}$; e quindi pel corollario XXVIII. de' principj $\frac{my + r - my}{myo + ro - myo} = \frac{my}{myo}$; ma per l'assioma V. $my + r - my$ è lo stesso che r, ed $myo + ro - myo$ è lo stesso che ro; adunque $\frac{r}{ro} = \frac{my}{myo}$; ed essendo pel corollario XXV. de' principj $\frac{my}{myo} = \frac{ny}{nyo}$; ne siegue pel corollario XI. de' principj, che $\frac{r}{ro} = \frac{ny}{nyo}$.

TEOREMA VI.

DInotino p, e q qualunque numero, ed a, e b due grandezze, che possono essere anche non omogenee, io dico, che sussiste questa proporzionalità: (1) $\frac{pa}{qa} = \frac{pb}{qb}$.

DIMOSTRAZIONE.

SI concepiscano due aliquote simili x, e xo delle respettive grandezze a, e b, talmente che designando con b qualsivoglia numero abbiasi $a = bx$, e $b = bxo$; si surroghino nella proporzionalità (1) in vece di a, e di b questi valori, ed essa si muterà nell' infrascritta, che gli equivale $\frac{pbx}{qbx} = \frac{pbxo}{qbxo}$, vale a dire in questa $\frac{qb(x)}{pb(x)} = \frac{pb(xo)}{qb(xo)}$.

Esprimasi con G qualsivoglia grandezza omogenea alla a; egli è chiaro, che $\frac{pb(x) \pm G}{qb(x)}$ è maggiore di $\frac{pb(xo)}{qb(xo)}$ nel caso, che il segno doppio $\pm$ significhi $+$, e che la stessa $\frac{pb(x) \pm G}{qb(x)}$ è mi-

nore

nore di $\frac{pb(xo)}{qb(xo)}$ nel caso, che il segno doppio $\pm$ significhi $-$; perchè x, ed xo sono aliquote simili de' respettivi conseguenti $qb(x)$, e $qb(xo)$, e pel corollario III. de' principj tra le aliquote, rappresentate dalla x, ve ne sono delle minori di G; adunque nel primo caso qualche aliquota del conseguente $qb(x)$ è contenuta *più* volte nel suo antecedente $pb(x)+G$, che la xo aliquota simile dell' altro conseguente $qb(xo)$ non è contenuta nel suo antecedente $pb(xo)$; e nel secondo caso qualche aliquota del conseguente $qb(x)$ è contenuta *meno* volte nel suo antecedente $pb(x)-G$, che la xo aliquota simile dell' altro conseguente $qb(xo)$ non è contenuta nel suo antecedente $pb(xo)$; e per conseguenza, in virtù della definizione XIV., $\frac{pb(x)+G}{qbx}$, cioè $\frac{pa+G}{qa}$, è maggiore di $\frac{pb(xo)}{qb(xo)}$, cioè di $\frac{pb}{qb}$, e in virtù della definizione XV. $\frac{pb(x)-G}{qb(x)}$, cioè $\frac{pa-G}{qa}$ è minore di $\frac{pb(xo)}{qb(xo)}$, cioè di $\frac{pb}{qb}$.

Si consideri ora, che a cagione di G quantità arbitraria, e in vigore del corollario XVII. de' principj $\frac{pa \pm G}{qa}$ denota la proporzione $\frac{pa}{qa}$ accresciuta, ovvero respettivamente diminuita così poco, che si vorrà; adunque la proporzione $\frac{pa}{qa}$ è tale, ch' essa non può crescere, ovvero diminuire, senza divenir maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{pb}{qb}$; laonde, essendo le proporzioni grandezze tra loro omogenee pel teorema II., rimane dimostrato in virtù dell' assioma VI., che $\frac{pa}{qa}$ è uguale a $\frac{pb}{qb}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

LA a, ovvero la b possono rappresentare anche l' unità, che considerata come grandezza, può concepirsi anch' essa divisa nelle sue aliquote da esprimersi con x, ovvero con xo.

COROLLARIO.

SIa qualunque proporzionalità $A . B : : C . D$ espressa secondo do la definizione XIV. in questa guisa $\frac{my+r}{ny}=\frac{myo+ro}{nyo}$, ovvero per l' assioma VIII. così: $\frac{my}{ny}+\frac{r}{ny}=\frac{myo}{nyo}+\frac{ro}{nyo}$, sarà pel presente teorema $\frac{my}{ny}=\frac{myo}{nyo}$ adunque togliendo grandezze eguali da grandezze eguali, cioè da $\frac{my}{ny}+\frac{r}{ny}$, togliendo $\frac{my}{ny}$, e da $\frac{myo}{nyo}+\frac{ro}{nyo}$ togliendo $\frac{myo}{nyo}$ resterà $\frac{r}{ny}=\frac{ro}{nyo}$.

Questo corollario potrà esprimersi così:

Divisi in qualunque numero d' aliquote simili i conseguenti respettivi B, e D delle due proporzioni eguali $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, e tolte quante volte si può le stesse aliquote dai loro respettivi antecedenti A, e C, il resto, che appartiene all' antecedente A sta al suo conseguente B, come il resto, che appartiene all' antecedente C sta al suo conseguente D. I termini della proporzione $\frac{C}{D}$ possono essere non omogenei a quelli della proporzione $\frac{A}{B}$.

TEOREMA VII.

POste due grandezze A, e B omogenee tra loro, e le altre due grandezze C, e D omogenee tra loro, e divise, la prima A, e la terza C in qualunque numero d' aliquote simili:

Posto ancora, che la seconda B contenga *tante* volte le suddette aliquote della prima A con un resto minore di esse, o senza, *quante* volte la quarta D contiene le aliquote simili della terza C con un resto minore di esse, o respettivamente senza;

Io dico, che sussiste questa proporzionalità $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. DEnotando con n qualsivoglia numero, ed anche l' unità, e con m qualsivoglia numero, ed anche l' unità, e zero, e rappresentando con y, e yo le respettive aliquote simili di A, e di C, e con r, e ro i resti (nulli, o reali), che appartengono respettivamente alla B, e alla D; si avrà $A=ny$; $B=my+r$; $C=nyo$; $D=myo+ro$, ed $\frac{A}{B}$ sarà la medesima proporzione, che

$\frac{ny}{my+r}$, siccome $\frac{C}{D}$ sarà la stessa che $\frac{nyo}{myo+ro}$. E' manifesto pel teorema VI., che quando i resti r, e ro sono nulli, $\frac{A}{B}$ [cioè $\frac{ny}{my}$] è uguale a $\frac{C}{D}$ [cioè $\frac{nyo}{myo}$]; ma quando i resti suddetti sono reali, si denoti con H qualsivoglia grandezza omogenea alla A, ed $\frac{A}{B \mp H}$ sarà la medesima proporzione, che $\frac{ny}{my+r \mp H}$.

II. Si concepisca ora l'aliquota y minore di H (il che è possibile pel corollario III. de' principj), e si rifletta, che pel teorema VI. si à $\frac{ny}{my} = \frac{nyo}{myo}$; ma pel corollario XIX. de' principj $\frac{ny}{my+r-H}$ è maggiore di $\frac{ny}{my}$; perchè essendo H maggiore dell' aliquota y, tanto più è maggiore del resto r, di maniera che il conseguente $my+r-H$ è minore dell' altro conseguente my; e per lo stesso corollario XIX. de' principj $\frac{nyo}{myo+ro}$ è minore di $\frac{nyo}{myo}$; perchè il conseguente $myo+ro$ è maggiore dell' altro conseguente myo; adunque pel corollario VIII. del teorema II. $\frac{ny}{my+r-H}$, cioè $\frac{A}{B-H}$ è maggiore di $\frac{nyo}{myo+ro}$, cioè di $\frac{C}{D}$.

III. Similmente si à pel teorema VI. $\frac{ny}{my+y} = \frac{nyo}{myo+yo}$; perchè la prima di queste due proporzioni è la stessa che $\frac{ny}{(m+y)}$ e la seconda è la stessa che $\frac{nyo}{(m+y)yo}$; ma pel corollario XIX. de' principj $\frac{ny}{my+r+H}$ è minore di $\frac{ny}{my+y}$, perchè H è maggiore d' y, di modo che il conseguente $my+r+H$ è maggiore dell' altro conseguente $my+y$; e $\frac{nyo}{myo+ro}$ è maggiore di $\frac{nyo}{myo+yo}$, perchè il resto ro è minore dell' aliquota yo, cosicchè il conseguente $myo+ro$ è minore dell' altro conseguente $myo+yo$; adunque pel corollario VIII. del teorema II. $\frac{ny}{my+r+H}$, cioè $\frac{A}{B+H}$ è minore di $\frac{nyo}{myo+ro}$, cioè di $\frac{C}{D}$.

IV. O' provato nel secondo punto, che $\frac{A}{B-H}$ è maggiore di

C

$\frac{C}{D}$, e nel terzo punto ò provato, che $\frac{A}{B+H}$ è minore di $\frac{C}{D}$; ma essendo H una grandezza arbitraria, $\frac{A}{B-H}$ rappresenta la proporzione $\frac{A}{B}$ accresciuta così poco, che si vorrà, ed $\frac{A}{B+H}$ per lo stesso corollario XIX. de' principj rappresenta la proporzione $\frac{A}{B}$ diminuita così poco, che si vorrà; adunque la proporzione $\frac{A}{B}$ non può crescere senza divenir maggiore della proporzione $\frac{C}{D}$, e la stessa proporzione $\frac{A}{B}$ non può diminuire senza divenir minore della proporzione $\frac{C}{D}$; e quindi essendo le proporzioni grandezze tra loro omogenee pel II. teorema, ne segue per l'assioma VI., che $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA VIII.

SE di quattro proporzioni, v. g. $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{D}{C}$, la prima, e la terza anno un medesimo conseguente B, e la seconda, e la quarta anno anch'esse un medesimo conseguente C: e di più la prima, e la seconda anno un medesimo antecedente A, e la terza, e la quarta anno anch'esse un medesimo antecedente D; io dico, che la prima proporzione sta alla seconda, come la terza alla quarta.

Dee provarsi, che sussiste questa proporzionalità:

(1) $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: \frac{D}{B} . \frac{D}{C}$.

DIMOSTRAZIONE.

SE dividesi D in qualunque numero n d'aliquote x, si avrà $D=nx$; $\frac{D}{B}=\frac{nx}{B}$, e $\frac{D}{C}=\frac{nx}{C}$; onde esprimendo con m la quantità di volte, che la x è contenuta in A, e con R il resto nullo, o reale, che lascia la stessa x tolta da A quante volte si può, sarà $A=mx+R$; $\frac{A}{B}=\frac{mx+R}{B}$, ed $\frac{A}{C}=\frac{mx+R}{C}$, cioè per l'asl' assioma VIII. $\frac{A}{B} = \frac{mx}{B} + \frac{R}{B}$, ed $\frac{A}{C} = \frac{mx}{C} + \frac{R}{C}$, e le due proporzioni $\frac{R}{B}$, $\frac{R}{C}$, quando sono reali (il che avviene qualunque volta R è reale) saranno minori delle respettive proporzioni $\frac{x}{B}$, $\frac{x}{C}$ pel corollario XVII. de' principj. Si surroghino pertanto nella proporzionalità (1) da provarsi in luogo de' suoi quattro termini i loro valori espressi di sopra, e si vedrà, ch' essa è la medesima, che la seguente: (2) $\frac{mx}{B} + \frac{R}{B} . \frac{mx}{C} + \frac{R}{C} :: \frac{nx}{B} . \frac{nx}{C}$.

La quale pel teorema V. è sussistente, poichè pel corollario XXXIII. de' principj le proporzioni $\frac{x}{B}$, ed $\frac{x}{C}$ sono aliquote delle respettive proporzioni $\frac{nx}{B}$, cioè $\frac{D}{B}$, ed $\frac{nx}{C}$, cioè $\frac{D}{G}$, e le proporzioni $\frac{R}{B}$, ed $\frac{A}{C}$ sono i resti, che lasciano le stesse aliquote $\frac{x}{B}$, ed $\frac{x}{C}$ tolte quante volte si può dalle proporzioni $\frac{mx}{B} + \frac{R}{B}$ $\left[\text{cioè } \frac{A}{B}\right]$, ed $\frac{mx}{C} + \frac{R}{C}$ $\left[\text{cioè } \frac{A}{C}\right]$ conforme chiaramente apparisce a chi considera la cosa con mediocre attenzione; adunque la proporzionalità (1), che equivale alla proporzionalità (2) sussiste anch' essa. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA IX.

DUe proporzioni, che anno il medesimo antecedente, sono come i loro conseguenti presi con ordine inverso, v. g. $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: C . B$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema VIII. $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: \frac{C}{B} . \frac{C}{C}$; ma pel corollario VII. de' principj $\frac{B}{B} = \frac{C}{C}$; adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: \frac{C}{B} . \frac{B}{B}$; ma pel teorema III. $\frac{C}{B} . \frac{B}{B} :: C . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: C . B$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

I. DI due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$, le quali anno il medeſimo antecedente, quella è maggiore, che à il *minor* conſeguente, e quella è minore, che à il *maggior* conſeguente.

II. E la maggiore, ovvero minore di due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$, che anno il medeſimo antecedente, à il *minore*, ovvero reſpettivamente il *maggior* conſeguente.

Imperocchè, ſuſſiſtendo pel teorema preſente queſta proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: C . B$, ne ſiegue pel corollario X. de' principj, che ſe C è maggiore, o minore di B, ſarà $\frac{A}{B}$ maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{C}$; e queſta è la pruova della prima parte.

Ne ſegue altresì per lo ſteſſo corollario X. de' principj, che ſe $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{C}$, la C ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore della B; e queſta è la prova della ſeconda parte.

La prima parte di queſto corollario contiene una nuova dimoſtrazione del corollario XIX. de' principj, e conſeguentemente della ſeconda parte della propoſizione VIII. del V. libro d' Euclide.

E la ſeconda parte di queſto corollario contiene una nuova dimoſtrazione della ſeconda parte del corollario XVI. de' principj, vale a dire della ſeconda parte della propoſizione X. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO II.

DUe proporzioni *eguali* $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$, che anno un medeſimo antecedente, anno eguali i conſeguenti.

Imperocchè avendoſi per queſto teorema la ſeguente proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: C . B$, ed eſſendo per l' ipoteſi $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$, ſarà altresì pel corollario X. de' principj $C = B$.

Que-

Questo corollario contiene una nuova dimostrazione della seconda parte del corollario XXI. de' principj, cioè della seconda parte della proposizione IX. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO III.

Siano date due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A}{C}$, che abbiano uno stesso antecedente A, e assumasi in virtù del postulato una proporzione $\frac{C}{X}$, che sia eguale alla prima proporzione data $\frac{A}{B}$, e che abbia per suo antecedente il conseguente C della seconda proporzione data $\frac{A}{C}$;

Assumasi ancora una quarta proporzione $\frac{B}{X}$, che abbia per suo antecedente il conseguente B della prima proporzione data $\frac{A}{B}$, e per suo conseguente abbia il conseguente X della prima proporzione assunta $\frac{C}{X}$; io dico, che la seconda proporzione data $\frac{A}{C}$ è uguale alla seconda proporzione assunta $\frac{B}{X}$.

Imperocchè per questo teorema $\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{C} :: C\,B$, e pel teorema III. $\frac{C}{X} \cdot \frac{B}{X} :: C\,B$; adunque pel corollario XI. de' principj sussiste questa proporzionalità: (1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{C} :: \frac{C}{X} \cdot \frac{B}{X}$.

Il di cui primo termine $\frac{A}{B}$ essendo eguale per la costruzione al suo terzo termine $\frac{C}{X}$ ne segue pel corollario XX. de' principj, che anche $\frac{A}{C}$ secondo termine di essa è uguale al di lei quarto termine $\frac{B}{X}$.

SCOLIO.

E' visibile, che in questo corollario si contiene la maniera di trasformare due proporzioni date, che abbiano il medesimo antecedente, in due altre proporzioni ad esse eguali, che abbiano no il medesimo conseguente, in modo, che gli antecedenti delle due nuove proporzioni sieno gl' istessi, che i conseguenti delle proporzioni date, ma sieno presi con ordine inverso, come apparisce dalla proporzionalità (1).

COROLLARIO IV.

Sieno le quattro grandezze omogenee A, B, C, D; io dico, che $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: \frac{C}{D} . \frac{B}{D}$.

Imperocchè per questo teorema $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: C . B$, e pel teorema III. $\frac{C}{D} . \frac{B}{D} :: C . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: \frac{C}{D} . \frac{B}{D}$.

COROLLARIO V.

Sieno parimente le quattro grandezze omogenee A, B, C, D; io dico, che $\frac{C}{A} . \frac{B}{A} :: \frac{D}{B} . \frac{D}{C}$.

Imperocchè pel teorema III. $\frac{C}{A} . \frac{B}{A} :: C . B$, e per questo teorema $\frac{D}{B} . \frac{D}{C} :: C . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{A} . \frac{B}{A} :: \frac{D}{B} . \frac{D}{C}$.

COROLLARIO VI.

Se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come D sta a B; io dico, che A è uguale a C.

Imperocchè $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: D . B$ per questo teorema, e per l'ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: D . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: \frac{A}{B} . \frac{C}{D}$, e conseguentemente pel corollario XXI. de' principj $\frac{A}{D} = \frac{C}{D}$; laonde pel medesimo corollario XXI. de' principj $A = C$.

COROLLARIO VII.

SE si à questa proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: \frac{A}{B} . \frac{C}{D}$; io dico, che $A = C$.

Imperocchè trasponendo, si avrà $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{A}{B} . \frac{A}{D}$; ma pel teorema presente $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: D . B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: D . B$; e quindi pel precedente corollario $A = C$.

Altra dimostrazione di questa corollario.

POichè per l'ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: \frac{A}{B} . \frac{C}{D}$; sarà pel corollario XXI. de' principj $\frac{A}{D}$ eguale a $\frac{C}{D}$, e per lo stesso corollario XXI. de' principj sarà eziandio A eguale a C.

COROLLARIO VIII.

SE si à questa proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: \frac{A}{B} . \frac{A}{C}$; io dico, che D è uguale a C.

Imperocchè si avrà pel coroll. XXI. de' principj $\frac{A}{D}$ eguale ad $\frac{A}{C}$, e quindi pel corollario II. di questo teorema D sarà eguale a C.

TEOREMA X.

POste quattro grandezze A, B, C, D, le due prime delle quali sono tra loro omogenee, e le due ultime sono omogenee tra loro. Se la prima sta alla seconda, come la terza alla quarta, starà ancora la seconda alla prima, come la quarta alla terza, cioè se $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, anche $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$.

In questo teorema si dimostra il corollario della proposizione IV. del V. libro d' Euclide.

Prima dimoſtrazione.

PEr l' ipoteſi $A.B::C.D$, e pel teorema III. $\frac{A}{A}.\frac{B}{A}::A.B$, come pure $\frac{C}{C}.\frac{D}{C}::C.D$, adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{A}.\frac{B}{A}::\frac{C}{C}.\frac{D}{D}$; ma pel corollario VII. de' principj $\frac{A}{A}=\frac{C}{C}$; adunque pel corollario XXI. de' principj $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

DEFINIZIONE XVII.

QUeſto modo d' argomentare, diceſi, *convertendo*.

Seconda dimoſtrazione.

IN virtù del corollario VIII. de' principj abbiamo queſta proporzionalità $\frac{B}{B}.\frac{A}{B}::\frac{D}{D}.\frac{C}{D}$; perchè pel corollario VII. de' principj, il primo termine di eſſa è uguale al terzo, e per l' ipoteſi il ſuo ſecondo termine è uguale al quarto; ma pel teorema III., e *traſponendo* $B.A::\frac{B}{B}.\frac{A}{B}$, e $D.C::\frac{D}{D}.\frac{C}{D}$; adunque pel corollario XII. de' principj $B.A::D.C$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Terza dimoſtrazione.

SEcondo la definizione X. ſia $B=ny$, $D=nyo$, e ſarà $A=my+r$, e $C=myo+ro$; coſicchè la proporzione $\frac{A}{B}$ ſarà la ſteſſa, che $\frac{my+r}{ny}$, e la proporzione $\frac{C}{D}$ la ſteſſa, che $\frac{myo+ro}{nyo}$, come pure la proporzionalità $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ſarà la medeſima, che $\frac{my+r}{ny}=\frac{myo+ro}{nyo}$; ma pel teorema VII. $\frac{ny}{my+r}=\frac{nyo}{myo+ro}$; adunque ponendo in queſt' ultima proporzionalità B in vece della ſua eſpreſſione ny, A in vece della ſua eſpreſſione $my+r$, D in cambio del ſuo valore nyo, e C in cambio del ſuo va-

lore

lore $myo + r$, si vedrà che sussiste la proporzionalità $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

QUando in virtù del postulato si assume una grandezza X tale, che abbiasi $\frac{X}{P} = \frac{A}{B}$, dee prendersi X quarta proporzionale dopo B, A, e P; mentre sarà $\frac{B}{A} = \frac{P}{X}$, e *trasponendo* $\frac{P}{X} = \frac{B}{X}$, indi *convertendo* $\frac{X}{P} = \frac{A}{B}$.

COROLLARIO I.

SIeno F, e G due grandezze, che possono essere anche di specie diversa, ed L esprima qualunque numero; io dico, che $\frac{F}{LF} = \frac{G}{LG}$.

Imperocchè pel corollario XIII. de' principj $\frac{LF}{F} = \frac{LG}{G}$; adunque *convertendo* $\frac{F}{LF} = \frac{G}{LG}$.

SCOLIO.

QUindi risulta l' infrascritto

TEOREMA.

Qualsivoglia aliquota al suo tutto sta come l' aliquota simile di qualunque altro tutto al medesimo suo tutto:

I due tutti possono essere tra loro non omogenei.

DIMOSTRAZIONE.

CHiamasi A il primo tutto, F qualsivoglia sua aliquota, ed L il numero delle volte, che essa entra in A, come pure si chiama B l' altro tutto, e G la sua aliquota simile; sarà per tanto A eguale ad LF, e B eguale ad LG, e pel presente corollario sussisterà questa proporzionalità $F . LF :: G . LG$, ma pel corollario IX. de' principj la medesima proporzionalità rimamane illesa, se in essa si pone A in cambio di LF, e B invece di LG; adunque si à $F.A::G.B$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO II.

Sieno le quattro proporzioni $\frac{B}{A}$, $\frac{B}{F}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{D}{G}$ tali, che la prima di esse sia eguale alla terza, e la seconda alla quarta; io dico, che à luogo questa proporzionalità $\frac{B}{A \pm F} = \frac{D}{C \pm G}$.

Imperocchè per l'ipotesi, e *convertendo* si avrà $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, ed $\frac{F}{B} = \frac{G}{D}$; adunque pel corollario XIII. del teorema II. sarà $\frac{A \pm F}{B} = \frac{C \pm G}{D}$, e di nuovo *convertendo* $\frac{B}{A \pm F} = \frac{D}{C \pm G}$.

Quando il segno dubbioso è negativo, F è minore di A, e G di C.

TEOREMA XI.

Poste quattro grandezze omogenee A, B, C, D. Se la prima sta alla seconda, come la terza alla quarta, starà ancora la prima alla terza, come la seconda alla quarta, cioè, se $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, sarà anche $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$.

In questo teorema si dimostra la proposizione XVI. del V. libro d' Euclide.

Prima dimostrazione.

Si à pel teorema IX. $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: C.B$, e pel teorema III. $\frac{C}{D} . \frac{B}{D} :: C.B$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{A}{C} :: \frac{C}{D} . \frac{B}{D}$; ma per l'ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; adunque pel corollario XXI. de' principj $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

DEFINIZIONE XVIII.

Questo modo d' argomentare, dicesi, *permutando*, e anche da molti *alternando*.

Seconda dimostrazione.

PEl corollario VIII. de' principj sussiste questa proporzionalità $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{C}{D}.\frac{C}{B}$; mentre il secondo termine di essa è uguale al quarto, essendo il medesimo, e il suo primo termine per l'ipotesi è uguale al terzo, ma pel teorema III., e *trasponendo* $A.C::\frac{A}{B}.\frac{C}{B}$, e pel teorema IX. $B.D::\frac{C}{D}.\frac{C}{B}$; adunque pel corollario XII. de' principj $A.C::B.D$. Il che dovea dimostrarsi.

Terza dimostrazione.

IN conformità della definizione XI. sia $B=ny$, D, nyo, e sarà $A=my+r$, e $C=myo+ro$; di modo che la proporzionalità data $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ prenderà questo aspetto $\frac{my+r}{ny}=\frac{myo+ro}{nyo}$; ma pel teorema V. sussiste questa proporzionalità $\frac{my+r}{myo+ro}=\frac{ny}{nyo}$, adunque ponendo A in luogo del suo valore $my+r$, C in luogo del suo valore $myo+ro$, B in vece della sua espressione ny, e D in vece della sua espresione nyo, si vede essere $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

SE si à questa proporzionalità $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, e il primo antecedente A è uguale, ovvero maggiore, o minore del secondo antecedente C; anche il primo conseguente B è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo conseguente D.

Imperocchè *permutando* sarà $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$, ma per l'ipotesi, il primo antecedente A di questa *nuova* proporzionalità è uguale, ovvero maggiore, o minore del primo conseguente C di essa; adunque pel corollario X. de' principj, anche il di lei secondo antecedente B è uguale, ovvero respettivamente maggiore, re, o minore del ſuo conſeguente D. In queſto corollario ſi dimoſtra la propoſizione XIV. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO II.

RAppreſenti L qualſivoglia numero, ed F, e G eſprimano due grandezze tra loro omogenee; io dico, che $LF . LG :: F . G$.

Imperocchè pel corollario XIII. de' principj $LF . F :: LG . G$; adunque *permutando* $LF . LG :: F . G$.

Queſto corollario contiene la propoſizione XV. del V. libro d' Euclide.

TEOREMA XII.

POſto un ordine di quante grandezze ſi vogliano A, B, C, D, ec. purchè ſieno omogenee tra loro, e un altr' ordine di altrettante grandezze F, G, H, I, parimente omogenee tra loro, e tali che la prima A del primo ordine ſtia alla ſeconda B, come la prima F del ſecondo ordine ſta alla ſua ſeconda G, e la ſeconda B del prim' ordine ſtia alla ſua terza C, come la ſeconda G del ſecond' ordine ſta alla ſua terza H, e la terza C del prim' ordine ſtia alla ſua quarta D, come la terza H del ſecond' ordine ſta alla ſua quarta I, e così ſempre, ec.

Io dico, che la prima A del prim' ordine ſta alla ſua ultima D, come la prima F del ſecond' ordine ſta alla ſua ultima I.

Queſto teorema dimoſtra la propoſizione XXII. del V. libro d' Euclide.

Prima dimoſtrazione.

I. IL corollario VIII. de' principj fa conoſcere ſuſſiſtente queſta proporzionalità: (1) $\frac{A}{B} . \frac{C}{B} :: \frac{F}{G} . \frac{H}{G}$.

Imperocchè avendoſi per l' ipoteſi $\frac{B}{C} = \frac{G}{H}$, ſi à *convertendo* $\frac{C}{B} = \frac{H}{G}$; cioè il ſecondo termine della proporzionalità (1) eguale al quarto; e di più ſi à per l' ipoteſi il primo termine della medeſima proporzionalità (1), cioè $\frac{A}{B}$, eguale al terzo termine, cioè ad $\frac{F}{G}$.

Ciò

Ciò posto si consideri, che in virtù del teorema III., e *trasponendo* si anno le due seguenti proporzionalità $A.C :: \frac{A}{B}.\frac{C}{B}$, ed $F.H :: \frac{F}{G}.\frac{H}{G}$; adunque pel corollario XII. de' principj, $A.C :: F.H$, cioè la prima A del prim' ordine sta alla sua terza C, come la prima F del second' ordine sta alla sua terza H.

II. Per provare, che la prima A del prim' ordine sta alla sua *quarta* D, come la prima F del second' ordine alla sua *quarta* I, riflettasi, che essendosi dimostrato nel primo punto, la A stare alla sua *terza* C, come la F alla sua *terza* H, può immaginarsi, che la A sia *prima*; la C *seconda*, e la D *terza* nel prim' ordine, e che la F sia *prima*, la H *seconda*, e la I *terza* nel second' ordine, di manierachè raziocinando, come si è fatto nel primo punto, si proverà del pari, che $A.D :: F.I$.

III. E similmente si procederà, quando ciascun' ordine di grandezze ne comprende più di quattro, passando gradatamente dal caso delle quattro grandezze al caso delle cinque, dal caso delle cinque al caso delle sei, e così sempre, ec. e riducendo in tal guisa il caso più composto *al caso più semplice delle tre grandezze*. Adunque il teorema è generalmente vero.

DEFINIZIONE XIX.

QUesto modo d' argomentare dicesi per *l' egualità ordinata*.

Seconda dimostrazione.

I. PEr l' ipotesi abbiamo $A.B :: F.G$, e pel teorema III. $\frac{A}{C}.\frac{B}{C} :: A.B$, come pure $\frac{F}{H}.\frac{G}{H} :: F.G$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{C}.\frac{B}{C} :: \frac{F}{H}.\frac{G}{H}$; ma il secondo termine $\frac{B}{C}$ di questa proporzionalità è uguale per l' ipotesi al quarto termine $\frac{G}{H}$; adunque pel corollario XXI. de' principj, il primo termine $\frac{A}{C}$ è uguale al terzo $\frac{F}{H}$, cioè $A.C :: F.H$.

II. Allorchè ciascun' ordine di grandezze ne comprende più di di tre, si osservi ciò che si è prescritto ne' punti secondo, e terzo della prima dimostrazione, e nello stesso modo si vedrà, che il teorema è vero generalmente.

Terza dimostrazione.

I. FAcciasi un ordine di tante proporzioni, quante sono le grandezze del prim' ordine meno una, e tutte queste proporzioni abbiano per comune antecedente la prima grandezza A del prim' ordine, ma il conseguente della prima proporzione sia *l' ultima* grandezza del prim' ordine; il conseguente della seconda proporzione sia la *penultima* grandezza del prim' ordine, e così sempre, finchè si giunga all' ultima proporzione, che avrà per suo conseguente la seconda grandezza del prim' ordine: v. g. nel nostro caso, che è di quattro grandezze il prim' ordine di proporzioni sarà questo: $\frac{A}{D}$, $\frac{A}{C}$, $\frac{A}{B}$.

II. Facciasi con le grandezze del second' ordine un ordine secondo di proporzioni in un modo simile a quello, che si è tenuto nel formare il prim' ordine di proporzioni, e nel caso nostro, il second' ordine di proporzioni sarà il seguente $\frac{F}{I}$, $\frac{F}{H}$, $\frac{F}{G}$ si dispongono poscia i due ordini di proporzioni così. $\frac{A}{D} . \frac{A}{C} . \frac{A}{B} \therefore \frac{F}{I} . \frac{F}{H} . \frac{F}{G}$.

III. Ora si à per l' ipotesi $B . C \therefore G . H$, e pel teorema IX. $\frac{A}{C} . \frac{A}{B} \therefore B . C$, come pure $\frac{F}{H} . \frac{F}{G} \therefore G . H$; adunque pel corollario XII. de' principj si avrà $\frac{A}{C} . \frac{A}{B} \therefore \frac{F}{H} . \frac{F}{G}$; ma si à per l' ipotesi $\frac{A}{B}$ secondo termine di quest' ultima proporzionalità eguale ad $\frac{F}{G}$ quarto termine di essa, adunque pel corollario XXI. de' principj si vede essere $\frac{A}{C} = \frac{F}{H}$.

IV. Di nuovo; per l' ipotesi $C . D \therefore H . I$, e pel teorema IX. $\frac{A}{D} . \frac{A}{C} \therefore C . D$, ed $\frac{F}{I} . \frac{F}{H} \therefore H . I$; adunque pel corollario XII.

de' principj $\frac{A}{D} \cdot \frac{A}{C} :: \frac{F}{I} \cdot \frac{F}{H}$; ma si è provato nel terzo punto, che $\frac{A}{C} = \frac{F}{H}$; adunque pel corollario XXI. de' principj $\frac{A}{D} = \frac{F}{I}$.

V. E' manifesto, che procedendo col medesimo metodo si proverà lo stesso in qualunque numero di grandezze, che formi i due ordini A, B, C, D, ec. ed F, H, I, G, ec. adunque la dimostrazione è generale.

COROLLARIO I.

DInotino p, e q, qualsivoglia numero, ed A, e C due grandezze, le quali non è punto necessario, che sieno omogonee tra loro; io dico, che $\frac{pA}{qA} = \frac{pC}{qC}$.

Imperocchè facendo due ordini di grandezze, cioè pA, A, qA da una parte, e pC, C, qC dall' altra, si avrà pel corollario XIII. de' principj $\frac{pA}{A} = \frac{pC}{C}$, e si avrà eziandio pel corollario del teorema X. $\frac{A}{qA} = \frac{C}{qC}$; adunque per l' egualità ordinata, pA, prima del prim' ordine sta alla sua ultima qA, come pC prima del second' ordine sta alla sua ultima qC.

Questo corollario contiene una dimostrazione positiva del teorema VI.

COROLLARIO II.

ABbiasi questa proporzionalità $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, i due primi termini della quale sono tra loro omogenei, e i due ultimi sono omogenei tra loro, e p significhi qualunque numero; io dico, che $\frac{pA}{B} = \frac{pC}{D}$.

Imperocchè, se si concepiscono due ordini di grandezze, cioè pA, A, B da una parte, e pC, C, D dall' altra, sarà $\frac{pA}{A} = \frac{pC}{C}$ pel corollario XIII. de' principj, ed è per l' ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; adunque per l' egualità ordinata, pA prima del prim' ordine è alla sua ultima B, come pC, prima del second' ordine, è alla sua ultima D.

Al-

Altra dimostrazione di questo corollario, indipendente dal teorema.

PEr la supposizione, le proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ sono eguali, e pel corollario XXXIII. de' principj $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ sono aliquote simili delle proporzioni respettive $\frac{pA}{B}$, e $\frac{pC}{D}$; adunque per la prima parte del corollario IV. del teorema II. $\frac{pA}{B}$ è uguale a $\frac{pC}{D}$.

SCOLIO.

QUesta seconda dimostrazione contiene una nuova dimostrazione del corollario XIII. de' principj, perchè la proporzione d' egualità $\frac{F}{F}$ è uguale alla proporzione d' egualità $\frac{G}{G}$ pel corollario VII. de' principj, ed $\frac{F}{F}$, e $\frac{G}{G}$ sono aliquote simili delle due respettive proporzioni $\frac{LF}{F}$, ed $\frac{LG}{G}$.

COROLLARIO III.

SIa, come nel precedente corollario, qualsivoglia proporzionalità $A \,.\, B :: C \,.\, D$, e p, e q rappresentino qualsivoglia numero; io dico, che $pA \,.\, qB :: pC \,.\, qD$;

Imperocchè pel corollario precedente si à $pA \,.\, B :: pC \,.\, D$, e pel corollario del teorema X. $B \,.\, qB :: D \,.\, qD$; adunque per l' egualità ordinata si à ancora $pA \,.\, qB :: pC \,.\, qD$.

In questo corollario si dimostra la proposizione IV. del V. libro d' Euclide.

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEl precedente corollario si à $\frac{pA}{B} = \frac{pC}{D}$, e *convertendo* $\frac{B}{pA} = \frac{D}{pC}$; adunque di nuovo pel precedente corollario si avrà $\frac{qB}{pA} = \frac{qD}{pC}$, e nuovamente *convertendo* $\frac{pA}{qB} = \frac{pC}{qD}$.

SCOLIO.

Questa seconda dimostrazione può essere indipendente dal teorema; perchè essa dipende dal corollario II., la seconda delle dimostrazioni del quale è indipendente dal teorema.

Altro scolio.

E' Anche vera la proposizione conversa del presente corollario, cioè che se sussiste questa proporzionalità:

(1) $pA \,.\, qB :: pC \,.\, qD$.

Sarà sussistente quest' altra ancora:

(2) $A \,.\, B :: C \,.\, D$.

Imperocchè, se la A per impossibile non è alla B, come la C alla D, può sempre concepirsi pel postulato la grandezza S tale, che sia

(3) $A \,.\, B :: C \,.\, S$.

Adunque pel corollario presente sarà

(4) $pA \,.\, qB :: pC \,.\, qS$.

E pel teorema I. il quarto termine qS della proporzionalità (4) sarà eguale al quarto termine qD della proporzionalità (1); laonde per l' assioma III. essendo $qS = qD$, sarà eziandio S eguale a D, e quindi ponendo D in luogo di S nella proporzionalità (3), ne risulterà la proporzionalità (2) pel corollario IX. de' principj. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO IV.

Sia qualunque proporzionalità $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, e sieno gli antecedenti A, e C maggiori de' loro respettivi conseguenti, io dico, che sussisterà questa proporzionalità:

(1) $\frac{A \pm B}{A \mp B} = \frac{C \pm D}{C \mp D}$.

Imperocchè pel corollario XII. del teorema II. si $A \pm B \,.\, B :: C \pm D \,.\, D$, e per lo stesso corollario si à eziandio $A \mp B \,.\, B :: C \mp D \,.\, D$, ovvero *convertendo* $B \,.\, A \mp B :: D \,.\, C \mp D$; adunque per l' egualità ordinata $\frac{A \pm B}{A \mp B} = \frac{C \pm D}{C \mp D}$.

Sco-

SCOLIO.

SI noti, che se ne' segni doppj $\pm$, ovvero $\mp$ di uno de' termini della proporzionalità (1) si prende il segno superiore, dee prendersi in tutti gli altri termini di essa il segno superiore; e all' incontro, se ne' segni doppj di uno de' termini della medesima proporzionalità (1) si fa valere il segno inferiore, dovrà farsi valere in tutti gli altri termini di esso il segno inferiore.

Altro scolio.

PEr mezzo del teorema presente si dimostrano gl' infrascritti teoremi.

TEOREMA PRIMO.

ABbiasi questa proporzionalità:

(1) $M . A :: N . B$.

I due primi termini della quale possono essere non omogenei ai due ultimi. Sia F qualsivoglia aliquota di A, e G l' aliquota simile di B;

Io dico, che à luogo quest' altra proporzionalità:

$M . F :: N . G$.

DIMOSTRAZIONE.

SI à per l' ipotesi $\frac{M}{A} = \frac{N}{B}$; ma per lo scolio annesso al corollario XIII. de' principj si à altresì $\frac{A}{F} = \frac{B}{G}$; adunque per l' *egualità ordinata* $\frac{M}{F} = \frac{N}{G}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA SECONDO.

ABbiasi la proporzionalità (1) come sopra, e sia I qualsivoglia aliquota di M, e K l' aliquota simile di N; io dico, che à luogo quest' altra proporzionalità:

$I . A :: K . B$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr lo ſcolio anneſſo al corollario del teorema X. abbiamo $\frac{I}{M}=\frac{K}{N}$; ma ſi ſuppone $\frac{M}{A}=\frac{N}{B}$; adunque *per l' egualità ordinata* $\frac{I}{A}=\frac{K}{B}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA TERZO.

ABbiaſi come nel primo di queſti tre teoremi la proporzionalità (1), e rimanga alle lettere *F*, ed *I*, come pure alle lettere *G*, e *K* il loro ſignificato eſpreſſo nei due primi teoremi di queſto ſcolio; io dico, che à luogo queſt' altra proporzionalità

$I.F::K.G$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr lo ſcolio anneſſo al corollario del teorema X. ſi à $\frac{I}{M}=\frac{K}{N}$, e per la ſuppoſizione $\frac{M}{A}=\frac{N}{B}$; ma per lo ſcolio anneſſo al corollario XIII. de' principj $\frac{A}{F}=\frac{B}{G}$; adunque *per l' egualità ordinata* $\frac{I}{F}=\frac{K}{G}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA XIII.

SIeno da una parte quante grandezze ſi vogliano, purchè ſieno omogenee tra loro, v. g. *A*, *B*, *C*, *D*, ed altrettante dall' altra parte, v. g. *H*, *I*, *K*, *L*, anch' eſſe omogenee tra loro, e tali, che la *A prima* della prima ſerie ſtia alla ſua *ſeconda B*, come la *K penultima* della ſeconda ſerie ſta alla ſua ultima *L*, e la *B ſeconda* della prima ſerie ſtia alla ſua *terza C*, come la *I antepenultima* della ſeconda ſerie ſta alla ſua *penultima K*, e la *C*, *terza* della prima ſerie, ſtia alla ſua *quarta D*, come la *H*, che precede l' *antepenultima* della ſeconda ſerie, ſta alla ſua *antepenultima I*, e così ſempre con ordine inverſo, ec.

Io dico, che la *prima A* della prima ſerie ſta alla ſua *ultima D*, come la *H prima* della ſeconda ſerie ſta alla ſua *ultima L*.

Questo teorema dimostra la proposizione XXIII. del V. libro d' Euclide.

Prima dimostrazione.

I. Il corollario VIII. de' principj mostra la sussistenza di questa proporzionalità:

(1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{B} :: \frac{K}{L} \cdot \frac{K}{I}$.

Imperocchè essendo per l' ipotesi $\frac{B}{C} = \frac{I}{K}$, cioè convertendo $\frac{C}{B} = \frac{K}{I}$, il secondo termine della proporzionalità (1) è uguale al quarto termine, e di più il suo primo termine $\frac{A}{B}$ è anch' egli eguale per l' ipotesi al terzo termine $\frac{K}{L}$, ma pel teorema III., e trasponendo $A . C :: \frac{A}{B} . \frac{C}{B}$, e pel teorema IX. $I . L :: \frac{K}{L} . \frac{K}{I}$ adunque pel corollario XII. de' principj $A . C :: I . L$, cioè la *prima* A della prima serie sta alla sua *terza* C, come l' *antepenultima* I della seconda serie sta alla sua *ultima* L.

II. Riflettendo, che pel punto precedente la A è alla C, coma la I alla L, si vedrà, che possono considerarsi la A come *prima*, la C come *seconda*, e la D come *terza* nella prima serie, e che possono considerarsi ancora la L come *ultima*, la I come *penultima*, e la H come *antepenultima* della seconda serie, e si vedrà altresì, che cogl' istessi raziocinj impiegati nel primo punto si proverà similmente, che $A . D :: H . L$.

III. Se le due serie costano di cinque grandezze per ciascuna, si procederà come si è fatto nel secondo punto, cioè la *quarta* grandezza della prima serie verrà considerata come *seconda*, e la *quinta* come *terza*; la grandezza poi, che *precede l' antepenultima* nella seconda serie, verrà considerata come *penultima*, e la grandezza, che *sta avanti a quella*, *che precede l' antepenultima*, *sarà* considerata come *antepenultima*.

Il simile si farà ne' casi, che le due serie sieno costituite da più di cinque grandezze, cioè si passerà *gradatamente* dal caso delle cinque al caso delle sei; dal caso delle sei al caso delle sette, e così sempre, ec. con ridurre i casi più composti al caso ſo più *ſemplice* delle tre grandezze. Adunque il teorema generalmente è vero.

DEFINIZIONE XX.

QUeſto modo d'argomentare diceſi *per l'egualità perturbata*.

Seconda dimoſtrazione.

I. SI à per l'ipoteſi $A \,.\, B :: K \,.\, L$, e pel teorema III. $\frac{A}{C} \,.\, \frac{B}{C} :: A \,.\, B$, ſi à altresì pel teorema IX. $\frac{I}{L} \,.\, \frac{I}{K} :: K \,.\, L$; adunque pel corollario XII. de' principj ſuſſiſte queſta proporzionalità $\frac{A}{C} \,.\, \frac{B}{C} :: \frac{I}{L} \,.\, \frac{I}{K}$, il ſecondo termine della quale $\frac{B}{C}$ è per l'ipoteſi eguale al quarto $\frac{I}{K}$; adunque pel corollario XXI. de' principj il primo ſuo termine $\frac{A}{C}$ è uguale al terzo $\frac{I}{L}$, cioè $A \,.\, C :: I \,.\, L$.

II. Quando ciaſcuna delle due ſerie è coſtituita di più di tre grandezze, facciaſi quello, che ſi è indicato nei punti ſecondo, e terzo della prima dimoſtrazione, e ſi conoſcerà nella medeſima maniera, che il teorema è generalmente vero.

Terza dimoſtrazione.

I. FOrmiſi con le grandezze della prima ſerie un ordine di proporzioni, come appunto ſi è fatto nel primo punto della terza dimoſtrazione del teorema XII., e ſi avrà ſimilmente queſto prim' ordine di proporzioni: $\frac{A}{D}$, $\frac{A}{C}$, $\frac{A}{B}$.

II. Con le grandezze della ſeconda ſerie facciaſi un ſecond' ordine di tante proporzioni, quante ſono le grandezze della ſeconda ſerie meno una, in maniera che tutte queſte proporzioni abbiano per comun conſeguente l' ultima grandezza L della ſeconda ſerie, ma l'antecedente della prima proporzione ſia la *prima* grandezza H della ſeconda ſerie, l'antecedente della ſeconda proporzione ſia la *ſeconda* grandezza I della ſeconda ſerie, l'antecedente della terza proporzione ſia la *terza* grandezza

dezza K della ſeconda ſerie, e così ſempre, finchè ſi giunga all' ultima proporzione, che avrà per ſuo antecedente la *penultima* grandezza della ſeconda ſerie. Indi i due ordini di proporzioni ſi diſpongano in queſta guiſa:

$$\frac{A}{D} \cdot \frac{A}{C} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{H}{L} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{K}{L} .$$

III. Ciò fatto ſi arguiſca così: in virtù dell' ipoteſi $B.C :: I.K$, e pel teorema IX. $\frac{A}{C} \cdot \frac{A}{B} :: B.C$; ſiccome pel teorema III. $\frac{I}{L} \cdot \frac{K}{L} :: I.K$; onde pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{C} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{I}{L} \cdot \frac{K}{L}$; ma per l' ipoteſi il ſecondo termine di queſta proporzionalità, cioè $\frac{A}{B}$ è uguale al quarto termine $\frac{K}{L}$; adunque pel corollario XXI. de' principj $\frac{A}{C} = \frac{I}{L}$.

IV. Nuovamente per l' ipoteſi $C.D :: H.I$, ma pel teorema IX. $\frac{A}{D} \cdot \frac{A}{C} :: C.D$, e pel teorema III. $\frac{H}{L} \cdot \frac{I}{L} :: H.I$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{D} \cdot \frac{A}{C} :: \frac{H}{L} \cdot \frac{I}{L}$; e perciò eſſendoſi provato nel terzo punto, che il ſecondo termine $\frac{A}{C}$ di queſta proporzionalità è uguale al quarto $\frac{I}{L}$, anche il primo termine di eſſa, cioè $\frac{A}{D}$ ſarà eguale al ſuo terzo termine $\frac{H}{L}$, pel corollario XXI. de' principj, e ſi avrà $A.D :: H.L$.

V. Lo ſteſſo metodo dimoſtra evidentemente la medeſima coſa in qualſivoglia numero di grandezze, che coſtituir poſſa le due ſerie; adunque la prova è generale.

SCOLIO.

MEdiante il preſente teorema XIII. ſi dimoſtrano queſti tre teoremi.

TEOREMA PRIMO.

SIa l' infraſcritta proporzionalità:

(1) $M.A :: N.B$.

Ed

Ed F ſia qualſivoglia aliquota di A in maniera, che L ſia il numero delle volte, che F entra in A; io dico, che ſuſſiſte queſt' altra proporzionalità:

$M . F :: LN . B$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipoteſi $\frac{M}{A}$ è uguale a $\frac{N}{B}$, ed A è uguale ad LF; adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{M}{LF} = \frac{N}{B}$; ma pel corollario XIII. de' principj $\frac{LF}{F} = \frac{LN}{N}$; adunque *per l' egualità perturbata* $\frac{M}{F} = \frac{LN}{B}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA SECONDO.

SIa la proporzionalità (1) come nel primo di queſti tre teoremi, ed I ſia qualunque aliquota di M in modo, che L ſia il numero delle volte che I entra in M; io dico, che ſuſſiſte queſt' altra proporzionalità:

$I . A :: N . LB$.

DIMOSTRAZIONE.

SI ſuppone $\frac{M}{A}$ eguale ad $\frac{N}{B}$, ed LI eguale ad M; adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{LI}{A} = \frac{N}{B}$. Si conſideri ora, che pel corollario del teorema X. ſi à $\frac{I}{LI} = \frac{B}{LB}$; ma ſi è provato, eſſere $\frac{LI}{A} = \frac{N}{B}$; adunque *per l' egualità perturbata* $\frac{I}{A} = \frac{N}{LB}$.

Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA TERZA.

ABbiaſi come nel primo di queſti teoremi la proporzionalità (1), e ſieno G, e K le aliquote reſpettive ſimili di N, e di B, in maniera che N ſia eguale ad LG, e B ad LK; io io dico, che sussistono le due proporzionalità infrascritte:

(2) $LM . A :: N . K$.

(3) $M . LA :: G . B$.

DIMOSTRAZIONE.

Avendosi per l'ipotesi $\frac{M}{A} = \frac{N}{B}$, si avrà trasponendo $\frac{N}{B} = \frac{M}{A}$, e pel primo di questi tre teoremi sarà:

(4) $N . K :: LM . A$.

Siccome pel secondo di questi tre medesimi teoremi sarà:

(5) $G . B :: M . LA$.

Adunque trasponendo la proporzionalità (4), si vedrà sussistere la proporzionalità (2), e trasponendo la proporzionalità (5), si vedrà sussistere la proporzionalità (3). Il che dovea dimostrarsi.

Altro scolio.

GL' infrascritti quattro teoremi XIV., XV., XVI. XVII. sono compresi ne' respettivi quattro teoremi X., XI., XII., e XIII., in virtù del I. corollario del teorema II. tuttavia non sarà inutile il considerare le dimostrazioni particolari.

TEOREMA XIV.

SE quattro proporzioni costituiscono una proporzionalità, v. g.

(1) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$.

Io dico, che *convertendo* la seconda di essa $\frac{C}{D}$ sta alla prima $\frac{A}{B}$, come la quarta $\frac{G}{H}$ sta alla terza $\frac{E}{F}$.

DIMOSTRAZIONE.

Prendasi pel postulato $\frac{X}{B} = \frac{C}{D}$, ed $\frac{E}{F} = \frac{A}{Y}$, e pel I. corollario del teorema IV. si avrà questa proporzionalità.

(2) $\frac{A}{B} . \frac{X}{B} :: \frac{A}{Y} . \frac{X}{Y}$.

I di cui primi tre termini sono eguali ai tre primi termini ni della proporzionalità (1), perchè il primo termine $\frac{A}{B}$ è comune, e i secondi, e terzi termini d' ambedue le proporzionalità sono per la costruzione uguali; adunque i quarti termini di esse sono eguali pel teorema I. cioè $\frac{X}{Y}$ è uguale a $\frac{G}{H}$.

Ora se si convertono i termini della proporzionalità (2), si à pel primo corollario del teorema IV. $\frac{X}{B} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{X}{Y} \cdot \frac{A}{Y}$, adunque ponendo in quest' ultima proporzionalità in vece delle proporzioni $\frac{X}{B}$, $\frac{X}{Y}$, $\frac{A}{Y}$ le respettive proporzioni ad esse eguali, $\frac{C}{D}$, $\frac{G}{H}$, $\frac{E}{F}$ si à ancora pel corollario IX. de' principj $\frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{G}{H} \cdot \frac{E}{F}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

LE quattro proporzioni, che costituiscono la proporzionalità (1) si esprimano, come si è fatto nel corollario III. del teorema II. al qual corollario abbiasi qui relazione, sostituendo però il numero m in cambio del numero q, conforme esige l' ipotesi del presente teorema, e la proporzionalità (1) diverrà quest' altra equivalente:

$\frac{mx}{C} + \frac{R}{B} \cdot \frac{nx}{D} :: \frac{mxo}{H} + \frac{Ro}{F} \cdot \frac{nxo}{H}$, e *convertendo* i termini di quest' ultima si avrà la proporzionalità seguente:

(3) $\frac{nx}{D} \cdot \frac{mx}{D} + \frac{R}{B} :: \frac{nxo}{H} \cdot \frac{mxo}{H} + \frac{Ro}{F}$.

La quale pel teorema VII. è sussistente, mentre le proporzioni parziali $\frac{x}{D}$, $\frac{xo}{H}$ sono aliquote simili delle respettive proporzioni totali $\frac{nx}{D}$, $\frac{nxo}{H}$ in vigore del corollario XXXIII. de' principj.

Ma in virtù del citato corollario III. del teorema II., e della supposizion del presente teorema $\frac{C}{D} = \frac{nx}{D}$, $\frac{A}{B} = \frac{mx}{D} + \frac{R}{B}$, $\frac{G}{H} = \frac{nxo}{H}$, $\frac{E}{F} = \frac{mxo}{H} + \frac{Ro}{F}$.

Adunque se nella proporzionalità (3) si surrogano grandez-

ze-

ze eguali in cambio d' eguali, sussisterà pel corollario IX. de' principj questa proporzionalità $\frac{C}{D} . \frac{A}{B} \therefore \frac{G}{H} . \frac{E}{F}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XV.

SE quattro proporzioni costituiscono una proporzionalità, v. g.
(1) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} \therefore \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$.

Io dico, che *permutando* la prima di esse $\frac{A}{B}$ sta alla terza $\frac{E}{F}$, come la seconda $\frac{C}{D}$ sta alla quarta $\frac{G}{H}$.

DIMOSTRAZIONE.

FAcciasi la medesima costruzione, che à servito per dimostrare il teorema antecedente, e si otterrà del pari questa proporzionalità:

(2) $\frac{A}{B} . \frac{X}{B} \therefore \frac{A}{Y} . \frac{X}{Y}$.

Si mostrerà ancora nella stessa maniera, che $\frac{X}{Y} = \frac{G}{H}$, e permutando i termini della proporzionalità (2), si vedrà sussistere pel teorema VIII. l' infrascritta terza proporzionalità.
$\frac{A}{B} . \frac{A}{Y} \therefore \frac{X}{B} . \frac{X}{Y}$.

Nella quale surrogando in luogo delle proporzioni $\frac{A}{Y}$, $\frac{X}{B}$, $\frac{X}{Y}$ le respettive proporzioni $\frac{E}{F}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{G}{H}$ ad esse eguali, si conoscerà in virtù del corollario IX. de' principj, che sussiste anche questa proporzionalità:
$\frac{A}{B} . \frac{E}{F} \therefore \frac{C}{D} . \frac{G}{H}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

ESprimendo le quattro proporzioni, che costituiscono la proporzionalità (1), come si è fatto nella seconda dimostrazione del precedente teorema, la stessa proporzionalità (1) prenderà questa sembianza:

$\frac{mx}{D}+\frac{R}{B} \cdot \frac{nx}{D} :: \frac{mxo}{H}+\frac{Ro}{F} \cdot \frac{nxo}{H}$.

E *permutando* i termini di quest' ultima, si otterrà l' infrascritta proporzionalità.

(3) $\frac{mx}{D}+\frac{R}{B} \cdot \frac{mxo}{H}+\frac{Ro}{F} :: \frac{nx}{D} \cdot \frac{nxo}{H}$.

Che in virtù del teorema V. sussiste, attesochè le proporzioni parziali $\frac{x}{D}$, $\frac{xo}{H}$ sono aliquote simili delle respettive proporzioni totali $\frac{nx}{D}$, $\frac{nxo}{H}$ pel corollario XXXIII. de' principj.

Ma per quanto si è spiegato nella seconda dimostrazione del teorema XIV. $\frac{A}{B}=\frac{mx}{D}+\frac{R}{B}$; $E=\frac{mxo}{H}+\frac{Ro}{F}$; $\frac{C}{D}=\frac{nx}{D}$, e $\frac{G}{H}=\frac{nxo}{H}$; adunque sostituendo nella proporzionalità (3) grandezze eguali in luogo d' eguali, ne risulta questa proporzionalità $\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F} :: \frac{C}{D} \cdot \frac{G}{H}$, la quale sussiste pel corollario IX. de' principj. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XVI.

Sieno da una parte tre proporzioni, v. g. $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{I}{L}$, e dall' altra tre proporzioni, v. g. $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$, $\frac{M}{N}$ tali, che si abbiano queste due proporzionalità.

(1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$.

(2) $\frac{C}{D} \cdot \frac{I}{L} :: \frac{G}{H} \cdot \frac{M}{N}$.

Io dico, che si avrà per l' *egualità ordinata* $\frac{A}{B} \cdot \frac{I}{L} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{M}{N}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. IN ordine alla proporzionalità (1) facciasi la costruzione, di cui mi sono valuto nella prima dimostrazione del teorema XIV., e detta proporzionalità si trasmuterà in quest' altra $\frac{A}{B} \cdot \frac{X}{B} :: \frac{A}{Y} \cdot \frac{X}{Y}$, i termini della quale si vedrà similmente, esſere eguali ai termini reſpettivi della proporzionalità (1); cioè ſarà $\frac{X}{B}=\frac{C}{D}$, $\frac{A}{Y}=\frac{E}{F}$, $\frac{N}{Y}=\frac{G}{H}$.

II. In ordine alla proporzionalità (2), prendaſi pel poſtulato $\frac{Z}{B}=\frac{I}{L}$, e ſiccome pel primo corollario del teorema IV. ſi avrà la ſeguente proporzionalità:

(3) $\frac{X}{B} \cdot \frac{Z}{B} :: \frac{X}{Y} \cdot \frac{Z}{Y}$.

Così il quarto termine di queſta, cioè $\frac{Z}{Y}$ ſarà eguale al quarto termine della proporzionalità (2), cioè ad $\frac{M}{N}$, e queſto in virtù del teorema I., poichè i tre primi termini della proporzionalità (3) ſono eguali ai tre primi termini della proporzionalità (2), cioè $\frac{X}{B}=\frac{C}{D}$, $\frac{Z}{B}=\frac{I}{L}$ per la coſtruzione, ed $\frac{X}{Y}=\frac{G}{H}$ pel primo punto.

III. Ora il primo corollario del teorema IV. moſtra $\frac{A}{B} \cdot \frac{Z}{B} :: \frac{A}{Y} \cdot \frac{Z}{Y}$; adunque ponendo in queſt' ultima proporzionalità in luogo delle proporzioni $\frac{Z}{B}$, $\frac{A}{Y}$, $\frac{Z}{Y}$, le reſpettive proporzioni $\frac{I}{L}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{M}{N}$ ad eſſe eguali, cioè la prima, e la ſeconda per la coſtruzione, e la terza pel ſecondo punto, avremo pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{B} \cdot \frac{I}{L} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{M}{N}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA XVII.

Sieno da una parte tre proporzioni, v. g. $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{I}{L}$, e dall' altra tre altre proporzioni, v. g. $\frac{P}{Q}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$, tali, che ſi abbiano queſte due proporzionalità:

(1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$.

(2) $\frac{C}{D} \cdot \frac{I}{L} :: \frac{P}{Q} \cdot \frac{E}{F}$.

Io dico, che per *l' egualità perturbata* ſarà $\frac{A}{B} \cdot \frac{I}{L} :: \frac{P}{Q} \cdot \frac{G}{H}$.

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

I. INtorno alla proporzionalità (1), prendaſi pel poſtulato $\frac{X}{B}=\frac{C}{D}$, ed $\frac{S}{X}=\frac{E}{F}$, e pel corollario V. del teorema IX., avremo queſta proporzionalità:

(3) $\frac{A}{B} . \frac{X}{B} :: \frac{S}{X} . \frac{S}{A}$.

I di cui tre primi termini ſono eguali ai tre primi termini della proporzionalità (1), poichè $\frac{A}{B}$ è comune, ed $\frac{X}{B}$, ed $\frac{S}{A}$ ſono eguali reſpettivamente a $\frac{C}{D}$, e ad $\frac{E}{F}$ per la coſtruzione; adunque pel teorema primo, il quarto termine $\frac{S}{A}$ dell' una è uguale al quarto termine $\frac{G}{H}$ dell' altra.

II. Intorno alla proporzionalità (2) prendaſi pel poſtulato $\frac{Z}{B}=\frac{I}{L}$, e pel corollario V. del teorema IX. ſuſſiſterà queſta proporzionalità:

(4) $\frac{X}{B} . \frac{Z}{B} :: \frac{S}{Z} . \frac{S}{X}$.

Il di cui primo, ſecondo, e quarto termine ſono per la coſtruzione eguali reſpettivamente al primo, ſecondo, e quarto termine della proporzionalità (2), cioè $\frac{X}{B}=\frac{C}{D}$, $\frac{Z}{B}=\frac{I}{L}$, ed $\frac{S}{X}=\frac{E}{F}$; adunque ſono eguali anche i terzi termini delle due medeſime proporzionalità, cioè $\frac{S}{Z}=\frac{P}{Q}$.

III. Finalmente pel più volte citato corollario V. del teorema IX. ſuſſiſte queſta proporzionalità:

(5) $\frac{A}{B} . \frac{Z}{B} :: \frac{S}{Z} . \frac{S}{A}$.

Adunque ſurrogando in eſſa in luogo di $\frac{Z}{B}$ la $\frac{I}{L}$, che gli equivale per la coſtruzione, in cambio di $\frac{S}{Z}$ la $\frac{P}{Q}$, che nel ſecondo punto gli è ſtata dimoſtrata eguale, e in vece di $\frac{S}{A}$ la $\frac{G}{H}$,

che

che gli è ſtata provata eguale nel primo punto, ſi avrà pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{B} \cdot \frac{I}{L} :: \frac{P}{Q} \cdot \frac{G}{H}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

SCOLIO.

Il metodo, che ò tenuto per dimoſtrare queſti due ultimi teoremi nel caſo di tre proporzioni per parte, potrà facilmente applicarſi a qualſivoglia numero di proporzioni per parte tali, che ſoddisfacciano alle condizioni richieſte dai due teoremi generali XII., e XIII.

TEOREMA XVIII.

Abbianſi queſte due proporzionalità:

(1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{G}{H} :: \frac{D}{E} \cdot \frac{K}{L}$.

(2) $\frac{O}{C} \cdot \frac{P}{I} :: \frac{Q}{F} \cdot \frac{R}{M}$.

Io dico, che la proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{D}{E}$ ſta alla proporzione di $\frac{O}{C}$ verſo $\frac{Q}{F}$, come la proporzione di $\frac{G}{H}$ verſo $\frac{K}{L}$ ſta alla proporzione di $\frac{P}{I}$ verſo $\frac{R}{M}$.

SCOLIO.

Poichè le proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{E}$ ſono grandezze pel teorema II., e pel corollario II. dello ſteſſo teorema $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{D}{E}$ à proporzione geometrica, ne ſiegue pel teorema II., che la proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{D}{E}$ è una grandezza, e pel corollario II. dello ſteſſo teorema ne ſiegue ancora, che la proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{D}{E}$ in *ordine* alla proporzione di $\frac{O}{C}$ verſo $\frac{Q}{F}$ à proporzione geometrica. Nella ſteſſa guiſa ſi proverà, che la proporzione di $\frac{G}{H}$ verſo $\frac{K}{L}$ è una grandezza, e che la pro-

por-

porzione di $\frac{G}{H}$ verso $\frac{K}{L}$ in *ordine* alla proporzione di $\frac{P}{I}$ verso $\frac{R}{M}$ à proporzione geometrica.

Simiglianti riflessioni dovranno farsi allorchè accaderà di considerare le *proporzionalità*, nelle quali entrano otto proporzioni, le proporzionalità, dico simili a quella, che nel teorema presente si propone a dimostrare.

Dimostrazione del teorema.

P*Ermutando* le due proporzionalità (1), e (2) si ottengono le due seguenti:

(3) $\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{E} :: \frac{G}{H} \cdot \frac{K}{L}$.

(4) $\frac{O}{C} \cdot \frac{Q}{F} :: \frac{P}{I} \cdot \frac{R}{M}$.

Vale a dire, che la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{D}{E}$ è una grandezza eguale alla proporzione di $\frac{G}{H}$ verso $\frac{K}{L}$, altra grandezza.

E che la proporzione di $\frac{O}{C}$ verso $\frac{Q}{F}$ è una grandezza eguale alla pzoporzione di $\frac{P}{I}$ verso $\frac{R}{M}$, altra grandezza.

Adunque pel corollario VIII. de' principj la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{D}{E}$ sta alla proporzione di $\frac{O}{C}$ verso $\frac{Q}{F}$, come la proporzione di $\frac{G}{H}$ verso $\frac{K}{L}$ sta alla proporzione di $\frac{P}{I}$ verso $\frac{R}{M}$.

Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

PEr meglio comprendere questa dimostrazione, e altre simili, convien sovvenirsi, che in vigore di ciò, che si è dimostrato nella seconda parte del teorema II., tutte le proporzioni sono grandezze tra loro omogenee. Gioverà ancora esprimere con una sola lettera per ciascuna le otto proporzioni, che costituiscono le proporzionalità (1), e (2) di questo teorema facendo $\frac{A}{B} = a$; $\frac{G}{H} = b$; $\frac{D}{E} = c$; $\frac{K}{L} = d$; $\frac{O}{C} = e$; $\frac{P}{I} = f$;

f; $\frac{Q}{F} = g$; $\frac{R}{M} = h$; poichè in tal maniera le proporzionalità (1), e (2) diverranno le ſeguenti reſpettive $a . b :: c . d$, ed $e . f :: g . h$; ſiccome le proporzionalità (3), e (4) diventeranno reſpettivamente le due infraſcritte $a . c :: b . d$, ed $e . g :: f . h$, ovvero $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ed $\frac{e}{g} = \frac{f}{h}$, di modo che la proporzionalità, che in queſto teorema ſi è dovuta dimoſtrare, può denotarſi più ſpeditamente così:

$$\frac{a}{c} . \frac{e}{g} :: \frac{b}{d} . \frac{f}{h} .$$

Altra dimoſtrazione del teorema.

RAppreſenti t una grandezza arbitraria di qualſivoglia ſpecie, e facciaſi in virtù del poſtulato: $\frac{A}{B} = \frac{a}{t}$; $\frac{G}{H} = \frac{b}{t}$; $\frac{D}{E} = \frac{c}{t}$; $\frac{K}{L} = \frac{d}{t}$; $\frac{O}{C} = \frac{e}{t}$; $\frac{P}{I} = \frac{f}{t}$; $\frac{Q}{F} = \frac{g}{t}$; $\frac{R}{M} = \frac{h}{t}$: e in tal guiſa pel teorema III., e pel corollario VIII., e il corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{G}{H}$ ſarà $\frac{a}{b}$, e la proporzione di $\frac{D}{E}$ verſo $\frac{K}{L}$ ſarà $= \frac{c}{d}$, e in virtù della proporzionalità ſuppoſta (1), e pel corollario IX. de' principj ſi avrà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e *permutando* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Similmente pel teorema III., e pel corollario VIII., e il corollario XI. de' principj, la proporzione di $\frac{O}{C}$ verſo $\frac{P}{I}$ ſarà $= \frac{e}{f}$, e la proporzione di $\frac{Q}{F}$ verſo $\frac{R}{M}$ ſarà $= \frac{g}{h}$; laonde in vigore della groporzionalità ſuppoſta (2), e pel corollario IX. de' principj ſi otterrà $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, e *permutando* $\frac{e}{g} = \frac{f}{h}$. Abbiamo pertanto due grandezze tra loro eguali $\frac{a}{c}$, e $\frac{b}{d}$ (ch' io chiamerò le *prime eguali*), e due altre grandezze tra loro eguali $\frac{e}{g}$, ed $\frac{f}{h}$ (ch' io chiamerò le *seconde eguali*) adunque pel corollario VIII. de' principj la grandezza $\frac{a}{c}$ prima delle *prime eguali*

ſta

ſta alla grandezza $\frac{e}{g}$ prima delle *ſeconde eguali*, come la grandezza $\frac{b}{d}$ ſeconda delle *prime eguali* ſta alla grandezza $\frac{f}{h}$, ſeconda delle *ſeconde eguali*; vale a dire ſuſſiſte queſta proporzionalità:

(5) $\frac{a}{c} \cdot \frac{e}{g} :: \frac{b}{d} \cdot \frac{f}{h}$.

Ma pel teorema III., e *traſponendo* la proporzione $\frac{a}{c}$ è uguale alla proporzione di $\frac{a}{t}$ verſo $\frac{c}{t}$, e la proporzione $\frac{e}{g}$ è uguale alla proporzione di $\frac{e}{t}$ verſo $\frac{g}{t}$:

Come pure la proporzione $\frac{b}{d}$ è uguale alla proporzione di $\frac{b}{t}$ verſo $\frac{d}{t}$, e la proporzione $\frac{f}{h}$ è uguale alla proporzione di $\frac{f}{t}$ verſo $\frac{h}{t}$; adunque ſurrogando nella proporzionalità (5) proporzioni eguali in cambio delle quattro proporzioni a verſo c; e verſo g; b verſo d; f verſo h, che coſtituiſcono i quattro termini di eſſa proporzionalità (5), vale a dire ſurrogando ne' quattro termini della medeſima proporzionalità grandezze eguali in luogo d' eguali, ſtarà pel corollario IX. de' principj la proporzione di $\frac{a}{t}$ verſo $\frac{c}{t}$ alla proporzione di $\frac{e}{t}$ verſo $\frac{g}{t}$, come la proporzione di $\frac{b}{t}$ verſo $\frac{d}{t}$ alla proporzione di $\frac{f}{t}$ verſo $\frac{h}{t}$.

Finalmente ſoſtituendo in luogo delle otto proporzioni $\frac{a}{t}$, $\frac{c}{t}$, $\frac{e}{t}$, $\frac{g}{t}$, $\frac{b}{t}$, $\frac{d}{t}$, $\frac{f}{t}$, $\frac{h}{t}$ le otto proporzioni reſpettive $\frac{A}{B}$, $\frac{D}{E}$, $\frac{O}{C}$, $\frac{Q}{F}$, $\frac{G}{H}$, $\frac{K}{L}$, $\frac{P}{I}$, $\frac{R}{M}$, le quali per la coſtruzione ſono alle prime otto correſpettivamente eguali, reſterà in virtù del corollario I., e del corollario IX. del teorema II., e in virtù del corollario VIII. de' principj reſterà, dico, dimoſtrato il teorema.

DE-

DEFINIZIONE XXI.

Dico, che una proporzione si moltiplica per un'altra, quando si prende una nuova proporzione tale, che sia quarta proporzionale dopo la proporzione di egualità, la proporzione *moltiplicanda*, e la proporzione *moltiplicante*; v. g. la proporzione $\frac{A}{B}$ si moltiplica per la proporzione $\frac{F}{H}$ quando si prende una nuova proporzione $\frac{T}{S}$ tale, che abbiasi $\frac{Q}{Q} . \frac{A}{B} :: \frac{F}{H} . \frac{T}{S}$.

SCOLIO,

Che contiene una maniera di moltiplicare una proporzione per un' altra.

I. Qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ può moltiplicarsi per qualsivoglia proporzione $\frac{F}{H}$ in questa maniera.

Prendasi la grandezza G omogenea alla F tale, che abbiasi questa proporzionalità $B . A :: F . G$, indi si consideri, che pel teorema IV. si avrà $\frac{B}{B} . \frac{A}{B} :: \frac{F}{H} . \frac{G}{H}$ cioè la nuova proporzione $\frac{G}{H}$ sarà quarta proporzionale dopo la proporzione d'egualità $\frac{B}{B}$ la *moltiplicanda* $\frac{A}{B}$, e la *moltiplicante* $\frac{F}{H}$, e quindi la proporzione $\frac{A}{B}$ sarà moltiplicata per la proporzione $\frac{F}{H}$.

II. Non è necessario, che i termini della proporzione *moltiplicante* $\frac{F}{H}$ sieno omogenei ai termini della *moltiplicata* $\frac{A}{B}$.

E' bensì necessario, che i termini della nuova proporzione $\frac{G}{H}$ (la quale, come si è detto, è quarta proporzionale dopo la proporzione d'egualità, la *moltiplicata*, e la *moltiplicante*) sieno omogenei ai termini della proporzione *moltiplicante*, cioè di $\frac{F}{G}$, come apparisce dalla costruzione.

DEFINIZIONE XXII.

Quella proporzione, che nasce dal moltiplicare una, o molte proporzioni per un'altra, chiamasi *prodotto* delle medesime proporzioni così moltiplicate, v. g. $\frac{G}{H}$ è il *prodotto* delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{F}{H}$ a tenore di quanto si è spiegato nell'antecedente scolio, e tale prodotto esprimesi ancora così: $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$.

SCOLIO.

I. Se il prodotto di due proporzioni si moltiplica per un' altra proporzione, la nuova proporzione, che ne risulta, chiamasi prodotto di tre proporzioni, v. g. moltiplicando $\frac{G}{H} = \frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ per $\frac{I}{L}$ si avrà $\frac{G}{H} \times \frac{I}{L} = \frac{A}{B} \times \frac{F}{H} \times \frac{I}{L}$ e sì l'una, come l'altra di queste due espressioni significheranno la proporzione $\frac{R}{L}$, purchè sia $H . G :: I . R$; mentre pel teorema IV. sarà $\frac{H}{H} . \frac{G}{H} :: \frac{I}{L} . \frac{R}{L}$, di modo che $\frac{R}{L}$ sarà eguale non solo a $\frac{G}{H} \times \frac{I}{L}$, ma ancora ad $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H} \times \frac{I}{L}$.

Similmente prendendo S quarta proporzionale dopo L, R, O, si otterrà $\frac{L}{L} . \frac{R}{L} :: \frac{O}{P} . \frac{S}{P}$, e la proporzione $\frac{S}{P}$ sarà eguale ad $\frac{R}{L} \times \frac{O}{P}$, cioè ad $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H} \times \frac{I}{L} \times \frac{O}{P}$, che esprime il prodotto delle quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{F}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{O}{P}$.

II. Egli è dunque visibile, che con questo metodo può sempre assumersi una proporzione *pura*, che sia eguale al prodotto di quante proporzioni si vorranno, e conseguentemente, che i prodotti di quante proporzioni si vogliano espressi nella seguente guisa: $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H} \times \frac{I}{L}$, ec. altro non rappresentano, che una *proporzione*, cioè equivagliono ad una proporzione *pura*;

il che dee notarsi diligentemente per intelligenza di ciò, che si dirà in avvenire.

III. Qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ moltiplicata per la proporzione d'egualità, v. g. per $\frac{Z}{Z}$, dà un prodotto eguale a se medesima; imperocchè per le definizioni XXI., e XXII. $\frac{Z}{Z} . \frac{A}{B} :: \frac{Z}{Z} . \frac{A}{B} \times \frac{Z}{Z}$; ma pel corollario VIII. de' principj $\frac{Z}{Z} . \frac{A}{B} :: \frac{Z}{Z} . \frac{A}{B}$; adunque $\frac{A}{B} \times \frac{Z}{Z}$ (quarto termine della prima proporzionalità) è uguale pel teorema I. ad $\frac{A}{B}$, quarto termine della seconda.

IV. Similmente la proporzione d' egualità moltiplicata per qualsisia proporzione $\frac{A}{B}$ dà un prodotto eguale alla semplice proporzione $\frac{A}{B}$, imperocchè per le definizioni XXI., e XXII. $\frac{Z}{Z} . \frac{Z}{Z} :: \frac{A}{B} . \frac{Z}{Z} \times \frac{A}{B}$; ma pel corollario VII. de' principj $\frac{Z}{Z} . \frac{Z}{Z} :: \frac{A}{B} . \frac{A}{B}$; adunque pel teoréma I. il quarto termine $\frac{Z}{Z} \times \frac{A}{B}$ della prima proporzionalità è uguale al quarto termine $\frac{A}{B}$ della seconda.

V. Adunque, se nel precedente articolo IV. si concepisce $A = B$, il prodotto $\frac{Z}{Z} \times \frac{B}{B}$ sarà eguale a $\frac{B}{B}$; donde è agevole ad inferire, che una proporzione d' egualità moltiplicata quante volte si vorrà per se medesima, o per altre proporzioni d' egualità, darà sempre un prodotto equivalente alla proporzione *pura* d' egualità.

VI. Da' precedenti articoli III., IV., e V. chiaramente deducesi, che qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ moltiplicata quante volte si vorrà per una, o più espressioni della proporzione d' egualità, sempre darà un prodotto equivalente alla proporzione pura $\frac{A}{B}$:

E che

E che moltiplicando la proporzione d'egualità quante volte si vorrà per se medesima, o per altre espressioni equivalenti a se medesima, e poscia moltiplicando il prodotto, che ne risulta per qualsivoglia proporzione $\frac{A}{B}$, il nuovo prodotto, che ne verrà, equivalerà alla proporzione pura $\frac{A}{B}$.

TEOREMA XIX.

RAppresentino $\frac{A}{B}$, ed $\frac{F}{H}$ due proporzioni in generale, i termini di una delle quali possono essere non omogenei a' termini dell' altra, e sia $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ il prodotto di esse;

Io dico primieramente, che se $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$, la F sarà eguale alla H:

Io dico in secondo luogo, che se la F è uguale alla H, il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ sarà eguale ad $\frac{A}{B}$:

Io dico in terzo luogo, che se $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{F}{H}$, la A sarà eguale alla B: e

Io dico in quarto luogo, che se la A è uguale alla B, il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ sarà eguale ad $\frac{F}{H}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr le definizioni XXI., e XXII. si à questa proporzionalità:

(I) $\frac{Z}{Z} . \frac{A}{B} :: \frac{F}{H} . \frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$;

Adunque pel corollario XXI. de' principj, se $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$, la proporzione $\frac{F}{H}$ sarà eguale alla proporzione d'egualità $\frac{Z}{Z}$; e conseguentemente pel corollario X. de' principj F sarà eguale ad H. E questa è la prova della prima parte.

II. Ma se F è uguale ad H, la proporzione $\frac{F}{H}$ sarà una proporzione d' egualità, e pel corollario VII. de' principj $\frac{F}{H}$ sarà eguale a $\frac{Z}{Z}$, laonde pel corollario XXI. de' principj il prodotto $\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$ sarà uguale ad $\frac{A}{B}$.

E questa è la prova della seconda parte.

III. L' ispezione della medesima proporzionalità (1) fa conoscere, che se $\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{F}{H}$, cioè se $\frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$, anche $\frac{Z}{Z}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$, e ciò pel corollario X. de' principj; adunque in virtù del medesimo corollario X. de' principj essendo $\frac{Z}{Z}=\frac{A}{B}$, la A è uguale alla B.

E questa è la prova della terza parte.

IV. Se poi la A è uguale alla B, la proporzione $\frac{A}{B}$ sarà d' egualità, e pel corollario VII. de' principj $\frac{F}{H}$ sarà eguale ad $\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$, cioè $\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$ sarà eguale ad $\frac{F}{H}$.

E questa è la prova della quarta parte.

TEOREMA XX.

RAppresentino $\frac{A}{B}$, ed $\frac{F}{H}$ due proporzioni in generale, come nel teorema precedente, e sieno le quattro grandezze X, Y, S, T tali, che abbiasi $\frac{X}{F}=\frac{A}{B}$; $\frac{H}{T}=\frac{A}{B}$; $\frac{S}{A}=\frac{F}{H}$; $\frac{B}{T}=\frac{F}{H}$;

Io dico, che il prodotto della proporzione data $\frac{A}{B}$ per l'altra proporzione data $\frac{F}{H}$, cioè $\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$, è uguale a ciascuna delle proporzioni seguenti:

$\frac{X}{H}$, $\frac{F}{T}$, $\frac{S}{B}$, $\frac{A}{T}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr le definizioni XXI., e XXII. si à:

(1) $\frac{Z}{Z}\cdot\frac{A}{B}\therefore\frac{F}{H}\cdot\frac{A}{B}\times\frac{F}{H}$.

Pel

Pel corollario I. del teorema IV.

(2) $\frac{F}{F} \cdot \frac{X}{F} :: \frac{F}{H} \cdot \frac{X}{H}$.

Pel corollario V. del teorema IX.

(3) $\frac{Y}{Y} \cdot \frac{H}{Y} :: \frac{F}{H} \cdot \frac{F}{Y}$.

Pel corollario V. del teorema IX.

(4) $\frac{B}{B} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{S}{A} \cdot \frac{S}{B}$.

Pel corollario IV. del teorema IX.

(5) $\frac{A}{A} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{B}{T} \cdot \frac{A}{T}$.

Si consideri ora, che i primi termini di ciascuna delle cinque proporzionalità (1), (2), (3), (4), e (5) sono tra loro eguali pel corollario VII. de' principj, e i secondi, e terzi termini di ciascuna di esse, sono eguali tra loro per la costruzione, o sono comuni; adunque pel teorema I. i quarti termini delle medesime proporzionalità sono tra loro eguali, cioè il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale a ciascuna delle quattro proporzioni seguenti $\frac{X}{H}$, $\frac{F}{Y}$, $\frac{S}{B}$, $\frac{A}{T}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO,

Che contiene quattro maniere di moltiplicare qualunque proporzione, per qualsivoglia altra proporzione.

E' Visibile, che da questo teorema nascono quattro maniere di moltiplicare qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ per qualunque altra proporzione $\frac{F}{H}$, poichè pel postulato possono sempre assumersi le due grandezze X, Y tali, che abbiasi $\frac{X}{F} = \frac{A}{B}$, ed $\frac{H}{Y} = \frac{A}{B}$, come pure due altre grandezze S, T tali che abbiasi $\frac{S}{A} = \frac{F}{H}$, e $\frac{B}{T} = \frac{F}{H}$.

COROL-

COROLLARIO.

I. CONfrontando insieme le due proporzionalità (1), e (2), si proverà con un modo consimile a quello, che si è tenuto nella dimostrazione del teorema, che se $\frac{X}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$, anche $\frac{X}{F}$ sarà uguale ad $\frac{A}{B}$.

II. Come pure paragonando le due proporzionalità (1), e (3), si proverà nella stessa guisa, che se $\frac{F}{Y}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$, anche $\frac{H}{Y}$ sarà eguale ad $\frac{A}{B}$.

III. Similmente mediante la comparazione delle due proporzionalità (1), e (4) si mostrerà, che se $\frac{S}{B}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$, anche $\frac{S}{A}$ sarà eguale ad $\frac{F}{H}$.

IV. E in fine il confronto delle due proporzionalità (1), e (5) somministrerà una simigliante maniera di dimostrare, che se $\frac{A}{T}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$, anche $\frac{B}{T}$ sarà eguale ad $\frac{F}{H}$.

TEOREMA XXI.

DInotino $\frac{A}{B}$, ed $\frac{F}{H}$ due proporzioni in generale, come ne' due teoremi precedenti;

Io dico in primo luogo, che se $\frac{A}{B}$ è uguale ad $\frac{H}{F}$ il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{A}$;

Io dico in secondo luogo, che se il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{A}$, la proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale alla proporzione $\frac{H}{F}$.

Dimostrazione della prima parte.

PEr l' ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{H}{F}$; adunque convertendo $\frac{B}{A} = \frac{F}{H}$.

Ciò posto, si rifletta, che pel corollario I. del teorema IV. sussiste questa proporzionalità.

(1)

(1) $\frac{B}{B} . \frac{A}{B} :: \frac{B}{A} . \frac{A}{A}$.

In oltre per le definizioni XXI., e XXII. si à quest' altra proporzionalità.

(2) $\frac{Z}{Z} . \frac{A}{B} :: \frac{F}{H} . \frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$.

Tale, che il primo termine di essa è uguale al primo termine della proporzionalità (1) pel corollario VII. de' principj, e il suo terzo termine $\frac{F}{H}$ si è già provato eguale al terzo termine $\frac{B}{A}$ della proporzionalità (1); adunque pel teorema I., anche i quarti termini di queste due proporzionalità sono eguali, cioè $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H} = \frac{A}{A}$. Il che dovea dimostrarsi in primo luogo.

Dimostrazione della seconda parte.

MA se si suppone $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ (quarto termine della proporzionalità (2), eguale ad $\frac{A}{A}$ (quarto termine della proporzionanalità (1), allora in vigore dello stesso teorema I. saranno eguali i terzi termini di queste due proporzionalità, cioè sarà $\frac{F}{H} = \frac{B}{A}$, e *trasponendo*, indi *convertendo* $\frac{A}{B}$ sarà eguale ad $\frac{H}{F}$. Il che dovea in secondo luogo dimostrarsi.

TEOREMA XXII.

SE tra due grandezze omogenee *A*, *C* si frappongano quante, e quali grandezze si vogliano, v. g. *Y*, *Z*, *T* (purchè sieno ad esse omogenee); io dico, che la proporzione $\frac{A}{C}$ è il prodotto delle proporzioni *intermedie*, cioè, che $\frac{A}{C}$ è uguale ad $\frac{A}{Y} \times \frac{Y}{Z} \times \frac{Z}{T} \times \frac{T}{C}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl corollario I. del teorema IV., si à $\frac{Y}{Y} . \frac{A}{Y} :: \frac{Y}{Z} . \frac{A}{Z}$; adundunque per le definizioni XXI., e XXII. si à ancora $\frac{A}{Z} = \frac{A}{Y} \times \frac{Y}{Z}$:

Similmente $\frac{Z}{Z} . \frac{A}{Z} :: \frac{Z}{T} . \frac{A}{T}$; adunque per le stesse definizioni $\frac{A}{T} = \frac{A}{Z} \times \frac{Z}{T}$.

Pongasi ora in luogo di $\frac{A}{Z}$ la sua espressione equivalente $\frac{A}{Y} \times \frac{Y}{Z}$, e si vedrà essere $\frac{A}{T} = \frac{A}{Y} \times \frac{Y}{Z} \times \frac{Z}{T}$:

Si à parimente $\frac{T}{T} . \frac{A}{T} :: \frac{T}{C} . \frac{A}{C}$, e in conseguenza $\frac{A}{C} = \frac{A}{T} \times \frac{T}{C}$, ma si è veduto essere $\frac{A}{T}$ eguale ad $\frac{A}{Y} \times \frac{Y}{Z} \times \frac{Z}{T}$; adunque sostituendo in cambio di $\frac{A}{T}$ questa sua espressione, ne siegue, che $\frac{A}{C}$ è uguale ad $\frac{A}{Y} \times \frac{Y}{Z} \times \frac{Z}{T} \times \frac{T}{C}$.

Or siccome è manifesto, che questo modo di dimostrare si estende a quante, e quali grandezze omogenee si vorranno frapporre tra le due A, e C, così il teorema è generalmente vero.

DEFINIZIONE XXIII.

Una proporzione eguale al prodotto di due, o più proporzioni, si dirà *composta* delle medesime proporzioni, e queste si chiameranno componenti di quella; v. g. $\frac{A}{C}$ si dirà *composta* delle tre proporzioni $\frac{A}{P}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{Q}{C}$, perchè pel presente teorema XXII. essa è uguale al prodotto delle medesime, le quali si chiameranno le proporzioni *componenti* di $\frac{A}{C}$; e la proporzione $\frac{S}{P}$ (considerata nell' articolo primo dello scolio annesso alla definizione XXII.) si dirà *composta* delle quattro porporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{F}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{O}{P}$, e queste si chiameranno le proporzioni *componenti* di $\frac{S}{P}$; poichè perciò che si è dimostrato nei due primi artico-

li

li del citato ſcolio, eſſa propoſizione $\frac{S}{P}$ è uguale al prodotto delle quattro proporzioni ſuddette.

COROLLARIO.

SE le grandezze *intermedie* tra A, e C variano l' ordine loro, o il loro numero, o il loro valore, oppur variano in tutti queſti tre modi inſieme; egli è viſibile, che le proporzioni *componenti* la $\frac{A}{C}$ variano anch' eſſe, o nel loro numero, o nel loro valore, o nell' uno, e nell' altro modo inſieme; ma ciò non oſtante la proporzione *compoſta* di eſſe, che nel preſente teorema ſi è dimoſtrata eſſer ſempre eguale alla medeſima $\frac{A}{C}$, non varia punto nel ſuo valore.

TEOREMA XXIII.

IL prodotto di due proporzioni è uguale al prodotto delle medeſime poſte in ſito diverſo, cioè $\frac{A}{C}\times\frac{F}{H}=\frac{F}{H}\times\frac{A}{C}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. PEr le definizioni XXI., e XXII. ſi anno queſte due proporzionalità:

(1) $\frac{Q}{Q}\cdot\frac{A}{C}::\frac{F}{H}\cdot\frac{A}{C}\times\frac{F}{H}$.

(2) $\frac{Q}{Q}\cdot\frac{F}{H}::\frac{A}{C}\cdot\frac{F}{H}\times\frac{A}{C}$.

Prendaſi ora pel poſtulato la proporzione $\frac{C}{V}$ eguale alla proporzione $\frac{F}{H}$, e pel corollario I. del teorema IV. ſi avrà queſta terza proporzionalità:

(3) $\frac{C}{C}\cdot\frac{A}{C}::\frac{C}{V}\cdot\frac{A}{V}$.

Ma i tre primi termini della proporzionalità (1) ſono eguali ai tre primi termini della proporzionalità (3), perchè $\frac{Q}{Q}=\frac{C}{C}$ pel corollario VII. de' principj, $\frac{A}{C}$ è la ſteſſa in ambedue le proporzionalità, ed $\frac{F}{H}$ per la coſtruzione è uguale a $\frac{C}{V}$; adunque pel teorema I. $\frac{A}{C}\times\frac{F}{H}$ [quarto termine della proporzionalità (1)] è uguale al quarto termine della proporzionalità (3).

II. In oltre ſi à pel teorema VIII. queſta quarta proporzionalità:

(4) $\frac{C}{C} \cdot \frac{C}{V} :: \frac{A}{C} \cdot \frac{A}{V}$.

E i tre primi termini della proporzionalità (2) ſono eguali ai tre primi termini della proporzionalità (4); poichè $\frac{Q}{Q}=\frac{C}{C} \cdot \frac{F}{H}=\frac{C}{V}$ per la coſtruzione, ed $\frac{A}{C}$ in ambedue le proporzionalità è la medeſima; adunque pel teorema primo, il quarto termine della proporzionalità (2), cioè $\frac{F}{H}\times\frac{A}{C}$ è uguale al quarto termine della proporzionalità (4), cioè ad $\frac{A}{V}$.

III. Nel primo punto di queſta dimoſtrazione ſi è provato eſſere $\frac{A}{C}\times\frac{F}{H}=\frac{A}{V}$, e nel ſecondo punto ſi è provato eſſere $\frac{F}{H}\times\frac{A}{C}=\frac{A}{V}$, adunque $\frac{A}{C}\times\frac{F}{H}=\frac{F}{H}\times\frac{A}{C}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

AVVERTIMENTO.

IN avvenire ſi prenderà indifferentemente il prodotto $\frac{F}{H}\times\frac{A}{C}$ pel prodotto $\frac{A}{C}\times\frac{F}{H}$, e queſto per quello, giacchè ſi è dimoſtrata l' eguaglianza loro, e non ſempre ſi citerà il teorema XXIII.

SCOLIO.

CHi non ſi curaſſe, che la dimoſtrazione di queſto teorema XXIII. dipendeſſe dal teorema XV., potrebbe appagarſi dell' inſraſcritta, che è più breve della già addotta.

Permutando la proporzionalità (1) ſi à la ſeguente: $\frac{Q}{Q} \cdot \frac{F}{H} :: \frac{A}{C} \cdot \frac{A}{C}\times\frac{F}{H}$, ma i tre primi termini di queſt' ultima proporzionalità ſono i medeſimi, che i primi tre termini della proporzionalità (2); adunque pel teorema I. il quarto termine

mine dell' ultima proporzionalità, cioè $\frac{A}{C} \times \frac{F}{H}$ è uguale al quarto termine della proporzionalità (2), cioè ad $\frac{F}{H} \times \frac{A}{C}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XXIV.

DUe proporzioni $\frac{A}{D}$, $\frac{F}{G}$ sieno composte di due proporzioni per ciascuna, ed una delle proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sia eguale ad una delle proporzioni componenti di $\frac{F}{G}$; io dico, che $\frac{A}{D}$ sta ad $\frac{F}{G}$, come l' *altra* proporzione componente di $\frac{A}{D}$ sta all' *altra* proporzione componente di $\frac{F}{G}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. SIeno $\frac{T}{P}$, $\frac{V}{Q}$ le due proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$, e $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$ le due proporzioni componenti di $\frac{F}{G}$, e sia $\frac{T}{P}$ eguale a $\frac{Z}{R}$.

Ciò posto, sarà la $\frac{A}{D}$ sempre eguale ad $\frac{T}{P} \times \frac{V}{Q}$, ancorchè essa fosse primitivamente eguale ad $\frac{V}{Q} \times \frac{T}{P}$, e questo pel precedente teorema; sarà similmente la $\frac{F}{G}$ sempre eguale a $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$, ancorchè essa fosse primitivamente eguale a $\frac{T}{S} \times \frac{Z}{R}$; si avranno dunque per le definizioni XXI., e XXIII. le due infrascritte proporzionalità:

(1) $\frac{M}{M} . \frac{T}{P} :: \frac{V}{Q} . \frac{A}{D}$.

(2) $\frac{M}{M} . \frac{Z}{R} :: \frac{T}{S} . \frac{F}{G}$.

II. Prendasi pel postulato $\frac{P}{H}$ eguale ad $\frac{V}{Q}$, e $\frac{P}{L}$ eguale a $\frac{T}{S}$, indi si consideri, che in virtù del corollario I. del teorema IV. sussistono queste due proporzionalità:

 (3)

(3) $\frac{P}{P} \cdot \frac{Y}{P} :: \frac{P}{H} \cdot \frac{Y}{H}$.

(4) $\frac{P}{P} \cdot \frac{Y}{P} :: \frac{P}{L} \cdot \frac{Y}{L}$.

Ma i tre primi termini della proporzionalità (1) sono eguali ai tre primi termini della proporzionalità (3), perchè $\frac{M}{M} = \frac{P}{P}$, $\frac{Y}{P}$ è comune, ed $\frac{V}{Q}$ per la costruzione è uguale a $\frac{P}{H}$; adunque pel teorema I. $\frac{A}{D} = \frac{Y}{H}$, cioè il quarto termine dell'una è uguale al quarto termine dell'altra.

I tre primi termini della proporzionalità (2) sono parimente eguali ai tre primi termini della proporzionalità (4), atteso che $\frac{M}{M} = \frac{P}{P}$, $\frac{Z}{R} = \frac{Y}{P}$ per l'ipotesi, e $\frac{T}{S} = \frac{P}{L}$ per la costruzione; adunque pel teorema I. $\frac{F}{G}$ quarto termine dell'una è uguale ad $\frac{Y}{L}$ quarto termine dell'altra.

III. Ora pel teorema VIII. sussiste questa proporzionalità: $\frac{Y}{H} \cdot \frac{Y}{L} :: \frac{P}{H} \cdot \frac{P}{L}$, nella quale sostituendo in luogo delle proporzioni $\frac{Y}{H}$, $\frac{Y}{L}$, $\frac{P}{H}$, $\frac{P}{L}$ le respettive proporzioni $\frac{A}{D}$, $\frac{F}{G}$, $\frac{V}{Q}$, $\frac{T}{S}$ ad esse eguali, si vedrà sussistere pel corollario IX. de' principj l'infrascritta proporzionalità:

$\frac{A}{D} \cdot \frac{F}{G} :: \frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

Ecco un'altra dimostrazione più breve di questo teorema, la quale però dipende dal teorema XV.

Essendo per l'ipotesi $\frac{Y}{P} = \frac{Z}{R}$, sarà pel corollario VIII. de' principj $\frac{M}{M} \cdot \frac{Y}{P} :: \frac{M}{M} \cdot \frac{Z}{R}$, ma *trasponendo* le proporzionalità (1), e (2) si à $\frac{V}{Q} \cdot \frac{A}{D} :: \frac{M}{M} \cdot \frac{Y}{P}$, e $\frac{T}{S} \cdot \frac{F}{G} :: \frac{M}{M} \cdot \frac{Z}{R}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{V}{Q} \cdot \frac{A}{D} :: \frac{T}{S} \cdot \frac{F}{G}$, e *permutando* $\frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S} :: \frac{A}{D} \cdot \frac{F}{G}$, indi *trasponendo* $\frac{A}{D} \cdot \frac{F}{G} \cdot \frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S}$. Il che dovea dimostrarsi.

Co-

Corollario I.

Se l'*altra* delle due proporzioni *componenti* la $\frac{A}{V}$, cioè $\frac{V}{Q}$, è uguale, ovvero maggiore, o minore dell'*altra* delle due proporzioni *componenti* la $\frac{F}{G}$, cioè di $\frac{T}{S}$, sarà pel corollario X. de' principj la proporzione *composta* $\frac{A}{D}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione composta $\frac{F}{G}$, e ciò vale in qualunque sito sieno disposte nell'espressioni di $\frac{A}{D}$, e di $\frac{F}{G}$, le loro respettive proporzioni *componenti*.

Corollario II.

E Se la proporzione composta $\frac{A}{D}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione composta $\frac{F}{G}$, anche l' altra delle proporzioni *componenti* di $\frac{A}{D}$, cioè $\frac{V}{Q}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore dell' altra delle proporzioni *componenti* di $\frac{F}{G}$, che è la proporzione $\frac{T}{S}$, e questo pel corollario X. de' principj; ciò parimente à luogo in qualunque sito sieno disposte in $\frac{A}{B}$, e in $\frac{F}{G}$ le respettive proporzioni *componenti*.

Corollario III.

Qualsivoglia proporzione $\frac{A}{D}$ sia composta delle due proporzioni $\frac{T}{P}$, $\frac{V}{Q}$, e la proporzione $\frac{A}{M}$ sia eguale ad una delle proporzioni *componenti*, v. g. ad $\frac{T}{P}$; io dico, che la proporzione $\frac{M}{D}$ è uguale all' *altra* proporzione *componente* $\frac{V}{Q}$;

Imperocchè pel teorema XXII., e per la definizione XXIII. la la $\frac{A}{D}$ è *composta* ancora delle proporzioni $\frac{A}{M}$, $\frac{M}{D}$; adunque pel presente teorema sussiste questa proporzionalità: $\frac{A}{D} . \frac{A}{D} :: \frac{V}{Q} . \frac{M}{D}$ mentre in questo corollario la $\frac{A}{D}$, che fa il secondo termine dell' ultima proporzionalità, rappresenta la $\frac{F}{G}$, le di cui proporzioni *componenti* $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$ sono qui rappresentate dalle respettive proporzioni $\frac{A}{M}$, $\frac{M}{D}$; adunque pel corollario X. de' principj $\frac{V}{Q}$ è uguale ad $\frac{M}{D}$, cioè $\frac{M}{D} = \frac{V}{Q}$.

COROLLARIO IV.,

Che contiene una nuova dimostrazione del teorema X.

SE $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, anche $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$;

Imperocchè per questo teorema $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$ sta a $\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}$, come $\frac{b}{a}$ à $\frac{d}{c}$; mentre per l' ipotesi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ma pel teorema XXII. $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$ è lo stesso, che $\frac{a}{a}$, e $\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}$ è lo stesso, che $\frac{c}{c}$; adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{a}{a} . \frac{c}{c} :: \frac{b}{a} . \frac{d}{c}$, e quindi essendo pel corollario VII. de' principj $\frac{a}{a}$ eguale a $\frac{c}{c}$ sarà eziandio pel corollario X. de' principj $\frac{b}{a}$ eguale a $\frac{d}{c}$.

COROLLARIO V.,

Che contiene una nuova dimostrazione del teorema XI.

SE $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, anche $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;

Imperocchè è visibile pel presente teorema, che $\frac{a}{c} \times \frac{c}{b}$ sta a $\frac{c}{b} \times \frac{b}{d}$, come $\frac{a}{c}$ sta a $\frac{b}{a}$, ma pel teorema XXII. $\frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$, e $\frac{c}{b} \times \frac{b}{d} = \frac{c}{d}$; adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$; ma per la ſuppoſizione $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; adunque pel corollario X. de' principj $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

COROLLARIO VI.,

Che contiene una nuova dimoſtrazione del teorema XI.

LE due proporzioni compoſte $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c}$, e $\frac{b}{c} \times \frac{c}{d}$ ſono eguali tra loro pel primo corollario, poichè ciaſcuna di eſſe à $\frac{b}{c}$ per una delle due proporzioni componenti, ed $\frac{a}{b}$, altra proporzione componente della prima, è uguale a $\frac{c}{d}$, altra proporzione componente della ſeconda, e ciò per l'ipoteſi, ma pel teorema XXII. $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$, e $\frac{b}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{b}{d}$; adunque $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

SCOLIO.

LE dimoſtrazioni de' teoremi X., e XI., contenute ne' precedenti corollarj IV., V., e VI., ſono legittimamente dedotte, poichè dipendono dai due teoremi XXII., e XXIII., le prime dimoſtrazioni de' quali non anno veruna dipendenza dai teoremi X., e XI.

COROLLARIO VII.

POſti i due prodotti $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q}$, e $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$, e poſto ancora, che $\frac{Y}{P}$ ſia eguale a $\frac{Z}{R}$; io dico, che ſuſſiſte queſta proporzionalità $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q} \cdot \frac{Z}{R} \times \frac{T}{S} :: \frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S}$ imperocchè, prendendo la proporzione $\frac{A}{D}$ eguale ad $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q}$, e la proporzione $\frac{F}{G}$ eguale a $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$ (il che può farſi col modo eſpoſto nello ſcolio, che ſiegue la definizione XXI., o con le maniere addotte nello ſcolio anneſſo al teorema XX.), la proporzione $\frac{A}{D}$ ſarà compoſta delle due pro-

proporzioni $\frac{Y}{P}$, $\frac{V}{Q}$, e la proporzione $\frac{F}{G}$ sarà composta delle due proporzioni $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$, e ciò per la definizione XXIII.; adunque per questo teorema si avrà $\frac{A}{D} \cdot \frac{F}{G} :: \frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S}$, ma per la costruzione $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q} = \frac{A}{D}$, e $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S} = \frac{F}{G}$ adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q} \cdot \frac{Z}{R} \times \frac{T}{S} :: \frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S}$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

SI à per la definizione XXI.

$\frac{M}{M} \cdot \frac{Y}{P} :: \frac{V}{Q} \cdot \frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q}$.

$\frac{M}{M} \cdot \frac{Z}{R} :: \frac{T}{S} \cdot \frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$, e trasponendo ambedue queste proporzionalità si ottiene

$\frac{V}{Q} \cdot \frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q} :: \frac{M}{M} \cdot \frac{Y}{P}$.

$\frac{T}{S} \cdot \frac{Z}{R} \times \frac{T}{S} :: \frac{M}{M} \cdot \frac{Z}{R}$, ma per l' ipotesi $\frac{Y}{P} = \frac{Z}{R}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{M}{M} \cdot \frac{Y}{P} :: \frac{M}{M} \cdot \frac{Z}{R}$, e conseguentemente in virtù del corollario XII. de' principj $\frac{V}{Q} \cdot \frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q} :: \frac{T}{S} \cdot \frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$, e *permutando*, indi *trasponendo* $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q} \cdot \frac{Z}{R} \times \frac{T}{S} :: \frac{V}{Q} \cdot \frac{T}{S}$; e quindi se $\frac{V}{Q}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{T}{S}$, anche $\frac{Y}{P} \times \frac{V}{Q}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$ in virtù del corollario X. de' principj.

TEOREMA XXV.

DUe proporzioni $\frac{A}{D}$, $\frac{F}{G}$ sieno composte di due proporzioni per ciascuna in modo che una delle proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sia maggiore, ovvero minore di una delle proporzioni componenti di $\frac{F}{G}$, e l' *altra* delle proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sia anch'

anch' eſſa maggiore, ovvero reſpettivamente minore dell' altra; io dico, che $\frac{A}{D}$ ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{F}{G}$.

Dimostrazione.

Le due proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ ſieno $\frac{T}{P}$, ed $\frac{V}{Q}$, e le due proporzioni componenti di $\frac{F}{G}$ ſieno $\frac{Z}{R}$, e $\frac{T}{S}$, e ſia $\frac{T}{P}$ maggiore, ovvero minore di $\frac{Z}{R}$, ſiccome $\frac{V}{Q}$ maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{T}{S}$; ſarà ſempre $\frac{A}{D}$ eguale ad $\frac{T}{P} \times \frac{V}{Q}$ benchè primitivamente foſſe $\frac{A}{D} = \frac{V}{Q} \times \frac{T}{P}$, e queſto pel teorema XXIII.; ſarà ſimilmente $\frac{F}{F}$ eguale a $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$, benchè primitivamente foſſe $\frac{F}{G} = \frac{T}{S} \times \frac{Z}{R}$, e ciò per lo ſteſſo teorema XXIII.. S' immagini ora il prodotto $\frac{Z}{R} \times \frac{V}{Q}$, e pel primo corollario del teorema XXIV. il prodotto $\frac{T}{P} \times \frac{V}{Q}$ ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{Z}{R} \times \frac{V}{Q}$.

Per lo ſteſſo corollario I. del teorema XXIV. il prodotto $\frac{Z}{R} \times \frac{V}{Q}$ ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$; adunque tanto più il prodotto $\frac{T}{P} \times \frac{V}{Q}$ (cioè la proporzione compoſta $\frac{A}{D}$, che gli equivale) ſarà maggiore, ovvero reſpettivamente minore del prodotto $\frac{Z}{R} \times \frac{T}{S}$ (cioè della proporzione compoſta $\frac{F}{G}$ ad eſſo equivalente). Il che dovea dimoſtrarſi.

Teorema XXVI.

Poſto un ordine di quante grandezze ſi vogliano *A*, *B*, *C*, *D*, ec. purchè ſieno omogenee tra loro, e un altr' ordine d' altrettante grandezze *F*, *G*, *H*, *I*, ec. parimente omogenee tra loro; tali che la proporzione della *prima* A del prim' ordine alla sua *seconda* B sia eguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione di F *prima* del second' ordine alla sua *seconda* G; e la proporzione di B *seconda* del prim' ordine alla sua *terza* C sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione di G *seconda* del second' ordine alla sua *terza* H, e così sempre, ec.;

Io dico, che la proporzione di A *prima* del prim' ordine alla sua *ultima* D è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione di F *prima* del second' ordine alla sua *ultima* I.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema XXII. $\frac{A}{C}$ è uguale al prodotto di $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$, ed $\frac{F}{H}$ è uguale al prodotto di $\frac{F}{G} \times \frac{G}{H}$, ma pel corollario I. del teorema XXIV., oppure pel teorema XXV. $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{F}{G} \times \frac{G}{H}$, perchè per la supposizione $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{F}{G}$, e $\frac{B}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{G}{H}$; adunque $\frac{A}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{F}{H}$:

Similmente $\frac{A}{D}$ è uguale al prodotto $\frac{A}{C} \times \frac{C}{D}$, ed $\frac{F}{I}$ è uguale al prodotto di $\frac{F}{H} \times \frac{H}{I}$; ma pel corollario I. del teorema XXIV., oppure pel teorema XXV. $\frac{A}{C} \times \frac{C}{D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{F}{H} \times \frac{H}{I}$; perchè si è provato, che $\frac{A}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{F}{H}$, e si suppone $\frac{C}{D}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore,

o mio minore di $\frac{H}{I}$; adunque $\frac{A}{D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{F}{I}$.

Or siccome è visibile, che lo stesso raziocinio à luogo in qualunque numero di grandezze, che possa costituire i due ordini, così questo teorema è generalmente vero.

Comprende il presente teorema le proposizioni XXII., e XXXI. del V. libro d' Euclide, ed anche il teorema XII. di questo trattato è in esso contenuto.

Teorema XXVII.

Sieno date da una parte quante grandezze si vogliano, purchè sieno omogenee tra loro, v. g. *A*, *B*, *C*, *D*, e altrettante dall' altra parte v. g. *H*, *I*, *K*, *L*, anch' esse omogenee tra loro, e tali, che la proporzione di *A prima* della prima serie alla sua *seconda B* sia eguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione *K* penultima della seconda serie alla sua *ultima L*, e la proporzione di *B seconda* della prima serie alla sua terza *C* sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione di *I antepenultima* della seconda serie alla sua *penultima K*, e la proporzione di *C terza* della prima serie alla sua *quarta D* sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione di *H*, che precede l' *antepenultima* della seconda serie alla sua *antepenultima I*, e così sempre con ordine inverso, ec.

Io dico, che la proporzione di *A prima* della prima serie alla sua *ultima D* è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione di *H prima* della seconda serie alla sua *ultima L*.

Dimostrazione.

E' Uguale $\frac{A}{C}$ al prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$, siccome $\frac{I}{L}$ al prodotto $\frac{I}{K} \times \frac{K}{L}$ pel teorema XXII. ma pel corollario I. del teorema XXIV., oppure pel teorema XXV. $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$ è uguale, ovvero respettiva-

 men-

mente maggiore, o minore di $\frac{I}{K} \times \frac{K}{L}$; giacchè per l'ipoteſi $\frac{A}{B}$ è eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{K}{L}$, e anche $\frac{B}{C}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{I}{L}$.

Di nuovo $\frac{A}{D}$ è uguale ad $\frac{A}{C} \times \frac{C}{D}$, ed $\frac{H}{L}$ ad $\frac{H}{I} \times \frac{I}{L}$ pel teorema XXII.; ma pel corollario I. del teorema XXIV., oppure pel teorema XXV. $\frac{A}{C} \times \frac{C}{D}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{H}{I} \times \frac{I}{L}$, poichè ſi è moſtrato, che $\frac{A}{C}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{I}{L}$, e ſi ſuppone $\frac{C}{D}$ eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{H}{I}$; adunque $\frac{A}{D}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{H}{L}$.

E' chiaro, che la ſteſſa maniera d'arguire, vale in qualunque numero di grandezze, che coſtituiſcono le due ſerie, e perciò queſto teorema è generalmente vero.

Queſto teorema comprende le propoſizioni XXIII., e XXXII. del V. libro d' Euclide, e contiene anche il teorema XIII. del preſente trattato.

TEOREMA XXVIII.

DUe proporzioni $\frac{A}{D}$, ed $\frac{F}{G}$ ſieno eguali tra loro, e la proporzione $\frac{A}{D}$ ſia compoſta delle due proporzioni $\frac{r}{P}$, $\frac{V}{Q}$, ſiccome la proporzione $\frac{F}{G}$ ſia compoſta delle due proporzioni $\frac{Z}{R}$, e $\frac{T}{S}$, io dico, che ſe una delle proporzioni componenti la $\frac{A}{D}$, v. g. $\frac{r}{P}$ è maggiore, ovvero minore di una delle proporzioni componenti la $\frac{F}{G}$, v. g. di $\frac{Z}{R}$ l' *altra* proporzione $\frac{V}{Q}$ componente

la

la $\frac{A}{D}$ farà *minore*, ovvero respettivamente maggiore dell' *altra* proporzione $\frac{T}{S}$ componente la $\frac{F}{G}$.

DIMOSTRAZIONE.

Se ciò non fosse, la $\frac{V}{Q}$ farebbe eguale, o maggiore, ovvero respettivamente eguale, o minore di $\frac{T}{S}$; ma se la $\frac{V}{Q}$ fosse eguale, o maggiore di $\frac{T}{S}$, la $\frac{A}{D}$ dovrebbe essere maggiore di $\frac{F}{G}$ pel primo corollario del teorema XXIV., o pel teorema XXV., il che ripugna all' ipotesi, e se la $\frac{V}{Q}$ fosse eguale, o minore di $\frac{T}{S}$, la $\frac{A}{D}$ esser dovrebbe minore di $\frac{F}{G}$ per lo stesso corollario I. del teorema XXIV., o pel teorema XXV., il che distrugge similmente l' ipotesi; adunque la $\frac{V}{Q}$ esser dee *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{T}{S}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Qualsivoglia proporzione $\frac{A}{D}$ sia composta delle due proporzioni $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$; io dico, che se una delle proporzioni componenti, v. g. $\frac{Z}{R}$ è maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{D}$, l'altra proporzione componente $\frac{T}{S}$, è *minore*, ovvero respettivamente maggiore della proporzione d' egualità; oppure (il che è lo stesso) T è *minore*, ovvero respettivamente maggiore di S.

Imperocchè per lo scolio, che precede il teorema XXII. la $\frac{A}{D}$ è uguale ad $\frac{A}{D}$ moltiplicata per la proporzione d' egualità, cioè $\frac{A}{D}=\frac{A}{D}\times\frac{B}{B}$; adunque per la definizione XXIII., la proporzione $\frac{A}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{D}$, e $\frac{B}{B}$, ed essendo do per l' ipotesi $\frac{A}{D}$ composta eziandio delle due proporzioni $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$, la stessa $\frac{A}{D}$ fa qui figura di $\frac{A}{D}$, e insieme di $\frac{F}{G}$.

Di più nel prodotto $\frac{A}{D} \times \frac{B}{B}$ (che è uguale alla semplice $\frac{A}{D}$) la $\frac{A}{D}$ fa figura di $\frac{T}{P}$, e la $\frac{B}{B}$ fa figura di $\frac{V}{Q}$; mentre tanto la $\frac{T}{P}$, quanto la $\frac{V}{Q}$ del teorema dinotano in generale qualunque proporzione; adunque applicando il teorema a questo corollario, si vede, che siccome nel teorema la $\frac{V}{Q}$, così in questo corollario la $\frac{B}{B}$ dovrà esser *maggiore*, ovvero respettivamente minore di $\frac{T}{S}$, cioè *trasponendo* pel corollario XIV. de' principj, $\frac{T}{S}$ sarà *minore*, o respettivamente maggiore di $\frac{B}{B}$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Prendasi pel postulato la X tale, che $\frac{A}{X}$ sia eguale a $\frac{Z}{R}$; adunque essendo $\frac{Z}{R}$ maggiore, ovvero minore di $\frac{A}{D}$, anche $\frac{A}{X}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{A}{D}$ pel corollario VI. del teorema II., ma pel teorema XXII., e la definizione XXIII., la $\frac{A}{D}$ è composta anche delle due proporzioni $\frac{A}{X}$, $\frac{X}{D}$, siccome per l' ipotesi la stessa $\frac{A}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$; adunque supponendosi $\frac{A}{X}$ eguale a $\frac{Z}{R}$, sussisterà pel teorema XXIV. questa proporzionalità $\frac{A}{D} . \frac{A}{D} :: \frac{X}{D} . \frac{T}{S}$; e conseguentemente pel corollario X. de' principj sarà $\frac{X}{D} = \frac{T}{S}$.

Ora essendosi provato di sopra, che $\frac{A}{X}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{A}{D}$, sarà pel secondo articolo del corollario XVI. de' principj la X *minore*, ovvero respettivamente maggiore della D; e quindi essendosi parimente dimostrato

di

di ſopra, che $\frac{X}{D}$ è uguale a $\frac{T}{S}$, ne ſiegue pel corollario X. de' principj, che T è medeſimamente *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore di S, ec.

COROLLARIO II.

Sia la proporzione $\frac{A}{D}$ maggiore, ovvero minore della proporzione d' egualità, e la ſteſſa $\frac{A}{D}$ ſia compoſta delle due proporzioni $\frac{Z}{R}$, $\frac{T}{S}$: ſia in oltre una delle proporzioni componenti, v. g. $\frac{Z}{R}$ maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{A}{D}$; io dico, che l' altra proporzione componente $\frac{T}{S}$ è *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore della proporzione componente $\frac{Z}{R}$.

I. Imperocchè per l' ipoteſi $\frac{A}{D}$ è maggiore, o minore di $\frac{B}{B}$, cioè *traſponendo* pel corollario XIV. de' principj $\frac{B}{B}$ è minore, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{A}{D}$; ma nel precedente corollario ſi è provato, che $\frac{T}{S}$ è minore, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{B}{B}$; adunque pel corollario V. del teorema II. $\frac{T}{S}$ è minore, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{A}{D}$.

II. Di più per l' ipoteſi $\frac{Z}{R}$ è maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\frac{A}{D}$, cioè *traſponendo* pel corollario XIV. de' principj $\frac{A}{D}$ è *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{Z}{R}$; ma ſi è provato nel primo punto, che $\frac{T}{S}$ è minore, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{A}{D}$; adunque pel corollario V. del teorema II. $\frac{T}{S}$ è *minore*, ovvero reſpettivamente maggiore di $\frac{Z}{R}$.

TEO-

TEOREMA XXIX.

LE lettere a, e, o, u rappresentino generalmente quattro proporzioni; io dico, che $\frac{a}{e}$ sta ad $\frac{o}{u}$, come $a \times u$ sta ad $e \times o$: cioè la proporzione, che à la prima proporzione (a) verso la seconda (e) sta alla proporzione, che à la terza proporzione (o) verso la quarta (u), come il prodotto delle due proporzioni estreme (cioè $a \times u$) sta al prodotto delle due medie (cioè ad $e \times o$).

DIMOSTRAZIONE.

SI moltiplichino la prima proporzione (a), e la seconda (e) per la quarta (u), e i due prodotti $a \times u$, $e \times u$ saranno tra loro come (a) ad (e) pel teorema XXIV, cioè sarà $\frac{a \times u}{e \times u} = \frac{a}{e}$: si moltiplichino ancora la terza proporzione (o), e la quarta (u) per la seconda (e), e si avrà similmente per lo stesso teorema XXIV. $\frac{o \times e}{u \times e} = \frac{o}{u}$; ovvero in virtù del teorema XXIII., e del corollario IX. de' principj $\frac{e \times o}{e \times u} = \frac{o}{u}$; ma $\frac{a \times u}{e \times u}$ sta ad $\frac{e \times o}{e \times u}$, come $a \times u$ sta ad $e \times o$ pel teorema III.; adunque ponendo in quest' ultima proporzionalità in luogo di $\frac{a \times o}{e \times u}$, e di $\frac{e \times o}{e \times u}$ le respettive proporzioni ad esse eguali $\frac{a}{e}$, ed $\frac{o}{u}$, si avrà pel corollario IX. de' principj $\frac{a}{e} \cdot \frac{o}{u} :: a \times u \cdot e \times o$. Il che dovea dimostrarsi.

E' superfluo l' avvertire, che in virtù del teorema III. può sostituirsi $u \times a$ in luogo di $a \times u$, ed $o \times e$ in cambio di $e \times o$, senza turbare le proporzioni esposte in questo teorema, e nella sua dimostrazione.

COROLLARIO I.

SE il prodotto delle due proporzioni estreme $a \times u$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore del prodotto delle due proporporzioni medie $e \times o$, anche $\frac{a}{e}$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore respettivamente di $\frac{o}{u}$:

E all' incontro, se $\frac{a}{e}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{o}{u}$, anche il prodotto $a \times u$ delle due proporzioni estreme sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore delle due proporzioni medie, cioè di $e \times o$. Tutto ciò pel corollario X. de' principj.

COROLLARIO II.

DUe proporzioni sono tra loro come la proporzione, che passa tra i loro antecedenti è alla proporzione, che passa tra i loro conseguenti: rappresentino $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ qualunque coppia di proporzioni, i quattro termini delle quali sieno tra loro omogenei; io dico, che $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{A}{C} . \frac{B}{D}$; imperocchè pel teorema XXII. $\frac{A}{B} \times \frac{B}{D}$ (prodotto delle due proporzioni estreme) è uguale ad $\frac{A}{D}$, e $\frac{C}{D} \times \frac{A}{C}$ (prodotto delle due proporzioni medie), ovvero $\frac{A}{C} \times \frac{C}{D}$, che pel teorema XXIII. gli è uguale, si eguaglia anch' esso pel teorema XXII. alla stessa proporzione $\frac{A}{D}$; adunque in virtù del precedente corollario $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{A}{C}$ sta a $\frac{B}{D}$; mentre la proporzione, che à la $\frac{A}{B}$ verso la $\frac{C}{D}$ è uguale alla proporzione, che à la $\frac{A}{C}$ verso la $\frac{B}{D}$; vale a dire, secondo l' espressione del medesimo corollario precedente, $\frac{a}{e}$ è uguale ad $\frac{o}{u}$.

COROLLARIO III. dedotto dal II.

LAonde pel corollario X. de' principj, se $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero ro maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, anche $\frac{A}{C}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B}{D}$:

E versa-vice, se $\frac{A}{C}$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{B}{D}$, anche $\frac{A}{B}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$.

Questo corollario comprende le proposizioni XVI., e XVII. del V. libro d' Euclide.

E comprende ancora il *teorema* XI. di questo trattato.

COROLLARIO IV. dedotto dal II.

ABbiasi questa proporzionalità $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$; io dico, che sussiste quest' altra proporzionalità $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} :: \frac{E}{G} \cdot \frac{F}{H}$.

Imperocchè per l' ipotesi $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$, ma pel corollario II. di questo teorema, e *trasponendo* $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} :: \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$, e per lo stesso corollario, e *trasponendo* $\frac{E}{G} \cdot \frac{F}{H} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} :: \frac{E}{G} \cdot \frac{F}{H}$.

SCOLIO.

DA questo corollario IV. può dedursi la dimostrazione del seguente

TEOREMA.

ESprimano $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni in generale tali però, che i termini di ambedue sieno tra loro omogenei, e una terza proporzione $\frac{E}{F}$ sia eguale alla proporzione $\frac{C}{D}$, con questo, che i termini di $\frac{E}{F}$ sieno omogenei ai termini delle altre due proporzioni; io dico, che sussiste questa proporzionalità: $\frac{A}{E} \cdot \frac{B}{F} :: \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D}$.

DI-

Dimostrazione.

Supponendoſi $\frac{E}{F}=\frac{C}{D}$ ſarà pel corollario VIII. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{E}{F} :: \frac{A}{B} . \frac{C}{D}$, e per queſto corollario ſi avrà $\frac{A}{E} . \frac{B}{F} :: \frac{A}{C} . \frac{B}{D}$; il che dovea dimoſtrarſi.

Corollario V.

Due proporzioni ſono tra loro, com' eſſe medeſime roveſciate, e poſpoſte, cioè $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{D}{C}$ ſta a $\frac{B}{A}$.

Imperocchè pel teorema XXII. il prodotto delle due proporzioni eſtreme di queſta proporzionalità, cioè $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A}$ è uguale ad $\frac{A}{A}$, e il prodotto delle due proporzioni medie, cioè $\frac{C}{D} \times \frac{D}{C}$ è uguale a $\frac{C}{C}$; ma pel coroll. VII. de' principj $\frac{A}{A}=\frac{C}{C}$; adunque pel corollario I. di queſto teorema la proporzione, che à la $\frac{A}{B}$ alla $\frac{C}{D}$ è uguale alla proporzione, che à la $\frac{D}{C}$ alla $\frac{B}{A}$, vale a dire $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{D}{C}$ ſta a $\frac{B}{A}$.

Seconda dimoſtrazione di queſto corollario.

Pel corollario V. del teorema IX. ſi à $\frac{A}{B} . \frac{C}{B} :: \frac{D}{C} . \frac{D}{A}$, e pel corollario IV. dello ſteſſo teorema IX. ſi à ancora $\frac{C}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{D}{A} . \frac{B}{A}$; adunque per l'egualità ordinata $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{D}{C} . \frac{B}{A}$.

Terza dimoſtrazione di queſto corollario.

Pel corollario V. del teorema IX. abbiamo $\frac{A}{B} . \frac{C}{B} :: \frac{B}{C} . \frac{B}{A}$, e pel coroll. IV. del medeſimo teorema $\frac{C}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{D}{C} . \frac{B}{C}$; adunque per l'egualità perturbata $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{D}{C} . \frac{B}{A}$.

COROLLARIO VI. dedotto dal V.

E Quindi pel corollario X. de' principj, se $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, anche $\frac{D}{C}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B}{A}$, e conseguentemente, se $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, sarà $\frac{B}{A}$ eguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{D}{C}$, e ciò pel corollario XIV. de' principj, ovvero pel corollario I. del teorema II.

Questo corollario comprende il corollario della proposizione IV. del V. libro d' Euclide, e la proposizione XXVI. del medesimo libro:

Comprende ancora il teorema X. di questo trattato.

COROLLARIO VII.

DInotino $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni, i quattro termini delle quali sieno omogenei; io dico, che $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{D}{B}$ sta a $\frac{C}{A}$;

Imperocchè $\frac{A}{B} \times \frac{C}{A}$ (prodotto delle due proporzioni estreme), ovvero $\frac{C}{A} \times \frac{A}{B}$, che gli equivale, s' eguaglia a $\frac{C}{B}$, e a questa medesima $\frac{C}{B}$ s' eguaglia $\frac{C}{D} \times \frac{D}{B}$ (prodotto delle due proporzioni medie); adunque pel corollario I. di questo teorema sussiste l' infrascritta proporzionalità: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{D}{B} \cdot \frac{C}{A}$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEl corollario II. di questo teorema si à $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D}$, e pel corollario V. di questo teorema si à $\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} :: \frac{D}{B} \cdot \frac{C}{A}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{D}{B} \cdot \frac{C}{A}$.

Co-

COROLLARIO VIII.

QUalsivoglia proporzione è alla proporzione d'egualità, come la proporzione d'egualità è alla suddetta proporzione rovesciata, cioè $\frac{A}{B} . \frac{C}{C} :: \frac{C}{C} . \frac{B}{A}$.

Imperocchè il prodotto delle due proporzioni estreme, cioè $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A}$ è uguale ad $\frac{A}{A}$ pel teorema XXII., e il prodotto delle due proporzioni medie, cioè $\frac{C}{C} \times \frac{C}{C}$ è uguale a $\frac{C}{C}$ per l'articolo V. dello scolio annesso alla definizione XXII.; ma $\frac{A}{A} = \frac{C}{C}$; adunque pel primo corollario di questo teorema $\frac{A}{C} . \frac{G}{C} :: \frac{C}{C} . \frac{B}{A}$.

Seconda dimostrazione di questo corollario.

PEl corollario V. del teorema IX. si à $\frac{A}{B} . \frac{B}{B} :: \frac{B}{B} . \frac{B}{A}$; adunque, ec.

Terza dimostrazione di questo corollario.

PEl corollario IV. del teorema IX. si à $\frac{A}{B} . \frac{A}{A} :: \frac{A}{A} . \frac{B}{A}$; adunque, ec.

Quarta dimostrazione di questo corollario.

PEl primo corollario del teorema IV. si ottiene $\frac{A}{B} . \frac{B}{B} :: \frac{A}{A} : \frac{B}{A}$, ma pel corollario VII. de' principj $\frac{B}{B} = \frac{A}{A}$; adunque, ec.

Quinta dimostrazione di questo corollario.

PEl teorema VIII. $\frac{A}{B} . \frac{A}{A} :: \frac{B}{B} . \frac{B}{A}$, e pel corollario VII. de' principj $\frac{A}{A} = \frac{B}{B}$; adunque, ec.

TEOREMA XXX.

ABbiasi questa proporzionalità:

(1)

(1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$;

Io dico, che si avrà anche quest' altra:

$\frac{A}{E} \cdot \frac{H}{D} :: \frac{B}{F} \cdot \frac{G}{G}$. I termini delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{E}{F}$ debbono essere omogenei tra loro, e i termini delle due proporzioni $\frac{C}{D}$, $\frac{G}{H}$ debbono essere omogenei tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

PErmutando la proporzionalità (1) si à $\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F} :: \frac{C}{D} \cdot \frac{G}{H}$; ma pel corollario II. del teorema XXIX., e *trasponendo* $\frac{A}{E} \cdot \frac{B}{F} ::$ $\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$, e pel corollario VII. dello stesso teorema, e *trasponendo* $\frac{H}{D}$ sta a $\frac{G}{C}$, come $\frac{C}{D}$ a $\frac{G}{H}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{E} \cdot \frac{B}{F} :: \frac{H}{D} \cdot \frac{G}{H}$, e *permutando* $\frac{A}{E} \cdot \frac{H}{D} :: \frac{B}{F} \cdot \frac{G}{C}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XXXI.

ABbiasi questa proporzionalità:

(1) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$.

E rappresenti $\frac{Q}{R}$ qualsivoglia proporzione; io dico, che sussiste questa proporzionalità:

(2) $\frac{A}{B} \cdot \frac{Q}{R} \times \frac{H}{G} :: \frac{E}{F} \cdot \frac{Q}{R} \times \frac{D}{C}$.

DIMOSTRAZIONE.

DAlla proporzionalità (1) si deduce *permutando* quest' altra $\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F} :: \frac{C}{D} \cdot \frac{G}{H}$, e quindi pel corollario V. del teorema XXIX. si à $\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F} :: \frac{H}{G} \cdot \frac{D}{C}$, ma pel corollario VII. del teorema XXIV. $\frac{Q}{R} \times \frac{H}{G} \cdot \frac{Q}{R} \times \frac{D}{C} :: \frac{H}{G} \cdot \frac{D}{C}$; adunque pel corollario XI. de' principj

$\frac{A}{B}$

$\frac{A}{B} . \frac{E}{F} :: \frac{Q}{R} \times \frac{H}{G} . \frac{Q}{R} \times \frac{D}{C}$, e *permutando* $\frac{A}{B} . \frac{Q}{R} \times \frac{H}{G} :: \frac{E}{F} . \frac{Q}{R} \times \frac{D}{C}$.
Il che dovea dimostrarsi.

Corollario.

Se Q è uguale ad R la proporzione $\frac{Q}{R}$ sarà proporzione d' egualità, onde per l' articolo quarto dello scolio, che precede il teorema XXII. $\frac{Q}{R} \times \frac{H}{G}$ è uguale ad $\frac{H}{G}$, e $\frac{Q}{R} \times \frac{D}{C}$ è uguale a $\frac{D}{C}$, e perciò sostituendo nella proporzionalità (2) in vece di $\frac{Q}{R} \times \frac{H}{G}$, e $\frac{Q}{R} \times \frac{D}{C}$ le due proporzionalità respettivamente eguali $\frac{H}{G}$, e $\frac{D}{C}$, si vedrà, che posta la proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$ sussiste quest' altra $\frac{A}{B} . \frac{H}{G} :: \frac{E}{F} . \frac{D}{C}$, la quale si dimostra ancora, valendosi del medesimo tenore della dimostrazione del teorema.

Definizione XXIV.

Si dice, che molte grandezze omogenee sono in proporzione geometrica continua, quando la prima è alla seconda, come la seconda alla terza, e la seconda alla terza, come la terza alla quarta, e così sempre, ec. In somma molte grandezze sono in proporzione geometrica continua, quando a riserva della prima, che è solamente antecedente, e dell' ultima, che è solamente conseguente, ciascuna delle grandezze intermedie è antecedente, e conseguente di proporzioni eguali.

Le grandezze intermedie possono essere una, o molte, e si chiamano medie proporzionali:

Teorema XXXII.

La massima, e la minima di quattro grandezze proporzionali omogenee fanno una somma maggiore della somma delle altre due.

Scolio.

Prima di passare alla dimostrazione si rifletta, che se la grandezdezza massima non fosse la prima della proporzionalità, potrebbesi sempre dargli il primo luogo (cambiando l' ordine de' suoi termini) senza turbare la proporzionalità, e ciò con quel modo d' arguire, che si chiama *convertendo*, o con quell' altro, che chiamasi *trasponendo*, o con ambedue i modi insieme.

Suppongo pertanto, che nella proporzionalità $A.B::C.D$, la prima grandezza A sia la massima; adunque essendo il primo antecedente A maggiore del primo conseguente B, anche il secondo antecedente C sarà maggiore del secondo conseguente D pel corollario X. de' principj, ma pel corollario del teorema XI. essendo il primo antecedente A (come si suppone) maggiore del secondo antecedente C, sarà ancora il primo conseguente B maggiore del secondo conseguente D; adunque D sarà la minima delle quattro grandezze proporzionali suddette, e dovrà provarsi, che $A+D$ è maggiore di $B+C$.

Dimostrazione.

Poichè si à per l' ipotesi $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, si avrà *dividendo* pel corollario XI. del teorema II. $\frac{A-B}{B}=\frac{C-D}{D}$, e *permutando* $\frac{A-B}{C-D}=\frac{B}{D}$; ma nello scolio antecedente si è provato B maggiore di D; adunque pel corollario X. de' principj, anche $A-B$ è maggiore di $C-D$; laonde aggiungendo a ciascuna di queste due grandezze disuguali una medesima grandezza $B+D$, ne risulterà $A-B+B+D$ da una parte, maggiore di $C-D+B+D$ dall' altra, cioè per l' assioma V., ne risulterà $A+D$ maggiore di $C+B$; imperocchè $A-B+B+D=A+D$, e $C-D+B+D=C+D$. Il che dovea dimostrarsi.

In questo teorema si dimostra la proposizione XXV. del V. libro d' Euclide.

Corollario.

Se le tre grandezze A, B, D sono in proporzione geometrica continua, $A+D$ somma delle due estreme, è maggiore di $2B$, doppia della media.

Im-

Imperocchè, ſupponendo $C=B$ nella proporzionalità $A.B::C.D$, conſiderata nella dimoſtrazione di queſto teorema, eſſa ſi muterà nella ſeguente $A.B::B.D$, ed eſſendoſi ivi provato $A+D$ maggiore di $B+C$, la ſoſtituzione di B in vece di C fatta in queſto ſecondo aggregato, moſtrerà $A+D$ maggiore di $2B$.

TEOREMA XXXIII.

DInotino $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ due proporzioni, la prima delle quali ſia eguale, ovvero maggiore, o minore della ſeconda, e i loro conſeguenti ſieno minori de' proprj antecedenti; non eſſendo però neceſſario, che i due termini della prima proporzione ſieno omogenei a quelli della ſeconda.

Io dico primieramente, che $\frac{A-B}{A}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C-D}{C}$: dico in ſecondo luogo, che $\frac{A}{A-B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C}{C-D}$.

DEFINIZIONE XXV.

IL modo d'argomentare, eſpreſſo nella ſeconda parte di queſto teorema, chiamaſi *converſion* di proporzione.

Dimoſtrazione del teorema.

PRimieramente per l'ipoteſi, e pel corollario VI. del teorema XXIX. $\frac{B}{A}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{D}{C}$; ma pel corollario VII. de' principj $\frac{A}{A}=\frac{C}{C}$; adunque $\frac{A}{A}-\frac{B}{A}$, cioè per l'aſſioma VII. $\frac{A-B}{A}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *maggiore*, o minore di $\frac{C}{C}-\frac{D}{C}$, cioè per l'aſſioma VII. di $\frac{C-D}{D}$. E queſta è la dimoſtrazione della prima parte.

Secondariamente, eſſendoſi qui provato, che $\frac{A-B}{A}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C-D}{C}$, ne ſiegue pel corollario VI. del teorema XXIX., cioè *convertendo*, che $\frac{A}{A-D}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C}{C-D}$. E queſta è la prova della ſeconda parte.

Sono compreſi nella ſeconda parte di queſto teorema il corollario della propoſizione XIX. del V. libro d' Euclide, e la propoſizione XXX. del medeſimo libro.

TEOREMA XXXIV.

SIa qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di qualunque altra proporzione $\frac{C}{D}$.

Io dico in primo luogo, che $\frac{A+B}{A}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C+D}{C}$.

Dico in ſecondo luogo, che $\frac{A}{A+B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{C+D}$.

DEFINIZIONE XXVI.

IL modo d' argomentare eſpreſſo nella prima parte di queſto teorema chiamaſi *compoſizion converſa di proporzione*.

DEFINIZIONE XXVII.

L'Altro modo d' argomentare eſpreſſo nella ſeconda parte di queſto teorema chiamaſi *compoſizion contraria di proporzione*.

Dimoſtrazione del teorema.

PRimo; poichè per l' ipoteſi, e pel corollario VI. del teorema XXIX. $\frac{B}{A}$ deve eſſere eguale, ovvero reſpettivamente *minore*,

re,

re, o maggiore di $\frac{D}{C}$, ed è di più $\frac{A}{A}$ eguale a $\frac{C}{C}$ pel corollario VII. de' principj ne siegue, che $\frac{A}{A}+\frac{B}{A}$, cioè per l'assioma VIII. $\frac{A+B}{A}$ è uguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C}{C}+\frac{D}{C}$, cioè per l'assioma VIII., di $\frac{C+D}{C}$: e questa è la prova della prima parte:

Secondo; si è qui dimostrato, che $\frac{A+B}{A}$ è uguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C+D}{C}$; adunque *convertendo* pel corollario VI. del teorema XXII., $\frac{A}{A+B}$ è uguale, ovvero respettivamente *maggiore*, o minore di $\frac{C}{C+D}$. E questa è la dimostrazione della seconda parte.

Teorema XXXV.

Rappresentino $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ due proporzioni tali, che l' antecedente della prima superi l' antecedente della seconda, e il conseguente della prima sia parimente maggiore del conseguente della seconda; e sia la proporzione $\frac{A}{B}$ eguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione $\frac{C}{D}$; io dico, che $\frac{A-C}{B-D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{A}{B}$.

Dimostrazione.

Essendo $\frac{A}{B}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, è ancora *permutando* pel corollario III. del teorema XXIX. $\frac{A}{C}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B}{D}$, e per la prima parte del teorema XXXIII. $\frac{A-C}{A}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B-D}{B}$; adunque nuovamente

 per-

permutando $\frac{A-C}{B-D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{A}{B}$. Il che dovea dimostrarsi.

Questo teorema contiene le proposizioni XIX., e XXXIII. del V. libro d' Euclide.

Contiene ancora il corollario XXVIII. de' principj.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato $\frac{A-C}{B-D}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{A}{B}$, ed essendo per l' ipotesi $\frac{A}{B}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, ne siegue pel corollario XI. de' principj, ovvero pel corollario V. del teorema II., che $\frac{A-C}{B-D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$.

Ciò potrebbe provarsi ancora immediatamente così:

Nella dimostrazione si è provato essere $\frac{A}{C}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B}{D}$; adunque *dividendo* pel corollario XII. del teorema II. $\frac{A-C}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B-D}{D}$, e *permutando* pel corollario III. del teorema XXIX. $\frac{A-C}{B-D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$.

TEOREMA XXXVI.

Esprimano $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni, e i quattro termini d' ambedue sieno tra loro omogenei: sia in oltre la prima di esse eguale, ovvero maggiore, o minore della seconda;

Io dico in primo luogo, che $\frac{A+C}{B+D}$ è uguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{A}{B}$.

Dico

Dico in secondo luogo, che $\frac{A+C}{B+D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$.

Dimostrazione della prima parte.

GIacchè si suppone $\frac{A}{B}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, sarà *permutando* pel corollario III. del teorema XXIX. $\frac{A}{C}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B}{D}$, e per la prima parte del teorema XXXIV. sarà $\frac{A+C}{A}$ eguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{B+D}{B}$, e di nuovo *permutando* $\frac{A+C}{B+D}$ sarà eguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{A}{B}$. Il che dovea primieramente dimostrarsi.

Dimostrazione della seconda parte.

NElla prima parte si è provato, che $\frac{A}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B}{D}$; adunque *componendo* pel corollario XII. del teorema II., $\frac{A+C}{C}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{B+D}{D}$, e *permutando* pel corollario III. del teorema XXIX., $\frac{A+C}{B+D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$. Il che dovea secondariamente dimostrarsi.

COROLLARIO I.

SIa dato qualunque numero di proporzioni, e termini delle quali sieno tutti omogenei, v. g. $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$, e la prima di esse sia eguale, ovvero maggiore, o minore della seconda; la la seconda sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della terza; la terza sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della quarta, e così sempre, ec.

Io dico, che la proporzione della somma di tutti gli antecedenti verso la somma di tutti i conseguenti è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore dell' ultima delle proporzioni date: cioè per cagion d' esempio $\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{G}{H}$;

Imperocchè per la seconda parte di questo teorema $\frac{A+C}{B+D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$, e conseguentemente di $\frac{E}{F}$, a cui la $\frac{C}{D}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore, e ciò pel corollario XI. de' principj, ovvero pel corollario V. del teorema II.; adunque per la seconda parte del presente teorema $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{E}{F}$:

Similmente essendosi supposto $\frac{E}{F}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{G}{H}$; ed essendosi provato essere $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{E}{F}$, sarà eziandio eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{G}{H}$, a cui $\frac{E}{F}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore, e questo pel corollario XI. de' principj, ovvero pel corollario V. del teorema II.; laonde per la seconda parte di questo teorema sarà $\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{G}{H}$:

Lo stesso raziocinio vale in qualsivoglia numero di proporzioni, procedendo gradatamente dalle quattro proporzioni alle cinque, dalle cinque alle sei, e così in infinito; adunque il corollario è generalmente vero.

Co-

COROLLARIO II. dedotto dal I.

SE tutte le proporzioni date ſono eguali tra loro, la ſomma degli antecedenti ſta alla ſomma de' conſeguenti, come l'antecedente di ciaſcuna delle proporzioni date ſta al ſuo conſeguente;

Imperocchè ſi è provato nel corollario precedente, che in tal caſo $\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}$ è uguale a $\frac{G}{H}$, e per l'ipoteſi ciaſcuna delle proporzioni date è uguale a $\frac{G}{H}$ adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione, che à la ſomma degli antecedenti verſo la ſomma de' conſeguenti, è uguale a ciaſcuna delle proporzioni date.

Il primo di queſti due corollarj comprende la terza parte della propoſizione XXXIV. del V. libro d' Euclide; e il ſecondo contiene la propoſizione XII. del medeſimo libro, come anche il corollario XXIV. ancora de' principj.

COROLLARIO III.

FErme rimanendo le ſuppoſizioni del I. corollario; io dico, che la proporzione di tutti gli antecedenti inſieme $A+C+E+G$, ec. verſo tutti i conſeguenti inſieme $B+D+F+H$, ec. è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore della proporzione di tutti gli antecedenti *ſenza il primo* verſo tutti i conſeguenti *ſenza il primo*, cioè di $C+E+G$, ec. verſo $D+F+H$, ec.

Dico in oltre, che la proporzione di tutti gli antecedenti inſieme $A+C+E+C$, ec. verſo tutti i conſeguenti inſieme $B+D+F+H$, ec. è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore della proporzione del primo antecedente A verſo il primo conſeguente B.

I. Imperocchè per le ſuppoſizioni, e per la prima parte di queſto teorema $\frac{C+E}{D+F}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C}{D}$; adunque traſponendo, pe' corollarj

VI.,

VI., e XIV. de' principj, la ſteſſa $\frac{C}{D}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *maggiore*, o minore di $\frac{C+E}{D+F}$; ma per l' ipoteſi $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$; adunque pel corollario XI. de' principj, ovvero pel corollario V. del teorema II. $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C+E}{D+F}$; e quindi per la ſeconda parte del preſente teorema $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C+E}{D+F}$: e di più per la prima parte di queſto medeſimo teorema, $\frac{A+C+E}{B+D+F}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{A}{B}$: ed ecco provate ambedue le parti di queſto corollario nel caſo di tre proporzioni.

II. Da ciò, che ſi è provato nel punto precedente in ordine a tre proporzioni, ne ſiegue, che $\frac{C+E+G}{D+F+H}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{C}{D}$, cioè pe' corollarj VI., e XIV. de' principj *traſponendo*, $\frac{C}{D}$ è uguale, ovvero reſpettivamente *maggiore*, o minore di $\frac{C+E+G}{D+F+H}$; ma per la ſuppoſizione $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C}{D}$; adunque $\frac{A}{B}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C+E+G}{D+F+H}$, in virtù del corollario XI. de' principj, ovvero del corollario V. del teorema II., e conſeguentemente per la ſeconda parte del preſente teorema $\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{C+E+G}{D+F+H}$.

E di più per la prima parte di queſto medeſimo teorema.

$A+$

$\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}$ è uguale, ovvero respettivamente *minore*, o magggiore di $\frac{A}{B}$.

E così rimane dimostrata l' una, e l' altra parte del corollario presente nel caso di quattro proporzioni: con lo stesso modo si procederà dalle quattro alle cinque, dalle cinque alle sei, e così in infinito; di modo che il corollario è vero generalmente.

Nella prima, e seconda parte di questo corollario si comprendono la prima, e la seconda parte della proposizione XXXIV. del V. libro d' Euclide.

COROLLARIO IV. dedotto dal II.

DAta una serie di qualunque numero di proporzioni, v. g. $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{F}{G}$, ec., tali che abbiano tutti i loro termini omogenei, e che ciascuna di esse sia maggiore, ovvero minore della proporzione $\frac{P}{Q}$; io dico, che la somma degli antecedenti $A+C+F$, ec. delle proporzioni della medesima serie, verso la somma de' loro conseguenti $B+D+G$, ec. à una proporzione maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{P}{Q}$.

Imperocchè immaginando, in virtù del postulato, i nuovi antecedenti a, c, f, ec. alle respettive proporzioni della prima serie, in maniera che abbiasi questa seconda serie di proporzioni $\frac{a}{B}$, $\frac{c}{D}$, $\frac{f}{G}$, ec., ciascuna delle quali sia eguale alla proporzione $\frac{P}{Q}$, sarà pel corollario XVII. de' principj, *a minore*, ovvero respettivamente *maggiore* di A, e così c di C, ed f di F, ec., di modo che la somma degli antecedenti della prima serie di proporzioni, cioè $A+C+F$, ec. sarà maggiore, ovvero respettivamente minore della somma degli antecedenti della seconda serie di proporzioni, cioè $a+c+f$, ec., e conseguentemente pel corollario XVII. de' principj $\frac{A+C+F,\text{ ec.}}{B+D+G,\text{ ec.}}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{a+c+f,\text{ ec.}}{B+D+G,\text{ ec.}}$

 ma

ma pel corollario II. del presente teorema $\frac{a+c+f,\ ec.}{B+D+G,\ ec.}$ è uguale a $\frac{P}{Q}$; adunque pel corollario VI. del teorema II. $\frac{A+C+F,\ ec.}{B+D+G,\ ec.}$ è maggiore di $\frac{P}{Q}$.

TEOREMA XXXVII.

SIa da una parte una serie di quante si vogliano proporzioni, le quali abbiano conseguenti tra loro eguali, v. g. $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{C}{M}$, $\frac{D}{M}$, ec. e dall' altra parte sia una seconda serie d' altrettante proporzioni, che abbiano anch' esse conseguenti tra loro eguali, v. g. $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{d}{m}$, ec.; e sieno in oltre le proporzioni della prima serie prese per ordine eguali, ovvero maggiori, o minori delle proporzioni della seconda serie, prese anch' esse per ordine, cioè sia $\frac{A}{M}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{a}{m}$, e sia $\frac{B}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{b}{m}$, come pure $\frac{C}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{c}{m}$, e così, ec.

Io dico, che la somma di tutti gli antecedenti delle proporzioni della prima serie, cioè $A+B+C+D$, ec. verso la somma di tutti i loro conseguenti eguali, cioè verso $M+M+M+M$, ec. à una proporzione eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di quella, che intercede tra la somma di tutti gli antecedenti delle proporzioni della seconda serie, cioè $a+b+c+d$, ec. e la somma di tutti i loro conseguenti eguali, cioè $m+m+m+m$, ec. e per esprimerlo succintamente; io dico, che $\frac{A+B+C+D,\ ec.}{M+M+M+M,\ ec.}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a+b+c+d,\ ec.}{m+m+m+m,\ ec.}$

Tutti i termini delle proporzioni della prima serie debbono essere tra loro omogenei, siccome tutti i termini delle proporzioni della seconda serie esser debbono omogenei tra loro; ma

non

non è punto necessario, che i termini della seconda serie sieno omogenei ai termini della prima.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema XXII., e la definizione XXIII., la proporzione $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M+M+M+M, \text{ ec.}}$ è composta di queste due $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M}$ ed $\frac{M}{M+M+M+M, \text{ ec.}}$; siccome la proporzione $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m+m+m+m, \text{ ec.}}$ è composta di queste altre due $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m}$ ed $\frac{m}{m+m+m+m}$; ma pel corollario del teorema X. $\frac{M}{M+M+M+M, \text{ ec.}}$ è uguale ad $\frac{m}{m+m+m+m, \text{ ec.}}$; adunque pel teorema XXIV. $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M+M+M+M, \text{ ec.}}$ sta ad $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m+m+m+m, \text{ ec.}}$, come $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M}$ sta ad $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m}$; ma la prima di queste due ultime proporzioni è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della seconda; poichè essendo $\frac{A}{M}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{a}{m}$ per l' ipotesi, e similmente $\frac{B}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{b}{m}$, sarà pel coroll. XII. del teorema II. $\frac{A+B}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a+b}{m}$, e per la stessa ragione $\frac{A+B+C}{M}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a+b+c}{m}$, e similmente $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m}$; adunque pel I. corollario del teorema XXIV. $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M+M+M+M, \text{ ec.}}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m+m+m+m, \text{ ec.}}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

SE le due serie di proporzioni fossero l' insrascritte $\frac{M}{A}$, $\frac{M}{B}$,

M,

$\frac{M}{C}$, $\frac{M}{D}$, ec. ed $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$, $\frac{m}{c}$, $\frac{m}{d}$, ec. costanti ambedue di qualsivoglia numero di proporzioni tali, che quelle della prima serie avessero tutti gli antecedenti tra loro eguali, e quelle della seconda avessero anch' esse tutti gli antecedenti tra loro eguali.

E di più le proporzioni della prima serie, prese per ordine, fossero eguali, ovvero maggiori, o minori delle proporzioni della seconda serie, prese anch' esse per ordine.

Io dico, che $\frac{M+M+M+M, \text{ ec.}}{A+B+C+D, \text{ ec.}}$ sarebbe eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{m+m+m+m, \text{ ec.}}{a+b+c+d, \text{ ec.}}$.

Imperocchè per l' ipotesi, e pel corollario VI. del teorema XXIX., cioè *convertendo* dalle due serie di questo corollario nascerebbero le due respettive serie, che sieguono: $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{C}{M}$, $\frac{D}{M}$, ec. ed $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{d}{m}$, ec. tali, che $\frac{A}{M}$ sarebbe eguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{a}{m}$; $\frac{B}{M}$ sarebbe eguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{b}{m}$; $\frac{C}{M}$ sarebbe eguale; ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{c}{m}$, e così, ec. adunque in virtù del teorema presente $\frac{A+B+C+D, \text{ ec.}}{M+M+M+M, \text{ ec.}}$ sarebbe eguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{a+b+c+d, \text{ ec.}}{m+m+m+m, \text{ ec.}}$, e conseguentemente pel citato corollario VI. del teorema XXIX., vale a dire *convertendo* si avrebbe $\frac{M+M+M+M, \text{ ec.}}{A+B+C+D, \text{ ec.}}$ eguale, ovvero respettivamente *maggiore*, o minore di $\frac{m+m+m+m, \text{ ec.}}{a+b+c+d, \text{ ec.}}$.

COROLLARIO II.

DAta una serie di qualunque numero di proporzioni v. g. $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{C}{c}$, ec. tali, che abbiano tutti i loro termini omogenei, e che ciascuna di esse sia eguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione $\frac{M}{m}$; io dico, che la somma degli antecetecedenti $A+B+C$, ec. della medesima serie, verso la somma de' conseguenti di essa $a+b+c$, ec. à una proporzione uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{M}{m}$.

Imperocchè, avendosi per l'ipotesi $\frac{A}{a}$ eguale, ovvero maggiore, o minore di $\frac{M}{m}$, si avrà permutando, in vigore del corollario III. del teorema XXIX. $\frac{A}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a}{m}$, e per la stessa ragione si avrà $\frac{B}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{b}{m}$, e similmente $\frac{C}{M}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{c}{m}$, e così, ec.

Vi saranno pertanto due nuove serie di proporzioni, cioè $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{C}{M}$, ec. da una parte, ed $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, ec. dall' altra, tali che le proporzioni della prima delle due nuove serie (prese per ordine) sono eguali, ovvero respettivamente maggiori, o minori delle proporzioni della seconda delle due nuove serie (prese anch' esse per ordine); e tali ancora, che le proporzioni della prima di dette serie anno i conseguenti tra loro eguali, e le proporzioni della seconda di esse serie anno parimente i conseguenti tra loro eguali.

Laonde per questo teorema $\frac{A+B+C,\ ec.}{M+M+M,\ ec.}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{a+b+c,\ ec.}{m+m+m,\ ec.}$; e quindi permutando in virtù del corollario III. del teorema XXIX. si à $\frac{A+B+C,\ ec.}{a+b+c,\ ec.}$ eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{M+M+M,\ ec.}{m+m+m,\ ec.}$; ma pel corollario XXVI. de' principj $\frac{M+M+M,\ ec.}{m+m+m,\ ec.}$ è uguale ad $\frac{M}{m}$; adunque pel corollario VI. del teorema II. $\frac{A+B+C,\ ec.}{a+b+c,\ ec.}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{M}{m}$.

Sco-

SCOLIO.

IN questa dimostrazione si sono supposti tacitamente i termini della proporzione data $\frac{M}{m}$ omogenei a quelli della serie data $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, ec.; ma se la proporzione data fosse v. g. $\frac{P}{Q}$, e i di lei termini non omogenei a quelli della serie data, allora si assumerebbe $\frac{M}{m}$, i di cui termini fossero omogenei a quelli della mentovata serie, ed essa $\frac{M}{m}$ fosse eguale a $\frac{P}{Q}$; indi si proverebbe come sopra, che $\frac{A+B+C, \text{ ec.}}{a+b+c, \text{ ec.}}$ sarebbe eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{M}{m}$, e per conseguenza di $\frac{P}{Q}$, in virtù del corollario XI. de' principj, e del corollario VI. del teorema II.

II. Il corollario presente non solo comprende il corollario IV. del teorema XXXVI., ma in oltre contiene il corollario XXIV. de' principj, cioè il corollario II. del teorema XXXVI., vale a dire la proposizione XII. del V. libro d' Euclide; perchè quando $\frac{M}{m}$, o sia $\frac{P}{Q}$ è uguale a ciascuna delle proporzioni della serie data, essendo in tal caso $\frac{A+B+C, \text{ ec.}}{a+b+c, \text{ ec.}}$ eguale ad $\frac{M}{m}$, ovvero a $\frac{P}{Q}$ (come si è dimostrato in questo corollario, e scolio,) deve essere eguale anche a ciascuna delle proporzioni della serie data, e ciò pel corollario XI. de' principj.

TEOREMA XXXVIII.

RAppresentino S, ed s due serie di quanti termini si vorranno, con questo però, che l' una, e l' altra contengano egual numero di termini, e che i termini di S sieno omogenei ai termini di s; M significhi qualunque moltitudine de' primi termini della serie S *consecutivamente* presi, ed m una egual moltitudine de' primi termini di s *consecutivamente* presi.

Sia in oltre la proporzione del primo termine di S al primo mo termine di s eguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione del secondo termine di S al secondo termine di s; e la proporzione del secondo termine di S al secondo termine di s sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione del terzo termine di S al terzo termine di s, e così sempre, ec.

Io dico, che $\frac{M}{S-M}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{m}{s-m}$.

DIMOSTRAZIONE.

Esprima T l' ultimo termine di M, e t l' ultimo termine di m:

Pel primo corollario del teorema XXXVI. $\frac{M}{m}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{T}{t}$.

Per la seconda parte del corollario III. del teorema XXXVI. $\frac{T+(S-M)}{t+(s-m)}$ è uguale, ovvero respettivamente *minore*, o maggiore di $\frac{T}{t}$, cioè pe' corollarj VI., e XIV. de' principj $\frac{T}{t}$ è uguale, ovvero respettivamente *maggiore*, o minore di $\frac{T+(S-M)}{t+(s-m)}$, e conseguentemente pel corollario XI. de' principj, ovvero pel corollario V. del teorema II. $\frac{M}{m}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{T+(S-M)}{t+(s-m)}$.

In oltre per la prima parte del corollario III. del teorema XXXVI. $\frac{T+(S-M)}{t+(s-m)}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{S-M}{s-m}$; adunque pel corollario XI. de' principj, ovvero pel corollario V. del teorema II. $\frac{M}{m}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{S-M}{s-m}$, e finalmente *permutando* pel corollario III. del teorema XXIX., $\frac{M}{S-M}$ è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\frac{m}{s-m}$.

Il che dovea dimostrarsi.

COROL-

COROLLARIO.

SE i termini della ſerie S ſono tali, che il primo ſia eguale, ovvero maggiore, o minore del ſecondo, il ſecondo ſia eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del terzo, e così ſempre, ec.: e ſe di più, tutti i termini della ſerie s ſono eguali tra loro, io dico, che $\frac{M}{S-M}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{m}{s-m}$;

Imperocchè per la ſuppoſizione, e pel corollario VII. de' principj, ovvero pel corollario X. del teorema II. la proporzione del primo termine di S al ſecondo termine della medeſima S ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore della proporzione del primo termine di s al ſecondo termine della medeſima s, e *permutando* pel corollario III. del teorema XXIX. il primo termine di S al primo termine di s avrà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minor proporzione, che il ſecondo termine di S al ſecondo termine di s.

Similmente ſi proverà, che la proporzione del ſecondo termine di S al ſecondo termine di s à eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minor proporzione, che il terzo termine di S al terzo termine di s, e così ſempre, ec. adunque pel preſente teorema $\frac{M}{S-M}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{m}{s-m}$.

TEOREMA XXXIX.

ESprimano S ed So due ſerie di quanti termini ſi vorranno, purchè ambedue contengano un egual numero di termini; non eſſendo però neceſſario, che i termini di S ſieno omogenei ai termini di So.

Sia inoltre, il primo termine della ſerie S eguale, ovvero maggiore, o minore del ſecondo; e il ſecondo ſia eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del terzo, e così ſempre, ec. ma i termini della ſerie So ſieno tutti eguali tra loro.

M ſignifichi qualunque moltitudine de' primi termini della ſerie *S conſecutivamente* preſi, ed *Mo* un' egual moltitudine, o ſia pluralità de' primi termini della ſerie *So conſecutivamente* preſi.

Io dico, che $\frac{M}{S-M}$ è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\frac{Mo}{So-Mo}$.

Dimoſtrazione del primo caſo, quando tutti i termini della ſerie S ſono eguali tra loro.

CHiamando (a) ciaſcuno de' termini tra loro eguali della ſerie *S*, e (b) ciaſcuno de' termini tra loro eguali della ſerie *So*, chiamando ancora (p) il numero di que' termini sì della ſerie *S*, come della ſerie *So*, i quali coſtituiſcono le due pluralità *M*, ed *Mo* (pluralità, che ſono tra loro eguali in ordine alla moltitudine de' termini), e finalmente chiamando (q) il numero di que' termini sì della ſerie *S*, come della ſerie *So*, i quali coſtituiſcono le due pluralità $S-M$, ed $So-Mo$ (pluralità, che ſono tra loro eguali in ordine alla moltitudine de' termini); ſi à $M=pa$, ed $Mo=pb$, come pure $S-M=qa$, ed $So-Mo=qb$; di maniera che $\frac{M}{S-M}$ ſarà la medeſima coſa, che $\frac{pa}{qa}$, ed $\frac{Mo}{So-Mo}$ ſarà la ſteſſa coſa, che $\frac{pb}{qb}$; e ſiccome pel teorema VI. $\frac{pa}{qa}$ è uguale a $\frac{pb}{qb}$, così $\frac{M}{S-M}$ è uguale ad $\frac{Mo}{So-Mo}$. E queſta è la prova del primo caſo.

Dimoſtrazione del ſecondo, e terzo caſo, quando i termini della ſerie S vanno diminuendo, o vanno creſcendo.

S'Immagini una ſerie *Soo* tale, che abbia tanti termini, quanti ne à la ſerie S, e che tutti i termini della detta ſerie *Soo* ſieno eguali all' ultimo termine di *M*.

Rappreſenti *Moo* una moltitudine de' primi termini della ſerie *Soo conſecutivamente* preſi, rappreſenti, dico, una moltitu-

S dine

dine di detti termini eguali alla moltitudine, o sia pluralità M de' primi termini della serie S, *consecutivamente* presi.

Ciò posto per la dimostrazione del primo caso di questo teorema, sarà $\frac{Moo}{Soo - Moo} = \frac{Mo}{So - Mo}$, ma $\frac{M}{S - M}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{Moo}{Soo - Moo}$, pel terzo, e quarto punto del corollario XX. de' principj, mentre è facile a comprendere, che quando i termini di S vanno diminuendo, ovvero respettivamente crescendo, l' antecedente M di $\frac{M}{S - M}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore dell' antecedente Moo di $\frac{Moo}{Soo - Moo}$, e il conseguente $S - M$ di $\frac{M}{S - M}$ è *minore*, ovvero respettivamente maggiore del conseguente $Soo - Moo$; adunque pel corollario VI. del teorema II. $\frac{M}{S - M}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{Mo}{So - Mo}$.

E questa è la prova del secondo, e terzo caso.

Questo teorema comprende il corollario del teorema precedente.

COROLLARIO.

RAppresentino S, ed $Sooo$ due serie di quanti termini si vogliano, ma di egual numero di termini; potendo i termini dell' una esser non omogenei ai termini dell' altra.

Sia di più il primo termine di S maggiore, ovvero minore del secondo; il secondo maggiore, ovvero minore del terzo; e così sempre, ec.

All' incontro; il primo termine della serie $Sooo$ sia *minore*, ovvero respettivamente maggiore del secondo, il secondo sia *minore*, ovvero respettivamente maggiore del terzo, e così sempre, ec.

M significhi qualunque moltitudine de' primi termini della serie S *consecutivamente* presi, ed $Mooo$ un' egual moltitudine, o sia pluralità de' primi termini della serie $Sooo$ *consecutivamente* presi.

Io

Io dico, che $\frac{M}{S-M}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{Mooo}{Sooo-Mooo}$.

Imperciocchè immaginando una serie *So* di tanti termini tutti tra loro eguali quanti ne include la serie *Sooo*, *Mo* denoti una moltitudine de' primi termini della serie *So consecutivamente* presi eguale alla moltitudine, o sia pluralità *Mooo* de' primi termini della serie *Sooo consecutivamente* presi, e pel terzo, e secondo caso del presente teorema, $\frac{Mooo}{Sooo-Mooo}$ sarà *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{Mo}{So-Mo}$; adunque pel corollario XIV. de' principj $\frac{Mo}{So-Mo}$ sarà *maggiore*, ovvero respettivamente minore di $\frac{Mooo}{Sooo-Mooo}$; ma pel secondo, e terzo caso di questo medesimo teorema $\frac{M}{S-M}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{Mo}{So-Mo}$; adunque pel secondo punto del corollario V. del teorema II. $\frac{M}{S-M}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{Mooo}{Sooo-Mooo}$.

TEOREMA XL.

DInotino *A*, e *B* due grandezze omogenee date, ed *M* la media proporzionale tra esse, prendasi qualunque altra grandezza *Γ* parimente omogenea; io dico, che $\frac{A}{M}+\frac{M}{B}$ è sempre minore di $\frac{A}{\Gamma}+\frac{\Gamma}{B}$.

DIMOSTRAZIONE.

SI consideri primieramente, che $\frac{A}{M}$ è uguale ad $\frac{M}{B}$, poichè si à per la supposizione $A.M::M.B:$ secondariamente si rifletta, che pel corollario IV. del teorema IX. sussiste questa proporzionalità:

(1) $\frac{A}{\Gamma}.\frac{A}{M}::\frac{M}{B}.\frac{\Gamma}{B}$.

 Ora

Ora se la Y è maggiore della M, il primo termine $\frac{A}{Y}$ della proporzionalità (1) sarà minore di $\frac{A}{M}$ secondo termine di essa pel corollario XIX. de' principj, e quindi il terzo termine $\frac{M}{B}$ della stessa proporzionalità sarà minore anch' esso del quarto termine $\frac{Y}{B}$ in virtù del corollario X. de' principj; di modo che essendo $\frac{A}{M}$ eguale ad $\frac{M}{B}$, la proporzione $\frac{A}{Y}$ sarà il *minimo* termine, e la proporzione $\frac{Y}{B}$ il *massimo* della proporzionalità (1), mentre essendo il primo antecedente $\frac{A}{Y}$ minore del primo conseguente $\frac{A}{M}$, sarà ancora il secondo antecedente $\frac{M}{B}$ (eguale ad $\frac{A}{M}$) minore del secondo conseguente $\frac{Y}{B}$ pel corollario del teorema XI.

Se poi la Y è minore della M, allora il primo termine $\frac{A}{Y}$ della proporzionalità (1) sarà maggiore del secondo termine $\frac{A}{M}$ pel corollario XIX. de' principj, e conseguentemente il terzo termine $\frac{M}{B}$ sarà maggiore del quarto termine $\frac{Y}{B}$ pel corollario X. de' principj, e perchè $\frac{A}{M}$ è uguale ad $\frac{M}{B}$, sarà $\frac{A}{Y}$ il *massimo* termine, ed $\frac{Y}{B}$ il *minimo* della proporzionalità (1) attesochè il primo antecedente $\frac{A}{Y}$ maggiore del primo conseguente $\frac{A}{M}$ esige, che il secondo antecedente $\frac{M}{B}$ (eguale ad $\frac{A}{M}$) sia maggiore del secondo conseguente $\frac{Y}{B}$, e ciò pel corollario del teorema XI.; adunque, o la Y sia maggiore, o minore della M, sarà sempre $\frac{A}{Y}+\frac{Y}{B}$ l' aggregato del *massimo*, e del *minimo* termine della proporzionalità (1), e perciò in vigore del teorema XXXII. $\frac{A}{Y}+\frac{Y}{B}$ sarà sempre maggiore di $\frac{A}{M}+\frac{M}{B}$,

vale

vale a dire $\frac{A}{M} + \frac{M}{B}$ sarà sempre minore di $\frac{A}{Y} + \frac{Y}{B}$ pel corollario XIV. de' principj. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I. NElla dimostrazione di questo teorema si è dedotto, mediante il corollario X. de' principj, che se la Y è maggiore, ovvero minore della M, il secondo antecedente $\frac{M}{B}$ della proporzionalità (1) sarà *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{Y}{B}$ secondo conseguente di essa: la medesima cosa potea provarsi anche mediante il corollario XVII. de' principj, poichè se Y è maggiore, ovvero minore di M, ne siegue, che M è *minore*, ovvero respettivamente maggiore di Y, e conseguentemente che $\frac{M}{B}$ è *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{Y}{B}$ in virtù dell' accennato corollario XVII. de' principj.

II. Gl' intendenti del calcolo differenziale potranno vedere nello scolio annesso al corollario III. del teorema LXXVII. una maniera di trovare per analisi il presente teorema XL.

TEOREMA XLI.

LE lettere A, B, C, D, F rappresentino cinque grandezze omogenee in generale, e sia $\frac{A}{B}$ eguale a $\frac{D}{F}$; io dico, che $\frac{A}{D}$ sta a $\frac{B}{C}$, come C ad F.

DIMOSTRAZIONE.

LE tre proporzioni $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{B}{C}$ costituiscano un prim' ordine di grandezze, e C, D, F formino un second' ordine.

Si avrà pel teorema III. $\frac{A}{D} . \frac{B}{D} :: A . B$, ma per l' ipotesi $A . B :: D . F$; adunque pel corollario XI. de' principj la prima $\frac{A}{D}$ del prim' ordine sta alla sua seconda $\frac{B}{D}$, come la seconda D del second' ordine sta alla sua terza F.

Di più, pel teorema IX. si à $\frac{B}{D}$ seconda del prim' ordine alla sua terza $\frac{B}{C}$, come C prima del second' ordine alla sua seconda D; adunque per l'egualità perturbata $\frac{A}{B}$ prima del prim' ordine sta alla sua terza $\frac{B}{C}$, come C prima del second' ordine sta alla sua terza F. Il che dovea dimostrarsi.

DEFINIZIONE XXVIII.

Quando due, tre, quattro, o generalmente *molte* proporzioni tra loro *eguali* sono le proporzioni *componenti* di qualunque proporzione $\frac{R}{Q}$ (in modo, che il prodotto di queste due, tre, quattro, o *molte* proporzioni eguali sia eguale ad $\frac{R}{Q}$) si dirà, che la medesima $\frac{R}{Q}$ è respettivamente duplicata, triplicata, quadruplicata, ovvero generalmente *moltiplice* di *ciascuna* delle proporzioni eguali *componenti*; v. g. se $\frac{R}{Q} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{F}{G} \times \frac{H}{I}$, e se di più le quattro proporzioni componenti $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{F}{G}, \frac{H}{I}$ sono tra loro *eguali*, la $\frac{R}{Q}$ si dirà *quadruplicata* di $\frac{A}{B}$, ovvero di $\frac{C}{D}$, oppure di $\frac{F}{G}$, o di $\frac{H}{I}$.

DEFINIZIONE XXIX.

E La proporzione della quale $\frac{R}{Q}$ è duplicata, triplicata, quadruplicata, o generalmente *moltiplice*, si chiamerà respettivamente sudduplicata, suttriplicata, suquadruplicata, o generalmente *summoltiplice* di $\frac{R}{Q}$: v. g. nell' esempio della precedente definizione, la proporzione $\frac{A}{B}$ si dirà *suquadruplicata* della proporzione $\frac{R}{Q}$, e ciascuna delle tre altre proporzioni, che sono eguali alla $\frac{A}{B}$, e insieme con essa *compongono* la $\frac{R}{Q}$, cioè la

$\frac{C}{D}$, la $\frac{F}{G}$, e la $\frac{H}{I}$, ciascuna, dico, di queste si dirà *suquadruplicata* della proporzione $\frac{R}{Q}$.

SCOLIO.

È Chiaro, che se $\frac{R}{Q}$, e $\frac{T}{S}$ sono *egualmente moltiplici* delle respettive proporzioni $\frac{r}{q}$, e $\frac{t}{s}$, saranno ancora le medesime $\frac{r}{q}$, e $\frac{t}{s}$ *egualmente summoltiplici* delle respettive proporzioni $\frac{R}{Q}$, e $\frac{T}{S}$.

Imperciocchè se $\frac{R}{Q}$, e $\frac{T}{S}$ saranno v. g. *duplicate*, *triplicate*, *o quadruplicate*, ec. delle respettive $\frac{r}{q}$, e $\frac{t}{s}$, evidentemente si concepisce, che queste istesse proporzioni $\frac{r}{q}$, e $\frac{t}{s}$ saranno vicendevolmente sudduplicate, o suttriplicate, o suquadruplicate, ec. delle respettive $\frac{R}{Q}$, e $\frac{T}{S}$.

DEFINIZIONE XXX.

SE una proporzione si moltiplica una volta per se medesima, il prodotto, che ne risulta, dicesi, seconda dignità della stessa proporzione, e se una proporzione si moltiplica due, tre, quattro volte, ec. per se medesima, il prodotto chiamasi respettivamente terza, quarta, quinta dignità, ec. della stessa proporzione, e così in infinito; desumendo il *grado* della *dignità* dal numero delle volte *più uno*, che la proporzione si è moltiplicata per se medesima.

DEFINIZIONE XXXI.

QUando una proporzione v. g. $\frac{A}{B}$ moltiplicata una volta per se medesima, ne produce un' altra $\frac{P}{Q}$, quella dicesi radice seconda di questa, e quando $\frac{A}{B}$ moltiplicata due, tre, quattro

vol-

volte, ec. per se medesima produce la $\frac{P}{Q}$, dicesi, ch' è respettivamente la radice terza, quarta, quinta, ec. di $\frac{P}{Q}$, desumendo il *grado* della *radice* dal numero delle volte *più uno*, che la $\frac{A}{B}$ dee moltiplicarsi per se medesima, ad effetto di produrre la $\frac{P}{Q}$.

AVVERTIMENTO.

NEl teorema, che siegue, e suoi corollarj, siccome ancora nel teorema XLV., che susseguirà, le proporzioni saranno denotate con una sola lettera per ciascuna, e qualunque volta le proporzioni saranno espresse con una sola lettera, si designerà il prodotto di due, o più proporzioni senza il segno X; ponendo semplicemente le lettere, che esprimano le proporzioni *moltiplicate* avanti quelle, che significano le proporzioni *moltiplicanti*; v. g. *EF* significherà il prodotto della proporzione *E* moltiplicata per la proporzione *F*; *EFG* significherà il prodotto delle due proporzioni *E*, ed *F* (cioè *EF*) moltiplicato per la proporzione *G*, e così sempre, ec.

TEOREMA XLII.

SIeno due prodotti v. g. *EFG*, ec. ed *efg*, ec. formati da qualsivoglia numero di proporzioni, purchè *tante* sieno le proporzioni, che formano il primo, *quante* quelle, che formano il secondo: e le proporzioni *E*, *F*, *G*, ec. delle quali è formato il primo prodotto, prese ad una ad una, sieno eguali, ovvero maggiori, o minori delle *corrispondenti* proporzioni, delle quali è formato il secondo, cioè delle respettive *e*, *f*, *g*, ec.

Io dico, che il primo prodotto *EFG*, ec. è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo *efg*, ec.

SCOLIO.

INtendo per *proporzioni corrispondenti* quelle, che serbano una simigliante disposizione ne' loro respettivi prodotti, v. g. la *E* nel primo prodotto è corrispondente alla *e* del secondo, e così la *F* alla *f*, la *G* alla *g*, ec.

DI-

Dimostrazione.

Si noti, che per la definizione XXII., e pe' due primi articoli dello scolio ad essa annesso, il prodotto di qualunque numero di proporzioni è anch' esso una proporzione *pura*.

Ciò posto egli è visibile, che pel I. corollario del teorema XXIV., e pel teorema XXV. *EF* è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di *ef*; e per la stessa ragione (*EF*) *G*, cioè *EFG* è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di (*ef*) *g*, cioè di *efg*, e così *EFG*, ec. è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di *efg*, ec. qualunque esser possa il numero delle proporzioni, che formano i due prodotti. Il che dovea dimostrarsi.

Scolio.

Se una, o più proporzioni dell' espresse con le lettere *e*, *f*, *g*, ec. fossero le medesime, che una, o più delle proporzioni corrispondenti *E*, *F*, *G*, ec. v. g. se fosse *f* la medesima, che *F*, egli è chiaro, che con lo stesso raziocinio adoperato nella dimostrazione di questo teorema si mostrerebbe, che *EFG*, ec. sarebbe eguale ad *efg*, ec.

Corollario I.

Se ciascuna delle due proporzioni $\frac{L}{O}$, $\frac{P}{Q}$ è *composta* di egual numero di proporzioni respettivamente eguali in modo, che ad ogni proporzione *componente* la $\frac{L}{O}$ corrisponda con *simigliante disposizione* una proporzione eguale a quelle, che *compongono* la $\frac{P}{Q}$; io dico, che $\frac{L}{O}$ è uguale a $\frac{P}{Q}$.

La definizione XXIII. fa conoscere, che questo corollario è compreso nel teorema.

Corollario II.

Se la proporzione $\frac{M}{N}$ è uguale ad *EFG*, ec. la stessa proporzione $\frac{M}{N}$ sarà eguale anche ad *efg*, ec. (per la terza parte del corollario XI. de' principj) allorchè le proporzioni E, F, G, ec. sono eguali alle proporzioni corrispondenti e, f, g, ec.

COROLLARIO III.

I. SE le proporzioni E, F, G, ec. le quali *compongono* il prodotto EFG, ec. sono tutte eguali tra loro, e se la proporzione (e) è uguale ad una delle proporzioni *componenti* E, F, G, ec. il prodotto EFG, ec. sarà eguale ad *eee*, ec. cioè ad una *dignità* tale della proporzione (e) che il grado di essa *dignità* si designi col numero delle proporzioni E, F, G, ec.

II. E quindi se la proporzione T è uguale ad EFG, ec. e la proporzione (t) è uguale ad *eee*, ec. sarà pel corollario XII. de' principj T eguale a (t).

COROLLARIO IV.

I. SE due proporzioni R, P sono *moltiplici* di egual numero di proporzioni tali, che le proporzioni *componenti* di R sieno eguali, ovvero maggiori, o minori di quelle, che compongono P; io dico, che R è uguale, ovvero maggiore, o minore di P.

II. E se la proporzione R è uguale, ovvero maggiore, o minore di P, e le proporzioni r, e p sono egualmente *summoltiplici* delle respettive proporzioni suddette R, e P, cioè ambedue sudduplicate, o suttriplicate, ovvero suquadruplicate, ec. di R respettivamente e di P; io dico, che r è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di p.

La prima parte di questo corollario nasce immediatamente dal presente teorema in virtù della definizione XXVIII.

La seconda parte poi si prova così: se r non fosse eguale, o respettivamente maggiore, o minore di p, la medesima r sarebbe *maggiore*, *o minore*, ovvero respettivamente *eguale*, *o minore*, oppure *eguale*, *o maggiore* della p; ma se r fosse tale, la R sarebbe similmente *maggiore*, *o minore*, ovvero respettivamente *eguale*, *o minore*, oppure *eguale*, *o maggiore* della P: e questo pel teorema presente, e per la definizione XXIX.

XXIX., ma ciò rovesciarebbe la supposizione, adunque, ec.

COROLLARIO V.

I. SE la proporzione O è uguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione V, anche qualsivoglia *dignità* di O sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore d'una *dignità simile* di V.

II. Ed anche la *radice* di qualsivoglia *grado* di O sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della radice simile di V.

E' evidente per le definizioni XXVIII., XXIX., XXX., e XXXI., che la prima parte di questo corollario è un caso della prima parte del corollario precedente, e che la seconda parte di questo corollario è un caso della seconda parte del medesimo precedente corollario.

TEOREMA XLIII.

SE una proporzione, v. g. $\frac{M}{N}$ è *composta* di molte proporzioni, e in luogo d'alcune, o di tutte le sue proporzioni *componenti* si surrogano altre proporzioni respettivamente eguali; io dico, che la suddetta proporzione $\frac{M}{N}$ è *composta* delle proporzioni *surrogate*, e di quelle, che rimangono, in caso, che ne rimangano.

DIMOSTRAZIONE.

LA proporzione $\frac{M}{N}$ sia per cagion d'esempio composta delle proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{D}{H}$, $\frac{I}{S}$, ec., e sieno $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}$; $\frac{d}{b}=\frac{D}{H}$; $\frac{i}{s}=\frac{I}{S}$, ec; sarà pel teorema precedente $\frac{A}{B}\times\frac{D}{H}\times\frac{I}{S}$, ec. $=\frac{a}{b}\times\frac{d}{b}\times\frac{i}{s}$, ec.; ma per l'ipotesi, e per la definizione XXIII. $\frac{M}{N}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{H}\times\frac{I}{S}$, ec.; adunque per la terza parte del corollario XI. de' principj $\frac{M}{N}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{b}\times\frac{i}{s}$, ec., e conseguentemente per la definizione XXIII., la

 pro-

proporzione $\frac{M}{N}$ è composta delle proporzioni *surrogate* $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{h}$, $\frac{i}{s}$ ec.

E benchè non a tutte le proporzioni componenti si surrogassero le respettive eguali, ma una, o molte ne rimanessero delle pristine componenti; nientedimeno la medesima ragione proverebbe sempre l'eguaglianza di $\frac{M}{N}$ col *nuovo* prodotto formato dalle proporzioni *surrogate*, e delle *rimanenti*, e per la definizione XXIII. la proporzione $\frac{M}{N}$ sarebbe *composta* delle proporzioni surrogate, e delle residue, in caso che ne rimanessero.

Laonde essendo questo raziocinio manifestamente applicabile a qualsivoglia numero di proporzioni componenti, ne segue, che il teorema è generalmente vero.

COROLLARIO.

SE di più in luogo di alcune, o di tutte le proporzioni *surrogate*, o delle *rimanenti*, ovvero delle une, o delle altre si sostituissero altre proporzioni rispettivamente eguali; io dico, che la stessa proporzione $\frac{M}{N}$ è *composta* delle proporzioni *nuovamente* sostituite, e delle *residue*, quando vi restino.

E così in infinito se si sostituiscono in infinito proporzioni sempre nuove, e sempre eguali;

Imperciocchè il teorema presente mostra, che la proporzione $\frac{M}{N}$ è *composta* delle proporzioni respettivamente eguali sostituite colla *prima* surrogazione, e delle *rimanenti*, ec.; adunque in vigore di questo medesimo teorema la stessa proporzione $\frac{M}{N}$ (considerata ora come composta delle proporzioni respettivamente eguali sostituite colla *prima* surrogazione, e delle *rimanenti*, ec.) sarà eziandio *composta* delle altre proporzioni respettivamente eguali sostituite colla *seconda* surrogazione, e delle *rimanenti*, ec.

La stessa ragione evidentemente à luogo in ordine alle altre proporzioni respettivamente eguali, che possono sostituirsi con una *terza*, o *quarta*, o *quinta* surrogazione, ec.; adunque il presente corollario è generalmente vero.

TEO-

TEOREMA XLIV.

SIeno le due proporzioni eguali tra loro $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, e le altre due proporzioni eguali tra loro $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$: sia in oltre $\frac{A}{B}$ moltiplice della proporzione $\frac{E}{F}$; io dico, che la proporzione $\frac{A+C}{B+D}$ è egualmente moltiplice della proporzione $\frac{E+C}{F+H}$.

Tutti i termini delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ debbono essere tra loro omogenei, e tutti i termini delle altre due proporzioni $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ debbono essere omogenei fra loro.

DIMOSTRAZIONE.

I. SI suppone $\frac{A}{B}=\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec., e si suppone ancora $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$; adunque pel corollario XXIV. de' principj $\frac{A+C}{B+D}=\frac{A}{B}$, e pel corollario XI. de' principj, e per l' articolo II. dello scolio annesso alla definizione XXII. $\frac{A+C}{B+D}=\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec.

II. Si suppone in fine $\frac{E}{F}=\frac{G}{H}$; adunque pel corollario XXIV. de' principj $\frac{E+G}{F+H}=\frac{E}{F}$, e pel teorema XLII. $\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec. è uguale ad $\left[\frac{E+G}{F+H}\right]\left[\frac{E+G}{F+H}\right]\left[\frac{E+G}{F+H}\right]$, ec.: ma si è provato nel primo punto, che $\frac{A+C}{B+D}=\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec.; adunque pel corollario XI. de' principj, e per l' articolo II. dello scolio annesso alla definizione XXII., sarà eziandio $\frac{A+C}{B+D}=\left[\frac{E+G}{F+H}\right]\left[\frac{E+G}{F+H}\right]\left[\frac{E+G}{F+H}\right]$, ec., vale a dire, che la proporzione $\frac{A+C}{B+D}$ è tanto moltiplice della proporzione $\frac{E+G}{F+H}$, quanto la proporzione $\frac{A}{B}$ della proporzione $\frac{E}{E}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEO-

TEOREMA XLV.

IL prodotto di quante, e quali proporzioni si vogliano è uguale ad ogni altro prodotto delle medesime proporzioni, qualunque ordine si osservi nel moltiplicarle insieme:

Rappresentino per cagion d'esempio le lettere *p*, *q*, *r*, *s* altrettante proporzioni, il prodotto *pqrs* è uguale al prodotto *pqsr*, e a qualunque altro prodotto di tutte le proporzioni *p*, *q*, *r*, *s*, disposte con qualsisia ordine nel moltiplicarle tra loro.

SCOLIO.

PRima di passare alla dimostrazione di questo teorema si noti, che due proporzioni v. g. *p*, *q* possono essere disposte *in due sole maniere*, cioè *pq*, e *qp*: ma tre proporzioni, v. g. *p*, *q*, *r* possono disporsi nel loro prodotto *in sei maniere*, cioè *in tre volte due maniere*, mentre nel primo prodotto delle due proporzioni *p*, *q*, cioè in *pq*, la terza proporzione *r* può occupare tre luoghi, cioè il terzo luogo, il secondo, e il primo, donde nascono i tre prodotti *pqr*, *prq*, *rpq*; similmente nel secondo prodotto delle proporzioni *p*, *q*, cioè in *qp*, la terza proporzione *r* può stare in tre luoghi, cioè nel terzo, nel secondo, e nel primo, e così formare i tre prodotti *qpr*, *qrp*, *rqp*.

Quattro proporzioni possono ricevere nel loro prodotto *ventiquattro* disposizioni, cioè *quattro volte sei*; imperciocchè la quarta proporzione *s* può occupare quattro luoghi in ciascuno de' sei prodotti formati dalle tre proporzioni *p*, *q*, *r*, cioè può stare nel quarto luogo, nel terzo, nel secondo, e nel primo, v. g. nel prodotto *pqr* la proporzione *s* può disporsi in queste quattro maniere, *pqrs*, *pqsr*, *psqr*, *spqr*.

In somma considerando la cosa attentamente, si conoscerà con evidenza, che il prodotto di due proporzioni può ricevere disposizioni *num.* 2.; il prodotto di tre proporzioni può ricevere disposizioni *num.* 2. 3.; il prodotto di quattro proporzioni può ricevere disposizioni num. 2. 3. 4.

E' generalmente il numero delle disposizioni possibili di quante

pro-

proporzioni si vogliano nel loro prodotto è, 2. 3. 4. 5. 6., ec. dovendosi intendere questa formola, o sia espressione di numeri continuata con la medesima legge, finchè l' ultimo numero di essa sia eguale al numero delle proporzioni, che debbono moltiplicarsi insieme.

Definizione XXXII.

Ciò posto, chiamo prodotti *terminativi* quelli, ne' quali la lettera *ultima a sopravvenire* è posta nell' ultimo luogo.

E chiamo prodotti non *terminativi* quelli, ne' quali la detta lettera *ultima a sopravvenire* non è posta nell' ultimo luogo: v. g. se ne' prodotti *pq*, e *qp* la lettera *r*, che è l' *ultima a sopravvenire*, è posta nell' ultimo luogo, i due nuovi prodotti, che ne risultano, cioè *pqr*, e *qpr*, sono da me chiamati prodotti *terminativi*.

Ma i prodotti *prq*, e *rqp*, ne' quali la lettera *r ultima a sopravvenire* non è posta nell' ultimo luogo, sono detti da me prodotti non *terminativi*.

Definizione XXXIII.

Dico, che un prodotto *terminativo* corrisponde ad uno, o più prodotti non *terminativi*, quando tolta dal prodotto *terminativo* la lettera *ultima sopravvenire*, e tolta parimente dall' altro, o altri prodotti *non terminativi* la stessa lettera *ultima a sopravvenire*, tutti i prodotti, che rimangono, sono identici, cioè sono formati con le residue lettere disposte in tutti col medesimo ordine: v. g. dico, che il prodotto *terminativo pqr* corrisponde ai prodotti *non terminativi prq*, ed *rpq*; perchè tolta dal prodotto *terminativo pqr* la lettera *r*, *che è l' ultima a sopravvenire*, e tolta parimente dai prodotti *non terminativi prq*, ed *rpq* la stessa lettera *r*, rimangono i tre prodotti identici *pq*, *pq*, *pq*, ne' quali le medesime lettere *p*, e *q* sono disposte col medesimo ordine.

Avvertimento.

Dee qui il lettore aver presente allo spirito, ciò che si è no-

notato ne' due primi articoli dello ſcolio anneſſo alla definizione XXII., ed è, che il prodotto di due, o più proporzioni equivale ad una proporzione *pura*.

Queſto avvertimento ſervirà per rendere più brevi, e più intelligibili i ſeguenti raziocinj.

Dimoſtrazione del teorema.

I. PEl caſo di due proporzioni, il teorema è già dimoſtrato nel teorema XXIII.

Pel caſo di tre proporzioni.

II. TRa i ſei prodotti formati dalla diverſa diſpoſizione delle tre proporzioni *p*, *q*, *r*, due ve ne ſono *terminativi*, cioè *pqr*, *qpr*, che naſcono dai due prodotti delle due proporzioni *p*, e *q* moltiplicati per la terza proporzione *r* (la quale è l' *ultima a ſopravvenire*) collocata in fine di eſſi: e queſti due prodotti *terminativi* ſono eguali tra loro; poichè eſſendo eguali pel primo punto i due prodotti *pq*, e *qp* delle due proporzioni *p*, e *q*, anche i ſuddetti due prodotti *terminativi pqr*, e *qpr* ſono eguali pel corollario I. del teorema XXIV.: ma perchè ciaſcuno di queſti due prodotti *terminativi* può ricevere due nuove diſpoſizioni, e divenire così in due maniere prodotto *non terminativo*, collocando la terza proporzione *r* non più nell' ultimo luogo di eſſi prodotti *terminativi*, ma nel ſecondo, e nel primo; ſi à da provare, che ciaſcuno de' due prodotti *non terminativi*, come ſopra, è uguale al prodotto *terminativo*, che gli corriſponde, e da queſta prova ne ſeguirà manifeſtamente l' eguaglianza di *tutti quanti* i prodotti delle tre proporzioni *p*, *q*, *r*; mentre ſi è già moſtrato, che i due prodotti *terminativi* ſono tra loro eguali.

Per provare l' egualità de' due prodotti *non terminativi rpq*, e *prq* col primo prodotto *terminativo pqr*, che loro *corriſponde*, ſi conſideri che *rpq*, e *prq* ſono eguali tra loro in virtù del corollario I. del teorema XXIV., poichè provengono dai due prodotti *rp*, *pr* (che pel primo punto ſono eguali) moltiplicati per *q*; ma il prodotto *non terminativo prq*, nel qua-

quale la lettera *r ultima a ſopravvenire* à il penultimo luogo, è uguale al prodotto *terminativo* a ſe *corriſpondente* *pqr*; imperciocchè ſi à pel corollario VII. del teorema XXIV., $pr.pq::r.q$, e conſeguentemente pel corollario I. del teorema XXIX., $prq = pqr$; adunque anche *rpq* è uguale a *pqr*: ed ecco provato, che ciaſcuno de' due prodotti *non terminativi* *prq*, *rpq* è uguale al prodotto *terminativo* a ſe *corriſpondente* *pqr*.

Debbono ora moſtrarſi eguali gli altri due prodotti *non terminativi* *rqp*, e *qrp* al prodotto *terminativo* *qpr*, che loro *corriſponde*, il che nello ſteſſo modo ſi eſeguirà; poichè *rqp*, e *qrp* ſono eguali tra loro pel corollario I. del teorema XXIV., come riſultanti dai due prodotti *rq*, e *qr* (eguali pel primo punto) e ambedue moltiplicati per *p*, ma il prodotto *non terminativo* *qrp*, nel quale la lettera *r ultima a ſopravvenire* à il penultimo luogo, è uguale al prodotto *terminativo* *qpr*, atteſochè ſi à pel corollario VII. del teorema XXIV. $qr.qp::r.p$, e conſeguentemente pel corollario I. del teorema XXIX. $qrp = qpr$; adunque anche *rqp* è uguale a *qpr*: ed ecco provato, che ciaſcuno de' due prodotti *non terminativi* *rqp*, e *qrp* è uguale al prodotto *terminativo* a ſe *corriſpondene* *pqr*; rimane pertanto dimoſtrata la verità del teorema nel caſo di tre proporzioni.

Pel caſo di quattro proporzioni.

Tra i ventiquattro prodotti formati dalla varia moltiplicazione inſieme delle quattro proporzioni *p*, *q*, *r*, *s*, ſe ne trovano ſei *terminativi*, i quali riſultano dai ſei diverſi prodotti delle tre proporzioni *p*, *q*, *r*, moltiplicati per la quarta proporzione *s ultima a ſopravvenire* diſpoſta in fine di eſſi: ora egli è chiaro, che eſſendo eguali tra loro i ſei prodotti delle tre proporzioni *p*, *q*, *r*, conforme ſi è moſtrato nel ſecondo punto, anche gli accennati ſei prodotti *terminativi*, che ſi formano dalla moltiplicazione di quelli per la quarta proporzione *s*, ſaranno tra loro eguali pel corollario I. del teorema XXIV.

Perchè poi a ciaſcuno di queſti ſei prodotti *terminativi* dar ſi poſſono tre nuove diſpoſizioni in modo, che divenga in tre maniere prodotto *non terminativo*, collocando la quarta pro-

proporzione *s* non più nell'ultimo luogo, ma nel terzo, nel ſecondo, e nel primo; dee provarſi, che ciaſcuno de' tre nuovi prodotti *non terminativi* (ai quali corriſponde un prodotto *terminativo*), che ciaſcuno, dico, de' tre nuovi prodotti *non terminativi* è uguale al prodotto *terminativo*, che gli *corriſponde*, e da queſta prova ne ſeguirà l' eguaglianza di *tutti quanti* i prodotti delle quattro proporzioni *p*, *q*, *r*, *s*, conforme chiaramente appariſce a chi vi riflette ſopra con attenzione.

Per diminuire la lunghezza di queſta dimoſtrazione, baſterà provare l' eguaglianza de' tre prodotti *non terminativi spqr*, *psqr*, *pqsr*, col prodotto *terminativo pqrs*, che loro *corriſponde*.

Si conſideri pertanto, che i tre ſuddetti prodotti *non terminativi* ſono eguali tra loro, mentre naſcono dai tre prodotti *spq*, *psq*, *pqs* moltiplicati per la proporzione *r*, or ſiccome, pel ſecondo punto, queſti tre ultimi prodotti di tre proporzioni ſono tra loro eguali, così pel corollario I. del teorema XXIV. ſono eguali tra loro anche i tre primi prodotti di quattro proporzioni, cioè *spqr*, *psqr*, *pqsr*; ma il prodotto *non terminativo pqsr* (nel quale la lettera *s ultima a ſopravvenire* à il *penultimo* luogo) è uguale al prodotto *terminativo* a ſe *corriſpondente pqrs*, mentre ſi à pel teorema XXIV. $pqs.pqr::s.r$, e conſeguentemente pel corollario I. del teorema XXIX. $pqsr = pqrs$; adunque anche gli altri due prodotti *spqr*, *psqr* (ciaſcuno de' quali è uguale a *pqsr*) ſaranno eguali al prodotto *pqrs*: ed ecco provato, che ciaſcuno de' tre prodotti *non terminativi spqr*, *psqr*, *pqsr* è uguale al prodotto *terminativo pqrs* a ſe *corriſpondente*.

Nella medeſima guiſa ſi proverà, che gli altri prodotti *non terminativi* preſi a tre a tre, ſono eguali a quel prodotto *terminativo*, che loro corriſponde, e ſi finirà di dimoſtrare il teorema nel caſo di quattro proporzioni.

IV. Egli è chiaro, che lo ſteſſo metodo, e gl' iſteſſi raziocinj anno luogo in qualſivoglia numero di proporzioni, che ſieno moltiplicate inſieme, mentre ſi proverà ſempre, e ſimilmente.

Primo, che tutti i prodotti *terminativi* ſaranno eguali tra loro.

Se-

Secondo, che i prodotti *non terminativi*, a' quali *corrisponde* ciascun prodotto *terminativo*, saranno tutti eguali tra loro.

Terzo, che il prodotto *non terminativo*, nel quale la lettera *ultima a sopravvenire* à il penultimo luogo, sarà eguale al prodotto *terminativo* a se *corrispondente*.

E la prova di queste tre cose mostrerà l' eguaglianza di *tutti quanti* i prodotti e *terminativi*, e *non terminativi*; adunque il teorema è generalmente vero.

I casi, che precedono, serviranno a dimostrare quelli, che immediatamente seguono, come il primo caso delle due proporzioni p, q à servito a dimostrare il caso delle tre proporzioni p, q, r, e questo à servito a dimostrare il caso delle quattro proporzioni p, q, r, s.

SCOLIO.

NElla dimostrazione di questo teorema in vece del corollario VII. del teorema XXIV. potea citarsi il teorema XXIV., mediante il quale sarebbesi provato lo stesso, che si è provato con l' allegazione del suo settimo corollario.

TEOREMA XLVI.

DUe prodotti formati d' egual numero di proporzioni *respettivamente* eguali sono eguali tra loro, benchè le proporzioni componenti *respettivamente* eguali non sieno disposte col medesimo ordine negl' istessi due prodotti.

SCOLIO.

DUe prodotti formati d' egual numero di proporzioni *respettivamente* eguali, s' intendono esser quelli, ciascuno de' quali risulta dalla moltiplicazione d' egual numero di proporzioni tali, che ad ogni proporzione, che entra nella formazione di uno de' due prodotti, corrisponda nell' altro prodotto un' egual proporzione; benchè nell' uno, e nell' altro prodotto quelle proporzioni tra esse eguali, che li formano, non sieno disposte col medesimo ordine.

DIMOSTRAZIONE.

Diasi alle proporzioni costituenti il secondo prodotto una disposizione simile a quella, che tengono nel primo prodotto le proporzioni ad esse *respettivamente* eguali, e in tal guisa si formerà un *terzo* prodotto, a cui il primo prodotto sarà eguale pel teorema XLII., ma pel teorema precedente il secondo prodotto è uguale al medesimo terzo prodotto; adunque il primo, e il secondo prodotto sono eguali tra loro pel corollario XI. de' principj. Il che dovea dimostrarsi.

Se si trasponessero le proporzioni del primo prodotto, per farne in simigliante guisa un *terzo*, si proverebbe il teorema con lo stesso raziocinio.

COROLLARIO I.

Sieno due grandezze A, ed F omogenee tra loro, e le due altre grandezze H, ed N omogenee tra loro; si frappongano tra le due prime A, ed F quante, e quali grandezze si vogliano, purchè sieno ad esse omogenee, e queste costituiscano un certo numero di proporzioni *intermedie* componenti la proporzione $\frac{A}{F}$: altrettante grandezze omogenee s' interpongano tra le due H, ed N in maniera, che tutte le proporzioni *intermedie* da esse costituite, e componenti la proporzione $\frac{H}{N}$ sieno eguali, *prese ad una ad una* alle proporzioni, che compongano la proporzione $\frac{A}{F}$, *prese ad una ad una*, quantunque non sieno disposte col medesimo ordine.

Io dico, che la proporzione $\frac{A}{F}$ è uguale alla proporzione $\frac{H}{N}$.

Imperciocchè pel teorema XXII., la proporzione $\frac{A}{F}$ è il prodotto di tutte le *proporzioni intermedie* costituite dalle grandezze, che si frappongono tra A, ed F, e la proporzione $\frac{H}{N}$ è il prodotto di egual numero di proporzioni *intermedie* respettivamente eguali (benchè non sieno disposte col medesimo ordine), che vengono costituite dalle grandezze frapposte tra H,

ed

ed N; adunque per questo teorema, il primo prodotto, o sia la proporzione $\frac{A}{F}$ è uguale al secondo prodotto, o sia alla proporzione $\frac{H}{N}$.

SCOLIO.

SE le grandezze intermedie tra A, ed F, e quelle, che s' interpongono tra H, ed N sono tali, che le proporzioni costituite dalle prime sieno eguali prese ad una ad una, col *medesimo ordine* alle proporzioni costituite dalle seconde; allora il teorema XXII. fa conoscere, che $\frac{A}{F}$ è il prodotto delle proporzioni costituite dalle prime, ed $\frac{H}{N}$ è il prodotto delle proporzioni costituite dalle seconde, e il teorema XLII. mostra, che $\frac{A}{F}$ è uguale ad $\frac{H}{N}$.

COROLLARIO II.

SE ciascuna delle due proporzioni $\frac{L}{O}$, $\frac{P}{Q}$ è composta d' egual numero di proporzioni *respettivamente* eguali; io dico, che $\frac{L}{O}=\frac{P}{Q}$, quantunque le proporzioni componenti la $\frac{L}{O}$ non sieno disposte col medesimo ordine, che serbano tra loro le proporzioni respettivamente eguali componenti la $\frac{P}{Q}$.

La definizione XXIII. mostra, che questo secondo corollario è compreso nel teorema.

COROLLARIO III.

UNa proporzione *composta*, v. g. $\frac{M}{N}$, che tra le sue proporzioni *componenti* contiene una, o molte proporzioni d' egualità disposte con qualunque ordine, è uguale al prodotto di quelle sole proporzioni *componenti*, le quali non sono proporzioni d' egualità.

Tra le proporzioni *componenti* la proporzione $\frac{M}{N}$ si scelgano quel-

quelle, che non sono proporzioni d'egualità, e se ne faccia un prodotto, ch'io chiamerò *riformato*: si moltiplichi questo prodotto riformato per tutte quelle proporzioni d'egualità, che anno luogo tra le proporzioni componenti la proporzione $\frac{M}{N}$, e ne risulterà un *nuovo prodotto* eguale alla stessa proporzione componente $\frac{M}{N}$, e ciò per la definizione XXIII., e pel teorema presente; ma equivalendo il prodotto *riformato* ad una proporzione pura per l'articolo II. dello scolio annesso alla definizione XXII., lo stesso prodotto *riformato* conserva sempre il suo medesimo valore, benchè sia moltiplicato per quante si vogliano proporzioni d'egualità, e ciò per gli articoli III., e VI. del citato scolio; adunque lo stesso prodotto *riformato* è uguale al *nuovo* prodotto, e perchè il medesimo *nuovo* prodotto si è già mostrato eguale alla proporzione $\frac{M}{N}$, ne siegue pel corollario XI. de' principj, che il prodotto *riformato* è uguale alla proporzione *composta* $\frac{M}{N}$.

COROLLARIO IV.

E Perciò tutte le proporzioni *componenti*, che sono proporzioni d'egualità, possono togliersi dal prodotto di tutte le proporzioni *componenti*, le quali costituiscono una proporzione *composta*, senza cangiar punto il valore di questa.

TEOREMA XLVII.

QUalsivoglia proporzione $\frac{A}{D}$ sia *composta* di qualunque numero di proporzioni, v. g. di $\frac{o}{p}$, $\frac{V}{Q}$, $\frac{K}{n}$, $\frac{i}{l}$, le quali io chiamerò *componenti*, e sieno altrettante proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{M}$, $\frac{M}{D}$, le quali io chiamerò connesse, tali, che il conseguente della prima di esse sia l'antecedente della seconda, e il conseguente della seconda sia l'antecedente della terza, e così, ec. ma il conseguente dell'ultima $\frac{M}{D}$ sia lo stesso, che il conseſeguente della proporzione *compoſta* $\frac{A}{D}$: e tali ancora, che le proporzioni conneſſe a riſerva dell' ultima, cioè $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{M}$ ſieno eguali *preſe ad una ad una* ad altrettante delle proporzioni *componenti*, v. g. ad $\frac{o}{p}$, $\frac{k}{n}$, $\frac{i}{l}$ preſe con qualunque ordine; io dico, che l' ultima delle proporzioni *conneſſe*, cioè $\frac{M}{D}$ è uguale alla rimanente delle proporzioni *componenti*, cioè nel noſtro eſempio ad $\frac{V}{Q}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. LA proporzione $\frac{A}{D}$, che per l' ipoteſi, e per la definizione XXIII. è uguale al prodotto delle proporzioni *componenti* $\frac{o}{p}$, $\frac{V}{Q}$, $\frac{k}{n}$, $\frac{i}{l}$, ſarà eguale, eziandio al prodotto delle ſteſſe proporzioni $\frac{o}{p}$, $\frac{k}{n}$, $\frac{i}{l}$, $\frac{V}{Q}$ diſpoſte con queſt' ultimo ordine, perchè pel teorema XLVI. ambedue queſti prodotti ſono tra loro eguali: prendaſi ora in conformità de' due primi articoli dello ſcolio, che precede il teorema XXII. prendaſi, dico, la proporzione $\frac{r}{P}$ eguale al prodotto delle tre proporzioni $\frac{o}{p}$, $\frac{k}{n}$, $\frac{i}{l}$, e la proporzione $\frac{A}{D}$ ſarà eguale al prodotto delle due proporzioni $\frac{r}{P}$, $\frac{V}{Q}$; poichè rappreſentando $\frac{o}{p} \times \frac{k}{n} \times \frac{i}{l}$ una proporzione pura, per l' articolo II. dello ſcolio anneſſo alla definizione XXII. il prodotto $\frac{r}{P} \times \frac{V}{Q}$ è uguale all' altro prodotto $\frac{o}{p} \times \frac{k}{n} \times \frac{i}{l} \times \frac{V}{Q}$ pel corollario I. del teorema XXIV., e per la ſuppoſizione $\frac{A}{D}$ è uguale anch' eſſa al medeſimo prodotto $\frac{o}{p} \times \frac{k}{n} \times \frac{i}{l} \times \frac{V}{Q}$.

II. Pel teorema XXII. la proporzione $\frac{A}{M}$ è uguale al prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{M}$ delle tre proporzioni *conneſſe* $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{M}$, ma per

per l'ipotesi, e pel teorema XLVI., il prodotto di queste tre proporzioni *connesse* è uguale al prodotto $\frac{o}{p} \times \frac{k}{n} \times \frac{i}{l}$ delle tre proporzioni *componenti* $\frac{o}{p}$, $\frac{k}{n}$, $\frac{i}{l}$; adunque $\frac{A}{M} = \frac{o}{p} \times \frac{k}{n} \times \frac{i}{l}$, ed essendo per la costruzione $\frac{o}{p}$, $\frac{k}{n} \times \frac{i}{l} = \frac{r}{P}$, ne siegue, che $\frac{A}{M} = \frac{r}{P}$.

III. In virtù del teorema XXII. $\frac{A}{D}$ è uguale ad $\frac{A}{M} \times \frac{M}{D}$, e per quanto si è provato nel primo punto, la stessa $\frac{A}{D}$ è uguale ad $\frac{r}{P} \times \frac{V}{Q}$; adunque i due prodotti $\frac{A}{M} \times \frac{M}{D}$, ed $\frac{r}{P} \times \frac{V}{Q}$ sono eguali tra loro, ma nel secondo punto si è dimostrato essere $\frac{A}{M}$ eguale ad $\frac{r}{P}$; adunque pel corollario I. del teorema XXIV. $\frac{M}{D}$ ultima delle proporzioni *connesse* è uguale ad $\frac{V}{Q}$, rimanente delle proporzioni componente.

E' visibile, che questi raziocinj possono applicarsi a qualunque numero di proporzioni *componenti*, e a qualsivoglia moltitudine di proporzioni connesse, e per conseguenza il teorema è generalmente vero.

TEOREMA XLVIII.

DAte quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ tali, che i loro antecedenti ordinatamente presi sieno proporzionali tra loro, e i loro conseguenti ordinatamente presi sieno anch' essi proporzionali fra loro.

Io dico, che $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$.

Non è necessario, che i due ultimi antecedenti sieno omogenei ai due primi.

DIMOSTRAZIONE.

TRa i primi due termini $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ della proporzionalità da dimomoſtrarſi, pongaſi la proporzione $\frac{C}{B}$, e tra gli ultimi due termini $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ di detta proporzionalità pongaſi la proporzione $\frac{G}{F}$: e con ciò ſi avranno due ordini di grandezze, cioè da una parte $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{C}{D}$, e dall'altra $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{F}$, $\frac{G}{H}$ tali, che la prima $\frac{A}{B}$ del prim'ordine ſtia alla ſua ſeconda $\frac{C}{B}$, come la prima $\frac{E}{F}$ del ſecond'ordine ſta alla ſua ſeconda $\frac{G}{F}$, e queſto per l'ipoteſi, e pel teorema IV.: e tali ancora, che la $\frac{C}{B}$ ſeconda del prim' ordine ſta alla ſua terza $\frac{C}{D}$, come la $\frac{G}{F}$ ſeconda del ſecond'ordine ſta alla ſua terza $\frac{G}{H}$; imperciocchè per la ſuppoſizione ſi à $B.D::F.H$, ovvero *convertendo* $D.B::H.F$, e pel teorema IX. ſi vede eſſere $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::D.B$, e $\frac{G}{F}.\frac{G}{H}::H.F$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{G}{F}.\frac{G}{H}$. Ciò poſto in virtù dell'egualità ordinata ſi ottiene $\frac{A}{B}$ prima del prim'ordine alla ſua terza $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ prima del ſecond' ordine alla ſua terza $\frac{G}{H}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Seconda dimoſtrazione.

I. Si ſuppone $A.C::E.G$; adunque pel teorema IV. $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{E}{H}.\frac{G}{H}$:

II. Per l'ipoteſi $B.D::F.H$, e *convertendo* $D.B::H.F$; ma pel teorema IX. $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::D.B$, ed $\frac{E}{F}.\frac{E}{H}::H.F$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{E}{F}.\frac{E}{H}$.

III. Si è provato nel primo punto, che $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{E}{H}.\frac{G}{H}$, e ſi è provato nel ſecondo punto, che $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{E}{F}.\frac{E}{H}$; adunque per l'egual'egualità perturbata $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}::\frac{E}{F}\cdot\frac{G}{H}$. Il che dovea dimostrarsi.

Terza dimostrazione.

PEr l'ipotesi $\frac{A}{C}=\frac{E}{G}$, e $\frac{B}{D}=\frac{F}{H}$; adunque pel corollario VIII. de' principj sussiste questa proporzionalità $\frac{A}{C}\cdot\frac{B}{D}::\frac{E}{G}\cdot\frac{F}{H}$, e quindi pel corollario IV. del teorema XXIX. $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}::\frac{E}{F}\cdot\frac{G}{H}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.,

Che contiene una maniera di trovare una proporzione, che sia quarta proporzionale dopo tre proporzioni date.

SE a tre proporzioni date $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$ dovrà assegnarsi la quarta proporzione, ciò si farà agevolmente prendendo una quarta proporzione $\frac{G}{H}$, il cui antecedente G sia quarto proporzionale dopo gli antecedenti A, C, E delle tre proporzioni date, e il conseguente H sia quarto proporzionale dopo i conseguenti B, D, F delle medesime proporzioni date.

COROLLARIO II.,

Che contiene una maniera di moltiplicare qualunque proporzione per qualunque altra.

PEr moltiplicare insieme due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, prendasi la proporzione d'egualità $\frac{Z}{Z}$ (Z esprime qualsivoglia grandezza omogenea ai termini di $\frac{A}{B}$) e poi si pigli la proporzione $\frac{G}{H}$ tale, che il suo antecedente G sia quarta proporzionale dopo i tre antecedenti Z, A, C, e che il suo conseguente H sia quarto proporzionale dopo i tre conseguenti Z, B, D; mentre in vigore di questo teorema sarà $\frac{Z}{Z}\cdot\frac{A}{B}::\frac{C}{D}\cdot\frac{G}{H}$; adunque per le defi-

definizioni XXI., e XXII. $\frac{G}{H}$ sarà il prodotto di $\frac{A}{B}$ moltiplicato per $\frac{C}{D}$.

Corollario III.,

Che unitamente con lo scolio infrascritto contiene il modo di trovare la radice di qualsivoglia grado d' una proporzione data.

Se si cercasse una proporzione ignota $\frac{r}{s}$ tale, che moltiplicata per se medesima un dato numero di volte, componesse una data proporzione $\frac{P}{Q}$; dovrebbe prendersi qualsivoglia proporzione d' egualità, v. g. $\frac{V}{V}$, indi tra l' antecedente V di questa, e l' antecedente P della proporzione data trovare *tante* grandezze in proporzione geometrica continua, *quante volte* la $\frac{r}{s}$ deve essere moltiplicata per se stessa, ad effetto di comporre la proporzione data $\frac{P}{Q}$; dovrebbero in oltre ritrovarsi *altrettante* grandezze in proporzione geometrica continua tra il conseguente V della proporzione d' egualità, e il conseguente Q della proporzione data $\frac{P}{Q}$; mentre la *prima* delle grandezze *intermedie* tra V, e P sarebbe l' antecedente, e la *prima* delle grandezze *intermedie* tra V, e Q sarebbe il conseguente d' una proporzione eguale alla ricercata $\frac{r}{s}$.

Per render più sensibile la prova di questa verità, conviene applicarla ad un caso particolare: v. g. se si cerca la proporzione $\frac{r}{s}$ tale, che moltiplicata tre volte per se medesima faccia un prodotto eguale alla proporzione data $\frac{P}{Q}$, si trovino tra gli antecedenti V, e P tre grandezze A, C, F in proporzione geometrica continua, e si trovino tra i conseguenti V, e Q tre grandezze B, D, G in proporzione geometrica continua.

 Ciò

Ciò fatto, si avranno pel teorema presente cinque proporzioni $\frac{V}{V}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{F}{G}$, $\frac{P}{Q}$, e la seconda di esse, cioè $\frac{A}{B}$ sarà eguale alla proporzione cercata $\frac{Y}{S}$;

Imperciocchè per la costruzione, e per questo teorema si à $\frac{V}{V} . \frac{A}{B} :: \frac{A}{B} . \frac{C}{D}$; adunque $\frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$ per le definizioni XXI., e XXII.

Similmente per questo teorema, e per la costruzione si à $\frac{V}{V} . \frac{A}{B} :: \frac{C}{D} . \frac{F}{G}$; adunque $\frac{F}{G} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$, vale a dire pel teorema XXIII. $\frac{F}{G} = \frac{C}{D} \times \frac{A}{B}$, e ponendo in luogo di $\frac{C}{D}$ la sua espressione $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$, ne viene $\frac{F}{G} = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$;

Si à finalmente per questo medesimo teorema, e per la costruzione $\frac{V}{V} . \frac{A}{B} :: \frac{F}{G} . \frac{P}{Q}$, e perciò $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \times \frac{F}{G}$, cioè $\frac{P}{Q} = \frac{F}{G} \times \frac{A}{B}$ e surrogando in vece di $\frac{F}{G}$ la sua espressione $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$, ne risulta $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$; adunque $\frac{A}{B}$ moltiplicata tre volte per se medesima fa un prodotto eguale alla proporzione data $\frac{P}{Q}$, e per conseguenza $\frac{A}{B}$ è uguale alla proporzione ricercata $\frac{Y}{S}$.

Si avverta, che V significa qualsivoglia grandezza ad arbitrio, purchè però sia omogenea ai termini della proporzione data $\frac{P}{Q}$.

SCOLIO.

E' Manifesto, che in virtù della definizione XXXI. la $\frac{A}{B}$ è la radice *quarta* della proporzione data $\frac{P}{Q}$; perchè secondo questo corollario la $\frac{A}{B}$ moltiplicata tre volte per se medesima produce la $\frac{P}{Q}$.

E generalmente è chiaro altresì per la medesima definizione XXXI., che se la A sarà la prima di *tante* grandezze intertermedie tra gli antecedenti V, e P, *quante* unità contiene il numero n, la stessa $\frac{A}{B}$ sarà la radice del *grado* $n+1$ della proporzione data $\frac{P}{Q}$; perchè in vigore di ciò, che si è insegnato in questo corollario, la $\frac{A}{B}$ sarà *tante* volte moltiplicata per se stessa, ad effetto di produrre la $\frac{P}{Q}$, *quante* unità contiene il numero n.

COROLLARIO IV. dedotto dal III.

SE in cambio di $\frac{V}{V}$ si fosse presa $\frac{P}{P}$, gli antecedenti intermedj sarebbero stati tutti eguali all' antecedente P della proporzione data $\frac{P}{Q}$, per poter essere tra loro in proporzione geometrica continua: e per la stessa ragione, se in luogo di $\frac{V}{V}$ si fosse presa $\frac{Q}{Q}$, i conseguenti intermedj sarebbero stati tutti eguali al conseguente Q della proporzione data $\frac{P}{Q}$.

SCOLIO.

SE nel cercare la $\frac{T}{S}$ si prenderà qualche altra espressione della proporzione d' egualità differente da $\frac{V}{V}$, come sarebbe per cagion d' esempio $\frac{T}{T}$, la proporzione $\frac{a}{b}$, che si troverà operando nel modo espresso nel III. corollario, sarà eguale alla proporzione $\frac{A}{B}$ trovata mediante l' assunzione di $\frac{V}{V}$.

Imperciocchè pel III. corollario dall' assunzione di $\frac{V}{V}$ si avrà $\frac{P}{Q}=\frac{A}{B}\times\frac{A}{B}\times\frac{A}{B}$, ec. e dall' assunzione di $\frac{T}{T}$ si avrà $\frac{P}{Q}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$, ec. ma $\frac{P}{Q}$ è uguale a se medesima; adunque pel corollario IV. del teorema XLII. $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$.

COROL-

COROLLARIO V.

Esprimano $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni in generale, e la proporzione $\frac{E}{F}$ sia eguale a $\frac{C}{D}$; io dico, che sussiste questa proporzionalità $\frac{A}{E}.\frac{B}{F}::\frac{A}{C}.\frac{B}{D}$.

Imperciocchè pel corollario VIII. de' principj $A.B::A.B$, e per la supposizione $E.F::C.D$; adunque per questo teorema $\frac{A}{E}.\frac{B}{F}::\frac{A}{C}.\frac{B}{D}$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Poichè si suppone $\frac{E}{F}=\frac{C}{D}$, sarà pel corollario VIII. de' principj $\frac{A}{B}.\frac{E}{F}::\frac{A}{B}.\frac{C}{D}$; adunque pel corollario IV. del teorema XXIX. $\frac{A}{E}.\frac{B}{F}::\frac{A}{C}.\frac{B}{D}$.

TEOREMA XLIX.

Date quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{H}{G}$, $\frac{E}{F}$ tali, che l' antecedente A della prima sia all' antecedente C della seconda, come il conseguente E della quarta è al conseguente G della terza, e il conseguente B della prima sia al conseguente D della seconda, come l' antecedente F della quarta è all' antecedente H della terza; io dico, che $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{E}$.

Non è necessario, che i conseguenti delle due ultime proporzioni sieno omogenei agli antecedenti delle due prime.

Prima dimostrazione.

I. Si à per l' ipotesi $A.C::E.G$, e pel teorema III. $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::A.C$, siccome pel teorema IX. $\frac{H}{G}.\frac{H}{E}::E.G$; adunque pel corollario XII. de' principj si avrà $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{H}{G}.\frac{H}{E}$.

II.

II. Si à per l'ipotesi $B.D::F.H$, cioè *convertendo* $D.B::H.F$, e pel teorema IX. $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::D.B$, siccome pel teorema III. $\frac{H}{E}.\frac{F}{E}::H.F$; adunque pel corollario XII. de' principj sarà $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{E}.\frac{F}{E}$.

III. O' dimostrato nel primo punto, che $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{H}{G}.\frac{H}{E}$, e ò dimostrato nel secondo punto, che $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{E}.\frac{F}{E}$; adunque per l'egualità ordinata $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{E}$. Il che dovea dimostrarsi.

Seconda dimostrazione.

I. Per la supposizione $A.C::E.G$; ma pel teorema III. $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::A.C$, e pel teorema IX. $\frac{F}{G}.\frac{F}{E}::E.G$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{F}{G}.\frac{F}{E}$.

II. Per la supposizione $B.D::F.H$, e *convertendo* $D.B::H.F$; ma pel teorema IX. $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::D.B$, e pel teorema III. $\frac{H}{G}.\frac{F}{G}::H.F$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{G}$.

III. Si è provato nel primo punto, che $\frac{A}{B}.\frac{C}{B}::\frac{F}{G}.\frac{F}{E}$, e si è provato nel secondo punto, che $\frac{C}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{G}$; adunque per l'egualità perturbata $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{E}$. Il che dovea dimostrarsi.

Terza dimostrazione.

In virtù delle supposizioni, e del precedente teorema XLVIII. si à questa proporzionalità $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}::\frac{E}{F}.\frac{G}{H}$; poichè si suppone $A.C::E.G$, e $B.D::F.H$; ma pel corollario V. del teore-

ma

ma XXIX. ſi à $\frac{E}{F} . \frac{G}{H} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Quarta dimoſtrazione.

SI à per la ſuppoſizione $\frac{A}{C} = \frac{E}{G}$, e $\frac{B}{D} = \frac{F}{H}$; laonde pel corollario VIII. de' principj ſi avrà queſta proporzionalità $\frac{A}{C} . \frac{B}{D} :: \frac{E}{G} . \frac{F}{H}$; e pel corollario IV. del teorema XXIX. ſi avrà eziandio $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$; ma pel corollario V. del teorema XXIX. $\frac{E}{F} . \frac{G}{H} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.,

Che contiene un modo di trovare la quarta proporzionale dopo le tre proporzioni date
$\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{H}{G}$.

PEr aſſegnare la quarta proporzionale dopo le tre proporzioni date $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{H}{G}$, ſi prenda la quarta proporzione $\frac{F}{E}$ tale, che il ſuo antecedente F ſia quarto proporzionale dopo il conſeguente D della ſeconda proporzione, il conſeguente B della prima proporzione, e l' antecedente H della terza proporzione, e tale ancora, che il conſeguente E della medeſima proporzione $\frac{F}{E}$ ſia quarto proporzionale dopo l' antecedente C della ſeconda proporzione, l' antecedente A della prima proporzione, e il conſeguente G della terza proporzione, e così la proporzione $\frac{E}{F}$ ſarà quale ſi deſidera.

Imperciocchè avendoſi per la coſtruzione $D . B :: H . F$, e $C . A :: G . E$ ſi avrà *convertendo* $B . D :: F . H$, ed $A . C :: E . G$,

e per

e pel presente teorema sussisterà questa proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{C}{D}$ $: : \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$.

COROLLARIO II.

Che contiene un modo di moltiplicare qualunque proporzione per qualunque altra.

PEr moltiplicare insieme $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si prenda la proporzione d' egualità $\frac{x}{x}$ (x denota qualsisia grandezza omogenea ad a), indi assumasi la proporzione $\frac{f}{e}$ tale, che sia quarta proporzionale dopo $\frac{x}{x}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, cioè tale, che il suo antecedente f sia quarto proporzionale dopo b, x, c, e che il suo conseguente (e) sia quarto proporzionale dopo a, x, d, poichè per l' antecedente corollario si avrà questa proporzionalità $\frac{x}{x} . \frac{a}{b} : : \frac{c}{d} . \frac{f}{e}$, e per le definizioni XXI., e XXII. $\frac{f}{e}$ sarà il prodotto di $\frac{a}{b}$ moltiplicato per $\frac{c}{d}$.

TEOREMA L.

SE $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ sta a $\frac{G}{H}$, e se di più A sta a C, come E sta a G; io dico, che B sta a D, come F sta ad H.

DIMOSTRAZIONE.

ASsumasi pel postulato la grandezza S tale, che si abbia questa proporzionalità:

(1) $B . D : : F . S$.

Sarà dunque pel teorema XLVIII.

(2) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} : : \frac{E}{F} . \frac{G}{S}$.

Poichè si è supposto $\frac{A}{C} = \frac{E}{G}$; ma si è anche supposto

(3) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} : : \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$.

 Adun-

Adunque pel teorema I., saranno eguali i quarti termini delle due proporzionalità (2), e (3), cioè sarà $\frac{G}{S}=\frac{G}{H}$, e conseguentemente pel corollario XXI. de' principj sarà S eguale ad H; ponendo pertanto nella proporzionalità (1) in luogo di S la sua eguale H, si avrà pel corollario IX. de' principj $B.D::F.H$. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I.

Se $\frac{A}{B}$ sta ad $\frac{A}{C}$, come $\frac{A}{D}$ sta ad $\frac{A}{E}$; io dico, che B sta a C, come D sta ad E.

Imperciocchè è chiaro, che A sta ad A, come A sta ad A pel corollario VII. de' principj; adunque, ec.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Per l'ipotesi $\frac{A}{B}.\frac{A}{C}::\frac{A}{D}.\frac{A}{E}$; pel teorema IX., e *trasponendo* $C.B::\frac{A}{B}.\frac{A}{C}$; e parimente $E.D::\frac{A}{D}.\frac{A}{E}$; adunque pel corollario XII. de' principj $C.B::E.D$, e *convertendo* $B.C::D.E$.

Corollario II.

Se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{A}{E}$ sta a $\frac{C}{F}$; io dico, che B sta a D, come E sta ad F.

Imperciocchè pel corollario VIII. de' principj A sta a C, come A sta a C; adunque, ec.

Corollario III.

Se $\frac{A}{B}=\frac{E}{F}$, e $\frac{C}{D}=\frac{G}{H}$, e se di più A sta a C, come E sta a G; io dico, che B sta a D, come F sta ad H.

Imperciocchè per la supposizione, e pel corollario VIII. de' principj sarà $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{E}{F}.\frac{G}{H}$; adunque pel presente teorema $B.D::F.H$.

Altra

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEr l' ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$, e *convertendo* $\frac{B}{A} = \frac{F}{E}$: per l' ipotesi $\frac{A}{C} = \frac{E}{G}$, e $\frac{C}{D} = \frac{G}{H}$; adunque per l' egualità ordinata $\frac{B}{D} = \frac{F}{H}$.

TEOREMA LI.

SE $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ sta a $\frac{G}{H}$, e se di più B sta a D, come F sta ad H; io dico, che A sta a C, come E sta a G.

DIMOSTRAZIONE.

PRendasi pel postulato la grandezza S tale, che abbiasi questa proporzionalità:

(1) $A . C :: E . S$.

E pel teorema XLVIII. si avrà:

(2) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{S}{H}$.

Poichè si è supposto $\frac{B}{D} = \frac{E}{F}$; ma si è supposto ancora

(3) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$.

Adunque in virtù del teorema I. $\frac{S}{H}$ quarto termine della proporzionalità (2) è uguale a $\frac{G}{H}$ quarto termine della proporzionalità (3); e quindi pel corollario XXI. de' principj S sarà eguale a G: di modo che sostituendo nella proporzionalità (1) in cambio di S la sua eguale G, ne risulterà pel corollario IX. de' principj $A . C :: E . G$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

SE $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{B}$, come $\frac{D}{F}$ sta ad $\frac{E}{F}$; io dico, che A sta a C, come D sta ad E, perchè pel corollario VII. de' principj B sta a B, come F sta ad F.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Per l' ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{B} :: \frac{D}{F} . \frac{E}{F}$, e pel teorema III., e *trasponendo* $A . C :: \frac{A}{B} . \frac{C}{B}$, come pure $D . E :: \frac{D}{F} . \frac{E}{F}$; adunque pel corollario XII. de' principj $A . C :: D . E$.

Corollario II.

Se $\frac{B}{A}$ sta a $\frac{D}{C}$, come $\frac{E}{A}$ sta ad $\frac{F}{C}$; io dico, che B sta a D, come E sta ad F.

Imperciocchè pel corollario VIII. de' principj A sta a C, come A sta a C; adunque, ec.

Corollario III.

Se $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$, e $\frac{C}{D} = \frac{G}{H}$, e se di più B sta a D, come F sta ad H; io dico, che A sta a C, come E sta a G.

Imperciocchè per la supposizione, e pel corollario VIII. de' principj si à $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$, e quindi per questo teorema $A . C :: E . G$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Per l' ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$, e $\frac{B}{D} = \frac{F}{H}$, come pure per l' ipotesi $\frac{C}{D} = \frac{G}{H}$, e *convertendo* $\frac{D}{C} = \frac{H}{G}$; adunque per l' egualità ordinata $\frac{A}{C} = \frac{F}{G}$.

Teorema LII.

Se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{H}{G}$ sta ad $\frac{F}{E}$, e se di più A sta a C, come E sta a G; io dico, che B sta a D, come F sta ad H.

Dimostrazione.

Si pigli pel postulato la grandezza S in modo, che si abbia questa proporzionalità.

(1)

(1) $B.D::F.S$,

e pel teorema XLIX. sarà

(2) $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{S}{G}.\frac{F}{E}$;

ed essendo per la supposizione

(3) $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{E}$

saranno eguali pel teorema I. i terzi termini delle due proporzionalità (2), e (3), vale a dire sarà $\frac{S}{G}=\frac{H}{G}$, e in vigore del corollario XXI. de' principj S sarà eguale ad H; di modo che la surrogazione di H in vece di S nella proporzionalità (1) darà pel corollario IX. de' principj $B.D::F.H$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

Avendosi per l' ipotesi $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{H}{G}.\frac{F}{E}$, ed avendosi pel corollario V. del teorema XXIX. $\frac{H}{G}.\frac{F}{E}::\frac{E}{F}.\frac{G}{H}$, si avrà pel terzo punto del corollario XI. de' principj $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{E}{F}.\frac{G}{H}$; ma per la supposizione $A.C::E.G$; adunque pel teorema L. $B.D::F.H$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{H}{C}$ sta ad $\frac{F}{A}$; io dico, che B starà a D, come F ad H;

Imperciocchè pel corollario VIII. de' principj A sta a C, come A a C; adunque, ec.

COROLLARIO II.

Se $\frac{A}{B}$ sta ad $\frac{A}{D}$, come $\frac{H}{I}$ sta ad $\frac{F}{I}$; io dico, che B starà a D, come F ad H;

Imperciocchè pel corollario VII. de' principj A sta ad A, come I ad I; adunque, ec.

Altra dimostrazione di questo corollario.

Si suppone $\frac{A}{B} . \frac{A}{D} :: \frac{H}{I} . \frac{F}{I}$, ma pel teorema IX., e *trasponendo* $D . B :: \frac{A}{B} . \frac{A}{D}$, e pel teorema III., e *trasponendo* $H . F :: \frac{H}{I} . \frac{F}{I}$; adunque pel corollario XII. de' principj $D . B :: H . F$, e *convertendo* $B . D :: F . H$.

Teorema LIII.

Se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{H}{G}$ sta ad $\frac{F}{E}$, e se di più B sta a D, come F sta ad H; io dico, che A sta a C, come E sta a G.

Dimostrazione.

Assumasi pel postulato la grandezza S tale, che sia

(1) $A . C :: E . S$;

si avrà pel teorema XLIX.

(2) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{H}{S} . \frac{F}{E}$,

e perchè abbiamo supposto

(3) $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$

i terzi termini delle due proporzionalità (2), e (3) saranno eguali pel teorema I., cioè si avrà $\frac{H}{S} = \frac{H}{G}$, e pel corollario XXI. de' principj sarà $S = G$; laonde sostituendo nella proporzionalità (1) la G in cambio di S, che gli è eguale, si vedrà essere $A . C :: E . G$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

Essendo per l'ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$, ed essendo pel corollario V. del teorema XXIX. $\frac{H}{G} . \frac{F}{E} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$, sarà pel terzo punto del corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$; ma per la supposizione $B . D :: F . H$; adunque pel teorema LI. $A . C :: E . G$. Il che dovea dimostrarsi.

Co-

COROLLARIO I.

SE $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{D}{G}$ ſta a $\frac{B}{E}$; io dico, che A ſtarà a C, come E a G;

Imperciocchè pel corollario VIII. de' principj B ſta a D, come B a D; adunque, ec.

COROLLARIO II.

SE $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{B}$, come $\frac{D}{G}$ ſta a $\frac{D}{F}$; io dico, che A ſtarà a C, come F a G;

Imperciocchè pel corollario VII. de' principj B ſta a B, come D ſta a D.

Altra dimoſtrazione di queſto corollario.

ABbiamo ſuppoſto $\frac{A}{B} . \frac{C}{B} :: \frac{D}{G} . \frac{D}{F}$, ma pel teorema III., e *traſponendo* $A . C :: \frac{A}{B} . \frac{C}{B}$, e pel teorema IX., e *traſponendo* $F . G :: \frac{D}{G} . \frac{D}{F}$; adunque pel corollario XII. de' principj $A . C :: F . G$.

TEOREMA LIV.

SIa una ſerie di qualſivoglia numero di proporzioni da una parte, v. g. $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{G}$, $\frac{C}{H}$, $\frac{D}{I}$, ec.:

E una ſerie di egual numero di proporzioni dall'altra, v. g. $\frac{a}{f}$, $\frac{b}{g}$, $\frac{c}{h}$, $\frac{d}{i}$, ec., tali, che la prima proporzione $\frac{A}{F}$ della prima ſerie ſia eguale alla prima proporzione $\frac{a}{f}$ della ſeconda ſerie; la ſeconda proporzione $\frac{B}{G}$ della prima ſerie ſia eguale alla ſeconda proporzione $\frac{b}{g}$ della ſeconda ſerie; la terza proporzione $\frac{C}{H}$ della prima ſerie ſia eguale alla terza proporzione $\frac{c}{h}$ della ſeconda ſerie, e così ſempre, ec.

E di

E di più l'antecedente A della prima proporzione della prima serie stia all'antecedente B della seconda proporzione della prima serie, come l'antecedente a della prima proporzione della seconda serie sta all'antecedente b della seconda proporzione della seconda serie, e similmente abbiasi $B.C::b.c$, come pure $C.D::c.d$, ec.;

Io dico, che la somma degli antecedenti delle proporzioni della prima serie sta alla somma de' conseguenti delle medesime proporzioni, come la somma degli antecedenti delle proporzioni della seconda serie sta alla somma de' conseguenti delle proporzioni stesse, vale a dire

$$\frac{A+B+C+D, \text{ec.}}{F+G+H+I, \text{ec.}} = \frac{a+b+c+d, \text{ec.}}{f+g+h+i, \text{ec.}}.$$

DIMOSTRAZIONE.

I. Poichè per l'ipotesi $\frac{A}{F}=\frac{a}{f}$, e $\frac{B}{G}=\frac{b}{g}$, come pure $A.B::a.b$ sarà pel corollario III. del teorema L. $F.G::f.g$.

E poichè si suppone $\frac{B}{G}=\frac{b}{g}$, e $\frac{C}{H}=\frac{c}{h}$, come pure $B.C::b.c$, sarà eziandio pel corollario III. del teorema L. $G.H::g.h$.

Si proverà similmente, che $H.I::h.i$, e che i conseguenti di tutte le proporzioni della prima serie saranno del pari proporzionali ai conseguenti di tutte le proporzioni della seconda serie, *presi con lo stesso ordine.*

II: Di più avendosi per la supposizione $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{B}{C}=\frac{b}{c}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, $\frac{D}{I}=\frac{d}{i}$ si avrà per l'egualità ordinata $\frac{A}{I}=\frac{a}{i}$, $\frac{B}{I}=\frac{b}{i}$, $\frac{C}{I}=\frac{c}{i}$, e conseguentemente in virtù del corollario I. del teorema II. sarà

$$\frac{A}{I}+\frac{B}{I}+\frac{C}{I}+\frac{D}{I}=\frac{a}{i}+\frac{b}{i}+\frac{c}{i}+\frac{d}{i},$$ cioè per l'assioma VIII.

$$(1)\quad \frac{A+B+C+D}{I}=\frac{a+b+c+d}{i}.$$

III. Ora essendosi provato nel primo punto di questa dimostrazione, che $\frac{F}{G}=\frac{f}{g}$, $\frac{G}{H}=\frac{g}{h}$, $\frac{H}{I}=\frac{h}{i}$, si à per l'egualità ordinadinata $\frac{F}{I}=\frac{f}{i}$, $\frac{G}{I}=\frac{g}{i}$, $\frac{H}{I}=\frac{h}{i}$; adunque pel corollario I. del teorema II. si à altresì $\frac{F}{I}+\frac{G}{I}+\frac{H}{I}+\frac{I}{I}=\frac{f}{i}+\frac{g}{i}+\frac{h}{i}+\frac{i}{i}$, cioè per l'assioma VIII. $\frac{F+G+H+I}{I}=\frac{f+g+h+i}{i}$, e convertendo

(2) $\frac{I}{F+G+H+I}=\frac{i}{f+g+h+i}$;

E quindi paragonando le due proporzionalità (1), e (2) l'egualità ordinata fa conoscere

(3) $\frac{A+B+C+D}{F+G+H+I}=\frac{a+b+c+d}{f+g+h+i}$.

Egli è visibile, che con lo stesso metodo si dimostrerà il teorema in quasivoglia numero di proporzioni, che costituiscono le due serie; adunque il teorema è generalmente vero.

COROLLARIO I.

SE al primo antecedente della proporzionalità (3) si aggiungano dalla parte di A una, o più grandezze, v. g. R, S, e al secondo antecedente della stessa proporzionalità (3) si aggiungano dalla parte di a altrettante grandezze, v. g. r, s tali, che sia $\frac{S}{A}=\frac{s}{a}$, $\frac{R}{S}=\frac{r}{s}$; io dico, che sussiste questa proporzionalità:

(4) $\frac{R+S+A+B+C+D}{F+G+H+I}=\frac{r+s+a+b+c+d}{f+g+h+i}$;

Imperciocchè si proverà similmente per l'egualità ordinata, che $\frac{R}{I}=\frac{r}{i}$, $\frac{S}{I}=\frac{s}{i}$, $\frac{A}{I}=\frac{a}{i}$, $\frac{B}{I}=\frac{b}{i}$, $\frac{C}{I}=\frac{c}{i}$, e si mostrerà del pari $\frac{R+S+A+B+C+D}{I}=\frac{r+s+a+b+c+d}{i}$.

Si vedrà ancora, come nella dimostrazione del teorema, essere sussistente la proporzionalità (2), cioè $\frac{I}{F+G+H+I}=\frac{i}{f+g+h+i}$; adunque per l'egualità ordinata sussiste anche la proporzionalità (4).

COROLLARIO II.

SE al primo antecedente della proporzionalità (3) si aggiungano

gano dalla parte di D una, o più grandezze, v. g. T, V, e al secondo antecedente della medesima proporzionalità (3) si aggiungano dalla parte di d altrettante grandezze, v. g. t, u, tali che sia $\frac{D}{T}=\frac{d}{t}$, $\frac{T}{V}=\frac{t}{u}$; io dico esser vera questa proporzionalità:

$$(5)\ \frac{A+B+C+D+T+V}{F+G+H+I}=\frac{a+b+c+d+t+u}{f+g+h+i}.$$

Imperciocchè essendo per l' ipotesi $\frac{T}{V}=\frac{t}{u}$, $\frac{D}{T}=\frac{d}{t}$, sarà *convertendo* $\frac{V}{T}=\frac{u}{t}$, $\frac{T}{D}=\frac{t}{d}$, e avendosi per la supposizione $\frac{D}{I}=\frac{d}{i}$ si avrà per l' egualità ordinata $\frac{V}{I}=\frac{u}{i}$, $\frac{T}{I}=\frac{t}{i}$, e in vigore del corollario I. del teorema II. sarà $\frac{V}{I}+\frac{T}{I}=\frac{u}{i}+\frac{t}{i}$, cioè per l' assioma VIII. $\frac{V+T}{I}=\frac{u+t}{i}$, ovvero

$$(6)\ \frac{T+V}{I}=\frac{t+u}{i}.$$

Ma nella dimostrazione del teorema si è provata la proporzionalità (1), vale a dire $\frac{A+B+C+D}{I}=\frac{a+b+c+d}{i}$; adunque in vigore del corollario I. del teorema II. si ottiene.

$$\frac{A+B+C+D}{I}+\left[\frac{T+V}{I}\right]=\frac{a+b+c+d}{i}+\left[\frac{t+u}{i}\right].$$

E quindi per l' assioma VIII. si vede essere:

$$\frac{A+B+C+D+T+V}{I}=\frac{a+b+c+d+t+u}{i}$$

ma nella dimostrazione del teorema si è provata la proporzionalità (2), cioè $\frac{I}{F+G+H+I}=\frac{i}{f+g+h+i}$; adunque per l' egualità ordinata si vede sussistere anche la proporzionalità (5).

COROLLARIO III.

Se al primo antecedente della proporzionalità (3) si aggiungano dalla parte di A una, o più grandezze, v. g. R, S, e al secondo antecedente della stessa proporzionalità (3) si aggiungano dalla parte di a altrettante grandezze, v. g. r, s; e se di più al primo antecedente della proporzionalità (3) si aggiungiungano nel medesimo tempo quante grandezze si vogliano dalla parte di D, v. g. T, V; e al secondo antecedente della stessa proporzionalità (3) si aggiungano altrettante grandezze, v. g. t, u; (il tutto come sopra); valerà questa proporzionalità:

$$(7)\ \frac{R+S+A+B+C+D+T+V}{F+G+H+I}=\frac{r+s+a+b+c+d+t+u}{f+g+h+i}.$$

Imperciocchè per la proporzionalità (6) provata nella dimostrazione del corollario II. si à $\frac{T+V}{I}=\frac{t+u}{i}$, e per la proporzionalità (2) provata nella dimostrazione del teorema si à ancora $\frac{I}{F+G+H+I}=\frac{i}{f+g+h+i}$; adunque per l'egualità ordinata si vede essere $\frac{T+V}{F+G+H+I}=\frac{t+u}{f+g+h+i}$; ma nel corollario I. si è dimostrato $\frac{R+S+A+B+C+D}{F+G+H+I}=\frac{r+s+a+b+c+d}{f+g+h+i}$; e perciò in vigore del corollario I. del teorema II., l'aggregato delle due proporzioni $\frac{R+S+A+B+C+D}{F+G+H+I}$, e $\frac{T+V}{F+G+H+I}$ sarà eguale all'aggregato delle altre due proporzioni $\frac{r+s+a+b+c+d}{f+g+h+i}$, e $\frac{t+u}{f+g+h+i}$; adunque per l'assioma VIII. sussiste la proporzionalità (7).

SCOLIO.

Ogni attento lettore conoscerà, che questi tre corollarj si provano nella medesima guisa in qualunque numero di proporzioni, che costituiscono le due serie, e in qualsivoglia numero di grandezze, che si aggiungono agli antecedenti della proporzionalità (3), o s'aggiungano queste grandezze dalla parte destra degli antecedenti, o dalla parte sinistra, ovvero dall'una, e l'altra parte, e conseguentemente questi tre corollarj sono generalmente veri.

Nel presente teorema, e nei tre corollarj precedenti si contiene la proposizione seconda del libro d'Archimede delle Sferoidi, e delle Conoidi distintissimamente dimostrata.

COROLLARIO IV.

Convertendo le proporzionalità (3), (4), (5), e (7) gli ante-

antecedenti diventano confeguenti, e i confeguenti antecedenti; adunque fe fi danno ipotefi tali, che attribuifcano ai confeguenti ciò, che nel teorema, e ne' tre corollarj fuddetti fi è attribuito agli antecedenti, ne rifulterà la dimoftrazione d' un *altro teorema*, *e di tre fuoi corollarj*, corrifpondenti al teorema qui dimoftrato, e ai tre corollarj, che lo fieguono. Per altro potrebbero dimoftrarfi anche direttamente *l' altro teorema*, che accenno in quefto corollario, e *i tre fuoi corollarj* con raziocinj fimili a quelli, che fi fono impiegati per provare il teorema LIV., e i tre corollarj di effo: al quale effetto in vece di valerfi, conforme fi è fatto del corollario III. del teorema L., dovrebbefi far ufo del corollario III. del teorema LI.

COROLLARIO V.

SE le due ferie di proporzioni $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{G}$, $\frac{C}{H}$, $\frac{D}{I}$, ec. $\frac{a}{f}$, $\frac{b}{g}$, $\frac{c}{h}$, $\frac{d}{i}$, ec. fono tali, che $\frac{A}{F}$ fia maggiore, ovvero minore di $\frac{a}{f}$; $\frac{B}{G}$ fia maggiore, ovvero refpettivamente minore di $\frac{b}{g}$; $\frac{C}{H}$ fia maggiore, ovvero refpettivamente minore di $\frac{c}{h}$, e così fempre, ec.

E tali ancora, che fi abbiano quefte proporzionalità $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{B}{C}=\frac{b}{c}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, e così fempre, ec. io dico, che $\frac{A+B+C+D,\ \text{ec.}}{F+G+H+I,\ \text{ec.}}$ farà maggiore, ovvero refpettivamente minore di $\frac{a+b+c+d,\ \text{ec.}}{f+g+h+i,\ \text{ec.}}$.

Imperciocchè fi concepifca in virtù del poftulato, che i confeguenti delle proporzioni della prima ferie fieno accrefciuti, ovvero refpettivamente diminuiti in modo, che le proporzioni fuddette divengano eguali alle proporzioni corrifpondenti della feconda ferie: s' immagini per cagion d' efempio $\frac{A}{F\pm y}=\frac{a}{f}$, $\frac{B}{G\pm z}=\frac{b}{g}$, e fimilmente, ec. fi avrà in virtù di quefto teorema $\frac{A+B}{(F\pm y)+(G\pm z)}$ eguale ad $\frac{a+b}{f+g}$, ed effendo pel coroll. XIX. de' de' principj $\frac{A+B,\ ec.}{F+G,\ ec.}$ maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{A+B,\ ec.}{(F\pm y)+(G\pm z),\ ec.}$ sarà eziandio pel corollario VI. del teorema II. $\frac{A+B,\ ec.}{F+G,\ ec.}$ maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{a+b,\ ec.}{f+g,\ ec.}$

Corollario VI.

Se le due serie di proporzioni sono come nel precedente corollario $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{G}$, $\frac{C}{H}$, $\frac{D}{I}$, ec. $\frac{a}{f}$, $\frac{b}{g}$, $\frac{c}{h}$, $\frac{d}{i}$, ec. tali, che $\frac{A}{F}$ sia maggiore, ovvero minore di $\frac{a}{f}$, $\frac{B}{G}$ sia maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{b}{g}$; $\frac{C}{H}$ sia maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{c}{h}$, e così sempre, ec.

E tali ancora, che si abbiano queste proporzionalità $\frac{F}{G}=\frac{f}{g}$, $\frac{G}{H}=\frac{g}{h}$, $\frac{H}{I}=\frac{h}{i}$, e così sempre.

Io dico, che $\frac{A+B+C+D,\ ec.}{F+G+H+I,\ ec.}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{a+b+c+d,\ ec.}{f+g+h+i,\ ec.}$

Imperciocchè, in virtù della prima supposizione, e *convertendo* si à pel corollario VI. del teorema XXIX. $\frac{F}{A}$ *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{f}{a}$, $\frac{G}{B}$ *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{g}{b}$, $\frac{H}{C}$ *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{h}{c}$, e così sempre, ec. adunque pel corollario precedente $\frac{F+G+H+I,\ ec.}{A+B+C+D,\ ec.}$ sarà *minore*, ovvero respettivamente maggiore di $\frac{f+g+h+i,\ ec.}{a+b+c+d,\ ec.}$; poichè gli antecedenti della prima di queste due proporzioni si suppongono proporzionali agli antecedenti della seconda proporzione *presi per ordine*, ec. e perciò *convertendo* pel corollario VI. del teorema XXIX. si ve-

vedrà essere $\frac{A+B+C+D,\ ec.}{F+G+H+I,\ ec.}$ maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{a+b+c+d,\ ec.}{f+g+h+i,\ ec.}$

SCOLIO.

QUesto corollario potrebbe dimostrarsi direttamente d' una maniera simigliante a quella, che si è tenuta in dimostrare il corollario che lo precede, e perciò eseguire; dovrebbero in vigore del postulato concepirsi diminuiti, ovvero respettivamente accresciuti gli antecedenti delle proporzioni della prima serie in maniera, che le suddette proporzioni divenissero eguali alle proporzioni corrispondenti della seconda serie, v. g. dovrebbe immaginarsi $\frac{A \mp i}{F}$ eguale ad $\frac{a}{f}$, come pure $\frac{B \mp x}{G}$ eguale a $\frac{b}{g}$, e similmente, ec. indi istituire il raziocinio, come appunto si è fatto nel corollario V., e in vece di adoperare il corollario XIX. de' principj, ivi citato, valersi del corollario XVII. de' principj.

Questo teorema LIV., e i suoi corollarj IV., V., e VI. comprendono il teorema XXXVII., e il suo corollario.

TEOREMA LV.

LE due proporzioni date $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ sieno eguali, e sieno date le due grandezze E, F; io dico, che sussiste questa proporzionalità $\frac{A}{E} . \frac{C}{F} :: \frac{F}{D} . \frac{E}{B}$.

Le sei grandezze A, B, C, D, E, F debbono essere omogenee.

DIMOSTRAZIONE.

AVendosi per l' ipotesi $A . B :: C . D$, si avrà *permutando*, $A . C :: B . D$; ma $E . F :: E . F$ pel corollario VIII. de' principj; adunque pel teorema XLIX. $\frac{A}{E} . \frac{C}{F} :: \frac{F}{D} . \frac{F}{B}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra

Altra dimoſtrazione.

SI è provato nella prima dimoſtrazione, che $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{A}{C}.\frac{F}{F}::\frac{B}{D}.\frac{F}{F}$; ma pel corollario II. del teorema XXIX. $\frac{A}{E}$ ſta a $\frac{C}{F}$, come $\frac{A}{C}$ ad $\frac{E}{F}$, e pel corollario VII. dello ſteſſo teorema XXIX. $\frac{F}{D}$ ſta ad $\frac{E}{B}$, come $\frac{B}{D}$ ad $\frac{E}{F}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{E}.\frac{C}{F}::\frac{F}{D}.\frac{E}{B}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

DEFINIZIONE XXXIV.

DIceſi, che qualunque proporzione $\frac{G}{H}$ ſi divide per qualunque proporzione $\frac{C}{D}$, quando ſi trova una nuova proporzione $\frac{Q}{L}$ tale, che la proporzione *dividente* $\frac{C}{D}$ ſtia alla proporzione *dividenda* $\frac{G}{H}$, come la proporzione d'egualità, v. g. $\frac{Z}{Z}$ ſta alla proporzione $\frac{Q}{L}$, cioè la proporzione $\frac{Q}{L}$ deve eſſer tale, che abbiaſi queſta proporzionalità: $\frac{C}{D}.\frac{G}{H}::\frac{Z}{Z}.\frac{Q}{L}$:

E la nuova proporzione $\frac{Q}{L}$, ch' è il quarto termine della ſopraſcritta proporzionalità, chiamaſi il *quoziente* di $\frac{G}{H}$ diviſa per $\frac{C}{D}$. Queſto quoziente ſi eſprime ancora così $\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$.

SCOLIO.

I. DA queſta definizione immediatamente ſi deduce, che ſe una proporzione è diviſa per un'altra ad eſſa eguale, il quoziente, che ne riſulta, è la proporzione d'egualità;

Imperocchè ſupponendo queſta proporzionalità $\frac{C}{D}.\frac{G}{H}::\frac{Z}{Z}.\frac{Q}{L}$,

ſe

ſe la $\frac{C}{D}$ è uguale alla $\frac{G}{H}$, anche la $\frac{Z}{Z}$ dev' eſſere eguale alla $\frac{Q}{L}$ pel corollario X. de' principj (di modo che Q deve eſſere eguale ad L per lo ſteſſo corollario X. de' principj); ma per queſta definizione XXXIV. $\frac{C}{D}$ è la proporzione *dividente*, $\frac{G}{H}$ la proporzione *dividenda*, e $\frac{Q}{L}$ il quoziente; adunque, ec.

II. Qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ diviſa per la proporzione d' egualità, v. g. per $\frac{Z}{Z}$ da una quoziente eguale alla medeſima proporzione diviſa $\frac{A}{B}$;

Imperciocchè per la definizione preſente ſarà $\frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{Z}{Z} \cdot \frac{Q}{L}$, ma pel corollario VIII. de' principj $\frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B}$; adunque eſſendo i primi tre termini della penultima proporzionalità eguali ai primi tre termini dell' ultima (mentre ſono i medeſimi), ſarà ancora pel teorema I. il quarto termine $\frac{Q}{L}$ di quella eguale al quarto termine $\frac{A}{B}$ di queſta, cioè il *quoziente* ſarà eguale alla proporzione *diviſa* $\frac{A}{B}$.

III. *Traſponendo* la proporzionalità $\frac{C}{D} \cdot \frac{G}{H} :: \frac{Z}{Z} \cdot \frac{Q}{L}$, ne viene queſt' altra $\frac{Z}{Z} \cdot \frac{Q}{L} :: \frac{C}{D} \cdot \frac{G}{H}$; adunque per le definizioni XXI. e XXII. la proporzione *dividenda* $\frac{G}{H}$ è il prodotto del quoziente $\frac{Q}{L}$ moltiplicato per la proporzione *dividente* $\frac{C}{B}$, e conſeguentemente pel teorema XXIII. la proporzione *dividenda* $\frac{G}{H}$ è anche il prodotto della proporzione *dividente* $\frac{C}{D}$ moltiplicata pel quoziente $\frac{Q}{L}$.

TEOREMA LVI.

ESprimano $\frac{A}{B}$, ed $\frac{H}{F}$ due proporzioni date, i termini di una delle quali possono essere non omogenei ai termini dell' altra, e sieno le quattro grandezze X, Y, T, S tali, che abbiasi $\frac{X}{F} = \frac{A}{B}$; $\frac{H}{T} = \frac{A}{B}$; $\frac{T}{B} = \frac{H}{F}$; ed $\frac{A}{S} = \frac{H}{F}$;

Io dico, che il quoziente della proporzione data $\frac{A}{B}$ divisa per l' altra proporzione data $\frac{H}{F}$; cioè $\frac{A}{B} : \frac{H}{F}$ è uguale a ciascuna delle quattro proporzioni infrascritte $\frac{X}{H}$, $\frac{F}{T}$, $\frac{A}{T}$, $\frac{S}{B}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la definizione XXXIV. si à

(1) $\frac{H}{F} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B} : \frac{H}{F}$.

Pel corollario I. del teorema IV. si à

(2) $\frac{H}{F} \cdot \frac{X}{F} :: \frac{H}{H} \cdot \frac{X}{H}$.

Pel teorema VIII. si à

(3) $\frac{H}{F} \cdot \frac{H}{T} :: \frac{F}{F} \cdot \frac{F}{T}$.

Pel corollario V. del teorema IX. si à

(4) $\frac{T}{B} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{A}{A} \cdot \frac{A}{T}$.

E finalmente pel teorema VIII. si à

(5) $\frac{A}{S} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{S}{S} \cdot \frac{S}{B}$.

Dopo queste premesse si rifletta, che i tre primi termini *ordinatamente presi* delle proporzionalità (1), (2), (3), (4), (5) sono eguali tra loro; mentre i loro primi, e secondi termini sono eguali per l' ipotesi, o comuni, e i terzi termini di esse sono eguali pel corollario VII. de' principj; adunque pel teorema I. gli ultimi termini delle stesse proporzionalità sono eguali, cioè il quoziente $\frac{A}{B} : \frac{H}{F}$ è uguale a ciascuna delle quattro proporzioni infrascritte $\frac{X}{H}$; $\frac{F}{T}$; $\frac{A}{T}$; $\frac{S}{B}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO,

Che contiene quattro maniere di dividere qualsivoglia proporzione per qualsivoglia altra proporzione.

Potendosi pel postulato sempre assumere le due grandezze X, ed Y tali, che si abbia $\frac{X}{F}=\frac{A}{B}$, ed $\frac{H}{Y}=\frac{A}{B}$, e le altre due grandezze T, ed S tali, che si abbia $\frac{T}{B}=\frac{H}{F}$, ed $\frac{A}{S}=\frac{H}{F}$, è manifesto, che dal presente teorema nascono quattro maniere di dividere qualunque proporzione $\frac{A}{B}$ per qualunque altra $\frac{H}{F}$.

COROLLARIO.

I. Comparando insieme le due proporzionalità (1), e (2) si proverà con un modo somigliante a quello, che si è tenuto nella dimostrazione del teorema, che se $\frac{X}{H}$ è uguale ad $\frac{A}{B}:\frac{H}{F}$, anche $\frac{X}{F}$ sarà eguale ad $\frac{A}{B}$.

II. Come anche confrontando le due proporzionalità (1), e (3) si proverà nella medesima guisa, che se $\frac{F}{Y}$ è uguale ad $\frac{A}{B}:\frac{H}{F}$, ancora $\frac{H}{Y}$ sarà eguale ad $\frac{A}{B}$.

III. Similmente col paragone delle due proporzionalità (1), e (4) si dimostrerà, che se $\frac{A}{T}$ è uguale ad $\frac{A}{B}:\frac{H}{F}$, anche $\frac{T}{B}$ sarà eguale ad $\frac{H}{F}$.

IV. E finalmente dalla comparazione delle due proporzionalità (1), e (5) si trarrà un modo consimile di mostrare, che se $\frac{S}{B}$ è uguale ad $\frac{A}{B}:\frac{H}{F}$, ancora $\frac{A}{S}$ sarà eguale ad $\frac{H}{F}$.

TEOREMA LVII.

Il quoziente di qualunque proporzione divisa per qualunque altra è uguale al prodotto, che risulta dalla proporzione *dividenda* moltiplicata per la *dividente* presa al rovescio.

Di-

Dimostrazione.

Sia $\frac{G}{H}$ la proporzione *dividenda*, $\frac{C}{D}$ la proporzione *dividente*, e $\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$ *il quoziente*; la proporzione *dividente presa al rovescio* sarà $\frac{D}{C}$.

Dee provarsi, che $\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$ è uguale a $\frac{G}{H}\times\frac{D}{C}$, e ciò si farà nella seguente guisa.

Per la definizione XXXIV. si à $\frac{C}{D}\cdot\frac{G}{H}::\frac{Z}{Z}\cdot\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$, e *permutando* $\frac{C}{D}\cdot\frac{Z}{Z}::\frac{G}{H}\cdot\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$; ma pel corollario V. del teorema XXIX. $\frac{C}{D}\cdot\frac{Z}{Z}::\frac{Z}{Z}\cdot\frac{D}{C}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{G}{H}\cdot\left[\frac{G}{H}:\frac{C}{D}\right]::\frac{Z}{Z}\cdot\frac{D}{C}$, e *trasponendo* $\frac{Z}{Z}\cdot\frac{D}{C}::\frac{G}{H}\cdot\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$, indi nuovamente *permutando* $\frac{Z}{Z}\cdot\frac{G}{H}::\frac{D}{C}\cdot\frac{G}{C}:\frac{C}{D}$; ma per le definizioni XXI., e XXII. $\frac{Z}{Z}\cdot\frac{G}{H}::\frac{D}{C}\cdot\frac{G}{H}\times\frac{D}{C}$; adunque pel teorema I. $\frac{G}{H}:\frac{C}{D}=\frac{G}{H}\times\frac{D}{C}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

Per l'ipotesi, e per la definizione XXXIV. si à questa proporzionalità:

(1) $\frac{C}{D}\cdot\frac{G}{H}::\frac{Z}{Z}\cdot\frac{G}{H}:\frac{C}{D}$.

Prendasi pel postulato $\frac{r}{D}$ eguale a $\frac{G}{H}$, e pel corollario I. del teorema IV. si avrà questa seconda proporzionalità:

(2) $\frac{C}{D}\cdot\frac{r}{D}::\frac{C}{C}\cdot\frac{r}{C}$;

ma i tre primi termini della proporzionalità (1) sono eguali ai tre primi della proporzionalità (2), mentre $\frac{C}{D}$ è comune. $\frac{G}{H}$ è uguale per la costruzione ad $\frac{r}{D}$, e $\frac{Z}{Z}$ è uguale a $\frac{C}{C}$ pel corol-

corollario VII. de' principj; adunque pel teorema I. ſono eguali i quarti termini d'ambedue le proporzionalità (1), e (2).

II. Pel corollario I. del teorema IV. ſi à queſta terza proporzionalità:

(3) $\frac{D}{D} \cdot \frac{T}{D} \because \frac{D}{C} \cdot \frac{T}{C}$.

E per le definizioni XXI., e XXII. ſi à queſta quarta proporzionalità:

(4) $\frac{D}{D} \cdot \frac{G}{H} \because \frac{D}{C} \cdot \frac{G}{H} \times \frac{D}{C}$;

i tre primi termini della quale ſono eguali ai tre primi termini della proporzionalità (3); atteſochè $\frac{D}{D}$ è comune, $\frac{G}{H}$ per la coſtruzione è uguale ad $\frac{T}{D}$, e $\frac{D}{C}$ è comune; adunque pel teorema I. i quarti termini d'ambedue le proporzionalità (3), e (4) ſono eguali, cioè $\frac{G}{H} \times \frac{D}{C} = \frac{T}{C}$.

III. Nel primo punto ò provato, che $\frac{G}{H} : \frac{C}{D} = \frac{T}{C}$, e nel ſecondo punto ò provato, che $\frac{G}{H} \times \frac{D}{C} = \frac{T}{C}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{G}{H} : \frac{C}{D} = \frac{G}{H} \times \frac{D}{C}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

PEl teorema XXIII., il prodotto $\frac{G}{H} \times \frac{D}{C}$ è uguale al prodotto $\frac{D}{C} \times \frac{G}{H}$; adunque il quoziente $\frac{G}{H} : \frac{C}{D}$ è uguale anche al prodotto $\frac{D}{C} \times \frac{G}{H}$.

COROLLARIO II.

Che contiene molte maniere di dividere qualunque proporzione per qualunque altra proporzione.

SE ſi à da dividere qualunque proporzione $\frac{G}{H}$ per qualunque proporzione $\frac{C}{D}$ ſi moltiplichi $\frac{G}{H}$ per $\frac{D}{C}$, ovvero $\frac{D}{C}$ per $\frac{G}{H}$ con i modi eſpoſti nello ſcolio anneſſo alla definizione XXI., e nel corol-

corollario II. del teorema XLVIII., e nel corollario II. del teorema XLIX., e il prodotto, che riſulterà da queſta moltiplicazione, ſarà il *quoziente* di $\frac{G}{H}$ diviſa per $\frac{C}{D}$.

COROLLARIO III.

DUe proporzioni tra loro eguali diviſe per due proporzioni tra loro eguali danno quozienti eguali.

Rappreſentino $\frac{M}{N}$, ed $\frac{O}{P}$ le due proporzioni eguali *dividende*, ſiccome $\frac{I}{R}$, ed $\frac{S}{T}$ le reſpettive *dividenti* eguali, ſarà pel teorema preſente $\frac{M}{N} \times \frac{R}{I}$ il *quoziente* di $\frac{M}{N}$ diviſa per $\frac{I}{R}$, ed $\frac{O}{P} \times \frac{T}{S}$ ſarà il *quoziente* di $\frac{O}{P}$ diviſa per $\frac{S}{T}$, ma eſſendo per l' ipoteſi $\frac{I}{R} = \frac{S}{T}$ ſarà ancora *convertendo* $\frac{R}{I} = \frac{T}{S}$; adunque pel corollario I. del teorema XXIV. il quoziente $\frac{M}{N} \times \frac{R}{I}$ ſarà eguale al quoziente $\frac{O}{P} \times \frac{T}{S}$, mentre ſi è ſuppoſto eſſere $\frac{M}{N} = \frac{O}{P}$.

Altra dimoſtrazione di queſto corollario.

PEr la definizione XXXIV. ſi anno le due proporzionalità inſraſcritte $\frac{I}{R} \cdot \frac{M}{N} :: \frac{Z}{Z} \cdot \frac{M}{N} : \frac{I}{R}$, ed $\frac{S}{T} \cdot \frac{O}{P} :: \frac{Z}{Z} \cdot \frac{O}{P} : \frac{S}{T}$, ma per l' ipoteſi ſono eguali tra loro reſpettivamente i primi, e i ſecondi termini d' ambedue queſte proporzionalità, e i terzi termini di eſſe ſono identici; adunque pel teorema I. $\frac{M}{N} : \frac{I}{R}$, quarto termine della prima proporzionalità, è uguale ad $\frac{O}{P} : \frac{S}{T}$ quarto termine della ſeconda.

COROLLARIO IV.

DIvidendo una proporzione per un' altra, che abbia il medeſimo conſeguente, ne viene per quoziente una terza proporzione, che à per ſuo antecedente l' antecedente della *dividenda*, e per ſuo conſeguente l' antecedente della *dividente*; imperciocchè,

chè, se si divide $\frac{A}{B}$ per $\frac{C}{B}$ il quoziente sarà $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$, che pel teorema XXII. è uguale ad $\frac{A}{C}$.

COROLLARIO V.

E Quindi, se dividesi una proporzione per se medesima, il quoziente sarà la proporzione d' egualità.

Perchè $\frac{A}{B} : \frac{A}{B} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{A}$ per questo teorema, ed $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = \frac{A}{A}$ pel teorema XXII.

COROLLARIO VI.

LAonde se si dividerà una proporzione per un' altra ad essa eguale, ne risulterà un quoziente eguale alla proporzione d' egualità.

Imperciocchè, sia $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, il quoziente $\frac{A}{B} : \frac{a}{b}$ sarà eguale al prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{b}{a}$, e questo al prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A}$ pel corollario VII. del teorema XXIV.; ma $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A}$ è uguale ad $\frac{A}{A}$, come si è veduto nel corollario precedente; adunque pel corollario I. del teorema II. $\frac{A}{B} : \frac{a}{b}$ sarà eguale ad $\frac{A}{A}$.

COROLLARIO VII.

SE dividesi una proporzione per un' altra, che abbia il medesimo antecedente, ne proviene per quoziente una terza proporzione, la quale à per suo antecedente il conseguenre della proporzione *dividente*, e per suo conseguente à il conseguente della proporzione *dividenda*.

Imperciocchè $\frac{A}{B}$ divisa per $\frac{A}{D}$ dà per quoziente $\frac{A}{B} \times \frac{D}{A}$, che pel teorema XXIII. è uguale a $\frac{D}{A} \times \frac{A}{B}$, ed essendo pel teorema XXII. $\frac{D}{A} \times \frac{A}{B}$ eguale a $\frac{D}{B}$, ne siegue pel corollario XI. de' principj, che $\frac{A}{B} \times \frac{D}{A}$ $\left[\text{cioè } \frac{A}{B} : \frac{A}{D}\right]$ è uguale a $\frac{D}{B}$.

TEO-

TEOREMA LVIII.

SE quattro proporzioni ſono proporzionali, anche roverſciate, e preſe col medeſimo ordine ſaranno proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

LE quattro proporzioni proporzionali ſieno le ſeguenti $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$, dee provarſi, che $\frac{B}{A} . \frac{D}{C} :: \frac{F}{E} . \frac{H}{G}$. Pel corollario V. del teorema XXIX. $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{D}{C} . \frac{B}{A}$, cioè *traſponendo* $\frac{D}{C} . \frac{B}{A} :: \frac{A}{B} . \frac{C}{D}$, e per la ſteſſa ragione $\frac{E}{F} . \frac{G}{H} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$, cioè *traſponendo* $\frac{H}{G} . \frac{F}{E} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$; ma ſi ſuppone $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{D}{C} . \frac{B}{A} :: \frac{H}{G} . \frac{F}{E}$, e finalmente *convertendo* $\frac{B}{A} . \frac{D}{C} :: \frac{F}{E} . \frac{H}{G}$.

SCOLIO.

DA queſto teorema ſi può deſumere un' altra dimoſtrazione del teorema LI.

Dee provarſi, che ſe $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ ſta a $\frac{G}{H}$, e ſe di più *B* ſta a *D*, come *F* ſta ad *H*; la *A* ſtarà alla *C*, come la *E* alla *G*. Ciò ſi dimoſtrerà nel ſeguente modo.

Poichè per la ſuppoſizione abbiamo $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$, avremo pel preſente teorema $\frac{B}{A} . \frac{D}{C} :: \frac{F}{E} . \frac{H}{G}$, ma per l' ipoteſi abbiamo ancora $B . D :: F . H$; adunque pel teorema L. avremo $A . C :: E . G$. Il che, ec.

TEOREMA LIX.

QUattro proporzioni, che ſono tra loro proporzionali moltiplicate *termine a termine*, *e col medeſimo ordine* per altre quattro proporzioni, che ſieno anch' eſſe proporzionali fra loro, formano quattro prodotti proporzionali.

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

Le lettere A, E, O, V rappresentino le quattro proporzioni, cosicchè si abbia $\frac{A}{E}=\frac{O}{V}$, e le lettere a, e, o, u rappresentino le altre quattro proporzioni, talchè sia $\frac{a}{e}=\frac{o}{u}$. Dee provarsi l' infrascritta proporzionalità $Aa.Ee::Oo.Vu$.

I. Denoti I la proporzione d' egualità, e prendasi il prodotto delle due proporzioni A, a, come pure il prodotto dell' altre due proporzioni E, e; così si avranno queste due proporzionalità $I.A::a.Aa$, ed $I.E::e.Ee$, e pel teorema XLVIII. si avrà eziandio $\frac{I}{I}.\frac{A}{E}::\frac{a}{e}.\frac{Aa}{Ee}$; di maniera che in virtù delle definizioni XXI., e XXII. la proporzione $\frac{Aa}{Ee}$ è il prodotto di $\frac{A}{E}$, moltiplicata per $\frac{a}{e}$, cioè $\frac{Aa}{Ee}=\frac{A}{E}\times\frac{a}{e}$, e conseguentemente in virtù della definizione XXIII. la stessa proporzione $\frac{Aa}{Ee}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{E}$, ed $\frac{a}{e}$.

II. Similmente prendendo il prodotto delle due proporzioni O, ed o, e il prodotto dell' altre due proporzioni V, u, si avranno le due proporzionalità seguenti $I.O::o.Oo$, ed $I.V::u.Vu$, e il teorema XLVIII. farà parimente conoscere $\frac{I}{I}.\frac{O}{V}::\frac{o}{u}.\frac{Oo}{Vu}$; onde per le definizioni XXI., e XXII. la proporzione $\frac{Oo}{Vu}$ è il prodotto di $\frac{O}{V}$ moltiplicato per $\frac{o}{u}$, e quindi per la definizione XXIII. $\frac{Oo}{Vu}$ è composta di $\frac{O}{V}$, e di $\frac{o}{u}$; e perciò essendo per l' ipotesi le proporzioni $\frac{A}{E}$, ed $\frac{a}{e}$, *componenti* la proporzione $\frac{Aa}{Ee}$ eguali alle proporzioni respettive $\frac{O}{V}$, ed $\frac{o}{u}$, *componenti* l' altra proporzione $\frac{Oo}{Vu}$, ne siegue pel I. corollario del teorema XXIV., che $\frac{Aa}{Ee}=\frac{Oo}{Vu}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEO-

Teorema LX.

Quattro proporzioni, che sono tra loro proporzionali, divise *termine a termine, e col medesimo ordine* per altre quattro proporzioni, che sieno anch' esse proporzionali formano quattro quozienti proporzionali.

Dimostrazione.

Sieno l'infrascritte due proporzionalità $\frac{B}{C} . \frac{D}{F} :: \frac{G}{H} . \frac{P}{Q}$, e $\frac{b}{c} . \frac{d}{f} :: \frac{g}{h} . \frac{p}{q}$; dee provarsi, che $\frac{B}{C}$ divisa per $\frac{b}{c}$ sta a $\frac{D}{F}$ divisa per $\frac{d}{f}$, come $\frac{G}{H}$ divisa per $\frac{g}{h}$ sta a $\frac{P}{Q}$ divisa per $\frac{p}{q}$, cioè in vigore del teorema LVII. dee provarsi questa proporzionalità: $\frac{B}{C} \times \frac{c}{b} . \frac{D}{F} \times \frac{f}{d} :: \frac{G}{H} \times \frac{h}{g} . \frac{P}{Q} \times \frac{q}{p}$, il che si farà agevolmente, poichè essendo proporzionali per la supposizione le quattro proporzioni $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{f}$, $\frac{g}{h}$, $\frac{p}{q}$, sussisterà ancora pel teorema LVIII. quest' altra proporzionalità $\frac{c}{b} . \frac{f}{d} :: \frac{h}{g} . \frac{q}{p}$, e per l' antecedente teorema il prodotto $\frac{B}{C} \times \frac{c}{b}$ starà al prodotto $\frac{D}{F} \times \frac{f}{d}$, come il prodotto $\frac{G}{H} \times \frac{h}{g}$ al prodotto $\frac{P}{Q} \times \frac{q}{p}$. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema LXI.

Se $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ sta a $\frac{G}{H}$, e se $\frac{B}{I}$ sta a $\frac{D}{K}$, come $\frac{F}{L}$ sta ad $\frac{H}{M}$; e se di più A sta a C, come E sta a G; io dico, che I sta a K, come L sta ad M.

Dimostrazione.

In virtù delle due prime supposizioni, e del teorema LIX.

(1) $\frac{A}{B} \times \frac{B}{I}$ sta a $\frac{C}{D} \times \frac{D}{K}$, come $\frac{E}{F} \times \frac{F}{L}$ sta a $\frac{G}{H} \times \frac{H}{M}$.

ma pel teorema XXII. $\frac{A}{B} \times \frac{B}{I} = \frac{A}{I}$; $\frac{C}{D} \times \frac{D}{K} = \frac{C}{K}$; $\frac{E}{F} \times \frac{F}{L} = \frac{E}{L}$;

e $\frac{G}{H} \times \frac{H}{M} = \frac{G}{M}$; adunque ponendo nella proporzionalità (1) grandezze eguali in luogo d'eguali sarà pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{I} . \frac{C}{K} :: \frac{E}{L} . \frac{G}{M}$, ma per la terza suppoſizione di queſto teorema ſi à $A.C::E.G$; adunque pel teorema L. $I.K::L.M.$ Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

SE $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ ſta a $\frac{G}{H}$; ſe $\frac{I}{B}$ ſta a $\frac{K}{D}$, come $\frac{L}{F}$ ſta ad $\frac{M}{H}$; e ſe di più A ſta a C, come E ſta a G; io dico, che I ſta a K, come L ſta ad M.

Imperciocchè eſſendo per la ſeconda ipoteſi di queſto corollario $\frac{I}{B} . \frac{K}{D} :: \frac{L}{F} . \frac{M}{N}$, ſarà ancora pel teorema LVIII. $\frac{B}{I} . \frac{D}{K} :: \frac{F}{L} . \frac{H}{M}$; adunque, ec.

Altra dimoſtrazione di queſto corollario.

DIvidaſi la proporzionalità della prima ipoteſi per la proporzionalità della ſeconda ipoteſi, e in virtù del teorema LVII., e del teorema LX. ſi otterrà quella medeſima proporzionalità ſegnata (1) nella dimoſtrazione del teorema preſente; di modo che rimarrà dimoſtrato nella ſteſſa guiſa anche queſto corollario.

DEFINIZIONE XXXV.

UNa ſerie di grandezze, che ſono in proporzione geometrica continua chiamaſi *progreſſione geometrica*, e queſta diceſi *creſcente*, ſe il ſuo primo termine è minore del ſecondo, e *decreſcente*, ſe il ſuo primo termine è maggiore del ſecondo.

TEOREMA LXII.

I Termini di una progreſſione geometrica preſi con ordine inverſo (talchè il primo divenga l'ultimo, e l'ultimo primo) ſono in progreſſione geometrica.

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

Sia per cagion d' esempio l' insfrascritta progressione geometrica A, B, C, D, E, F; *trasponendo* sarà il penultimo termine E della progressione all' ultimo F, come l' antipenultimo D al penultimo E, adunque *convertendo* sarà l' ultimo termine F al penultimo E, come il penultimo E all' antipenultimo D.

Similmente, *trasponendo*, l' antipenultimo termine D starà al penultimo E, come il termine C, che precede l' antipenultimo, sta all' antipenultimo D, e *convertendo* il penultimo termine E starà all' antipenultimo D, come l' antipenultimo D sta al termine C, che precede l' antipenultimo:

Ma simigliante prova si applica evidentemente a tutti i termini della progressione presi con ordine inverso; adunque il teorema è generalmente vero.

TEOREMA LXIII.

Sia una progressione geometrica di qualunque numero di termini, v. g. A, B, C, D, e prendasi qualunque grandezza O ad essi omogenea; io dico, che le tre serie insfrascritte sono anch' esse in progressione geometrica.

$$\frac{A}{O}, \frac{B}{O}, \frac{C}{O}, \frac{D}{O}.$$

$$\frac{O}{A}, \frac{O}{B}, \frac{O}{C}, \frac{O}{D}.$$

$$\frac{O}{D}, \frac{O}{C}, \frac{O}{B}, \frac{O}{A}.$$

Dimostrazione della prima parte.

Per l' ipotesi $A.B::B.C$, e pel teorema III. $\frac{A}{O}.\frac{B}{O}::A.B$, come pure $\frac{B}{O}.\frac{C}{O}::B.C$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A}{O}.\frac{B}{O}::\frac{B}{O}.\frac{C}{O}$.

Similmente per l' ipotesi $B.C::C.D$, e pel teorema III.

$\frac{B}{O} . \frac{C}{O} :: B . C$, come anche $\frac{C}{O} . \frac{D}{O} :: C . D$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{B}{O} . \frac{C}{O} :: \frac{C}{O} . \frac{D}{O}$.

Egli è evidente, che col medesimo raziocinio si proverà lo stesso in qualsivoglia numero di termini, che costituisca la progressione; adunque la prima parte del teorema è generalmente vera.

Dimostrazione della seconda parte.

PEr l'ipotesi $A . B :: B . C$, e *convertendo* $B . A :: C . B$, ma pel teorema IX. $\frac{O}{A} . \frac{O}{B} :: B . A$, ed $\frac{O}{B} . \frac{O}{C} :: C . B$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{O}{A} . \frac{O}{B} :: \frac{O}{B} . \frac{O}{C}$.

Similmente per l'ipotesi $B . C :: C . D$, e *convertendo* $C . B :: D . C$; ma pel teorema IX. $\frac{O}{B} . \frac{O}{C} :: C . B$, ed $\frac{O}{C} . \frac{O}{D} .: D . C$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{O}{B} . \frac{O}{C} :: \frac{O}{C} . \frac{O}{D}$.

Lo stesso si mostrerà in qualunque numero di termini, formando il medesimo raziocinio; adunque anche la seconda parte di questo teorema è generalmente vera.

Dimostrazione della terza parte.

PEr l'ipotesi $B . C :: C . D$, e *trasponendo* $C . D :: B . C$; pel teorema IX. $\frac{O}{D} . \frac{O}{C} :: C . D$, ed $\frac{O}{C} . \frac{O}{B} :: B . C$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{O}{D} . \frac{O}{C} :: \frac{O}{C} . \frac{O}{B}$.

Similmente per l'ipotesi $A . B :: B . C$, e *trasponendo* $B . C :: A . B$; pel teorema IX. $\frac{O}{C} . \frac{O}{B} :: B . C$, ed $\frac{O}{B} . \frac{O}{A} :: A . B$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{O}{C} . \frac{O}{B} :: \frac{O}{B} . \frac{O}{A}$.

Lo stesso discorso proverà la medesima cosa in qualunque numero di termini, de' quali costar possa la progressione; adunque anche la terza parte del teorema è vera generalmente.

Altra

Altra dimostrazione della terza parte.

Si è provato nella seconda parte essere $\frac{O}{A}, \frac{O}{B}, \frac{O}{C}, \frac{O}{D}$ in progresione geometrica; adunque pel teorema LXII. anche $\frac{O}{D}, \frac{O}{C}, \frac{O}{B}, \frac{O}{A}$ sono in progresione geometrica.

COROLLARIO.

Giacchè $\frac{A}{O}, \frac{B}{O}, \frac{C}{O}, \frac{D}{O}$ sono in progresione geometrica per la prima parte di questo teorema; anche $\frac{D}{O}, \frac{C}{O}, \frac{B}{O}, \frac{A}{O}$ saranno in progresione geometrica pel teorema LXII.

TEOREMA LXIV.

Il primo termine di una progresione geometrica *decrescente* meno il secondo sta al secondo, come il primo termine meno l' ultimo sta alla somma di tutti i termini della progresione senza il primo.

DIMOSTRAZIONE.

Sia per esempio la seguente progresione geometrica decrescente A, B, C, D, E, F, si avranno queste proporzioni, $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}, \frac{D}{E}, \frac{E}{F}$ tutte eguali fra loro; onde pel corollario II. del teorema XXXVI. sarà la A alla B, come $A+B+C+D+E$ a $B+C+D+E+F$, e dividendo $A-B$ sarà alla B, come $A+B+C+D+E-B-C-D-E-F$ a $B+C+D+E+F$; ma per l' asioma V. $A+B+C+D+E-B-C-D-E-F$ è lo stesso, che $A-F$, adunque $A-B$ sta a B, come $A-F$ sta a $B+C+D+E+F$.

Chiaramente si scorge, che questa dimostrazione à luogo in qualunque numero di termini, che costituisca la progresione; adunque il teorema è generalmente vero.

TEO-

TEOREMA LXV.

IL primo termine di una progressione *geometrica decrescente* diminuito dal secondo sta al primo termine intiero, come il primo termine meno l'ultimo sta alla somma di tutti i termini della progressione senza l'ultimo.

AVVERTIMENTO.

IN avvenire l'espressione A, B, C, D, E, F, ec. V significherà tutti i termini di qualunque progressione geometrica, di modo che A sarà il primo termine di essa, B il secondo, ec., ed V l'ultimo, e la lettera S dinoterà la somma di tutti i termini della progressione, cioè sarà

$$S = A + B + C + D + E + F, \text{ ec. } + V.$$

DIMOSTRAZIONE.

IN virtù del teorema precedente si à questa proporzionalità: $A - B . B :: A - V . S - A$; adunque per la *composizion conversa di proporzione*, cioè per la seconda parte del teorema XXXIV. sussiste quest' altra proporzionalità:

$$(1)\ A - B . (A - B) + B :: A - V . (A - V) + (S - A)$$

Ma per l'assioma V. l'espressione $A - B + B$ è uguale ad A, e l'espressione $A - V + S - A$ è uguale ad $S - V$, adunque ponendo nella proporzionalità (1) in luogo di queste due espressioni i loro valori, si rende manifesta la proporzionalità, che segue:

$$(2)\ A - B . A :: A - V . S - V.$$ Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

SE la progressione *decrescente* contiene un numero infinito di termini, egli è visibile, che l'ultimo termine V sarà infinitamente piccolo, vale a dire sarà incomparabile per la sua piccolezza a qualsivoglia grandezza finita, di modo che lo stesso termine V rispetto al termine A, e molto più rispetto alla somma di tutti i termini della progressione, potrà considerarsi come nullo.

Co-

Corollario.

La ſomma di tutti i termini di una progreſsione geometrica decreſcente *continuata in infinito* è uguale ad una grandezza, che ſia terza proporzionale dopo il primo termine diminuito del ſecondo, e il primo termine intiero.

Imperciocchè conſiderando come nullo l' ultimo termine V della *progreſſione geometrica decreſcente continuata in infinito*, la proporzionalità (2) del preſente teorema diviene l' infraſcritta: $A - B . A :: A . S$.

Teorema LXVI.

Il primo termine di una progreſsion geometrica *decreſcente* ſta al ſecondo, come la ſomma di tutti i termini della progreſsione ſenza l' ultimo ſta alla medeſima ſomma ſenza il primo.

Dimostrazione.

Pel teorema LXV. ſi à $A - B . A :: A - V . S - V$, e *invertendo* $A . A - B :: S - V . A - V$; ma pel teorema LXIV. ſi à $A - B . B :: A - V . S - A$; adunque per l' egualità ordinata (1) $A . B :: S - V . S - A$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Corollario.

Se la progreſsione geometrica decreſcente ſi concepiſce *continuato in infinito*; io dico, che il primo termine della ſteſſa progreſsione ſta al ſecondo, come la ſomma di tutti i termini di eſſa ſta alla medeſima ſomma, diminuita dal primo termine;

Imperciocchè annullando in virtù del precedente ſcolio nella proporzionalità (1) di queſto teorema la grandezza V, *infinitamente piccola*, ſi ottiene la proporzionalità, che ſegue: $A . B :: S . S - A$.

Scolio.

Qui può inſerirſi il ſeguente

Teorema.

Rappreſentino A, B, C, D, E, F, ec. i termini di qualſivoſivoglia progreſsione geometrica decreſcente; io dico, che le differenze di eſsi termini, v. g. $A-B$, $B-C$, $C-D$, ec. ſerbano fra di loro la medeſima proporzione, che regna tra i ſuddetti termini:

Dee provarſi, che $A-B.B-C::A.B$, e che $B-C.C-D::B.C$, e così, ec.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l'ipoteſi abbiamo $A.B::B.C$, e $B.C::C.D$; adunque pel teorema XXXIII. avremo $A-B.A::B-C.B$, ed anche $B-C.B::C-D.C$; e *permutando* le due ultime proporzionalità avremo altresì

$A-B.B-C::A.B.$

$B-C.C-D::B.C.$

E ſimilmente, ec.; adunque, ec.

TEOREMA LXVII.

SIeno due progreſsioni geometriche *decreſcenti* coſtituite da qualunque numero di termini (non eſſendo nè anche neceſſario, che il numero de' termini di una ſia eguale al numero de' termini dell' altra) e queſte progreſsioni abbiano ambedue una medeſima grandezza per ſecondo termine; io dico, che la proporzione, che paſſa tra il primo termine della prima progreſsione diminuito del ſecondo termine comune, e il primo termine della ſeconda progreſsione diminuito anch' eſſo del ſecondo termine comune, è compoſta della proporzione, che paſſa tra il primo termine della prima progreſsione diminuito dell' ultimo termine di eſſa, e la ſomma di tutti i termini della medeſima prima progreſsione ſenza il primo, e della proporzione, che è la ſomma di tutti i termini della ſeconda progreſsione ſenza il primo verſo il primo termine della ſteſſa ſeconda progreſsione diminuito dell' ultimo termine di eſſa.

AVVERTIMENTO.

IL ſecondo termine comune ſi chiami B, il primo termine della prima progreſsione ſi chiami A, ed V l' ultimo termine

della

della medesima, e la somma di tutti i suoi termini si chiami S; ma il primo termine della seconda progressione si chiami (a), l'ultimo suo termine (u), ed (s) la somma di tutti i termini della stessa seconda progressione.

Dovrà provarsi, che la proporzione $\frac{A-B}{a-B}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A-V}{S-A}$, ed $\frac{s-a}{a-u}$.

Le due serie S, ed s possono esser costituite di qualsivoglia numero di termini, e non è punto necessario, che il numero de' termini di una serie sia eguale al numero de' termini dell' altra.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema XXII., e per la definizione XXIII. $\frac{A-B}{a-B}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A-B}{B}$, e $\frac{B}{a-B}$, e pel teorema LXIV. la proporzione $\frac{A-B}{B}$ è uguale alla proporzione $\frac{A-V}{S-A}$, ma essendo per lo stesso teorema LXIV. $\frac{a-B}{B} = \frac{a-u}{s-a}$, è invertendo la proporzione $\frac{B}{a-B}$ eguale alla proporzione $\frac{s-a}{a-u}$; adunque pel teorema XLIII. la proporzione $\frac{A-B}{a-B}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A-V}{S-A}$, ed $\frac{s-a}{a-u}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

SE le due progressioni considerate in questo teorema s' intendono *continuate in infinito*, si riguardino come nulli i termini V, ed u ultimi delle due progressioni (*i quali sono incomparabilmente piccoli*), e si vedrà, che la proporzione $\frac{A-B}{a-B}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{S-A}$, ed $\frac{s-a}{a}$.

TEOREMA LXVIII.

SIeno due progressioni geometriche *decrescenti*, e abbiano ambedue una medesima grandezza per primo termine;

Io dico, che la proporzione, che paſſa tra il primo termine comune diminuito del ſecondo termine della prima progreſſione, e il primo termine comune diminuito del ſecondo termine della ſeconda progreſſione è compoſta della proporzione, che à il primo termine comune diminuito dell' ultimo termine della prima progreſſione verſo la ſomma di tutti i termini della prima progreſſione ſenza l' ultimo, e della proporzione, che à la ſomma di tutti i termini della ſeconda progreſsione ſenza l' ultimo verſo il primo termine comune diminuito dell' ultimo termine della ſeconda progreſsione.

AVVERTIMENTO.

IL primo termine comune dicaſi A, il ſecondo termine della prima progreſsione B, l' ultimo termine V, ed S la ſomma di tutti i termini della prima progreſsione: il ſecondo termine poi della ſeconda progreſsione ſi dica (b), l' ultimo termine di eſſa (u), ed (s) la ſomma di tutti i ſuoi termini.

Dee provarſi, che la proporzione $\frac{A-B}{A-b}$ è compoſta delle due proporzioni $\frac{A-V}{S-V}$, ed $\frac{s-u}{A-u}$.

Le due ſerie S, ed s poſſono eſser coſtituite di qualſivoglia numero di termini, e non è punto neceſsario, che il numero de' termini d' una ſia eguale al numero de' termini dell' altra.

DIMOSTRAZIONE.

LA proporzione $\frac{A-B}{A-b}$ è compoſta delle due proporzioni $\frac{A-B}{A}$, ed $\frac{A}{A-b}$ pel teorema XXII., e la definizione XXIII.; ma la proporzione $\frac{A-B}{A}$ è uguale alla proporzione $\frac{A-V}{S-V}$ pel teorema LXV., pel qual teorema anche $\frac{A-b}{A}$ è uguale ad $\frac{A-u}{s-u}$, cioè *convertendo*, la proporzione $\frac{A}{A-b}$ è uguale alla proporzione $\frac{s-u}{A-u}$, e quindi pel teorema XLIII. la proporzione $\frac{A-B}{A-b}$ è compoſta delle due proporzioni $\frac{A-V}{S-V}$, ed $\frac{s-u}{A-u}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Co-

COROLLARIO.

SE si concepisce, che le due progressioni considerate nel teorema presente, sieno *continuate in infinito*, l' annullamento di V, u ultimi termini delle due progressioni (i quali sono *infinitamente piccoli*) farà conoscere, che la proporzione $\frac{A-B}{A-b}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{S}$, ed $\frac{s}{A}$, cioè per la definizione XXIII., che $\frac{A-B}{A-b}$ è uguale al prodotto di $\frac{A}{S}$, ed $\frac{s}{A}$, ovvero pel teorema XXIII., che $\frac{A-B}{A-b}=\frac{s}{A}\times\frac{A}{S}$, e quindi pel teorema XXII. $\frac{A-B}{A-b}=\frac{s}{S}$, e finalmente *convertendo*, e poscia *trasponendo* $\frac{S}{s}=\frac{A-b}{A-B}$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEl corollario del teorema LXV., si vede essere $\frac{A-B}{A}=\frac{A}{S}$, cioè *trasponendo*, indi *convertendo*.

(1) $\frac{S}{A}=\frac{A}{A-B}$, e per lo stesso corollario si à $\frac{A-b}{A}=\frac{A}{s}$, cioè *trasponendo* $\frac{A}{s}=\frac{A-b}{A}$, si paragoni ora quest' ultima proporzionalità con la proporzionalità (1), e si renderà manifesto per l' egualità perturbata, che $\frac{S}{s}=\frac{A-b}{A-B}$.

TEOREMA LXIX.

SE in una progressione geometrica si prendono quattro termini tali, che tra il primo di essi, e il secondo si frappongano *tanti* termini, *quanti* tra il terzo, e il quarto; io dico, che il primo de' quattro termini assunti sta al secondo, come il terzo al quarto.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipotesi il primo termine *assunto* gli altri frapposti, che lo seguono, e il secondo termine *assunto* fanno un ordine di gran-

grandezze; ſiccome il terzo termine *aſſunto*, gli altri frappoſti, che lo ſeguono, e il quarto termine *aſſunto* fanno un altr' ordine di grandezze, in maniera, che ſi anno *tante* grandezze da una parte, *quante* dall' altra, e la *prima* grandezza del prim' ordine ſta alla ſua *ſeconda*, come la *prima* grandezza del ſecond' ordine ſta alla *ſeconda* ſua: la *ſeconda* grandezza del *prim'* ordine ſta alla ſua terza, come la *ſeconda* grandezza del ſecond' ordine ſta alla *terza* ſua; e così ſempre, finchè ſi giunga da una parte al ſecondo termine *aſſunto*, e dall' altra al quarto termine *aſſunto*; adunque per l' egualità ordinata il primo de' termini *aſſunti* ſta al ſecondo di eſſi, come il terzo de' termini *aſſunti* ſta al quarto de' medeſimi.

COROLLARIO I.

SE in una progreſſione geometrica ſi pigliano tre termini tali, che dal primo di eſſi al ſecondo ſi frappongano *tanti* termini, *quanti* tra il ſecondo, ed il terzo, i tre termini *aſſunti* ſaranno in proporzione geometrica continua; imperciocchè il ſecondo de' termini *aſſunti* fa figura di *ultima* grandezza nel *primo* ordine, e di *prima* grandezza nel *ſecond'* ordine, di modo che la dimoſtrazione del teorema preſente ſi adatta egualmente anche a queſto caſo.

COROLLARIO II.

SE in una progreſſione geometrica ſi prendano quanti termini ſi vogliano, i quali ſieno tra loro egualmente diſtanti, cioè, abbiano tra loro un egual numero di termini intermedj; la ſerie de' ſuddetti termini *aſſunti* ſarà anch' eſſa una progreſſione geometrica.

Queſto ſecondo corollario ſegue dal primo evidentemente.

TEOREMA LXX.

LA proporzione di due termini fra loro diſtanti di una progreſſione geometrica è uguale al prodotto della proporzione di due termini proſſimi, moltiplicata per ſe ſteſſa *tante* volte, *quanti* ſono i termini frappoſti tra i due termini diſtanti; v. g. in in questa progressione A, B, C, D, E, F, ec. la proporzione di $\frac{A}{D}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$, ed è uguale a $\frac{B}{C} \times \frac{B}{C} \times \frac{B}{C}$, ed è uguale anche a $\frac{C}{D} \times \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$.

Dimostrazione.

I. Per le definizioni XXI., XXII., e XXIII. il *prodotto* della proporzione di due termini prossimi, moltiplicata per se stessa un certo numero di volte, è una proporzione composta di *tante* proporzioni tra loro eguali (mentre tutte sono le stesse) quante *più una* si è fatta la medesima moltiplicazione.

II. La proporzione poi di due termini distanti, pel teorema XXII., per la definizione XXIII., e per l'ipotesi, è composta di proporzioni eguali tra loro, ed eguali alle proporzioni, che compongono il suddetto prodotto espresso nel primo punto: e in oltre, essa è composta di *tante* proporzioni *più una* quanti sono i termini frapposti tra i due termini distanti; adunque *tante* sono le proporzioni *componenti* la proporzione di due termini distanti, ec. *quante* sono le proporzioni ad esse eguali, e che ad esse corrispondono, le quali compongono il prodotto espresso nel primo punto, e conseguentemente pel corollario II. del teorema XLII., la proporzione di due termini distanti, ec. è uguale alla proporzione di due termini prossimi moltiplicata per se stessa *tante* volte, ec.. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema LXXI.

Sia qualunque progressione geometrica A, B, C, D, E, ec. e concepiscasi tra A, e B *qualunque* numero di grandezze in proporzione geometrica continua in modo, che il primo termine di tal progressione sia A, e l'ultimo B; *egual* numero di grandezze, parimente in proporzione geometrica continua, si concepisca tra B, e C in maniera, che B sia il primo, e C l'ultimo termine di questa nuova progressione, il simile facciasi tra C, e D, tra D, ed E, ec.

Io dico, che i termini A, B, C, D, E, ec. della progressione *primitiva* con le grandezze fra esi interposte formano una progressione geometrica.

DIMOSTRAZIONE.

SI designi con X quella grandezza frapposta tra A, e B, la quale dee precedere immediatamente B, e si esprima con Y quella grandezza frapposta tra B, e C, la quale dee seguire immediatamente B.

Indi si consideri, che essendo in egual numero, ed in progressione geometrica continua le grandezze *intermedie* tra A, e B, e le grandezze intermedie tra B, e C, sarà per la definizione XXVIII., e pel teorema precedente $\frac{A}{B}$ egualmente *moltiplice* di $\frac{X}{B}$, che $\frac{B}{C}$ di $\frac{B}{Y}$; adunque per lo scolio annesso alla definizione XXIX. $\frac{X}{B}$ è ugualmente *summoltiplice* di $\frac{A}{B}$, che $\frac{B}{Y}$ di $\frac{B}{C}$; ma per la supposizione $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{B}{C}$; adunque pel corollario IV. del teorema XLII. $\frac{X}{B}$ è uguale a $\frac{B}{Y}$, e conseguentemente designando coi punti le grandezze frapposte tra A, e B, e tra B, e C; l' infrascritta serie:

$A.....X$, B, $Y.....C$ è una progressione geometrica.

E' chiaro, che il simile, e nella stessa maniera si proverà di tutti i termini della progressione primitiva, e delle grandezze fra esi interposte; adunque il teorema è generalmente vero.

DEFINIZIONE XXXVI.

DIco, che una grandezza A si moltiplica per un' altra B, quando si assume una grandezza *arbitraria* Z, e si prende un' altra grandezza P tale, che si abbia questa proporzionalità:

$Z.A::B.P$.

Chiamo unità *assunta* la prima grandezza di questa proporzionalità, cioè la Z, presa *ad arbitrio*, e chiamo prodotto la grandezza P, che è quarta proporzionale dopo la grandezza *arbitraria* Z, la grandezza A *moltiplicanda*, e la grandezza B *moltiplicante*.

Il prodotto *P* si esprime ancora così, *AB* scrivendo semplicemente la grandezza *moltiplicanda* avanti la *moltiplicante*.

SCOLIO.

I. SEcondo quest' *idea generale* della moltiplicazione, possano moltiplicarsi tra loro anche le grandezze di specie differente, e in tal caso l' unità *assunta* Z dev' essere omogenea alla grandezza da *moltiplicarsi A;* ma il prodotto *AB* è sempre una grandezza omogenea alla grandezza *B*, che *moltiplica*.

II. In questo medesimo caso, se la grandezza moltiplicante *B* fosse un numero, sarebbe più proprio di assumere l' unità arbitraria Z in modo, che essa fosse commensurabile alla grandezza moltiplicanda *A;* e questo acciò il prodotto *AB* riuscisse un numero razionale, conforme è *B*, il quale è la grandezza moltiplicante.

III. Ma se la grandezza da moltiplicarsi *A* fosse un numero, sarebbe allora più a proposito l' assumere *l' unità naturale*, in vece dell' unità *arbitraria;* benchè per altro qualsivoglia numero sia valevole a far la figura dell' unità assunta secondo la presente definizione.

IV. Similmente, se la grandezza da moltiplicarsi *A* fosse una proporzione, sarebbe più a proposito di prendere per unità la proporzione d' *egualità*, in vece di qualunque altra proporzione *arbitraria*, conforme si è da me fatto nel presente trattato, quantunque ogni proporzione sia idonea a far le veci d' unità *assunta* a tenore di questa medesima definizione.

V. Quando si paragonano tra loro due prodotti v. g. *AB*, e *CD*, dee prendersi una sola grandezza arbitraria per unità assunta, e formare queste due proporzionalità $Z.A::B.AB$, e $Z.C::D.CD$; ovvero debbono prendersi per unità assunte due grandezze *arbitrarie* tra loro eguali, poichè se l' unità *assunte* fossero tra loro di valore diverso, si vedrebbe sempre variare la proporzione di esse, e i due prodotti *AB*, e *CD* non serbarebbero fra loro una proporzione fissa, e costante.

VI. Allorchè due prodotti, v. g. *AB*, e *CD* sono paragonati insieme, è necessario, che le due grandezze moltiplicate

A,

A, e *C* sieno omogenee *tra loro*, altrimente l' unità arbitraria, che serve per uno de' prodotti, e dev' essere omogenea alla grandezza *moltiplicanda*, non potrebb' esser la medesima, ovvero eguale a quella, che serve per l' altro prodotto, secondo che esige l' articolo precedente.

E' parimente necessario, che sieno *tra loro* omogenee anche le due grandezze moltiplicanti *B*, e *D*; poichè i prodotti sono della medesima specie delle grandezze moltiplicanti.

VII. Il prodotto di qualsivoglia numero di grandezze, benchè non omogenee tra loro, è una grandezza *pura* omogenea all' ultima delle grandezze moltiplicanti: v. g. (*AB*) *C* è una grandezza pura omogenea alla *C*; (*ABC*) *D* è una grandezza pura omogenea alla *D*, e così, ec.

VIII. Quantunque le tre grandezze *A*, *B*, *C* fossero omogenee tra loro, non è punto necessario, che per formare il prodotto (*AB*) *C* sia presa la medesima unità assunta, che serve per formare il prodotto *AB*; attesochè nella moltiplicazione di *AB* per *C* il prodotto *AB* può considerarsi come una grandezza pura.

Il simile dee dirsi di qualunque numero di grandezze omogenee.

IX. Se l' unità *assunta Z* moltiplica qualsivoglia grandezza *C*, il prodotto, che ne risulta, è la stessa grandezza *C*; conciosiachè per questa medesima definizione, $Z.C::Z.CZ$; ma pel corollario VIII. de' principj $Z.C::Z.C$; adunque pel teorema I. *CZ* quarto termine della penultima proporzionalità è uguale a *C* quarto termine dell' ultima.

X. Se l' unità *assunta Z* è moltiplicata per qualunque grandezza *C*, il prodotto, che ne viene, è la stessa grandezza *C*; perchè per la presente definizione $Z.Z::C.ZC$; ma pel corollario VII. de' principj $Z.Z::C.C$; adunque pel teorema I., i quarti termini di queste due proporzionalità sono eguali, cioè $ZC = C$.

XI. E quindi, se l' unità *assunta Z* è moltiplicata per se medesima quante volte si vorrà, il prodotto è sempre eguale alla semplice unità *assunta Z*; purchè per formare i diversi pro-

prodotti di *Z* moltiplicata per se medesima quante volte si vorrà, assumasi sempre la stessa unità *arbitraria*.

AVVERTIMENTO.

IN avvenire la lettera *Z* significherà sempre l'unità *assunta*; e quando si dirà, che l'unità *assunta* dev'essere, o è la *medesima*, s'intenderà, che l'unità *assunta* dev'essere, o è una grandezza medesima, ovvero una grandezza *eguale*; poichè dall'*identità* dell'unità assunta, ovvero dall'egualità delle unità *assunte* derivano le medesime conclusioni.

TEOREMA LXXII.

SE due grandezze omogenee sono moltiplicate per due grandezze tra loro eguali (che possono essere di specie diversa dalle moltiplicanti); io dico, che i due prodotti, che ne risultano, sono tra loro come le grandezze moltiplicate.

DIMOSTRAZIONE.

SIeno moltiplicate *A*, e *C* per le due grandezze eguali *B*, e *b*; dee provarsi, che *AB*.*Cb*::*A*.*C*.

Abbiamo due ordini di grandezze, cioè *A*, *Z*, Z, *C* da una parte, ed *AB*, *B*, *b*, *Cb* dall'altra tali, che la *prima A* del prim'ordine è alla sua *seconda Z*, come la *prima AB* del second'ordine è alla sua *seconda B*; poichè per la definizione XXXVI. *Z*.*A*::*B*.*AB*, e *convertendo A*.*Z*::*AB*.*B*:

In oltre la *seconda Z* del prim'ordine sta alla sua *terza* parimente *Z*, come la *seconda B* del second'ordine è alla sua *terza b* pel corollario VII. de' principj, mentre ambedue le proporzioni $\frac{Z}{Z}$, e $\frac{B}{b}$ sono d'egualità. In fine la *terza Z* del prim'ordine è alla sua *quarta C*, come la *terza b* del second'ordine è alla sua *quarta Cb*, e ciò per la definizione XXXVI.; adunque per l'egualità ordinata la *prima A* dell'ordine primo sta alla sua *ultima C*, come la *prima AB* dell'ordine secondo sta alla sua *ultima Cb*, e *trasponendo AB*.*Cb*::*A*.*C*.

COROLLARIO.

SE la grandezza moltiplicata *A* sarà eguale, ovvero maggiore, o minore dell' altra grandezza moltiplicata *C*, anche il prodotto *AB* sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore dell' altro prodotto *Cb*:

E versavice se il prodotto *AB* sarà eguale, ovvero maggiore, o minore dell' altro prodotto *Cb*, anche la grandezza moltiplicata *A* sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore dell' altra grandezza moltiplicata *C*: tutto ciò in virtù del corollario X. de' principj.

TEOREMA LXXIII.

SE due grandezze eguali sono moltiplicate per due grandezze tra loro omogenee, cioè una delle eguali per una delle omogenee, e l' altra delle grandezze eguali per l' altra delle omogenee;

Io dico, che i due prodotti, che ne risultano, sono tra loro come le grandezze moltiplicanti, le quali possono essere di specie diversa dalle moltiplicate.

DIMOSTRAZIONE.

LE due grandezze eguali *B*, *b* sieno moltiplicate per due grandezze *A*, *C* tra loro omogenee, cioè *B* per *A*, e *b* per *C*; dee provarsi, che *BA*.*bC*::*A*.*C*;

Si à per la definizione XXXVI. Z.*B*::*A*.*BA*, e Z.*b*::*C*.*bC*, cioè *trasponendo* *A*.*BA*::Z.*B*, e *c*.*bC*::Z.*b*; ma pel corollario VIII. de' principj Z.*B*::Z.*b*; adunque pel corollario XII. de' principj *A*.*BA*::*C*.*bC*, e *permutando* *A*.*C*::*BA*.*bC*, e *trasponendo* *BA*.*bc*::*A*.*C*. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

SE la *A* sarà eguale, ovvero maggiore, o minore della *C*, anche *BA* sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di *bC*.

E versavice, se *BA* sarà eguale, ovvero maggiore, o minore

nore di bC; anche A sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di C: tutto questo pel corollario X. de' principj.

TEOREMA LXXIV.

SIano F, e G due grandezze omogenee *tra loro*, ed f, e g due altre grandezze omogenee *tra loro* (potendo però essere di specie diversa dalle due prime); sia in oltre F maggiore, ovvero minore di G, e sia f maggiore, ovvero respettivamente minore di g;

Io dico primieramente, che il prodotto Ff è maggiore, ovvero respettivamente minore di Gg;

Io dico secondariamente, che il prodotto fF è maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto gG.

Dimostrazione della prima parte.

PEl corollario del teorema LXXII. il prodotto Ff è maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto Gf: pel corollario del teorema LXXIII. il prodotto Gf è maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto Gg; adunque tanto più il prodotto Ff sarà maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto gG. Il che dovea dimostrarsi in primo luogo.

Dimostrazione della seconda parte.

PEl corollario del teorema LXXIII. il prodotto fF è maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto fG: pel corollario del teorema LXXII. il prodotto fG è maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto gG; adunque tanto più il prodotto fF sarà maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto gG. Il che dovea dimostrarsi in secondo luogo.

TEOREMA LXXV.

SIeno i due prodotti tra loro eguali AD, FG formati con una medesima unità *assunta* Z; io dico, che se la grandezza A com-

componente il primo è maggiore, ovvero minore della grandezza *F* componente il secondo; l' altra grandezza *D* componente il primo sarà *minore*, ovvero respettivamente maggiore dell' altra grandezza *G* componente il secondo.

SCOLIO.

IN virtù delle supposizioni di questo teorema, e degli articoli primo, sesto, e settimo dello scolio, che precede il teorema LXXII., le due grandezze *A*, ed *F* debbono essere omogenee tra loro, e le altre due grandezze *D*, e *G* omogenee fra loro, ma quelle possono essere di specie diversa da queste.

DIMOSTRAZIONE.

SE la grandezza *D* non fosse *minore*, ovvero respettivamente maggiore della grandezza *G*, la *D* sarebbe eguale, o maggiore, ovvero respettivamente eguale, o minore della *G*; ma se *D* fosse eguale, o maggiore di *G*, il prodotto *AD* dovrebb' essere maggiore del prodotto *FG* pel corollario del teorema LXXII., o pel teorema LXXIV., il che si oppone all' ipotesi:

E se *D* fosse eguale, o minore di *G*, il prodotto *AD* dovrebb' essere minore del prodotto *FG* pel medesimo corollario del teorema LXXII., o per lo stesso teorema LXXIV. (poichè in tal caso *A* è supposta minore di *F*) il che è parimente contrario alla supposizione di *AD* eguale ad *FG*; adunque la *D* esser dee minore, ovvero respettivamente maggiore della *G*. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

IL prodotto *P* sia composto di due grandezze *A*, e *D* omogenee tra loro; io dico, che se una delle grandezze componenti, v. g. *A* è maggiore, ovvero minore del prodotto *P*, l' altra grandezza componente *D* è *minore*, ovvero respettivamente maggiore dell' unità **Z** assunta per formare il medesimo prodotto *D*.

Imperciocchè per l' articolo IX. dello scolio, che precede il teorema LXXII., il nuovo prodotto *PZ*, che nasce dal moltiplitiplicare il primo prodotto *P* per l' unità assunta Z è uguale al medesimo prodotto *P*, di modo che essendo per la supposizione il prodotto *AD* eguale al prodotto *P*, ne segue che i due prodotti *AD*, e *PZ* sono tra loro eguali, ma si suppone *A* maggiore, ovvero minore di *P*; adunque *D* è *minore*, ovvero respettivamente maggiore dell' unità assunta *Z*, poichè in questo corollario *P* fa figura di *F*, e *Z* di *G*.

COROLLARIO II.

SE il prodotto *P* composto delle due grandezze *A*, e *D*, ed espresso nel corollario antecedente è maggiore, ovvero minore dell' unità *assunta Z*, e se di più una delle grandezze componenti il prodotto *P*, v. g. la *A* è maggiore, ovvero respettivamente minore del medesimo prodotto *P*; io dico, che l' altra grandezza componente *D* è minore, ovvero respettivamente maggiore della grandezza componente *A*.

I. Imperciocchè per l' ipotesi il prodotto *P* è maggiore, ovvero minore dell' unità *assunta Z*, cioè l' unità *assunta Z* è minore, ovvero respettivamente maggiore del prodotto *P*, ma nell' antecedente corollario si è mostrato, che la *D* è minore, ovvero respettivamente maggiore dell' unità *assunta* Z; adunque la *D* è minore, ovvero respettivamente maggiore del prodotto *P*.

II. In oltre per l' ipotesi la *A* è maggiore, ovvero respettivamente minore del prodotto *P*, cioè il prodotto *P* è minore, ovvero respettivamente maggiore della grandezza componente *A*; ma si è provato nel primo punto, che l' altra grandezza componente *D* è minore, ovvero respettivamente maggiore del prodotto *P*, adunque la stessa grandezza *componente D* è minore, ovvero respettivamente maggiore della grandezza *componente A*.

DEFINIZIONE XXXVII.

SE una grandezza si moltiplica una volta per se medesima, il prodotto chiamasi seconda dignità della medesima grandezza, e se una grandezza si moltiplica due, tre, quattro volte,

ec.

ec. per ſe medeſima, il prodotto, che ne viene, diceſi reſpettivamente terza, quarta, quinta dignità, ec. della ſteſſa grandezza, e così in infinito, deſumendo il *grado* della dignità dal numero delle volte *più uno*, che la grandezza ſi è moltiplicata per ſe medeſima.

DEFINIZIONE XXXVIII.

QUando una grandezza (*a*) moltiplicata una volta per ſe medeſima, ne produce un' altra *A*, quella diceſi radice ſeconda di queſta, e quando (*a*) moltiplicata due, tre, quattro volte per ſe medeſima, produce la *A*, diceſi, che è reſpettivamente la radice terza, quarta, quinta, ec. della *A* deſumendo il *grado* della radice dal numero delle volte *più uno*, che la (*a*) dee moltiplicarſi per ſe medeſima ad effetto di produrre la *A*.

TEOREMA LXXVI.

SIeno due prodotti, v. g. *EFG*, ec. ed *efg*, ec. formati di qualſivoglia numero di grandezze (purchè *tante* ſieno le grandezze, che formano il primo, quanto quelle, che formano il ſecondo); e le grandezze *E*, *F*, *G*, ec. delle quali è formato il primo prodotto, ſieno eguali, ovvero maggiori, o minori delle corriſpondenti grandezze, delle quali è formato il ſecondo, cioè delle *e*, *f*, *g*, ec. ordinatamente preſe.

Io dico, che il primo prodotto *EFG*, ec. è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo *efg*, ec.

SCOLIO.

DAlle ſuppoſizioni del teorema ben ſi comprende, che ciaſcuna grandezza coſtituente il primo prodotto *EFG*, ec. dev' eſſere omogenea alla grandezza, che gli corriſponde nel ſecondo prodotto *efg*, ec. cioè la *E* alla *e*, la *F* alla *f*, la *G* alla *g*, ec. altrimente le grandezze, delle quali è formato il primo de' due ſuddetti prodotti, non potrebbero eſſere uguali, ovvero maggiori, o minori delle corriſpondenti grandezze ordinatamente preſe, delle quali è formato il ſecondo prodotto.

Non

Non è però neceſſario, che le grandezze *E*, *F*, *G*, ec. ſieno tutte omogenee tra loro, nè per conſeguenza, che ſieno tutte tra loro omogenee le grandezze *e*, *f*, *g*, ec.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la definizione XXXVI., e per l'articolo VII. dello ſcolio, che gli è anneſſo, il prodotto di qualunque numero di grandezze è anch' eſſo una grandezza *pura* omogenea all' ultima delle grandezze moltiplicanti; ciò poſto pel corollario del teorema LXXII., ovvero pel corollario del teorema LXXIV., *EF* ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di *ef*, come pure *EFG* ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di *efg*, e così *EFG*, ec. ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di *efg*, ec. qualunque eſſer poſſa il numero delle grandezze, che formano i due prodotti. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

SE qualſivoglia grandezza *E* è uguale, ovvero maggiore, o minore di qualunque altra grandezza (*e*); anche qualſiſia dignità di *E* ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di una dignità ſimile di (*e*): cioè *EE* ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di *ee*, così *EEE* di *eee*, ed *EEE*, ec. di *eee*, ec.

COROLLARIO II.

SE una grandezza è uguale, ovvero maggiore, o minore di un' altra, la radice di qualunque *grado* della prima ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore della radice *ſimile* della ſeconda.

Rappreſentando con *EE*, ovvero con *EEE*, oppure con *EEE*, ec. la grandezza, di cui la *E* è radice reſpettivamente ſeconda, terza, ec. e deſignando con *ee*, ovvero con *eee*, oppure con *eee*, ec. la grandezza, di cui la (*e*) è la radice *ſimile*, divien manifeſto, che ſe *EE*, ovvero *EEE*, oppure *EEE*, ec. è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore

nore della corrifpondente ee, ovvero eee, oppure eee, ec. anche la radice E farà eguale, ovvero refpettivamente maggiore, o minore di (e) radice *fimile*, altrimente la E farebbe maggiore, o minore, ovvero refpettivamente eguale, o minore, oppure eguale, o maggiore della (e), ed elevando quefte grandezze E, ed (e) alla dignità feconda, terza, quarta, ec. farebbe EE, o EEE, oppure EEE, ec. maggiore, o minore, ovvero refpettivamente eguale, o minore, oppure eguale, o maggiore della correlativa ee, o fia eee, o fia eee, ec. e ciò pel corollario precedente, il che diftruggerebbe l'ipotefi; adunque, ec.

TEOREMA LXXVII.

DAte due proporzioni, i termini di una delle quali poffono effere di fpecie diverfa dai termini dell' altra; io dico, che le medefime due proporzioni fono tra di loro, come l'antecedente della prima, moltiplicato pel confeguente della feconda, è al confeguente della prima moltiplicato per l'antecedente della feconda.

DIMOSTRAZIONE.

SIeno $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ le due proporzioni, dee provarfi quefta proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: AD . BC$.

fi moltiplichino l' antecedente A, e il confeguente B della prima proporzione pel confeguente D della feconda, e il primo prodotto AD ftarà al fecondo BD, come la A fta alla B pel teorema LXXII., cioè farà $\frac{A}{B} = \frac{AD}{BD}$.

Si moltiplichi il confeguente B della prima proporzione, prima per l' antecedente C, e poi pel confeguente D della feconda, e pel teorema LXXIII., il primo di quefti due prodotti, cioè BC ftarà al fecondo BD, come la C alla D, cioè farà $\frac{C}{D} = \frac{BC}{BD}$; laonde pel corollario VIII. de' principj fuffifte quefta proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{AD}{BD} . \frac{BC}{BD}$, ma pel teorema III.

AD

$\frac{AD}{BD}.\frac{BC}{BD}::AD.BC$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}$ $::AD.BC$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

Nella proporzionalità $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::AD.BC$ si paragonano insieme i due prodotti AD, e BC; adunque nel formare ambidue deve assumersi la stessa unità *arbitraria*, giusta l'articolo quinto dello scolio, che precede il teorema LXXII.

COROLLARIO I.

Date due proporzioni, i termini di una delle quali esser possono di specie diversa dai termini dell'altra; io dico, che le medesime proporzioni sono tra loro, come il conseguente della seconda moltiplicato per l'antecedente della prima, è all'antecedente della seconda moltiplicato pel conseguente della prima, cioè $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::DA.CB$.

Imperciocchè pel presente teorema $\frac{C}{D}.\frac{A}{B}::CB.DA$; adunque *convertendo* $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::DA.CB$.

Questo corollario potrebbe anche provarsi immediatamente d'una maniera simillima a quella, che si è tenuta in dimostrare il teorema.

COROLLARIO II.

In virtù del corollario X. de' principj, se il prodotto AD, oppure DA degli estremi sarà eguale, ovvero maggiore, o minore del prodotto BC, oppure CB de' medj; anche la proporzione $\frac{A}{B}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della proporzione $\frac{C}{D}$.

E all'incontro, se la proporzione $\frac{A}{B}$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore della proporzione $\frac{C}{D}$, anche il prodotto AD degli estremi sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del prodotto BC de' medj, e il prodotto DA

degli estremi sarà uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del prodotto *CB* de' medj.

SCOLIO.

QUi cade in acconcio di provar positivamente l' infrascritto teorema, che fu dimostrato negativamente nello scolio annesso al corollario V. del teorema II.

TEOREMA.

POsta questa proporzionalità:

$A . B :: B . A$;

Io dico, che la *A* è uguale alla *B*.

DIMOSTRAZIONE.

PEl presente corollario II. si avrà *AA* eguale a *BB*; adunque pel corollario II. del teorema LXXVI., la *A* sarà eguale alla *B*. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO III.

I. SE le proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ sono tali, che *C* sia eguale a *B*, cioè, che si abbia $A.B::B.D$, cosicchè la *B* sia media proporzionale tra la *A*, e la *B*, è manifesto, che ponendo nel teorema, e nel suo primo corollario la *B* in vece della *C*, che ora gli vien supposta eguale, si vedranno sussistere le due proporzionalità seguenti $\frac{A}{B} . \frac{B}{D} :: AD . BB$, ed $\frac{A}{B} . \frac{B}{D} :: DA . BB$.

II. Laonde in vigore del corollario X. de' principj, se il prodotto *AD*, oppure il prodotto *DA* degli estremi sarà eguale, ovvero maggiore, o minore del prodotto *BB*, la $\frac{A}{B}$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della $\frac{B}{D}$.

E all' incontro, se la $\frac{A}{B}$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore della $\frac{B}{D}$, anche il prodotto *AD*; oppure il prodotto *DA* degli estremi sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del prodotto *BB*.

III. E quindi ſe il prodotto AD, oppure DA degli eſtremi è uguale al prodotto BB, ne ſiegue, che $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{B}{D}$, vale a dire, che la B è media proporzionale tra la A, e la D.

E ſe $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{B}{D}$, cioè ſe la B è media proporzionale tra la A, e la D, ne ſiegue all'incontro, che il prodotto AD, oppure DA degli eſtremi è uguale al prodotto BB, ſeconda dignità della media proporzionale B.

Scolio

Per gl' intendenti del calcolo differenziale.

Piacemi di eſporre qui una maniera di trovare per via d' analiſi il teorema XL.

Problema.

Le lettere a, e b rappreſentino due grandezze date, ed omogenee, e la lettera y denoti qualunque grandezza omogenea alla medeſima a, e b; egli è chiaro, che l' aggregato delle due proporzioni $\frac{a}{y}$, $\frac{y}{b}$, cioè $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$ ora è maggiore, ora è minore ſecondo la varia quantità della grandezza y: ed è chiaro altresì, che l' aggregato $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$ può creſcere in infinito, poichè ſe la y diviene infinita, la proporzione $\frac{a}{y}$ diverrà *infinitamente piccola* in ſequela del corollario XIX. de' principj, e la proporzione $\frac{y}{b}$ diviene infinitamente grande in conſeguenza del corollario XVII. de' principj; adunque l' aggregato $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$ ſarà in tal caſo una grandezza infinita.

Ciò poſto, ſi chiede, che ſi determini un valore di y tale, che l' aggregato $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$ ſia un *minimo*, cioè ſia tale, che chiamando m quel valore di y, il quale ſi cerca, l' aggregato $\frac{a}{m}+\frac{m}{b}$ ſia *minore* di qualunque aggregato ſimile $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$.

SOLUZIONE.

Differenziando l'aggregato $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$, si ottiene $-\frac{ady}{yy}+\frac{dy}{b}$, e questa differenziale dee supporsi eguale a zero, secondo i principj del calcolo differenziale, di modo che si avrà $\frac{dy}{b}=\frac{ady}{yy}$, d'onde nasce fatte le debite operazioni $\frac{yydy}{byy}=\frac{abdy}{byy}$, e da quest' ultima equazione divisa per dy, e moltiplicata per byy, risulta quest' altra $yy=ab$, cosicchè chiamando m il valore di y, che ne proviene sarà $mm=ab$, cioè $ab=mm$; ma pel primo punto del corollario III. si à questa proporzionalità $\frac{a}{m}.\frac{m}{b}::ab.mm$, adunque essendosi trovato, che ab deve essere nel caso nostro eguale ad mm, ne siegue pel terzo punto del corollario III., che anche $\frac{a}{m}$ sarà eguale ad $\frac{m}{b}$, cioè che la m deve essere media proporzionale tra la a, e la b, affinchè l' aggregato $\frac{a}{m}+\frac{m}{b}$ sia un *minimo*, cioè sia minore di qualunque aggregato simile $\frac{a}{y}+\frac{y}{b}$, come appunto si è dimostrato nel teorema XL.. Il che dovea ritrovarsi.

Nella soluzione di questo problema ò supposto, che la proporzione $\frac{dy}{b}$ sia la *differenza* della proporzione $\frac{y}{b}$, e che la proporzione $\frac{ady}{yy}$ *negativamente presa*, cioè $-\frac{ady}{yy}$ sia la differenza della proporzione $\frac{a}{y}$: nello scolio annesso al corollario IV. del teorema CVI. addurrò la ragione di queste due supposizioni.

Altro scolio.

Inserirò in questo luogo anche il seguente teorema per gl' intendenti del calcolo analitico.

TEOREMA.

Sia la proporzionalità $A.B::F.G$, i termini della quale debbono essere tutti omogenei; io dico, che il quadrato della *semidifferenza* degli estremi accresciuto del prodotto de' medj, e è uguale al quadrato della *semisomma* degli estremi. E che il quadrato della *semidifferenza* de' medj accresciuto del prodotto degli estremi, è uguale al quadrato della *semisomma* de' medj.

Dimostrazione della prima parte.

SI chiami S la somma, e D la differenza di A, e di G, si avranno queste due equazioni $A+G=S$, e $\pm A\mp G=D$. Aggiungasi la seconda alla prima, e se ne dedurrà A, ovvero G eguale a $\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}D$. Sottraggasi la seconda dalla prima, e se ne trarrà G, ovvero *respettivamente* A eguale a $\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}D$. Quindi il prodotto AG degli estremi sarà sempre eguale a $\left[\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}D\right]\left[\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}D\right]$, cioè a $\left[\frac{1}{4}SS-\frac{1}{4}DD\right]$.

Ma per la seconda parte del corollario II. del presente teorema LXXVII. il prodotto BF de' medj è uguale ad AG; adunque BF è uguale a $\left[\frac{1}{4}SS-\frac{1}{4}DD\right]$, e conseguentemente $\frac{1}{4}DD+BF=\frac{1}{4}DD+\left[\frac{1}{4}SS-\frac{1}{4}DD\right]=\frac{1}{4}SS$. Che è la prima parte.

Altra dimostrazione della prima parte.

$\left[\frac{\pm A\mp G}{2}\right]^2+BF$ è uguale ad $(AA-2AG+GG+4BF)$ divis. per 4. Pongasi in luogo di BF il prodotto AG, che gli è uguale, e l'ultima espressione diverrà $(AA+2AG+GG)$ divis. per 4, vale a dire $\left[\frac{A+G}{2}\right]^2$. Adunque $\left[\frac{\pm A\mp G}{2}\right]^2+BF=\left[\frac{A+G}{2}\right]^2$. Il che doveva primieramente dimostrarsi.

Le dimostrazioni della seconda parte non sono diverse da quelle della prima, in cui si contiene visibilmente quest' altro teorema.

Sia la proporzionalità continua $A.B::B.G$; io dico, che il quadrato della *semidifferenza* degli estremi accresciuto del qua-

quadrato del termine medio è uguale al quadrato della *semi-somma* degli estremi. In termini analitici

$$\left[\frac{\pm A \mp G}{2}\right]^2 + B^2 = \left[\frac{A+G}{2}\right]^2.$$

Potrebbero ambidue i teoremi esporsi ancora così:

I. Il quadrato della differenza degli estremi più il quadruplo del prodotto de' medj è uguale al quadrato della somma degli estremi.

II. Il quadrato della differenza degli estremi più il quadrato del doppio termine medio è uguale alla somma del quadrato degli estremi.

COROLLARIO IV.,

Che insegna una maniera di ridurre due proporzioni ad un medesimo conseguente, senza cangiarne il valore.

DAl tenore della dimostrazione di questo teorema apparisce il modo di ridurre ad un medesimo conseguente due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ (senza mutarne il valore) benchè i termini dell' una non sieno omogenei ai termini dell' altra:

Ciò si ottiene moltiplicando i termini della prima pel conseguente della seconda, donde nasce $\frac{AD}{BD}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$ pel teorema LXXII., indi moltiplicando il conseguente della prima pe' termini della seconda, donde viene $\frac{BC}{BD}$ eguale a $\frac{C}{D}$ pel teorema LXXIII.

Il simile si otterrà, se il conseguente D della seconda proporzione $\frac{C}{D}$ si moltiplicherà pe' termini della prima $\frac{A}{B}$, mentre si avrà $\frac{DA}{DB}$ eguale ad $\frac{A}{B}$ pel teorema LXXIII., e se i termini della seconda proporzione $\frac{C}{D}$ si moltiplicheranno pel conseguente B della prima $\frac{A}{B}$; poichè ne verrà $\frac{CB}{DB} = \frac{C}{D}$ pel teorema LXXII.

COROLLARIO V.,

Che contiene un modo di aggiugnere una proporzione ad un' altra, e di sottrarre una proporzione da un' altra.

I. SE si vorrà aggiugnere la $\frac{C}{D}$ alla $\frac{A}{B}$ prendasi $\frac{AD + BC}{BD}$; mentre quest' ultima proporzione sarà per l' assioma VIII. eguale ad $\frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD}$ cioè sarà eguale ad $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ pel corollario IV.

Prendasi ancora $\frac{DA + CB}{DB}$, e similmente per l' assioma VIII. e pel corollario IV. si avrà la somma desiderata.

II. Se poi si vorrà sottrarre la $\frac{C}{D}$ dalla $\frac{A}{B}$ si prenda $\frac{AD - BC}{BD}$; poichè questa proporzione per l' assioma VII. è uguale ad $\frac{AD}{BD} - \frac{BC}{BD}$, cioè ad $\frac{A}{B} - \frac{C}{D}$ pel corollario IV.

Si prenda anche $\frac{DA - CB}{DB}$, e parimente per l' assioma settimo, e pel corollario IV. si avrà la differenza, che si desidera.

TEOREMA LXXVIII.

SIeno le quattro proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ tali, che $\frac{A}{B}$ stia a $\frac{C}{D}$, come $\frac{E}{F}$ sta a $\frac{G}{H}$; io dico, che $\frac{A}{C}$ moltiplicata per $\frac{F}{H}$ è uguale a $\frac{B}{D}$ moltiplicata per $\frac{E}{G}$.

Le quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D* debbono essere tra loro omogenee, e le quattro grandezze *E*, *F*, *G*, *H* debbono essere omogenee tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{E}{F} . \frac{G}{H}$; adunque pel corollario IV. del teorema XXIX. $\frac{A}{C} . \frac{B}{D} :: \frac{E}{G} . \frac{F}{H}$, e conseguentemente pel corollario II. del teorema precedente $\frac{A}{C} \times \frac{F}{H}$ è uguale a $\frac{B}{D} \times \frac{E}{G}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEO-

TEOREMA LXXIX.

SE due grandezze sono omogenee, e l' unità *assunta* è la medesima; io dico, che il prodotto della prima grandezza moltiplicata per la seconda è uguale al prodotto della seconda moltiplicata per la prima.

DIMOSTRAZIONE.

SIeno M, ed N le due grandezze omogenee, dee provarsi, che $MN = NM$.

Per l' ipotesi, e per la definizione XXXVI. $Z.M::N.MN$, e *permutando* $Z.N::M.MN$; parimente per la supposizione, e per la definizione XXXVI. $Z.N::M.NM$; adunque pel teorema I. i quarti termini delle due proporzionalità sono eguali, cioè $MN = NM$. Il che dovea dimostrarsi.

AVVERTIMENTO.

IN avvenire io prenderò indifferentemente il prodotto della prima grandezza per la seconda, e il prodotto della seconda per la prima, e non sempre citerò questo teorema LXXIX.

TEOREMA LXXX.

LE lettere A, B, C, D, F dinotino cinque grandezze in generale, le due prime delle quali, cioè A, B sieno omogenee tra loro, e le tre ultime C, D, F sieno omogenee tra loro; io dico, che sussiste questa proporzionalità:
$\frac{AC}{BD}.\frac{C}{F}::\frac{A}{B}.\frac{D}{F}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema LXXVII. $\frac{AC}{BD}.\frac{C}{F}::ACF.BDC$; ma pel teorema LXXIX. $CF = FC$; adunque pel corollario del teorema LXXIII. $ACF = AFC$: e quindi in virtù del corollario IX. de' principj sarà $\frac{AC}{BD}.\frac{C}{F}::AFC.BDC$. Essendo in oltre pel teorema LXXII. $AFC.BDC::AF.BD$, sarà eziandio pel corollario

XI.

XI. de' principj $\frac{AC}{BD} . \frac{C}{F} :: AF . BD$. Ora pel teorema LXXVII. $\frac{A}{B} . \frac{D}{F} :: AF . BD$; adunque per lo stesso corollario XI. de' principj si avrà $\frac{AC}{BD} . \frac{C}{F} :: \frac{A}{B} . \frac{D}{F}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

SE $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{D}{F}$, sarà $\frac{AC}{BD}$ eguale a $\frac{C}{F}$, e se $\frac{AC}{BD}$ è uguale a $\frac{C}{F}$, sarà $\frac{A}{B}$ eguale a $\frac{D}{F}$. Tutto ciò in vigore del corollario X. de' principj.

TEOREMA LXXXI.

IL prodotto di quante, e quali grandezze *omogenee* si vogliano è uguale ad ogni altro prodotto delle medesime, qualunque ordine si osservi nel moltiplicarle insieme, purchè non si cangi il valore dell' unità *assunta*.

DIMOSTRAZIONE.

LA dimostrazione di questo teorema non differisce punto da quella del teorema XLV., nè qui fa d' uopo di replicarla:

Basta solo il considerare, che il prodotto di qualunque numero di grandezze omogenee equivale ad una *pura* grandezza omogenea, e il sostituire nell' accennata dimostrazione del teorema XLV. la voce *grandezza* in luogo di *proporzione*; in cambio poi di citare, come ivi si fa, il teorema XXIII., si citi il teorema LXXIX.; in vece del primo corollario del teorema XXIV. si citi il corollario del teorema LXXI., e in luogo del corollario VII. del teorema XXIV. si citi il teorema LXXII.; come pure in cambio del primo corollario del teorema XXIX. si citi il corollario II. del teorema LXXVII.

COROLLARIO I.

DUe prodotti formati di qualunque numero di grandezze omogenee sono eguali tra loro (purchè l' unità *assunta* in formarli sia la medesima, ovvero sempre eguale);

Se *tante* sono le grandezze, che formano il primo prodotto, *quante* quelle, che formano il secondo, e se in oltre a ciascuna delle grandezze formanti il primo prodotto corrisponde nel secondo una grandezza eguale, *benchè non sia disposta col medesimo ordine* tra le altre grandezze, che formano lo stesso prodotto.

La pruova di questo corollario è simile alla dimostrazione del teorema XLVI., purchè in luogo della voce *proporzione* sostituiscasi la voce *grandezza*, e in cambio de' teoremi XLII., e XLV. si citino respettivamente i teoremi LXXVI, e LXXXI.

Corollario II.

Ciò, che risulta dal moltiplicare una grandezza pel prodotto di più grandezze, è uguale al prodotto della grandezza moltiplicata, e di ciascuna delle grandezze *componenti* il prodotto *moltiplicante* (ordinatamente prese), v. g. $a(efg$, ec.) è uguale ad $a \times e \times f \times g$, ec., imperciocchè equivalendo il prodotto (efg, ec.) ad una grandezza *pura*.

Si à per questo teorema $a(efg$, ec.) eguale ad (efg, ec.)a; ma (efg, ec.)a è uguale ad $e \times f \times g \times$, ec.$a$, ed $e \times f \times g \times$, ec. $\times a$ è uguale ad $a \times e \times f \times g \times$, ec., adunque a (efg, ec.) è uguale ad $a \times e \times f \times g$, ec.

Corollario III.

Ciò, che risulta dal moltiplicare un prodotto di più grandezze per un altro prodotto di più grandezze, è uguale al prodotto di ciascuna delle grandezze *componenti* il prodotto moltiplicato, e di ciascuna delle grandezze *componenti* il prodotto moltiplicante (ordinatamente prese); v. g. (abc, ec.) (efg, ec.) è uguale ad $a \times b \times c$, ec. $\times e \times f \times g$, ec.

Imperciocchè considerando il prodotto (abc, ec.) come una grandezza *pura*, sarà pel corollario II. (abc, ec.) (efg, ec.) eguale ad (abc, ec.) $e \times f \times g$, ec. mentre la (a) del corollario II. può significare il prodotto (abc, ec.) del corollario presente; ma (abc, ec.) $e \times f \times g$, ec. è uguale ad $a \times b \times c$, ec. $\times e \times f \times g$, ec; adunque ($abc$, ec.) ($efg$, ec.) è uguale ad $a \times b \times c$, ec. $e \times f \times g$, ec.

Sco-

SCOLIO.

E' superfluo l' avvertire, che il prodotto *a* (*efg*, ec.) considerato nel corollario II. è uguale a qualunque prodotto delle grandezze *a*, *e*, *f*, *g*, ec. in qualunque modo disposte.

E che il prodotto (*abc*, ec.) (*efg*, ec.) considerato nel corollario III. è uguale a qualsivoglia prodotto delle grandezze *a*, *b*, *c*, ec. *e*, *f*, *g*, ec. disposte in qualsivoglia maniera: tutto ciò in virtù di questo teorema.

COROLLARIO IV.

CIò, che risulta dal moltiplicare tra loro quanti prodotti, e di quante grandezze si vogliano, può sempre ridursi al prodotto di ciascuna delle grandezze *componenti* i diversi prodotti, che si moltiplicano fra di loro; v. g. (*ab*, ec.) (*ef*, ec.) (*bi*, ec.) è uguale ad $a \times b$, ec. $\times e \times f$, ec. $\times b \times i$, ec.

Imperciocchè pel corollario III. (*ab*, ec.) (*ef*, ec.) è uguale ad $a \times b$, ec. $\times e \times f$, ec.; adunque (*ab*, ec.) (*ef*, ec.) (*bi*, ec.) è uguale ad ($a \times b$, ec. $\times e \times f$, ec.) ($b \times i$, ec.), e per lo stesso corollario III. quest' ultima espressione è uguale ad $a \times b$, ec. $\times e \times f$, ec. $\times b \times i$, ec.; adunque (*ab*, ec.) (*ef*, ec.) (*bi*, ec.) è uguale ad $a \times b$, ec. $\times e \times f$, ec. $\times b \times i$, ec. similmente si procederà per dimostrare gli altri casi più composti in infinito.

Qui, e in tutti gli altri casi, à luogo una riflessione simigliante a quella dello scolio, che precede il corollario presente.

COROLLARIO V.

SE cambiando in diverse maniere *tutte* le grandezze *componenti* un prodotto *totale*, formansi di esse grandezze diversi prodotti *parziali*, che presi insieme includono *tutte* le grandezze *componenti* il prodotto *totale*, e non ne includono altre; io dico, che *tutti* i suddetti prodotti *parziali* moltiplicati fra loro, formano un nuovo prodotto eguale al pristino prodotto totale.

Imperciocchè pe' corollarj II., III., e IV., che precedono moltiplicando insieme *tutti* questi prodotti *parziali*, ne nascerà un prodotto di *tutte* quelle grandezze, che compongono il prodotto *totale*, e questo nuovo prodotto sarà sempre eguale pel presente teorema al pristino prodotto *totale*. Un esempio particolare, e semplice renderà sensibile la verità di questo corollario, sia $abcdef$ il prodotto *totale*, e i prodotti parziali sieno (d), ed $(eafbc)$, ovvero (cba), ed (edf), oppure (da), ed (ab), ed (fc), e così, ec.

Io dico, che $abcdef = d(eafbc) = (cba)(edf) = (da)(eb)(fc)$, e così, ec.

COROLLARIO VI.

RAppresentino n, ed m due numeri intieri, e sia n maggiore di m, che può denotare anche l'unità.

Se due proporzioni $\frac{A}{D}$, $\frac{a}{d}$ sono composte di un numero n di proporzioni per ciascuna in maniera, che $(n - m)$ proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sieno eguali ad $(n - m)$ proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$.

Io dico, che $\frac{A}{D}$ sta ad $\frac{a}{d}$, come il prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sta al prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$.

Dimostrazione di questo corollario.

PEl corollario precedente (considerando in virtù del primo teorema le proporzioni come grandezze) il prodotto *totale* di tutte le proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ (cioè per la definizione XXIII., la proporzione $\frac{A}{D}$) equivale al prodotto *parziale* delle $(n - m)$ proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ *moltiplicato* per l'altro prodotto *parziale* delle m residue proporzioni componenti la stessa $\frac{A}{D}$: similmente, il prodotto totale di tutte le proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$ (cioè per la definizione XXIII.,

la

la proporzione $\frac{a}{d}$) equivále al prodotto *parziale* delle ($n - m$) proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$ *molriplicato* per l'altro prodotto *parziale* delle m residue proporzioni componenti la medesima $\frac{a}{d}$.

E qui si noti bene, che in vigore del citato precedente corollario le ($n - m$) proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ possono esser disposte nel loro prodotto *parziale*, e ancora nel prodotto *totale* delle proporzioni, il quale è equivalente alla $\frac{A}{D}$, possono, dico, esser disposte con qualunque ordine anche diverso dall'ordine, che le proporzioni ($n - m$) componenti di $\frac{a}{d}$ tengono nel loro prodotto *parziale*, e ancora nel prodotto *totale* delle n proporzioni, il quale è equivalente alla $\frac{a}{d}$.

Ora pe' due primi articoli dello scolio annesso alla definizione XXII., il prodotto delle ($n - m$) proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$, il prodotto delle m residue proporzioni componenti della medesima $\frac{A}{D}$, il prodotto delle ($n - m$) proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$, e il prodotto delle m residue proporzioni componenti della stessa $\frac{a}{d}$, equivagliono ad altrettante proporzioni *pure*.

Adunque $\frac{A}{D}$ può considerarsi come composta di due proporzioni, una delle quali è il prodotto delle ($n - m$) proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$, e l'altra è il prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$.

E parimente $\frac{a}{d}$ può considerarsi come composta di due proporzioni, una delle quali è il prodotto delle ($n - m$) proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$; l'altra lo è delle m residue componenti di $\frac{a}{d}$.

Ma per l'ipotesi, e pel teorema XLII., ovvero pel teorema XLVI., il prodotto delle ($n - m$) proporzioni componenti ti di $\frac{A}{D}$ è uguale al prodotto delle $(n-m)$ proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$.

Adunque pel teorema XXIV. $\frac{A}{D}$ sta ad $\frac{a}{d}$, come il prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sta al prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

LA proposizione generale espressa in questo corollario è importante pel molto uso, che può farsene in dimostrare le proposizioni della geometria sintetica. O' pertanto stimato a proposito di darne una dimostrazione chiara, ed esatta.

COROLLARIO VII.

SE nel caso del precedente corollario $\frac{A}{D}$ fosse eguale ad $\frac{a}{d}$, anche il prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$ sarebbe eguale al prodotto delle m residue proporzioni componenti di $\frac{a}{d}$, e ciò pel corollario X. de' principj.

SCOLIO.

I. QUando m rappresenta l' unità, in vece di dire ne' due antecedenti corollarj: il prodotto delle m residue proporzioni di $\frac{A}{D}$, ovvero di $\frac{a}{d}$, dovrà dirsi: la proporzione residua di $\frac{A}{D}$, ovvero respettivamente di $\frac{a}{d}$: e similmente, quando $(n-m)$ è uguale all' unità, in cambio di dire: il prodotto delle $(n-m)$ proporzioni componenti di $\frac{A}{D}$, ovvero di $\frac{a}{d}$, dovrà dirsi, la proporzione componente di $\frac{A}{D}$, ovvero di $\frac{a}{d}$.

II. Per additare con un esempio l' uso del corollario VII., e per conseguenza del corollario VI., da cui deriva, dimostrerò il seguente

TEO-

TEOREMA.

RAppresentino $A.B::C.D$, ed $a.b::c.d$ due proporzioni in modo, che sia $\frac{A}{D}=\frac{a}{d}$, e $\frac{B}{C}=\frac{b}{c}$; io dico, che sarà $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, cioè $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la definizione XXIII., e pel teorema XXII. la $\frac{A}{D}$ è composta delle tre proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{D}$, e la $\frac{a}{d}$ è composta delle tre proporzioni $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$; e per l' ipotesi la proporzione $\frac{B}{C}$ componente di $\frac{A}{D}$ è uguale alla proporzione $\frac{b}{c}$ componente di $\frac{a}{d}$.

Oltre di ciò $\frac{A}{D}$ per l' ipotesi è uguale ad $\frac{a}{d}$; adunque pel corollario VII. precedente, il prodotto *parziale* $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ delle due residue proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ componenti di $\frac{A}{D}$ è uguale al prodotto *parziale* $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ delle due residue proporzioni $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ componenti di $\frac{a}{d}$.

Ma pe' due primi articoli dello scolio annesso alla definizione XXII. i due prodotti $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$, ed $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ equivagliono a due proporzioni *pure*; ed essendo per l' ipotesi $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, ed $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ il prodotto $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ equivale alla proporzione duplicata di $\frac{A}{B}$, ovvero di $\frac{C}{D}$, come pure il prodotto $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ equivale alla proporzione duplicata di $\frac{a}{b}$, ovvero di $\frac{c}{d}$ per la definizione XXVIII.

Adunque per la definizione XXIX. $\frac{A}{B}$, ed $\frac{a}{b}$ sono proporzioni sudduplicate di proporzioni eguali, e così $\frac{C}{D}$, e $\frac{c}{d}$, e conseguentemente pel corollario IV. del teorema XLII. $\frac{A}{B}$ è ugua-

uguale ad $\frac{a}{b}$, come anche $\frac{C}{D}$ è uguale a $\frac{c}{d}$. Il che dovea dimostrarsi.

Questo teorema è lo stesso, che il lemma XIV., o sia ultimo del Mesolabo di Francesco Renato Slusio, dimostrato da me esattamente.

In quest' esempio, dei due numeri n, ed m espressi nel corollario VI., il primo è uguale a 3, e il secondo a 2, di modo che $(n-m)$ è uguale all' unità.

TEOREMA LXXXII.

SE la proporzione $\frac{A}{B}$ è in qualunque modo moltiplice di $\frac{E}{F}$, e la proporzione $\frac{C}{D}$ è ugualmente moltiplice di $\frac{G}{H}$; io dico, che $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ è ugualmente moltiplice di $\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$.

DIMOSTRAZIONE.

SIa $\frac{A}{B}=\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec. sarà per l' ipotesi $\frac{C}{D}=\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}$, ec., e pel corollario del teorema LXXII. si otterrà $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\left[\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}\right.$, ec.$\left.\right]\left[\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}\right.$, ec. $\left.\right]$, ma pel corollario II. del teorema LXXXI. $\left[\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}\right.$, ec.$\left.\right]\left[\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}\right.$, ec. $\left.\right]=\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec. $\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}$, ec.; adunque $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec. $\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}$, ec.

Di più pel teorema XLV. $\frac{E}{F}\times\frac{E}{F}$, ec. $\frac{G}{H}\times\frac{G}{H}$, ec. $=\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\times\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$, ec.; e perciò $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\times\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$, ec.; finalmente pel corollario V. dell' antecedente teorema $\left[\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\right]\left[\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\right]$ ec.$=\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\times\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$, ec.; adunque $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\left[\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\ \left[\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}\right]\right.$ ec.; e per conseguenza $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ è tanto moltiplice di $\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$, quanto $\frac{A}{B}$ di $\frac{E}{F}$, e $\frac{C}{D}$ di $\frac{G}{H}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEO-

Teorema LXXXIII.

Sia qualunque numero di proporzioni date; io dico, che la proporzione, la quale à per antecedente il prodotto di tutti gli antecedenti delle proporzioni date, *ordinatamente presi*, ed à per conseguente il prodotto di tutti i conseguenti delle medesime *ordinatamente presi*, è uguale al prodotto di tutte le proporzioni date: e dico insieme, che il prodotto di qualunque numero di proporzioni date è uguale ad una proporzione, che à per antecedente il prodotto di tutti gli antecedenti delle proporzioni date *ordinatamente presi*, ed à per conseguente il prodotto di tutti i conseguenti delle medesime *ordinatamente presi*.

Sieno per cagion d' esempio $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ec. le proporzioni date, dee provarsi, che $\frac{ace,\ ec.}{bdf,\ ec.} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, ec. e versa vice, che $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, ec. $= \frac{ace,\ ec.}{bdf,\ ec.}$

Dimostrazione.

I. Assumasi per unità la grandezza *arbitraria* z omogenea ai due termini a, e b, indi si consideri, che per la definizione XXXVI. sussistono queste due proporzionalità $z \,.\, a :: c \,.\, ac$, $z \,.\, b :: d \,.\, bd$; adunque pel teorema XLVIII. si à

$$(1)\quad \frac{z}{z} \,.\, \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} \,.\, \frac{ac}{bd};$$

ma per la definizione XXI. si vede essere

$$(2)\quad \frac{z}{z} \,.\, \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} \,.\, \frac{a}{b} \times \frac{c}{d};$$

adunque paragonando i quarti termini delle proporzionalità (1), e (2) si à pel teorema I. $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, ed $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

II. Similmente prendasi per unità la grandezza *arbitraria* y omogenea ai due termini ac, bd, e per la definizione XXXVI. sussisteranno queste due proporzionalità $y \,.\, ac :: e \,.\, ace$, ed $y \,.\, bd :: f \,.\, bdf$, e quindi si avrà pel medesimo teorema XLVIII.

$$(3)\quad \frac{y}{y} \,.\, \frac{ac}{bd} :: \frac{e}{f} \,.\, \frac{ace}{bdf};$$

ma per la definizione XXI., e per l'articolo II. dello ſcolio anneſſo alla definizione XXII.

$\frac{y}{y} \cdot \left[\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right] :: \frac{e}{f} \left[\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right] \times \frac{e}{f}$, cioè

(4) $\frac{y}{y} \cdot \left[\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right] :: \frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$;

adunque paragonando i quarti termini delle proporzionalità (3), e (4), il teorema I. farà conoſcere $\frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, ed anche $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$.

III. La ſteſſa maniera di arguire à manifeſtamente luogo in qualunque numero di proporzioni; *ancorchè i termini di alcune non foſſero omogenei ai termini delle altre*; adunque il teorema è generalmente vero.

SCOLIO.

BEnchè l' unità *aſſunta* ſia arbitraria, nientedimeno è ſtato neceſſario di aſſumere nel primo punto di queſta dimoſtrazione una medeſima unità z nel formare i due prodotti ac, bd; perchè dovendo queſti eſſer termini della proporzione $\frac{ac}{bd}$, e dovendo per conſeguenza eſſere paragonati inſieme, conveniva prendere una *medeſima* unità *arbitraria* per formarli ambedue, in conformità dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXVI., e quindi dalle due proporzionalità $z . a :: c . ac$, e $z . b :: d . bd$, ne è riſultata una terza proporzionalità $\frac{z}{z} . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$ tale, che il ſuo primo termine è una proporzione d'egualità; di modo che in virtù delle definizioni XXI., e XXII. il ſuo quarto termine è uguale al prodotto del ſecondo termine moltiplicato pel terzo.

Per la ſteſsa ragione ſi è aſsunta nel ſecondo punto una *medeſima* unità *arbitraria* y nel formare i due altri prodotti ace, bdf, e ſimilmente dovrà operarſi ne' caſi ſimiglianti.

Si noti però, che ſe le grandezze a, b, c, d, e, f foſsero tutte omogenee, potrebbe la y eſser la ſteſsa, che la z, benchè per altro ciò non ſia neceſsario a tenore dell' articolo VIII. dello ſcolio anneſso alla definizione XXXVI., e in effetti tanto to $\frac{z}{z}$, quanto $\frac{y}{y}$ sono proporzioni d'egualità, e dalla proporzionalità $\frac{y}{y} . \frac{ac}{bd} :: \frac{e}{f} . \frac{ace}{bdf}$ si deduce egualmente, che $\frac{ace}{bdf}$ in virtù delle definizioni XXI., e XXII. è il prodotto di $\frac{ac}{bd}$ moltiplicato per $\frac{e}{f}$.

COROLLARIO I.

I Termini delle proporzioni date sieno tutti omogenei, e l'unità *assunta* nel formare il prodotto dei loro antecedenti, e il prodotto dei loro conseguenti sia sempre la medesima; io dico, che se gli antecedenti delle proporzioni date si disporranno con qualunque ordine nel loro prodotto, e i conseguenti delle proporzioni date si disporranno anch' essi con qualunque ordine nel loro prodotto; la proporzione, che à il primo di questi prodotti al secondo, sarà sempre eguale al prodotto delle proporzioni date *ordinatamente disposte*;

Imperciocchè pel teorema LXXXI., qualunque ordine si osservi nel moltiplicare insieme un certo numero di grandezze omogenee, il prodotto, che ne risulta è sempre eguale; laonde il prodotto degli antecedenti, qualunque siasi la loro disposizione, è sempre eguale al prodotto dei medesimi antecedenti *ordinatamente presi*; e il prodotto dei conseguenti, qualunque siasi la loro disposizione, è sempre eguale al prodotto de' medesimi conseguenti *ordinatamente presi*; adunque pel corollario VIII. de' principj la proporzione, che à *qualunque* prodotto degli antecedenti verso *qualsivoglia* prodotto de' conseguenti, è sempre eguale alla proporzione, che à il prodotto degli antecedenti *ordinatamente presi* verso il prodotto dei conseguenti ordinatamente presi, e in conseguenza pel corollario XI. de' principj la proporzione, che à *qualunque* prodotto degli antecedenti verso *qualsivoglia* prodotto de' conseguenti, è sempre eguale al prodotto delle proporzioni date.

Mi varrò dell' esempio, di cui mi sono servito nel presente teorema: essendosi provato nella dimostrazione di esso, che $\frac{ace}{bdf}$ è uguale ad $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, e provandosi in questo corollario, che tanto $\frac{cae}{bfd}$, quanto $\frac{eca}{fdb}$ ſono eguali ad $\frac{ace}{bdf}$, ne ſegue pel citato corollario XI. de' principj, che tanto $\frac{cae}{bfd}$, quanto $\frac{eca}{fdb}$, ec. ſono eguali ad $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$.

SCOLIO.

E' Viſibile, che il preſente teorema, e queſto corollario contengono diverſe maniere di moltiplicare tra loro molte proporzioni.

COROLLARIO II.

SE nel prodotto di qualunque numero di proporzioni, che abbiano omogenei tutti i loro termini, v. g. in $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, alcune, o tutte le proporzioni componenti ſi faranno tra loro un reciproco baratto de' proprj antecedenti, ovvero de' proprj conſeguenti, in modo che gli antecedenti delle une paſſino *vicendevolmente* ad eſſere antecedenti delle altre, ovvero i conſeguenti delle une divengano *vicendevolmente* conſeguenti delle altre, come circa il preſente eſempio avviene in $\frac{c}{b} \times \frac{e}{d} \times \frac{a}{f}$, ovvero in $\frac{a}{d} \times \frac{c}{f} \times \frac{e}{b}$, oppure in $\frac{c}{b} \times \frac{a}{d} \times \frac{e}{f}$, ec.;

Io dico, che ciaſcuno de' nuovi prodotti di proporzioni, i quali riſultano da queſto reciproco baratto, ec. è uguale al *primo* prodotto di proporzioni *ordinatamente preſe*, cioè nel preſente eſempio al primo prodotto $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, perchè in virtù di queſto teorema ciaſcuno de' *nuovi* prodotti di proporzioni, ec. è uguale alla proporzione, che paſſa tra il prodotto di tutti gli antecedenti di eſſe proporzioni preſi col loro ordine, e il prodotto di tutti i conſeguenti delle medeſime preſi con l' ordine loro, ma pel precedente corollario I., ciaſcun prodotto degli antecedenti ſuddetti verſo ciaſcun prodotto de' ſuddetti conſeguenti à una proporzione eguale al primo prodotto di proporzioni *ordinatamente preſe*, cioè nel preſente eſempio, al *primo* prodotto di proporzioni $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$; adunque pel corollario XI. de' de' principj ciascuno de' *nuovi* prodotti di proporzioni, ec. è uguale al *primo* prodotto di proporzioni *ordinatamente prese*, cioè nel presente esempio tanto $\frac{c}{b} \times \frac{e}{d} \times \frac{a}{f}$, quanto $\frac{a}{d} \times \frac{c}{f} \times \frac{e}{b}$ ed anche $\frac{c}{f} \times \frac{a}{d} \times \frac{e}{b}$, ec. sono eguali ad $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$.

Che poi sieno eguali anche tra loro è cosa così chiara in virtù del corollario XI. de' principj, ed anche del corollario I. del teorema II., che non accade esprimerlo, siccome nel precedente corollario non si è espressa una simigliante facilissima riflessione.

Corollario III.

IN virtù del reciproco baratto, che far si possono de' loro antecedenti, ovvero de' loro conseguenti le proporzioni, che compongono un prodotto, può accadere, che nel *nuovo* prodotto s' incontrino delle proporzioni d' egualità formate dagli *accozzamenti d' antecedenti, o di conseguenti tra di loro eguali*; in tal caso il *nuovo* prodotto di proporzioni sarà eguale ad un *terzo* prodotto di proporzioni, più semplice, in cui manchinò quelle proporzioni d' egualità, e solamente vi restino le altre proporzioni componenti, le quali non sono proporzioni d' egualità, e ciò in vigore del corollario III. del teorema XLVI.; adunque pel corollario XI. de' principj anche il *primo* prodotto di proporzioni sarà eguale al *terzo* prodotto di proporzioni, che è *più semplice*.

V. g. il seguente *primo* prodotto di proporzioni $\frac{a}{b} \times \frac{c}{a} \times \frac{e}{f} \times \frac{q}{e}$ può cangiarsi pel precedente corollario II. in quest' altro *secondo* prodotto ad esso eguale $\frac{c}{b} \times \frac{a}{a} \times \frac{e}{e} \times \frac{q}{f}$, che essendo eguale in virtù del corollario III. del teorema XLVI. al terzo prodotto $\frac{c}{b} \times \frac{q}{f}$ *più semplice*, ne segue pel corollario XI. de' principj, che il primo prodotto $\frac{a}{b} \times \frac{c}{a} \times \frac{e}{f} \times \frac{q}{e}$ sarà eguale al *terzo* prodotto più semplice $\frac{c}{b} \times \frac{q}{f}$.

Co-

COROLLARIO IV.

SE una proporzione, che io chiamerò *primitiva* à il suo antecedente formato dalla moltiplicazione di qualunque numero di grandezze omogenee, ed à il suo conseguente formato d' egual numero di grandezze parimente omogenee, v. g. $\frac{ace}{bdf}$; io dico, che la medesima proporzione *primitiva* è uguale ad una proporzione *composta*, che io chiamerò *secondaria*, v. g. ad $\frac{a}{d} \times \frac{c}{b} \times \frac{e}{f}$, ovvero a $\frac{c}{d} \times \frac{a}{f} \times \frac{e}{b}$, oppure a $\frac{c}{f} \times \frac{e}{b} \times \frac{a}{d}$, ec. di tale natura:

Che il numero delle proporzioni, le quali compongono la proporzione *secondaria*, sia eguale al numero delle grandezze, che formano colla loro moltiplicazione l' antecedente, oppure il conseguente (il che torna allo stesso) della *primitiva*; e che tutte le grandezze, che formano colla loro moltiplicazione l' antecedente della *primitiva*, sieno distribuite negli antecedenti delle proporzioni, le quali compongono la *secondaria*; come pure tutte le grandezze, che colla loro moltiplicazione formano il conseguente della *primitiva*, sieno distribuite nei conseguenti delle proporzioni, che compongono la *secondaria*, in modo che tra le grandezze, le quali formano l' antecedente della *primitiva*, niuna ve ne sia, che non costituisca l' antecedente di una delle proporzioni *componenti* la *secondaria*, e che tra le grandezze, le quali formano il conseguente della *primitiva*, niuna ve ne sia, che non costituisca il conseguente di una delle proporzioni *componenti* la *secondaria*: niente importando qual ordine serbino tra loro nella proporzione *secondaria* le proporzioni, che la compongono, nè a quale di esse proporzioni *componenti* tocchi per antecedente, ovvero per conseguente più l' una, che l' altra grandezza, purchè sia una delle enunciate;

Imperciocchè pel teorema presente la proporzione *secondaria* equivale ad una *terza* proporzione, la quale à per suo antecedente il prodotto degli antecedenti (*ordinatamente presi*) di quelle proporzioni, che compongono la *secondaria*, ed à per

suo

ſuo conſeguente il prodotto de' conſeguenti (*ordinatamente preſi*) di quelle proporzioni, che compongono la *ſecondaria*, ma pel teorema LXXXI. un tale antecedente della *terza* proporzione è uguale all' antecedente della *primitiva*, e un tal conſeguente della *terza* proporzione è uguale al conſeguente della *primitiva*; adunque pel corollario VIII. de' principj la terza proporzione è uguale alla *primitiva*, e conſeguentemente pel corollario XI. de' principj la proporzione *ſecondaria* è uguale alla *primitiva*.

V. g. nell' eſempio addotto di ſopra, in cui $\frac{ace}{bdf}$ è la proporzione *primitiva*, la proporzione *ſecondaria* $\frac{a}{d} \times \frac{c}{b} \times \frac{e}{f}$ è uguale alla *terza* proporzione $\frac{ace}{dbf}$ per queſto teorema; ſiccome la proporzione *ſecondaria* $\frac{c}{d} \times \frac{a}{f} \times \frac{e}{b}$ è uguale alla *terza* proporzione $\frac{cae}{dfb}$; e la proporzione *ſecondaria* $\frac{c}{f} \times \frac{e}{b} \times \frac{a}{d}$ è uguale alla terza proporzione $\frac{cea}{fbd}$, e così, ec.; ma pel teorema LXXXI. ciaſcuna delle ſopraſcritte *terze* proporzioni à il ſuo antecedente eguale all' antecedente *ace* della *primitiva*, ed à il ſuo conſeguente eguale al conſeguente *bdf* della *primitiva*; adunque pel corollario VIII. de' principj ciaſcuna delle *terze* proporzioni ſuddette è uguale alla proporzione *primitiva* $\frac{ace}{bdf}$; adunque pel corollario XI. de' principj ciaſcuna delle ſoprannotate proporzioni *ſecondarie* è uguale alla *primitiva*.

COROLLARIO V.

SE tra le grandezze, che colla loro moltiplicazione formano l' antecedente della proporzione *primitiva*, e tra le grandezze, che colla loro moltiplicazione formano il conſeguente della medeſima proporzione *primitiva* ſi trovano delle grandezze tra loro eguali;

Io dico, che la proporzione *primitiva* è uguale ad una nuova proporzione, che à per ſuo antecedente il prodotto di tutte le grandezze, che formano l' antecedente della *primitiva*, ed ed à per suo conseguente il prodotto di tutte le grandezze, che formano il conseguente della *primitiva*; a riserva però di quelle grandezze tra loro eguali, che si trovano nell' *antecedente*, e *insieme* nel *conseguente* della proporzione primitiva; poichè queste istesse tra loro eguali non debbono entrare (secondo questo corollario) ne' prodotti respettivi, che formano l'antecedente, e il conseguente della *nuova* proporzione, e si considerano, come se non fossero nella proporzione primitiva.

Sia per cagion d'esempio la proporzione *primitiva* $\frac{acefdafg}{baefpqa}$, nel di cui antecedente la a è contenuta due volte, e due volte la f, e nel di cui conseguente la a è contenuta due volte, e una volta la f; io dico, che la suddetta proporzione *primitiva* è uguale a questa *nuova* proporzione $\frac{cdfg}{bepq}$, che à i suoi due termini formati dalle stesse grandezze, che formano i due termini della *primitiva*, a riserva di a, che manca due volte, e di f, che manca una volta in ambo i termini della *nuova* proporzione.

DIMOSTRAZIONE.

PEl precedente corollario la proporzione *primitiva*, v. g. $\frac{acfdafg}{baefpqa}$ è uguale ad una proporzione composta *secondaria*, v. g. a $\frac{c}{b} \times \frac{d}{e} \times \frac{f}{p} \times \frac{g}{q} \times \frac{a}{a} \times \frac{a}{a} \times \frac{f}{f}$, tale, che abbia tra le sue proporzioni *componenti* tante proporzioni d'egualità, quante volte s'incontrano nell'antecedente insieme, e nel conseguente della *primitiva* le grandezze tra loro eguali:

E in virtù del corollario III. del teorema XLVI. la proporzione *secondaria* è uguale ad un' altra proporzione *composta* più *semplice*, v. g. a $\frac{c}{b} \times \frac{d}{e} \times \frac{f}{p} \times \frac{g}{q}$, in cui manchino le proporzioni d'egualità $\frac{a}{a}$, ed $\frac{f}{f}$, le quali anno luogo tra quelle, che compongono la proporzione *secondaria*; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione *primitiva* è uguale alla suddetta proporzione *composta* più *semplice*;

Ma per questo teorema, e pel suo primo corollario, la medesima

desima

desima proporzione *composta più semplice* è uguale ad una nuova proporzione, v. g. a $\frac{cdfg}{bepq}$, che à per suo antecedente il prodotto degli antecedenti di quelle proporzioni, che compongono la stessa proporzione *composta più semplice*, ed à per suo conseguente il prodotto dei conseguenti delle medesime proporzioni, che compongono la detta proporzione *composta più semplice*; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione *primitiva*, v. g. $\frac{acfdafg}{baefpq}$ è uguale a questa *nuova* proporzione più semplice, v. g. a $\frac{cdfg}{bepq}$.

I medesimi raziocinj si applicano evidentemente a qualunque caso, che possa esser compreso nel presente corollario; adunque questo medesimo corollario è generalmente vero.

COROLLARIO VI.

LA proporzione di due termini fra loro distanti d' una progressione geometrica è uguale alla proporzione, che anno tra loro i termini prossimi moltiplicati *tante* volte per se medesimi, *quanti* sono i termini, che si frappongono tra i due termini distanti. V. g. nella progressione A, B, C, D, E, F, ec. $\frac{A}{D}$ è uguale ad $\frac{AAA}{BBB}$;

Imperciocchè pel teorema LXIX. $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$; ma pel teorema presente $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{AAA}{BBB}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{D} = \frac{AAA}{BBB}$.

Così, e per la stessa ragione $\frac{A}{D} = \frac{BBB}{CCC} = \frac{CCC}{DDD}$.

COROLLARIO VII.,

Che contiene una maniera di dividere qualunque proporzione per un' altra.

SE una proporzione data dovrà dividersi per un' altra, v. g. $\frac{a}{b}$ per $\frac{p}{q}$, prendasi il prodotto dell' antecedente della *dividenda*

 molti-

moltiplicato pel conseguente della *dividente*, indi prendasi il prodotto del conseguente della *dividenda* moltiplicato per l'antecedente della *dividente*; io dico, che il primo di questi due prodotti verso il secondo, cioè nel caso nostro aq verso bp à una proporzione, che è uguale al quoziente di $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{p}{q}$;

Imperciocchè pel teorema XLIX. $\frac{a}{b}$ moltiplicata per $\frac{q}{p}$ è il quoziente di $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{p}{q}$; ma per questo teorema $\frac{aq}{bp}$ è uguale ad $\frac{a}{b}$ moltiplicata per $\frac{q}{p}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{aq}{bp}$ è uguale al quoziente di $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{p}{q}$.

COROLLARIO VIII.

I Termini di quante proporzionalità si vogliano moltiplicati per ordine fra loro, formano una nuova proporzionalità.

Sieno le proporzionalità $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{f}{g}=\frac{h}{i}$; $\frac{l}{m}=\frac{n}{o}$, ec. sarà pel teorema XLII. $\frac{a}{b}\times\frac{f}{g}\times\frac{l}{m}$, ec. $=\frac{c}{d}\times\frac{h}{i}\times\frac{n}{o}$, ec.; ma per questo teorema $\frac{afl\text{, ec.}}{bgm\text{, ec.}}=\frac{a}{b}\times\frac{f}{g}\times\frac{l}{m}$, ec., e $\frac{chn\text{, ec.}}{dio\text{, ec.}}=\frac{c}{d}\times\frac{h}{i}\times\frac{n}{o}$, ec.; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{afl\text{, ec.}}{bgm\text{, ec.}}=\frac{chn\text{, ec.}}{dio\text{, ec.}}$.

SCOLIO.

I Due prodotti af, bg sono paragonati tra loro, perchè si à $\frac{af}{bg}=\frac{a}{b}\times\frac{f}{g}$; adunque per l'articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXVI., i due suddetti prodotti debbono essere formati con una *medesima* unità *assunta*.

Per la stessa ragione i due prodotti $\frac{ch}{di}$ debbono formarsi con una *medesima* unità arbitraria; non è però necessario, che essa sia quella medesima, che serve per la formazione di af, e di bg; anzi questo neppure è possibile, allorchè i termini di $\frac{a}{b}$ non sono omogenei ai termini di $\frac{c}{d}$, e ciò pel primo articolo del citato scolio: similmente i due prodotti afl, e bgm sono para-

paragonati insieme, poichè si à $\frac{afl}{bgm} = \frac{a}{b} \times \frac{f}{g} \times \frac{l}{m}$; adunque debbono esser formati con una *medesima* unità *arbitraria*; ma non è punto necessario, che questa sia quella, che si assunse per formare i due prodotti *af*, e *bg*: e questo per l' articolo VII. dell' accennato scolio.

Per la stessa ragione i due prodotti *chn*, e *dio* debbono concepirsi formati con una *medesima* unità *assunta*, ma senza che sia necessario di assumer quella, che servì per formare i prodotti *ch*, e *di*.

Simili riflessioni far si debbono allorchè i prodotti costano di maggior numero di grandezze.

Altra dimostrazione di questo corollario.

SEcondo l' ipotesi $a.b::c.d$, ed $f.g::h.i$, ma pel teorema LXXII. $af.bf::a.b$, come pure $ch.dh::c.d$; adunque pel corollario XII. de' principj $af.bf::ch.dh$;

Di più pel teorema LXXIII. $bf.bg::f.g$; e parimente $dh.di::h.i$; adunque pel corollario XII. de' principj $bf.bg::dh.di$.

Si anno per tanto queste due proporzionalità $af.bf::ch.dh$, e $bf.bg::dh.di$; adunque per l' egualità ordinata $af.bg::ch.di$.

Sia in oltre $l.m::n.o$, si proverà collo stesso raziocinio, che $(af)l.(bg)m::(ch)n.(di)o$, vale a dire, che $afl.bgm::chn.dio$.

E così in qualunque numero di proporzioni.

SCOLIO.

PEl corollario VIII. de' principj sussiste questa proporzionalità:

(1) $p.q::p.q$:

adunque supposta quest' altra proporzionalità

(2) $a.b::c.d$,

ne segue in virtù del presente corollario VIII., che moltiplicando per ordine i termini della proporzionalità (1) pe' termini della proporzionalità (2), ovvero i termini della proporzionalità (2) pe' termini della proporzionalità (1), si avranno respettivamente le due proporzionalità infrascritte:

$pa.qb::pc.qd$

$ap.bq::cp.dq$.

 Co-

COROLLARIO IX.

SE quattro grandezze ſono proporzionali, anche le loro dignità *ſimili* di qualunque *grado* ſaranno proporzionali, purchè ſi prendano con lo ſteſſo ordine, con cui ſtanno diſpoſte le quattro grandezze proporzionali, delle quali eſſe ſono dignità *ſimili*;

Imperciocchè moltiplicando tante volte, quante ſi vorrà, per loro medeſimi i quattro termini della ſuddetta proporzionalità, egli è appunto, come ſi moltiplicaſſero per ordine tra loro i termini d' altrettante proporzionalità, onde per l' antecedente corollario ne riſulterà una nuova proporzionalità, i termini della quale ſaranno le dignità *ſimili* dei quattro termini della prima proporzionalità.

COROLLARIO X.

SE quattro grandezze ſono proporzionali, anche le loro radici *ſimili* di qualſivoglia *grado* ſono proporzionali, purchè ſi prendano con lo ſteſſo ordine, con cui ſtanno diſpoſte le quattro grandezze proporzionali, delle quali eſſe ſono radici.

Abbiaſi per cagion d' eſempio queſta proporzionalità $A . B :: C . D$, e le radici, v. g. terze de' ſuoi termini ſieno reſpettivamente a, b, c, d, dee provarſi, che $a . b :: c . d$.

Eſſendo per l' ipoteſi $aaa = A$, $bbb = B$, $ccc = C$, e $ddd = D$, ſarà pel corollario VIII. de' principj $\frac{aaa}{bbb} = \frac{A}{B}$, e $\frac{ccc}{ddd} = \frac{C}{D}$; ma per queſto teorema $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb}$, e $\frac{c}{d} \times \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{ccc}{ddd}$; adunque per la definizione XXXI. $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ ſono radici *ſimili* delle due proporzioni reſpettive $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$; ma ſi ſuppone $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; adunque pel corollario II. del teorema XLII., anche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

E' viſibile, che la ſteſſa ragione egualmente milita per tutte le radici *ſimili* di qualſivoglia *grado* delle quattro grandez-

ze

ze proporzionali $A.B::C.D$; adunque il presente corollario è generalmente vero.

Altra dimostrazione di questo corollario.

LE lettere minori a, b, c, d conservino la significazione ad esse attribuita nella dimostrazione precedente: è chiaro pel postulato, che vi è una grandezza (la quale chiamisi t) tale, che salva questa proporzionalità $a.b::c.t$, i tre primi termini di cui elevati a quella dignità, che richiedesi per formare i prodotti A, B, C, de' quali essi sono le respettive radici *simili*, e parimente il quarto termine t alzato ad una dignità dello stesso *grado*, finchè ne risulti un quarto prodotto T, somministrano pel precedente corollario IX. quest' altra proporzionalità $A.B::C.T$; ma per l' ipotesi si à eziandio $A.B::C.D$; adunque pel teorema I., i quarti termini d' ambedue quest' ultime proporzionalità sono eguali, cioè $T=D$, ed essendo per la supposizione t, e d radici *simili* delle respettive grandezze eguali T, e D, anche t è uguale a d pel corollario II. del teorema LXXVI.; e perciò la sostituzione di d in vece della sua eguale t nella proporzionalità $a.b::c.t$, farà conoscere, in virtù del corollario IX. de' principj, che sussiste questa proporzionalità $a.b::c.d$.

COROLLARIO XI.

SE quattro grandezze sono proporzionali, anche le loro radici *simili* di *qualsivoglia grado*, venendo alzate ad una dignità di qualunque *grado*, e prese con lo stess' ordine, sono proporzionali, purchè tutte quattro le suddette radici sieno elevate alla medesima dignità.

COROLLARIO XII.

E Se quattro grandezze sono proporzionali, prendendo le radici di qualsivoglia *grado* delle loro radici *simili* (di qualunque *grado* sieno ancor queste), saranno proporzionali anche le *nuove radici* delle radici; purchè ancora le medesime *nuove radici* sieno *simili tra loro*, e disposte col medesimo ordine.

Sco-

SCOLIO.

IL primo di questi due ultimi corollarj è manifestamente compreso nel corollario IX., e il secondo è compreso nel corollario X.; ciò è chiaro; perchè nello stesso corollario X. si è dimostrato, che a, b, c, d, cioè le radici *simili* di A, B, C, D (grandezze proporzionali) sono anch' esse proporzionali, e perciò le radici simili, ec. d' altre radici, ec. saranno radici *simili* di grandezze proporzionali.

COROLLARIO XIII.

LA proporzione $\frac{BB}{AA}$ è duplicata di $\frac{B}{A}$; la proporzione $\frac{BBB}{AAA}$ è triplicata di $\frac{B}{A}$; la proporzione $\frac{BBBB}{AAAA}$ è quadruplicata di $\frac{B}{A}$, e similmente in infinito;

Imperciocchè pel teorema presente $\frac{BB}{AA}=\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}$; $\frac{BBB}{AAA}=\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}$; $\frac{BBBB}{AAAA}=\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}$, e similmente, ec.; adunque per la definizione XXVIII. $\frac{BB}{AA}$ è duplicata di $\frac{B}{A}$, $\frac{BBB}{AAA}$ è triplicata di $\frac{B}{A}$; $\frac{BBBB}{AAAA}$ è quadruplicata di $\frac{B}{A}$, e similmente, ec.

TEOREMA LXXXIV.

SE la proporzione $\frac{A}{B}$ è in qualunque modo moltiplice di $\frac{C}{D}$; io dico, che la proporzione $\frac{B}{A}$ sarà egualmente moltiplice della proporzione $\frac{D}{C}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la supposizione $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$, ec.; ma pel teorema LXXXIII. $\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$, ec. è uguale a $\frac{CCC,\ ec.}{DDD,\ ec.}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B}=\frac{CCC,\ ec.}{DDD,\ ec.}$, e *convertendo* $\frac{B}{A}=\frac{DDD,\ ec.}{CCC,\ ec.}$ ma pel teorema LXXXIII. $\frac{DDD,\ ec.}{CCC,\ ec.}=\frac{D}{C}\times\frac{D}{C}\times\frac{D}{C}$, ec.; adunque $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}\times\frac{D}{C}\times\frac{D}{C}$, ec. pel corollario XI. de' principj. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LXXXV.

Sia la proporzione $\frac{A}{B}$ in qualunque modo moltiplice di $\frac{B}{C}$, e la proporzione $\frac{B}{D}$ sia egualmente moltiplice di $\frac{C}{D}$; io dico, che la proporzione $\frac{A}{D}$ è ugualmente moltiplice di $\frac{B}{D}$.

DIMOSTRAZIONE.

Sia $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}\times\frac{B}{C}\times\frac{B}{C}$, ec. sarà per la suppofizione $\frac{B}{D}=\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$, ec. ma pel teorema LXXXIII. $\frac{B}{C}\times\frac{B}{C}\times\frac{B}{C}$, ec. $=\frac{BBB,\text{ ec.}}{CCC,\text{ ec.}}$, e $\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$, ec. $=\frac{CCC,\text{ ec.}}{DDD,\text{ ec.}}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B}=\frac{BBB,\text{ ec.}}{CCC,\text{ ec.}}$, e $\frac{B}{D}=\frac{CCC,\text{ ec.}}{DDD,\text{ ec.}}$, e per l' egualità ordinata $\frac{A}{D}=\frac{BBB,\text{ ec.}}{DDD,\text{ ec.}}$, ma pel teorema LXXXIII. $\frac{BBB,\text{ ec.}}{DDD,\text{ ec.}}=\frac{B}{D}\times\frac{B}{D}\times\frac{B}{D}$, ec.; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{D}=\frac{B}{D}\times\frac{B}{D}\times\frac{B}{D}$, ec. vale a dire $\frac{A}{D}$ è tanto moltiplice di $\frac{B}{D}$, quanto $\frac{A}{B}$ di $\frac{B}{C}$, e $\frac{B}{D}$ di $\frac{C}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LXXXVI.

L' Espressione *BBB*, ec. rappresenti qualsivoglia dignità di *B*, e l' espressioni *AAA*, ec. *GGG*, ec. *EEE*, ec. rappresentino dignità simili respettivamente di *A*, di *G*, e di *E*.

Sia la proporzione di *P* verso *Q* eguale alla proporzione di $\frac{BBB,\text{ ec.}}{AAA,\text{ ec.}}$ verso $\frac{GGG,\text{ ec.}}{EEE,\text{ ec.}}$; io dico, che la proporzione di *P* verso *Q* è *tanto* moltiplice della proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{G}{E}$, *quanta* è la dignità *BBB*, ec. di *B*.

DIMOSTRAZIONE.

Pel teorema LXXXIII. $\frac{BBB,\text{ ec.}}{AAA,\text{ ec.}}=\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}\times\frac{B}{A}$, ec. e $\frac{GGG,\text{ ec.}}{EEE,\text{ ec.}}=\frac{G}{E}\times\frac{G}{E}\times\frac{G}{E}$, ec.

Per l' ipotesi P sta a Q, come $\frac{BBB\text{, ec.}}{AAA\text{, ec.}}$ sta a $\frac{GGG\text{, ec.}}{EEE\text{, ec.}}$; adunque pel corollario IX. de' principj

(1) P sta a $Q :: \frac{B}{A} \times \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$, ec. sta a $\frac{G}{E} \times \frac{G}{E} \times \frac{G}{E}$, ec.

si designi per maggior chiarezza, la $\frac{B}{A}$ con la lettera r, e la $\frac{G}{E}$ con la lettera t, e sarà $\frac{B}{A} \times \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$, ec. $= rrr$, ec. siccome $\frac{G}{E} \times \frac{G}{E} \times \frac{G}{E}$, ec. sarà eguale a ttt, ec. di modo che la proporzionalità (1) prenderà questa sembianza $\frac{P}{Q} = \frac{rrr\text{, ec.}}{ttt\text{, ec.}}$; ma pel teorema LXXXIII. $\frac{rrr\text{, ec.}}{ttt\text{, ec.}} = \frac{r}{t} \times \frac{r}{t} \times \frac{r}{t}$, ec.; adunque $\frac{P}{Q}$ è uguale ad $\frac{r}{t} \times \frac{r}{t} \times \frac{r}{t}$, ec. pel corollario XI. de' principj, cioè $\frac{P}{Q}$ è *tanto* moltiplice di $\frac{r}{t}$ *quanta* è la dignità BBB, ec. di B, ed essendosi rappresentata con $\frac{r}{t}$ la proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{G}{E}$, ne siegue, che la proporzione di P verso Q è tanto moltiplice della proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{G}{E}$, quanta è la dignità BBB di B. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LXXXVII.

SE la proporzione $\frac{A}{B}$ è duplicata della proporzione $\frac{C}{D}$, e la proporzione $\frac{C}{D}$ è duplicata della proporzione $\frac{E}{F}$; io dico, che $\frac{A}{B}$ è quadruplicata di $\frac{E}{F}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipotesi $\frac{C}{D} = \frac{E}{F} \times \frac{E}{F}$, e pel teorema LXXXIII. $\frac{E}{F} \times \frac{E}{F} = \frac{EE}{FF}$; adunque $\frac{C}{D} = \frac{EE}{FF}$.

Per l' ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$, ed essendo pel teorema XLII. $\frac{C}{D} \times \frac{C}{D} = \frac{EE}{FF} \times \frac{EE}{FF}$, è ancora $\frac{A}{B} = \frac{EE}{FF} \times \frac{EE}{FF}$: di più pel teorema LXXXIII. $\frac{EE}{FF} \times \frac{EE}{FF} = \frac{(EE)\,(EE)}{(FF)\,(FF)}$.

E per-

E perciò in virtù del corollario XI. de' principj la stessa $\frac{A}{B} = \frac{(EE)}{(FF)} \frac{(EE)}{(FF)}$; ma pel corollario IV. del teorema LXXXI. $(EE)(EE) = EEEE$, ed $(FF)(FF) = FFFF$; adunque pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{B} = \frac{EEEE}{FFFF}$, cioè pel corollario XIII. del teorema LXXXIII. $\frac{A}{B}$ è quadruplicata di $\frac{E}{F}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA LXXXVIII.

SE la proporzione $\frac{A}{B}$ è quadruplicata di $\frac{C}{D}$, e la proporzione $\frac{E}{F}$ è duplicata di $\frac{C}{D}$; io dico, che $\frac{A}{B}$ è duplicata di $\frac{E}{F}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. PEr l' ipotesi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{C}{D} \times \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$, e pel teorema LXXXII. $\frac{C}{D} \times \frac{C}{D} \times \frac{C}{D} \times \frac{C}{D} = \frac{CCCC}{DDDD}$; adunque $\frac{A}{B} = \frac{CCCC}{DDDD}$ pel corollario XI. de' principj.

Pel corollario IV. del teorema LXXXI. $(CC)(CC) = CCCC$, e $(DD)(DD) = DDDD$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{CCCC}{DDDD} = \frac{(CC)(CC)}{(DD)(DD)}$, e conseguentemente pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} = \frac{(CC)}{(DD)} \frac{(CC)}{(DD)}$: in oltre pel teorema LXXXIII. $\frac{(CC)}{(DD)} \frac{(CC)}{(DD)} = \frac{CC}{DD} \times \frac{CC}{DD}$; e perciò in virtù del corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} = \frac{CC}{DD} \times \frac{CC}{DD}$.

II. Per l' ipotesi $\frac{E}{F} = \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$, e pel teorema LXXXIII. $\frac{C}{D} \times \frac{C}{D} = \frac{CC}{DD}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{E}{F} = \frac{CC}{DD}$, ma nel primo punto si è provato essere $\frac{A}{B} = \frac{CC}{DD} \times \frac{CC}{DD}$; adunque in virtù del corollario II. del teorema XLIII. $\frac{A}{B} = \frac{E}{F} \times \frac{E}{F}$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I Due precedenti teoremi, benchè semplicissimi, si sono qui posti, perchè le loro dimostrazioni fanno conoscere la maniera con cui possono dimostrarsi infiniti teoremi consimili, i quali potrebbero comprendersi nei due seguenti teoremi generali, intelligibili ai periti del calcolo degli *esponenti*.

Il primo dunque degl' infrascritti teoremi à relazione al teorema LXXXVII., e il secondo al teorema LXXXVIII.

TEOREMA GENERALE.

LE lettere *m*, ed *n* designino due numeri interi, e positivi ad arbitrio;

Io dico, che se la proporzione $\frac{A}{B}$ è *mplicata* della proporzione $\frac{C}{D}$, e la proporzione $\frac{C}{D}$ è *nplicata* della proporzione $\frac{E}{F}$, la stessa $\frac{A}{B}$ sarà *mnplicata* di $\frac{E}{F}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipotesi $\frac{C}{D}$ è *nplicata* di $\frac{E}{F}$, ma pel teorema LXXXIII. la proporzione, ch' è *nplicata* di $\frac{E}{F}$, è uguale ad $\frac{E^n}{F^n}$; adunque $\frac{C}{D}=\frac{E^n}{F^n}$:

Per l' ipotesi $\frac{A}{B}$ è *mplicata* di $\frac{C}{D}$; ed essendo pel teorema XLIII. la proporzione *mplicata* di $\frac{C}{D}$ eguale alla proporzione *mplicata* di $\frac{E^n}{F^n}$, ne segue, che $\frac{A}{B}$ è *mplicata* di $\frac{E^n}{F^n}$; ma pel teorema LXXXIII., e pel corollario III. del teorema LXXXI. la proporzione *mplicata* di $\frac{E^n}{F^n}$ è uguale ad $\frac{E^{mn}}{F^{mn}}$, conforme apparisce chiaramente a chi considera la cosa con attenzione; adunque $\frac{A}{B}$ è uguale ad $\frac{E^{mn}}{F^{mn}}$.

In fine pel corollario XIII. del teorema LXXXIII. la proporzione $\frac{E^{mn}}{F^{mn}}$ è *mnplicata* di $\frac{E}{F}$; adunque la proporzione $\frac{A}{B}$ è *mnplicata* di $\frac{E}{F}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altro teorema generale.

DInotino *m*, ed *n* due numeri interi, e positivi ad arbitrio, come

come ſopra; io dico, che ſe la proporzione $\frac{A}{B}$ è *mnplicata* di $\frac{C}{D}$, e la proporzione $\frac{E}{F}$ è *nplicata* di $\frac{C}{D}$, la ſteſſa $\frac{A}{B}$ ſarà *mplicata* di $\frac{E}{F}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. PEr l' ipoteſi $\frac{A}{B}$ è *mnplicata* di $\frac{C}{D}$, e pel teorema LXXXIII. la proporzione *mnplicata* di $\frac{C}{D}$ è uguale a $\frac{C^{mn}}{D^{mn}}$; adunque $\frac{A}{B} = \frac{C^{mn}}{D^{mn}}$, ma pel teorema LXXXIII., e pel corollario III. del teorema LXXXI. la proporzione *mplicata* di $\frac{C^n}{D^n}$ è uguale a $\frac{C^{mn}}{D^{mn}}$ come divien manifeſto a chi vi riflette con mediocre attenzione; adunque $\frac{A}{B}$ è uguale alla proporzione *mplicata* di $\frac{C^n}{D^n}$.

II. Per l' ipoteſi $\frac{E}{F}$ è *nplicata* di $\frac{C}{D}$, e pel teorema LXXXIII. la proporzione *nplicata* di $\frac{C}{D}$ è uguale a $\frac{C^n}{D^n}$; adunque $\frac{E}{F}$ è uguale a $\frac{C^n}{D^n}$, ma nel primo punto ſi è provato, che $\frac{A}{B}$ è uguale alla proporzione *mplicata* di $\frac{C^n}{D^n}$; adunque in virtù del corollario II. del teorema XLII. la proporzione $\frac{A}{B}$ è *mplicata* di $\frac{E}{F}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA LXXXIX.

RAppreſentino $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni in generale; io dico, che la proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{C}{D}$ è compoſta delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{C}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema XXII., e per la definizione XXIII., la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è compoſta della proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{B}{B}$, e della proporzione di $\frac{B}{B}$ a $\frac{C}{D}$; ma pel corollario VIII. de' principj la proporzione di $\frac{B}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è uguale alla proporzione di $\frac{C}{C}$ a $\frac{C}{D}$

mentre pel corollario VII. de' principj $\frac{B}{B} = \frac{C}{C}$; adunque pel teorema XLIII. la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ é composta della proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{B}{B}$, e della proporzione di $\frac{C}{C}$ a $\frac{C}{D}$.

In oltre pel teorema III. si à $\frac{A}{B} . \frac{B}{B} :: A . B$, e pel teorema IX. si à $\frac{C}{C} . \frac{C}{D} :: D : C$; adunque la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è composta di due proporzioni eguali alle due proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{C}$, e surrogando queste in luogo delle due ad esse eguali, si rende manifesto in vigore del teorema XLIII., che la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{B}$ e $\frac{D}{C}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

LA proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è uguale ad $\frac{AD}{BC}$ pel teorema LXXVII., e il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$ è anch' esso eguale ad $\frac{AD}{BC}$ pel teorema LXXXIII.; adunque la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è uguale al prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$ pel corollario XI. de' principj, e quindi la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{C}$ per la definizione XXIII.. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

LA proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è uguale al quoziente di $\frac{A}{B}$ *divisa* per $\frac{C}{D}$;

Imperciocchè per quello, che si è provato nella seconda dimostrazione di questo teorema, la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{C}{D}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$, e il quoziente di $\frac{A}{B}$ divisa per $\frac{C}{D}$ è uguale anch' esso ad $\frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$ pel teorema LVII.; adunque, ec.

TEO-

TEOREMA XC.

DInotino come sopra $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni in generale; io dico, che la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{C}$, e $\frac{D}{B}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema precedente la proporzione di $\frac{A}{C}$ a $\frac{B}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{C}$, e $\frac{D}{B}$; adunque per la definizione XXIII. la proporzione di $\frac{A}{C}$ a $\frac{B}{D}$ è uguale al prodotto di $\frac{A}{C} \times \frac{D}{B}$.

Si consideri ora, che pel corollario II. del teorema XXIX. la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è uguale alla proporzione di $\frac{A}{C}$ a $\frac{B}{D}$; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è uguale anch' essa al prodotto $\frac{A}{C} \times \frac{D}{B}$, cioè per la definizione XXIII. la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{C}$, e $\frac{D}{B}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XCI.

ESprimano A, B, C, D, E, F, G, H otto grandezze omogenee in generale; io dico, che

(1) la proporzione di $\frac{A}{E}$ verso $\frac{B}{F}$ sta alla proporzione di $\frac{C}{G}$ verso $\frac{D}{H}$, come la proporzione di $\frac{A}{B}$ verso $\frac{E}{F}$ sta alla proporzione di $\frac{C}{D}$ verso $\frac{G}{H}$.

DIMOSTRAZIONE.

I. EGli è manifesto, che sussiste questa proporzionalità:

(2) $\frac{AF}{EB} . \frac{CH}{GD} :: \frac{AF}{BE} . \frac{CH}{DG}$;

Imperciocchè essendo pel teorema LXXIX. $BB = BE$, e $GD = DG$ (purchè sia la stessa l' unità, che si assume per la formazione de' prodotti AF, EB, BE, e purchè i prodotti CH, GD,

GD, DG ſieno anch'eſſi formati con una medeſima unità) ne ſegue, che le proporzioni $\frac{AF}{EB}$, ed $\frac{AF}{BE}$, le quali fanno reſpettivamente il primo, e il terzo termine della proporzionalità (2) ſono eguali tra loro pel corollario VIII. de' principj, e per lo ſteſſo corollario le proporzioni $\frac{CH}{GD}$, e $\frac{CH}{DG}$, che fanno reſpettivamente il ſecondo, e il quarto termine della proporzionalità (2) ſono anch'eſſe eguali tra loro; adunque per lo ſteſſo corollario VIII. de' principj la proporzionalità (2) ſuſſiſte.

II. Ora pel teorema LXXVII., la proporzione di $\frac{A}{E}$ verſo $\frac{B}{F}$ è uguale alla proporzione $\frac{AF}{EB}$, la proporzione di $\frac{C}{G}$ verſo $\frac{D}{H}$ è uguale alla proporzione $\frac{CH}{GD}$, la proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{E}{F}$ è uguale alla proporzione $\frac{AF}{BE}$, e finalmente la proporzione di $\frac{C}{D}$ verſo $\frac{G}{H}$ è uguale alla proporzione $\frac{CH}{DG}$; adunque ponendo nella proporzionalità (2) in luogo delle quattro proporzioni $\frac{AF}{EB}$, $\frac{CH}{GD}$, $\frac{AF}{BE}$, $\frac{CH}{DG}$ le altre quattro reſpettive proporzioni, che in queſto ſecondo punto ſono ſtate dimoſtrate ad eſſe eguali; la proporzionalità, che ne riſulta, ſarà ſuſſiſtente in vigore del corollario IX. de' principj, ma la proporzionalità, che ne riſulta è appunto la proporzionalità (1); adunque la proporzionalità (1) ſuſſiſte. Il che dovea dimoſtrarſi.

Altra dimoſtrazione.

PEl corollario II. del teorema XXIX., la proporzione di $\frac{A}{E}$ verſo $\frac{B}{F}$ è uguale alla proporzione di $\frac{A}{B}$ verſo $\frac{F}{F}$, e la proporzione di $\frac{C}{G}$ verſo $\frac{D}{H}$ è uguale alla proporzione di $\frac{C}{D}$ verſo $\frac{G}{H}$; adunque la proporzionalità (1) ſuſſiſte; poichè pel corollario VIII. de' principj, due antecedenti eguali anno egual proporzione a due conſeguenti eguali. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA XCII.

ESprimano $\frac{A}{B}$, ed $\frac{F}{H}$ due proporzioni in generale,

A,

A, ec. rappresenti qualsivoglia dignità di A, ed anche la semplice A, e B, ec. rappresenti una dignità simile di B, ed anche la semplice B; A, ec. A rappresenti una dignità di A, il di cui *grado* esprimasi con un numero, il quale superi d'una unità il numero, che espone la dignità A, ec. e B, ec. B denoti una dignità simile di B; verbigrazia, se A, ec. significa la semplice A, allora A, ec. A significherà AA, e B, ec. B significherà BB; se A, ec. significa AA, allora, A, ec. A significherà AAA, e B, ec. B significherà BBB, se A, ec. significherà AAA, allora A, ec. A significherà $AAAA$, e B, ec. B significherà $BBBB$, e così sempre, ec.

Ciò posto; io dico in primo luogo, che se $\frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A,\ \text{ec.}}{B,\ \text{ec.}}$, il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ sarà eguale ad $\frac{A,\ \text{ec.}\ A}{B,\ \text{ec.}\ B}$;

Io dico in secondo luogo, che se il prodotto $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A,\ \text{ec}\ A}{B,\ \text{ec.}\ B}$, la proporzione $\frac{F}{H}$ sarà eguale ad $\frac{A,\ \text{ec.}}{B,\ \text{ec.}}$.

Dimostrazione della prima parte.

SI à per la definizione XXI., e XXII. questa proporzionalità:

$$(1)\ \frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{A,\ \text{ec.}}{B,\ \text{ec.}} \cdot \frac{A}{B} \times \frac{A,\ \text{ec.}}{B,\ \text{ec.}}$$

ma pel teorema XXIII. $\frac{A}{B} \times \frac{A,\ \text{ec.}}{B,\ \text{ec.}}$ è uguale ad $\frac{A,\ \text{ec.}\ A}{B,\ \text{ec.}\ B}$; adunque il quarto termine della proporzionalità (1) è uguale ad $\frac{A,\ \text{ec.}\ A}{B,\ \text{ec.}\ B}$, e conseguentemente pel corollario IX. de' principj sussiste quest' altra proporzionalità:

$$(2)\ \frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{A,\ \text{ec.}}{B,\ \text{ec.}} \cdot \frac{A,\ \text{ec.}\ A}{B,\ \text{ec.}\ B}.$$

Di nuovo; per la definizione XXI., e XXII. si à quest' altra proporzionalità:

$$(3)\ \frac{Z}{Z} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{F}{H} \cdot \frac{A}{B} \times \frac{F}{H},$$

i due primi termini della quale sono gl' istessi, che i due primi termini della proporzionalità (2), e di più il terzo termine della proporzionalità (3) per l' ipotesi è uguale al terzo termine della proporzionalità (2); adunque pel teorema I. il quar-

to

to termine della proporzionalità (3) è uguale al quarto termine della proporzionalità (2), vale a dire $\frac{A}{B} \times \frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A\text{, ec. } A}{B\text{, ec. } B}$. Il che dovea dimostrarsi primieramente.

Dimostrazione della seconda parte.

LA proporzionalità (3), e (2) anno comuni i primi, e i secondi termini, e per l' ipotesi i loro quarti termini sono eguali; adunque pel teorema I. il terzo termine della proporzionalità (3) è uguale al terzo termine della proporzionalità (2), cioè $\frac{F}{H}$ è uguale ad $\frac{A\text{, ec.}}{B\text{, ec.}}$. Il che dovea secondariamente dimostrarsi.

SCOLIO.

ALlorchè A, ec. significa la semplice A, non occorre valersi del teorema XXIII., come si è dovuto fare nella dimostrazione della prima parte, di modo che la prova in tal caso è alquanto più semplice.

TEOREMA XCIII.

SIeno quattro grandezze omogenee date A, B, C, D, e la proporzione $\frac{A}{D}$ suppongasi composta della proporzione duplicata di $\frac{A}{B}$, e della proporzione $\frac{B}{C}$; io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale alla proporzione $\frac{C}{D}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la supposizione, e per le definizioni XXI., XXII., XXIII., e XXIV. si à $\frac{B}{B} \cdot \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} :: \frac{B}{C} \cdot \frac{A}{D}$ ponendo pertanto in questa proporzionalità in vece di $\frac{B}{B}$ la proporzione $\frac{BB}{BB}$, che gli è uguale pel corollario VII. de' principj, e in vece di $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$ la $\frac{AA}{BB}$, che gli è uguale pel teorema LXXXIII., si avrà in virtù del corollario IX. de' principj $\frac{BB}{BB} \cdot \frac{AA}{BB} :: \frac{B}{C} \cdot \frac{A}{D}$.

In oltre pel teorema LXXVII. $\frac{B}{C}$ ſta ad $\frac{A}{D}$, come BD ſta a CA; adunque pel corollario XI. de' principj ſi avrà ancora $\frac{BB}{BB} \cdot \frac{AA}{BB} :: BD \cdot CA$; ma pel teorema III. $\frac{BB}{BB}$ ſta ad $\frac{AA}{BB}$, come BB ad AA; adunque per lo ſteſſo corollario XI. de' principj ſuſſiſterà queſt' altra proporzionalità: $BB \cdot AA :: BD \cdot CA$, e *permutando* $BB \cdot BD :: AA \cdot CA$: ora pel teorema LXXIII., e *traſponendo* $B \cdot D :: BB \cdot BD$, e pel teorema LXXII., e *traſponendo* $A \cdot C :: AA \cdot CA$; adunque pel corollario XII. de' principj $B \cdot D :: A \cdot C$, e *permutando* $B \cdot A :: D \cdot C$; indi *convertendo* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Altra dimoſtrazione.

PEr l'ipoteſi $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$, ma pel corollario IV. del teorema LXXXIII. $\frac{AAB}{BBC}$ è uguale ad $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{D} = \frac{AAB}{BBC}$, ed eſſendo pel corollario V. dello ſteſſo teorema LXXXIII. $\frac{AAB}{BBC} = \frac{AA}{BC}$, ſarà eziandio pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{D} = \frac{AA}{BC}$; moltiplicando pertanto $\frac{A}{D}$ per $\frac{C}{A}$, ed $\frac{AA}{BC}$ per la medeſima $\frac{C}{A}$, ſi avrà pel I. corollario del teorema XXIV. $\frac{A}{D} \times \frac{C}{A} = \frac{AA}{BC} \times \frac{C}{A}$: riflettaſi, che pel corollario IV. del teorema LXXXIII. $\frac{AC}{DA} = \frac{A}{D} \times \frac{C}{A}$, ed $\frac{AAC}{BCA}$ è uguale ad $\frac{AA}{BC} \times \frac{C}{A}$, e ſi renderà manifeſto pel corollario XII. de' principj, che $\frac{AC}{DA} = \frac{AAC}{BCA}$; avendoſi dunque pel corollario V. del teorema LXXXIII. $\frac{AC}{DA}$ eguale a $\frac{C}{D}$, ed $\frac{AAC}{BCA}$ eguale ad $\frac{A}{B}$, ſi renderà egualmente chiaro pel corollario XII. de' principj, che $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA XCIV.

ESprimano $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$ due proporzioni date; io dico, che ſe $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come B ad A, la proporzione $\frac{D}{C}$ è uguale a $\frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema LXXVII. $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come AD a BC; laonde essendo per l'ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: B . A$, sarà pel corollario XI. de' principj $\frac{AD}{BC} = \frac{B}{A}$, si moltiplichi $\frac{AD}{BC}$ per $\frac{B}{A}$, e $\frac{B}{A}$ per la stessa $\frac{B}{A}$, e pel corollario I. del teorema XXIV. si vedrà essere $\frac{AD}{BC} \times \frac{B}{A} = \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$; ma pel corollario IV. del teorema LXXXIII. $\frac{ADB}{BCA}$ è uguale ad $\frac{AD}{BC} \times \frac{B}{A}$; adunque $\frac{ADB}{BCA} = \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$ pel corollario XI. de' principj; di più pel corollario V. del teorema LXXXIII. $\frac{ADB}{BCA}$ è uguale a $\frac{D}{C}$, adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{C} = \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

ABbiamo per l'ipotesi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: B . A$, ma pel corollario V. del teorema XXIX., e *trasponendo* $\frac{D}{C}$ sta a $\frac{B}{A}$, come $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, e pel teorema III. $\frac{B}{A}$ sta ad $\frac{A}{A}$, come B ad A; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{D}{C} . \frac{B}{A} :: \frac{B}{A} . \frac{A}{A}$, e *trasponendo*, indi *convertendo* $\frac{A}{A} . \frac{B}{A} :: \frac{B}{A} . \frac{D}{C}$, e conseguentemente per le definizioni XXI., e XXII. $\frac{D}{C} = \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA XCV.

SIeno le due proporzioni date $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$, e abbiasi $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: C . D$; io dico, che $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$.

DIMOSTRAZIONE.

IN virtù del teorema LXXVII. $\frac{A}{B}$ sta a $\frac{C}{D}$, come AD a BC, e perchè si suppone $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: C . D$, si avrà pel corollario XI. de' prin-

cipj

cipj $\frac{AD}{BC}=\frac{C}{D}$ di maniera che moltiplicando per $\frac{C}{D}$ tanto $\frac{AD}{BC}$, quanto $\frac{C}{D}$, si conoscerà pel corollario I. del teorema XXIV. $\frac{AD}{BC}\times\frac{C}{D}=\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$, ed essendo pel corollario IV. del teorema LXXXIII. $\frac{ADC}{BCD}$ eguale ad $\frac{AD}{BC}\times\frac{C}{D}$, sarà eziandio pel corollario XI. de' principj $\frac{ADC}{BCD}=\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$, ma pel corollario V. del teorema LXXXIII. $\frac{ADC}{BCD}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

L'Ipotesi dà $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::C.D$; e pel teorema III. si à $\frac{C}{D}.\frac{D}{D}::C.D$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::\frac{C}{D}.\frac{D}{D}$, cioè *trasponendo*, indi *convertendo* $\frac{D}{D}.\frac{C}{D}::\frac{C}{D}.\frac{A}{B}$, e quindi per le definizioni XXI., e XXII. $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{C}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

Scolio.

In questi due ultimi teoremi non è punto necessario, che i termini della proporzione $\frac{C}{D}$ sieno omogenei a quelli della proporzione $\frac{A}{B}$; nel progresso però delle dimostrazioni *prime* de' due medesimi teoremi, tacitamente si suppone, che i termini di $\frac{C}{D}$ sieno omogenei ai termini di $\frac{A}{B}$, come apparisce a chi con attenzione le considera; mentre si adopera in esse il corollario IV. del teorema LXXXIII., qual corollario à dipendenza dal teorema LXXXI. Per render dunque generali le suddette prime dimostrazioni, s' immagini per ora, che i termini di $\frac{C}{D}$ sieno omogenei a quelli di $\frac{A}{B}$, e pongasi la proporzione $\frac{c}{d}$ eguale alla $\frac{C}{D}$, ma tale, che i suoi termini non sieno omogenei a quelli di $\frac{C}{D}$, e per conseguenza non sieno neppure omogenei a quelli di $\frac{A}{B}$.

Ponendosi pertanto $\frac{c}{d} = \frac{C}{D}$, sarà convertendo $\frac{d}{c} = \frac{D}{C}$, ma si è provato nella prima dimostrazione del teorema XCIV., che $\frac{D}{C} = \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{d}{c} = \frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$: e questo è ciò, che si asserisce generalmente nel teorema XCIV.

Si è provato nella prima dimostrazione del teorema XCV., che $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$; ma si è posto $\frac{c}{d} = \frac{C}{D}$; adunque pel teorema XLIII. $\frac{A}{B} = \frac{c}{d} \times \frac{c}{d}$: e questa è l' asserzione generale del teorema XCV.

TEOREMA XCVI.

SIeno A, B, C, D quattro grandezze date, le due prime delle quali sono tra loro omogenee, e le due ultime sono omogenee tra loro; io dico primieramente, che se $\frac{D}{C}$ è uguale a $\frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$, sussiste questa proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: B . A$.

Io dico secondariamente, che se $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$ sussiste quest' altra proporzionalità $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: C . D$.

La prima parte di questo teorema è la proposizione conversa del teorema XCIV., e la seconda parte è la conversa del teorema XCV.

Dimostrazione della prima parte.

PEl teorema III. $\frac{BB}{AA} . \frac{BA}{AA} :: BB . BA$, e pel teorema LXXIII. $BB . BA :: B . A$; adunque pel corollario XI. de' principj dee sussistere questa proporzionalità:

(1) $\frac{BB}{AA} . \frac{BA}{AA} :: B . A$,

ma pel teorema LXXXIII. $\frac{BB}{AA}$ è uguale a $\frac{B}{A} \times \frac{B}{A}$ (cioè per la suppo-

suppoſizione) a $\frac{D}{C}$, e pel teorema LXXII. $\frac{BA}{AA}$ è uguale a $\frac{B}{A}$; adunque ſurrogando nella proporzionalità (1) grandezze eguali in cambio d'eguali, eſſa in vigore del corollario IX. de' principj diverrà la ſeguente $\frac{D}{C} . \frac{B}{A} :: B . A$;

Di più pel corollario V. del teorema XXIX. $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$, come $\frac{D}{C}$ a $\frac{B}{A}$, e conſeguentemente pel corollario XI. de' principj $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: B . A$. Il che dovea primieramente dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

È Chiaro pel teorema III., che $\frac{CC}{DD} . \frac{CD}{DD} :: CC . CD$, e pel teorema LXXIII., che $CC . CD :: C . D$, di maniera che il corollario XI. de' principj moſtra ſuſſiſtente queſta proporzionalità:

(2) $\frac{CC}{DD} . \frac{CD}{DD} :: C . D$;

ora pel teorema LXXXIII. $\frac{CC}{DD}$ è uguale a $\frac{C}{D} \times \frac{C}{D}$, vale a dire in virtù dell'ipoteſi ad $\frac{A}{B}$, e pel teorema LXXII. $\frac{CD}{DD}$ è uguale a $\frac{C}{D}$; laonde ponendo grandezze eguali in luogo d'eguali nella proporzionalità (2), ne verrà $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: C . D$. Il che dovea ſecondariamente dimoſtrarſi.

TEOREMA XCVII.

SE due grandezze A, ed E tra loro omogenee ſono moltiplicate ad una ad una per una medeſima grandezza B di qualunque ſpecie; io dico, che $AB \pm EB$ è uguale ad $(A \pm E)B$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la definizione XXXVI. ſi anno queſte due proporzionalità: $Z . A :: B . AB$, $Z . E :: B . EB$, e *convertendo* ſi anno queſte altre due proporzionalità: $A . Z :: AB . B$, $E . Z :: EB . B$; laonde pel corollario XII. del teorema II. ſi vede eſſere

$A \pm E . Z :: AB \pm EB . B$, e *convertendo* $Z . A \pm E :: B . AB \pm EB$; ma per la definizione XXXVI. ſi à $Z . A \pm E :: B .$

$(A$

$(A \pm E)B$; adunque pel teorema I. i quarti termini di queste due ultime proporzionalità sono eguali, cioè $AB \pm EB = (A \pm E)B$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

SE tre grandezze A, E, I tra loro omogenee sono ad una ad una moltiplicate per una stessa grandezza B di qualunque specie; io dico, che $AB \pm EB \mp IB$ è uguale ad $(A \pm E \mp I)B$;

Prendasi $Q = A \pm E$; sarà per questo teorema $AB \pm EB = (A \pm E)B$, ed essendo pel corollario del teorema LXXII. $(A \pm E)B = QB$, sarà altresì $AB \pm EB$ eguale a QB; adunque $AB \pm EB \mp IB$ sarà eguale a $QB \mp IB$; ma pel presente teorema si à $QB \mp IB = (Q \mp I)B$; adunque $AB \pm EB \mp IB = (Q \mp I)B$, e perciò ponendo in luogo di Q il suo valore $A \pm E$, finalmente si ottiene $AB \pm EB \mp IB = (A \pm E \mp I)B$.

SCOLIO.

IN simigliante guisa si procederà per dimostrare il simile ne' casi di maggior numero di grandezze tra loro omogenee, ad una ad una moltiplicate per una stessa grandezza di qualunque specie, passando sempre dal caso più semplice al caso immediatamente più composto, cioè dal caso di tre grandezze al caso di quattro, dal caso di quattro grandezze al caso di cinque, e così sempre, ec

TEOREMA XCVIII.

SE una stessa grandezza B è moltiplicata per due grandezze A, ed E, che debbono essere tra loro omogenee, ma possono essere di specie diversa dalla B; io dico, che $BA \pm BE$ è uguale a $B(A \pm E)$.

DIMOSTRAZIONE.

ABbiamo per la definizione XXXVI. queste due proporzionalità: $Z.B::A.BA$, e $Z.B::E.BE$; adunque pel corollario XI. de' principj $A.BA::E.BE$, e quindi pe' corollarj XXIV., e XXVIII. de' principj, ovvero pe' teoremi XXXVI., e XXXV.

$A \pm$

$\frac{A \pm E}{BA \pm BE} = \frac{A}{BA}$; ma ſi è veduto nel principio di queſta dimoſtrazione, che $\frac{Z}{B} = \frac{A}{BA}$, adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{Z}{B} = \frac{A \pm E}{BA \pm BE}$; laonde avendoſi per la definizione XXXVI. $\frac{Z}{B} = \frac{A \pm E}{B(A \pm E)}$; ſi à ancora pel teorema I. l' egualità de' quarti termini di queſte due ultime proporzionalità, cioè ſi à $BA \pm BE = B(A \pm E)$. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

SE una grandezza B di qualunque ſpecie è moltiplicata per tre grandezze A, E, I, le quali poſſono eſſere di ſpecie diverſa dalla B, ma tra loro debbono eſſere omogenee; io dico, che $BA \pm BE \mp BI$ è uguale a $B(A \pm E \mp I)$;

Prendaſi come nel coroll. del precedente teorema $Q = A \pm E$;

Si à pel preſente teorema $BA \pm BE = B(A \pm E)$, e pel corollario del teorema LXXIII. $B(A \pm E) = BQ$; laonde $BA \pm BE = BQ$, e conſeguentemente $BA \pm BE \mp BI = BQ \mp BI$, ma per queſto medeſimo teorema XCVIII. ſi à ancora $BQ \mp BI = B(Q \mp I)$, e però ſurrogando in vece di Q il ſuo valore $A \pm E$ ſi vedrà eſſere $BA \pm BE \mp BI = B(A \pm E \mp I)$.

SCOLIO.

SI dovrà procedere con ſomigliante metodo per provare il ſimile, allorchè le grandezze moltiplicanti, ec. ſono più di tre, dovendoſi far paſſaggio *gradatamente* dal caſo di tre grandezze al caſo di quattro, dal caſo di quattro al caſo di cinque, e così ſempre, ec. E ciò uniformemente a quanto ſi è accennato nello ſcolio anneſſo al teorema antecedente.

TEOREMA XCIX.

DAte due grandezze omogenee a, e b, ſe ambedue ſi moltiplicano per a, e poi ſi prende la ſeconda dignità di b, ne naſceranno tre prodotti in proporzione geometrica continua, cioè aa, ba, bb: e ſe queſti tre prodotti ſi moltiplicano per *a*, e poi si prende la terza dignità di *b*, ne verranno quattro prodotti in progressione geometrica, cioè *aaa*, *baa*, *bba*, *bbb*:

E se questi quattro prodotti si moltiplicano per *a*, e poi si prende la quarta dignità di *b*, ne risulteranno cinque prodotti in progressione geometrica, cioè

aaaa, *baaa*, *bbaa*, *bbba*, *bbbb*:

e così sempre in infinito, moltiplicando sempre l' ultima progressione de' prodotti per *a*, indi prendendo la dignità di *b* prossimamente maggiore.

Dimostrazione.

I. Pel teorema LXXII. *aa.ba*::*a.b*, e pel teorema LXXIII. *ba.bb*::*a.b*; adunque pel coroll. XI. de' principj *aa.ba*::*ba.bb*.

II. Pel teorema LXXII. *aaa.baa*::*aa.ba*, e nel primo punto si è veduto essere *aa.ba*::*a.b*; adunque pel corollario XI. de' principj *aaa.baa*::*a.b*.

Similmente pel teorema LXXII. *baa.bba*::*ba.bb*, e nel primo punto si è veduto essere *ba.bb*.:*a.b*; adunque pel corollario XI. de' principj *baa.bba*::*a.b*; cosicchè per lo stesso corollario XI. de' principj *aaa.baa*::*baa.bba*:

In oltre *bba,bbb*::*a.b* pel teorema LXXIII.; adunque essendosi provato di sopra, che *baa.bba*::*a.b*, sarà ancora pel corollario XI. de' principj *baa.bba*::*bba.bbb*, e conseguentemente i quattro prodotti *aaa*, *baa*, *bba*, *bbb* sono in progressione geometrica.

III. Chi vorrà considerare attentamente il tenore di questa dimostrazione, comprenderà, che lo stesso metodo vale a dimostrare anche gli altri casi più composti, e vedrà, che quello, che si è provato per dimostrare i casi più semplici, serve a provar ciò che bisogna per formare la dimostrazione de' casi più composti. Si dovrà però far passaggio dai casi più semplici a quei casi più composti, che immediatamente seguono i casi più semplici.

Scolio.

I Termini delle progressioni geometriche, considerati in que-

sto

sto teorema, essendo tanti prodotti di più grandezze moltiplicate insieme, e ciascuno di essi termini (a riserva del primo, e dell'ultimo) facendo figura di conseguente, e di antecedente nelle proporzioni, che entrano nella progressione geometrica, ne segue, che l' unità *arbitraria*, la quale si assume per formare i detti prodotti, dev'essere sempre la medesima. V. g. avendosi $aa . ba :: ba . bb$, i due prodotti aa, ba debbono essere formati con una medesima unità *arbitraria* in virtù di quanto si è osservato nell'articolo V. dello scolio annesso alla definizione XXXVI., e in virtù ancora delle dimostrazioni de' teoremi LXXII., e LXXIII., i quali teoremi entrano nella dimostrazione del teorema presente.

Per le stesse ragioni i due prodotti ba, e bb debbono essere formati con una medesima unità *arbitraria*, ma il prodotto ba, che è il conseguente della prima proporzione $\frac{aa}{ba}$, esser dee lo stesso, che il prodotto ba, il quale è l'antecedente della seconda proporzione; adunque una sola unità *arbitraria* deve assumersi per formare tutti e tre i prodotti aa, ba, bb:

Similmente i quattro prodotti $(aa)a$, $(ba)a$, $(bb)a$, $(bb)b$ debbono concepirsi formati con una medesima unità *arbitraria*, non è però necessario, che questa sia la stessa unità, che si assunse per formare i tre prodotti aa, ba, bb, e ciò per l'articolo VIII. dello scolio annesso alla definizione XXXVI.

Queste riflessioni anno luogo anche ne' casi, che le progressioni considerate in questo teorema costino di maggior numero di termini.

Altra dimostrazione di questo teorema.

I. PEr provare la sussistenza di questa proporzione geometrica continua $aa . ba :: ba . bb$, si consideri, che il prodotto $(aa)(bb)$ de' suoi estremi è uguale al prodotto $aabb$, e che il prodotto $(ba)(ba)$ de' suoi medj è uguale a $baba$; tuttociò pel corollario III. del teorema LXXXI., ma per lo stesso teorema LXXXI. $aabb$ è uguale a $baba$; adunque il prodotto degli estremi della suddetta proporzionalità $aa . ba :: ba . bb$ è uguale al prodotto de' medj, e quindi pel corollario II. del teorema LXXVII. la stessa proporzionalità sussiste.

II. Per provare, che i prodotti seguenti *aaa*, *baa*, *bba*, *bbb* sono in progressione geometrica, si provi primieramente la sussitenza di questa proporzionalità: *aaa.baa::baa.bba*, e per ciò fare si rifletta, che il prodotto (*aaa*) (*bba*) de' suoi estremi è uguale ad *aaa bba*, e il prodotto (*baa*) (*baa*) de' suoi medj è uguale a *baa baa*: tutto questo in virtù del corollario III. del teorema LXXXI.. Si rifletta ancora, che *aaa bba* è uguale a *baa baa* pel teorema LXXXI., di modo che il prodotto de' suddetti estremi è uguale al prodotto de' suddetti medj, e conseguentemente pel corollario II. del teorema LXXVII. la proporzionalità *aaa.baa::baa.bba* sussiste.

Si provi secondariamente la sussistenza di quest' altra proporzionalità *baa.bba::bba.bbb*, e si consideri nello stesso modo, che il prodotto (*baa*) (*bbb*) de' suoi estremi è uguale a *baa bbb*, e il prodotto (*bba*) (*bba*) de' suoi medj è uguale a *bba bba*, e tuttociò pel corollario III. del teorema LXXXI.; laonde essendo *baa bbb* eguale a *bba bba* per lo stesso teorema LXXXI., ne segue, che il prodotto degli estremi suddetti è uguale al prodotto de' sopraddetti medj, e perciò in vigore del corollario II. del teorema LXXVII. la proporzionalità *baa.bba::bba.bbb* è sussistente.

Saranno pertanto in progressione geometrica questi quattro prodotti *aaa*, *baa*, *bba*, *bbb*: e collo stesso metodo si dimostrerà il teorema negli altri casi più composti.

DEFINIZIONE XXXIX.

DIco, che una grandezza A si divide per un' altra B, quando si assume una grandezza arbitraria Z, e si prende una quarta grandezza Q tale, che abbiasi questa proporzionalità $B.A::Z.Q$: chiamo unità *assunta* la terza grandezza di questa proporzionalità, cioè la Z presa ad *arbitrio*, e chiamo quoziente la grandezza Q, che è quarta proporzionale dopo la grandezza *dividente* B, la grandezza *dividenda* A, e la grandezza arbitraria Z.

Il quoziente Q si esprime ancora così, $A:B$.

Sco-

SCOLIO.

I. DA quest' *idea generale* della divisione si deduce, che la grandezza *dividente* B, e la grandezza *dividenda* A esser debbono omogenee tra loro; ma l' unità *assunta* Z può essere di specie differente, e che il quoziente Q, cioè $A:B$ è sempre una grandezza omogenea all' unità *assunta* Z.

II. Se B, ed A fossero numeri, sarebbe più a proposito, che Z significasse l' unità *naturale*, benchè per altro possa denotare qualunque numero, e qualsivoglia grandezza di qualsisia specie.

III. Quando si paragonano due quozienti, v. g. $A:B$, e $C:D$, dee prendersi una sola grandezza arbitraria per *unità assunta*, e formare queste due proporzionalità $B.A::Z.(A:B)$; $D.C::Z.(C:D)$, oppure debbono prendersi per *unità assunte* due grandezze arbitrarie tra loro eguali: niente importando, se le due grandezze A, e B del primo quoziente sieno omogenee, o no alle due grandezze C, e D del secondo quoziente, poichè per quanto si è notato nel primo articolo di questo scolio, i due quozienti $A:B$, e $C:D$ sono sempre due grandezze omogenee all' unità *assunta*. Che poi una sola unità *arbitraria*, ovvero due unità *arbitrarie* eguali debbono assumersi nel paragonare insieme i due quozienti $A:B$, e $C:D$, si rende chiaro, a chi considera, che se le due unità *assunte* fossero tra loro di valore diverso, potendo sempre variare la proporzione di esse, i due quozienti $A:B$, e $C:D$ non conservarebbero tra loro una proporzione fissa, e costante.

IV. Il numero però de' valori di qualsivoglia quoziente è infinito, attesochè ad ogni differente significazione di Z corrisponde un quoziente di differente valore; anzi il quoziente cangia in ordine alla specie di grandezza, a misura che la Z esprime differenti specie di grandezze.

V. Se l' unità *arbitraria* divide qualsivoglia grandezza C, il quoziente, che ne viene è la stessa grandezza C, mentre per la definizione XXXIX. $Z,C::Z.(C:Z)$; ma pel corollario VIII. de' principj $Z.C::Z.C$; adunque pel teorema I. i quarti ti termini d' ambedue queste proporzionalità sono eguali, cioè $C:Z = C$, donde ne siegue, che il caso di quest'articolo V. deve eccettuarsi dal precedente articolo IV.

VI. Se qualsivoglia grandezza C è divisa per se medesima, il quoziente $C:C$ è uguale all' unità *arbitraria* Z; poichè per la definizione XXXIX. $C.C::Z.(C:C)$, ma pel corollario VII. de' principj $C.C::Z.Z$; adunque pel teorema I. gli ultimi termini di queste due proporzionalità sono eguali, cioè $C:C = Z$.

AVVERTIMENTO.

IN conformità di quanto si è espresso nell' avvertimento, che precede il teorema LXXII., la lettera Z significherà sempre l' unità *assunta*: e quando si dirà, che l' unità *assunta* dev' essere, o è la medesima, s' intenderà, che l' unità *assunta* dev' essere, o è una grandezza medesima, ovvero una grandezza eguale.

TEOREMA C.

RAppresenti $A:B$ qualsivoglia quoziente; io dico in primo luogo, che il quoziente $A:B$ moltiplicato per la *dividente* B è uguale alla *dividenda* A, cioè $(A:B)\ B = A$; io dico in secondo luogo, che la *dividente* B moltiplicata pel quoziente $A:B$ è uguale alla *dividenda* A, cioè $B\ (A:B) = A$.

Dimostrazione della prima parte.

SI à per la definizione XXXIX. $B.A::Z.(A:B)$, e si à per la definizione XXXVI. $Z.(A:B)::B.(A:B)B$; adunque pel corollario XI. de' principj $B.A::B.(A:B)B$, e conseguentemente pel corollario XXI. de' principj $(A:B)B$ è uguale ad A; e questa è la prova della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

PEr la definizione XXXIX. $B.A::Z.(A:B)$, cioè *trasponendo* $Z.(A:B)::B.A$, e *permutando* $Z.B::(A:B.).A$, ma per la definizione XXXVI. $Z.B::(A:B).B(A:B)$; adunque pel corollarollario XI. de' principj $(A:B):A::(A:B).B(A:B)$, e quindi pel corollario XXI. de' principj $B(A:B)=A$; e questa è la prova della seconda parte.

SCOLIO.

IL tenore della dimostrazione d' ambedue le parti di questo teorema mostra, che acciò il prodotto $(A:B)B$ possa essere uguale ad A, l' unità Z *assunta* per formare il suddetto prodotto deve essere la *medesima*, che l' unità *assunta* per formare il quoziente $A:B$;

E parimente che con una *stessa* unità *assunta* debbono esser formati il quoziente $A:B$, e il prodotto $B(A:B)$, acciò questo esser possa eguale ad A; si conosce ancora dalla prova della seconda parte del presente teorema, che l' unità Z *assunta* per formare il quoziente $A:B$ deve essere omogenea alla B, e conseguentemente alla A, affinchè possa essere $A=(A:B)B$.

TEOREMA CI.

DInoti tanto A, quanto B qualsivoglia grandezza;

Io dico primieramente, che $(AB):B=A$.

Io dico secondariamente, che $(BA):B=A$.

Dimostrazione della prima parte.

ABbiamo per la definizione XXXVI. $\frac{Z}{A}=\frac{B}{(AB)}$, e per la definizione XXXIX. $\frac{B}{(AB)}=\frac{Z}{(AB):B}$; laonde pel corollario XI. de' principj $\frac{Z}{A}=\frac{Z}{(AB)}:B$, e pel corollario XXI. de' principj $(AB):B=A$; e questa è la prova della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

LA definizione XXXIX. dà $\frac{B}{(BA)}=\frac{Z}{(BA):B}$, cioè *trasponendo* $\frac{Z}{(BA):B}=\frac{B}{(BA)}$, e *permutando* $\frac{Z}{B}=\frac{(BA):B}{(BA)}$; ma la definizione XXXVI. somministra $\frac{Z}{B}=\frac{A}{(BA)}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{(BA):B}{(BA)}=\frac{A}{(BA)}$, e pel corollario XXI. de' principj $(BA):B=A$; e questa è la prova della seconda parte.

Sco-

SCOLIO.

DAl tenore della dimostrazione d' ambedue le parti di questo teorema si comprende, che acciò il quoziente $(A:B)B$ possa essere uguale ad A, l' unità Z *assunta* per formare il medesimo quoziente, deve essere la stessa, che l' unità *assunta* per formare il prodotto AB;

E parimente, che una *medesima* unità Z debba assumersi per formare il prodotto BA, e il quoziente $(BA):B$; affinchè questo possa essere eguale ad A. Acciò poi il quoziente $(BA):B$ sia concepibile, la A deve essere omogenea alla B; mentre pel primo articolo dello scolio annesso alla definizione XXXIX., la B *dividente* esser deve omogenea alla grandezza *dividenda* BA, e pel primo articolo dello scolio annesso alla definizione XXXVI., la stessa (BA), che è il prodotto della B moltiplicata per A, è sempre una grandezza omogenea alla A; adunque la B deve essere omogenea alla A; e versa-vice la A alla B.

TEOREMA CII.

SE la A sta alla B, come la a alla b; io dico, che i due quozienti $A:B$, ed $a:b$ sono eguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

POichè si à per la supposizione $A.B::a.b$, si avrà *convertendo* $B.A::b.a$, ma per la definizione XXXIX. abbiamo $B.A::Z.(A:B)$, e $b.a::Z.(a:b)$, cioè *trasponendo* $Z.(A:B)::B.A$, e $Z.(a:b)::b.a$; adunque pel corollario XII. de' principj $Z.(A:B)::Z.(a:b)$, e pel corollario XXI. de' principj $A:B=a:b$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

E Quindi, se $A=a$, e $B=b$, i due quozienti $A:B$, ed $a:b$ sono eguali; perchè in tal supposizione si à pel corollario VIII. de' principj $A.B::a.b$.

Co-

COROLLARIO II.

E Similmente, ſe nel precedente corollario A foſse la *medeſima* grandezza, che a, ovvero B foſse la *medeſima* grandezza, che b, ſuſsiſterebbe ancora in queſto caſo l'eguaglianza di $A:B$, e di $a:b$, mentre pel corollario VIII. de' principj ſuſſiſterebbe anche in queſto caſo la proporzionalità $A.B::a.b$.

SCOLIO.

OLtre l'articolo III. dello ſcolio anneſso alla definizione XXXIX., il tenore della dimoſtrazione di queſto teorema moſtra evidentemente, che i due quozienti $A:B$, ed $a:b$ debbono eſsere formati con una ſola unità aſsunta, affinchè il teorema ſuſſiſta.

TEOREMA CIII.

IL quarto termine d'una proporzionalità è uguale al prodotto dei termini medj diviſo pel primo termine.

Sia la proporzionalità $A.B::C.D$, dee provarſi, che D è uguale tanto a $(BC):A$, quanto a $(CB):A$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl corollario II. del teorema LXXVII. ſi à $AD = BC$, e $DA = CB$; adunque pel corollario II. del teorema precedente ſi avrà tanto $(AD):A = (BC):A$, quanto $(DA):A = (CB):A$; ma pel teorema CI. D è uguale tanto ad $(AD):A$, quanto a $(DA):A$; adunque D è uguale tanto a $(BC):A$, quanto a $(CB):A$. Il che dovea dimoſtrarſi.

SCOLIO.

I. SE nella proporzionalità $A.B::C.D$ i due primi termini non ſono omogenei ai due ultimi, i due quozienti $(AD):A$, e $(BC):A$ non ſono concepibili; perchè in virtù del primo articolo dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXVI., il prodotto AD è omogeneo alla grandezza moltiplicante D, e il prodotto BC è omogeneo alla grandezza moltiplicante C; ma ſecondo

condo la presente suppofizione nè la D, nè la C sono omogenee alla A; adunque nè AD, nè BC sono omogenei alla dividente A, e conseguentemente pel primo articolo dello scolio annesso alla definizione XXXIX., i due quozienti suddetti non possono concepirsi.

II. Per l' articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX., affinchè il quoziente $(CB):A$ sia eguale al quoziente $(DA)\cdot A$, debbono essere formati ambedue con una medesima unità assunta:

Affinchè poi il quoziente $(DA):A$ sia eguale alla A, egli deve esser formato colla *medesima* unità *assunta*, con cui è formato il prodotto DA, e ciò per lo scolio annesso al teorema CI.; e finalmente affinchè DA sia eguale a CB (conforme esser dee, acciò $(DA):A$ sia eguale a $(CB):A$), il prodotto DA dev' esser formato colla stessa unità *assunta*, colla quale è formato il prodotto CB, e questo per l' articolo V. dello scolio annesso alla definizione XXXVI.;

Adunque per formare il quoziente $(CB):A$ deve assumersi la *medesima* unità *arbitraria*, con cui è formato il prodotto CB.

Colla stessa ragione si proverà, che per formare il quoziente $(BC):A$, richiedesi la *medesima* unità *arbitraria*, che si assume per formare il prodotto BC.

TEOREMA CIV.

Il terzo termine d' una proporzionalità è uguale al prodotto de' termini estremi diviso pel secondo termine.

Sia come sopra $A.B::C.D$, dee provarsi, che tanto $(AD):B$, quanto $(DA):B$ è uguale a C.

DIMOSTRAZIONE.

Il corollario II. del teorema LXXVII. dà $BC = AD$, e $CB = DA$, ma pel corollario II. del teorema CII. si à tanto $(BC):B = (AD):B$, quanto $(CB):B = (DA):B$; adunque essendo pel teorema CI., tanto $(BC):B$, quanto $(CB):B$ eguale a C, ne segue, che la stessa C è uguale tanto ad $(AD):B$, quanto a $(DA):B$. Il che dovea dimostrarsi.

Sco-

SCOLIO.

I. PEr una ragione ſimile all' eſpreſſa nel primo articolo dello ſcolio anneſſo al teorema precedente, i due quozienti $(AD):B$, e $(BC):B$ non ſono concepibili, allorchè i due primi termini A, e B della proporzionalità non ſono omogenei ai due ultimi C, e D.

II. Cogli ſteſſi raziocinj, e colle medeſime cautele ſi dimoſtrerà ancora, che il primo termine A della proporzionalità $A.B::C.D$ è uguale tanto a $(BC):D$, quanto a $(CB):D$, e che il ſecondo termine B è uguale tanto ad $(AD):C$, quanto a $(DA):C$.

III. E colla medeſima prova eſpoſta nell' articolo II. dello ſcolio anneſſo al precedente teorema ſi moſtrerà, che per formare i quozienti $(AD):B$; $(DA):B$; $(BC):D$; $(CB):D$; $(AD):C$; $(DA):C$ debbono aſſumerſi quelle *medeſime* unità *arbitrarie*, colle quali ſono formati i prodotti reſpettivi AD; DA; BC; CB; AD; DA.

TEOREMA CV.

LA proporzione d' un quoziente ad un altro, v. g. di $A:B$ a $C:D$ è compoſta della proporzione, che à la *dividenda* del primo quoziente alla ſua *dividente*, e della proporzione, che à la *dividente* del ſecondo quoziente alla ſua *dividenda*.

Dee provarſi, che $\frac{A:B}{C:D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$.

SCOLIO.

PEr far la comparazione dei due quozienti $A:B$, e $C:D$, non è neceſſario, che i termini dell' uno ſieno omogenei a quelli dell' altro; è bensì neceſſario, che ſieno formati ambedue colla *medeſima* unità *aſſunta*, e ciò in vigore dell' articolo III. dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXIX.

DIMOSTRAZIONE.

LA proporzione $\frac{A:B}{C:D}$ è compoſta delle due proporzioni $\frac{A:B}{Z}$, e $\frac{Z}{C:D}$ pel teorema XXII., e per la definizione XXIII.; ma per la definizione XXXIX. si à $B.A::Z.(A:B)$, cioè *trasponendo*, indi *convertendo* $\frac{A:B}{Z}=\frac{A}{B}$, e per la stessa definizione XXXIX. si à parimente $D.C::Z.(C:D)$, cioè *trasponendo* $\frac{Z}{C:D}=\frac{D}{C}$, adunque surrogando in luogo delle due proporzioni $\frac{A:B}{Z}$, e $\frac{Z}{C:D}$ componenti la proporzione $\frac{A:B}{C:D}$, surrogando, dico, in luogo delle suddette proporzioni componenti le due proporzioni ad esse respettivamente eguali $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{C}$, la proporzione $\frac{A:B}{C:D}$ sarà composta delle due ultime pel teorema XLIII., cioè sarà $\frac{A:B}{C:D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

IL quoziente $A:B$ sta al quoziente $C:D$, come il prodotto AD della *dividenda* del primo, e della *dividente* del secondo sta al prodotto BC della *dividente* del primo, e della *dividenda* del secondo; imperciocchè pel presente teorema $\frac{A:B}{C:D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$; ma pel teorema LXXXIII. $\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A:B}{C:D}=\frac{AD}{BC}$.

COROLLARIO II.

IL quoziente $A:B$ sta ancora al quoziente $C:D$, come il prodotto DA della *dividente* del secondo, e della *dividenda* del primo sta al prodotto CB della *dividenda* del secondo, e della *dividente* del primo.

Imperciocchè pel teorema XXIII. $\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{D}{C}\times\frac{A}{B}$; ma per questo teorema CV. $\frac{A:B}{C:D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A:B}{C:D}=\frac{D}{C}\times\frac{A}{B}$; di più pel teorema LXXXIII. $\frac{DA}{CB}=\frac{D}{C}\times\frac{A}{B}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{A:B}{C:D}=\frac{DA}{CB}$.

Co-

COROLLARIO III.

SE le *dividenti* di due quozienti sono eguali, cioè se $B = D$, i quozienti sono come le *dividende*, cioè $\frac{A:B}{C:D} = \frac{A}{C}$;

Imperciocchè supponendosi $B = D$, la stessa B sarà omogenea alla C; e quindi pel teorema LXXIX. sarà $BC = CB$, e conseguentemente pel corollario VIII. de' principj sarà $\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{CB}$; ma pel primo corollario $\frac{A:B}{C:D} = \frac{AD}{BC}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A:B}{C:D} = \frac{AD}{CB}$; si à in oltre per la supposizione di $B = D$, e pel teorema LXXII. $\frac{AD}{CB} = \frac{A}{C}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{A:B}{C:D} = \frac{A}{C}$.

COROLLARIO IV.

MA se le *dividende* di due quozienti sono eguali, cioè se $A = C$; allora i quozienti sono come le *dividenti* prese al rovescio, cioè $\frac{A:B}{C:D} = \frac{D}{B}$;

Imperciocchè si à pel I. corollario $\frac{A:B}{C:D} = \frac{AD}{BC}$; ma essendo $C = A$, la medesima C è omogenea alla B, di modo che pel teorema LXXIX. $CB = BC$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{CB}$, e conseguentemente pel corollario XI. de' principj $\frac{A:B}{C:D} = \frac{AD}{CB}$; si à di più per l' ipotesi $A = C$, e pel teorema LXXIII. $\frac{AD}{CB} = \frac{D}{B}$; adunque per lo stesso corollario XI. de' principj $\frac{A:B}{C:D} = \frac{D}{B}$.

SCOLIO.

I Due ultimi corollarj potevano dedursi con simili raziocinj anche dal secondo corollario.

TEOREMA CVI.

UNo de' valori di qualsivoglia quoziente $A:B$ è uguale alla proporzione $\frac{A}{B}$.

DIMOSTRAZIONE.

PEr la definizione XXXIX. ſi à queſta proporzionalità $B:A :: Z.(A:B)$, e potendo la Z (unità *aſſunta*) ſignificare qualſivoglia grandezza di qualſivoglia ſpecie pel primo articolo dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXIX., potrà la medeſima Z ſignificare anche la proporzione d' egualità; adunque la proporzione $\frac{B}{B}$ potrà ſoſtituirſi in luogo di Z nella ſoprannotata proporzionalità, che prenderà queſt' aſpetto $B.A :: \frac{B}{B}.(A:B)$; ma pel teorema III. $\frac{B}{B}.\frac{A}{B} :: B.A$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{B}{B}.\frac{A}{B} :: \frac{B}{B}.(A:B)$, e pel corollario XXI. de' principj $A:B = \frac{A}{B}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA CVII.

QUalſivoglia quoziente $A:B$ ſta a qualſivoglia quoziente $C:D$, come la proporzione $\frac{A}{B}$ ſta alla proporzione $\frac{C}{D}$.

Queſto teorema comprende nella ſua univerſalità il teorema CII..

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema CV. la proporzione di $A:B$ a $C:D$ è compoſta delle due proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{C}$, e pel teorema LXXXIX. la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è compoſta delle due ſuddette proporzioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{D}{C}$; adunque pel I. corollario del teorema XXIV. $A:B$ ſta a $C:D$, come $\frac{A}{B}$ ſta a $\frac{C}{D}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Altra dimoſtrazione.

PEl teorema III. ſi à queſta proporzionalità

$$(\text{I}) \quad \frac{(A:B)}{(B:B)}.\frac{(C:D)}{(D:D)} :: (A:B).(C:D),$$

perchè per l' articolo VI. dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXIX. tanto $B:B$, quanto $D:D$ ſono eguali all' unità *arbi-*

tra-

traria Z, la quale può sempre supporsi, che sia la medesima nella formazione dei due suddetti quozienti $B:B$, e $D:D$; ma pel corollario III. del teorema CV. si à $\frac{A:B}{B:B}=\frac{A}{B}$, come pure $\frac{C:D}{D:D}=\frac{C}{D}$; adunque sostituendo proporzioni eguali in luogo d' eguali nella proporzionalità (1), si avrà pel corollario IX. de' principj $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}::(A:B).(C:D)$, e *trasponendo* $(A:B).(C:D)::\frac{A}{B}.\frac{C}{B}$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I.

SE $A:B=C:D$, anche $B:A=D:C$;

Imperciocché pel presente teorema $(A:B).(C:D)::\frac{A}{B}.\frac{C}{D}$, e supponendosi ora $A:B=C:D$, sarà pel corollario X. de' principj $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, e *convertendo* sarà $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$; adunque avendosi per questo teorema $(B:A).(D:C)::\frac{B}{A}.\frac{D}{C}$, si avrà per lo stesso corollario X. de' principj anche $B:A=D:C$.

COROLLARIO II.

SE $A:B=C:D$, anche $A:C=B:D$;

Imperciocchè questo teorema dà $(A:B).(C:D)::\frac{A}{B}.\frac{C}{D}$; ma per l' ipotesi $A:B=C:D$; adunque pel corollario X. de' principj $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, e permutando $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$.

Di nuovo il presente teorema dà $(A:C).(B:D)::\frac{A}{C}.\frac{B}{D}$; adunque pel corollario X. de' principj $A:C=B:D$.

COROLLARIO III.

SE le lettere A, B, C, D, F esprimono cinque grandezze in generale tutte omogenee tra loro, ed $\frac{A}{B}$ è uguale a $\frac{D}{F}$; io dico, che $A:D$ sta a $B:C$, come C ad F;

Imperciocchè per questo teorema il quoziente $A:D$ sta al quoziente $B:C$, come la proporzione $\frac{A}{D}$ alla proporzione $\frac{B}{C}$;

ma

ma pel teorema XLI. $\frac{A}{D}$ sta a $\frac{B}{C}$, come C ad F; adunque pel corollario XI. de' principj $A:D$ sta a $B:C$, come C ad F.

COROLLARIO IV.

LA proporzione di $A:B$ a $C:D$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{C}$, e $\frac{D}{B}$;

Imperciocchè secondo questo teorema la proporzione di $A:B$ a $C:D$ è uguale alla proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$, ma nella dimostrazione del teorema XC. si è provato, che la proporzione di $\frac{A}{B}$ a $\frac{C}{D}$ è uguale al prodotto di $\frac{A}{C} \times \frac{D}{B}$; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione di $A:B$ a $C:D$ è uguale al prodotto $\frac{A}{C} \times \frac{D}{B}$, e conseguentemente per la definizione XXIII. la proporzione suddetta di $A:B$ a $C:D$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{C}$, e $\frac{D}{B}$.

COROLLARIO V.

POsti i quattro quozienti $A:B$, $C:D$, $a:b$, $c:d$ tali, che le loro dividende A, C, a, c sieno proporzionali, e le dividenti B, D, b, d sieno anch'esse proporzionali; io dico, che i quattro quozienti suddetti sono proporzionali;

Imperciocchè pel teorema XLIX. si à $\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{a}{b} . \frac{c}{d}$; ma pel teorema presente si anno queste due proporzionalità

$$(A:B).(C:D)::\frac{A}{B}.\frac{C}{D}$$

$$(a:b).(c:d)::\frac{a}{b}.\frac{c}{d};$$

adunque pel corollario XII. de' principj

$$(A:B).(C:D)::(a:b).(c:d).$$

COROLLARIO VI.

E Conseguentemente, data una proporzionalità $A.B::a.b$, i termini della quale sieno tutti omogenei, e due grandezze F, G parimente omogenee a' detti termini, se i due antecedenti della

della proporzionalità data si dividono per F, e i due conseguenti per G, i quattro quozienti, che ne nasceranno, saranno proporzionali, vale a dire si avrà

$$(A:F).(B:G)::(a:F).(b:G)$$

imperciocchè le dividende di questi quattro quozienti sono proporzionali per l'ipotesi, e le dividende sono proporzionali pel corollario VIII. de' principj; adunque pel precedente corollario i quattro suddetti quozienti sono proporzionali.

Scolio

Per gl' intendenti del calcolo differenziale.

In occasione di questo teorema CVII. renderò ragione, perchè nello scolio annesso al corollario III. del teorema LXXVII. supposi, che la proporzione $\frac{dy}{b}$ fosse la *differenza* della proporzione $\frac{y}{b}$, e che la proporzione $\frac{ady}{yy}$ *negativamente presa*, cioè $-\frac{ady}{yy}$ fosse la differenza della proporzione $\frac{a}{y}$, la quale *decresce* al crescere di y pel corollario XIX. de' principj.

Si consideri pertanto in primo luogo, che in virtù del presente teorema, e *trasponendo*, la proporzione $\frac{y}{b}$ sta alla proporzione $\frac{dy}{b}$, come il quoziente $y:b$ al quoziente $dy:b$, cioè $\frac{y}{b}.\frac{dy}{b}::(y:b).(dy:b)$; adunque per la prima parte del teorema XXXIV.

$$(1)\ \frac{y}{b}+\frac{dy}{b}.\frac{y}{b}::(y:b)+(dy:b).(y:b).$$

Or siccome si sa da' periti del calcolo differenziale, che $(y:b)+(dy:b)$ cresce *infinitamente poco* rispetto ad $(y:b)$, così $\frac{y}{b}+\frac{dy}{o}$ cresce *infinitamente poco* rispetto ad $\frac{y}{b}$; altrimenti è visibile, che non sussisterebbe la proporzionalità (1), e conseguentemente $\frac{dy}{b}$ è la *differenza* di $\frac{y}{b}$.

Si consideri in secondo luogo, che per questo teorema CVII. la proporzione $\frac{a}{y}$ sta alla proporzione $\frac{ady}{yy}$, come il quoziente

$a:y$ al quoziente $ady:yy$, vale a dire $\frac{a}{y}.\frac{ady}{yy}::(a:y).(ady:yy)$, e quindi per la prima parte del teorema XXXIII.

(2) $\frac{a}{y}-\frac{ady}{yy}.\frac{a}{y}::(a:y)-(ady:yy).(a:y)$.

Conforme dunque è noto, che $(a:y)-(ady:yy)$ decresce *infinitamente poco* in ordine ad $(a:y)$, così $\frac{a}{y}-\frac{ady}{yy}$ decresce *infinitamente poco* in ordine ad $\frac{a}{y}$; poichè in caso diverso è evidente, che la proporzionalità (2) non sussisterebbe, e perciò $-\frac{ady}{yy}$ è la differenza di $\frac{a}{y}$.

O' detto, che se $\frac{y}{b}+\frac{dy}{b}$ non crescesse *infinitamente poco* rispetto ad $\frac{y}{b}$ non sussisterebbe la proporzionalità (1): e questo è chiaro a chi riflette, che se l'aumento di $\frac{y}{b}+\frac{dy}{b}$ in ordine ad $\frac{y}{b}$ fosse una grandezza finita, sarebbe sempre dabile in virtù de' corollarj III., e XXX. de' principj un' aliquota finita del conseguente $\frac{y}{b}$, la quale sarebbe minore dell' aumento $\frac{dy}{b}$, cosicchè la stessa aliquota sarebbe contenuta nel suo antecedente $\frac{y}{b}+\frac{dy}{b}$ *almeno* una *volta* di più, che l' aliquota simile, e *finita* del conseguente $(y:b)$ non è contenuta nel suo antecedente $(y:b)+(dy:b)$, l' aumento del quale è *infinitamente piccolo* in ordine ad $y:b$, e conseguentemente per la definizione XIV. la proporzione di $\frac{y}{b}+\frac{dy}{b}$ verso $\frac{y}{b}$ sarebbe *maggiore* della proporzione di $(y:b)+(dy:b)$ verso $(y:b)$, conseguenza, che in virtù del corollario XV. de' principj si oppone alla proporzionalità (1).

O' detto ancora, che se $\frac{a}{y}-\frac{ady}{yy}$ non decrescesse *infinitamente poco* in ordine ad $\frac{a}{y}$, non sussisterebbe la proporzionalità (2), e ciò è similmente manifesto; poichè se il *decremento* di $\frac{a}{y}-\frac{ady}{yy}$ rispetto ad $\frac{a}{y}$ fosse una grandezza *finita*; potrebbe sempre darsi pe' corollarj III., e XXX. de' principj un' aliquota *finita*

del

del conseguente $\frac{a}{y}$, la quale sarebbe *minore* del decremento $\frac{ady}{yy}$, talchè la stessa aliquota sarebbe contenuta nel suo antecedente $\frac{a}{y} - \frac{ady}{yy}$ almeno *una* volta di *meno*, che l'aliquota simile, e *finita* del conseguente $(a:y)$ non è contenuta nel suo antecedente $(a:y)-(ady:yy)$, il decremento del quale è *infinitamente piccolo* rispetto ad $(a:y)$, e conseguentemente per la definizione XV. la proporzione di $\frac{a}{y} - \frac{ady}{yy}$ verso $\frac{a}{y}$ sarebbe *minore* della proporzione di $(a:y)-(ady:yy)$ verso $(a:y)$; conseguenza, che in virtù del corollario XV. de' principj ripugna alla proporzionalità (2).

TEOREMA CVIII.

Qualsivoglia quoziente $A:B$ moltiplicato per qualunque grandezza C è uguale al prodotto della grandezza C, e della *dividenda* A, diviso per la *dividente* B, cioè $(A:B)C=(CA):B$.

Prima dimostrazione.

Rappresenti Z l'unità *arbitraria*.

Per la definizione XXXVI. si à $\frac{Z}{C}=\frac{A}{CA}$, e *convertendo* $\frac{C}{Z}=\frac{CA}{A}$. Si à per la definizione XXXIX. $\frac{B}{CA}=\frac{Z}{(CA):B}$, e *trasponendo* $\frac{Z}{(CA):B}=\frac{B}{CA}$; adunque per l'egualità perturbata si avrà

(1) $\frac{C}{(CA):B}=\frac{B}{A}$.

Rappresenti ora Y l'unità *arbitraria*, che può essere diversa dall'altra unità *arbitraria* Z; la definizione XXXIX. mostra $\frac{B}{A}=\frac{Y}{A:B}$, e la definizione XXXVI. fa conoscere $\frac{Y}{A:B}=\frac{C}{(A:B)C}$ adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{B}{A}=\frac{C}{(A:B)C}$, e comparando questa proporzionalità colla proporzionalità (1), lo stesso corollario XI. de' principj fa vedere, che $\frac{C}{(CA):B}=\frac{C}{(A:B)C}$ e il corollario XXI. de' principj mostrerà essere $(A:B)C=(CA):B$; il che dovea dimostrarsi.

 Sco-

SCOLIO.

I. PEl primo articolo dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXVI., il prodotto CA ſarà ſempre omogeneo alla A (e per conſeguenza alla B), ancorchè la C non foſſe omogenea ai termini del quoziente $A:B$;

Non è dunque neceſſario, che la C ſia omogenea ai termini di $A:B$, affinchè ſia concepibile il quoziente $(CA):B$; ma poſto che la C ſia omogenea ai termini di $A:B$, ſarà in tal caſo $AC = CA$ pel teorema LXXIX., e quindi pel corollario II. del teorema CII. ſarà $(CA):B = (AC):B$, ma per queſto teorema $(A:B)C = (CA):B$; adunque in queſta ſuppoſizione di C omogenea ai termini di $A:B$, ſarà ancora $(A:B)C = (AC):B$.

II. Dal tenore della dimoſtrazione del teorema preſente ſi comprende, che l'unità Z *aſſunta* per formare il prodotto CA eſſer dee la *medeſima*, che l'unità aſſunta per formare il quoziente $(CA):B$, e che queſt' iſteſſa unità *aſſunta* Z può eſſere diverſa dall' unità Y *aſſunta* per formare il quoziente $A:B$, conforme accennai.

Se poi l' unità Y, benchè diverſa dalla Z, foſſe omogenea alla C, allora il quoziente $A:B$, che deve eſſere omogeneo all' unità Y, ſarebbe omogeneo anche alla C, e pel teorema LXXIX. ſi avrebbe $C(A:B) = (A:B)C$, ed eſſendoſi provato nel preſente teorema, che $(A:B)C = (CA):B$, ne ſegue, che in queſta ſuppoſizione di Y omogenea alla C ſi à $C(A:B) = (CA):B$.

Seconda dimoſtrazione di queſto teorema.

PEl corollario IV. del teorema CV. abbiamo $\frac{A:A}{A:B} = \frac{B}{A}$, e $\frac{(CA):A}{(CA):B} = \frac{B}{A}$; adunque pel corollario XI. de' principj

$$(2)\quad \frac{A:A}{A:B} = \frac{(CA):A}{(CA):B};$$

ma per l' articolo VI. dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXIX. $A:A$ è uguale all' unità *aſſunta* Z, e pel teorema CI. $(CA):A$ è uguale a C; adunque ponendo nella proporzionalità (2) grandezze eguali in luogo d' eguali, ſi avrà pel corollario IX. de'

prin-

principj $\frac{Z}{A:B}=\frac{C}{(CA):B}$, e conseguentemente per la definizione XXXVI. sarà $(CA):B$ eguale al prodotto di $A:B$ moltiplicato per C, cioè sarà $(A:B)C=(CA):B$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

SE si considerano i due ultimi termini $(CA):A$, e $(CA):B$ della proporzionalità (2), i quali (facendo una proporzione) s' intendono paragonati insieme; si conoscerà, che l' unità arbitraria *assunta* per formare il quoziente $(CA):B$ esser dee la *medesima*, che l' unità *assunta* per formare l' altro quoziente $(CA):A$, e ciò per l' articolo V. dello scolio annesso alla definizione XXXIX.; ma per lo scolio annesso al teorema CI. l' unità, che si assume per formare il quoziente $(CA):A$, esser dee la stessa con quella, che si assume per formare il prodotto CA; adunque l' unità assunta per formare il quoziente $(CA):B$ esser dee la medesima coll' unità *assunta* per formare il prodotto CA.

Terza dimostrazione di questo teorema.

PEl teorema LXXIII. $\frac{(A:B)B}{(A:B)C}=\frac{B}{C}$, e pel corollario IV. del teorema CV. $\frac{(CA):C}{(CA):B}=\frac{B}{C}$; onde pel corollario XI. de' principj si vede essere

$$(3)\quad \frac{(A:B)B}{(A:B)C}=\frac{(CA):C}{(CA):B};$$

ma pel teorema C. $(A:B)B$ è uguale ad A, e pel teorema CI. $(CA):C$ è uguale parimente ad A; adunque ponendo grandezze eguali in luogo d' eguali nella proporzionalità (3), si vedrà sussistere pel corollario IX. de' principj quest' altra proporzionalità $\frac{A}{(A:B)C}=\frac{A}{(CA):B}$; e pel corollario XXI. de' principj sarà $(A:B)C=(CA):B$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I Due ultimi termini della proporzionalità (3); cioè $(CA):C$, e $(CA):B$ sono paragonati insieme, perchè costituiscono una proporzione; adunque per l' articolo III. dello ſcolio anneſso alla definizione XXXIX. l' unità, che ſi aſsume per formare il quoziente $(CA):B$ eſser dee la ſteſsa coll' unità, che ſi aſsume per la formazione del quoziente $(CA):C$, ma lo ſcolio anneſso al teorema CI. fa conoſcere, che l' unità, la quale ſi aſsume per la formazione del quoziente $(CA):C$ eſser dee la *medeſima*, che l' unità, la quale ſi aſsume per formare il prodotto CA; adunque con una ſteſsa unità *aſſunta* debbono formarſi il quoziente $(CA):B$, e il prodotto CA.

TEOREMA CIX.

Qualunque grandezza C moltiplicata per qualſivoglia quoziente $A:B$ è uguale al prodotto della grandezza C, e della *dividenda* A, diviſo per la *dividente* B, cioè $C(A:B) = (CA):B$.

Prima dimoſtrazione ſimile alla prima dimoſtrazione del teorema precedente.

Eſprima Z l' unità arbitraria: ſi à per la definizione XXXVI. $\frac{Z}{C} = \frac{A}{CA}$, e *convertendo* $\frac{C}{Z} = \frac{CA}{A}$; ſi à in oltre per la definizione XXXIX. $\frac{B}{CA} = \frac{Z}{(CA):B}$, e *traſponendo* $\frac{Z}{(CA):B} = \frac{B}{CA}$; adunque per l' egualità perturbata ſi ottiene

$$(1)\quad \frac{C}{(CA):B} = \frac{B}{A}.$$

Eſprima Y l' unità *arbitraria*, che può eſſere diverſa dall' unità *arbitraria* Z: per la definizione XXXIX. abbiamo $\frac{B}{A} = \frac{Y}{A:B}$ e per la definizioue XXXVI. abbiamo ancora $\frac{Y}{C} = \frac{A:B}{C(A:B)}$, e *permutando* $\frac{Y}{A:B} = \frac{C}{C(A:B)}$; laonde pel corollario XI. de' principj $\frac{B}{A} = \frac{C}{C(A:B)}$, e perciò confrontando queſta proporzionalità colla proporzionalità (1), ſi vedrà, che in virtù dello ſteſſo corollario XI. de' principj $\frac{C}{C(A:B)}$ è uguale a $\frac{C}{(CA):B}$ e quindi pel corollario XXI. de' principj $C(A:B) = (CA):B$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Sco-

Scolio.

Debbono qui farsi osservazioni simili a quelle, che si sono fatte nello scolio annesso alla prima dimostrazione del teorema precedente, e trarne le stesse conseguenze.

Seconda dimostrazione simile alla seconda dimostrazione dell' antecedente teorema.

Il corollario IV. del teorema CV. somministra $\frac{A:A}{A:B}=\frac{B}{A}$, e $\frac{(CA):A}{(CA):B}=\frac{B}{A}$; di modo che pel corollario XI. de' principj si ottiene

$$(2)\quad \frac{A:A}{A:B}=\frac{(CA):A}{(CA):B},$$ e permutando

$$(3)\quad \frac{A:A}{(CA):A}=\frac{A:B}{(CA):B}.$$

Si consideri ora, che per l'articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. $A:A$ è uguale all' unità *assunta* Z, e pel teorema CI. $(CA):A$ è uguale a C; adunque sostituendo grandezze eguali in luogo d' eguali nella proporzionalità (3), avremo pel corollario IX. de' principj $\frac{Z}{C}=\frac{A:B}{(CA):B}$, e però in virtù della definizione XXXVI. sarà $(CA):B$ eguale al prodotto di C moltiplicato per $A:B$, cioè sarà $C(A:B)=(CA):B$. Il che dovea dimostrarsi.

Scolio.

Facciasi qui la stessa riflessione, che si è fatta nello scolio annesso alla seconda dimostrazione del teorema antecedente, deducendone le conseguenze medesime, e si considerino come ivi i due ultimi termini $(CA):A$, e $(CA):B$ della proporzionalità (2) registrata in questa dimostrazione.

Terza dimostrazione simile alla dimostrazione terza dell' antecedente teorema.

Si à pel teorema LXXII. $\frac{B(A:B)}{C(A:B)}=\frac{B}{C}$, e pel corollario IV. del

del teorema CV. si à $\frac{(CA):C}{(CA):B}=\frac{B}{C}$; onde pel corollario XI. de' principj si ottiene

(4) $\frac{B(A:B)}{C(A:B)}=\frac{(CA):C}{(CA):B}$;

ora pel teorema C. $B(A:B)$ è uguale ad A, e pel teorema CI. $(CA):C$ è uguale parimente ad A, ponendo pertanto nella proporzionalità (4) grandezze eguali in luogo d' eguali, si avrà pel corollario IX. de' principj quest' altra proporzionalità $\frac{A}{C(A:B)}=\frac{A}{(CA):B}$, e pel corollario XXI. de' principj si avrà eziandio $C(A:B)=(CA):B$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

Siccome nello scolio annesso alla terza dimostrazione del teorema antecedente si sono insieme paragonati i due ultimi termini della proporzionalità (3) registrata in quella dimostrazione, così debbono qui paragonarsi insieme i due ultimi termini $(CA):C$, e $(CA):B$ della proporzionalità (4), e dedurne le medesime conseguenze, che si sono dedotte nel suddetto scolio relativo alla terza dimostrazione dell' antecedente teorema.

TEOREMA CX.

Qualsivoglia quoziente $A:B$ diviso per qualunque grandezza C è uguale alla sua *dividenda* A divisa pel prodotto della grandezza C, e della sua *dividente* B, cioè $(A:B):C=A:(CB)$.

DIMOSTRAZIONE.

Si à per la definizione XXXIX. $\frac{B}{A}=\frac{Z}{A:B}$, e *trasponendo* $\frac{Z}{A:B}=\frac{B}{A}$, indi *convertendo* $\frac{A:B}{Z}=\frac{A}{B}$, si à ancora per la definizione XXXVI. $\frac{Z}{C}=\frac{B}{CB}$; adunque per l' egualità ordinata si vede essere $\frac{A:B}{C}=\frac{A}{CB}$; ma il teorema CVII. somministra questa proporzionalità $(A:B):C$ sta ad $A:(CB)$, come $\frac{A:B}{C}$ sta ad $\frac{A}{CB}$; adunque pel corollario X. de' principj $(A:B):C=A:(CB)$. Il che dovea dimostrarsi.

Sco-

Scolio.

I. Il primo articolo dello ſcolio anneſso alla definizione XXXVI. moſtra, che il prodotto CB è ſempre omogeneo alla B (e per conſeguenza alla A), ancorchè la C non foſse omogenea ai termini del quoziente $A:B$, ma quando C ſia omogenea ai termini dello ſteſso quoziente $A:B$, allora BC ſarà eguale a CB pel teorema LXXIX., e pel corollario II. del teorema CII. ſarà $A:(CB)$ eguale ad $A:(BC)$; adunque in queſta ſuppoſizione ſi avrà $(A:B):C$ eguale anche ad $A:(BC)$.

II. Il tenore della dimoſtrazione di queſto teorema fa vedere, che l'unità *aſſunta* per formare il quoziente $A:B$ deve eſſere la ſteſsa, che l'unità *aſſunta* per formare il prodotto CB.

III. Eſsendo poi nella medeſima dimoſtrazione paragonati inſieme i due quozienti $(A:B):C$, ed $A:(CB)$; atteſochè provaſi in eſsa, che ſono eguali; eſige l'articolo III. dello ſcolio anneſso alla definizione XXXIX., che l'unità, la quale ſi aſſume per formare il primo de' ſuddetti quozienti, cioè $(A:B):C$ ſia la ſteſsa con quella, che ſi aſſume per formare il ſecondo.

Altra dimoſtrazione di queſto teorema.

Pel corollario III. del teorema CV. ſi à $\frac{(CB):B}{A:B}=\frac{CB}{A}$, e pel corollario IV. dello ſteſso teorema ſi à pure $\frac{A:A}{A:(CB)}=\frac{CB}{A}$; adunque pel corollario XI. de' principj

$$(1)\quad \frac{(CB):B}{A:B}=\frac{A:A}{A:(CB)};$$

ma pel teorema CI. $(CB):B$ è uguale a C, e per l'articolo VI. dello ſcolio anneſso alla definizione XXXIX $A:A$ è uguale all' unità *aſſunta* Z; adunque ſurrogando nella proporzionalità (1) grandezze eguali in luogo d'eguali, ſi avrà pel corollario IX. de' principj $\frac{C}{A:B}=\frac{Z}{A:(CB)}$; e per la definizione XXXIX. ſarà $A:(CB)$ eguale ad $A:B$ diviſo per C, cioè ſarà $(A:B):C=A:(CB)$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Sco-

SCOLIO.

I Due quozienti $A:B$, e $(CB):B$ vengono paragonati insieme, giacchè sono i primi due termini della proporzionalità (1); adunque per l' articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. l' unità *assunta* per formare il quoziente $A:B$ deve essere la *medesima*, che l' unità *assunta* per formare l' altro quoziente $(CB):B$; ma per lo scolio annesso al teorema CI. l' unità *assunta* per formare il quoziente $(CB):B$ è la stessa, che l' unità *assunta* per formare il prodotto CB; adunque l' unità, che si assume per la formazione del quoziente $A:B$ esser dee la *medesima* con quella, che si assume per la formazione del prodotto CB.

TEOREMA CXI.

QUalunque grandezza C divisa per qualsivoglia quoziente $A:B$ è uguale al prodotto della grandezza C, e della *dividente* B, diviso per la *dividenda* A, cioè $C:(A:B)=(CB):A$.

DIMOSTRAZIONE.

SI è provato nel teorema precedente, che $(A:B):C=A:(CB)$, ma pel teorema CVII. $(A:B):C$ sta ad $A:(CB)$, come $\frac{(A:B)}{C}$ sta ad $\frac{A}{CB}$; adunque pel corollario X. de' principj $\frac{(A:B)}{C}=\frac{A}{CB}$, e *convertendo* $\frac{C}{(A:B)}=\frac{CB}{A}$; ma pel medesimo teorema CVII. $C:(A:B)$ sta a $(CB):A$, come $\frac{C}{(A:B)}$ sta a $\frac{CB}{A}$; adunque pel corollario X. de' principj $C:(A:B)=(CB):A$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

SIccome la dimostrazione di questo teorema dipende dalla dimostrazione del teorema precedente, così le riflessioni fatte negli scolj annessi alla prima, e alla seconda dimostrazione del medesimo precedente teorema, qui ancora debbono aver luogo, e le medesime conseguenze anno da dedurne.

Se-

Seconda dimostrazione simile alla prima dimostrazione del teorema precedente.

PEr la definizione XXXVI. si vede essere $\frac{Z}{C}=\frac{B}{CB}$, e *convertendo* $\frac{C}{Z}=\frac{CB}{B}$, ma per la definizione XXXIX. si à $\frac{B}{A}=\frac{Z}{(A:B)}$, cioè *trasponendo* $\frac{Z}{(A:B)}=\frac{B}{A}$; adunque per l' egualità ordinata $\frac{C}{(A:B)}=\frac{CB}{A}$; ma pel teorema CVII., $C:(A:B)$ sta a $(CB):A$, come $\frac{C}{(A:B)}$ sta a $\frac{CB}{A}$; adunque pel corollario X. de' principj $C:(A:B)$ è uguale a $(CB):A$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

DOvranno qui farsi riflessioni simili a quelle, che si sono fatte nello scolio annesso alla prima dimostrazione del teorema precedente, e trarne le stesse conseguenze.

Nell' articolo terzo del medesimo scolio si osserva, che sono insieme paragonati i due quozienti $(A:B):C$, ed $A:(CB)$, perchè si prova la loro egualità: e qui similmente deve osservarsi, che sono paragonati insieme i due quozienti $C:(A:B)$, e $(CB):A$, de' quali parimente si prova l' egualità, e perciò in vigore dell' articolo terzo dello scolio annesso alla definizione XXXIX. l' unità, che si assume per formare il quoziente $C:(A:B)$ esser dee la medesima con l' unità, che si prende per la formazione del quoziente $(CB):A$.

Terza dimostrazione simile alla seconda dimostrazione del teorema precedente.

SI à pel corollario III. del teorema CV. $\frac{A:B}{(CB):B}=\frac{A}{C}$, ed $\frac{A:A}{(CB):A}=\frac{A}{CB}$, laonde pel corollario XI. de' principj si avrà

$$(1)\quad \frac{A:B}{(CB):B}=\frac{A:A}{(CB):A}.$$

Ora pel teorema CI. $(CB):B$ è uguale a C, e per l' articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. $A:A$ è uguale all' unità *assunta* Z; adunque ponendo nella proporzionalità (1) grandezze eguali in luogo d' eguali nè verrà in virtù del corollario IX. de' principj $\frac{A:B}{C}=\frac{Z}{(CB):A}$, e conseguentemente sarà per la definizione XXXIX. $(CB):A$ eguale a C diviso per $A:B$, cioè sarà $C:(A:B)=(CB):A$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

ANno qui luogo osservazioni simili a quelle dello scolio annesso alla seconda dimostrazione del teorema precedente, e conviene inferirne le conseguenze medesime.

TEOREMA CXII.

MOltiplicando per la medesima grandezza la *dividenda*, e la *dividente* di un quoziente, e dividendo il primo prodotto pel secondo, ne risulta un quoziente eguale al quoziente di prima. Rappresenti $A:B$ qualsivoglia quoziente, e C qualsivoglia grandezza, dee provarsi, che $(AC):(BC)=A:B$.

Prima dimostrazione.

PEl teorema LXXII. $\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$, ma pel corollario III. del teorema CV. $\frac{(AC):(BC)}{(BC):(BC)}=\frac{AC}{BC}$, ed $\frac{A:B}{B:B}=\frac{A}{B}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{(AC):(BC)}{(BC):(BC)}=\frac{A:B}{B:B}$. Ora per l'articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. $(BC):(BC)$ è uguale a $B:B$; perchè ambedue questi quozienti rappresentano l'unità *arbitraria* Z, che può supporsi la stessa; adunque pel corollario XXI. de' principj $(AC):(BC)=A:B$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I. ACciò il quoziente $(AC):(BC)$ possa rappresentarsi eguale all'altro quoziente $A:B$, debbono concepirsi formati ambidue con la *medesima unità assunta*, e questo per l'articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX.

II. Non è punto necessario, che la C sia omogenea ai termini

mini del quoziente $A:B$, poichè per l' articolo primo dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXVI., ambedue i prodotti AC, e BC ſono omogenei alla C, e conſeguentemente ſono omogenei tra loro.

Seconda dimoſtrazione.

PEl teorema LXXII. $\frac{BC}{AC} = \frac{B}{A}$, e per la definizione XXXIX. $\frac{B}{A} = \frac{Z}{A:B}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{BC}{AC} = \frac{Z}{A:B}$.
Per la ſteſſa definizione XXXIX. $\frac{BC}{AC} = \frac{Z}{(AC):(BC)}$; adunque pel citato corollario XI. de' principj $\frac{Z}{A:B} = \frac{Z}{(AC):(BC)}$; e quindi pel corollario XXI. de' principj $(AC):(BC) = A:B$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Terza dimoſtrazione.

IL teorema CVII. ſomminiſtra queſta proporzionalità $(AC):(BC)$ ſta ad $A:B$, come $\frac{AC}{BC}$ ſta ad $\frac{A}{B}$; ma pel teorema LXXII. $\frac{AC}{BC}$ è uguale ad $\frac{A}{B}$; adunque pel corollario X. de' principj $(AC):(BC)$ è uguale ad $A:B$. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA CXIII.

DA qualſivoglia grandezza C moltiplicata prima per la *dividenda*, e poi per la *dividente* di qualſivoglia quoziente $A:B$, riſultano due prodotti, il primo de' quali diviſo pel ſecondo dà un altro quoziente eguale ad $A:B$.

SCOLIO.

I. TRe dimoſtrazioni di queſto teorema dar ſi poſſono ſimiliſſime a quelle del precedente teorema; mentre baſta ſoſtituire in tutte e tre le dimoſtrazioni del teorema ſuddetto CA in luogo di AC, e CB in cambio di BC, e citare il teorema LXXIII. in vece del teorema LXXII.; mi aſterrò per tanto di replicarne il tenore.

II. Affinchè $(CA):(CB)$ ſia eguale ad $A:B$, debbono eſſer formati ambidue questi quozienti colla *stessa* unità *assunta*, e ciò per l'articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX.

PRIMO COROLLARIO

D'ambedue i teoremi CXII., e CXIII.

PEr ridurre ad una medesima *dividente* qualsivoglia coppia di quozienti, v. g. $A:B$, ed $F:G$ senza cangiarne il valore, si prendano i due quozienti $(AG):(BG)$, e $(BF):(BG)$, il primo de' quali pel teorema CXII. è uguale ad $A:B$, e il secondo è uguale ad $F:G$ pel teorema CXIII.;

Ovvero si prendano gli altri due quozienti $(GA):(GB)$, ed $(FB):(GB)$, mentre il primo di questi è uguale ad $A:B$ pel teorema CXIII., e il secondo è uguale ad $F:G$ pel teorema CXII.

SCOLIO.

IN somma per ridurre ad una medesima *dividente* due quozienti, si moltiplichi la *dividenda*, e la *dividente* del primo per la *dividente* del secondo, e si avrà un terzo quoziente eguale al primo; indi si moltiplichi la *dividente* del primo quoziente per la *dividenda*, e la *dividente* del secondo, e si avrà un quarto quoziente eguale al secondo, e di più il terzo, e quarto quoziente avranno una medesima *dividente*:

Oppure si moltiplichi per la *dividente* del secondo quoziente la *dividenda*, e la *dividente* del primo, e si avrà un terzo quoziente eguale al primo; si moltiplichi poscia la *dividenda*, e la *dividente* del secondo quoziente per la *dividente* del primo, e si otterrà un quarto quoziente eguale al secondo, ed in oltre il terzo, e quarto quoziente avranno un' istessa dividente.

SECONDO COROLLARIO

D'ambedue i teoremi CXII., e CXIII.

PEr ridurre ad una medesima dividente i tre quozienti, v. g. $m:a$; $p:u$; $n:e$ (ancorchè i termini degli uni non fossero omogenei ai termini degli altri) si riducano due di essi, v. g. $m:a$,
ed

ed $n:e$ ad una medesima dividente col modo esposto nel precedente corollario, e in loro luogo si avrà $(me):(ae)$, ed (an): (ae). Ciò fatto si riduca il terzo quoziente, v. g. $p:u$ ad avere una medesima dividente coi due quozienti già ridotti ad una stessa dividente, e questo si faccia nella maniera spiegata nel corollario precedente, e si avranno i tre quozienti, che seguono, (i quali equivagliono respettivamente ai tre quozienti $m:a$; $n:e$; $p:u$).

$(meu):(aeu)$; $(anu):(aeu)$; $(aep):(aeu)$; oppure i tre (ume): (uae); $(uan):(uae)$; $(pae):(uae)$; ovvero i tre $(emu):(eau)$; $(nau):(eau)$; $(eap):(eau)$; o anche i tre $(uem):(uea)$; $(una$: $(uea$; $(pea):(uea)$.

SCOLIO.

SI dovrà operare similmente, quando si vorrà ridurre ad una medesima *dividente* un numero di quozienti maggiore di tre (benchè i loro termini non sieno vicendevolmente omogenei); poichè se ne dovranno prender tre, e ridurli ad una medesima dividente, come si è spiegato nel secondo corollario, che precede; indi ridurre il quarto ad avere una stessa dividente coi tre quozienti ridotti ad una dividente medesima; e *procedendo gradatamente* dal caso di quattro quozienti a quello di cinque, dal caso di cinque quozienti a quello di sei, e così sempre, ec. si conseguirà l' intento.

TEOREMA CXIV.

SIeno due quozienti $A:B$, ed $E:B$ dotati d' una medesima *dividente* B; io dico, che $(A:B)\pm(E:B)$ è uguale ad $(A\pm E):B$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema CVII. si anno queste due proporzionalità

(1) $A:B$ sta ad $(A\pm E):B$, come $\frac{A}{B}$ sta ad $\frac{A\pm E}{B}$, ed

(2) $E:B$ sta ad $(A\pm E):B$, come $\frac{E}{B}$ sta ad $\frac{A\pm E}{B}$;

adunque pel corollario XII. del teorema II.

(A:

$(A:B) \pm (E:B)$ sta ad $(A \pm E):B$, come $\frac{A}{B} \pm \frac{E}{B}$ sta ad $\frac{(A \pm E)}{B}$;

ma per gli assiomi VIII, e VII. $\frac{A}{B} \pm \frac{E}{B}$ è uguale ad $\frac{(A \pm E)}{B}$; adunque pel corollario X. de' principj $(A:B) \pm (E:B)$ è uguale ad $(A \pm E):B$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I Due quozienti $A:B$, ed $(A \pm E):B$ essendo i primi due termini della proporzionalità (1) sono paragonati insieme; e quindi per l' articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. l' unità *assunta* per formare il quoziente $A:B$ deve essere la *medesima*, che l' unità *assunta* per formare il quoziente $(A \pm E):B$.

Per la stessa ragione i due quozienti $E:B$, ed $(A \pm E):B$, che sono i primi due termini della proporzionalità (2) debbono esser formati con una *medesima* unità *assunta*; ma il quoziente $(A \pm E):B$, che fa il secondo termine della proporzionalità (1) è una stessa grandezza col quoziente $(A \pm E):B$, che fa il secondo termine della proporzionalità (2), altrimenti non potrebbe addattarsi al presente teorema il corollario XII. del teorema II., conforme si richiede per la dimostrazione;

Adunque con una *medesima* unità *assunta* debbono essere formati i due quozienti $A:B$, ed $E:B$, ad effetto, che l' altro quoziente $(A \pm E):B$ possa essere la somma, o la differenza di essi.

COROLLARIO I.

SIeno tre quozienti $A:B$; $E:B$; $M:B$ dotati di una medesima *dividente*; io dico, che $(A:B \pm (E:B \mp (M:B)$ è uguale ad $(A \pm E \mp M):B$;

Imperciocchè essendo per questo teorema $(A:B) \pm (E:B)$ uguale ad $(A \pm E):B$, ne segue, che $(A \pm E):B \mp (M:B)$ è uguale ad $(A:B) \pm (E:B) \mp (M:B)$; ma in virtù di questo medesimo teorema $(A \pm E):B \mp M:B$ è uguale ad $(A \pm E \mp M):B$; adunque $(A:B) \pm (E:B) \mp (M:B)$ è uguale ad $(A \pm E \mp M):B$.

Sco-

SCOLIO.

I. SI procederà ſimilmente per provare il ſimile, quando i quozienti dotati della medeſima dividente ſono più di tre, facendo paſſaggio *gradatamente* dal caſo di tre quozienti a quello di quattro, dal caſo di quattro quozienti a quello di cinque, e così ſempre, ec.

II. Siccome nel precedente ſcolio ſi è moſtrato, che debbono eſſer formati con una *medeſima* unità *aſſunta* i due quozienti $A:B$, ed $E:B$, acciò il quoziente $(A\pm E):B$ poſsa eſsere la ſomma, o la differenza di eſſi, così ſi moſtrerà, che i due quozienti $(A\pm E):B$, ed $M:B$ debbono formarſi con una *medeſima* unità *aſſunta*, acciò l'altro quoziente $(A\pm E\mp M):B$ eſser poſsa eguale alla loro differenza, o alla loro ſomma; adunque i tre quozienti $(A:B)$, $(E:B)$, $(M:B)$ debbono eſser formati con una *medeſima* unità *aſsunta*, affinchè l'altro quoziente $(A\pm E\mp M):B$ ſia eguale ad $(A:B)\pm(E:B)\mp(M:B)$.

III. Ciò, che ſi è notato in queſto ſecondo punto à luogo ancora allorchè ſi prende un ſolo quoziente eguale all'*aggregato* di qualunque numero di quozienti dotati della medeſima dividente, e *affetti in qualſivoglia modo col ſegno* $+$, *ovvero col ſegno* $-$.

COROLLARIO II.

PEr aggiugnere, o per ſottrarre due quozienti $A:B$, ed $F:G$ (i termini del primo de' quali non è neceſsario, che ſieno omogenei a quelli del ſecondo), ſi riducano ambedue ad una medeſima dividente ſenza mutarne il valore col modo eſpoſto nel primo corollario de' due teoremi CXII., e CXIII., e ſi avrà $A:B=(AG):(BG)$, ovvero $A:B=(GA):(GB)$; ſi avrà ancora $F:G=(BF):(BG)$, ovvero $F:G=(FB):(GB)$, e in virtù del preſente teorema ſarà $(A:B)\pm(F:G)=(AG\pm BF):(BG)$, ed anche $(A:B)\pm(F:G)=(GA\pm FB):GB$.

Sco-

Scolio.

Per quanto si è notato nello scolio annesso a questo teorema, affinchè $(AG \pm BF):BG$ esser possa la somma, ovvero respettivamente la differenza di $(AG):(BG)$, e di $(BF):(BG)$, questi due ultimi quozienti debbono esser formati con la *medesima* unità *assunta*; ma pel primo articolo dello scolio annesso al teorema CXII. il quoziente $A:B$ dev' esser formato con la *stessa* unità *assunta*, con la quale è formato il quoziente $(AG):(BG)$, e il quoziente $F:G$ dev' esser formato con la *stessa* unità *assunta*, con la quale è formato il quoziente $(BF):(BG)$.

Adunque anche i due quozienti $A:B$, ed $F:G$ debbono formarsi con una *stessa* unità *assunta*, acciò uno di essi possa aggiungersi all' altro, o sottrarsi dall' altro col modo esposto in questo secondo corollario.

Le stesse ragioni, che qui non fa d' uopo di ripetere, esigono, che i due quozienti $A:B$, ed $F:G$ sieno formati con una *medesima* unità *assunta*, affinchè $(GA \pm FB):GB$ possa esser la somma, ovvero la differenza degl' istessi due quozienti $A:B$, ed $F:G$.

Tutto ciò, che nel presente scolio si è notato, sussiste egualmente anche nel caso, che i termini di $A:B$ non sieno omogenei ai termini di $F:G$.

Corollario III.

Per avere l' *aggregato* di più quozienti, che abbiano diverse dividenti, e sieno affetti ad arbitrio col segno $+$, o col segno $-$; si ridurranno tutti ad una medesima dividente, come si è mostrato nel primo, e nel secondo corollario d' ambidue i teoremi CXII., e CXIII., e nello scolio annesso al secondo di essi corollarj, e operando a tenore del primo, e terzo punto dello scolio annesso al primo corollario di questo teorema, si otterrà l' *aggregato*, che si desidera, senza che sia punto necessario, che i quozienti, i quali debbono così *aggregarsi*, abbiano i proprj termini omogenei gli uni agli altri.

Teo-

TEOREMA CXV.

UN quoziente $A:B$, moltiplicato per qualunque altro quoziente $F:G$, fa un prodotto eguale al prodotto della *dividenda* A del primo, moltiplicata per la *dividenda* F del secondo, diviso (*detto prodotto*) pel prodotto della *dividente* B del primo, moltiplicata per la *dividente* G del secondo: dee provarsi, che $(A:B)(F:G) = (AF):(BG)$.

DIMOSTRAZIONE.

NElla dimostrazione del teorema LXXXIII. si è provato, che $\frac{B}{B} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{F}{G} \cdot \frac{AF}{BG}$, e pel teorema CVII. $B:B$ sta ad $A:B$, come $\frac{B}{B}$ ad $\frac{A}{B}$, sta ancora per lo stesso teorema, $F:G$ ad $(AF):(BG)$, come $\frac{F}{G}$ ad $\frac{AF}{BG}$, e quindi pel corollario XII. de' principj $B:B$ sta ad $A:B$, come $F:G$ sta ad $(AF):(BG)$.

Ma per l' art. VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. $B:B$ è uguale all' unità *arbitraria* Z; adunque per la definizione XXXVI., il prodotto, che nasce dal quoziente $A:B$, moltiplicato pel quoziente $F:G$, è uguale al quoziente $(AF):(BG)$, cioè $(A:B)(F:G) = (AF):(BG)$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

RIflettendo a quanto si dichiarò nello scolio annesso al teorema LXXXIII., mediante il qual teorema si dimostra la proporzionalità $\frac{B}{B} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{F}{G} \cdot \frac{AF}{BG}$, che entra nella dimostrazione del presente teorema, si vedrà, che l' unità *assunta* per formare il prodotto AF è la stessa, che l' unità *assunta* per formare il prodotto BG; laonde entrando questi medesimi prodotti nell' espressione del quoziente $(AF):(BG)$, se ne deduce, che essi debbono esser formati con una *medesima* unità *assunta*.

Non è però necessario, che questa *medesima* unità *arbitraria* si assuma per formare il quoziente $(AF):(BG)$; perchè sì il prodotto AF, che il prodotto BG possono riguardarsi, come grandezze semplici, allorchè formasi detto quoziente.

COROLLARIO I.

IL prodotto di molti quozienti $A:B$; $F:G$; $H:I$, ec. è uguale al prodotto di tutte le *dividende* (ordinatamente prese), diviso pel prodotto di tutte le *dividenti* (ordinatamente prese), vale a dire è uguale ad $(AFH$, ec.$):(BGI$, ec.$)$.

Imperciocchè per questo teorema il prodotto di $A:B$, e di $F:G$ è uguale ad $(AF):(BG)$; adunque il prodotto di $A:B$, di $F:G$, e di $H:I$ è uguale al prodotto di $(AF):(BG)$ moltiplicato per $H:I$, e questo nuovo prodotto è uguale pel presente teorema ad $(AFH):(BGI)$;

E così procedendo, si vedrà, che questo corollario è generalmente vero.

SCOLIO.

I. NOn è punto necessario, che i quozienti, i quali si moltiplicano insieme, abbiano gli uni i loro termini omogenei ai termini degli altri.

II. Per la ragione accennata nel precedente scolio, e spiegata nello scolio annesso al teorema LXXXIII., è necessario, che moltiplicando AF per H, e BG per I, si prenda una *medesima* unità *assunta*.

III. Non è però necessario, che questa *comune* unità *assunta* sia la medesima con quella, che si asunse nel moltiplicare A per F, e B per G; mentre i due prodotti già formati AF, e BG posono considerarsi come due grandezze semplici, allorchè si formano i due nuovi prodotti $(AF)\,H$, e $(BG)\,I$, conforme si è espreso nell' articolo sesto dello scolio anneso alla definizione XXXVI.

IV. Nel formare poi il nuovo quoziente $(AFH):(BGI)$ neppure è necesario di prendere per unità *assunta* quelle unità *arbitrarie*, che si asunsero per formare i due prodotti AFH, e BGI, i quali posono riguardarsi come due grandezze semplici, allorchè si forma il quoziente sopraddetto.

V. Se tutti i quozienti, che si moltiplicano insieme anno i loro termini omogenei, non è necesario, che sieno disposte *ordina-*

dinatamente nei reſpettivi loro prodotti, ec. le *dividende*, e le *dividenti*, perchè in virtù del I. corollario del teorema LXXXI. queſti medeſimi reſpettivi prodotti ſaranno ſempre eguali tra loro, qualunque ſia l'ordine, che ſerbano in eſsi le grandezze moltiplicate, purchè nel formare i ſopraddetti diverſi prodotti, ed anche i due primitivi prodotti *AFH*, ec., e *BGI*, ec. aſsumaſi ſempre una *medeſima unità arbitraria*, laonde pel corollario I. del teorema CII. i quozienti, ec. formati da queſti reſpettivi prodotti ſaranno ſempre eguali al quoziente (*AFH*, ec.) :(*BGI*, ec.)

Nel formare però i ſopraddetti diverſi quozienti, ec. dee prenderſi quella *ſteſſa* unità *arbitraria*, che ſi è *aſſunta* per formare il quoziente primitivo (*AFH*, ec.):(*BGI*, ec.), e ciò ad oggetto di ſalvare l'eguaglianza de' ſuddetti diverſi quozienti, ec. col quoziente primitivo; ma queſta ſeconda unità *arbitraria* potrà eſsere differente dall' altra unità *arbitraria*, che ſerve a formare i prodotti *AFH*, ec., e *BGI*, ec. in conformità dell' articolo IV. di queſto ſcolio.

E' viſibile, che ſimiglianti rifleſsioni debbono aver luogo in qualunque caſo più compoſto.

COROLLARIO II.

SE ſi à da moltiplicare un quoziente $A:B$ per ſe medeſimo *una volta*, prendaſi $(AA):(BB)$; ſe due volte, prendaſi $(AAA):(BBB)$, ſe tre volte, prendaſi $(AAAA):(BBBB)$, e così ſempre, ec.

COROLLARIO III. dedotto dal II.

PEr elevare un quoziente $A:B$ ad una dignità di qualſivoglia *grado*, ſi dee moltiplicare $A:B$ *tante* volte per ſe ſteſſo, *quante unità meno una* contiene il numero, che eſpone il *grado* della dignità richieſta, e ciò ſi deduce dalla definizione XXXVII.;

Adunque per elevare un quoziente $A:B$ ad una dignità di qualſivoglia *grado*, la dignità *ſimile* della *dividenda A* dee dividerſi per la dignità *ſimile* della *dividente B*, e queſto nuovo quoziente ſarà la dignità richieſta del quoziente $A:B$.

SCOLIO.

LE riflessioni fatte negli articoli II., III., e IV. dello scolio annesso al I. corollario di questo teorema anno luogo anche in ordine ai precedenti corollarj II., e III.

COROLLARIO IV.

SIgnifichi R qualunque grandezza, io dico, che il quoziente $R:R$ moltiplicato per se medesimo quante volte si vorrà, è sempre eguale a se medesimo, cioè $(R:R)(R:R)(R:R)$, ec. è sempre eguale al quoziente semplice $R:R$;

Imperciocchè il quoziente $R:R$ moltiplicato per se medesimo quante volte si vorrà è uguale ad $(RRR$, ec.$):(RRR$, ec.) pel corollario II., ma quest' ultimo quoziente è uguale all' unità *assunta* per l' articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX., e per lo stesso articolo il quoziente $R:R$ è uguale anch' esso all' unità *assunta;* adunque il quoziente $R:R$ moltiplicato per se medesimo quante volte si vorrà è sempre eguale a se medesimo; purchè però nel formare i diversi quozienti rappresentati dall' espressione generale $(RRR$, ec.$):(RRR$, ec.) prendasi sempre la *medesima* unità *arbitraria*, che si è assunta nel formare il quoziente $R:R$.

Altra dimostrazione di questo corollario.

PEr l' articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. $R:R$ è uguale all' unità *assunta* Z, ma per l' articolo XI. dello scolio annesso alla definizione XXXVI. ZZZ, ec. è sempre eguale a Z, purchè però nel formare i diversi prodotti di Z moltiplicata per Z quante volte si vorrà, assumasi sempre la *stessa* unità *arbitraria* Z, adunque surrogando in luogo di Z il suo valore $R:R$ nell' espressione ZZZ, ec $= Z$ ne risulterà $(R:R)$ $(R:R)(R:R)$, ec. $= R:R$.

TEOREMA CXVI.

UN quoziente $A:B$ diviso per qualunque altro quoziente $F:G$ da un quoziente eguale al prodotto della *dividenda* A del

primo

primo moltiplicata per la *dividente* G del secondo, diviso (*questo prodotto*) pel prodotto della *dividente* B del primo moltiplicata per la *dividenda* F del secondo:

Dee provarsi, che $(A:B):(F:G) = (AG):(BF)$.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno le due proporzioni $\frac{A}{B}$, ed $\frac{F}{G}$: è chiaro per la definizione XXXII., che acciò abbiasi il quoziente di $\frac{A}{B}$ divisa per $\frac{F}{G}$ deve aversi questa proporzionalità $\frac{F}{G} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{B}{B} \cdot \left[\frac{A}{B} : \frac{F}{G}\right]$, ma si è provato nel corollario VII. del teorema LXXXIII., che $\frac{AG}{BF}$ è il quoziente di $\frac{A}{B}$ divisa per $\frac{F}{G}$, vale a dire, che $\frac{A}{B} : \frac{F}{G} = \frac{AG}{BF}$; adunque surrogando nell' ultima proporzionalità, la grandezza eguale $\frac{AG}{BF}$ in luogo dell' ultimo termine di quella, ne verrà pel corollario IX. de' principj la proporzionalità seguente:

(1) $\frac{F}{G} \cdot \frac{A}{B} :: \frac{B}{B} \cdot \frac{AG}{BF}$.

Ciò posto riflettasi, che pel teorema CVII. $F:G$ sta ad $A:B$, come $\frac{F}{G}$ ad $\frac{A}{B}$, e che parimente $B:B$ sta ad $(AG):(BF)$, come $\frac{B}{B}$ ad $\frac{AG}{BF}$; adunque pel corollario XII. de' principj si vede, che $F:G$ sta ad $A:B$, come $B:B$ ad $(AG):(BF)$, e perchè $B:B$ è uguale all' unità *arbitraria* Z per l' articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXIX., vedesi eziandio per la stessa definizione XXXIX., che $(AG):(BF)$ è il quoziente di $A:B$ divisa per $F:G$, cioè $(A:B):(F:G) = (AG):(BF)$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I. Non è necessario, che i termini di $A:B$ sieno omogenei ai termini di $F:G$, perchè in virtù del I. articolo dello scolio annesso alla definizione XXXVI. il prodotto AG sarà sempre omogeneo alla G, e il prodotto BF alla F, di modo che ambidue questi prodotti saranno tra loro omogenei, siccome la

F,

F, e la G sono omogenei tra loro, e in tal guisa il quoziente $(AG):(BF)$ sarà possibile, poichè avrà la condizione, che si esige nel primo articolo dello scolio annesso alla definizione XXXIX.

II. I sopraddetti due prodotti AG, e BF debbono formarsi colla *stessa* unità *assunta*, in vigore dell'articolo VI. dello scolio annesso alla definizione XXXVI., perchè i due medesimi prodotti sono paragonati insieme nella dimostrazione di questo teorema, e formano quella proporzione, che è il quarto termine della proporzionalità (1).

III. Sono ancora paragonati tra loro nella dimostrazione del teorema presente i due quozienti $F:G$, ed $A:B$, e conseguentemente con una sola unità *assunta* debbono formarsi ambidue per l'articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX.; ma non è necessario, che questa unità *assunta* sia la *medesima* con quella unità assunta, che è espressa nell' articolo II. di questo scolio; perchè ciò non esige il tenore della dimostrazione del teorema presente.

IV. Quando i termini di $A:B$ sono omogenei a quelli di $F:G$, si faranno riflessioni simiglianti a quelle, che si sono spiegate nell' articolo V. dello scolio annesso al I. corollario del teorema precedente, intorno alla *varia disposizione*, che tener possono le grandezze A, e G, e le grandezze B, ed F ne' loro respettivi prodotti, e intorno all' *identità* dell' unità *arbitraria*, con cui dovranno formarsi quei quozienti, che saranno eguali al quoziente $(AG):(BF)$, vale a dire i quozienti $(AG):(FB)$, $(GA):(FB)$, $(GA):(BF)$. Non sarà d'uopo pertanto, ch'io replichi tali riflessioni.

TEOREMA CXVII.

Sia qualsivoglia quoziente $P:Q$. Tra una grandezza *arbitraria* V, e la *dividenda* P si prendano quante medie proporzionali si vogliono, e queste sieno A, C, F, ec.

Tra la stessa grandezza *arbitraria* V, e la *dividente* Q si prendano *altrettante* medie proporzionali, e queste sieno B, D, G, ec.

Io dico, che la *prima* delle medie proporzionali del primo ordi-

ordine, cioè A, divisa per la *prima* delle medie proporzionali del second' ordine, cioè per B, da un quoziente $A:B$ eguale alla radice del quoziente $P:Q$ d' un *grado* tale, che il numero *esponente* di esso *grado* è uguale al *numero* delle medie proporzionali tra V, e P accresciuto dell' unità.

Dimostrazione.

Per le supposizioni, e per quello, che si è provato nel corollario III. del teorema XLVIII., le seguenti proporzioni $\frac{V}{V}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{F}{G}$, ec. sono in proporzione geometrica continua, cioè in progressione geometrica, e questa progressione à *tanti* termini, *quanti* sono gli antecedenti, oppure (il che è lo stesso) i conseguenti delle proporzioni suddette: ciò posto agevolmente si proverà per mezzo del corollario XII. de' principj, che ancora gl' infrascritti respettivi quozienti $V:V$, $A:B$, $C:D$, $F:G$, ec., corrispondenti alle medesime proporzioni, sono in proporzione geometrica continua, vale a dire in progressione geometrica; poichè pel teorema CVII. ciascuno di questi quozienti sta a quello, che lo segue, come ciascuna delle accennate proporzioni respettivamente prese sta a quella, che la segue; laonde pel corollario VI. del teorema LXXXIII. si à l' infrascritta proporzionalità: il quoziente $V:V$ (primo termine della progressione) moltiplicato per se medesimo *tante* volte, *quanti* sono i termini intermedj della progressione tra il primo termine $V:V$, e l' ultimo $P:Q$, cioè *tante* volte, *quante* sono le medie proporzionali tra V, e P,

Sta al quoziente $A:B$ (secondo termine della progressione) moltiplicato *altrettante volte* per se medesimo;

Come il quoziente $V:V$ (primo termine della progressione medesima),

Sta al quoziente $P:Q$ (ultimo termine di essa progressione); ma pel corollario IV. del teorema CXV. il primo termine di questa proporzionalità è uguale al terzo; adunque pel corollario XXI. de' principj anche il secondo termine della medesima proporzionalità è uguale al quarto, cioè il quoziente $A:B$ moltiplitiplicato per se medesimo *tante* volte, *quante* sono le medie proporzionali tra V, e P è uguale al quoziente $P:Q$; e quindi per la definizione XXXVIII. $A:B$ è uguale alla radice del quoziente $P:Q$ d' un *grado* tale, che il *numero* esponente di esso *grado* è uguale al *numero* delle medie proporzionali tra V, e P *accresciuto dell' unità*.

SCOLIO.

AFfinchè il quoziente $V:V$ moltiplicato tante volte per se medesimo sia eguale a se medesimo, i diversi prodotti del quoziente $V:V$ moltiplicato per se stesso debbono concepirsi formati colla *medesima* unità *assunta*, con cui si concepisce formato il quoziente $V:V$ a tenore di quanto si esige nella seconda dimostrazione del corollario IV. del teorema CXV.;

Oppure il quoziente $(VVV$, ec.$):(VVV$, ec.$)$ dee formarsi colla *stessa* unità *arbitraria*, che si è assunta per formare il quoziente $V:V$, e ciò in conformità di quello, che si richiede nella prima dimostrazione del suddetto corollario IV. del teorema CXV.

COROLLARIO I.

QUalunque sia il valore della grandezza *arbitraria*, tra la quale è la *dividenda* P, si prendono le medie proporzionali;

Io dico, che è sempre lo stesso il valore del *nuovo* quoziente, che ne risulta, eguale alla *radice* di $P:Q$ di qualunque *grado*, purchè non varj il grado dalla *radice*, e purchè abbiasi riguardo a quanto si è notato nello scolio annesso al presente teorema;

Imperciocchè in quanto all' assunzione già fatta della grandezza *arbitraria* V, ec. si è già veduto nella dimostrazione di questo teorema, che il quoziente $A:B$ è la *radice* del *grado*, ec. del quoziente $P:Q$, siccome pel corollario III. del teorema XLVIII., e per lo scolio a quello anneso la proporzione $\frac{A}{B}$ è la radice dello stesso *grado*, ec. della proporzione $\frac{P}{Q}$.

In quanto poi all' assunzione di qualunque altra grandezza *arbi-*

arbitraria, v. g. di T diversa dalla V; sia a la *prima* d' altrettante medie proporzionali tra T, e la *dividenda* P, e sia b la *prima* d' altrettante medie proporzionali tra la stessa T, e la *dividente* Q.

Il presente teorema mostra, che il quoziente $a:b$ è la *radice simile* del quoziente $P:Q$, siccome gli scolj annessi ai corollarj III., e IV. del teorema XLVIII. fanno conoscere, che la proporzione $\frac{a}{b}$ è la *radice simile* della proporzione $\frac{P}{Q}$.

Ora pel teorema CVII. si à questa proporzionalità $(a:b)$. $(A:B)::\frac{a}{b}.\frac{A}{B}$, e nello scolio annesso al corollario IV. del teorema XLVIII. si è dimostrata $\frac{a}{b}$ eguale ad $\frac{A}{B}$; adunque pel corollario X. de' principj $a:b$ è uguale ad $A:B$.

SCOLIO.

I. SI noti, che in virtù dell' articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. i due quozienti $a:b$, ed $A:B$ per poter essere paragonati tra loro, e conseguentemente per essere concepiti tra loro eguali debbono concepirsi formati colla *medesima* unità assunta.

II. Per poi formare i due quozienti suddetti $a:b$, ed $A:B$, non è punto necessario, che si assuma per unità *comune* alcuna delle grandezze *arbitrarie* V, e T considerate nel presente teorema, e in questo corollario.

III. E' bensì necessario, affinchè il quoziente $(AAA$, ec.$)$: $(BBB$, ec.$)$ sia eguale al quoziente $P:Q$ (come esser deve in virtù della definizione XXXVIII., acciò $A:B$ sia la *radice* del *grado*, ec di $P:Q$) è necessario, dico, che ambidue i quozienti $(AAA$, ec.$):(BBB$, ec.$)$, e $P:Q$ si concepiscano formati colla *medesima* unità *arbitraria*, e questo per l' articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX.

IV. Per la stessa ragione debbono concepirsi formati colla *medesima* unità *arbitraria* i due quozienti $(aaa$, ec.$):(bbb$, ec.$)$, e $P:Q$; adunque colla stessa unità assunta debbono concepirsi formati i due quozienti $(AAA$, ec.$):(BBB$, ec.$)$, ed $(aaa$, ec.$)$ $(bbb$, ec.$)$.

COROLLARIO II.

PEr prendere la *radice* di qualunque *grado* del quoziente $P:Q$, potrà anche ſupporſi, che la grandezza *arbitraria* V ſia eguale alla *dividenda* P, ovvero che ſia eguale alla *dividente* Q.

Nel primo caſo le medie proporzionali tra la grandezza arbitraria V (eguale a P), e la *dividenda* P ſaranno tutte eguali a P, altrimenti non potrebbero eſſere medie proporzionali tra P, e P.

E nel ſecondo caſo le medie proporzionali tra la grandezza *arbitraria* V (eguale a Q), e la dividente Q ſaranno tutte eguali a Q, altrimenti non potrebbero eſſere medie proporzionali tra Q, e Q.

TEOREMA CXVIII.

QUalunque termine (che io chiamerò T) d'una progreſſione geometrica, dopo il ſecondo, è uguale ad una dignità del ſecondo termine, il *numero* eſponente della quale è minore di una unità del numero, che indica il *ſito*, che ottiene nella progreſſione il termine T, è uguale, dico, alla detta dignità del ſecondo termine, diviſa per una dignità del primo termine, il numero eſponente della quale è minore di due unità del numero, che indica il *ſito*, che ottiene nella progreſſione il termine T.

Sia la progreſsione geometrica A, B, C, D, E, ec., dee provarſi, che il terzo termine C è uguale a $\frac{BB}{A}$, che il quarto termine D è uguale a $\frac{BBB}{AA}$, che il quinto termine E è uguale a $\frac{BBBB}{AAA}$, e così, ec.

DIMOSTRAZIONE.

I. ESſendo i termini A, B, C, D, E, ec. in progreſsione geometrica, ſarà $A.B::B.C$; adunque pel teorema CIII. C è uguale a $\frac{BB}{A}$.

II. Sarà ancora $B.C::C.D$, ma $A.B::B.C$; adunque pel corollario XI. de' principj $A.B::C.D$, ovvero ponendo in luogo go di C il suo valore $\frac{BB}{A}$, trovato nel primo punto, sarà pel corollario IX. de' principj $A.B::(BB:A).D$; adunque pel teorema CIII. D è uguale a $BB:A$ moltiplicato per B, e diviso per A, cioè pe' teoremi CVIII., e CX., e pe' primi articoli degli scolj annessi alle prime dimostrazioni di quelli, D è uguale a $(BB)B:(A)A$, cioè a $BBB:AA$.

III. Sarà in oltre C a D, come D ad E, ma si è provato nel secondo punto, che A è a B, come C a D, adunque pel corollario XI. de' principj $A.B::D.E$, ovvero sostituendo in cambio di D il suo valore $BBB:AA$, ritrovato nel secondo punto, sarà parimente pel corollario IX. de' principj $A.B::(BBB:AA).E$; adunque pel teorema CIII. E è uguale a $BBB:AA$ moltiplicato per B, e diviso per A, cioè pe' teoremi CVIII., e CX., e per gli primi articoli degli scolj annessi alle prime dimostrazioni di essi, E è uguale a $BBB(B):AA(A)$, cioè a $BBBB:AAA$.

Proseguendo questo raziocinio si vedrà nello stesso modo, che il teorema è generalmente vero.

SCOLIO.

I. IN ordine all' espressione $BB:A$ del terzo termine della progressione, si consideri, che in virtù dello scolio annesso al teorema CIII. colla medesima unità *assunta*, con cui è formato il prodotto BB dee formarsi anche il quoziente $BB:A$.

II. Intorno all' espressione $(BB)B:(A)A$ del quarto termine della progressione, riflettasi, che in vigore dell' articolo II. dello scolio annesso alla I. dimostrazione del teorema CVIII. l' unità assunta per formare il prodotto $(BB)B$ esser dee la medesima, che l' unità, la quale si assumerebbe per formare il quoziente $(BB)B:A$; benchè quest' istessa unità assunta per formare il prodotto $(BB)B$ possa essere diversa dall' unità, che si assume per formare il quoziente $BB:A$, cioè pel I. articolo del presente scolio, dall' unità, che si assunse per formare il prodotto BB; ma in virtù dell' articolo II. dello scolio annesso alla I. dimostrazione del teorema CX., l' unità, che si assumerebbe per formare il quoziente $(BB)B:A$ dovrebbe essere la stessa, che l' unità *assunta* per formare il prodotto $(A)A$, adunque per formare questo medesimo prodotto $(A)A$ deve assumersi la stessa unità, che si assunse per formare il prodotto $(BB)B$.

E' altresì necessario, che per formare il quoziente $BBB:AA$ si assuma la *medesima* unità, che si assunse per formare il quoziente $BB:A$, cioè (pel I. articolo di questo scolio) quella *medesima* unità *arbitraria*, con cui si formò il prodotto BB numeratore del quoziente $BB:A$, che equivale al terzo termine della progressione;

Imperciocchè stando pel secondo punto della dimostrazione di questo teorema la A alla B, come la C alla D, ed essendosi provato, che $C = BB:A$, e che $D = BBB:AA$, starà ancorà pel corollario IX. de' principj la A alla B, come $BB:A$ sta a $BBB:AA$, adunque i due quozienti $BB:A$, e $BBB:AA$ sono paragonati insieme, e conseguentemente per l' articolo III. dello scolio annesso alla definizione XXXIX. debbono essere formati ambidue con una *medesima* unità *assunta*.

III. In ordine all' espressione $(BBB)B:(AA)A$ del quinto termine, similmente si proverà, che per formare il prodotto $(BBB)B$ non è necessario valersi dell' unità *arbitraria*, che servì per la formazione del prodotto BB, o di quella, che si assunse per formare il prodotto $(BB)B$;

Ma che a formare il prodotto $(AA)A$ si richiede quell' unità *arbitraria*, con cui si formò il prodotto $(BBB)B$;

E che per la formazione del quoziente $BBBB:AAA$ è necessario, che si assuma quella *medesima* unità *arbitraria*, colla quale formossi il prodotto BB.

Quest' ultima asserzione si prova così:

Pel terzo punto della dimostrazione di questo teorema la A sta alla B, come la D alla E, ed essendosi dimostrato, che $D = BBB:AA$, e che $E = BBBB:AAA$ sta ancora pel corollario IX. de' principj la A alla B, come $BBB:AA$ sta a $BBBB:AAA$; adunque i due quozienti $BBB:AA$, e $BBBB:AAA$ sono paragonati insieme, e conseguentemente per l' articolo III.

dello

dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXIX. dobbono eſſer formati ambidue con una *medeſima* unità *aſſunta*.

Ma per l' articolo ſecondo del preſente ſcolio il quoziente $BBB:AA$ dev' eſſer formato con la *medeſima* unità, che ſi aſſunſe per formare il prodotto BB; adunque anche il quoziente $BBBB:AAA$ dev' eſſer formato con la *ſteſſa* unità, che ſi aſſunſe per formare il prodotto BB numeratore del quoziente $BB:A$, che equivale al ſecondo termine della progreſſione.

IV. Egli è viſibile, che ſimiglianti rifleſſioni anno luogo in ordine a tutti gli altri termini della progreſſione, che vengono dopo il quinto.

V. Egli è chiaro ancora dopo le coſe, che ſi ſono diſtintamente notate, che le diverſe unità, le quali poſſono aſſumerſi ne' modi eſpreſſi di ſopra, non variano punto il valore dell' eſpreſſione, che in forma di quozienti eſprimono nella maniera eſpoſta il valore de' termini della progreſſione.

Teorema CXIX.

Sieno le due progreſſioni geometriche (1), e (2), le quali coſtino di qualunque numero di termini, ed abbiano comune il primo termine.

(1) A, B, C, D, E, ec.

(2) A, G, H, I, K, ec.

Io dico, che $\frac{H}{C}$ è duplicata di $\frac{G}{B}$; che $\frac{I}{D}$ è triplicata di $\frac{G}{B}$; che $\frac{K}{E}$ è quadruplicata di $\frac{G}{B}$, e così ſempre, ec.

Dimostrazione.

In conformità del precedente teorema le progreſſioni (1), e (2) ſi eſprimano reſpettivamente così:

(I.) A, B, $BB:A$, $BBB:AA$, $BBBB:AAA$, ec.

(II.) A, G, $GG:A$, $GGG:AA$, $GGGG:AAA$, ec.

E pel corollario VIII. de' principj ſi avrà $\frac{H}{C}=\frac{GG:A}{BB:A}$, $\frac{I}{D}=\frac{GGG:AA}{BBB:AA}$, $\frac{K}{E}=\frac{GGGG:AAA}{BBBB:AAA}$, ec.

Ma pel corollario III. del teorema CV. $\frac{GG:A}{BB:A}=\frac{GG}{BB}$; adun-

que

que pel corollario XI. de' principj $\frac{H}{C}=\frac{GG}{BB}$; in oltre pel corollario XIII. del teorema LXXXIII. $\frac{GG}{BB}$ è duplicata di $\frac{G}{B}$; adunque $\frac{H}{C}$ è duplicata di $\frac{G}{B}$,

Insistendo ne' vestigj del medesimo raziocinio si proverà similmente, che $\frac{I}{D}=\frac{GGG}{BBB}$, e che $\frac{K}{E}=\frac{GGGG}{BBBB}$; adunque $\frac{I}{D}$ è triplicata di $\frac{G}{B}$, e $\frac{K}{E}$ è quadruplicata di $\frac{G}{B}$.

Chiaramente si vede, che il resto del teorema si prova nella medesima guisa, e per conseguenza egli è vero generalmente.

TEOREMA CXX.

Sieno le due progressioni geometriche (1), e (2) di qualunque, ma egual numero di termini, e il primo termine di esse sia comune:

(1) A, B, C.....D.
(2) A, M, L.....K.

E sieno le due altre progressioni geometriche (3), e (4)

(3) G, F, E.....D.
(4) G, H, I.....K.

Le quali abbiano comune tra loro il primo termine; contengano ad una ad una tanti termini, quanti ne anno le progressioni (1), e (2) ad una ad una; l' ultimo termine della progressione (3) sia lo stesso, che l' ultimo della progressione prima, o sia (1), e l' ultimo termine della progressione (4) sia lo stesso, che l' ultimo termine della progressione (2);

Io dico, che B sta ad M, come F ad H, che C sta ad L, come E ad I, e così, ec.

DIMOSTRAZIONE.

I. Le progressioni (1), (2), (3), e (4) in virtù del teorema CXVIII. si esprimano respettivamente così:

(I.) A, B, $BB:A$.....(BBB, ec.):(AA, ec.).
(II.) A, M, $MM:A$.....(MMM, ec.):(AA, ec.).
(III.) G, F, $FF:G$.....(FFF, ec.):(GG, ec.).

(IV.)

(IV.) G, H, $HH:G$.....(HHH, ec.):(GG, ec.).

Egli è chiaro pel corollario VIII. de' principj, che D sta a K, come D a K, ma in virtù dell' espressioni (I.), (II.), (III.), e (IV.) la D è uguale a (BBB, ec.):(AA, ec.), ed anche ad (FFF, ec.):(GG, ec.), come pure la K è uguale ad (MMM, ec.):(AA, ec.), e ancora ad (HHH, ec.):(GG, ec.); adunque pel corollario IX. de' principj, sussiste questa proporzionalità (BBB, ec.):(AA, ec.) sta ad (MMM, ec.):(AA, ec.), come (FFF, ec.):(GG, ec.) sta ad (HHH, ec.):(GG, ec.); ma pel corollario III. del teorema CV., e *trasponendo*, BBB, ec. sta ad MMM, ec., come (BBB, ec.):(AA, ec.) sta ad (MMM, ec.):(AA, ec.), e per la stessa ragione FFF, ec. sta ad HHH, ec., come (FFF, ec.):(GG, ec.) sta ad (HHH, ec.):(GG, ec.).

Adunque pel corollario XII. de' principj, BBB, ec. sta ad MMM, ec., come FFF, sta ad HHH, ec., cioè $\frac{BBB,\text{ ec.}}{MMM,\text{ ec.}} = \frac{FFF,\text{ ec.}}{HHH,\text{ ec.}}$, e conseguentemente per la seconda parte del coroll. II. del teorema XLII. $\frac{B}{M} = \frac{F}{H}$.

II. Si è provato nel primo punto, che $\frac{B}{M} = \frac{F}{H}$; adunque per la prima parte del corollario II. del teorema XLII. $\frac{BB}{MM} = \frac{FF}{HH}$, cioè $BB.MM::FF.HH$; ma pel corollario III. del teorema CV. $BB:A$ sta ad $MM:A$, come BB ad MM, e per la stessa ragione $FF:G$ sta ad $HH:G$, come FF ad HH; adunque pel corollario XII. de' principj, $BB:A$ sta ad $MM:A$, come $FF:G$ ad $HH:G$.

Ora pel teorema CXVIII. $C = BB:A$; $L = MM:A$; $E = FF:G$; $I = HH:G$; adunque pel corollario IX. de' principj $C.L::E.I$.

III. E' evidente, che il resto del teorema si proverà come il secondo punto di questa dimostrazione; e perciò il teorema è generalmente vero.

TEOREMA CXXI.

Sieno quante progressioni geometriche si vogliano, le quali ab-

abbiano comune il primo termine, sieno v. g. le quattro infrascritte

(1) *A*, *B*, *C*, *D*, ec.
(2) *A*, *G*, *H*, *I*, ec.
(3) *A*, *M*, *N*, *O*, ec.
(4) *A*, *R*, *S*, *T*, ec.

io dico, che se *B*, *G*, *M*, *R* sono in proporzione geometrica continua, anche *C*, *H*, *N*, *S*, e *D*, *I*, *O*, *T* sono in proporzione geometrica continua, e così sempre, ec.

DIMOSTRAZIONE.

LE progressioni (1), (2), (3), e (4) in virtù del teorema CXVIII. si rappresentano respettivamente in questa guisa:

(I) A, B, $BB:A$, $BBB:AA$, ec.
(II.) A, G, $GG:A$, $GGG:AA$, ec.
(III.) A, M, $MM:A$, $MMM:AA$, ec.
(IV.) A, R, $RR:A$, $RRR:AA$, ec.

E si consideri, che essendo per l'ipotesi $B.G::G.M$, e $G.M::M.R$, sarà ancora pel corollario IX. del teorema LXXXIII. $BB.GG::GG.MM$, e GG ad MM, come MM ad RR; ma pel corollario III. del teorema CV. $BB:A$ sta a $GG:A$, come BB a GG, e per la medesima ragione $GG:A$ sta ad $MM:A$, come GG ad MM; adunque pel corollario XII. de' principj $BB:A$ sta a $GG:A$, come $GG:A$ sta ad $MM:A$; nella stessa guisa si mostrerà, che $GG:A$ sta ad $MM:A$, come $MM:A$ ad $RR:A$, e perciò sono in proporzione geometrica le seguenti grandezze $BB:A$, $GG:A$, $MM:A$, $RR:A$; adunque in virtù del corollario IX. de' principj sono in proporzione geometrica continua le grandezze *C*, *H*, *N*, *S* ad esse respettivamente eguali.

E' visibile, che collo stesso discorso, e citando le medesime proposizioni si proverà il resto del teorema; ed è egualmente visibile, che il medesimo metodo, e lo stesso progresso di raziocinj anno luogo in qualunque numero di progressioni geometriche, costanti di qualsisia numero di termini; adunque il teorema è generalmente vero.

TEO-

TEOREMA CXXII.

Sieno le progressioni geometriche (1), e (2), che costino di qualsivoglia numero di termini, ed abbiano comune il primo.

(1) A, B, C, D, E, F, ec.

(2) A, G, H, I, K, L, ec.

Io dico, che $\frac{D}{B}$ sta ad $\frac{I}{G}$, come C ad H, e che $\frac{E}{B}$ sta a $\frac{K}{G}$, come D ad I, e similmente in infinito.

DIMOSTRAZIONE.

I. Pel teorema CXVIII., $C = BB : A$; $D = BBB : AA$, ec. ed $H = GG : A$; $I = GGG : AA$, ec.

Pel corollario VIII. de' principj $D . B :: (BBB : AA) . B$; ma in virtù del corollario II. del teorema LXXVII. $(BBB : AA) . B :: BB . AA$, perchè pel teorema C. $(BBB : AA)\ AA$, *prodotto degli estremi*, è uguale a BBB, e pel corollario II. del teorema XLV. $B\ (BB)$ *prodotto de' medj* è uguale parimente a BBB; adunque pel corollario XI. de' principj $D . B :: BB . AA$, cioè $\frac{D}{B} = \frac{BB}{AA}$.

II. Si mostrerà similmente, che I sta a $G :: GG . AA$, cioè $\frac{I}{G} = \frac{GG}{AA}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{D}{B} . \frac{I}{G} :: \frac{BB}{AA} . \frac{GG}{AA}$, ma pel teorema III. $\frac{BB}{AA} . \frac{GG}{AA} :: BB . GG$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{B} . \frac{I}{G} :: BB . GG$.

III. Ora pel corollario VIII. de' principj $C . H :: (BB : A) . (GG : A)$, e pel corollario III. del teorema CV. $(BB : A) . (GG : A) :: BB . GG$; adunque pel corollario XI. de' principj $C . H :: BB . GG$, ed essendosi provato nel secondo punto, che $\frac{D}{B} . \frac{I}{G} :: BB . GG$, ne siegue pel corollario XI. de' principj, che $\frac{D}{B} . \frac{I}{G} :: C . H$.

IV. Facendo gl' istessi raziocinj, e allegando le stesse proposizioni, si proverà, che $\frac{E}{B} . \frac{K}{G} :: D . I$, e si proveranno eziandio le altre parti del teorema; adunque il teorema è generalmente vero.

TEOREMA CXXIII.

Sieno le due progressioni geometriche (1), e (2) costanti di qualsivoglia numero di termini, ed abbiano comune il primo.

(1) A, B, C, D, E, F, ec.

(2) A, G, H, I, K, L, ec.

Io dico, che $\frac{C}{H}$ sta a $\frac{B}{G}$, come B a G;

Che $\frac{D}{I}$ sta a $\frac{B}{G}$, come C ad H.

Che $\frac{E}{K}$ sta a $\frac{B}{G}$, come D ad I, e similmente in infinito.

DIMOSTRAZIONE.

I. Pel teorema CXVIII. $C = BB:A$; $D = BBB:AA$; $E = BBBB:AAA$, ec., come pure $H = GG:A$; $I = GGG:AA$; $K = GGGG:AAA$, ec.

Pel corollario VIII. de' principj $C.H::(BB:A).(GG:A)$; ed essendo pel corollario III. del teorema CV. $\frac{BB:A}{GG:A} = \frac{BB}{GG}$, è ancora pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{H} = \frac{BB}{GG}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{C}{H}.\frac{B}{G}::\frac{BB}{GG}.\frac{B}{G}$.

II. Ma pel teorema LXXII. $\frac{B}{G} = \frac{BG}{GG}$; adunque ponendo nell' ultima proporzionalità del primo punto $\frac{BG}{GG}$ in luogo della sua eguale $\frac{B}{G}$, si avrà pel corollario IX. de' principj $\frac{C}{H}.\frac{B}{G}::\frac{BB}{GG}.\frac{BG}{GG}$; e perchè in virtù del teorema III. si à $\frac{BB}{GG}.\frac{BG}{GG}::BB.BG$, si à eziandio pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{H}.\frac{B}{G}::BB.BG$;

Di più pel teorema LXXIII. abbiamo $BB.BG::B.G$, adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{H}.\frac{B}{G}::B.G$.

III. Si proverà similmente, che $\frac{D}{I} = \frac{BBB}{GGG}$, e che $\frac{D}{I}.\frac{B}{G}::\frac{BBB}{GGG}$.

$\frac{B}{G}$; ma pel teorema LXXII. $\frac{B}{G}=\frac{B(GG)}{G(GG)}$; adunque pel corollario IX. de' principj:

(3) $\frac{D}{I}.\frac{B}{G}::\frac{BBB}{GGG}.\frac{B(GG)}{G(GG)}$.

In oltre pel corollario II. del teorema LXXXI. $B(BB)=BBB$, e $G(GG)=GGG$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{B(BB)}{G(GG)}=\frac{BBB}{GGG}$, e conseguentemente in vigore del corollario IX. de' principj la proporzionalità (3) registrata di sopra somministra quest' altra $\frac{D}{I}.\frac{B}{G}::\frac{B(BB)}{G(GG)}.\frac{B(GG)}{G(GG)}$, ed essendo pel teorema III. $\frac{B(BB)}{G(GG)}.\frac{B(GG)}{G(GG)}::B(BB).B(GG)$; è ancora pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{I}.\frac{B}{G}::B(BB).B(GG)$; ma perchè in vigore del teorema LXXIII., è $B(BB).B(GG)::BB.GG$, sarà altresì pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{I}.\frac{B}{G}::BB.GG$.

Si consideri ora, che nel primo punto si è provato essere $\frac{G}{H}=\frac{BB}{GG}$, cioè, $C.H::BB.GG$, e si vedrà che pel corollario XI. de' principj esser dee $\frac{D}{I}.\frac{B}{G}::C.H$.

IV. Formando i medesimi discorsi, e allegando le proposizioni medesime, si proveranno le altre parti del teorema; adunque il teorema è generalmente vero.

Teorema CXXIV.

Sieno le due progressioni geometriche (1), e (2), le quali abbiano comune il primo termine;

(1) A, B, C, D, E, F, ec.

(2) A, G, H, I, K, L, ec.

io dico, che la proporzione di $\frac{C}{H}$ verso $\frac{G}{B}$ è triplicata della proporzione di $\frac{B}{G}$;

Che la proporzione di $\frac{D}{I}$ verso $\frac{H}{C}$ è quintuplicata della proporzione di $\frac{B}{G}$;

 Che

Che la proporzione di $\frac{E}{K}$ verſo $\frac{D}{I}$ è ſettuplicata della proporzione di $\frac{B}{G}$;

E ſimilmente in infinito.

DIMOSTRAZIONE.

I. IN virtù del teorema CXVIII. $C = BB:A$, ed $H = GG:A$, e conſeguentemente pel corollario VIII. de' principj $\frac{C}{H} = \frac{BB:A}{GG:A}$; ma pel corollario III. del teorema CV. $\frac{BB:A}{GG:A} = \frac{BB}{GG}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{H} = \frac{BB}{GG}$, e pel corollario VIII. de' principj la proporzione di $\frac{C}{H}$ verſo $\frac{G}{B}$ è la medeſima, che la proporzione di $\frac{BB}{GG}$ verſo $\frac{G}{B}$, ma pel corollario I. del teorema LXXVII. $\frac{BB}{GG} \cdot \frac{G}{B} :: B(BB) \cdot G(GG)$; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{C}{H}$ verſo $\frac{G}{B}$ è uguale a $\frac{B(BB)}{G(GG)}$, ed avendoſi pel corollario III. del teorema LXXXI. $B(BB) = BBB$, e $G(GG) = GGG$, ſi avrà pel corollario VIII. de' principj $\frac{B(BB)}{G(GG)} = \frac{BBB}{GGG}$, e pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{C}{H}$ verſo $\frac{G}{B}$ ſarà eguale a $\frac{BBB}{GGG}$, e conſeguentemente pel corollario XIII. del teorema LXXXIII. eſſa ſarà triplicata di $\frac{B}{G}$. Il che dovea primieramente dimoſtrarſi.

II. Pel teorema CXVIII. $D = BBB:AA$, ed $I = GGG:AA$; di modo che pel corollario VIII. de' principj $\frac{D}{I} = \frac{BBB:AA}{GGG:AA}$, ed eſſendo pel corollario III. del teorema CV. $\frac{BBB:AA}{GGG:AA} = \frac{BBB}{GGG}$, ſarà ancora pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{I} = \frac{BBB}{GGG}$, ma nel primo punto ſi è provato, che $\frac{C}{H} = \frac{BB}{GG}$, adunque *convertendo* $\frac{H}{C} = \frac{GG}{BB}$, e pel corollario VIII. de' principj la proporzione di $\frac{D}{I}$ verſo $\frac{H}{C}$ è uguale alla proporzione di $\frac{BBB}{GGG}$ verſo $\frac{GG}{BB}$:

Ora

Ora pel I. corollario del teorema LXXVII. $\frac{BBB}{GGG}\cdot\frac{GG}{BB}::BB(BBB).GG(GGG)$; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{D}{I}$ verſo $\frac{H}{C}$ è uguale a $\frac{BB(BBB)}{GG(GGG)}$; ma pel corollario III. del teorema LXXXI., $BB(BBB)=BBBBB$, e $GG(GGG)=GGGGG$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{BB(BBB)}{GG(GGG)}=\frac{BBBBB}{GGGGG}$, e pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{D}{I}$ verſo $\frac{H}{C}$ è uguale a $\frac{BBBBB}{GGGGG}$; laonde pel corollario XIII. del teorema LXXXIII., eſſa è quintuplicata di $\frac{B}{G}$. Il che dovea dimoſtrarſi ſecondariamente.

III. Con lo ſteſſo metodo, e con i medeſimi diſcorſi ſi dimoſtra il rimanente del teorema, che per conſeguenza è generalmente vero.

TEOREMA CXXV.

SIeno le due progreſſioni geometriche (1), e (2), le quali abbiano comune il primo termine.

(1) A, B, C, D, E, F, ec.

(2) A, G, H, I, K, L, ec.

Io dico, che la proporzione di $\frac{D}{I}$ verſo $\frac{B}{G}$ è duplicata di $\frac{B}{G}$;

Che la proporzione di $\frac{E}{K}$ verſo $\frac{B}{G}$ è triplicata di $\frac{B}{G}$;

Che la proporzione di $\frac{F}{L}$ verſo $\frac{B}{G}$ è quadruplicata di $\frac{B}{G}$, e ſimilmente in infinito.

DIMOSTRAZIONE.

I. SI à pel teorema CXVIII., $D=BBB:AA$, ed $I=GGG:AA$; e quindi pel corollario VIII. de' principj $\frac{D}{I}=\frac{BBB:AA}{GGG:AA}$; ſi à ancora pel corollario III. del teorema CV. $\frac{BBB:AA}{GGG:AA}=\frac{BBB}{GGG}$, e pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{I}=\frac{BBB}{GGG}$, di modo che pel corollario VIII. de' principj ſi vede eſſere $\frac{D}{I}\cdot\frac{B}{G}::\frac{BBB}{GGG}\cdot\frac{B}{G}$.

Di

Di più pel I. corollario del teorema LXXVII. $\frac{BBB}{GGG} \cdot \frac{B}{G} :: G(BBB) \cdot B(GGG)$, e perciò in virtù del corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{D}{I}$ verso $\frac{B}{G}$ è uguale a $\frac{G(BBB)}{B(GGG)}$; ma pel corollario II. del teorema LXXXI. $G(BBB) = GBBB$, e $B(GGG) = BGGG$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{G(BBB)}{B(GGG)} = \frac{GBBB}{BGGG}$, e pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{D}{I}$ verso $\frac{B}{G}$ è uguale a $\frac{GBBB}{BGGG}$, e perchè in vigore del corollario V. del teorema LXXXIII. $\frac{GBBB}{BGGG} = \frac{BB}{GG}$, ne siegue pel corollario XI. de' principj, che la proporzione di $\frac{D}{I}$ verso $\frac{B}{G}$ è uguale a $\frac{BB}{GG}$, cioè pel corollario XIII. del teorema LXXXIII. essa è duplicata di $\frac{B}{G}$. Il che dovea primieramente dimostrarsi.

II. Il teorema CXVIII. somministra $E = BBBB : AAA$, e $K = GGGG : AAA$, e perciò in virtù del corollario VIII. de' principj $\frac{E}{K} = \frac{BBBB : AAA}{GGGG : AAA}$; il corollario del teorema CIII. mostra il secondo membro dell' ultima proporzionalità eguale a $\frac{BBBB}{GGGG}$; laonde pel corollario XI. de' principj $\frac{E}{K} = \frac{BBBB}{GGGG}$; di maniera che pel corollario VIII. de' principj si à $\frac{E}{K} \cdot \frac{B}{G} :: \frac{BBBB}{GGGG} \cdot \frac{B}{G}$.

Ora pel I. corollario del teorema LXXVII. si à questa proporzionalità $\frac{BBBB}{GGGG} \cdot \frac{B}{G} :: G(BBBB) \cdot B(GGGG)$, e quindi pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{E}{K}$ verso $\frac{B}{G}$ è uguale a $\frac{G(BBBB)}{B(GGGG)}$; e avendosi pel corollario II. del teorema LXXXI. $G(BBBB) = GBBBB$, e $B(GGGG) = BGGGG$, si à pel corollario VIII. de' principj $\frac{G(BBBB)}{B(GGGG)} = \frac{GBBBB}{BGGGG}$, e pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{E}{K}$ verso $\frac{B}{G}$ è uguale a $\frac{GBBBB}{BGGGG}$, ma pel corollario V. del teorema LXXXIII. $\frac{GBBBB}{BGGGG} =$

BBB

$\frac{BBB}{GGG}$; adunque pel corollario XI. de' principj la proporzione di $\frac{E}{K}$ verſo $\frac{B}{G}$ è uguale a $\frac{BBB}{GGG}$, cioè pel corollario XIII. del teorema LXXXIII. eſſa è triplicata di $\frac{B}{G}$. Il che dovea ſecondariamente dimoſtrarſi.

Seguendo i medeſimi veſtigj, e citando le medeſime propoſizioni, ſi proverà il rimanente del teorema, che per conſeguenza è generalmente vero.

TEOREMA CXXVI.

Sieno due progreſſioni geometriche, ciaſcuna delle quali coſti di qualunque numero, ma *impari*, di termini, e ambedue ne contengano un numero eguale, ſieno in oltre eguali i termini di mezzo di ciaſcuna di eſſe, come ſarebbero per cagion d' eſempio le due progreſſioni ſeguenti:

(1) A, B, C, X, D, E, F.

(2) G, H, I, X, K, L, M.

Nelle quali i termini di mezzo, che debbono eſsere eguali, ſono denotati con la medeſima lettera X, in virtù del corollario IX. de' principj, e dello ſcolio, che lo precede;

Io dico, che ſe uno de' termini precedenti la X nella progreſſione (1) ſta ad uno de' termini ſuſseguenti la X [e da eſsa egualmente diſtante nella ſteſsa progreſſione prima (1)], come il termine corriſpondente, il quale in egual ſito precede la X nella progreſſione (2), ſta al termine, il quale in egual diſtanza ſiegue la X nella medeſima progreſsione (2), allora qualunque termine, che precede la X nella progreſsione (1), ſtarà al termine, che in egual diſtanza ſiegue la X nella ſteſsa progreſsione; come il termine ad eſso corriſpondente, che in egual ſito precede la X nella progreſsione (2), ſta al termine, che nella medeſima progreſsione (2) ſiegue la X in pari diſtanza.

Nel noſtro eſempio dee provarſi:

Primo, che poſta queſta proporzionalità $C.D::I.K$, ſuſsiſtono queſt' altre $B.E::H.L$, ed $A.F::G.M$.

Se-

Secondo, che posta questa proporzionalità $A.F::G.M$, sussistono quest' altre $C.D::I.K$, ed $B.E::H.L$.

Terzo, che posta questa proporzionalità $B.E::H.L$, sussistono quest'altre $C,D::I.K$, ed $A.F::G.M$.

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo per l' ipotesi A, B, C, X, e G, H, I, X in progressione geometrica, saranno eziandio X, C, B, A, ed X, I, H, G in progressione geometrica, e ciò pel teorema LXIV.; di modo che in virtù del teorema CXVIII., le progressioni (1), e (2) possono respettivamente esprimersi così:

(3) $CCC:XX$, $CC:X$, C, X, D, $DD:X$, $DDD:XX$.

(4) $III:XX$, $II:X$, I, X, K, $KK:X$, $KKK:XX$.

II. Se dunque si suppone $C.D::I.K$ si avrà pel corollario IX. del teorema LXXXIV., $CC.DD::II.KK$; ma pel corollario III. del teorema CV. $\frac{CC:X}{DD:X}=\frac{CC}{DD}$, ed $\frac{II:X}{KK:X}=\frac{II}{KK}$; adunque pel corollario XII. de' principj $\frac{CC:X}{DD:X}=\frac{II:F}{KK:X}$, e sostituendo in luogo de' termini di quest' ultima proporzionalità le respettive grandezze B, E, H, L, che ad esse sono eguali, si avrà pel corollario IX. de' principj $\frac{B}{E}=\frac{H}{L}$.

Similmente raziocinando si mostrerà essere $\frac{CCC:XX}{DDD:XX}=\frac{III:XX}{KKK:XX}$ cioè $\frac{A}{F}=\frac{G}{M}$.

III. In oltre se si supporrà $A.F::G.M$, cioè pel corollario IX. de' principj $\frac{CCC:XX}{DDD:XX}=\frac{III:XX}{KKK:XX}$; dovrà considerarsi, che pel corollario III. del teorema CV., e *trasponendo* $\frac{CCC}{DDD}=\frac{CCC:XX}{DDD:XX}$, ed $\frac{III}{KKK}=\frac{III:XX}{DDD:XX}$; adunque pel corollario XII. de' principj sarà parimente $CCC.DDD::III.KKK$, e quindi pel corollario X. del teorema LXXXIII. si vedrà essere $C.D::I.K$.

IV. Essendosi ora dimostrata questa proporzionalità $C.D::I.K$, si dimostrerà, come si è fatto nel secondo punto, che $\frac{CC:X}{DD:X}=\frac{II:X}{KK:X}$, vale a dire in virtù del corollario IX. de' principj, che $\frac{B}{E}=\frac{H}{L}$.

V.

V. Raziocinando, come si è fatto ne' punti terzo, e quarto, si proverà similmente, che posto che sia $B.E::H.L$, sarà del pari $C.D::I.K$, ed $A.F::G.M$.

VI. A chi considera la cosa attentamente si renderà manifesto, che il simile si dimostrerà in qualunque numero impari di termini, de' quali costar possono le due suddette progressioni (1), e (2); adunque il teorema è generalmente vero.

Teorema CXXVII.

Sieno le due progressioni geometriche (1), e (2) costanti di qualunque numero di termini:

(1) A, B, C, D, R, ec.

(2) E, F, G, H, I, ec.

Io dico, che la proporzione di $\frac{C}{A}$ verso $\frac{G}{E}$ è duplicata della proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{F}{E}$;

Che la proporzione di $\frac{D}{A}$ verso $\frac{H}{E}$ è triplicata della proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{F}{E}$;

E similmente in infinito.

Dimostrazione.

I. Pel teorema CXVIII. $C = BB:A$, $D = BBB:AA$, ec. come pure $G = FF:E$, $H = FFF:EE$, ec. Pel corollario VIII. de' principj $C.A::(BB:A).A$, e ponendo in questa proporzionalità, in luogo del quarto termine A, l' espressione $AA:A$, che gli equivale pel teorema IC., si à pel corollario IX. de' principj $\frac{C}{A} = \frac{BB:A}{AA:A}$, ma pel corollario III. del teorema CV. $\frac{BB:A}{AA:A} = \frac{BB}{AA}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{C}{A} = \frac{BB}{AA}$; si mostrerà similmente, che $\frac{G}{E} = \frac{FF}{EE}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{C}{A}$ sta a $\frac{G}{E}$, come $\frac{BB}{AA}$ ad $\frac{FF}{EE}$, e conseguentemente in virtù del teorema LXXXVI., la proporzione di $\frac{C}{A}$ verso $\frac{G}{E}$ è duplicata della proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{F}{E}$.

II. Di nuovo pel corollario VIII. de' principj $D.A::(BBB:AA).A$, e surrogando in questa proporzionalità in cambio del quarto termine A l' espressione $A(AA):(AA)$, che gli equivale pel teorema C., si à pel corollario IX. de' principj $\frac{D}{A}=\frac{BBB:AA}{A(AA):AA}$, ma pel corollario III. del teorema CV. $\frac{BBB:AA}{A(AA):AA}=\frac{BBB}{A(AA)}$; adunque pel corollario XI. de' principj $\frac{D}{A}=\frac{BBB}{A(AA)}$ e perchè in virtù del corollario II. del teorema LXXXI., $A(AA)=AAA$, si à eziandio pel corollario IX. de' principj $\frac{D}{A}=\frac{BBB}{AAA}$.

Similmente si mostrerà, che $\frac{H}{E}=\frac{FFF}{EEE}$; adunque pel corollario VIII. de' principj $\frac{D}{A}$ sta ad $\frac{H}{E}$, come $\frac{BBB}{AAA}$ ad $\frac{FFF}{EEE}$; laonde pel teorema LXXXVI., la proporzione di $\frac{D}{A}$ verso $\frac{H}{E}$ è triplicata della proporzione di $\frac{B}{A}$ verso $\frac{F}{E}$.

III. Col medesimo discorso, e con allegare le medesime proposizioni si dimostreranno l' altre parti del teorema, il quale per conseguenza è generalmente vero.

SCOLIO.

LE dimostrazioni dei nove teoremi precedenti basteranno a far conoscere la maniera di valersi del teorema CXVIII., per dimostrare quelle proposizioni, che concernono le progressioni geometriche.

TEOREMA CXXVIII.

SIeno in proporzione geometrica continua le due serie (1), e (2), la prima delle quali costa di tre termini, e la seconda di quattro:

(1) A, B, C.
(2) E, F, G, H.

E di più, il primo termine A della serie (1) sia eguale al primo termine E della serie (2), e l' ultimo termine C della serie (1) sia eguale all' ultimo termine H della serie (2):

Io

Io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è triplicata di una proporzione, di cui la proporzione $\frac{E}{F}$ è duplicata.

DIMOSTRAZIONE.

IN ordine alla serie (1), si frappongano tra A, e B due grandezze S, e T tali, che A, S, T, B sieno in proporzione geometrica continua, e due altre grandezze X, ed Y si frappongano tra B, e C tali, che B, X, Y, C sieno in proporzione geometrica continua.

In ordine alla serie (2), s' interpongano tra E, ed F; tra F, e G; e tra G, ed H le tre grandezze respettive O; P; Q tali, che tanto E, O, F, quanto F, P, G, ed anche G, Q, H sieno in proporzione geometrica continua.

Ciò fatto, si consideri, che in virtù del teorema LXXI. si avranno le infrascritte progressioni geometriche:

(3) A, S, T, B, X, Y, C.

(4) E, O, F, P, G, Q, H.

ciascuna delle quali costa di egual numero di termini, e perciò in virtù del teorema LXX. $\frac{A}{C}$ è *tanto* moltiplice di $\frac{A}{S}$, *quanto* $\frac{E}{H}$ di $\frac{E}{O}$; adunque per lo scolio annesso alla definizione XXIX. la $\frac{A}{S}$ è *ugualmente summoltiplice* di $\frac{A}{C}$, che la $\frac{E}{O}$ di $\frac{E}{H}$; ma supponendosi $A = E$, e $C = H$, la $\frac{A}{C}$ è uguale alla $\frac{E}{H}$ pel corollario VIII. de' principj; adunque pel corollario IV. del teorema XLII. $\frac{A}{S} = \frac{E}{O}$, e *trasponendo* $\frac{E}{O} = \frac{A}{S}$.

Ora pel teorema LXX. $\frac{A}{B}$ è triplicata di $\frac{A}{S}$, cioè $\frac{A}{B} = \frac{A}{S} \times \frac{A}{S} \times \frac{A}{S}$, e siccome si è provato essere $\frac{E}{O} = \frac{A}{S}$, così pel corollario II. del teorema XLII. $\frac{A}{B} = \frac{E}{O} \times \frac{E}{O} \times \frac{E}{O}$; vale a dire $\frac{A}{B}$ è triplicata di $\frac{E}{O}$:

In oltre pel teorema LXX. $\frac{E}{F}$ è duplicata di $\frac{E}{O}$; adunque $\frac{A}{B}$ è triplicata della proporzione $\frac{E}{O}$, di cui $\frac{E}{F}$ è duplicata. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA CXXIX.

SIeno in proporzione geometrica continua le due ſerie (1), e (2), la prima delle quali coſta di quattro termini, e la ſeconda di cinque:

(1) $A, B, C, D.$
(2) $E, F, G, H, I.$

E di più il primo termine A della ſerie (1) ſia eguale al primo termine E della ſerie (2), e l' ultimo termine D della ſerie (1) ſia eguale all' ultimo termine I della ſerie (2).

Io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è quadruplicata di una proporzione, di cui la proporzione $\frac{E}{F}$ è triplicata.

DIMOSTRAZIONE.

PEr dimoſtrare queſto teorema debbonſi frapporre nella ſerie (1) tra ogni coppia di termini *tre* medie proporzionali: e debbonſi frapporre nella ſerie (2) tra ogni coppia di termini *due* medie proporzionali: dopo queſto ſi debbono fare i medeſimi raziocinj, co' quali ſi è provato il precedente teorema, e rimarrà dimoſtrato il teorema preſente.

TEOREMA CXXX.

SIeno in proporzione geometrica continua le due ſerie (1), e (2), la prima delle quali coſta di cinque termini, e la ſeconda di ſei:

(1) $A, B, C, D, E.$
(2) $G, H, I, K, L, M.$

E di più il primo termine A della ſerie (1) ſia eguale al primo termine G della ſerie (2), e l' ultimo termine E della ſerie (1) ſia eguale all' ultimo termine M della ſerie (2);

Io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è quintuplicata di una proporzione, di cui la proporzione $\frac{G}{H}$ è quadruplicata.

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

S' Interpongano nella ſerie (1) tra ogni coppia di termini *quattro* medie proporzionali; e s' interpongano nella ſerie (2) tra ogni coppia di termini *tre* medie proporzionali: indi ſi raziocinj, come ſi è fatto nella dimoſtrazione del teorema CXXVIII., e ſi dimoſtrerà nella ſteſſa guiſa queſto teorema ancora.

SCOLIO.

INfiniti teoremi ſimili poſſono ritrovarſi, e ſimilmente dimoſtrarſi, i tre precedenti baſtano per indicare il modo di trovarli: ſi noti adunque per maggior chiarezza:

I. Che il numero de' termini della prima ſerie eſſer dee minore di una unità del numero de' termini della ſeconda ſerie.

II. Che il numero delle medie proporzionali, che ſi debbono frapporre tra le coppie de' termini della prima ſerie à da eſſer minore di una unità del numero de' termini della prima ſerie.

III. Che il numero delle medie proporzionali, che ſi debbono frapporre tra le coppie de' termini della ſeconda ſerie à da eſſer minore di una unità del numero delle medie proporzionali, che ſi debbono interporre fra le coppie de' termini della prima ſerie.

IV. In tal guiſa naſceranno dalla prima, e dalla ſeconda ſerie *due progreſſioni geometriche*, ciaſcuna delle quali conſterà di *egual* numero di *termini*, e le dimoſtrazioni di queſti infiniti teoremi procederanno con tenore uniforme a quello della dimoſtrazione del teorema CXXVIII.

Dimoſtrazione dell' articolo quarto di queſto ſcolio.

LA verità dell' articolo quarto del preſente ſcolio ſi dimoſtrerà agl' intendenti del calcolo litterale nella ſeguente maniera:

Sia n il numero de' termini della prima ſerie; adunque per l' articolo primo di queſto ſcolio, il numero de' termini della ſeconda ſerie ſarà $n+1$; egli è dunque chiaro, che il numero ro delle *coppie* della prima ſerie à da eſſere $n-1$, e che il numero delle *coppie* della ſeconda ſerie à da eſſere n:

E' chiaro ancora, che il numero delle *medie* proporzionali da interporſi fra le *coppie* della prima ſerie in virtù dell' articolo ſecondo di queſto ſcolio eſſer dee $n-1$, e che il numero delle *medie* proporzionali da interporſi fra le *coppie* della ſeconda ſerie, in vigore dell' articolo terzo di queſto ſcolio medeſimo eſſer deve $n-2$.

Ciò poſto; non ſarà difficile a comprendere, che il numero de' termini, de' quali ſarà per coſtare la progreſſione geometrica, che naſcerà dalla prima ſerie, ſarà:

(A) $(n-1)(n-1)+n$.

Cioè il numero $n-1$ delle *coppie* moltiplicato pel numero $n-1$ delle *medie* proporzionali frappoſte tra ciaſcuna *coppia*, con di più il numero n de' termini della prima ſerie.

Non anche ſarà difficile a comprendere, che il numero de' termini, de' quali coſterà la *progreſſione geometrica*, che naſcerà dalla ſeconda ſerie, ſarà:

(B) $n(n-2)+n+1$.

Cioè il numero n delle *coppie* moltiplicato pel numero $n-2$ delle *medie* proporzionali frappoſte tra ciaſcuna *coppia*, con di più il numero $n+1$ de' termini della ſeconda ſerie. Ma l' eſpreſſione (A) è uguale ad $nn-2n+1+n$, cioè ad $nn-n+1$; e l' eſpreſsione (B) è uguale ad $nn-2n+n+1$, cioè ad $nn-n+1$;

Adunque ambedue le *progreſſioni geometriche*, le quali naſceranno dalla prima, e dalla ſeconda ſerie, coſteranno di egual numero di termini. Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA GENERALE.

Sieno in progreſſione geometrica le due ſerie (1), e (2), la prima delle quali coſta di n termini, e la ſeconda di $n+1$ termini.

(1) A, B, C, D....V.

(2) E, F, G, H, I....W.

E di più il primo termine A della ſerie (1) ſia eguale al pri-

primo termine E della ſerie (2), e l' ultimo termine V della ſerie (1) ſia eguale all' ultimo termine W della ſerie (2);

Io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è *n plicata* di una proporzione, di cui la proporzione $\frac{E}{F}$ è $(n-1)$ *plicata*.

DIMOSTRAZIONE.

TRa ciaſcuna coppia de' termini della prima ſerie ſi frappongano $(n-1)$ medie proporzionali; e tra ciaſcuna coppia de' termini della ſeconda ſerie ſi frappongano $(n-2)$ medie proporzionali:

La prima delle medie proporzionali, frappoſte tra la prima coppia della prima ſerie, ſi chiami S; e la prima delle medie proporzionali frappoſte tra la prima coppia della ſeconda ſerie, ſi chiami O; ciò fatto, ſi conſideri, che in virtù del teorema LXXI. naſceranno le due infraſcritte *progreſſioni geometriche*:

(3) $A, S \ldots\ldots B \ldots\ldots V$.

(4) $E, O \ldots\ldots F \ldots\ldots W$.

ciaſcuna delle quali coſterà di egual numero di termini, poichè per quanto ſi è moſtrato di ſopra dopo l' articolo quarto di queſto ſcolio, il numero de' termini sì dell' una, come dell' altra progreſſione ſarà $nn-n+1$.

Laonde in virtù del teorema LXX. $\frac{A}{V}$ *tanto* è moltiplice di $\frac{A}{S}$, *quanto* $\frac{E}{W}$ di $\frac{E}{O}$, e perciò in virtù dello ſcolio anneſſo alla definizione XXIX. la $\frac{A}{S}$ è *ugualmente* ſummoltiplice di $\frac{A}{V}$, che la $\frac{E}{O}$ di $\frac{E}{W}$; ma ſupponendoſi $A=E$, ed $V=W$, la $\frac{A}{V}$ è uguale all' $\frac{E}{W}$ pel corollario VIII. de' principj; adunque pel corollario IV. del teorema XLII. $\frac{A}{S}=\frac{E}{O}$, e *traſponendo* $\frac{E}{O}=\frac{A}{S}$.

Ora pel teorema LXX. $\frac{A}{B}$ è *n plicata* di $\frac{A}{S}$; e ſiccome ſi è provato, eſſere $\frac{E}{O}=\frac{A}{S}$; $\frac{A}{B}$ è *n plicata* anche di $\frac{E}{O}$:

In oltre pel teorema LXX. $\frac{E}{F}$ è $(n-1)$ *plicata* di $\frac{E}{O}$;

Adunque $\frac{A}{B}$ è *n plicata* della proporzione $\frac{E}{O}$, di cui $\frac{E}{F}$ è $(n-1)$ *plicata*. Il che dovea dimoſtrarſi.

Pre-

Presuppofizioni ammesse dagli Analisti.

I. QUalunque grandezza A considerata semplicemente in se medesima si dice essere in istato *positivo*, chiamasi perciò *positiva*, e si designa, affigendole a sinistra il segno $+$ in questa guisa $+A$, ovvero non affigendole verun segno, e scrivendo semplicemente A.

II. La stessa (o altra eguale grandezza) A considerata in senso *contrario* al primo stato, in maniera che la grandezza A presa in contrario senso distrugga la A posta nel primo stato, dicesi essere in istato *contrario*, chiamasi negativa, e si contraddistingue affigendole a sinistra questo segno $-$, e scrivendo $-A$.

III. E quindi l'aggregato di $+A-A$ (cioè di $A-A$) è uguale a zero; perchè in virtù dell' articolo secondo la A concepita in *istato positivo* è distrutta dalla A negativa.

IV. Anzi deve egualmente dirsi, che siccome la $-A$ distrugge la $+A$, così all' incontro la $+A$ distrugge la $-A$, cioè la grandezza positiva distrugge la negativa, mentre è visibile, che l' aggregato di $-A+A$ è tanto zero, quanto è zero l' aggregato di $+A-A$.

V. E perciò supponendo B minore di A, l' aggregato $+A-B$, ovvero $-B+A$ è una grandezza in istato *positivo* minore della $+A$;

E supponendo C maggiore di A, l' aggregato $A-C$, ovvero $-C+A$ è una grandezza in istato *contrario* minore della C; laddove $+A+B$ è una grandezza in istato *positivo* maggiore di $+A$ (presa separatamente), e di $+B$ (presa separatamente);

Come pure $-A-C$ è una grandezza in istato *contrario* maggiore di $-A$ (presa a parte), e di $-B$ (presa a parte).

VI. Ogni grandezza può concepirsi in istato *positivo*, e in istato *contrario*, e conforme la grandezza $+A$, che è in istato positivo può considerarsi non accoppiata a veruna grandezza negativa, v. g. a $-B$, ovvero a $-C$, così la grandezza $-A$,

— *A*, che è in iſtato *contrario*, può conſiderarſi non accoppiata a veruna grandezza poſitiva, v. g. a + *B*, ovvero a + *C*.

Così può concepirſi, che un mercante abbia un credito di mille ſcudi ſenza verun debito, e in tal caſo il ſuo credito ſi deſigna così + 1000 ſcudi, vale a dire mille ſcudi in iſtato poſitivo, cioè mille ſcudi *poſitivi:*

E può ancora concepirſi, che un mercante abbia un debito di mille ſcudi, ſenza verun credito, e allora il ſuo debito ſi contraſſegna così — 1000 ſcudi, vale a dire mille ſcudi in iſtato *contrario*, cioè mille ſcudi *negativi*.

Così pure dieci paſſi verſo una parte, a cui ſi tende, ſi prendono in iſtato poſitivo, e ſi eſprimono in queſta guiſa + 10 paſſi, cioè dieci paſſi *poſitivi:*

E dieci paſſi verſo la parte oppoſta a quella, a cui ſi tende, ſi prendono in iſtato *contrario*, e ſi rappreſentano in queſto modo — 10 paſſi, cioè dieci paſsi *negativi*.

COROLLARIO I.

I. IN virtù degli articoli primo, ſecondo, terzo, e quinto i numeri, che ſi aggiungono, ſono in iſtato *poſitivo*, cioè ſono grandezze *poſitive*, e i numeri, che ſi ſottraggono, ſono in iſtato *contrario*, cioè ſono grandezze *negative;*

Imperciocchè i numeri, che ſi ſottraggono, diſtruggono, o diminuiſcono i numeri, che ſi aggiungono, allorchè quelli ſi accoppiano con queſti.

II. Per la ſteſſa ragione, le grandezze di qualunque ſpecie, che ſi aggiungono, ſono in iſtato *poſitivo*, e le grandezze ad eſſe omogenee, che ſi ſottraggono, ſono in iſtato *contrario;*

COROLLARIO II.

LO ſtato *poſitivo* è uno ſtato *contrario* allo *ſtato contrario;*

Imperciocchè per l'articolo quarto la grandezza *poſitiva* diſtrugge la *negativa:* or ſiccome la grandezza negativa è in *iſtato contrario* dello ſtato *poſitivo;* perchè la grandezza negativa diſtrugge la poſitiva, così con egual ragione la grandezza *poſiti-*

sitiva è in *istato contrario* dello stato *contrario*; perchè la grandezza positiva distrugge la negativa.

COROLLARIO III.

E' Versa-vice lo *stato contrario* dello stato *contrario* è uno stato positivo;

Imperciocchè se lo stato *contrario* dello stato *contrario* non fosse uno stato positivo, ne seguirebbe, che lo stato *positivo* (il quale pel precedente corollario è uno stato *contrario* dello stato *contrario*) non sarebbe uno stato *positivo*, il che è una manifesta contraddizione; adunque, ec.

SCOLIO.

QUesto corollario è chiaro anche per se medesimo a chi ne comprende i termini;

Imperciocchè è cosa evidente, che siccome la grandezza positiva $+A$ presa in senso *contrario* a se stessa, cioè concepita in istato *contrario* a se stessa, divien negativa, e si cangia in $-A$, così la grandezza negativa $-A$ presa in senso *contrario* a se stessa, cioè concepita in istato *contrario* dello stato *contrario*, dee restituire la pristina grandezza positiva $+A$.

COROLLARIO IV.

ADunque, siccome $-(+A)$, cioè $-+A$ è uguale a $-A$, così $-(-A)$, cioè $--A$ è uguale a $+A$, vale a dire ad A;

Imperciocchè queste espressioni succinte racchiudono il senso del corollario precedente.

COROLLARIO V.

SOttrarre una grandezza costituita in istato *contrario*, cioè sottrarre una grandezza *negativa*, è lo stesso, che porla in istato *positivo*, vale a dire è lo stesso, che renderla *positiva*, cioè è lo stesso, che aggiungerla;

Imperciocchè sottrarre una grandezza, che è costituita in istato *contrario*, è lo stesso, che porre in istato *contrario* una

gran-

grandezza, che è in istato *contrario*; ma lo stato *contrario* dello stato *contrario* è uno stato *positivo* pel corollario III.; adunque sottrarre una grandezza, che è costituita in istato *contrario*, è lo stesso, che porla in istato *positivo*, cioè è lo stesso, che renderla positiva, vale a dire è lo stesso, che *aggiungerla*.

SCOLIO.

I. AGgiungere una grandezza, che è in istato *contrario*, è lo stesso, che lasciarla nel medesimo stato *contrario*, in cui si trova, come è per se manifesto, e perciò $+(-A)$ è uguale a $-A$, cioè $+-A=-A$.

II. E' parimente chiaro, che aggiugnere una grandezza, la quale è in istato *positivo*, è lo stesso, che lasciarla nello stato positivo, in cui ritrovasi, e quindi $+(+A)$ è uguale $+A$, cioè $++A=A$.

III. Non è meno manifesto (e si è accennato nel corollario IV.), che sottrarre una grandezza, la quale è in istato *positivo*, è lo stesso, che costituirla nello stato contrario, cioè renderla *negativa*, e conseguentemente $-(+A)$ è uguale $-A$, cioè $-+A=-A$;

Adunque in virtù de' due primi articoli di questo scolio il segno $+$ affisso ad una grandezza *negativa*, o ad una grandezza *positiva*, non cangia lo stato, in cui si trovano dette grandezze.

Ma in virtù dell' antecedente corollario IV., e dell' articolo terzo di questo scolio il segno $-$, affisso ad una grandezza *negativa*, o ad una grandezza *positiva*, muta lo stato, in cui dette grandezze si ritrovano.

DEFINIZIONE XL.

RApprefentino A, B, C, D quattro grandezze in generale, tali, che A, e B sieno tra loro omogenee, e C, e D sieno omogenee tra loro;

Io dico, che le due grandezze $+A$, e $+B$ sono in *istato analogo* della *prima* specie rispetto alle due grandezze $-C$, e $-D$; e che le due grandezze $-A$, e $-B$ sono in *istato analo-*

 nalo-

nalogo della *seconda* specie rispetto alle due grandezze $+C+D$:

Dà motivo a questa denominazione l'essere lo stato di $+A$ simile allo stato di $+B$, come lo stato di $-C$ è simile allo stato di $-D$.

Così lo stato di $-A$ è simile allo stato di $-B$, come lo stato di $+C$ è simile allo stato di $+D$.

DEFINIZIONE XLI.

IO dico ancora;

Che le due grandezze $+A$, e $-B$ sono in *istato analogo* della *terza* specie rispetto alle due grandezze $+C$, e $-D$;

E che le due grandezze $-A$, e $+B$ sono in *istato analogo* della *quarta* specie rispetto alle due grandezze $-C$, e $+D$.

Queste denominazioni si fondano sull' essere la $+A$ positiva, e la $-B$ negativa, e sull' essere la $+C$ positiva, e la $-D$ negativa.

Così la $-A$ è negativa, e la $+B$ positiva, come appunto la $-C$ è negativa, e la $+D$ positiva.

DEFINIZIONE XLII.

IO dico in oltre;

Che le due grandezze $+A$, e $-B$ sono in *istato analogo* della *quinta* specie rispetto alle due grandezze $-C$, e $+D$:

E che le due grandezze $-A$, e $+B$ sono in *istato analogo* della *sesta* specie rispetto alle due grandezze $+C$, e $-D$.

Si riconoscerà la proprietà di queste denominazioni, se si rifletterà, che siccome la grandezza $+A$ è in istato *contrario* a quello della grandezza $-B$ pel corollario II. delle presupposizioni, così la grandezza $-C$ è in istato *contrario* a quello della grandezza $+D$:

E siccome la grandezza $-A$ è in istato *contrario* a quello della grandezza $+B$, così pel citato corollario II. delle presupposizioni la grandezza $+C$ è in istato *contrario* a quello delle grandezza $-D$.

DEFI-

DEFINIZIONE XLIII.

IO dico in fine;

Che le due grandezze negative $-A$, e $-B$ sono in *istato analogo* della settima specie rispetto alle due grandezze negative $-C$, e $-D$.

TEOREMA CXXXI.

POsta qualunque proporzionalità $A.B::C.D$ (i due primi termini della quale non è necessario, che sieno omogenei ai due ultimi); io dico, che cambiando lo *stato* di due termini di essa presi ad arbitrio, ovvero di tutti quattro ne risulteranno quattro grandezze tali, che le due prime rispetto alle due ultime saranno in istato analogo della prima specie, o della seconda, o della terza, o della quarta, o della quinta, o della sesta, o della settima.

DIMOSTRAZIONE.

MUtando lo stato di due termini della proporzionalità $A.B::C.D$, ovvero di tutti quattro, é visibile, che i quattro termini di essa non potranno ricevere altre mutazioni, che le espresse nelle sette formole infrascritte:

(1) $+A.+B::-C.-D.$
(2) $-A.-B::+C.+D.$
(3) $+A.-B::+C.-D.$
(4) $-A.+B::-C.+D.$
(5) $+A.-B::-C.+D.$
(6) $-A.+B::+C.-D.$
(7) $-A.-B::-C.-D.$

Adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

DEFINIZIONE XLIV.

ALlorchè mutando lo stato de' termini di qualunque proporzionalità $A.B::C.D$, ne risultano quattro grandezze tali, che le due prime di esse rispetto all' altre due sono in istato analogo della prima specie, o della seconda, o della terza,

o del-o della quarta, o della quinta, o della ſeſta, o della ſettima.

Io chiamo *traſcendentemente* proporzionali le ſuddette quattro grandezze, e dico, che coſtituiſcono una proporzionalità *traſcendente*, oppure, che la prima di eſſe ſta *traſcendentemente* alla ſeconda, come la terza alla quarta: dico altresì, che i quattro termini della ſteſſa proporzionalità $A.B::C.D$ ricevendo la prima, la ſeconda, la terza, la quarta, la quinta, la ſeſta, o la ſettima delle mutazioni eſpreſſe nelle ſette formole regiſtrate nella dimoſtrazione dell' antecedente teorema, fanno *reſpettivamente* una proporzionalità *traſcendente* della prima, della ſeconda, della terza, della quarta, della quinta, della ſeſta, o della ſettima ſpecie.

In queſta definizione non è neceſſario, che i primi due termini della proporzionalità $A.B::C.D$ ſieno omogenei ai due ultimi.

COROLLARIO I.

I. Nelle proporzionalità traſcendenti della prima, e della ſeconda ſpecie le aliquote de' conſeguenti ſono contenute ne' loro antecedenti reſpettivi in iſtato *ſimile* a quello, che anno ne' proprj conſeguenti: e le aliquote del primo conſeguente ſono in iſtato *contrario* a quello delle aliquote del ſecondo conſeguente.

II. Nelle proporzionalità traſcendenti della terza, e quarta ſpecie le aliquote de' conſeguenti ſono contenute ne' loro antecedenti reſpettivi in iſtato *contrario* a quello, che anno ne' proprj conſeguenti: e le aliquote del primo conſeguente ſono in iſtato *ſimile* a quello delle aliquote del ſecondo conſeguente.

III. Nelle proporzionalità traſcendenti della quinta, e ſeſta ſpecie le aliquote de' conſeguenti ſono contenute ne' loro antecedenti reſpettivi in iſtato *contrario* a quello, ch' eſſe anno ne' proprj conſeguenti:

E le aliquote del primo conſeguente ſono in iſtato *contrario* a quello delle aliquote del ſecondo conſeguente.

IV. Nelle proporzionalità traſcendenti della ſettima ſpecie le aliquote de' conſeguenti ſono contenute ne' loro antecedenti

re-

respettivi in istato *simile* a quello, che anno ne' proprj conseguenti.

E le aliquote del primo conseguente sonó in istato *simile* a quello delle aliquote del secondo conseguente.

Corollario II.

In tutte le specie delle proporzionalità trascendenti il modo, con cui il primo antecedente contiene l' aliquote del primo conseguente è *simile* al modo, con cui il secondo antecedente contiene l' aliquote del secondo conseguente;

Imperciocchè nelle proporzionalità trascendenti della prima, della seconda, e della settima specie il segno affisso ai conseguenti è lo stesso, che il segno affisso ai loro respettivi antecedenti:

E nelle proporzionalità trascendenti della terza, quarta, quinta, e sesta specie il segno affisso ai conseguenti è diverso dal segno affisso ai loro respettivi antecedenti; di modo che il primo antecedente contiene l'aliquote del primo conseguente in istato *contrario* a quello, che esse anno nel primo conseguente, e *similmente* il secondo antecedente contiene le aliquote del secondo conseguente in istato *contrario* a quello, che esse anno nel secondo conseguente.

Scolio.

I. Questa *similitudine* del modo, con cui gli antecedenti delle sette proporzionalità trascendenti contengono le aliquote de' loro respettivi conseguenti, fa conoscere la proprietà, e naturalezza della definizione XLIV.

II. Se nella proporzionalità $A . B :: C . D$ si cambiasse lo stato di *tre* termini, ovvero lo stato di *un solo* termine, la sopraddetta *similitudine* non sussisterebbe, come apparisce a chi vi riflette con attenzione, e per conseguenza mancherebbe ogni fondamento di proporzionalità trascendente.

III. In avvenire chiamerò proporzionalità *pura* quella proporzionalità, che à tutti i suoi termini positivi, e dirò, che i termini di essa sono *puramente* proporzionali, oppure, che il primo di essi sta *puramente* al secondo, come il terzo al quarto.

Co-

COROLLARIO III.

SE quattro grandezze ſono proporzionali *traſcendentemente*, io dico, che le medeſime conſiderate tutte quattro, come poſitive, coſtituiſcono una proporzionalità *pura*;

Imperciocchè in vigore di queſta definizione le ſuddette quattro grandezze intanto ſono proporzionali *traſcendentemente*, in quanto eſſeno preſe tutte quattro in iſtato *poſitivo*, formano una proporzionalità *pura*, dai termini della quale cangiati di ſtato, in modo che o due di loro, o tutti quattro ſieno affetti di ſegni negativi, riſulta una proporzionalità *traſcendente*; adunque i termini di queſta conſiderati tutti quattro come *poſitivi* debbono rendere la proporzionalità *pura*, da cui ſi concepiſce eſſer nata la medeſima proporzionalità *traſcendente*.

COROLLARIO IV.

SE quattro termini ſono tali;

Che i due primi di eſſi riſpetto ai due ultimi ſieno in iſtato analogo della prima ſpecie, o della ſeconda, o della terza, o della quarta, o della quinta, o della ſeſta, o della ſettima: e che conſiderando i detti quattro termini, come tutti *poſitivi*, eſſi coſtituiſcono una proporzionalità *pura*;

Io dico, che i medeſimi quattro termini ſono *traſcendentemente* proporzionali;

Imperciocchè per l' ipoteſi, i detti quattro termini conſiderati tutti come *poſitivi* fanno una proporzionalità *pura*, adunque reſtituendo ad eſſi i priſtini loro ſegni (in virtù de' quali i due primi degl' iſteſsi termini riſpetto ai due ultimi ſono in iſtato analogo di qualcuna delle ſette ſpecie), i medeſimi quattro termini coſtitueranno una proporzionalità *traſcendente* per la preſente definizione, e conſeguentemente, ec.

TEOREMA CXXXII.

SE di quattro grandezze $+A$, $+B$, $+C$, $+D$, la prima $+A$, e la terza $+C$ ſono tra loro eguali, e la ſeconda $+B$, e la quarta $+D$ ſono eguali tra loro; io dico, che affigfiggendo alle ſuddette quattro grandezze ſegni proprj delle ſette ſpecie di proporzionalità traſcendente, eſſe ſaranno traſcendentemente proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

PEr l' ipoteſi, e pel corollario VIII. de' principj ſi à queſta proporzionalità pura *A.B::C.D;* adunque per la definizione XLIV. affiggendo ai termini di eſſa ſegni proprj delle ſette proporzionalità traſcendenti, ne riſulterà una proporzionalità traſcendente. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

ADunque affiggendo ai termini di queſta proporzionalità pura *Z.Z::Z.Z*, ſegni proprj delle ſette proporzionalità traſcendenti, eſſi ſaranno traſcendentemente proporzionali;

Imperciocchè nella ſuddetta proporzionalità il primo termine *Z* è uguale al terzo termine *Z*, e il ſecondo termine *Z* è uguale al quarto termine *Z*, e conſeguentemente queſto corollario è compreſo nel teorema.

TEOREMA CXXXIII.

SE in una proporzionalità traſcendente ſi ſoſtituiſcano grandezze eguali in luogo di uno, di due, di tre, e anche di tutti quattro i ſuoi termini, ne riſulteranno quattro termini traſcendentemente proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

SI conſiderino come tutti *poſitivi* i quattro termini della priſtina proporzionalità traſcendente, e ſi ſoſtituiſcano in luogo di eſsi i ſuddetti termini eguali conſiderati anche queſti come *poſitivi;* i quattro termini, che ne riſulteranno, ſaranno proporzionali puramente pel ſecondo punto del corollario IX. de' principj; adunque affiggendo loro que' ſegni, che erano affiſsi ai termini della priſtina proporzionalità traſcendente, ſaranno proporzionali traſcendentemente per la definizione XLIV.

Teorema CXXXIV.

Poste otto grandezze non tutte positive, se tra la prima, la seconda, la terza, e la quarta vi è proporzionalità pura, o trascendente;

Se tra la quinta, la sesta, la prima, e la seconda vi è proporzionalità pura, o trascendente;

Se tra la settima, l'ottava, la terza, e la quarta vi è proporzionalità pura, o trascendente;

Io dico, che la quinta, la sesta, la settima, e l'ottava saranno proporzionali trascendentemente, quando nol siano puramente.

Dimostrazione.

Considerando le otto grandezze, come tutte positive, vi sarà proporzionalità pura tra la prima, la seconda, la terza, la quarta, come *positive*.

Vi sarà proporzionalità pura tra la quinta, la sesta, la prima, e la seconda, come *positive*;

Vi sarà proporzionalità pura tra la settima, l'ottava, la terza, e la quarta, come *positive*.

Tutto ciò in virtù della definizione XLIV.; laonde pel corollario XII. de' principj vi sarà proporzionalità pura tra la quinta, la sesta, la settima, e l'ottava, come *positive*; adunque per la definizione XLIV., la quinta, la sesta, la settima, e l'ottava affette coi loro segni, saranno proporzionali trascendentemente, quando nol sieno puramente. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema CXXXV.

Poste sei grandezze non tutte positive;

I. Io dico in primo luogo, che:

Se tra la prima, la seconda, la quinta, e la sesta vi è proporzionalità pura, o trascendente;

E se la terza, la quarta, la quinta, e la sesta vi è proporzionalità pura, o trascendente;

La

La prima, la ſeconda, la terza, e la quarta ſaranno proporzionali traſcendentemente, quando nol ſieno puramente.

II. Io dico in ſecondo luogo, che:

Se tra la prima, la ſeconda, la terza, e la quarta vi è proporzionalità pura, o traſcendente;

E ſe tra la prima, la ſeconda, la quinta, e la ſeſta vi è proporzionalità pura, o traſcendente;

La terza, la quarta, la quinta, e la ſeſta ſaranno proporzionali traſcendentemente, quando nol ſieno puramente.

III. Io dico in terzo luogo, che:

Se tra la prima, la ſeconda, la terza, e la quarta vi è proporzionalità pura, o traſcendente;

E ſe tra la terza, la quarta, la quinta, e la ſeſta vi è proporzionalità pura, o traſcendente;

La prima, la ſeconda, la quinta, e la ſeſta ſaranno proporzionali traſcendentemente, quando nol ſieno puramente.

IV. Io dico in quarto luogo, che:

Se tra la prima, la ſeconda, la terza, e la quarta vi è proporzionalità pura, o traſcendente;

E ſe tra la quinta, la ſeſta, la prima, e la ſeconda vi è proporzionalità pura, o traſcendente;

La quinta, la ſeſta, la terza, e la quarta ſaranno proporzionali traſcendentemente, quando nol ſieno puramente.

SCOLIO.

QUeſto teorema ſi dimoſtrerà di una maniera ſimile a quella, con cui ſi è provato il precedente, conſiderando le ſei grandezze, come tutte *poſitive*, e riferendo la prima parte, la ſeconda, la terza, e la quarta del teorema reſpettivamente al primo punto, al ſecondo, al terzo, e al quarto del corollario XI. de' principj, e deducendone le quattro concluſioni del teorema in proporzionalità *pure*, ai termini delle quali ſi reſtituiranno poſcia i priſtini ſegni *negativi*, allorchè le condizioni del teorema tali gli eſigono, e in queſta guiſa ſi avranno in virtù della definizione XLIV. le proporzionalità *traſcen-*

denti, che debbono dimoſtrarſi, ovvero ſi avranno le proporzionalità *pure*, quando tali abbiano ad eſſere.

TEOREMA CXXXVI.

IN tutte le ſpecie di proporzionalità traſcendenti, il primo conſeguente (*convertendo*) ſta traſcendentemente al primo antecedente, come il ſecondo conſeguente al ſecondo antecedente.

TEOREMA CXXXVII.

IN tutte le ſette ſpecie di proporzionalità traſcendenti il primo antecedente (*permutando*) ſta al ſecondo antecedente, come il primo conſeguente al ſecondo conſeguente.

SCOLIO.

I. PEr eſſer convinto della verità di queſti due teoremi, baſta conſiderare in primo luogo, che *convertendo*, ovvero *permutando* una proporzionalità traſcendente, ne riſulta ſempre una diſpoſizione de' termini di eſſa co' loro ſegni *ſimile* ad una delle ſette maniere regiſtrate nella dimoſtrazione del teorema XXXI., di modo che i due primi termini riſpetto ai due ultimi ſono in iſtato analogo della prima ſpecie, o della ſeconda, o della terza, o della quarta, o della quinta, o della ſeſta, o della ſettima.

II. In ſecondo luogo, che in virtù del corollario III. della definizione XLIV., i termini della proporzionalità traſcendente conſiderati tutti come *poſitivi*, fanno una proporzionalità *pura*, di maniera che, *convertendo*, o *permutando* i termini di tal proporzionalità *pura*, eſſi rimangono ſempre *puramente* proporzionali pe' teoremi X., e XI.; adunque reſtituendo a queſti termini *così diſpoſti* i priſtini loro ſegni, i medeſimi termini in virtù della definizione XLIV. debbono coſtituire una proporzionalità traſcendente, benchè collocati in ſito diverſo da quello, che prima tenevano.

TEOREMA CXXXVIII.

IN qualunque ſpecie di proporzionalità traſcendente, benchè

ſi

si traspongano i termini di essa in maniera, che i due primi divengano i due ultimi, e i due ultimi divengano i due primi, nientedimeno i medesimi termini formano sempre una proporzionalità trascendente.

Dimostrazione.

Riflettasi, che non ostante la trasposizione espressa in questo teorema, i termini di qualunque proporzionalità trascendente serbano fra loro la disposizione, che è propria per costituire una proporzionalità trascendente, cioè sono disposti in una delle sette maniere registrate nella dimostrazione del teorema CXXXI.

Riflettasi ancora, che considerando come tutti *positivi* tutti i termini di qualunque proporzionalità trascendente, questi costituiscono una proporzionalità *pura* pel corollario III. della definizione XLIV., e che i termini di tale proporzionalità *pura* trasposti in maniera, che i due primi diventino i due ultimi, e versa-vice, essi termini continuano ad essere *puramente* proporzionali pel corollario VI. de' principj, e pel teorema X.; adunque rendendo a questi termini i primieri loro segni, costituiranno, benchè *trasposti*, una proporzionalità trascendente in vigore della definizione XLIV. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema CXXXIX.

Poste tre grandezze da una parte, e tre dall' altra:

I. Se la prima grandezza del prim' ordine sta *puramente* alla sua seconda, come la prima grandezza del second' ordine sta alla seconda sua:

E se la seconda del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la seconda del second' ordine sta alla sua terza;

Io dico, che per l' *egualità ordinata* la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la prima grandezza del second' ordine sta alla terza sua.

II. Se la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua seconda, come la prima grandezza del second' ordine sta alla seconda sua;

E la

E la seconda del prim' ordine sta *puramente* alla sua terza, come la seconda del second' ordine sta alla terza sua.

Io dico, che per l' *egualità ordinata* la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la prima grandezza del second' ordine sta alla terza sua.

III. Se la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua seconda, come la prima grandezza del second' ordine sta alla seconda sua;

E la seconda del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la seconda del second' ordine sta alla terza sua;

Io dico, che per l' *egualità ordinata* la prima grandezza del prim' ordine sta *puramente*, ovvero *trascendentemente* alla sua terza, come la prima grandezza del second' ordine sta alla terza sua.

TEOREMA CXL.

POste tre grandezze da una parte, e tre dall' altra;

I. Se la prima grandezza del prim' ordine sta *puramente* alla sua seconda, come la seconda grandezza del second' ordine sta alla sua terza;

E la seconda del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la prima grandezza del second' ordine sta alla sua seconda;

Io dico, che per l' *egualità perturbata* la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la prima grandezza del second' ordine sta alla sua terza.

II. Se la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua seconda, come la seconda grandezza del second' ordine sta alla sua terza;

E la seconda del prim' ordine sta *puramente* alla sua terza, come la prima del second' ordine sta alla sua seconda.

Io dico, che per l' *egualità perturbata* la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la grandezza prima del second' ordine sta alla sua terza.

III. Se la prima grandezza del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua seconda, come la seconda grandezza del second' ordine sta alla sua terza;

E la

E la seconda del prim' ordine sta *trascendentemente* alla sua terza, come la prima del second' ordine sta alla sua seconda;

Io dico, che per l' *egualità perturbata* la prima grandezza del prim' ordine sta *puramente*, ovvero *trascendentemente* alla sua terza, come la prima grandezza del second' ordine sta alla sua terza.

Scolio,

Che contiene la dimostrazione di questi due teoremi.

I. Tutte le proporzionalità trascendenti, che anno luogo nelle tre parti d' ambedue questi teoremi, e non sono costituite dalla prima, e terza grandezza del prim' ordine, e dalla prima, e terza grandezza del second' ordine, danno proporzionalità *pure*, se tutti i loro termini si considerano come *positivi*, e ciò pel corollario III. della definizione XLIV.; quindi è, che considerando come *positivi* i termini di tutte le proporzionalità *trascendenti*, le quali entrano nelle conclusioni delle tre parti d' ambedue questi teoremi, le medesime proporzionalità *trascendenti* divengono *proporzionalità pure* in virtù de' teoremi XII., e XIII., in virtù anche de' quali sussistono quelle proporzionalità *pure*, che entrano nelle conclusioni delle tre parti d' ambedue i presenti teoremi CXXXIX., e CXL.; adunque restituendo i pristini loro segni ai termini delle proporzionalità *trascendenti*, le quali entrano nelle conclusioni delle tre parti di questi medesimi due teoremi CXXXIX., e CXL., le stesse proporzionalità *trascendenti* debbono sussistere in vigore della definizione XLIV., e in conseguenza rimangono dimostrate le tre parti di ciascuno de' due teoremi CXXXIX., e CXL.

II. Ne' quali le tre grandezze del prim' ordine considerate, come *positive* possono essere non omogenee alle tre grandezze del second' ordine, considerate anch' esse, come *positive*.

Teorema CXLI.

Nelle proporzionalità trascendenti della prima, seconda, e settima specie.

Se il primo antecedente è uguale, ovvero maggiore, o minore

nore del primo conseguente, anche il secondo antecedente sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo conseguente;

E nelle proporzionalità *trascendenti* della terza, quarta, e settima specie;

Se il primo antecedente è uguale, ovvero maggiore, o minere del secondo antecedente, anche il primo conseguente sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo conseguente.

Dimostrazione della prima parte.

SI considerino come tutti *positivi* i termini delle proporzionalità *trascendenti* della prima, seconda, e settima specie, e queste proporzionalità trascendenti diverranno proporzionalità *pure* pel corollario III. della definizione XLIV.; di più il primo antecedente delle medesime proporzionalità *pure* sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del primo conseguente in virtù della supposizione; mentre ancorchè il primo antecedente, e il primo conseguente delle proporzionalità trascendenti della seconda, e settima specie sieno *negativi*;

E' chiaro, che venendo essi considerati, come *positivi*, sarà tuttavia il primo antecedente (come positivo) eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del primo conseguente (come positivo); adunque pel corollario X. de' principj il secondo antecedente delle suddette proporzionalità *pure*, sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo conseguente; e quindi il secondo antecedente delle proporzionalità *trascendenti* della prima, seconda, e settima specie, sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo conseguente; poichè sebbene il secondo antecedente, e il secondo conseguente sono *negativi* nelle proporzioni *trascendenti* della prima, e settima specie, nientedimeno essendosi provato, che il secondo antecedente, considerato come *positivo*, è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo conseguente considerato come *positivo*, egli è visibile, che lo stesso secondo antecedente, come *negativo*, dev'essere uguale, ovvero respetſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo conſeguente, come *negativo*; e queſta è la prova della prima parte.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

Similmente ſieno conſiderati come tutti *poſitivi* i termini delle proporzionalità *traſcendenti* della terza, quarta, e ſettima ſpecie, ed eſſe diverranno proporzionalità *pure* pel corollario III. della definizione XLIV.; in oltre il primo antecedente di queſte proporzionalità *pure* ſia eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo antecedente in vigore dell' ipoteſi, poſciachè quantunque i due antecedenti delle proporzionalità traſcendenti della quarta, e ſettima ſpecie ſieno *negativi*, è viſibile, che venendo eſſi conſiderati come *poſitivi*, il primo antecedente come *poſitivo* ſarà tuttavia eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo antecedente come *poſitivo*; adunque pel corollario del teorema XI. il primo conſeguente delle ſuddette proporzionalità *pure* ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo conſeguente, e perciò il primo conſeguente delle proporzionalità *traſcendenti* della terza, quarta, e ſettima ſpecie ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo conſeguente; mentre ſebbene i due antecedenti ſono *negativi* nelle proporzionalità *traſcendenti* della quarta, e ſettima ſpecie, nulladimeno eſſendoſi moſtrato, che il primo conſeguente, conſiderato come *poſitivo*, è uguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo conſeguente conſiderato come *poſitivo*, è chiaro, che il medeſimo primo conſeguente, come *negativo*, deve eſſere eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del ſecondo conſeguente, come *negativo*; e queſta è la prova della ſeconda parte.

Teorema CXLII.

Se in due proporzionalità *traſcendenti* tre termini della prima ſono eguali a tre termini della ſeconda, *preſi col medeſimo ordine*, anche l' altro termine della prima ſarà eguale al termine corriſpondente della ſeconda.

DIMOSTRAZIONE.

QUando i termini, che debbono provarsi eguali, non fossero i quarti termini respettivi delle due proporzionalità trascendenti, essi potrebbero farsi divenire quarti termini, mediante il teorema CXXXVI. *convertendo*, o mediante il teorema CXXXVII. *trasponendo*; di modo che la dimostrazione si riduce a provare, che se i tre primi termini di una proporzionalità *trascendente* sono eguali ai tre primi termini di un' altra proporzionalità *trascendente*, anche i quarti termini di ambedue le proporzionalità *trascendenti* sono eguali.

Nella dimostrazione chiamerò proporzionalità *A* la prima delle due proporzionalità *trascendenti*, e chiamerò proporzionalità *B* la seconda.

Pel teorema CXXXVI., *convertendo* la proporzionalità *A*, il secondo termine di essa starà *trascendentemente* al primo, come il suo quarto termine al terzo; ma il primo termine della proporzionalità *A* sta *puramente*, o *trascendentemente* al primo termine (a se eguale) della proporzionalità *B*, come il terzo termine della proporzionalità *A* al terzo termine (a se eguale) della proporzionalità *B* pel teorema CXXXII.; adunque per l'*egualità ordinata*, cioè per la seconda, o terza parte del teorema CXXXIX., il secondo termine della proporzionalità *A* sta *puramente*, o *trascendentemente* al primo termine della proporzionalità *B*, come il terzo termine della proporzionalità *A* sta al terzo termine della proporzionalità *B*; ma per l'ipotesi il primo termine della proporzionalità *B* sta *trascendentemente* al secondo termine della proporzionalità *B*, come il terzo termine della proporzionalità *B* sta al quarto termine della proporzionalità *B*; adunque di nuovo per l'*egualità ordinata*, vale a dire per la prima, o terza parte del teorema CXXXIX. il secondo termine della proporzionalità *A* sta *puramente*, o *trascendentemente* al secondo termine della proporzionalità *B*, come il quarto termine della proporzionalità *A* sta al quarto termine della proporzionalità *B*.

Ora il secondo termine della proporzionalità *A* è uguale

per

per l'ipotesi al secondo termine della proporzionalità *B*; adunque pel corollario XXI. de' principj, ovvero per la prima parte del teorema XIV., anche il quarto termine della proporzionalità *A* sarà eguale al quarto termine della proporzionalità *B*. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

SUpponendo tutti *positivi* i termini delle due proporzionalità *trascendenti*, enunciate in questo teorema, saranno eguali per l'ipotesi quei termini corrispondenti di esse, che erano già positivi, ed eguali tra loro, e non cesseranno di essere eguali quei termini corrispondenti, i quali erano già negativi, ed eguali tra loro; attesochè due grandezze negative, che sono eguali, conservano l'eguaglianza loro, benchè diventino ambedue positive.

Ciò posto egli è chiaro pel corollario III. della definizione XLIV., che dalle due *proporzionalità trascendenti* suddette nasceranno due proporzionalità *pure*; ed è egualmente chiaro pel teorema I., che tutti quattro i termini di ciascuna delle stesse proporzionalità pure saranno eguali ai termini respettivi dell' altra; adunque restituendo ai quattro termini di ambedue le proporzionalità *pure* i primitivi loro segni, si riavranno le due proporzionalità *trascendenti* del teorema, tutti quattro i termini correspettivi delle quali saranno eguali tra loro, poichè i termini corrispondenti, che rimarranno positivi, saranno evidentemente eguali, e i termini corrispondenti, che torneranno ad essere negativi, non perderanno quell' uguaglianza, che già avevano *per l'ipotesi*, essendo negativi, ovvero quell' eguaglianza, che si è *provata in essi* mediante il teorema I., allorchè sono stati *supposti* positivi; conciossiachè due grandezze positive eguali serbano la loro eguaglianza, ancorchè divengano ambedue negative; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Scolio.

GLi Analisti si sono sempre valuti dell' unità *positiva* per moltiplicare, dividere, ed estrarre le radici, nè alcuno di essi

 (per

(per quanto è a me noto) à pensato di servirsi dell' unità *negativa* per fare le suddette operazioni.

Riflettendo io, che l' assumere l' unità *positiva* è cosa puramente arbitraria, mi sono proposto di dare un saggio nel proseguimento di questo trattato dell' uso, che può farsi anche dell' unità *negativa*.

Chiamerò pertanto *algoritmo comune* quello, che impiega l' unità *positiva* nella moltiplicazione, divisione, ed estrazione delle radici; e chiamerò *algoritmo nuovo* quello, che moltiplica, divide, ed estrae le radici, mediante l' unità *negativa*.

DEFINIZIONE XLV.

NEll' algoritmo *comune* poste due grandezze, una delle quali sia negativa, o anche tutte due sieno tali; io dico, che una di esse si moltiplica per l' altra, quando si prende una nuova grandezza tale, che ella sia *trascendentemente* quarta proporzionale dopo l' unità arbitraria *positiva* la grandezza moltiplicanda, e la grandezza moltiplicante.

DEFINIZIONE XLVI.

NEll' algoritmo *nuovo*, poste due grandezze o ambe positive, o ambe negative, o una delle quali sia positiva, e l' altra negativa; io dico, che una di esse si moltiplica per l' altra, quando si prende una nuova grandezza, tale che ella sia *trascendentemente* quarta proporzionale dopo l' unità arbitraria *negativa*, la grandezza moltiplicanda, e la grandezza moltiplicante.

SCOLIO.

I. LA grandezza, che è quarta proporzionale nelle proporzionalità *trascendenti* espresse in queste due ultime definizioni, chiamasi prodotto delle grandezze insieme moltiplicate.

II. Egli non è necessario, che le grandezze moltiplicanda, e moltiplicante, considerate ambedue come *positive* (se tali non fossero), sieno omogenee tra loro; è bensì necessario, che il loro prodotto considerato anch' esso come *positivo* (quando effettivamente non sia tale) sia una grandezza omogenea alla

mol-

moltiplicante, considerata come *positiva* anch' essa, quando tale già non fosse.

III. La ragione di ciò, che si enuncia nel secondo articolo si renderà manifesta, se si rifletterà alla dipendenza, che à la proporzionalità *trascendente* dalla proporzionalità *pura*, come apparisce dalla definizione XLIV.

Definizione XLVII.

Nell' algoritmo *comune*, poste due grandezze, una delle quali sia negativa, o anche tutte due sieno tali; io dico, che una di esse si divide per l' altra, quando si prende una nuova grandezza, tale, che ella sia *trascendentemente* quarta proporzionale dopo la grandezza dividente, la grandezza dividenda, e l' unità arbitraria *positiva*.

Definizione XLVIII.

Nell' algoritmo *nuovo*, poste due grandezze, o ambedue positive, o ambedue negative, o una delle quali sia positiva, e l' altra negativa; io dico, che una di esse si divide per l' altra, quando si prende una nuova grandezza tale, ch' ella sia *trascendentemente* quarta proporzionale dopo la grandezza dividente, la grandezza dividenda, e l' unità arbitraria *negativa*.

Scolio.

I. La grandezza, che è quarta proporzionale nelle proporzionalità *trascendenti* relative alle due ultime definizioni, chiamasi quoziente della grandezza divisa per l' altra.

II. Considerando come *positive* ambedue le grandezze dividenda, e dividente (quando tali non sieno per se medesime) egli è necessario, che sieno omogenee fra loro:

E considerando il quoziente come *positivo* (se per se stesso non è tale), e considerando anche l' unità arbitraria come *positiva* (nel caso della definizione XLVIII.); egli è parimente necessario in ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*, che questa unità, e il quoziente sieno due grandezze fra loro omogenee; ma non è necessario, che la medesima unità arbitraria sia u-

una

na grandezza omogenea alla dividenda, o alla dividente (il che è lo stesso); e perciò anche il quoziente può essere una grandezza non omogenea alla dividenda, o alla dividente.

III. La ragione di ciò, che si enuncia nel secondo articolo, si desume chiaramente dalla dipendenza, che à la proporzionalità *trascendente* dalla proporzionalità *pura*, conforme si esprime nella definizione XLIV.

DEFINIZIONE XLIX.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, se una grandezza positiva, o negativa moltiplicata per se stessa un certo numero di volte ne produce un' altra di *qualunque stato*, la prima dicesi radice della seconda di un *grado* espresso dal numero delle volte *più uno*, che la prima è moltiplicata per se stesa, ad effetto di produrre la seconda.

Questa definizione comprende nella sua universalità la definizione XXXVIII.

TEOREMA CXLIII.

NEll' algoritmo *comune* una grandezza positiva moltiplicata per una grandezza negativa; e una grandezza negativa moltiplicata per una grandezza positiva danno un prodotto *negativo*:

E nell' algoritmo *nuovo* una grandezza positiva moltiplicata per una grandezza negativa, e una grandezza negativa moltiplicata per una grandezza positiva danno un prodotto *positivo*.

AVVERTIMENTO.

NEl proseguimento di questo trattato $+Z$ rappresenterà l' unità arbitraria positiva, e $-Z$ l' unità arbitraria negativa.

Esprima ora $+F$ la grandezza positiva, e $-G$ la grandezza negativa.

Di-

Dimoſtrazione della prima parte.

SI prendano queſte due proporzionalità pure:

(1) $+Z . +F :: +G . +FG$,

(2) $+Z . +G :: +F . +GF$,

dalle quali per la definizione XLIV. riſulteranno le due reſpettive proporzionalità traſcendenti

$+Z . +F :: -G . -FG$,

$+Z . -G :: +F . -GF$;

la prima di eſſe, che è della prima ſpecie, dà $-FG$ per prodotto di $+F$ moltiplicato per $-G$, e la ſeconda, che è della terza ſpecie dà $-GF$ per prodotto di $-G$ moltiplicato per $+F$, il tutto a tenore della definizione XLVI.; adunque rimane dimoſtrata la prima parte del teorema.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

POſte le due proporzionalità pure (1), e (2) regiſtrate nella dimoſtrazione della prima parte, ſe ne deducono per la definizione XLIV. le due reſpettive proporzionalità traſcendenti, che ſeguono:

$-Z . +F :: -G . +FG$,

$-Z . -G :: +F . +GF$;

la prima delle quali, che è della quarta ſpecie, dà $+FG$ per prodotto di $+F$ moltiplicato per $-G$, e la ſeconda, che è della ſeconda ſpecie, dà $+GF$ per prodotto di $-G$ moltiplicato per $+F$; il tutto a tenore della definizione XLVIII.; adunque reſta dimoſtrata la ſeconda parte del teorema.

TEOREMA CXLIV.

NEll' algoritmo *comune* una grandezza poſitiva moltiplicata per una grandezza poſitiva, e una grandezza negativa moltiplicata per una grandezza negativa danno un prodotto *poſitivo:*

E nell' algoritmo *nuovo* una grandezza poſitiva moltiplicata per una grandezza poſitiva, e una grandezza negativa moltiplicata per una grandezza negativa danno un prodotto negativo.

Sieno

Sieno $+F$, e $+G$ le grandezze positive da moltiplicarsi insieme, e $-F$, e $-G$ le grandezze negative da moltiplicarsi tra loro.

Dimostrazione della prima parte.

SI prenda l'infrascritta proporzionalità pura:

(1) $+Z.+F::+G.+FG$,

la quale per la definizione XXXVI. fa conoscere esser vera la prima parte del teorema in ordine alla moltiplicazione fra loro di due grandezze positive.

Ora dalla proporzionalità pura (1) risulta per la definizione XLIV. la proporzionalità *trascendente*, che segue:

$+Z.-F::-G.+FG$,

che è della quinta specie, e dà $+FG$ per prodotto di $-F$ moltiplicato per $-G$ a tenore della definizione XLV.; adunque rimane dimostrata la prima parte del teorema.

Dimostrazione della seconda parte.

DAlla proporzionalità pura (1) notata nella dimostrazione della prima parte nascono per la definizione XLIV. queste due proporzionalità trascendenti:

$-Z.+F::+G.-FG$,

$-Z.-F::-G-FG$,

la prima delle quali è della sesta specie, e dà $-FG$ per prodotto di $+F$ moltiplicato per $+G$; e la seconda, che è della settima specie, dà $-FG$ per prodotto di $-F$ moltiplicato per $-G$, il tutto a tenore della definizione XLVI.; adunque è dimostrata la seconda parte del teorema.

TEOREMA CXLV.

NEll' algoritmo *comune* niuna grandezza *negativa* può essere il prodotto di due grandezze o ambedue positive, o ambedue negative:

E nell' algoritmo *nuovo* niuna grandezza *positiva* può essere il prodotto di due grandezze ambedue positive, o ambedue negative.

Di-

Dimostrazione della prima parte.

NEll' algoritmo *comune* per la prima parte del teorema precedente, il prodotto di due grandezze positive, ovvero di due grandezze negative, è sempre *positivo;* adunque, ec.

Dimostrazione della seconda parte.

NEll' algoritmo *nuovo*, per la seconda parte del teorema precedente, il prodotto di due grandezze positive, ovvero di due grandezze negative, è sempre *negativo;* adunque, ec.. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario.

NEll' algoritmo *comune* niuna grandezza reale (cioè niuna grandezza positiva, o negativa) può essere radice seconda d' una grandezza *negativa*.

Nell' algoritmo *nuovo* niuna grandezza reale (cioè niuna grandezza positiva, o negativa) può essere radice seconda d' una grandezza *positiva;*

Imperciocchè, se nell' algoritmo *comune* una grandezza positiva, o negativa fosse la radice seconda d' una grandezza *negativa*, ne seguirebbe per la definizione XXXVIII., o per la definizione XLIX., che questa grandezza (la quale è la pretesa radice seconda) moltiplicata per se medesima, produrebbe una grandezza *negativa*, il che si oppone alla prima parte del presente teorema; mentre una grandezza positiva moltiplicata per se stessa fa figura di due grandezze positive, che si moltiplicano tra loro.

Similmente, se nell' algoritmo *nuovo* una grandezza positiva, o negativa fosse la radice di una grandezza *positiva*, ne seguirebbe, che la pretesa radice seconda moltiplicata per se medesima produrebbe una grandezza *positiva*, il che ripugna alla seconda parte di questo teorema.

Scolio.

GLi Analisti esprimono la radice seconda con questo segno

✓

$\sqrt{}$, che chiamano ſegno radicale, cioè deſignano la radice ſeconda, v. g. di $+A$ in queſta guiſa $\sqrt{+A}$, ovvero $\sqrt{A}$, e la radice ſeconda di $-A$, così $\sqrt{-A}$.

Eſſi chiamano immaginaria la grandezza $\sqrt{-A}$, perchè nell' algoritmo *comune*, ch' eſſi maneggiano, niuna grandezza reale, cioè niuna grandezza poſitiva, ovvero negativa può eſſere la radice ſeconda di $-A$, cioè eguale a $\sqrt{-A}$, conforme ſi prova in queſto corollario;

Adunque per una equivalente ragione dovrebbe chiamarſi immaginaria (maneggiando l' algoritmo *nuovo*) anche la grandezza $\sqrt{+A}$; perchè nell' algoritmo *nuovo* niuna grandezza reale, cioè niuna grandezza poſitiva, ovvero negativa può eſſere la radice ſeconda di $+A$, cioè eguale a $\sqrt{+A}$:

Or ſiccome i nomi, quantunque ſieno arbitrarj, debbono imporſi con proprietà, così io non poſſo indurmi a chiamare immaginaria nell' algoritmo *comune* la radice ſeconda poſitiva, o negativa di $-A$, cioè $\pm\sqrt{-A}$, e a chiamare immaginaria nell' algoritmo *nuovo* la radice poſitiva, o negativa di $+A$, vale a dire $\pm\sqrt{+A}$;

Imperciocchè rifletto in primo luogo, che sì le une, come le altre radici concepite nella maniera da me ſpiegata ſono grandezze reali, e non fantaſtiche, o impoſſibili; benchè naſcano dall' unità *negativa* le prime, e dall' unità *poſitiva* le ſeconde:

Secondariamente conſidero, che l' aſſunzione dell' unità *poſitiva*, ſu la quale ſi fonda l' algoritmo *comune*, è ugualmente arbitraria, che l' aſſunzione dell' unità *negativa*, ſu la quale io fondo l' algoritmo nuovo.

DEFINIZIONE L.

IO dunque nell' algoritmo *comune* chiamo *grandezza ſtraordinaria del ſecondo grado*, o ſemplicemente grandezza *ſtraordinaria*, quella grandezza poſitiva, o negativa, che moltiplicata una volta per ſe ſteſſa mediante l' unità *negativa* produce una grandezza *negativa*.

Sco-

SCOLIO.

NEll' algoritmo *comune* designando con l' espressione generale $-A$ la grandezza negativa, che nasce dal moltiplicare una volta per se stessa la grandezza *straordinaria* positiva, o negativa, questa medesima grandezza *straordinaria* positiva, o negativa sarà da me espressa così $\pm\sqrt{-A}$; nel segno doppio $\pm$ il superiore rappresenta la grandezza *straordinaria* positiva, e l' inferiore denota la grandezza *straordinaria* negativa.

COROLLARIO.

NEll' algoritmo *comune* in virtù della definizione L., e del presente scolio, si à questa proporzionalità *trascendente*, che è della sesta, e settima specie:

$$-Z.\pm\sqrt{-A}::\pm\sqrt{-A}.-A.$$

DEFINIZIONE LI.

NEll' algoritmo *nuovo* io chiamo grandezza *straordinaria del secondo grado*, o semplicemente grandezza *straordinaria* quella grandezza positiva, o negativa, che moltiplicata una volta per se stessa, mediante l' unità *positiva*, produce una grandezza *positiva*.

SCOLIO.

NEll' algoritmo *nuovo* denotando con l' espressione generale $+A$ la grandezza positiva, che nasce dal moltiplicare una volta per se stessa la grandezza *straordinaria* positiva, o negativa, questa medesima grandezza *straordinaria* positiva, o negativa sarà da me designata così $\pm\sqrt{+A}$. Nel segno doppio $\pm$ il superiore rappresenta la grandezza *straordinaria* positiva, e l' inferiore esprime la grandezza *straordinaria* negativa.

COROLLARIO.

NEll' algoritmo *nuovo*, in vigore della definizione LI., e di questo scolio, si à la seguente proporzionalità, che è pura, o trascendente della quinta specie:

$$+Z.\pm\sqrt{+A}::\pm\sqrt{+A}.+A.$$

TEOREMA CXLVI.

NEll' algoritmo *comune* il prodotto di qualſivoglia numero *pari* di grandezze tutte poſitive, o tutte negative, è una grandezza *poſitiva*:

E nell' algoritmo *nuovo* il prodotto di qualſivoglia numero *pari* di grandezze tutte poſitive, o tutte negative, è una grandezza *negativa*.

Dimoſtrazione della prima parte.

IL numero *pari* di grandezze tutte poſitive, o tutte negative ſia v. g. *6*.

Egli è certo, che nell' algoritmo *comune* il prodotto delle due prime grandezze è *poſitivo* (o poſitive, o negative, che elle ſieno); come pure il prodotto della terza, e quarta grandezza, e il prodotto della quinta, e della ſeſta ſono *poſitivi*, per la prima parte del teorema CXLIV. (o ſieno la terza, quarta, quinta, e ſeſta grandezza tutte poſitive, o tutte negative); il prodotto poi delle due prime, moltiplicato pel prodotto della terza, e della quarta, ſa un prodotto, che è *poſitivo* per lo ſteſso teorema, ed anche il prodotto delle quattro prime grandezze (che ſi è provato poſitivo) moltiplicato pel prodotto della quinta, e della ſeſta grandezza dà un prodotto delle ſei grandezze, che è *poſitivo* per la citata prima parte del teorema CXLIV.

Così procedendo, è manifeſto, che ſi proverà la prima parte del preſente teorema in qualſivoglia numero *pari* di grandezze o tutte poſitive, o tutte negative; adunque, ec.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

SImilmente nell' algoritmo *nuovo* il prodotto delle prime due grandezze è *negativo* (o poſitive, o negative, ch' elle ſieno), e *negativi* pur ſono il prodotto delle terza, e della quarta grandezza, e il prodotto della quinta, e della ſeſta in virtù della ſeconda parte del teorema CXLIV. (o ſieno la terza, quarta, quinta, e ſeſta grandezza tutte poſitive, o tutte negative); adun-

adunque il prodotto delle due prime grandezze, moltiplicato pel prodotto della terza, e della quarta, compone un prodotto delle quattro prime grandezze, che è *negativo*, pel medesimo teorema; e quindi il prodotto delle quattro prime grandezze (che si è provato negativo) moltiplicato pel prodotto della quinta, e della sesta, forma un prodotto delle sei grandezze, che è *negativo*, per l' allegata seconda parte del teorema CXLIV.

E' visibile, che nel modo stesso si proverà la seconda parte del teorema in qualunque numero *pari* di grandezze, o tutte positive, o tutte negative; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

L' Esser prese, come si è fatto nelle dimostrazioni di ambedue le parti del teorema, l' esser prese, dico, a coppia a coppia le grandezze, le quali compongono il prodotto delle sei grandezze, o tutte positive, o tutte negative, non fa, che il prodotto delle tre coppie sia differente dal prodotto delle sei grandezze moltiplicate insieme ad una ad una, ciò è chiaro pel corollario IV. del teorema LXXXI. in ordine al prodotto *positivo* delle sei grandezze, considerato nella prima parte del teorema presente:

E si rende manifesto anche in ordine al prodotto *negativo* delle sei grandezze, considerato nella seconda parte del teorema, a chi riflette, che se $+abcdef$ è uguale a $+(ab)(cd)(ef)$, conforme ò testè provato, sarà eziandio $-abcdef$ eguale a $-(ab)(cd)(ef)$; conciossiachè se A è uguale ad E è evidente, che anche $-A$ è uguale a $-E$.

La considerazione di questo scolio à manifestamente luogo in qualsivoglia numero di coppie, che possano comporre il prodotto di qualunque numero *pari* di grandezze tutte positive, o tutte negative.

COROLLARIO I.

NEll' algoritmo *comune* ogni dignità di grado *pari* d' una gran-

grandezza positiva, o negativa, è una grandezza *positiva*.

E nell' algoritmo *nuovo* ogni dignità di grado *pari* d' una grandezza positiva, o negativa, è una grandezza *negativa*.

COROLLARIO II.

NEll' algoritmo *comune* una grandezza *positiva*, v. g. $+G$, può avere due radici di qualsivoglia grado *pari*, una positiva, e l'altra negativa.

E nell' algoritmo *nuovo* una grandezza *negativa*, v. g. $-G$, può avere due radici di qualsivoglia grado *pari*, una positiva, e l'altra negativa;

Imperciocchè possono sempre immaginarsi due grandezze, una positiva, e l'altra negativa, ciascuna delle quali moltiplicata per se medesima (nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*) tante volte meno una, quante unità contiene il numero *pari* della radice, dia un prodotto eguale a $+G$ nell' algoritmo *comune*, ed eguale a $-G$ nell' algoritmo *nuovo*.

Egli è chiaro per la definizione XLIX., che ciascuna delle due grandezze positiva, e negativa, immaginate come sopra, esser dee la radice del grado *pari* della grandezza positiva $+G$ nell' algoritmo *comune*, e della grandezza negativa $-G$ nell' algoritmo *nuovo*.

TEOREMA CXLVII.

NEll' algoritmo *comune* niuna grandezza *negativa* può essere il prodotto d' un numero *pari* di grandezze tutte positive, o tutte negative:

E nell' algoritmo *nuovo* niuna grandezza *positiva* può essere il prodotto di un numero *pari* di grandezze tutte positive, o tutte negative.

Dimostrazione della prima parte.

NEll' algoritmo *comune*, per la prima parte del precedente teorema, il prodotto di qualunque numero *pari* di grandezze tutte positive, o tutte negative, è *positivo*; adunque, ec.

Di-

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

NEll' algoritmo *nuovo* per la ſeconda parte del teorema precedente, il prodotto di qualſivoglia numero *pari* di grandezze tutte poſitive, o tutte negative è negativo; adunque, ec. Il che dovea dimoſtrarſi.

Corollario I.

NEll' algoritmo *comune*, niuna grandezza reale, cioè niuna grandezza poſitiva, o negativa, può eſſere radice di *qualunque grado pari* d' una grandezza *negativa*;

E nell' algoritmo *nuovo* niuna grandezza reale, cioè niuna grandezza poſitiva, o negativa, può eſſere radice di *qualunque grado pari* d' una grandezza *poſitiva*;

Imperciocchè ſe nell' algoritmo *comune* una grandezza poſitiva, o negativa foſſe la radice di qualſivoglia grado pari di una grandezza negativa, queſta medeſima preteſa radice, moltiplicata per ſe ſteſſa tante volte *meno una*, quante unità ſi contengono nel numero pari, che eſprime il ſuo grado, produrebbe la grandezza *negativa*, di cui è immaginata radice, e ciò per la definizione XLIX., il che è contrario alla prima parte del teorema preſente, poſciachè una tal radice moltiplicata per ſe medeſima tante volte *meno una*, quante unità contiene il numero pari, che eſprime il ſuo grado, è la ſteſſa coſa, che il prodotto di un numero pari di grandezze tutte poſitive, o tutte negative.

E per la medeſima definizione XLIX., ſe nell' algoritmo *nuovo* una grandezza poſitiva, o negativa foſſe radice di qualunque grado pari d' una grandezza poſitiva, queſta ſuppoſta radice moltiplicata per ſe medeſima tante volte *meno una* quante unità contiene il numero pari, che indica il ſuo grado, produrebbe la grandezza *poſitiva*, di cui ſi pretende radice; e queſto è contro la ſeconda parte del teorema preſente, mentre il prodotto, che naſce da una tal radice moltiplicata per ſe medeſima tante volte *meno una*, quante unità contiene il numero pari, che denota il ſuo grado, è lo ſteſſo, che il prodotto

dotto

dotto d' un numero pari di grandezze tutte positive, o tutte negative.

SCOLIO.

PEr una ragione similissima a quella da me posta nello scolio annesso al teorema CXLV., io chiamerò nell' algoritmo *comune* radici *straordinarie* del grado $2n$ quelle, che gli Analisti appellano (forse men propriamente) radici immaginarie dello stesso grado $2n$, e che essi designano così $\pm \sqrt[2n]{-H}$:

E nell' algoritmo *nuovo* chiamerò radici *straordinarie* del grado $2n$ quelle, che si esprimono analiticamente così $\pm \sqrt[2n]{+H}$.

H denota qualsivoglia grandezza positiva, ed n qualunque numero intiero positivo.

DEFINIZIONE LII.

CHiamo grandezze ordinarie nell' algoritmo *comune* tutte quelle grandezze positive, o negative, che non sono *straordinarie* nel medesimo algoritmo *comune*;

E chiamo grandezze ordinarie nell' algoritmo *nuovo* tutte quelle grandezze positive, o negative, che non sono grandezze *straordinarie* nello stesso algoritmo *nuovo*.

COROLLARIO.

ADunque $\sqrt{+A}$, e $\sqrt[2n]{+H}$ nell' algoritmo *comune* sono grandezze ordinarie;

E $\sqrt{-A}$, e $\sqrt[2n]{-H}$ nell' algoritmo *nuovo* sono grandezze ordinarie.

TEOREMA CXLVIII.

NEll' algoritmo *comune* una grandezza positiva divisa per una grandezza negativa, e una grandezza negativa divisa per una grandezza positiva, danno un quoziente *negativo*;

E nell' algoritmo *nuovo* una grandezza positiva divisa per una grandezza negativa, e una grandezza negativa divisa per una grandezza positiva, danno un quoziente *positivo*.

Sia

Sia $+F$ la grandezza poſitiva, e $-G$ la grandezza negativa.

Dimoſtrazione della prima parte.

SI prendano queſte due proporzionalità pure:

(1) $+G.+F::+Z.+(F:G)$,

(2.) $+F.+G::+Z.+(G:F)$,

e per la definizione XLIV. avremo le due proporzionalità traſcendenti, che ſieguono:

$-G.+F::+Z.-(F:G)$,

$+F.-G::+Z.-(G:F)$,

la prima delle quali è della ſeſta ſpecie, e la ſeconda è della terza ſpecie; perciocchè nell' algoritmo *comune*, in virtù della definizione XLVII., $-(F:G)$ grandezza *negativa* è il quoziente di $+F$ diviſa per $-G$, e $-(G:F)$ grandezza *negativa* anch' eſſa, è il quoziente di $-G$ diviſa per $+F$; e ciò dimoſtra la prima parte.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

POſte le due proporzionalità pure (1), e (2), ſuſſiſtono per la definizione XLIV. le due infraſcritte proporzionalità traſcendenti:

$-G.+F::-Z.+(F:G)$,

$+F.-G::-Z.+(G:F)$,

eſſendo la prima della quarta ſpecie, e la ſeconda della quinta ſpecie; laonde nell'algoritmo *nuovo* per la definizione XLVIII. $+(F:G)$ grandezza *poſitiva* è il quoziente di $+F$ diviſo per $-G$; e $+(G:F)$ grandezza parimente *poſitiva* è il quoziente di $-G$ diviſo per $+F$; e ciò dimoſtra la ſeconda parte.

TEOREMA CXLIX.

NEll' algoritmo *comune* una grandezza poſitiva diviſa per una grandezza poſitiva, e una grandezza negativa diviſa per una grandezza negativa danno un quoziente *poſitivo*.

E nell' algoritmo *nuovo* una grandezza poſitiva diviſa per una grandezza poſitiva, e una grandezza negativa diviſa per una grandezza negativa danno un quoziente *negativo*.

Sieno $+F$, e $+G$ le due grandezze positive, e $-F$, e $-G$ le due grandezze negative.

Dimostrazione della prima parte.

FAcciasi questa proporzionalità pura:

$(1)\ +G.+F::+Z.+(F:G)$,

e per la definizione XLIV. ne verrà questa proporzionalità trascendente, che è della seconda specie:

$-G.-F::+Z.+(F:G)$;

laonde per le definizioni XXXIX., e XLVII. $+(F:G)$, grandezza *positiva*, è il quoziente di $+F$ diviso per $+G$, e la stessa grandezza *positiva* $+(F:G)$ è il quoziente di $-F$ diviso per $-G$. Il che prova la verità della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

POsta la proporzionalità pura (1), si anno in virtù della definizione XLIV. queste due proporzionalità trascendenti:

$+G.+F::-Z.-(F:G)$,

$-G.-F::-Z.-(F:G)$,

la prima delle quali è della prima specie, e la seconda è della settima specie; e perciò nell' algoritmo *nuovo* per la definizione XLVIII. $-(F:G)$, grandezza *negativa*, è il quoziente di $+F$ diviso per $+G$, e la medesima grandezza *negativa* $-(F:G)$ è il quoziente di $-F$ diviso per $-G$, il che prova la seconda parte.

TEOREMA CL.

NEll' algoritmo *comune*,

I. Il prodotto di qualsivoglia numero *impari* di grandezze tutte positive è una grandezza *positiva*.

II. E il prodotto di qualsivoglia numero *impari* di grandezze tutte negative è una grandezza *negativa*.

Nell' algoritmo *nuovo*,

I. Il prodotto di qualsivoglia numero *impari* di grandezze tutte positive è una grandezza *positiva*.

II. E il prodotto di qualsivoglia numero *impari* di grandezze tutte negative è una grandezza *negativa*. Di-

Dimostrazione della prima, e seconda parte.

LA prima parte nell' algoritmo *comune* è manifesta per una facilissima illazione del teorema CXLIV.

E la seconda si prova così:

Il prodotto di qualunque numero *impari* di grandezze negative è il prodotto, che viene dal *prodotto* di un numero *pari* di grandezze negative moltiplicato per un' altra grandezza negativa, ma nell' algoritmo *comune*, per la prima parte del teorema CXLVI., il prodotto di un numero *pari* di grandezze negative è una grandezza *positiva*; adunque per la prima parte del teorema CXLIII. questo *prodotto* di un numero *pari* di grandezze negative (che si è provato essere *positivo*) moltiplicato per un' altra grandezza, che è negativa, dà un prodotto di qualunque numero *impari* di grandezze negative, che è una grandezza *negativa*; e questa è la prova della seconda parte.

Dimostrazione della terza, e quarta parte.

IL prodotto di qualunque *numero impari* di grandezze positive è il prodotto, che risulta dal *prodotto* di un numero *pari* di grandezze positive, moltiplicato per un' altra grandezza positiva, ma nell' algoritmo *nuovo*, per la seconda parte del teorema CXLVI., il *prodotto* d' un numero *pari* di grandezze positive è una grandezza *negativa*; adunque per la seconda parte del teorema CXLIII., questo *prodotto* d' un numero *pari* di grandezze positive (che si è provato essere una grandezza *negativa*) moltiplicato per un' altra grandezza, che è positiva, dà un prodotto di qualsivoglia numero *impari* di grandezze positive, che è positivo; e questa è la dimostrazione della terza parre.

Il prodotto di qualunque numero *impari* di grandezze *negative* è il prodotto, che nasce dal *prodotto* di un numero *pari* di grandezze negative, moltiplicato per un' altra grandezza negativa. Ma nell' algoritmo *nuovo*, per la seconda parte del teorema CXLVI., il *prodotto* d' un numero *pari* di grandezze negative è una grandezza *negativa*; adunque per la seconda parte del teorema CXLIII., questo *prodotto* di un numero *pari* di grandezze negative (che si è provato essere una grandezza *negativa*) moltiplicato per un'altra grandezza negativa, fa un prodotto di qualunque numero *impari* di grandezze negative, che è una grandezza *negativa*; e questa è la prova della quarta parte.

SCOLIO.

L'Algoritmo *nuovo*, che finora si è veduto discordare dall' algoritmo *comune*, si accorda due volte con esso nel teorema presente, conforme apparisce confrontando la terza parte di questo teorema con la prima, e la quarta con la seconda.

COROLLARIO I.

IN ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*, una grandezza positiva $+T$ può avere una radice di qualsivoglia grado *impari*, che sarà *positiva*;

E una grandezza negativa $-T$ può avere una radice di qualsivoglia grado *impari*, che sarà *negativa*;

Imperciocchè può sempre immaginarsi una grandezza prima in istato positivo, e poi in istato negativo, che moltiplicata in ciascuno de' due stati per se medesima tante volte *meno una*, quante unità contiene il numero, che indica il grado *impari* della radice, darà, essendo presa positivamente un prodotto positivo, ed essendo presa negativamente un prodotto negativo, e ciò accaderà pel teorema presente tanto nell' algoritmo *comune*, quanto nell' algoritmo *nuovo*.

Ora nel primo caso il prodotto positivo può sempre immaginarsi eguale a $+T$, e nel secondo caso il prodotto negativo può sempre supporsi eguale a $-T$; e perciò in virtù della definizione XLIX., la grandezza immaginata prima in istato positivo, e poi in istato negativo sarà la radice di qualsivoglia grado *impari* di $+T$, e respettivamente di $-T$; adunque, ec.

COROLLARIO II.

IN ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo* ogni dignità di gra-

grado *impari* d' una grandezza positiva è *positiva*;

E ogni dignità di grado *impari* d' una grandezza negativa è *negativa*.

TEOREMA CLI.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*,

Due grandezze negative tra loro eguali moltiplicate respettivamente per due grandezze eguali tra loro (positive, ovvero negative) danno due prodotti eguali;

E due grandezze positive tra loro eguali moltiplicate respettivamente per due grandezze eguali tra loro (positive, ovvero negative) danno due prodotti eguali.

Dimostrazione della prima parte.

SIeno $-A$, e $-a$ le due grandezze negative eguali moltiplicande, e sieno $\pm F$, e $\pm f$ respettivamente le due grandezze eguali moltiplicanti positive, ovvero negative;

Nell' algoritmo *comune* per la definizione XLV., e pe' teoremi CXLIII., e CXLIV. si avranno queste due proporzionalità trascendenti:

$+Z.-A::\pm F.\mp(AF)$,

$+Z.-a::\pm f.\mp(af)$,

ma i tre primi termini d' ambedue queste proporzionalità trascendenti sono tra loro eguali (presi col medesimo ordine); adunque pel teorema CXLII. anche i quarti termini di esse sono eguali tra loro, cioè $\mp(AF)=\mp(af)$.

Similmente nell' algoritmo *nuovo* si avranno per la definizione XLVI., e pe' teoremi CXLIII., e CXLIV. queste due proporzionalità trascendenti:

$-Z.-A::\pm F.\pm(AF)$,

$-Z.-a::\pm f.\pm(af)$,

ma i tre primi termini di queste due proporzionalità trascendenti sono tra loro eguali (presi col medesimo ordine); adunque pel teorema CXLII., anche i quarti termini di esse sono eguali tra loro, cioè $\pm(AF)=\pm(af)$; e questa è la prova della prima parte.

Di-

Dimostrazione della seconda parte.

SIeno $+A$, e $+a$ le due grandezze positive moltiplicande, e sieno $\pm F$, $\pm f$ le due respettive grandezze eguali moltiplicanti positive, o negative;

Si avranno nell' algoritmo *comune* per le definizioni XXXVI., e XLV., e pel teorema CXLIII. le due infrascritte proporzionalità, che nel caso del segno superiore sono pure, e nel caso del segno inferiore sono trascendenti;

$+Z.+A::\pm F.\pm(AF)$,
$+Z.+a::\pm f.\pm(af)$,

e si proverà, come nella prima parte, che $\pm(AF)=\pm(af)$, al qual effetto dovrà citarsi non solo il teorema CXLIII., ma anche il teorema I.

Similmente nell' algoritmo *nuovo* si avranno per la definizione XLVI., e pe' teoremi CXLIII., e CXLIV. le due infrascritte proporzionalità trascendenti:

$-Z.+A::\pm F.\mp(AF)$,
$-Z.+a::\pm f.\mp(af)$,

e si proverà come nella prima parte, che $\mp(AF)=\mp(af)$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA CLII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, due grandezze negative, tra loro eguali, divise respettivamente per due grandezze eguali tra loro (positive, ovvero negative) danno due quozienti eguali;

E due grandezze positive tra loro eguali, divise respettivamente per due grandezze eguali tra loro (positive, ovvero negative) danno due quozienti eguali.

Dimostrazione della prima parte.

SIeno $-A$, $-a$ le due grandezze eguali negative dividende, e $\pm F$, e $\pm f$ sieno le respettive due grandezze eguali dividenti, positive, ovvero negative;

Nell' algoritmo *comune*, si anno per la definizione XLVII., e pe' e pe' teoremi CXLVIII., e CXLIX. queſte due proporzionalità traſcendenti:

$(1)\ \pm F . - A :: + Z . \mp (A : F)$

$(2)\ \pm f . - a :: + z . \mp (a : f)$,

e nell' algoritmo *nuovo* ſi anno per la definizione XLVIII., e pe' teoremi CXLIII., e CXLIV. queſte due proporzionalità traſcendenti:

$(3)\ \pm F . - A :: - Z . \pm (A : F)$

$(4)\ \pm f . - a :: - z . \pm (a : f)$,

col mezzo del teorema CXLII. ſi proverà l' eguaglianza dei quarti termini delle proporzionalità traſcendenti (1), e (2), cioè $\mp (A : F) = \mp (a : f)$, ed anche l' eguaglianza dei quarti termini delle proporzionalità traſcendenti (3), e (4), cioè $\pm (A : F) = \pm (a : f)$; e reſterà dimoſtrata la prima parte del teorema in ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*.

Dimoſtrazione della ſeconda parte.

Sieno $+A$, e $+a$ le due grandezze eguali poſitive dividende, e ſieno $\pm F$, e $\pm f$ le due reſpettive grandezze eguali dividenti poſitive, ovvero negative;

Nell' algoritmo *comune* le definizioni XXXIX, e XLVII., e i teoremi CXLVIII., e CXLIX. ſomminiſtrano le due infraſcritte proporzionalità, che ſono pure nel caſo del ſegno ſuperiore, e traſcendenti nel caſo ſegno inferiore:

$(5)\ \pm F . + A :: + Z . \pm (A : F)$

$(6)\ \pm f . + a :: + Z . \pm (a : f)$,

e nell' algoritmo *nuovo* la definizione XLVIII., e i teoremi CXLVIII., e CXLIX. danno le due proporzionalità traſcendenti, che ſeguono:

$(7)\ \pm F . + A :: - Z . \mp (A : F)$

$(8)\ \pm f . + a :: - Z . \mp (a : f)$;

e quindi mediante il teorema I., e mediante il teorema CXLII. ſi moſtrerà, che ſono eguali tra loro i quarti termini delle due proporzionalità pure, o traſcendenti (5), e (6), cioè che $\pm (A : F) = \pm (a : f)$.

Similmente col mezzo del teorema CXLII. ſi proverà, che

ſono

ſono eguali i quarti termini delle due proporzionalità traſcendenti (7), e (8);

E rimane provata la ſeconda parte del teorema nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*.

SCOLIO.

POngo i due ſeguenti teoremi CLIII., e CLIV., perchè debbono ſervire alla pruova dei due primi corollarj del teorema CLXIV., e dei due corollarj del teorema CLXV., come pure de' teoremi CLXXX., e CLXXXI., ec.

Il teorema CLIII. corriſponde agli articoli IX., e X. dello ſcolio anneſſo alla definizione XXXVI., e il teorema CLIV. è correlativo all' articolo V. della definizione XXXIX.

TEOREMA CLIII.

NEll' algoritmo *nuovo* poſto che $-Z$ eſprima l' unità negativa, e C qualſivoglia grandezza;

Io dico, che il prodotto $\pm CZ$ è uguale a $\pm C$;

E che il prodotto $\pm ZC$ è uguale a $\pm C$.

DIMOSTRAZIONE.

IMperciocchè per la definizione XLVI. ſuſſiſtono queſte due proporzionalità traſcendenti:

(1) $-Z . \pm C :: -Z . \pm CZ$,

(2) $-Z . -Z :: \pm C . \pm ZC$;

e pe' teoremi CXXXII., e CXXXVII. ſuſſiſtono queſte altre due:

(3) $-Z . \pm C :: -Z . \pm C$,

(4) $-Z . -Z :: \pm C . \pm C$;

adunque in virtù del teorema CXLII., paragonando le due proporzionalità traſcendenti (1), e (3), ſi à $\pm CZ$ eguale a $\pm C$, e paragonando le due proporzionalità traſcendenti (2), e (4), ſi à $\pm ZC$ eguale a $\pm C$.

SCOLIO.

NEl prodotto CZ, e nelle proporzionalità traſcendenti (1), e (3) la Z deve eſſere omogenea alla C;

Ma

Ma nel prodotto ZC, e nelle proporzionalità trascendenti (2), e (4) non è necessario, che la Z sia omogenea alla C.

TEOREMA CLIV.

NEll' algoritmo *nuovo* posto che Z significhi l' unità negativa, e C qualunque grandezza; io dico, che il quoziente $\pm(C:Z)$ è uguale a $\pm C$.

DIMOSTRAZIONE.

IMperciocchè per la definizione XLVIII. sussiste questa proporzionalità trascendente:

$(1) -Z . \pm C :: -Z . \pm(C:Z)$,

e pel teorema CXXXII. sussiste quest' altra:

$(2) -Z . \pm C :: -Z . \pm C$;

adunque pel teorema CXLII. $\pm(C:Z)$ è uguale a $\pm C$.

SCOLIO.

NEl quoziente $(C:Z)$, e nelle proporzionalità trascendenti (1), e (2) la Z deve essere omogenea alla C.

TEOREMA CLV.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, se due grandezze positive, o negative sono moltiplicate per due grandezze tra loro eguali positive, ovvero negative (che possono essere di specie diversa dalle moltiplicate); io dico, che i due prodotti, che ne risultano, sono tra loro puramente, o trascendentemente, come le grandezze moltiplicate.

$\pm A$, e $\pm C$ sieno moltiplicate per due grandezze eguali $\backsim B$, e $\backsim b$ (il segno $\backsim$ si assume da me per significare la libertà di prendere B, e b ambedue positivamente, o negativamente):

Dee provarsi, che $(\pm A \times \backsim B)$ sta puramente, o trascendentemente a $(\pm C \times \backsim b)$, come $\pm A$ sta a $\pm C$.

La dimostrazione di questo teorema è similissima alla dimostrazione del teorema LXXII., con questo, che in vece di scrivere, come ivi, A, C, B, b, AB, *e* Cb dovrà ora scriversi respettivamente:

$\pm A$, $\pm \backsim B$, $\backsim b$, $(\pm A \times \backsim B)$, e $(\pm C \times \backsim b)$; e di più in ordine all' algoritmo *nuovo* in vece di scriversi $+Z$, dovrà scriversi $-Z$; in vece poi di citare, come ivi si fa, la definizione XXXVI., dovrà citarsi la *definizione XXXVI.*, *ovvero la definizione XLV.*, *oppure la definizione XLVI.*, cioè tutte tre queste definizioni insieme.

COROLLARIO.

IN ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*, se $\pm A$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore di $\pm C$, anche il prodotto $(\pm A \times \backsim B)$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del prodotto $(\pm C \times \backsim b)$:

E versa-vice, se $(\pm A \times \backsim B)$ sarà eguale, ovvero maggiore, o minore di $(\pm C \times \backsim b)$ anche $\pm A$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di $\pm C$:

Tutto ciò in virtù del corollario X. de' principj, e del teorema CXLI.

Questo corollario comprende nella sua universalità il teorema CLI.

TEOREMA CLVI.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, se due grandezze eguali positive, o negative sono moltiplicate per due grandezze tra loro omogenee, positive, o negative, cioè una delle eguali per una delle omogenee, e l' altra delle eguali per l' altra delle omogenee; io dico, che i due prodotti, che ne risultano, sono tra loro puramente, o trascendentemente come le grandezze moltiplicanti, che possono essere di specie diversa dalle moltiplicate.

Le due grandezze eguali $\backsim B$, e $\backsim b$ sieno moltiplicate per $\pm A$, e $\pm C$ tra loro omogenee, cioè $\backsim B$ per $\pm A$, $\backsim b$ per $\pm C$, dee provarsi, che $(\backsim B \times \pm A)$ sta puramente, o trascendentemente a $(\backsim b \times \pm C)$, come $\pm A$ a $\pm C$.

La dimostrazione di questo teorema è affatto simile alla di-

mo-

moſtrazione del teorema LXXIII., con queſto che in vece di ſcrivere, come ivi, A, C, B, b, BA, e bc, dovrà ſcriverſi reſpettivamente $\pm A$, $\pm C$, $\backsim B$, $\backsim b$, $(\backsim B \times \pm A$, e $(\backsim b \times \pm C)$;

E di più in ordine all' algoritmo *nuovo* in cambio di ſcrivere $+Z$ dovrà ſcriverſi $-Z$.

In luogo poi di citare, come ivi ſi fa, la definizione XXXVI., dovrà citarſi o la *definizione XXXVI., o la definizione XLV., o la definizione XLVI.*, cioè tutte tre queſte definizioni unitamente.

E in fine in vece di citare il corollario VIII. de' principj, ſi citerà il *corollario VIII. de' principj, ovvero il teorema XLI.*, cioè tutte queſte propoſizioni inſieme.

Corollario.

In ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*, ſe $\pm A$ ſarà eguale, ovvero maggiore, o minore di $\pm C$, anche il prodotto $(\backsim B \times \pm A)$ ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore del prodotto $(\backsim b \times \pm C)$.

E verſa-vice, ſe $(\backsim B \times \pm A)$ ſarà eguale, ovvero maggiore, o minore di $(\backsim b \times \pm C)$, anche $\pm A$ ſarà eguale, ovvero reſpettivamente maggiore, o minore di $\pm C$: tutto queſto in virtù del corollario X. de' principj, ovvero del teorema CXLI.

Anche queſto corollario comprende nella ſua univerſalità il teorema CLI.

Teorema CLVII.

Salve le ſignificazioni eſpoſte nei due precedenti teoremi CLV., e CLVI., io dico, che nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* ſuſſiſtono le due infraſcritte proporzionalità:

(1) $(\pm A \times \backsim B)$ ſta traſcendentemente a $(\mp C \times \backsim B)$, come $\pm A$ ſta a $\mp C$;

(2) $(\backsim B \times \pm A)$ ſta traſcendentemente a $(\backsim B \times \mp C)$, come $\pm A$ ſta a $\mp C$.

 Di-

DIMOSTRAZIONE.

PEr provare la ſuſſiſtenza delle proporzionalità traſcendenti (1), e (2), ſi rifletta, che i due primi termini di ciaſcuna è in iſtato analogo riſpetto ai due ultimi in virtù de' teoremi CXLIII, e CXLIV.;

E che conſiderando, come *poſitivi* tutti i termini delle proporzionalità traſcendenti (1), e (2) ſi anno reſpettivamente queſte due proporzionalità pure tanto nell' algoritmo *comune* quanto nell' algoritmo *nuovo*:

$AB.CB::A.C,$

$BA.CB::A.C,$

e ciò pe' teoremi CLV., e CLVI.; adunque pel corollario IV. della definizione XLIV. ſuſſiſtono le proporzionalità traſcendenti (1), e (2). Il che dovea dimoſtrarſi.

TEOREMA CLVIII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, ſieno $\pm F$, e $\pm G$ due grandezze omogenee tra loro, ambedue inſieme poſitive, o ambedue inſieme negative, e ſieno $\pm f$, e $\pm g$ due altre grandezze omogenee tra loro, ambedue reſpettivamente poſitive, o ambedue reſpettivamente negative (potendo però eſſere di ſpecie diverſa le due ſeconde dalle due prime);

Sia in oltre $\pm F$ maggiore, ovvero minore di $\pm G$, e ſia $\pm f$ maggiore, ovvero reſpettivamente minore di $\pm g$;

Io dico primieramente, che il prodotto $(\pm F \times \pm f)$ è maggiore, ovvero reſpettivamente minore del prodotto $(\pm G \times \pm g)$;

Io dico ſecondariamente, che il prodotto $(\pm f \times \pm F)$ è maggiore, ovvero reſpettivamente minore del prodotto $(\pm g \times \pm G)$.

La dimoſtrazione di ambedue le parti di queſto teorema è intieramente ſimile alla dimoſtrazione delle due parti del teorema LXXIV.; ma in vece di citare il corollario del teorema LXXII., dee citarſi il corollario del teorema CLV., come pure in luogo di ſcrivere F, G, f, g, dovrà ſcriverſi reſpettivamente $\pm F$, $\pm G$, $\pm f$, $\pm g$, anche ne' prodotti.

Teorema CLIX.

Nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, sieno due prodotti, v. g. ($\pm E \times \pm F \times \pm G$, ec.), e ($\pm e \times \pm f \times \pm g$, ec.) formati di qualsivoglia numero di grandezze tutte positive, o tutte negative (purchè tante sieno le grandezze, che formano il primo prodotto, quante sono quelle, che formano il secondo);

E le grandezze $\pm E \pm F \pm G$, ec., delle quali è formato il primo prodotto, sieno eguali, ovvero maggiori, o minori delle corrispondenti grandezze, delle quali è formato il secondo, cioè della $\pm e \pm f \pm g$, ec. ordinatamente prese;

Io dico, che il primo de' suddetti prodotti è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore del secondo.

La dimostrazione di questo teorema è simile affatto alla dimostrazione del teorema LXXVI., purchè in essa, e nello scolio, che la precede, in vece di E, F, G, e, f, g, scrivasi respettivamente $\pm E$, $\pm F$, $\pm G$, $\pm e$, $\pm f$, $\pm g$, anche ne' prodotti.

E purchè nella medesima dimostrazione in vece di citare la definizione XXXVI., e l' articolo sesto dello scolio, che gli è annesso, si citino unitamente la definizione XXXVI., l' articolo VII. dello scolio, che gli è annesso, e le definizioni XLV., e XLVI.;

E finalmente purchè in vece di citare il corollario del teorema LXXII., il corollario del teorema LXXIII., e il teorema LXXIV., si citino respettivamente il corollario del teorema CLV., il coroll. del teorema CLVI., e il teorema CLVIII.

Corollario I.

Nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, se qualsivoglia grandezza $\pm E$ è uguale, ovvero maggiore, o minore di qualsivoglia grandezza $\pm e$, anche qualsisia dignità di $\pm E$ sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di una dignità simile di $\pm e$.

Corol-

COROLLARIO II.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, se una grandezza positiva, o negativa sarà eguale, ovvero maggiore, o minore d' un' altra grandezza positiva, o respettivamente negativa, la radice di qualunque grandezza della prima sarà eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della radice simile della seconda.

La dimostrazione di questo corollario è simile intieramente alla dimostrazione del corollario II. del teorema LXXVI., purchè in cambio di E, e di (e) scrivasi respettivamente $\pm E$, e $\pm e$, anche ne' prodotti.

TEOREMA CLX.

NEll' algoritmo *nuovo*, se due grandezze sono omogenee, e l' unità *negativa assunta* è la medesima;

Io dico, che il prodotto della prima grandezza moltiplicata per la seconda, è uguale al prodotto della seconda grandezza moltiplicata per la prima.

La dimostrazione di questo teorema è simìlissima alla dimostrazione del teorema LXXIX., purchè in vece di citare la definizione XXXVI., e il teorema I., si citino respettivamente la definizione XLVI., e il teorema CXLII.;

E in vece di scrivere $+Z$, $+MN$, $+NM$ scrivasi respettivamente $-Z$, $-MN$, $-NM$.

TEOREMA CLXI.

NEll' algoritmo *nuovo* A è uguale al quoziente $+(AB):B$, e al quoziente $+(BA):B$.

Questo teorema à relazione al teorema CI.

Dimostrazione della prima parte.

PEr la definizione XLVI., e pel teorema CXLIV. si à questa proporzionalità trascendente:

$-Z.+A::\pm B.\mp AB;$

ma per la definizione XLVIII., e pel teorema CXLVIII. si à quest' altra proporzionalità trascendente:

$\pm B$

$\pm B . \mp AB :: - Z . + (AB) : B$;

adunque per la terza parte del teorema CXXXV.

$- Z . + A :: - Z . + (AB) : B$;

e quindi pel teorema CXLI. $A = (AB) : B$.

E questa è la prova della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

PEr la definizione XLVI., e pel teorema CXLIV. sussiste questa proporzionalità trascendente:

$- Z . \pm B :: + A . \mp BA$,

cioè *permutando*

$- Z . + A :: \pm B . \mp BA$.

Per la definizione XLVIII., e pel teorema CXLVIII. si à quest' altra proporzionalità trascendente:

$\pm B . \mp BA :: - Z . + (BA) : B$;

laonde per la terza parte del teorema CXXXV.

$- Z . + A :: - Z . + (BA) : B$,

e conseguentemente pel teorema CXLI.

$A = (BA) : B$.

E questa è la prova della seconda parte.

SCOLIO.

QUi anno luogo riflessioni simili a quelle, che si contengono nello scolio annesso al teorema CI.

COROLLARIO.

ESsendosi dimostrato, che nell' algoritmo *nuovo* $+ (AB) : B = A$, e $+ (BA) : B = A$, ne segue evidentemente, che nell' algoritmo *nuovo* $-(AB) : B = - A$, e $-(BA) : B = - A$.

SCOLIO.

SImilmente essendosi dimostrato nel teorema CI., che nell' algoritmo *comune* $+ (AB) . B = A$, e $+ (BA) : B = A$, ne segue, che nell' algoritmo *comune* $- (AB) : B = - A$, e $- (BA) : B = - A$.

TEO-

TEOREMA CLXII.

NEll' algoritmo *nuovo* i due quozienti $-(AC):(BC)$, e $-(A:B)$ ſono eguali.

Queſto teorema à relazione al teorema CXII.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema CLV. ſi à queſta proporzionalità:

$BC.AC::B.A;$

ma per la definizione XLVIII., e pel teorema CXLIX. abbiamo queſte due proporzionalità traſcendenti:

$+BC.+AC::-Z.-(AC):(BC),$

$+B.+A::-Z.-(A:B),$

le quali traſpoſte danno reſpettivamente

$-Z.-(AC):(BC)::+BC.+AC,$

$-Z.-(A:B)::+B.+A;$

Adunque conſiderando le grandezze $+BC$, $+AC$, $+B$, $+A$, $-Z$, $-(AC):(BC)$, $-Z$, $-(A:B)$ reſpettivamente come prima, ſeconda, terza, quarta, quinta, ſeſta, ſettima, e ottava grandezza, avremo pel teorema CXXXIV. l' infraſcritta proporzionalità traſcendente:

$-Z.-(AC):(BC)::-Z.-(A:B),$

e quindi pel teorema CXLI. $-(AC):(BC)$ è uguale a $-(A:B)$. Il che dovea dimoſtrarſi.

SCOLIO.

DEbbono qui farſi rifleſſioni ſimiglianti a quelle dello ſcolio anneſſo alla prima dimoſtrazione del teorema CXII.

COROLLARIO.

POichè ſi è dimoſtrato, che nell' algoritmo *nuovo* è $-(AC):(BC)$ eguale a $-(A:B)$: egli è viſibile, che nell' algoritmo *nuovo* $+(AC):(BC)$ è uguale a $+(A:B)$.

SCOLIO.

PArimente eſſendoſi dimoſtrato nel teorema CXII., che nell'

algo-

algoritmo *comune* $-(AC):(BC)$ è uguale a $+(A:B)$, è chiaro, che nell' algoritmo *comune* $-(AC):(BC)$ è uguale a $-(A:B)$.

TEOREMA CLXIII.

NEll' algoritmo *nuovo* i due quozienti $-(CA):(CB)$, e $-(A:B)$ sono eguali.

Questo teorema, che à relazione al teorema CXIII., si prova con una dimostrazione similissima a quella del teorema antecedente, purchè in luogo del teorema CLV., ivi citato, si citi il teorema CLVI.

COROLLARIO.

NEll' algoritmo *nuovo* essendo $-(CA):(CB)$ eguale a $-(A:B)$, sarà ancora $+(CA):(CB)$ eguale a $+(A:B)$.

SCOLIO.

NEll' algoritmo *comune* avendosi pel teorema CXIII. $+(CA):(CB)$ eguale a $+(A:B)$, si avrà eziandio $-(CA):(CB)$ eguale a $-(A:B)$.

TEOREMA CLXIV.

I. NEll' algoritmo *comune* il quoziente $+A:B$ moltiplicato pel quoziente $+F:G$ è uguale a $+(AF):(BG)$.

II. Nell' algoritmo *nuovo* il quoziente $\pm(A:B)$ moltiplicato pel quoziente $\mp(F:G)$ è uguale a $+(AF):(BG)$.

III. E il quoziente $\pm(A:B)$ moltiplicato pel quoziente $\pm(F:G)$ è uguale $-(AF):(BG)$.

Dimostrazione della prima parte.

PEr la definizione XXXIX. si anno queste due proporzionalità pure:

$+B.+A::+Z.+(A:B)$,

$+G.+F::+Z.+(F:G)$;

e pel corollario VIII. del teorema LXXXIII. si ottiene

$+BG.+AF::ZZ.+(A:B)(F:G)$;

ma per la definizione XXXIX. sussiste questa proporzionalità pura:

$$+BG . + AF :: + Z . + (AF):(BG),$$

e per l'articolo XI. dello scolio annesso alla definizione XXXVI. ZZ è uguale a Z; adunque i tre primi termini delle due ultime proporzionalità sono eguali tra loro ordinatamente presi, e conseguentemente pel teorema XLII. anche gli ultimi termini, cioè $+(A:B)(F:G)$, e $+(AF):(BG)$ sono tra loro eguali. E questa è la prova della prima parte.

SCOLIO.

Il quoziente $F:G$ potrebbe prendersi con un' altra unità diversa dalla Z, colla quale si è preso in questa dimostrazione l' altro quoziente $A:B$; anzi l'altra unità potrebbe non essere omogenea alla Z, senza pregiudicare alla prova della prima parte di questo teorema, purchè si facesse uso di un metodo non differente da quello, con cui dimostrerò il teorema inserto nello scolio annesso al corollario del teorema CLXXXI., al quale rimetto il perito lettore.

Una somigliante osservazione valer dovrebbe, quando avesse a dimostrarsi coi soli principj dell' algoritmo *nuovo* una proposizione consimile alla prima parte del teorema presente.

Dimostrazione della seconda, e terza parte.

Per la definizione XLVI. dee provarsi la sussistenza di queste due proporzionalità trascendenti:

$$(1)\quad -Z . \pm(A:B) :: \mp(F:G) . + (AF):(BG);$$
$$(2)\quad -Z . \pm(A:B) :: \pm(F:G) . - (AF):(BG);$$

i primi due termini di ambedue queste proporzionalità sono in *istato analogo* rispetto ai due ultimi; e i quattro termini di ciascuna di esse, considerati tutti come *positivi*, fanno una proporzionalità pura per la definizione XXXVI., e per la prima parte di questo teorema; adunque pel corollario IV. della definizione XLIV. sussistono le proporzionalità trascendenti (1), e (2); e questa è la prova della seconda, e della terza parte. Il che dovea dimostrarsi.

Sco-

SCOLIO.

I. LA prima parte di questo teorema non differisce dal teorema CXV.

II. Con maniera simile a quella, che si è tenuta per dimostrare la seconda, e la terza parte di questo teorema, si dimostrerà per l' algoritmo *comune* la sussistenza di queste due proporzionalità trascendenti:

$+Z.\pm(A:B)::\mp(F:G).-(AF):(BG)$,

$+Z.-(A:B)::-(F:G).+(AF):(BG)$.

III. E se ne deduranno pel medesimo algoritmo *comune* cinque corollarj simili ai cinque corollarj seguenti.

IV. Al corollario poi, che corrisponderà all' infrascritto corollario I., si unirà uno scolio simigliante a quello, che sta annesso al medesimo infrascritto corollario I.. Basterà agl' intendenti, che io abbia accennato tutto questo, senza che io mi diffonda ad esporlo più distintamente.

COROLLARIO I.

POichè nell' algoritmo *nuovo* si anno queste equazioni:

(1) $\pm(A:B)\times\mp(F:G)=+(AF):(BG)$,

(2) $\pm(A:B)\times\pm(F:G)=-(AF):(BG)$;

se $-G$ è uguale all' unità negativa $-Z$, cioè se $+G$ è uguale a $+Z$, l' equazione (1), e (2) somministreranno respettivamente queste altre:

(3) $\pm(A:B)\times\mp(F:Z)=+(AF):(BZ)$,

(4) $\pm(A:B)\times\pm(F:Z)=-(AF):(BZ)$,

mentre in virtù dei teoremi CXLVIII., e CXLIII. siccome F divisa per $-G$ dà il quoziente $+(F:G)$, così F divisa per $-Z$ dà il quoziente $+(F:Z)$; e siccome B moltiplicata per $-G$ dà il prodotto $+BG$, così B moltiplicata per $-Z$ dà il prodotto $+BZ$.

Ma essendo pe' teoremi CLIV., e CLIII $(F:Z)$ eguale ad F, e BZ eguale a B, egli è visibile, che l' equazioni (3), e (4) equivagliono respettivamente ai due seguenti:

$\pm(A:B)\times\mp F=+(AF):B$,

$\pm(A:B)\times\pm F=-(AF):B$.

Sco-

SCOLIO.

SE la F non foſſe omogenea alla B, allora ſi conſideri, che nell' algoritmo *nuovo* ſi anno ancora queſte due equazioni:

$$(5)\ \pm(A:B)\times\mp F = +(FA):B,$$
$$(6)\ \pm(A:B)\times\pm F = -(FA):B;$$

il che ſi prova così:

Le due infraſcritte proporzionalità traſcendenti ſuſsiſtono in vigore del corollario IV. della definizione XLIV.

$$-Z.\pm(A:B)::\mp F.+(FA):B,$$
$$-Z.\pm(A:B)::\pm F.-(FA):B,$$

perchè i due primi termini di ciaſcuna di eſse ſono in iſtato *analogo* riſpetto ai due ultimi, e conſiderando tutti i loro termini come *poſitivi*, ne riſulta queſta proporzionalità pura:

$$+Z.+(A:B)::+F.+(FA):B,$$

la quale è ſuſsiſtente in virtù della definizione XXXVI., e del teorema CVIII.;

Adunque per la definizione XLVI. ſuſsiſtono eziandio l' equazioni (5), e (6).

Queſto primo corollario corriſponde al teorema CVIII., e il ſecondo corollario ſeguente al teorema CIX.

COROLLARIO II.

SE poi $-B$ è uguale all' unità negativa $-Z$, cioè ſe $+B$ è uguale a $+Z$, l' equazioni (1), e (2), regiſtrate nel primo corollario, daranno reſpettivamente queſte altre:

$$(7)\ \pm(A:Z)\times\mp(F:G) = +(AF):(ZG),$$
$$(8)\ \pm(A:Z)\times\pm(F:G) = -(AF):(ZG),$$

perchè a tenore dei teoremi CXLVIII., e CXLIII., conforme A diviſa per $-B$ è $(+A:B)$, così A diviſa per $-Z$ è $(A:Z)$, e conforme $-B$ moltiplicato per G è $+BG$, così $-Z$ moltiplicato per G è $+ZG$.

Ma eſſendo pe' teoremi CLIV., e CLIII. $A:Z$ eguale ad A, e ZG eguale a G, è chiaro, che l' equazioni (7), e (8) ſomminiſtreranno reſpettivamente queſt' altre due nell' algoritmo *nuovo*:

$\pm$

$\pm A \times \mp (F:G) = + (AF):G$,
$\pm A \times \pm (F:G) = - (AF):G$.

Corollario III.

Nell' algoritmo *nuovo* il prodotto di molti quozienti $(A:B)$, $(F:G)$, $(H:I)$, ec., a' quali sia affisso *qualunque segno*, è uguale al prodotto di tutte le dividende AFH, ec. diviso pel prodotto di tutte le dividenti BGI, ec. con questo, che al nuovo quoziente $(AFH$, ec.$):(BGI$, ec.$)$ deve affiggersi il segno, che esiggono la seconda, e terza parte di questo teorema, v. g. il prodotto de' tre quozienti $(+A:B)$, $(-F:G)$, $(+H:I)$ è uguale a $-(AFH):(BGI)$;

Perchè per la seconda parte del presente teorema si à quest' equazione:

$(+A:B) \times (-F:G) = (+AF):(BG)$;

E pel teorema CLI., e per la terza parte del teorema presente moltiplicando l' uno, e l' altro membro dell' equazione suddetta per $+H:I$, si à quest' altra equazione:

$(+A:B)(-F:G)(H:I) = -(AFH):(BGI)$.

Quest' esempio è sufficiente a far comprendere la verità del presente corollario.

Corollario IV.

Nell' algoritmo *nuovo* si à questa equazione:

(1) $(\pm A:B)(\pm A:B) = (-AA):(BB)$;

e ciò per la terza parte di questo teorema.

Ciò posto moltiplicando l' equazione (1) per $(\pm A:B)$, si à pel teorema CLI., e per la seconda, e terza parte di questo teorema l' altra equazione, che segue:

(2) $(\pm A:B)(\pm A:B)(\pm A:B) = (\pm AAA):(BBB)$,

e di nuovo moltiplicando l' equazione (2) per $(\pm A:B)$, si à questa terza equazione $(\pm A:B)(\pm A:B)(\pm A:B)(\pm A:B) = -(AAAA):(BBBB)$; e ciò per la terza parte di questo teorema.

Questo basta a far conoscere:

Primo, che qualsivoglia quoziente $\pm A:B$ *positivo*, o *negativo*,

tivo, alzato a qualunque dignità di grado *pari*, è uguale al quoziente, che à per dividenda la dignità *ſimile* di A preſa *poſitivamente*, e per dividente la dignità *ſimile* di B preſa *poſitivamente*, ma queſto ſecondo quoziente dee ſempre aver affiſſo il ſegno $-$.

Secondo, che qualunque quoziente $\pm A:B$ *poſitivo*, ovvero *negativo*, alzato a qualſivoglia dignità di grado *impari*, è uguale ad un altro quoziente *poſitivo*, ovvero reſpettivamente *negativo*, che à per dividenda la dignità *ſimile* di A preſa *poſitivamente*, e per dividente la dignità *ſimile* di B preſa *poſitivamente*.

COROLLARIO V.

NEll' algoritmo *nuovo* per eſtrarre da qualſivoglia quoziente *negativo*, v. g. da $-(A:B)$ qualunque radice d' un grado *pari*, ſi prendano *poſitivamente* la radice ſimile e della dividenda A, e la radice ſimile della dividente B, e il quoziente $\pm(a:b)$ ſarà la radice richieſta di grado *pari* del quoziente $-(A:B)$.

Per eſtrarre dal quoziente $\pm(A:B)$ la radice di qualunque grado *impari*, ſi prendano *poſitivamente* la radice *ſimile* e della dividenda A, e la radice *ſimile d* della dividente B, e il quoziente $+(c:d)$ ſarà la radice richieſta di grado *impari* di $+(A:B)$, come pure il quoziente $-(c:d)$ ſarà la radice richieſta di *grado impari* di $-(A:B)$.

V. g. per eſtrarre la radice quarta da $-(A:B)$ è chiaro pel corollario IV., che il quoziente $\pm(a:b)$ moltiplicato tre volte per ſe ſteſso produrrà $(aaaa):(bbbb)$, ma per la definizione XLIX. $-aaaa$ è lo ſteſso, che $-A$, cioè $aaaa$ è lo ſteſſo, che A, come pure $-bbbb$ è lo ſteſso, che $-B$, cioè $bbbb$ è lo ſteſso, che B; adunque per l' allegata definizione $\pm(a:b)$ è la radice quarta di $-(aaaa):(bbbb)$, vale a dire di $-(A:B)$.

Similmente per eſtrarre la radice terza da $\pm(A:B)$ è manifeſto pel corollario IV., che il quoziente $\pm(c:d)$ moltiplicato due volte per ſe ſteſso produrrà $\pm(ccc):(ddd)$; ed eſsendo per la definizione XLIX $\pm(ccc)$ lo ſteſso che $\pm A$, cioè ccc lo ſteſso, che A, come pure $\pm ddd$ lo ſteſso, che $\pm B$, cioè

cioè ddd lo stesso, che B, ne segue per la medesima definizione, che $\pm(c:d)$ è la radice terza di $\pm(ccc):(ddd)$, vale a dire di $\pm(A:B)$.

Bastano questi due esempj per la piena intelligenza del corollario presente.

TEOREMA CLXV.

I. Nell' algoritmo *comune* il quoziente $A:B$ diviso pel quoziente $F:G$ è uguale ad $(AG):(BF)$.

II. Nell' algoritmo *nuovo* il quoziente $\pm(A:B)$ diviso pel quoziente $\mp(F:G)$ è uguale ad $+(AG):(BF)$.

III. E il quoziente $\pm(A:B)$ diviso pel quoziente $\pm(F:G)$ è uguale a $-(AG):(BF)$.

Dimostrazione della prima parte.

Per la definizione XXXIX. si anno queste due proporzionalità pure:

(1) $B.A::Z.(A:B)$,

$G.F::Z.(F:G)$,

e convertendo

(2) $F.G::(F:G).Z$,

dai termini delle proporzionalità (1), e (2) moltiplicate per ordine tra loro nasce quest' altra pel corollario VIII. del teorema LXXXIII.

$BF.AG::Z(F:G).(A:B)Z$,

cioè in vigore degli articoli IX., e X. dello scolio annesso alla definizione XXXVI.

$BF.AG::(F:G).(A:B)$;

ma per la definizione XXXIX., e *trasponendo*

$Z.(AG):(BF)::BF.AG$, e

$Z.(A:B):(F:G)::(F:G).(A:B)$;

adunque pel corollario XII. de' principj

$Z.(AG):(BF)::Z.(A:B):(F:G)$;

e quindi pel corollario XXI. de' principj $(A:B):(F:G)$ è uguale ad $(AG):(BF)$: e questa è la prova della prima parte.

Di-

Dimostrazione della seconda, e terza parte.

DEe provarsi la sussistenza di queste due proporzionalità trascendenti:

(1) $\pm(F:G).\mp(A:B)::-Z.+(AG):(BF)$,

(2) $\pm(F:G).\pm(A:B)::-Z.-(AG):(BF)$,

i due primi termini d' ambedue queste proporzionalità, sono in *istato analogo* rispetto ai due ultimi, e i quattro termini di ciascuna di esse proporzionalità considerati, come *positivi* costituiscono una proporzionalità pura per la definizione XXXIX., e per la prima parte di questo teorema; adunque pel corollario IV. della definizione XLIV. sussistono le proporzionalità trascendenti (1), e (2). E questa è la prova della seconda, e terza parte.

SCOLIO.

I. LA prima parte di questo teorema non differisce dal teorema CXVI.

II. Tenendo una maniera simile a quella, con cui si è dimostrata la seconda, e terza parte di questo teorema, si dimostrerà per l' algoritmo *comune* la sussistenza di queste due proporzionalità trascendenti:

$\mp(F:G).\pm(A:B)::+Z.-(AG):(BF)$,

$-(F:G).-(A:B)::+Z.+(AG):(BF)$.

COROLLARIO I.

GIacchè nell' algoritmo *nuovo* si anno queste equazioni:

(1) $\pm(A:B):\mp(F:G)=+(AG):(BF)$,

(2) $\pm(A:B):\pm(FG)=-(A:G):(BF)$,

se $-G$ è uguale all' unità negativa $-Z$ vale a dire se G è uguale a Z, sarà $(F:G)=(F:Z)$, e pel teorema CLIV., sarà $F:Z$ eguale ad F; sarà in oltre $AG=AZ$, e pel teorema CLIII. sarà AZ eguale ad A; laonde l' equazioni (1), e (2) daranno respettivamente:

$\pm(A:B):(\mp F)=+A:(BF)$,

$\pm(A:B):(\pm F)=-A:(BF)$.

Sco-

SCOLIO.

QUando la A non è omogenea alla F, allora dee rifletterſi, che nell'algoritmo *nuovo* ſi anno ancora queſte due equazioni:

$(3)\ -\!+(A:B):(\pm F) = \pm A:(FB)$,

$(4)\ \pm(A:B):F = \pm A:(FB)$;

e ciò ſi prova nella ſeguente maniera:

Le infraſcritte due proporzionalità traſcendenti ſuſſiſtono pel corollario IV. della definizione XLIV.

$\pm F.-\!+(A:B)::-Z.\mp A:(FB)$,

$-\!+F:\pm(A:B)::-Z.\mp A:(FB)$;

atteſochè i due primi termini di ciaſcuna di eſſe ſono in iſtato *analogo* riſpetto ai due ultimi, e conſiderando tutti i loro termini come *poſitivi*, ne riſulta queſta proporzionalità pura:

$F.(A:B)::Z.A:(FB)$,

la quale è ſuſſiſtente in virtù della definizione XXXIX., e del teorema CX.;

Adunque per la definizione XLVIII. ſuſſiſtono parimente le equazioni (3), e (4).

Queſto corollario corriſponde al teorema CX., e il corollario ſeguente al teorema CXI.

COROLLARIO II.

SE poi $-B$ è uguale all' unità negativa $-Z$, cioè ſe B è uguale a Z, ſi avrà $A:B$ eguale ad $A:Z$, e pel teorema CLIV. ſarà $A:Z$ eguale ad A: ſarà in oltre BF eguale a ZF, e pel teorema CLIII. ſarà ZF eguale ad F, di maniera che l'equazioni (1), e (2) ſomminiſtreranno reſpettivamente

$\pm A:\mp(F:G) = -\!+(AG):F$,

$\pm A:\pm(F:G) = -(AG):F$.

SCOLIO.

I Teoremi CLXIV., e CLXV., e gli ſcolj anneſſi al primo corollario del teorema CLXIV., e al primo corollario del teorema CLXV. potrebbero dimoſtrarſi co' ſoli principj dell'algoritmo *nuovo*; io però ò qui voluto far uſo del corollario IV.

della definizione XLIV., e dedurli da esso. Veggasi lo scolio annesso al corollario del teorema CLXVII.

TEOREMA CLXVI.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $(A:B)\pm(E:B)$ è uguale a $(A\pm E):B$.

Dimostrazione della prima parte.

PEr la definizione XXXIX., e *trasponendo*, si anno queste due proporzionalità pure:

$Z.(A:B)::B.A$,
$Z.(E:B)::B.E$;

e *convertendo* si ottengono respettivamente queste altre:

$(A:B).Z::A.B$,
$(E:B).Z::E.B$;

adunque pel corollario XIII. del teorema II. si avrà

$(A:B)\pm(E:B).Z::(A\pm E).B$,

e *convertendo*, indi *trasponendo*:

(1) $B.(A\pm E)::Z.(A:B)\pm(E:B)$;

ma per la definizione XXXIX. si à

$B.(A\pm E)::Z.(A\pm E):B$;

adunque pel teorema (1), $(A:B)\pm(E:B)$, quarto termine della penultima proporzionalità, è uguale ad $(A\pm E):B$, quarto termine dell' ultima; e questa è la prova della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

PEl corollario IV. della definizione XLIV. sussiste questa proporzionalità trascendente:

$-B.(A\pm E)::-Z.(A:B)\pm(E:B)$,

mentre i due primi termini di essa sono in *istato analogo* rispetto ai due ultimi, e considerando tutti i suoi termini come *positivi*, ne proviene la proporzionalità pura (1), che nella dimostrazione della prima parte si è provata sussistente; ma per la definizione XLVIII. sussiste nell' algoritmo *nuovo* quest' altra proporzionalità trascendente:

$-B.(A\pm E)::-Z.(A\pm E):B$;

adun-

adunque pel teorema CXLII. l' ultimo termine $(A:B)\pm(E:B)$ della prima proporzionalità trascendente è uguale all' ultimo termine $(A\pm E):B$ della seconda. E questa è la prova della seconda parte.

Scolio.

La prima parte di questo teorema non differisce dal teorema CXIV.

Dalla seconda parte si dedurranno tre corollarj simili a quelli, che si sono dedotti dal suddetto teorema CXIV.

Se si volesse inferire la seconda parte di questo teorema dai soli principj dell' algoritmo *nuovo*, si dovrebbe raziocinare in questa guisa:

Per la definizione XLVIII., pel teorema CXLIX., e *trasponendo*, si anno queste due proporzionalità trascendenti:

$-Z.+(A:B)::+B.-A$,

$-Z.+(E:B)::+B.-E$,

e *convertendo* si ottengono respettivamente queste altre:

$+(A:B).-Z::-A.+B$,

$+(E:B).-Z::-E.+B$;

dalle quali in virtù del corollario III. della definizione XLIV. nascono respettivamente le due seguenti proporzionalità pure:

$(A:B).Z::A.B$,

$(E:B).Z::E.B$;

adunque pel corollario XIII. del teorema II. si avrà questa proporzionalità pura:

$(A:B)\pm(E:B).Z::(A\pm E).B$,

e *convertendo*, indi *trasponendo*:

$B.(A\pm E)::Z.(A:B)\pm(E:B)$;

laonde per la definizione XLIV. si avrà eziandio l' infrascritta proporzionalità trascendente:

$-B.[A\pm E]::-Z.[A:B]\pm[E:B]$;

ma per la definizione XLVIII. sussiste nell' algoritmo *nuovo* quest' altra proporzionalità trascendente:

$-B.[A\pm E]::-Z.[A\pm E]:B$;

adunque pel teorema CXLII. il quarto termine $[A:B]\pm[E:B]$

 della

della penultima proporzionalità trascendente è uguale al quarto termine $[A \pm E]:B$ dell' ultima. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA CLXVII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* i termini di due proporzionalità pure, o trascendenti moltiplicati per ordine tra loro costituiscono una nuova proporzionalità pura, o trascendente.

DIMOSTRAZIONE.

RAppresentino generalmente

$+A.+B::+C.+D,$

$+a.+b::+c.+d$

le due proporzionalità pure, o trascendenti, mentre i termini di esse portano affisso il segno $+$, il quale non muta lo stato di detti termini positivi, o negativi, che sieno per quello, che si è notato nell' articolo III. dello scolio annesso al corollario V. delle presupposizioni.

Debbono provarsi le due proporzionalità insrascritte pure, o trascendenti:

1] $+A \times +a.+B \times +b::+C \times +c.+D \times +d,$

2] $+a \times +A.+b \times +B::+c \times +C.+d \times +D.$

Prova della proporzionalità prima.

PRimieramente si à questa proporzionalità pura, o trascendente:

[3] $+A \times +a.+B \times +a::+C \times +c+D \times +c;$

imperciocchè per l' ipotesi

$+A.+B::+C.+D,$

e pel teorema CLV., ovvero pel teorema CLVII., e trasponendo

$+A \times +a.+B \times +a::+A.+B,$

$+C \times +c.+D \times +c::+C.+D;$

adunque pel teorema CXXXIV. sussiste la proporzionalità [3].

Secondariamente si proverà nella stessa maniera, mediante il teorema CLVI., che sussiste la proporzionalità pura, o trascendente, che segue: [4]

[4] $+B \times +a . +B \times +b :: +D \times +c . +D \times +d$;
adunque confrontando le due proporzionalità [3], e [4] si avrà per l'*egualità ordinata* la proporzionalità [1].

La prova della proporzionalità [2] si farà col medesimo raziocinio, e per conseguenza il teorema è provato interamente.

COROLLARIO.

IN vece della proporzionalità [3] si potrà dimostrare anche l'infrascritta:

$+a \times +A . +a \times +B :: +C \times +c . +D \times +c$,

e ciò si farà con un raziocinio simile a quello con cui si è provata la proporzionalità [3] suddetta, servendosi dei teoremi CLVI., CLV., e CLVII.

Parimente in vece della proporzionalità [4] si proverà con simigliante raziocinio quella, che segue:

$+a \times +B . +b \times +B :: +D \times +c . +D \times +d$, facendo uso dei teoremi CLV., CLVI., e CLVII.; adunque per l'*egualità ordinata* si avrà la seguente proporzionalità *pura*, o trascendente:

$+a \times +A . +b \times +B :: +C \times +c . +D \times +d$.

SCOLIO.

DI questo teorema, e del suo corollario potrà valersi chi vorrà dedurre dai soli principj dell'algoritmo *nuovo* i teoremi CLXIV., e CLXV., e gli scolj annessi al primo corollario del teorema CLXV.: le dimostrazioni procederanno con un tenore simile a quello delle dimostrazioni colle quali respettivamente si è provata la prima parte del teorema CLXIV., e la prima parte del teorema CLXV.

Ma a tale oggetto dovrà riflettersi, che nell'algoritmo *nuovo* l'unità negativa $-Z$, moltiplicata per se stessa, è uguale a se stessa, cioè $-Z \times -Z$ è uguale a $-Z$.

Imperciocchè per la definizione XLVI., e pel teorema CXLIV.

$-Z . -Z :: -Z . -ZZ$,

e pel corollario del teorema CXXXII.

$-Z . -Z :: -Z . -Z$;

adun-

adunque pel teorema CXLII. $-ZZ$ è uguale a $-Z$.

Potrà ancora servirsi del presente teorema, e del suo corollario chi vorrà provare diversamente nell' algoritmo *comune* le due proporzionalità trascendenti registrate nello scolio annesso alla dimostrazione del teorema CLXIV., e le altre due proporzionalità trascendenti registrate nello scolio annesso alla dimostrazione del teorema CLXV.

A me basta d' indicare i fonti di tutte le suddette prove, non volendo maggiormente allungarmi con esporle intere; ciò potrà non difficilmente eseguirsi dagl' intendenti.

TEOREMA CLXVIII.

NEll' algoritmo *nuovo* il prodotto dei termini medj d' una proporzionalità pura è uguale al prodotto degli estremi, sia la proporzionalità pura $A.B::C.D$, i due termini della quale non è necessario, che sieno omogenei ai due ultimi, dee provarsi, che $-BC = -AD$, e che $-CB = -DA$.

Dimostrazione della prima parte.

PEr la definizione XLVI., e pel teorema CXLIV. si anno queste due proporzionalità trascendenti:

[1] $-Z.+A::+D.-[AD]$,
$-Z.+B::+C.-[BC]$;

e *convertendo* la seconda di esse si à quest' altra:

[2] $+B-Z::-[BC].+C$;

si anno adunque due ordini di grandezze, cioè $-Z$, $+A$, $+B$, $-Z$ da una parte, e $-BC$, $+C$, $+D$, $-AD$ dall' altra, tali, che per la proporzionalità trascendente [1] $-Z$ prima del prim' ordine sta trascendentemente alla sua seconda $+A$, come $+D$ penultima del second' ordine sta alla sua ultima $-[AD]$, e per l' ipotesi $+A$ seconda del prim' ordine sta puramente alla sua terza $+B$, come $+C$ antepenultima del second' ordine sta alla sua penultima $+D$; adunque per l' *egualità perturbata*, cioè per la seconda parte del teorema CXL., $-Z$ prima del prim' ordine, sta trascendentemente alla sua terza $+B$, come $+C$ antepenultima del second' ordine sta alla sua ultima $-[AD]$.

Di

Di più per la proporzionalità [2], $+B$ terza del prim' ordine, sta trascendentemente alla sua ultima $-Z$, come $-[BC]$ che precede l' antepenultima del second' ordine, sta alla sua antepenultima C; adunque di nuovo per l' *egualità perturbata*, cioè per la terza parte del teorema CXL. $-Z$ prima del prim' ordine sta a $-Z$, ultima del prim' ordine, come $-[BC]$, prima del second' ordine, sta a $-[AD]$ ultima del second' ordine, ma $-Z$ è uguale a $-Z$; adunque pel teorema CXLI. $-BC$ è uguale a $-AD$. E questa è la prova della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

PEr dimostrare, che $-CB = -DA$, si consideri, che per la definizione XLVI., e pel teorema CXLIV. si ottengono le due infrascritte porporzionalità trascendenti:

[3] $-Z.+D::+A.-[DA]$
$-Z.+C::+B.-[CB]$,

e convertendo la seconda, si à quella, che segue:

[4] $+C.-Z::-[CB].+B$;

quindi risultano due ordini di grandezze, cioè $-Z$, $+D$, $+C$, $-Z$ da una parte, e $-[CB]$, $+B$, $+A$, $-[DA]$ dall' altra, tali, che $-Z$ sta trascendentemente a $+D$, come $+A$ a $-[DA]$, e $+D$ sta puramente a $+C$, come $+B$ a $+A$ [poichè avendosi per l' ipotesi $A.B::C.D$ si à *trasponendo*, indi *convertendo* $D.C::B.A$], e finalmente per la proporzionalità trascendente [4] $+C$ sta trascendentemente a $-Z$, come $-[CB]$ a $+B$; laonde procedendo con maniera simile a quella, che si è tenuta nella I. parte, si vedrà mediante l' *egualità perturbata* essere trascendentemente $-Z$ a $-Z$, come $-[CB]$ a $-[DA]$, e col mezzo del teorema CXLI. si proverà eziandio, che $-CB$ è uguale a $-DA$; e questa è la prova della seconda parte.

SCOLIO.

LA dimostrazione di questo teorema mutando ciò, che dee mutarsi, vale a dire, pigliando l' unità *positiva* Z in vece della la *negativa*, e prendendo respettivamente i prodotti positivi BC, AD, CB, DA in vece dei prodotti negativi $-BC$, $-AD$, $-CB$, $-DA$, la stessa dimostrazione, dico, prova elegantemente nell' algoritmo *comune*, che nella proporzionalità pura $A.B::C.D$ deve essere $+BC = +AD$, e $+CB = +DA$.

TEOREMA CLXIX.

NEll' algoritmo *nuovo*, se si à $-AD = -BC$, sussiste questa proporzionalità: $A.B::C.D$, e se si à $-DA = -CB$ sussiste la medesima proporzionalità: $A.B::C.D$.

Dimostrazione della prima parte.

SE non sussiste la proporzionalità $A.B::C.D$, potrebbe concepirsi in virtù del postulato la grandezza V omogenea alla C, e *disuguale* alla D, tale, che sussistesse questa proporzionalità: $A.B::C.V$; adunque pel teorema precedente si avrebbe $-AV = -BC$; ma si à per l' ipotesi $-AD = -BC$; adunque sarebbe $-AV = -AD$, e dividendo l' uno, e l' altro membro di quest' equazione per A, ne verrebbe pei teoremi CXLVIII., e CLII. $+[AV]:A = +[AD]:A$, ma essendo pel teorema CLXI. $+[AV]:A$ eguale ad V, e $+(AD):A$ eguale a D, sarebbe la V *eguale* alla D, il che è contro la supposizione fatta della V *disuguale* alla D; adunque sussiste la proporzionalità $A.B::C.D$; e questa è la prova della prima parte.

La dimostrazione della seconda parte è tanto simile a quella della prima, che non fa d' uopo distenderla; basterà per averla di sostituire nella dimostrazione della prima parte DA, CB, VA in vece respettivamente di AD, BC, AV; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Le grandezze A, e B debbono essere tra loro omogenee, e le grandezze C, e D omogenee tra loro, non essendo necessario, che le due seconde sieno omogenee alle due prime.

TEOREMA CLXX.

NEll' algoritmo *nuovo* il quarto termine d' una proporzionalità

lità pura è uguale al prodotto de' due termini medj diviso pel primo termine:

Sia $A.B::C.D$, dee provarsi, che D è uguale tanto a $+(BC):A$, quanto a $+(CB):A$.

DIMOSTRAZIONE.

PEl teorema CLXVIII. si à $-AD = -BC$, e $-DA = -CB$; adunque pe' teoremi CXLVIII., e CLII. si avrà tanto $+(AD):A = +(BC):A$, quanto $+(DA):A = +(CB):A$; ma pel teorema CLXI. D è uguale tanto a $+(AD):A$, quanto a $+(DA):A$; adunque D tanto è uguale a $+(BC):A$, quanto a $+(CB):A$. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA CLXXI.

NEll' algoritmo *nuovo* il terzo termine di una proporzionalità pura è uguale al prodotto de' termini estremi diviso pel secondo.

Sia $A.B::C.D$, dee provarsi, che tanto $+(AD):B$, quanto $+(DA):B$ è uguale a $+C$.

DIMOSTRAZIONE.

IL teorema CLXVIII. dà $-(BC) = -(AD)$, e $-(CB) = -(DA)$; ma pe' teoremi CXLVIII., e CLII. si à tanto $+(BC):B = +(AD):B$, quanto $+(CB):B = +(DA):B$; adunque essendo pel teorema CLXI. tanto $+(BC):B$, quanto $+(CB):B$ eguale a $+C$, ne siegue, che la stessa C è uguale tanto a $+(AD):B$, quanto a $+(DA):B$. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

NElla proporzionalità $A.B::C.D$, considerata in questi due teoremi, non è necessario, che i primi due termini sieno omogenei ai due ultimi.

In ordine a questi medesimi due teoremi dovranno farsi riflessioni simili a quelle, che si son fatte respettivamente negli scolj annessi ai teoremi CIII., e CIV., e a tale effetto dovrà aversi riguardo allo scolio annesso alla definizione XLVIII.

TEOREMA CLXXII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* il prodotto de' termini medj di una proporzionalità trascendente è uguale al prodotto de' termini estremi.

La proporzionalità trascendente, che qui si considera, è tale, che considerando come positivi tutti i suoi termini non è necessario, che i due primi sieno omogenei ai due ultimi.

DIMOSTRAZIONE.

I Quattro termini della proporzionalità trascendente sieno considerati, come tutti *positivi*, ed essi costituiranno una proporzionalità pura pel corollario III. della definizione XLIV.; laonde pel corollario II. del teorema LXXVII. nell' algoritmo *comune*, e pel teorema CLXVIII. nell' algoritmo *nuovo*, il prodotto de' termini medj della suddetta proporzionalità pura sarà eguale al prodotto de' termini estremi; adunque anche nella proporzionalità trascendente il prodotto de' medj sarà eguale a quello degli estremi; imperciocchè quantunque per cagion de' teoremi CXLIII., e CL. nella proporzionalità trascendente il prodotto de' medj, e il prodotto degli estremi fossero ambidue *negativi* nell' algoritmo *comune*, e ambidue *positivi* nell' algoritmo *nuovo*, nientedimeno egli è chiaro, che in entrambi gli algoritmi *comune*, e *nuovo*, se due grandezze *positive* sono tra loro eguali, le medesime prese negativamente saranno ancora eguali, e se due grandezze *negative* sono eguali tra loro, le stesse prese positivamente saranno tuttavia eguali, e quindi, ec. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA CLXXIII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, se quattro termini sono tali, che i due primi rispetto ai due ultimi sieno in istato analogo della prima, o della seconda, o della terza, o della quarta, o della quinta, o della sesta, o della settima specie; e se di più il prodotto de' due termini medj

di

di essi è uguale al prodotto de' due termini estremi; io dico, che i suddetti quattro termini sono trascendentemente proporzionali.

I due primi de' quattro termini debbono essere tra loro omogenei, e i due ultimi debbono essere omogenei tra loro, non essendo necessario, che sieno tutti quattro omogenei.

Dimostrazione.

Considerando i medesimi quattro termini, come tutti *positivi*, essi saranno puramente proporzionali pel corollario II. del teorema LXXVII., ovvero pel teorema CLXIX.; adunque pel corollario IV. della definizione XLIV. gl' istessi quattro termini sono trascendentemente proporzionali. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema CLXXIV.

Nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* il quarto termine d' ogni proporzionalità trascendente è uguale al prodotto de' termini medj diviso pel primo termine.

Teorema CLXXV.

Nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* il terzo termine d' ogni proporzionalità trascendente è uguale al prodotto de' termini estremi diviso pel secondo termine.

Dimostrazione di questi due teoremi.

Si considerino, come *positivi* i quattro termini della proporzionalità trascendente (i due primi de' quali non è necessario, che sieno omogenei ai due ultimi), e in virtù del corollario III. della definizione XLIV., essi formeranno una proporzionalità pura, in cui il quarto termine sarà eguale al prodotto de' termini medj diviso pel primo, e il terzo termine sarà eguale al prodotto de' termini estremi diviso pel secondo. Tutto questo si prova nell' algoritmo *comune* mediante i teoremi CIII., e CIV., e nell' algoritmo *nuovo* mediante i teoremi CLXX., e CLXXI.

Ciò posto non può dubitarsi della verità dei due presenti teoremi, perchè sebbene fossero *negativi* il quarto termine, ovvero il terzo termine della proporzionalità trascendente, oppure ambedue, e per conseguenza fossero *negativi* i loro valori espressi in questi due teoremi; nientedimeno essendosi essi termini (quarto, e terzo) in sembianza di *positivi*, provati eguali ai suddetti loro valori, considerati anche questi in sembianza di *positivi*, ne siegue, che divenendo *negativo* il quarto termine, ovvero il terzo termine, oppure ambedue, e divenendo *negativi* anche i loro valori, non si perde punto l' eguaglianza, che passa tra essi termini, considerati come *positivi*, e i loro valori considerati, come *positivi*; imperciocchè è evidente, che se $+F=+G$, anche $-F=-G$. Il che dovea dimostrarsi.

Teorema CLXXVI.

Nell' algoritmo *nuovo* il prodotto di quante, e quali grandezze positive omogenee si vogliano è uguale ad ogni altro prodotto delle medesime, qualunque ordine si osservi nel moltiplicarle insieme; purchè non si cangi il valore dell' *unità negativa assunta*.

La dimostrazione di questo teorema è similissima alla dimostrazione del teorema XLV., purchè si consideri, che nell' algoritmo *nuovo*, il prodotto di qualunque numero di grandezze omogenee equivale ad una pura grandezza omogenea (prescindendo dalla diversità de' segni affissi), i quali segni debbono esser *negativi* pel teorema CXLVI. ne' prodotti di un numero pari di grandezze, e debbono esser *positivi* ne' prodotti d' un numero *impari* di grandezze pel teorema CL.

E purchè nell' accennata dimostrazione del teorema XLV. si sostituisca la voce *grandezza* in luogo della voce *proporzione*; in vece poi di citare, come ivi si fa, il teorema XXIII. si citi il teorema CLX.; in vece del I. coroll. del teorema XXIV. si citi il coroll. del teorema CLV.; e in vece del coroll. VII. dello stesso teorema XXIV. si citi il teorema CLVI., come pure in luogo del I. corollario del teorema XXIX. si citi il teorema CLXVIII.

Sco-

SCOLIO.

I. POssono dedursi dal teorema presente corollarj simili a quelli, che si sono dedotti dal teorema LXXXI.

II. E' facile lo stendere il presente teorema CLX. ai prodotti di grandezze tutte *negative*, e ciò in ambedue gli *algoritmi*, *comune*, e *nuovo*;

Imperciocchè chiamando $\pm F$ il prodotto (secondo ambedue gli algoritmi) di quante, e quali grandezze *positive* si vogliano, e $\pm G$ il prodotto delle medesime grandezze moltiplicate fra loro con ordine diverso; egli è manifesto, che le stesse grandezze divenendo tutte *negative*, o lasceranno il prodotto $\pm F$, e $\pm G$ coi loro pristini segni, e in tal caso la cosa è più che evidente, ovvero muteranno i segni de' medesimi prodotti, i quali diveranno respettivamente $\mp F$, e $\mp G$, ma in questo caso ancora, essendosi provato in ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo* mediante i teoremi LXXIX., LXXXI., CLX., e CLXXVI. presente, che $\pm F$ è uguale a $\pm G$, ne siegue ad evidenza, che ancora $\mp F$ è uguale a $\mp G$.

TEOREMA CLXXVII.

NEll' algoritmo *nuovo* qualunque termine (che io chiamerò Y) d' una progressione geometrica dopo il secondo è uguale ad una dignità del secondo termine, il numero esponente della quale è minore di una unità del numero, che indica il *sito*, che ottiene nella progressione il termine Y, è uguale, dico, alla detta dignità del secondo termine divisa per una dignità del primo termine, il numero esponente della quale è minore di due unità del numero, che indica il *sito*, che ottiene nella progressione il termine Y.

Intendo di una progressione formata di termini tutti positivi.

Sia la progressione geometrica A, B, C, D, E, ec. dee provarsi, che il terzo termine C è uguale a $BB:A$, che il quarto termine D è uguale a $BBB:AA$, che il quinto termine E è uguale a $BBBB:AAA$, e così, ec.

La

La dimoſtrazione di queſto teorema è intieramente ſimile alla dimoſtrazione del teorema CXVIII., per adattar la quale al preſente teorema, baſta citare il teorema CLXX. in vece del teorema CIII., e conſiderare, che quantunque nell' algoritmo *nuovo* una grandezza *poſitiva* moltiplicata per una grandezza *poſitiva* dia un prodotto negativo pel teorema CXLIV., nientedimeno queſto medeſimo prodotto *negativo* (venendo diviſo per una grandezza *poſitiva*) rende un quoziente poſitivo, e ciò in virtù del teorema CXLVIII.

TEOREMA CLXXVIII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $\pm\sqrt{+A}$ moltiplicata per $\pm\sqrt{+A}$, produce $+A$:

E $\pm\sqrt{+A}$ moltiplicata per $\mp\sqrt{+A}$ produce $-A$.

DIMOSTRAZIONE.

NEll' algoritmo *comune* la prima parte del teorema è evidente pel teorema CXLIV.: e nell' algoritmo *nuovo* è pure evidente per la definizione LI., e per lo ſcolio a quella anneſſo.

Per provare la ſeconda parte ſi rifletta, che nell' algoritmo *comune*, in virtù delle definizioni XXXVI., e XLV., ſi à queſta proporzionalità pura, o traſcendente della quinta ſpecie:

$$(1)\ +Z.\pm\sqrt{+A}::\pm\sqrt{+A}.+A,$$

e che nell' algoritmo *nuovo* ſi à la medeſima proporzionalità (1) in virtù del corollario della definizione LI.

Si rifletta ancora, che mutando il ſegno, cioè lo ſtato del ſecondo antecedente della proporzionalità (1), dee mutarſi tanto nell' algoritmo *comune*, quanto nell' algoritmo *nuovo*, dee mutarſi, dico, il ſegno, cioè lo ſtato anche del ſecondo conſeguente; affinchè i due primi termini riſpetto ai due ultimi ſieno in iſtato analogo di qualcuna delle ſette ſpecie, conforme richiede la definizione XLIV.; ſi avrà per tanto queſta proporzionalità traſcendente, che è della prima, e della terza ſpecie:

$$(2)\ +Z.\pm\sqrt{+A}::\mp\sqrt{+A}.-A.$$

e per

e per conseguenza tanto nell' algoritmo *comune*, quanto nel *nuovo*, $\pm\sqrt{+A}$ moltiplicata per $\mp\sqrt{+A}$ produce $-A$; e questa è la prova della seconda parte; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

ADunque nell' algoritmo *nuovo* la grandezza *straordinaria* $\pm\sqrt{+A}$ si moltiplica per la grandezza *straordinaria* $\mp\sqrt{+A}$ mediante l' unità *positiva*.

SCOLIO.

NEll' algoritmo *nuovo* chi pensasse di potersi valere in sì fatta moltiplicazione dell' unità *negativa* $-Z$, in vece della proporzionalità *trascendente* (2), o non avrebbe alcuna proporzionalità pura, o trascendente, oppure avrebbe questa:

$$-Z.\pm\sqrt{+A}::\mp\sqrt{+A}.+A,$$

che è impropria, poichè nell' algoritmo *nuovo* $-A$ è uguale a $\pm\sqrt{+A}$ moltiplicata per $\pm\sqrt{+A}$ in vigore della definizione LI., laonde ne seguirebbe, che il prodotto $(\pm\sqrt{+A})(\pm\sqrt{+A})$ sarebbe eguale al prodotto $(\pm\sqrt{+A})(\mp\sqrt{+A})$.

TEOREMA CLXXIX.

NEll' algoritmo *nuovo* e nell' algoritmo *comune* $\pm\sqrt{-A}$ moltiplicata per $\pm\sqrt{-A}$ produce $-A$.

E $\pm\sqrt{-A}$ moltiplicata per $\mp\sqrt{-A}$ produce $+A$.

DIMOSTRAZIONE.

NEll' algoritmo *nuovo* la prima parte del teorema è manifesta pel teorema CXLIV., e nell' algoritmo *comune* è pur manifesta per la definizione L., e per lo scolio, che gli è annesso.

Per dimostrare la seconda parte si consideri, che nell' algoritmo *nuovo* in virtù della definizione XLVI. si à questa proporzionalità trascendente, che è della sesta, e settima specie:

$$(1)\ -Z.\pm\sqrt{-A}::\pm\sqrt{-A}.-A,$$

e che nell' algoritmo *comune* si à la medesima proporzionalità tà trascendente (1) in vigore del corollario della definizione L.; si consideri eziandio, che cangiando il segno, cioè lo stato del secondo antecedente della proporzionalità (1), à da mutarsi tanto nell' algoritmo *nuovo*, quanto nel *comune*, à da mutarsi, dico, il segno, cioè lo stato anche del secondo conseguente, acciò i due primi termini rispetto ai due ultimi sieno in istato *analogo* di qualcuna delle sette specie, come esige la definizione XLIV., si avrà dunque l' infrascritta proporzionalità trascendente, che è della quarta, e della seconda specie:

$$(2)\ -Z.\pm\sqrt{-A}::\mp\sqrt{-A}.+A,$$

e perciò tanto nell' algoritmo *nuovo*, quanto nell' algoritmo *comune* $\pm\sqrt{-A}$ moltiplicata per $\mp\sqrt{-A}$, produce $+A$; e questa è la dimostrazione della seconda parte; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

ADunque nell' algoritmo *comune*, la grandezza *straordinaria* $\pm\sqrt{-A}$ si moltiplica per la grandezza *straordinaria* $\mp\sqrt{-A}$ mediante l' unità *negativa*.

SCOLIO.

NEll' algoritmo *comune* in vano si pensarebbe di valersi nella suddetta moltiplicazione dell' unità *positiva* $+Z$, mentre in tal caso in vece della proporzionalità trascendente (2), o non si avrebbe alcuna proporzionalità pura, o trascendente, oppure si avrebbe questa:

$$+Z.\pm\sqrt{-A}::\mp\sqrt{-A}.-A,$$

la quale è impropria; imperciocchè nell' algoritmo *comune* $-A$ è uguale a $\pm\sqrt{-A}$ moltiplicata per $\pm\sqrt{-A}$, in virtù della definizione L.; laonde ne seguirebbe, che il prodotto $(\pm\sqrt{-A})(\pm\sqrt{-A})$ sarebbe eguale al prodotto $(\pm\sqrt{-A})(\mp\sqrt{-A})$.

Altro scolio.

I. IN quelle proporzionalità pure, o trascendenti, alcuni termini delle quali sono grandezze *straordinarie*, il modo, con cui il primo antecedente contiene l' aliquote del primo conseguente

te

te è ſimile al modo, con cui il ſecondo antecedente contiene le aliquote del ſecondo conſeguente; eſſendo ciò chiaro per ſe medeſimo in ordine alle proporzionalità pure, e pel corollario II. della definizione XLIV. in ordine alle proporzionalità traſcendenti.

II. Con queſto però, che conſiderando in tali proporzionalità la *contenenza* degli antecedenti in ordine alle aliquote de' loro reſpettivi conſeguenti, dee preſcinderſi dalla qualità *ſtraordinaria* di quei termini, i quali ſono grandezze *ſtraordinarie*.

III. Sì fatto preſcindimento però non è punto neceſſario, quando tutti i termini delle proporzionalità pure, o traſcendenti ſono grandezze *ſtraordinarie*; ovvero quando i due primi termini ſono grandezze *ordinarie*, e i due ultimi ſono grandezze *ſtraordinarie*, oppure allorchè i due primi termini ſono grandezze *ſtraordinarie*, e i due ultimi termini ſono grandezze *ordinarie*.

IV. Simiglianti rifleſſioni debbono aver luogo intorno quelle proporzionalità pure, o traſcendenti, alcuni termini delle quali ſono miſti di grandezze *ordinarie*, e di grandezze *ſtraordinarie*, e ſegnatamente convien riflettere, come nel ſecondo articolo di queſto ſcolio, che in sì fatte proporzionalità, allorchè ſi conſidera la *contenenza* degli antecedenti in ordine alle aliquote de' loro conſeguenti, dee parimente preſcinderſi dalla qualità *ſtraordinaria* di quelle porzioni de' ſuddetti termini miſti, le quali ſono grandezze *ſtraordinarie*.

V. In ſomma nelle ſpecie di proporzionalità accennate tanto nel primo articolo, quanto nel quarto di queſto ſcolio, allorchè ſi conſidera la contenenza delle aliquote del conſeguente, la quale compete al correſpettivo antecedente, debbono riguardarſi le grandezze *ſtraordinarie* come ſe ſi riferiſſero a quella ſorta d'algoritmo *comune*, o *nuovo*, in cui tali grandezze non ſono ſtraordinarie:

In altro modo non ſaprei come potrebbe mai concepirſi l' eſſenza, e la ſuſſiſtenza di queſte proporzionalità, e trarne, come tal volta convien fare, illazioni ſimiglianti a quelle, che ſi deducono dalle altre proporzionalità pure, o traſcendenti, le quali coſtano di termini tutti ordinarj.

TEOREMA CLXXX.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $\pm l\sqrt{+A}$ moltiplicata per $\pm l\sqrt{+A}$ produce $+llA$:

E $\pm l\sqrt{+A}$ moltiplicato per $\mp l\sqrt{+A}$ produce $-llA$.

La lettera l significa qualunque grandezza *positiva*, che può essere ancora non omogenea alla A.

Dimostrazione per l' algoritmo comune.

PEl teorema CLXXVIII. si anno queste due proporzionalità:

(1) $+Z . \pm\sqrt{+A} :: \pm\sqrt{+A} . +A$,

(2) $+Z . \pm\sqrt{+A} :: \mp\sqrt{+A} . -A$.

Prendasi l' *unità assunta* V omogenea alla l, potendo la stessa V esser anche diversa dalla prima *unità assunta* Z, e facciasi la seguente proporzionalità pura:

$+V . +l :: +l . +ll$,

i termini della quale sieno moltiplicati pe' termini correlativi delle due proporzionalità (1), e (2), e si avranno respettivamente le altre due proporzionalità infrascritte in virtù de' teoremi CXLIII., e CXLIV., e CLXVII.

(3) $+VZ . \pm l\sqrt{+A} :: \pm l\sqrt{+A} . +llA$,

(4) $+VZ . \pm l\sqrt{+A} :: \mp l\sqrt{+A} . -llA$;

ma nell' algoritmo *comune* per l' articolo IX. dello scolio annesso alla definizione XXXVI. VZ è uguale a Z, considerando V per *unità assunta* nella formazione del prodotto VZ; adunque sostituendo nelle proporzionalità (3), e (4) $+Z$ in cambio di $+VZ$, ne verranno pel corollario IX. de' principj, e pel teorema CXXXIII. le due respettive proporzionalità, che seguono:

(5) $+Z . \pm l\sqrt{+A} :: \pm l\sqrt{+A} . +llA$,

(6) $+Z . \pm l\sqrt{+A} :: \mp l\sqrt{+A} . -llA$,

le quali a tenore delle definizioni XXXVI., e XLV. mostrano la verità del teorema in ordine all' algoritmo *comune*.

Dimostrazione per l' algoritmo nuovo.

PEl teorema CLXXVIII. sussistono anche nell' algoritmo *nuovo* le due proporzionalità (1), e (2).

Pren-

Prendasi come sopra la V, e sia $-V$ un' altra *unità assunta*, negativa, ed omogenea a $-l$, in modo che $+V$ può essere diversa da $+Z$: facciasi questa proporzionalità trascendente:

$$-V.-l::-l.-ll,$$

e i termini di essa sieno moltiplicati per ordine coi termini di ciascuna delle proporzionalità (1), e (2), mentre in vigore de' teoremi CXLIII., CXLIV., e CLXVII. ne risulteranno le proporzionalità (3), e (4).

Riflettasi ora, che anche nell' algoritmo *nuovo* assumendo V per unità nella formazione del prodotto $+VZ$, si à pel teorema CLIII. $+VZ$ eguale a $+Z$, e perciò ponendo nelle proporzionalità (3), e (4) $+Z$ in luogo di $+VZ$ sussisteranno pel corollario IX. de' principj, e pel teorema CXXXIII. le proporzionalità (5), e (6) anche nell' algoritmo *nuovo*, e rimarrà provato intieramenee il teorema. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

LE proporzionalità (5), e (6) fanno conoscere, che nell' algoritmo *nuovo* la grandezza straordinaria $\pm l\sqrt{\mp A}$ si moltiplica per $\pm l\sqrt{\mp A}$, e per $\mp l\sqrt{\mp A}$ mediante l' unità *positiva*.

TEOREMA CLXXXI.

NEll' algoritmo *nuovo*, e nell' algoritmo *comune* $\pm l\sqrt{-A}$ moltiplicata per $\pm l\sqrt{-A}$ produce $-llA$;

E $\pm l\sqrt{-A}$ moltiplicata per $\mp l\sqrt{-A}$ produce $+llA$.

Dimostrazione per l' algoritmo nuovo.

IL teorema CLXXIX. dà le due proporzionalità trascendenti infrascritte:

(1) $-Z.\pm\sqrt{-A}::\pm\sqrt{-A}.-A$,

(2) $-Z.\pm\sqrt{-A}::\mp\sqrt{-A}.+A$.

Prendasi la V, che deve essere omogenea ad l, e può essere differente da Z, e si consideri $-V$ per un' altra *unità assunta* ta negativa. Si faccia questa proporzionalità trascendente:

$$-V.-l::-l.-ll,$$

i di cui termini si moltiplichino pe' termini corrispondenti delle due proporzionalità (1), e (2), poichè in tal guisa si avranno pe' teoremi CXLIII., CXLIV., e CLXVII. le due respettive proporzionalità seguenti:

$$(3)\ -VZ.\pm l\sqrt{-A}::\pm l\sqrt{-A}.-llA,$$

$$(4)\ -VZ.\pm l\sqrt{-A}::\mp l\sqrt{-A}.+llA.$$

Nell' algoritmo *nuovo* pel teorema CLIII. $-VZ$ è uguale a $-Z$, attesochè $-V$ si considera come unità negativa assunta in formare il prodotto $-VZ$, e quindi se si sostituisce $-Z$ in vece di $-VZ$ nelle proporzionalità (3), e (4), si vedranno nascere queste altre due proporzionalità trascendenti:

$$(5)\ -Z.\pm l\sqrt{-A}::\pm l\sqrt{-A}.-llA,$$

$$(6)\ -Z.\pm l\sqrt{-A}::\mp l\sqrt{-A}.+llA,$$

che in vigore della definizione XLVI. dimostrano la verità del teorema nell' algoritmo *nuovo*.

Dimostrazione per l' algoritmo comune.

SUssistono le proporzionalità (1), e (2) anche nell' algoritmo *comune* pel teorema CLXXIX.

Facciasi per tanto questa proporzionalità pura:

$+V.+l::+l.+ll$, con assumere V per un' altra unità assunta, la quale può esser differente dalla Z, ma deve essere omogenea ad l, indi moltiplicando i termini di quest' ultima proporzionalità per quelli delle due proporzionalità (1), e (2) presi ordinatamente, si conseguiranno pe' teoremi CXLIII., CXLIV., e CLXVII. le proporzionalità (3), e (4). Ora nell' algoritmo *comune* si à pel teorema CXXXII.

$$+V.-V::+Z.-Z,$$

e per la definizione XLV. si à eziandio

$$+V.-V::+Z.-VZ;$$

adunque pel teorema CXLII. si vede essere $-VZ$ eguale a $-Z$; laonde la surrogazione di $-Z$ in luogo di $-VZ$ nelle proporzionalità (3), e (4) renderà la proporzionalità (5), e (6), mediante le quali anche nell' algoritmo *comune* si prova va il teorema; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

MOstrano le proporzionalità (5), e (6), che nell' algoritmo *comune* la grandezza *straordinaria* $\pm l\sqrt{-A}$ si moltiplica per $\pm l\sqrt{-A}$, e per $\mp l\sqrt{-A}$ col mezzo dell' unità *negativa*.

SCOLIO.

IL metodo, che ò tenuto nel dimostrare i due ultimi teoremi può servire a dimostrarne degli altri concernenti le grandezze straordinarie, e servirà anche a provare l' infrascritto, che appartiene alle grandezze ordinarie.

TEOREMA.

RAppresentino M, ed N qualsivoglia grandezza ordinaria, positiva, o negativa, non essendo necessario, che l' una sia omogenea all' altra; io dico, che il quadrato, o sia seconda dignità di $\pm MN$ è uguale a $+MMNN$ nell' algoritmo *comune*, e a $-MMNN$ nell' algoritmo nuovo.

DIMOSTRAZIONE.

SIa $\backsim Z$ l' unità assunta omogenea alla M, ed $\backsim V$ l' unità assunta omogenea alla N; dovendosi avvertire, che il segno $\backsim$ denota $+$ in ordine all' algoritmo *comune*, ed esprime $-$ in ordine all' algoritmo *nuovo*; e che l' unità $\backsim V$ può essere diversa dall' altra unità $\backsim Z$.

Si facciano queste due proporzionalità pure, o trascendenti:

$\backsim Z . \pm M :: \pm M . \backsim MM$,

$\backsim V . \pm N :: \pm N . \backsim NN$,

e moltiplicando per ordine i termini della prima con quelli della seconda, sussisterà pe' teoremi CLXVII., CXLIII., e CXLIV. questa terza proporzionalità pura, o trascendente:

$\backsim ZV . \pm MN :: \pm MN . \backsim MMNN$;

ma nell' algoritmo *comune* per l' articolo X. dello scolio annesso alla definizione XXXVI., e nell' algoritmo *nuovo*, pel teorema ma CLIII. la $\backsim ZV$ è uguale a $\backsim V$, adunque ponendo $\backsim V$ in cambio di $\backsim ZV$ nell' ultima proporzionalità si otterrà la seguente pel corollario IX. de' principj, e pel teorema CLIII.

$$\backsim V . \pm MN :: \pm MN . \backsim MMNN;$$

e quindi per la definizione XLIX. $\backsim MMNN$ sarà eguale al quadrato, o sia seconda dignità $\pm MN$ in ordine ad ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

I. IL quadrato, o sia seconda dignità di $\pm MN$ è ancora eguale a $\backsim MNMN$, cioè a $\pm MN \times \pm MN$ per la definizione XLIX.; adunque nell' algoritmo *comune* $+ MMNN$ è uguale a $+ MNMN$; e nell' algoritmo *nuovo* $- MMNN$ è uguale a $- MNMN$.

II. E conseguentemente nell' algoritmo *comune* anche $- MMNN$ sarà eguale a $- MNMN$, e nell' algoritmo *nuovo* anche $+ MMNN$ sarà eguale a $+ MNMN$.

TEOREMA CLXXXII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $\pm l\sqrt{+a}$ è uguale a $\pm\sqrt{+lla}$; e $\pm l\sqrt{-a}$ è uguale a $\pm\sqrt{-lla}$.

Dimostrazione della prima parte.

IN ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo* $\pm l\sqrt{+a}$ moltiplicata per se stessa è uguale a $+ lla$ pel teorema CLXXX., e $\pm\sqrt{+lla}$ moltiplicata per se stessa è uguale a $+ lla$ pel teorema CLXXVIII.; adunque $+ lla$ è la seconda dignità tanto di $\pm l\sqrt{+a}$, quanto di $\pm\sqrt{+lla}$, e conseguentemente pel corollario II. del teorema CLIX. $\pm l\sqrt{+a}$ è uguale a $\pm\sqrt{+lla}$. Il che dovea dimostrarsi in primo luogo.

La seconda parte si dimostra nella medesima guisa, che la prima, purchè in vece di $\pm l\sqrt{+a}$, $\pm\sqrt{+lla}$, e $+ lla$, scrivasi respettivamente $\pm l\sqrt{-a}$, $\pm\sqrt{-lla}$, e $- lla$, e in cambio di allegare i teoremi CLXXX., e CLXXVIII., si alleghino respettivamente i teoremi CLXXXI., e CLXXIX.; adunque il teorema è interamente dimostrato.

TEO-

TEOREMA CLXXXIII.

NEll' algoritmo *nuovo*, e nell' algoritmo *comune* la radice seconda d' una grandezza negativa, v. g. di $-A$, dee prenderſi mediante l' unità *negativa*.

DIMOSTRAZIONE.

LA dimoſtrazione di queſto teorema nell' algoritmo *nuovo*, naſce immediatamente dal teorema CXLIV.;

E nell' algoritmo *comune* dal corollario della definizione L., ove ſi prova queſta proporzionalità traſcendente della ſeſta, e ſettima ſpecie:

$$-Z . \pm\sqrt{-A} :: \pm\sqrt{-A} . -A.$$

Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

NEll' algoritmo *comune*, ſe $+bb$ (quantunque in apparenza di grandezza poſitiva) denotaſſe in realtà una grandezza *negativa*, v. g. $-A$, la radice ſeconda $\pm b$ di $+bb$, ſi dovrebbe prendere mediante l' unità *negativa*, e concepirſi queſta vera proporzionalità traſcendente, che in realtà è della ſeſta, e ſettima ſpecie:

$$-Z . \pm b :: \pm b . +bb,$$

cioè $-Z . \pm b :: \pm b . -A$.

TEOREMA CLXXXIV.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* la radice ſeconda d' una grandezza poſitiva, v. g. di $+A$ dee prenderſi mediante l' unità *poſitiva*.

DIMOSTRAZIONE.

LA dimoſtrazione del preſente teorema nell' algoritmo *comune* è un' immediata conſeguenza del teorema CXLIV.;

E nell' algoritmo *nuovo* deriva immediatamente dal corollario della definizione LI., in cui è provata queſta proporzionalità pura, o traſcendente della quinta ſpecie:

$+Z . \pm\sqrt{+A} :: \pm\sqrt{+A} . + A$.

Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

NEll' algoritmo *nuovo*, se $-bb$ (quantunque in apparenza di grandezza negativa) esprimesse in realtà una grandezza *positiva*, v. g. $+A$, la radice seconda $\pm b$ di $-bb$, si dovrebbe prendere mediante l' unità positiva, e formare questa vera proporzionalità, che in realtà è *pura*, o della quinta specie:

$+Z . \pm b :: \pm b . - bb$,

cioè $+Z . \pm b :: \pm b . + A$.

TEOREMA CLXXXV.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo*, una grandezza *straordinaria* può moltiplicare una grandezza *ordinaria* positiva, o negativa.

Dimostrazione della prima parte.

RAppresenti c qualsivoglia grandezza ordinaria positiva, e così l, che potrà esprimere anche l' unità naturale.

Nell' algoritmo *comune*:

(1) $+Z . + c :: \pm l\sqrt{-A} . \pm cl\sqrt{-A}$,

è una vera proporzionalità pura, o trascendente della prima specie:

(2) $+Z . - c :: \pm l\sqrt{-A} . \mp cl\sqrt{-A}$,

è una vera proporzionalità trascendente della terza, o della quinta specie;

Adunque in virtù delle definizioni XXXVI., e XLV., ec.. Il che dovea primieramente dimostrarsi.

Dimostrazione della seconda parte.

RImangano a c, e ad l le significazioni esposte di sopra.

Nell' algoritmo *nuovo*:

(3) $-Z . + c :: \pm l\sqrt{+A} . \mp cl\sqrt{+A}$,

è una vera proporzionalità trascendente della sesta, o quarta specie:

(4)

$(4)\ -Z.-c::\pm l\sqrt{+A}.\pm cl\sqrt{+A}$,

è una vera proporzionalità trascendente della seconda, o settima specie:

Adunque per la definizione XLVI., ec.. Il che dovea secondariamente dimostrarsi.

TEOREMA CLXXXVI.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* una grandezza straordinaria può essere moltiplicata per una grandezza ordinaria positiva, o negativa.

Conservino c, ed l le loro significazioni,

Permutando la proporzionalità (1), e (2), notate nella dimostrazione della prima parte del teorema precedente, si anno le due infrascritte per l' algoritmo *comune:*

$+Z.\pm l\sqrt{-A}::+c.\pm cl\sqrt{-A}$,

$+Z.\pm l\sqrt{-A}::-c.\mp cl\sqrt{-A}$,

la prima delle quali è una proporzionalità pura, o trascendente della terza specie, e la seconda è una proporzionalità trascendente della prima, o quinta specie.

Permutando le proporzionalità (3), e (4) registrate nella dimostrazione della seconda parte del precedente teorema si ottengono le due seguenti per l' algoritmo *nuovo:*

$-Z.\pm l\sqrt{+A}::+c.\mp cl\sqrt{+A}$,

$-Z.\pm l\sqrt{+A}::-c.\pm cl\sqrt{+A}$,

la prima delle quali è una proporzionalità trascendente della sesta, o seconda specie; e la seconda è una proporzionalità trascendente della quarta, o settima specie;

Adunque per le definizioni XXXVI., XLV., e XLVI. nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* una grandezza *straordinaria* può essere moltiplicata per una grandezza *ordinaria* positiva, o negativa. Il che dovea dimostrarsi.

TEOREMA CLXXXVII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* il prodotto di una grandezza *straordinaria* (positiva, o negativa) moltiplicata per una grandezza *ordinaria* (positiva, o negativa) è uguale al prodotto della medesima grandezza *ordinaria* (positiva, o negativa) moltiplicata per la stessa grandezza *straordinaria* (positiva, o negativa);

In ambidue gli algoritmi *comune*, e *nuovo*, $\backsim c$ significhi la grandezza ordinaria positiva, o negativa;

Nell' algoritmo *comune*, $\pm l\sqrt{-A}$ significhi la grandezza *straordinaria* (positiva, o negativa), intendendo per l qualsivoglia grandezza ordinaria positiva, ed anche l' unità naturale;

Nell' algoritmo *nuovo*, $\pm l\sqrt{+A}$ significhi la grandezza *straordinaria* (positiva, o negativa) conservando l la significazione espressa.

Dimostrazione della prima parte.

NEll' algoritmo *comune* pel teorema CLXXXV si à questa proporzionalità pura, o trascendente:

$$+Z . \backsim c :: \pm l\sqrt{-A} . \backsim c \times (\pm l\sqrt{-A}),$$

e pel teorema CLXXXVI. si à quest' altra proporzionalità pura, o trascendente:

$$+Z . \pm l\sqrt{-A} :: \backsim c . \backsim c \times (\pm l\sqrt{-A}):$$

gli ultimi termini di queste due proporzionalità sono tra loro eguali; l' ultimo termine della seconda è il prodotto di $\pm l\sqrt{-A}$ moltiplicato per $\backsim c$ in virtù delle definizioni XXXVI., e XLV.; l' ultimo termine della prima è il prodotto di $\backsim c$ moltiplicata per $\pm l\sqrt{-A}$ in virtù della definizione XXXVI., e XLV.; adunque, ec. E questa è la prova della prima parte.

Dimostrazione della seconda parte.

SImilmente nell' algoritmo *nuovo* pel teorema CLXXXV. si à questa proporzionalità trascendente:

$$-Z . \backsim c :: \pm l\sqrt{+A} . \backsim c \times (\pm l\sqrt{+A}),$$

e pel teorema CLXXXVI. si à quest' altra proporzionalità trascendente:

$$-Z . \pm l\sqrt{+A} :: \backsim c . \backsim c \times (\pm l\sqrt{+A}):$$

gli ultimi termini di queste due proporzionalità sono eguali tra loro; l' ultimo termine della seconda è il prodotto di $\pm l\sqrt{+A}$ moltiplicato per $\backsim c$ in virtù della definizione XLVI.; e l' ultimo

timo termine della prima è il prodotto di $\backsim c$ moltiplicata per $\pm l\sqrt{\mp A}$ in virtù della definizione XLVI.; adunque, ec.; e queſta è la prova della ſeconda parte. Il che dovea dimoſtrarſi.

SCOLIO.

COl medeſimo tenore di dimoſtrazione ſi proverebbe, che in entrambi gli algoritmi *comune*, e *nuovo* il prodotto della grandezza ordinaria $\pm b$ moltiplicata per l' altra grandezza ordinaria $\backsim c$ è uguale al prodotto di $\backsim c$ moltiplicata per $\pm b$.

Altro ſcolio.

LA dimoſtrazione del ſeguente teorema dipende da queſto principio ſuppoſto da tutti gli Analiſti.

Poſte due eſpreſſioni analitiche coſtanti di qualſivoglia numero di parti poſitive, o negative, una di eſſe ſi moltiplica per l' altra, quando tutte le parti d' una eſpreſſione (*preſe ad una ad una*) ſi moltiplicano per tutte le parti dell' altra eſpreſſione *preſe ad una ad una*.

Di queſto medeſimo principio io mi varrò anche nella continuazione.

Un altro principio conſimile, parimente ſuppoſto da tutti gli Analiſti, è il ſeguente:

Un' eſpreſſione analitica, coſtante di qualſivoglia numero di parti poſitive, o negative, ſi divide per un' altra grandezza (poſitiva, o negativa) ovvero per un' altra eſpreſsione analitica coſtante di qualſivoglia numero di parti poſitive, o negative, quando tutte le parti della prima eſpreſsione, (*preſe ad una ad una*) ſi dividono per la ſuddetta grandezza poſitiva, o negativa, ovvero reſpettivamente per la ſeconda eſpreſsione.

TEOREMA CLXXXVIII.

NEll' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* io dico, che la radice ſeconda *attualmente* eſtratta da una grandezza, *che non è tale radice ordinaria*, venendo aggiunta ad una grandezza ordinaria, ovvero da eſſa ſottratta, l' aggregato, ovvero reſpetſpettivamente la differenza, non ſaranno grandezze *puramente* ordinarie.

L' eſempio farà meglio comprendere il ſenſo, e la dimoſtrazione di queſto teorema.

Nell' algoritmo *comune* ſia $\pm b$ la radice ſeconda *attualmente* eſtratta dalla grandezza $-A$, che in detto algoritmo non à la radice ſeconda ordinaria, cioè ſia $\pm b = \pm\sqrt{-A}$;

E nell' algoritmo *nuovo* ſia $\pm b$ la radice ſeconda *attualmente* eſtratta dalla grandezza $+A$, che nell' algoritmo *nuovo* non à la radice ſeconda ordinaria, cioè ſia $\pm b = \pm\sqrt{+A}$.

In ambedue gli algoritmi *comune*, e *nuovo* ſia c una grandezza ordinaria omogenea alla A;

Io dico, che nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $c+b$, e $c-b$ non ſono grandezze *puramente* ordinarie.

DIMOSTRAZIONE.

SE nell' algoritmo *comune* le due grandezze rappreſentate per $c \pm b$ foſſero grandezze puramente ordinarie, il quadrato di $c \pm b$ ſarebbe

$$\begin{array}{l} cc \pm bc \\ \quad \pm bc + bb \end{array}$$

pe' teoremi CXLIII., e CXLIV., cioè il quadrato di $c \pm b$ ſarebbe $cc \pm 2cb + bb$, e bb ſarebbe *poſitivo* per l' allegato teorema CXLIV., laddove bb deve eſſere *negativo*, ed eguale a $-A$ pel teorema CLXXIX.

All' oppoſto, ſe nell' algoritmo *nuovo* le grandezze eſpreſſe per $c \pm b$ foſsero grandezze *puramente* ordinarie, il quadrato di $c \pm b$ ſarebbe

$$\begin{array}{l} -cc \mp bc \\ \quad \mp bc - bb \end{array}$$

pe' teoremi ſopraccitati CXLIII., e CXLIV., cioè il quadrato di $c \pm b$ ſarebbe $-cc \mp 2cb - bb$, e $-bb$ ſarebbe *negativo* pel teorema CXLIV., quando eſſer dee *poſitivo*, ed eguale a $+A$ pel teorema CLXXVIII.;

Adunque nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $c+b$, e $c-b$ non ſono grandezze *puramente* ordinarie, ma c

è granè grandezza *ordinaria*, e $\pm b$ è grandezza *straordinaria*, quantunque sia *attualmente* estratta da $-A$ nell' algoritmo *comune*, e da $+A$ nell' algoritmo *nuovo*. Il che dovea dimostrarsi.

Altra dimostrazione.

SE nell' algoritmo *comune* le grandezze denotate per $c \pm b$ fossero grandezze *puramente* ordinarie, $c+b$ moltiplicata per $c-b$ produrebbe

$$cc-cb$$
$$+cb+(+b)(-b),$$ cioè $cc-bb$ pe' teoremi CXLIII., e CXLIV., vale a dire $(+b)(-b)$ sarebbe eguale a $-bb$, il che è contrario al teorema CLXXIX., in virtù del quale $(+b)(-b)$ è uguale a $+bb$, cioè a $+A$;

E se nell' algoritmo *nuovo* le grandezze significate per $c \pm b$ fossero grandezze puramente ordinarie, $(c+b)$ moltiplicato per $c-b$ darebbe

$$-cc+cb$$
$$-cb+(+b)(-b),$$ cioè $-cc+bb$ pe' teoremi CXLIII., e CXLIV., vale a dire $(+b)(-b)$ sarebbe eguale a $+bb$, il che ripugna al teorema CLXXVIII., in vigore di cui $(+b)(-b)$ è uguale a $-bb$, cioè a $-A$;

Adunque nell' algoritmo *comune*, e nell' algoritmo *nuovo* $c+b$, e $c-b$ non sono grandezze *puramente* ordinarie. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO,

Che serve a spiegar distintamente il senso di questo teorema.

I. PEr cagion d' esempio, se $c=5$, ed $A=4$;

Nell' algoritmo *comune* sarà

$\pm\sqrt{-A}=\pm\sqrt{-4}=\pm|2|$, (il numero 2 è scritto tra due linee per contrassegno, che è una grandezza *straordinaria*, essendo questo *due* positivo, o negativo uguale alla radice di -4 presa mediante l' unità *negativa*); e sarà $c\pm b$ $=5\pm|2|$;

Adunque, secondo questo teorema, $5+|2|$ non è uguale a 7, e $5-|2|$ non è eguale a 3.

Il

Il quadrato di $5+|2|$ non è uguale a 49, ma a $29+10|2|$; e il quadrato di $5-|2|$ non è uguale a 9, ma a $29-10|2|$;

Finalmente il prodotto di $5+|2|$ moltiplicato per $5-|2|$ non è uguale a 21, ma a 29.

Nell' algoritmo *nuovo* poi sarà $\pm\sqrt{+4}=\pm\sqrt{+4}=\pm|2|$ (il numero 2 è qui ancora una grandezza *ſtraordinaria*, mentre queſto *due* poſitivo, o negativo è uguale alla radice di $+4$ preſa mediante l' unità poſitiva); e ſarà $c\pm b=5\pm|2|$;

Adunque pel preſente teorema $5+|2|$ non è uguale a 7, e $5-|2|$ non è uguale a 3; il quadrato di $5+|2|$ non è uguale a -49, ma a $-29-10|2|$, e il quadrato di $5-|2|$ non è uguale a -9, ma a $-29+10|2|$; e in fine il prodotto di $5+|2|$ moltiplicato per $5-|2|$ non è uguale a -21, ma a -29.

II. Tutto ciò non parrà ſtrano, ſe ſi rifletterà, che nell' algoritmo *comune* $\pm|2|$ non è uguale a ± 2, imperciocchè ſe foſſe $\pm|2|=\pm 2$, ſarebbe pel corollario I. del teorema CLVIII. il quadrato di $\pm|2|$ eguale al quadrato di ± 2, cioè pe' teoremi CLXXIX., e CXLIV. ſarebbe $-4=+4$; il che è aſſurdo.

Parimente nell' algoritmo *nuovo* $\pm|2|$ non è uguale a ± 2, mentre ſe foſſe $\pm|2|=\pm 2$, ſarebbe pel corollario I. del teorema CLVIII. il quadrato di $\pm|2|$ eguale al quadrato di ± 2, cioè pe' teoremi CLXXVIII., e CXLIV. ſarebbe $+4=-4$. Il che è ſimilmente aſſurdo.

III. Queſto eſempio moſtra, che tanto nell' algoritmo *comune*, quanto nell' algoritmo *nuovo* un numero *ſtraordinario* non può conſonderſi per via di addizione, o di ſottrazione con un numero *ordinario*.

Similmente in ambidue gli algoritmi *comune*, e *nuovo* una linea ſtraordinaria non può conſonderſi per via di addizione, o per via di ſottrazione con una linea ordinaria.

E così in ogni genere di grandezze, ec.

IV. Nell' algoritmo *comune* prendendo il quadrato di $c\pm b$, e il prodotto di $c+b$ moltiplicato per $c-b$, tutti i *prodotti par-*

parziali, che entrano nel quadrato, e nel prodotto, ſi formano mediante l' unità *poſitiva*, a riſerva di $(\pm b)(\pm b)$ nel quadrato, e di $(+b)(-b)$ nel prodotto, che ſono formati mediante l' unità *negativa*, a cagione di $+b$, e di $-b$ grandezze *ſtraordinarie*.

Così nell' algoritmo *nuovo*, allorchè ſi prende il quadrato di $c\pm b$, e il prodotto di $c+b$ moltiplicata per $c-b$, tutti i *prodotti parziali*, che entrano nel quadrato, e nel prodotto, ſi formano col mezzo dell' unità *negativa*, eccettuati $(\pm b)(\pm b)$ nel quadrato, e $(+b)(-b)$ nel prodotto, che ſono formati col mezzo dell' unità *poſitiva* a cauſa delle grandezze *ſtraordinarie* $+b$, e $-b$. Ma ſe $\pm b$ rappreſentaſſe una grandezza *ordinaria* nell' algoritmo *comune*, e parimente una grandezza *ordinaria* nell' algoritmo *nuovo*, allora tutti quanti i *prodotti parziali*, che entrano nel quadrato di $c\pm b$, e nel prodotto di $c+b$ moltiplicata per $c-b$ ſarebbero formati col mezzo dell' unità *poſitiva* nell' algoritmo *comune*, e dell' unità *negativa* nell' algoritmo *nuovo*.

AVVERTIMENTO.

IL teorema, che ſegue, doveva eſſer collocato più addietro; ma eſſendo ſtato ommeſſo, avrà qui luogo. Egli è neceſſario nell' algoritmo *nuovo*, ed io ne farò uſo in appreſſo, cioè nella ſeconda maniera di riſolvere l' equazioni del quarto grado mediante il ſuddetto algoritmo.

TEOREMA CLXXXIX.

DInoti $\backsim$ il ſegno più, ovvero meno ad arbitrio; io dico, che nell' algoritmo *nuovo* ſuſſiſtono queſte quattro equazioni.

$$\backsim(A\pm E)\times B = -\backsim AB \mp \backsim EB,$$
$$B\times\backsim(A\pm E) = -\backsim BA \mp \backsim BE,$$
$$\backsim(A\pm E)\times -B = \backsim AB \pm \backsim EB,$$
$$-B\times\backsim(A\pm E) = \backsim BA \pm \backsim BE,$$

nelle quali non è neceſſario, che B ſia omogeneo ad A, ed E.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

RAppreſenti $-Z$ l' unità *negativa aſſunta*.

Avendo riguardo al ſignificato dei primi membri delle quattro equazioni ſopraſcritte, e alla definizione XLVI., è chiaro, che ſarà dimoſtrato il teorema, ſe ſi proverà la ſuſſiſtenza delle quattro proporzionalità traſcendentali infraſcritte:

$$(1)\ -Z.\backsim(A\pm E)::B.-\backsim AB\mp\backsim EB,$$
$$(2)\ -Z.B::\backsim(A\pm E).-\backsim BA\mp\backsim BE,$$
$$(3)\ -Z.\backsim(A\pm E)::-B.\backsim AB\pm\backsim EB,$$
$$(4)\ -Z.-B::\backsim(A\pm E).\backsim BA\pm\backsim BE.$$

Per dimoſtrare adunque tale ſuſsiſtenza riflettaſi:

I. Che i due ſegni $+-$, e $-+$ ſignificano meno, e che i due ſegni $++$, e $--$ ſignificano più. Atteſochè i quattro ſegni ſuddetti non dinotano qui moltiplicazione, ma rappreſentano: il primo poſizione di ſtato *negativo;* il ſecondo negazione di ſtato *poſitivo;* il terzo poſizione di ſtato *poſitivo;* il quarto negazione di ſtato *negativo*. Veggaſi il corollario IV. delle preſuppoſizioni, e lo ſcolio anneſſo al corollario V. di eſſe.

II. Che i primi due termini delle proporzionalità traſcendenti (1), (2), (3), (4) ſono in iſtato analogo riſpetto ai due ultimi; e che i quattro termini di ciaſcuna di eſſe proporzionalità, conſiderati tutti come poſitivi, coſtituiſcono una proporzionalità pura per la definizione XXXVI., e pe' teoremi XCVII., e XCVIII.; adunque le quattro proporzionalità traſcendenti ſuddette ſuſſiſtono pel corollario IV. della definizione XLIV.. E il teorema è dimoſtrato in tutte le ſue parti.

COROLLARIO I.

DA queſto teorema poſſono dedurſi conſeguenze ſimili a quelle de' corollarj de' teoremi XCVII., e XCVIII., e degli ſcolj anneſſi ai medeſimi corollarj.

COROLLARIO II.

COn ſimigliante maniera ſi potrà dimoſtrare anche per l'algoritmo *comune* un teorema ſimiliſſimo al preſente. Av-

AVVERTIMENTO.

Siccome in questo trattato io non mi sono valsuto del metodo degli *egualmente moltiplici*, così mi era dimenticato di dimostrare secondo i miei principj la definizione V., e VII. del quinto libro d' Euclide, che esprimono proprietà notabili delle proporzioni eguali, e disuguali; ò risoluto pertanto di aggiungere i due seguenti teoremi, che ne contengono le dimostrazioni.

TEOREMA CXC.

Sieno le quattro grandezze A, B, C, D, e denotino p, e q due numeri ad arbitrio, ma intieri, e positivi, che possono essere eguali tra loro, o disuguali (potendo in oltre p, e q significare anche l' unità); se le quattro grandezze pA, qB, pC, qD sono tali, che essendo la prima pA eguale, ovvero maggiore, o minore della seconda qB, anche la terza pC sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore della quarta qD, e ciò sempre accada, qualunque sia il numero significato dalla p, e il numero denotato dalla q;

Io dico, che sussiste questa proporzionalità:

(1) $A.B::C.D$,

i due ultimi termini della quale non è necessario, che sieno omogenei ai due primi.

DIMOSTRAZIONE.

Se per impossibile la proporzionalità (1) non sussiste, prendasi pel postulato la grandezza V omogenea alla A tale, che abbiasi l' infrascritta proporzionalità:

(2) $V.B::C.D$,

e in virtù del corollario III. del teorema XII. sussisterà quest' altra proporzionalità:

(3) $pV.qB::pC.qD$.

Designando con la lettera O la differenza, che passa tra la A, e la V, si avrà la A eguale ad $V\pm O$, cioè ad $V+O$, se A è maggiore di V, e ad $V-O$, se A è minore di V.

Laonde pA sarà eguale a $p(V\pm O)$, comprendendo ambidue

due i casi in una sola espressione, e pe' corollarj XXII., e XXVII. de' principj, sarà parimente pA eguale a $pV \pm pO$.

Dopo queste premesse facciasi denotare dalle lettere p, e q numeri tali, che pO sia sempre maggiore di B, e qB sia prossimamente *maggiore* di pV, quando il segno doppio $\pm$ significa $+$, ma qB sia prossimamente *minore* di pV, quando $\pm$ significa $-$; il che è possibile, attesa la libertà, che si à di prendere il numero p grande quanto si vuole, donde poi siegue la determinazione del numero q, secondo l'esigenza di questa costruzione.

Sarà pertanto $pV+B$ *maggiore* di qB, o eguale a qB, quando $\pm$ denota $+$; siccome $pV-B$ sarà *minore* di qB, o eguale qB, quando $\pm$ denota $-$;

Imperciocchè, acciò qB sia prossimamente *maggiore* di pV; allorchè $\pm$ è $+$, $qB-B$ esser dee *minore* di pV, o eguale a pV; laonde qB esser dee *minore* di $pV+B$, o eguale a $pV+B$, vale a dire $pV+B$ esser dee *maggiore* di qB, o eguale a qB, allorchè $\pm$ è $+$.

E similmente, affinchè qB sia prossimamente *minore* di pV, allorchè $\pm$ è $-$, $qB+B$ deve esser *maggiore* di pV, o eguale a pV, e per conseguenza qB deve esser *maggiore* di $pV-B$, o eguale a $pV-B$, vale a dire $pV-B$ deve esser *minore* di qB, o eguale a qB, allorchè $\pm$ è $-$.

Essendosi dunque provato, che quando $\pm$ denota $+$, $pV+B$ è maggiore di qB, o eguale a qB, è visibile, che allora $pV+pO$ sarà *maggiore* di qB; ed essendosi eziandio provato, che quando $\pm$ denota $-$, $pV-B$ è minore di qB, o eguale a qB, e del pari manifesto, che allora $pV-pO$ sarà *minore* di qB; mentre secondo la costruzione pO è sempre maggiore di B in qualunque modo si prenda il segno $\pm$. Ora in virtù della proporzionalità (3), che nasce dalla supposta proporzionalità (2), e dal corollario X. de' principj, se pV è uguale, ovvero maggiore, o minore di qB, anche pC è uguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di qD;

Adunque rimanendo ferma la costruzione già fatta, si vede, che nelle quattro grandezze infrascritte

$(pV \pm pO)$, qB, pC, qD può

può accadere, allorchè il segno $\pm$ significa $+$, che la prima ($pV \pm pO$), cioè pA sia *maggiore* della seconda qB, e la terza pC sia *minore* della quarta qD; attesochè nella costruzione qB si è fatta prossimamente maggiore di pV, cioè pV si è fatta minore di qB (donde provasi come sopra, che pC è minore di qD), e nientedimeno si è dimostrato, che ($pV + pO$), vale a dire pA, è maggiore di qB.

E può ancora accadere, allorchè il segno $\pm$ significa $-$, che la prima ($pV - pO$), cioè pA, sia minore della seconda qB, e la terza pC sia *maggiore* della quarta qD; poichè qB nella costruzione si è fatta prossimamente minore di pV, cioè pV si è fatta maggiore di qB (donde si prova come sopra, che pC è maggiore di qD), e ciò non ostante si è dimostrato, che ($pV - pO$), vale a dire pA, è minore di qB.

Ma tutto ciò rovescia l'ipotesi, la quale esige, che se pA, cioè ($pV \pm pO$) è uguale, ovvero maggiore, o minore di qB, anche pC sia eguale, ovvero respettivamente maggiore, o minore di qD, e che ciò sempre avvenga qualunque sia il numero significato dalla p, e il numero denotato dalla q; adunque la A non può essere eguale ad $V + O$, ne ad $V - O$, vale a dire la A non può essere nè maggiore, nè minore di V, cui è omogenea, e conseguentemente la A è uguale alla V; e la supposta differenza tra la A, e la V è nulla;

Quindi è, che sostituendo nella proporzionalità (2) in vece di V la A, che gli è stata provata eguale, si vedrà sussistere la proporzionalità (1) in virtù del corollario IX. de' principj. Il che dovea dimostrarsi.

Questo teorema comprende, e dimostra la definizione V. del V. libro d'Euclide.

Corollario.

Continui tanto la p, quanto la q a significar numeri come sopra;

Io dico in primo luogo, che se la proporzione $\frac{A}{B}$ è maggiore della proporzione $\frac{C}{D}$, la p, e la q potranno designare numeri tali, che pA sia maggiore di qB, e pC sia minore di qD;

Io dico in secondo luogo, che se la proporzione $\frac{A}{B}$ è minore della proporzione $\frac{C}{D}$, la p, e la q potranno denotare numeri tali, che pA sia minore di qB, e pC sia maggiore di qD;

Imperciocchè assumendo pel postulato la V omogenea alla A, e tale, che abbiasi $\frac{V}{B}=\frac{C}{D}$, sarà pel corollario VI. del teorema II. $\frac{A}{B}$ maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{V}{B}$ (così piacemi d'esprimere ambedue le parti del presente corollario); onde in virtù del corollario XVI. de' principj A sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di V, perlocchè chiamando O la differenza, che passa tra la A, e la V, la medesima A sarà eguale ad $V \pm O$, cioè ad $V+O$ nel caso di $\frac{A}{B}$ maggiore di $\frac{C}{D}$, e ad $V-O$ nel caso di $\frac{A}{B}$ minore di $\frac{C}{D}$.

Procedendo dunque come si è fatto nella dimostrazione di questo teorema, si mostrerà, che pA è uguale a $(pV+pO)$ nel primo caso, e che pA è uguale a $(pV-pO)$ nel secondo caso.

Indi si proverà potersi denotare dalla p, e dalla q numeri tali, che $(pV \pm pO)$, cioè pA sia maggiore di qB, e pC sia minore di qD.

E si proverà similmente potersi designare dalla p, e dalla q numeri tali, che $(pV-pO)$, cioè pA sia minore di qB, e pC sia maggiore di qD. Il che dovea dimostrarsi in questo corollario.

TEOREMA CXCI.

Sieno due proporzioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ tali, che significando p, e q due numeri, come nel precedente teorema, pA sia maggiore, ovvero minore di qB, e pC non sia maggiore, ovvero respettivamente non sia minore di qD;

Io dico, che la proporzione $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore della proporzione $\frac{C}{D}$.

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

Si pigli, pel postulato, la grandezza X omogenea alla C in modo, che $\frac{A}{B}$ sia eguale ad $\frac{X}{D}$, e pel corollario III. del teorema XII. sarà $\frac{pA}{qB} = \frac{pX}{qD}$; laonde pel corollario X. de' principj sarà ancora pX maggiore, ovvero respettivamente minore di qD; secondo, che pA è maggiore, ovvero minore di qB, ma per l' ipotesi, mentre pA è maggiore, ovvero minore di qB, la pC non è maggiore, ovvero respettivamente non è minore di qD; adunque mentre pX sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di qD, la pC non sarà maggiore, ovvero respettivamente non sarà minore di qD, e in conseguenza pX sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di pC; perlocchè in vigore dell' assioma III., la X sarà maggiore, ovvero respettivamente minore di C, e pel corollario XVII. de' principj la proporzione $\frac{X}{D}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore della proporzione $\frac{C}{D}$, ma per la costruzione la proporzione $\frac{A}{B}$ è uguale alla proporzione $\frac{X}{D}$; adunque pel corollario VI. del teorema II. la proporzione $\frac{A}{B}$ sarà maggiore, ovvero respettivamente minore della proporzione $\frac{C}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

Questo teorema comprende, e dimostra la definizione VII. del V. libro d' Euclide.

Altra dimostrazione del presente teorema.

I. Per la definizione XXIII., e pel teorema XXII. la proporzione $\frac{A}{qB}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{pA}$, e $\frac{pA}{qB}$, siccome la proporzione $\frac{C}{qD}$ è composta delle due proporzioni $\frac{C}{pC}$, e $\frac{pC}{qD}$, ma pel corollario del teorema X. la proporzione $\frac{A}{pA}$ è uguale alla proporzione $\frac{C}{pC}$; adunque pel teorema XXIV. si ha questa proporzionalità:

$$\frac{A}{qB} \cdot \frac{C}{qD} :: \frac{pA}{qB} \cdot \frac{pC}{qD},$$

ora

ora pel corollario XV. del teorema II. $\frac{pA}{qB}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{pC}{qD}$ (poichè si suppone pA maggiore, ovvero minore di qB, e pC non maggiore, ovvero respettivamente non minore di qD); adunque pél corollario X. de' principj $\frac{A}{qB}$ è maggiore, ovvero respettivamente di minore $\frac{C}{qD}$.

II. Similmente per la definizione XXIII., e pel teorema XXII. $\frac{A}{B}$ è composta delle due proporzioni $\frac{A}{qB}$, e $\frac{qB}{B}$, siccome $\frac{C}{D}$ è composta delle due proporzioni $\frac{C}{qD}$, e $\frac{qD}{D}$; ma pel corollario XIII. de' principj $\frac{qB}{B}$ è uguale a $\frac{qD}{D}$; adunque pel teorema XXIV. si à l' infrascritta proporzionalità:

$$\frac{A}{B} . \frac{C}{D} :: \frac{A}{qB} . \frac{C}{qD},$$

ed essendosi provato nel primo punto, che $\frac{A}{qB}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{C}{qD}$, ne siegue pel corollario X. de' principj, che $\frac{A}{B}$ è maggiore, ovvero respettivamente minore di $\frac{C}{D}$. Il che dovea dimostrarsi.

APPLICAZIONE
DELL' ALGORITMO NUOVO

Alla resoluzione analitica dell' equazioni del secondo, del terzo, e del quarto grado.

Giacchè ò posti i fondamenti dell' algoritmo *nuovo*, piacemi ora di farne veder l' uso nella resoluzione dell' equazioni quadrate, cubiche, e quadrato — quadrate.

Per meglio dunque far concepire, che l' algoritmo *nuovo* conduce alle medesime verità, che si trovano mediante l' algoritmo *comune*, io lascerò di valermi nella risoluzione dell' equazioni suddette di varj metodi da me scoperti, e mi servirò de' metodi usitati, che in questo caso sembrano più collimare al mio scopo; e per diffondermi meno, che sia possibile, supporrò il lettore istrutto ne' principj dell' analisi, e nella maniera d' operare algebraicamente, cosicchè sia disposto a ben comprendere gli articoli della seguente preparazione generale, i quali concernono l' algoritmo *nuovo*.

Preparazione Generale.

Primo. L' equazioni, che anno zero per secondo membro, possono ridursi ad avere nel loro primo termine la sola grandezza incognita senza miscela di grandezze cognite, come pure a non contenere veruna frazione, o alcuna grandezza affetta di segni radicali: e tutto ciò con maniere simili a quelle, che si usano nell' algoritmo *comune*.

Secondo. L' equazioni composte, il secondo membro delle quali è zero, e che anno il loro primo termine senza grandezze cognite, si suppongono prodotte da tante (e non più) equazioni lineari, quante unità contiene il numero, che espone il grado della dignità, a cui ascende la grandezza incognita

nel

nel primo termine di dette equazioni composte, e queste equazioni lineari debbono avere nel primo lor membro la grandezza incognita lineare con qualche grandezza cognita aggiunta, ovvero sottratta, oppure senza tale grandezza cognita, e nel loro secondo membro debbono aver zero.

In avvenire, quando si parlerà d'equazioni composte, s'intenderanno quelle, che anno il primo termine senza grandezze cognite.

Terzo. Le grandezze cognite, che si contengono nell'equazioni lineari espresse nel precedente articolo, ovvero respettivamente zero (se dette grandezze cognite non vi si contengono) sono le radici dell'equazioni composte, cioè sono i diversi valori della grandezza incognita, che nelle medesime equazioni lineari si contiene; purchè però le suddette grandezze cognite si prendano col segno mutato, vale a dire con quel segno, ch'esse avrebbero, se fossero trasportate nel secondo membro delle loro equazioni lineari.

Quarto. Queste radici dell'equazioni composte o sono grandezze *ordinarie* (positive, o negative), o sono grandezze *straordinarie* (positive, o negative), o sono un aggregato di grandezze *ordinarie* coi loro segni, e di grandezze *straordinarie* coi loro segni.

Quinto. Moltiplicando l'equazioni lineari fra loro in modo che ne risulti un'equazione composta di grado eguale a quella, che si vuol risolvere, si potrà osservare, che se l'equazioni lineari non contengono nelle loro espressioni grandezze *straordinarie*, esse producono un'equazione composta di tal natura, che tante sono in questa le variazioni *immediate* de' segni $+$, e $-$, ovvero $-$, e $+$ quante sono le sue radici positive, e tante sono le uniformità *immediate* de' segni $+$, e $+$, ovvero $-$, e $-$ quante le sue radici negative.

Sesto. E perchè i termini intermedj, che talora mancano nell'equazioni composte possono in esse fingersi come esistenti, ma affetti colla cifra 0, e possono reputarsi positivi, o negativi, come si vuole, ne segue, che la regola accennata nel precedente articolo per conoscere dalla difformità, o conformità

de'

de' ſegni *immediatamente conſecutivi* il numero delle radici poſitive, e delle negative concerne ancora il termine $+ox^n$, ovvero il termine $-ox^n$.

Settimo. Anzi ſe i due termini dell' equazione compoſta, in mezzo de' quali ſta collocato il termine mancante $\pm ox^n$, anno ambedue il medeſimo ſegno $+$, ovvero $-$, ciò ſarà indizio, che qualcuna delle radici dell' equazione compoſta contiene qualche grandezza *ſtraordinaria*;

Imperciocchè in queſta ſuppoſizione ponendo il termine deficiente $\pm ox^n$, ovvero $\mp ox^n$ tra quello, che deve immediatamente precederlo, e quello, che immediatamente dee ſeguirlo, ſi vede in $+bx^{n+1} \pm ox^n + lx^{n-1}$, ovvero in $-bx^{n+1} \mp ox^n - lx^{n-1}$ (b, ed l poſſono ſignificare anche l' unità naturale) ſi vede, dico, una diſpoſizione di ſegni, che indica due radici negative, quando nei ſegni doppi $\pm$, e $\mp$ vale il ſuperiore, e indica due radici poſitive, quando ne' ſegni doppi ſuddetti vale l' inferiore; adunque l' equazione compoſta avrebbe, e non avrebbe un numero certo di radici negative, e poſitive, il che ſarebbe contradditorio; convien pertanto attribuire tale aſſurdo a qualche grandezza *ſtraordinaria*, che entri in qualcuna delle radici, mentre non può naſcere dalle grandezze ordinarie.

Ottavo. Una grandezza poſitiva ſotto il ſegno radicale del ſecondo grado (la quale nell' algoritmo *nuovo* è una grandezza *ſtraordinaria*) non entra nell' eſpreſſione delle radici dell' equazioni del ſecondo, o del terzo grado (*ridotte* come ſi accenna nell' articolo I.) ſe non entra in due radici delle medeſime equazioni; e nelle due radici vi entra in maniera, che in una di eſſe radici la ſuddetta grandezzza *ſtraordinaria* è affetta col ſegno $+$, ovvero col ſegno $-$, e nell' altra radice la ſteſsa grandezza *ſtraordinaria* è affetta col ſegno contrario $-$, ovvero reſpettivamente $+$. Tutto queſto, acciò nell' equazioni del ſecondo, o del terzo grado *ridotte* non compariſca la grandezza *ſtraordinaria*, altrimenti le medeſime equazioni non ſareb-

reb-

rebbero *ridotte*. Per la stessa ragione nell'equazioni di maggior numero di dimensioni, vale a dire di più alto grado *ridotte*, quelle radici di esse, che contengono una grandezza *straordinaria*, debbono essere in numero pari, cioè o due, o quattro, o sei, ec. Nella metà poi del numero di sì fatte radici la grandezza *straordinaria* dev' essere affetta col segno +, ovvero —, e nell'altra metà dev' essere affetta col segno contrario —, ovvero respettivamente +.

Qui però si noti, che questo s' intende quando nell' espressione della radice d' un' equazione, v. g. del terzo grado, la grandezza *straordinaria* è contenuta una sola volta, e non quando essa vi si contiene due, o più volte, e in modo, che l' espressione della stessa radice sia un aggregato di più parti tali, che ciascuna parte stia sotto qualche segno radicale comune, mentre in simigliante caso la grandezza *straordinaria* può entrare, v. g. nell' espressione di tutte tre le radici dell' equazione cubica, esservi affetta con tali segni +, ovvero —, e starvi sotto tali segni radicali, che le tre equazioni lineari, le quali contengono le tre radici dell' equazione, venendo moltiplicate insieme, restituiscano l'equazione del terzo grado *ridotta*, e libera dalla grandezza *straordinaria*.

Quest' annotazione non potrà ben comprendersi se non con l' uso, essa à egualmente luogo nell' algoritmo *comune*.

Nono. L' equazioni composte (considerate, come prodotte dall' equazioni lineari moltiplicate insieme) se nel loro primo termine contengono la grandezza incognita elevata a qualunque dignità di grado *impari*, anno lo stesso primo termine affetto col segno + come nell' algoritmo *comune*; ma se nel loro primo termine contengono la grandezza incognita elevata a qualsisia dignità di grado *pari*, anno il medesimo primo termine affetto col segno —; tutto ciò in virtù de' teoremi CL., e CXLVI..

Decimo. Nell' equazioni composte, e ridotte, come si accenna nell' articolo I., il coefficiente cognito del secondo termine è uguale all' aggregato di tutte le radici dell' equazione, ma quest' aggregato è col segno *proprio*, se l' equazione è di gra-

grado *pari*, ed è col ſegno *mutato*, ſe l' equazione è di grado *impari*.

Il coefficiente cognito del terzo termine è uguale all' aggregato di tutti i prodotti delle radici preſe a due a due, e queſt' aggregato è col ſegno *proprio*, ſe l' equazione è di grado *pari*, ed è col ſegno mutaro, ſe l' equazione è di grado *impari*.

Il coefficiente cognito del quarto termine è uguale all' aggregato di tutti i prodotti delle radici preſe a tre a tre, ma queſt' aggregato è col ſegno *proprio*, ſe l' equazione è di grado *pari*, ed è col ſegno *mutato*, ſe l'equazione è di grado *impari*.

E ſimilmente, ec.

In fine, l' ultimo termine dell' equazione, che è intieramente cognito, è uguale al prodotto di tutte le radici dell' equazione, ma queſto prodotto è col ſegno *proprio*, ſe l' equazione è di grado *pari*, ed è col ſegno *mutato*, ſe l' equazione è di grado *impari*.

In queſto decimo articolo ò inteſo per *ſegno proprio* quel ſegno, che le radici dell' equazione anno per ſe ſteſſe, e che aver debbono ſecondo le leggi del *nuovo* algoritmo i diverſi prodotti, ec. delle radici medeſime formati a parte.

Undecimo. Se nell' equazione compoſta manca il ſecondo termine, ciò fa conoſcere, che le radici poſitive preſe inſieme ſono eguali alle radici negative preſe inſieme. Oppure nell' equazioni del ſecondo grado, che la radice poſitiva è uguale alla negativa; come anche nell' equazioni del terzo grado, che l' aggregato delle radici poſitive, ovvero negative, è uguale alla radice negativa, ovvero reſpettivamente alla radice poſitiva; e ſimilmente nell' equazioni di più alto grado, ec.

AVVERTIMENTO.

NE' due ſeguenti articoli ſi farà un perpetuo uſo delle ſeconde parti de' teoremi CXLIII., e CXLIV..

Duodecimo. Per togliere il ſecondo termine d' un' equazione compoſta di grado *impari* in vece della grandezza incognita, ſe ne concepiſca un' altra *diminuita*, ovvero *accreſciuta* del coefficiente cognito del ſecondo termine dell' equazione, diviſo ſo (detto coefficiente) pel numero, che indica la dignità, che ottiene la grandezza incognita nel primo termine; cioè *diminuita*, ſe il coefficiente del ſecondo termine è affetto col ſegno $+$, e *accreſciuta*, ſe il medeſimo ſecondo termine è affetto col ſegno $-$; indi pongaſi nell' equazione in luogo della grandezza incognita, e delle ſue dignità la nuova grandezza *diminuita*, ovvero *accreſciuta*, come ſopra, e reſpettivamente le dignità ſimili di eſſa così *diminuita*, ovvero *accreſciuta*, e ſi otterrà un' altra equazione, compoſta del medeſimo grado ſenza il ſecondo termine.

V. G. per togliere il ſecondo termine di queſt' equazione del terzo grado:

$$y^3 + 6ayy - 9aay - 12a^3 = o,$$

prendaſi $z - 2a = y$, e ſi avrà,

$$y^3 = z^3 - 6azz + 12aaz - 8a^3,$$

$$+6ayy = (+6a)(-yy) = (+6a)(-zz + 4az - 4aa),$$

cioè:

$$+6ayy = +6azz - 24aaz + 24a^3,$$

$$-9aay = (+9aa)(+y) = (+9aa)(+z - 2a),$$

cioè:

$$-9aay = -9aaz + 18a^3,$$

è $-12a^3 = -12a^3$,

donde riſulta

$y^3 + 6ayy - 9aay - 12a^3$ eguale a

$$z^3 + 21aaz + 22a^3 = o.$$

Decimoterzo. Ma per togliere il ſecondo termine d' un' equazione compoſta di grado *pari*, in vece della grandezza incognita, ſe ne prenda un' altra *diminuita*, ovvero *accreſciuta* del coefficiente cognito del ſecondo termine dell' equazione, diviſo (detto coefficiente) pel numero, che indica la dignità, che ottiene la grandezza incognita nel primo termine, cioè *diminuita*, ſe il coefficiente del ſecondo termine è affetto col ſegno $-$, e *accreſciuta*, ſe il coefficiente del medeſimo ſecondo termine è affetto col ſegno $+$; ſi pongano poſcia nell' equazione in vece della grandezza incognita, e delle ſue dignità la nuova grandezza incognita *diminuita*, ovvero *accreſciuta*, come ſo-

sopra, e respettivamente le dignità simili di essa così *diminuita*, ovvero *accresciuta*, e ne verrà un' altra equazione del medesimo grado priva del secondo termine.

V. G. per togliere il secondo termine di quest' equazione del quarto grado:

$$-y^4-16y^3-71yy+4y+420=0,$$

si pigli $z-4=y$, e si avrà

$$-y^4=-z^4+16z^3-96zz+256z-256,$$

$$-16y^3=(+16)(+y^3)=(+16)(z^3-12zz+48z-64),$$

cioè:

$$-16y^3=-16z^3+192zz-768z+1024,$$

$$-71yy=(-71)(-yy)=(-71)(-zz+8z-16),$$

cioè:

$$-71yy=-71zz+568z-1136,$$

$$+4y=(-4)(+y)=(-4)(z-4),$$

cioè:

$$+4y=+4z-16,$$

$$+420=+420,$$

donde proviene

$$-y^4-16y^3-71yy+4y+420 \text{ eguale a}$$

$$-z^4+25zz+60z+36=0.$$

Resoluzione dell' equazioni quadrate, cioè del secondo grado, mediante l' algoritmo nuovo.

SI racchiudono tutte le equazioni quadrate in queste due formole:

$$(1)\quad -xx\mp 2nx+p=0,$$

$$(2)\quad -xx\mp 2nx-p=0,$$

le quali ne comprendono quattro per cagione del segno doppio $\mp$, che affetta il loro secondo termine.

Per risolvere la prima formola, si osservi, che la disposizione de' segni, fa conoscere in essa due radici, una positiva, ed una negativa in qualunque modo si prenda il segno $\mp$; rappresentando adunque la radice positiva con quest' equazione semplice:

$$(3)\quad x=\mp b+a,$$

e la

e la radice negativa con quest' altra:

(4) $x = \mp b - a$,

poichè a si suppone maggiore di b, si avranno quest' altre due equazioni semplici, cioè lineari:

$x \pm b - a = o$,

$x \pm b + a = o$,

e moltiplicandole insieme si avrà pe' teoreomi CXLIII., e CXLIV.:

$$(x \pm b)^2 + (x \pm b) a,$$
$$- (x \pm b) a + aa = o,$$

cioè pe' suddetti teoremi CXLIII., e CXLIV.:

$$- xx \mp 2 bx - bb = o,$$
$$+ aa.$$

Paragonando i secondi termini di quest' equazione, e della formola (1) si ottiene $b = n$.

Paragonando i terzi termini della medesima equazione, e della formola (1) si vede $- bb + aa = p$, cioè $- aa = - bb - p$, e ponendo in cambio di $- bb$ il suo valore $- nn$, si à $- aa = - nn - p$; ed estraendo di qua, e di là la radice quadrata positiva, si trova:

$a = \sqrt{- nn - p}$,

si surroghino nell' equazioni semplici (3), e (4) i valori di n, e di a, e si vedrà essere:

$x = \mp n + \sqrt{- nn - p}$,

il valore della radice positiva, ed

$x = \mp n - \sqrt{- nn - p}$,

il valore della radice negativa.

In ambedue l' ultime equazioni il segno doppio $\mp$ prende regola dal segno $\mp$ della prima formola.

Per risolvere la seconda formola (nella quale la disposizione de' segni mostra, che se $\mp$ è $-$ vi sono due radici negative, e se $\mp$ è $+$ vi sono due radici positive), si rappresentino le due radici con queste due equazioni lineari:

(5) $x = \mp a + b$,

(6) $x = \mp a - b$,

nelle quali b si suppone minore di a, quando b non sia grandezza *straordinaria*.

Dal-

Dalle ſteſſe equazioni lineari naſcono le due, che ſieguono:

$x \pm a - b = o$,

$x \pm a + b = o$,

e il prodotto di queſte è pe' teoremi CXLIII., e CXLIV.:

$$(x \pm a)^2 + (x \pm a)b, \\ - (x \pm a)b + bb = o,$$

cioè pe' citati due teoremi

$$-xx \mp 2ax - aa = o, \\ + bb$$

ſi confrontino i termini di queſt' equazione con quelli della formola (2), e la comparazione de' ſecondi moſtrerà $a = n$: il confronto de' terzi termini dà $-aa + bb = -p$, vale a dire $-bb = p - aa$, e ſoſtituendo $-nn$ in luogo del ſuo valore $-aa$ ſi conſeguiſce:

(7) $-bb = p - nn$,

ſi tiri dai due membri di queſt' equazione la radice quadrata poſitiva, e ſi ſcoprirà:

$b = \sqrt{p - nn}$: i valori di a, e di b poſti nell' equazioni (5), e (6) ſomminiſtrano:

(8) $x = \mp n + \sqrt{p - nn}$,

(9) $x = \mp n - \sqrt{p - nn}$,

pe' valori delle due radici della formola (2), nelle quali radici il valore del ſegno $\mp$ è regolato dal valore del ſegno $\mp$ della detta formola ſeconda.

Si noti, che ſe p è maggiore di nn, cioè ſe il terzo termine della formola (2) è maggiore del quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine, in queſto caſo $\sqrt{p - nn}$ è una grandezza *ſtraordinaria*, perchè $p - nn$ è una grandezza poſitiva. In queſto medeſimo caſo la radice ſeconda d' ambidue i membri dell' equazione (7) dee ſupporſi eſtratta mediante l' unità *poſitiva* in virtù del teorema CLXXXIV., e del ſuo corollario.

ESEMPJ.

Poſto che nella formola (2) il ſegno $\mp$ vaglia $+$, e ſia $2n = 2$, e $p = 2$, la ſteſſa formola ſi cangerà in queſt' equazione:

$-xx$

$-xx+2x-2=0$,

e l' equazioni (8), e (9) si muteranno respettivamente in quest' altre:

$x=1+\sqrt{+1}=1+|1|$,

$x=1-\sqrt{+1}=1-|1|$,

il numero $|1|$ tra le due linee è un numero *straordinario*, ovvero una unità *straordinaria*, onde $1+|1|$ non sarà 2, ed $1-|1|$ non sarà zero, in vigore del teorema CLXXXVIII., e del I. articolo dello scolio, che gli è annesso.

Ma se nella seconda formola il segno $\mp$ valerà $+$, e sarà $2n=8$, e $p=7$, la medesima formola si muta nella seguente equazione, le radici della quale non contengono grandezza *straordinaria*.

$-xx+8x-7=0$,

e l' equazioni (8), e (9), che esprimono le radici di essa diventano respettivamente:

$x=4+\sqrt{=9}=4+3=7$,

$x=4-\sqrt{=9}=4-3=1$.

Resoluzione dell' equazioni cubiche, cioè del terzo grado, mediante l' algoritmo nuovo.

PReparazione particolare per risolvere le dette equazioni cubiche.

Primo. Tutte l' equazioni cubiche, quando abbiano il secondo termine, possono ridursi mediante l' articolo XII. della preparazione generale ad altre equazioni cubiche prive del secondo termine; e quindi la resoluzione di queste trae seco la resoluzione di tutte le equazioni del terzo grado. Considerando pertanto l' equazioni cubiche mancanti del secondo termine, si vede, che esse possono ridursi tutte a queste due formole:

(1) $x^3+3px\pm 2q=0$,

(2) $x^3-3px\pm 2q=0$,

ciascuna delle quali ne comprende due per cagione del segno doppio $\pm$, che è affisso all' ultimo termine.

Secondo. Per conoscere, se in due delle radici di dette formole entri grandezza *straordinaria*, e in tal caso, se l' altra

ra-

radice (ove entrano le sole grandezze *ordinarie*) sia positiva, o negativa; oppure (quando tutte tre le radici di qualcuna dell' equazioni contenute nelle medesime formole sono libere da grandezza *straordinaria*) per conoscere se due di esse radici sono negative, e l' altra positiva, ovvero se due di esse sono positive, e l' altra negativa.

Si consideri, che mancando in ambedue queste formole il secondo termine, le due radici delle medesime, che sono positive, o sono in luogo di positive, debbono essere eguali alla radice negativa; ovvero le due radici, che sono negative, o sono in luogo di negative, esser debbono eguali alla radice positiva; e ciò in virtù dell' articolo XI. della preparazione generale.

Laonde siccome nella prima formola la disposizione de' segni fa conoscere per gli articoli V., e VI. della preparazione generale, che vi è una radice negativa, allorchè il segno $\pm$ si prende pel segno $+$, a cagione di $+3px$, e di $+2q$, e che nella stessa prima formola vi è una radice positiva, allorchè il segno $\pm$ si prende pel segno $-$, a cagione di $+3px$, e di $-2q$; e siccome ancora nella prima formola i due termini, tra i quali è il termine mancante, anno ambidue il medesimo segno, il che indica, che in due delle radici ci entra grandezza *straordinaria*, a tenore degli articoli VII., e VIII. della preparazione generale; così dee conchiudersi, che la prima formola à una radice negativa senza grandezza *straordinaria*, e due radici, nelle quali entra grandezza *straordinaria*, quando $\pm 2q$ significa $+2q$, e che la medesima prima formola à una radice positiva senza grandezza *straordinaria*, e due radici, nelle quali entra grandezza *straordinaria*, allora quando $\pm 2q$ significa $-2q$; dee parimente conchiudersi, che nel caso di $+2q$ la radice negativa libera da grandezza *straordinaria* dev' essere eguale nella prima formola alla somma dell' altre due radici, nella quale entra grandezza *straordinaria*, e che nel caso di $-2q$ la radice positiva libera da ogni grandezza *straordinaria* dev' essere eguale nella prima formola alla somma delle altre due radici, nelle quali entra grandezza *ſtraordinaria*; e ciò per cagione della mancanza del ſecondo termine, che in altra guiſa non mancherebbe.

Terzo. Ponendo nella ſeconda formola il termine mancante $\pm oxx$, la diſpoſizione de' ſegni fa conoſcere, che eſſa dovrebbe avere due radici poſitive, e una negativa, quando $\pm 2q$ denota $+2q$, e che dovrebbe avere due radici negative, e una poſitiva, allorchè $\pm 2q$ denota $-2q$.

Per conoſcere ſe la ſeconda formola abbia due radici, nelle quali entri grandezza *ſtraordinaria*, formiſi un' equazione cubica mancante del ſecondo termine con tre radici libere da grandezza *ſtraordinaria*, e queſte ſieno eſpreſſe nelle tre ſeguenti equazioni lineari: $x \mp f \pm g = o$; $x \mp f \mp g = o$; $x \pm 2f = o$.

Ne' ſegni doppj debbono prenderſi i ſuperiori, quando $\pm 2q$ eſprime $+2q$, e gl' inferiori, quando $\pm 2q$ denota $-2q$; ed f dee concepirſi maggiore di g; affinchè le due equazioni lineari $x \mp f \pm g = o$, ed $x \mp f \mp g = o$ eſprimano il valore delle due radici poſitive nel caſo, che $\pm 2q$ è uguale a $+2q$, e il valore delle due radici negative nel caſo, che $\pm 2q$ è uguale a $-2q$.

Si moltiplichino tra loro le tre equazioni lineari ſopranotate, oſſervando bene il tenore delle ſeconde parti de' teoremi CXLIII., e CXLIV., e ſi vedrà naſcere queſt' equazione cubica ſenza ſecondo termine:

$$(A)\quad \begin{array}{l} x^3 - 3ffx \pm 2f^3 = o, \\ \quad\;\; - ggx \mp 2ggf, \end{array}$$

l' iſpezione di cui fa conoſcere, qualmente ogni equazione cubica, che abbia tutte tre le radici libere da grandezza *ſtraordinaria*, e manchi del ſecondo termine *deve avere il terzo termine*, *e deve averlo neceſſariamente negativo*, la qual ſeconda oſſervazione conſerma ciò che ſi è detto nel ſecondo articolo di queſta preparazione particolare, che la prima formola à due radici, nelle quali entra grandezza *ſtraordinaria*, perchè il ſuo terzo termine è poſitivo. La prima oſſervazione poi moſtra, che un' equazione cubica, la quale manchi del ſecondo, e del terzo termine, à due radici, nelle quali entra grandezza *ſtraordinaria*.

Paragonando ora l' equazione (A) con la formola (2), la comparazione de' ſecondi termini moſtrerà: (B)

(B) $3ff+gg=3p$,

e la comparazione de' terzi termini darà:

$\pm 2f^3 \mp 2ggf = \pm 2q$,

cioè dividendo di qua, e di là per -2

(C) $\pm f^3 \mp ggf = \pm q$,

si cubi l' equazione (B), e osservando le leggi dell' algoritmo *nuovo*, stabilite in questo trattato, si avrà:

$27f^6 + 27ggf^4 + 9g^4ff + g^6 = 27p^3$,

cioè dividendo per -27

(D) $f^6 + ggf^4 + \frac{g^4ff}{3} + \frac{1}{27}g^6 = p^3$,

si quadrino i membri dell' equazione (C), e ne verrà secondo le leggi dell' algoritmo *nuovo*:

(E) $-f^6 + 2ggf^4 - g^4ff = -qq$,

si aggiungano le due equazioni (D), ed (E), e si otterrà:

(F) $3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = p^3 - qq$.

Per dimostrare, che p^3 è maggiore di qq quando la g non è uguale a zero (vale a dire quando la formola (2), e l' equazione (A) non anno due radici eguali) basterà provare, che il primo membro dell' equazione (F) è positivo, poichè ne seguirà, che anche il secondo membro p^3-qq sarà positivo, cioè che p^3 sarà maggiore di qq. E per dimostrare, che il primo membro dell' equazione (F) è positivo, basterà provare, che $3ggf^4$ è maggiore di $+\frac{2}{3}g^4ff$, il che si farà nel seguente modo:

Egli è visibile, che $3f$ è maggiore di $\frac{2}{3}g$, essendosi supposto f maggiore di g, e per conseguenza maggiore di $g-\frac{1}{3}g$, che è uguale a $\frac{2}{3}g$; adunque moltiplicando $3f$ maggiore per f maggiore, e $\frac{2}{3}g$ minore per g minore il prodotto $-3ff$ sarà maggiore del prodotto $-\frac{2}{3}g$ pel teorema CLVIII., e poscia moltiplicando per $ggff$ la grandezza $-3ff$ maggiore, e la grandezza $-\frac{2}{3}gg$ minore, ne risulterà pel corollario del teorema CLV., $3ffggff$ maggiore di $\frac{2}{3}g4ff$, ma pel teorema CLXXVI., e pel primo articolo dello scolio, che gli è annesso, so, $3ffggff$ è uguale a $3ggf^4$; adunque $3ggf^4$ è maggiore di $\frac{2}{3}ggggff$.

Rimane adunque dimostrato anche nell'algoritmo *nuovo*, che quando un'equazione cubica mancante del secondo termine à tre radici tra loro disuguali, e libere da grandezza *straordinaria*, p^3 è maggiore di qq, cioè il cubo della terza parte del coefficiente del terzo termine è maggiore del quadrato della metà del quarto termine.

Dimodochè quando la formola (2) non abbia due radici eguali, se il cubo della terza parte del coefficiente del suo terzo termine non è maggiore del quadrato della metà del suo quarto termine, dee conchiudersi, che la medesima formola (2) à due radici nelle quali entra grandezza *straordinaria*, tali però, che la loro somma è uguale all'altra radice, che è libera da grandezza *straordinaria*, e questo per cagione della deficienza del secondo termine, che in caso diverso non sarebbe mancante.

Risoluzione della prima formola, cioè di $x^3 + 3px \pm 2q = 0$.

Per l'articolo II. della preparazione particolare questa formola à due radici, nelle quali entra grandezza *straordinaria*, ed à una radice, ove non entra, la quale è negativa, quando $\pm 2q$ esprime $+2q$, ed è positiva, quando $\pm 2q$ significa $-2q$. Oltre di ciò l'aggregato delle due prime radici è uguale alla terza radice, che è libera da grandezza *straordinaria*.

Si prendano pertanto le tre equazioni lineari infrascritte: $x \mp a \pm \sqrt{3bb} = 0$, $x \mp a \mp \sqrt{3bb} = 0$, e $x \pm 2a = 0$.

Nelle due prime delle quali entra la grandezza *straordinaria* $\sqrt{3bb}$, e tutte tre sono tali, che l'aggregato de' tre valori di x da esse dedotti è uguale a zero. Avvertendo, che ne' segni doppj dee valere il superiore, quando $\pm 2q$ è $+2q$, e l'inferiore quando $\pm 2q$ è $-2q$.

Si moltiplichi $x \mp a \pm \sqrt{3bb} = 0$ per $x \mp a \mp \sqrt{3bb} = 0$, e pe' teoremi CXLIII., e CLXXVIII. si avrà:

(x

$$(x \mp a)^2 \mp (x \mp a)\sqrt{3bb},$$
$$\pm (x \mp a)\sqrt{3bb} - 3bb = 0,$$

cioè pe' teoremi CXLIII., e CXLIV.:

$$-xx \pm 2ax - aa = 0,$$
$$-3bb.$$

Indi si moltiplichi quest' ultima equazione per la terza equazione lineare $x \pm 2a = 0$, e si otterrà pe' teoremi CXLIII., e CXLIV.

$$x^3 \mp 2axx + aax + 3bbx,$$
$$\pm 2axx - 4aax \qquad \pm 2a^3 \pm 6abb = 0$$

cioè:

$$x^3 + 3bbx \pm 2a^3 = 0,$$
$$-3aax \pm 6abb,$$

equazione mancante del secondo termine, come la formola (1) da risolversi.

Si paragonino il terzo, e il quarto termine di questa equazione col terzo, e quarto termine respettivamente della prima formola:

$$x^3 + 3px \pm 2q = 0,$$

e ne verranno le due respettive equazioni, che sieguono:

$$3bb - 3aa = 3p,$$
$$\pm 2a^3 \pm 6abb = \pm 2q,$$

cioè dividendo la prima di queste per -3, e la seconda per ∓ 2:

(3) $bb - aa = p$,

(4) $a^3 + 3abb = q$;

e ciò pe' teoremi CXLVIII., CXLIX., CLII., e pel teorema CLXI., e il suo corollario.

Ora la prima delle due ultime equazioni cubata somministra:

$$b^6 - 3aab^4 + 3a^4bb - a^6 = p^3,$$

e la seconda di esse quadrata dà:

$$-a^6 - 6a^4bb - 9aab^4 = -qq,$$

tutto questo in vigore de' teoremi CXLIII., e CXLIV..

Dalla penultima equazione sottraggasi l' ultima, e si troverà:

$$b^6 + 6aab^4 + 9a^4bb = p^3 + qq,$$

cioè:

$-b^6 - 6aab^4 - 9a^4bb = -qq - p^3$,

estraggasi dall'uno, e dall'altro membro la radice quadrata, e pel corollario II. del teorema CLIX. ne risulterà:

(5) $b^3 + 3aab = \sqrt{-qq-p^3}$,

dovendosi avvertire, che nell' algoritmo *nuovo* $\sqrt{-qq-p^3}$ è una grandezza ordinaria.

Aggiungasi l'equazione (4) all' equazione (5), e ne nascerà:

$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 = q + \sqrt{-qq-p^3}$,

si estragga di qua, e di là la radice cubica, e pel corollario II. del teorema CLIX. si vedrà essere:

(6) $a+b = \sqrt[3]{q+\sqrt{-qq-p^3}}$,

sottraggasi l'equazione (5) dell'equazione (4), e ne deriverà:

$a^3 - 3aab + 3abb - b^3 = +q - \sqrt{-qq-p^3}$,

estraggasi di qua, e di là la radice cubica, e si scoprirà:

(7) $a-b = \sqrt[3]{q-\sqrt{-qq-p^3}}$,

si aggiungano le due equazioni (6), e (7), e finalmente si conoscerà:

(8) $2a = \sqrt[3]{q+\sqrt{-qq-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{-qq-p^3}}$,

il qual valore di $2a$ preso *negativamente*, quando nella prima formola $\pm 2q$ significa $+2q$, e preso *positivamente*, quando $\pm 2q$ significa $-2q$, è uguale a quella radice della prima formola, che è libera da grandezza *straordinaria*; e l'espressione di questa radice è analoga a quella del Cardano.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $x^3 + 6x - 2 = 0$, che spetta alla prima formola; adunque $p = 2$, $q = 1$, e $\sqrt{-qq-p^3} = \sqrt{-9}$, e perciò $x = 2a\sqrt[3]{1+\sqrt{-9}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{-9}}$; ma nell' algoritmo *nuovo* $\pm\sqrt{-9}$ è uguale a ± 3; adunque $x = \sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3} = \sqrt[3]{+4} + \sqrt[3]{-2}$.

Chi volesse il valore di $2a$ sotto un' altra espressione differenrente da quella, che si vede nell' equazione (8), divida per $a+b$ l' equazione (3), cioè $bb-aa=p$, e osservando le leggi dell' algoritmo *nuovo*, ec. troverà quest' altra equazione, come si comproverà calcolando

$$a-b=-p:(a+b),$$

nel secondo membro della quale, ponendo in cambio di $a+b$ il suo valore tratto dall' equazione (6), si avrà

$$(9)\ a-b=-p:\sqrt[3]{q-\sqrt{-qq-p^3}}$$

che è un' espressione di $a-b$ differente in apparenza da quella dell' equazione (7), ed à il vantaggio di non aver bisogno d' un' altra estrazione di radice cubica diversa da quella, che l' equazione (6) esige.

Si aggiungono l' equazioni (6), e (9), e si otterrà

$$2a=\sqrt[3]{q+\sqrt{-qq-p^3}}-p:\sqrt[3]{q+\sqrt{-qq-p^3}}.$$

SCOLIO.

DAll' equazione (7), e (9) si deduce quest' altra equazione:

$$\sqrt[3]{q-\sqrt{-qq-p^3}}=-p:\sqrt[3]{q+\sqrt{-qq-p^3}};$$

imperciocchè cubandola si à pel corollario IV. del teorema CLXIV.

$$(10)\ q-\sqrt{-qq-p^3}=-p^3:(q+\sqrt{-qq-p^3}).$$

Facciasi $-A=-qq-p^3$, cioè $A=qq+p^3$, e l' equazione (10) diverrà

$$q-\sqrt{-A}=-p^3:(q+\sqrt{-A})$$

i due membri di quest' equazione moltiplicati per $(q+\sqrt{-A}$ grandezza positiva, danno $-qq+A=p^3$; e ciò pe' teoremi CXLIII., CXLIV., e CLXXIX.

E finalmente ponendo nell' ultima equazione in luogo di A il suo valore $qq+p^3$, si avrà $-qq+qq+p^3=p^3$, cioè $p^3=p^3$, equazione identica.

Con maniera non dissimile si proverebbe, che quest' equazione

$$\sqrt[3]{q+\sqrt{-qq-p^3}}=p:\sqrt[3]{q-\sqrt{-qq-p^3}}$$

si

si riduce ad un' equazione identica, poichè essa si ridurrebbe similmente a quest' altra:

$$q + \sqrt{-A} = p^3 : (q - \sqrt{-A})$$

che moltiplicata per la grandezza negativa $(q - \sqrt{-A})$ darebbe in virtù dei citati teoremi CXLIII., CXLIV., e CLXXIX., darebbe, dico, $-qq + A = p^3$, ec.

Resoluzione della seconda formola dell' equazioni cubiche, cioè di $x^3 - 3px \pm 2q = 0$, quando p^3 è minore di qq.

IN questo caso la seconda formola à due radici, nelle quali entra grandezza *straordinaria*, ed à una radice, che ne è libera; questa è negativa allorchè $\pm 2q$ è $+2q$, ed è positiva allorchè $\pm 2q$ è $-2q$, e l' aggregato delle due prime radici è uguale alla terza radice, in cui non entra grandezza *straordinaria*: Tutto ciò per l' articolo III. della preparazione particolare;

Laonde si prendano le tre equazioni lineari $x \mp a \pm \sqrt{3bb} = 0$, $x \mp a \mp \sqrt{3bb} = 0$, ed $x \pm 2a = 0$, come si è fatto nella resoluzione della prima formola, e moltiplicandole insieme si avrà similmente

$$\begin{aligned} x^3 + 3bbx \pm 2a^3 &= 0 \\ -3aax \pm 6abb&, \end{aligned}$$

dovendosi parimente nei segni doppj far valere il superiore quando $\pm 2q$ è $+2q$, e l' inferiore quando $\pm 2q$ è $-2q$.

Il terzo, e il quarto termine di quest' ultima equazione, paragonati respettivamente col terzo, e col quarto termine della seconda formola, danno queste due respettive equazioni: $3bb - 3aa = -3p$, e $\pm 2a^3 \pm 6abb = \pm 2q$, dalla prima delle quali divisa per -3 risulta:

$bb - aa = -p$, cioè

(11) $aa - bb = p$,

e dalla seconda divisa per ∓ 2 si à

(12) $a^3 + 3abb = q$:

Tutto questo pe' teoremi CXLVIII., CXLIX., CLII., e pel teorema CLXI., e il suo corollario.

Cu-

Cubando pertanto l' equazione (11), e quadrando l' equazione (12), con osservare le leggi dell' algoritmo *nuovo*, si ottengono respettivamente queste altre due:

$$a^6 - 3bba^4 + 3b^4 aa - b^6 = p^3,$$

$$-a^6 - 6a^4 bb - 9aab^4 = -qq;$$

aggiungendo l' ultima equazione alla penultima si à

$$-b^6 - 6aab^4 - 9a^4 bb = p^3 - qq,$$

ed estraendo da ambedue i membri la radice quadrata, ne viene

$$(13)\quad b^3 + 3aab = \sqrt{p^3 - qq}:$$

Intanto si noti, che nella presente supposizione di p^3 minore di qq, la $\sqrt{p^3 - qq}$ è una grandezza ordinaria nell' algoritmo *nuovo*.

Aggiungendo poscia l' equazione (12) all' equazione (13) avremo

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 = q + \sqrt{p^3 - qq},$$

e tirando dall' uno, e l' altro membro la radice cubica

$$(14)\quad a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}};$$

ma sottraendo l' equazione (13) dall' equazione (12), troveremo

$$a^3 - 3aab + 3abb - b^3 = q - \sqrt{p^3 - qq},$$

e tirando anche da questa equazione la radice cubica

$$(15)\quad a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 - qq}},$$

le due equazioni (14), e (15) aggiunte insieme mostrano

$$(16)\quad 2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 - qq}},$$

e questo valore di $2a$ preso *negativamente*, quando $\pm 2q$ è $+2q$, e preso *positivamente*, quando $\pm 2q$ è $-2q$, sarà eguale a quella radice della seconda formola, che è libera da grandezza *straordinaria*.

ESEMPIO.

Sia l' equazione $x^3 - 12x - 20 = 0$, appartenente alla seconda formola; adunque $p = 4$, $q = 10$, e $\sqrt{p^3 - qq} = \sqrt{-36}$, e perciò

$$x = 2a = \sqrt[3]{10 + \sqrt{-36}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{-36}};$$

ma nell' algoritmo *nuovo* $\pm\sqrt{=36}$ è ± 6; adunque

$$x = \sqrt[3]{10+6} + \sqrt[3]{10-6},\ \text{cioè}\ x = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}.$$

Per trovare il valore di $2a$ sotto un' altra espressione diversa da quella, che trovasi nell' equazione (16), dividasi l' equazione (11), cioè $aa - bb = p$ per $a + b$, praticando le leggi dell' algoritmo *nuovo*, ec., e si conseguirà $b - a = -p : (a + b)$, conforme col mezzo del calcolo si potrà conoscere; e quindi se si surrogherà nell' ultima equazione il valore di $a + b$ desunto dall' equazione (14) ne verrà

$$(17)\quad b - a = -p : \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}},$$

e finalmente sottraendo l' equazione (17) dall' equazione (14) si troverà

$$(18)\quad 2a \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}} + p : \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}},$$

Maniera di trovare mediante l' algoritmo nuovo (*ma non senza grandezza* straordinaria) *l' espressione analitica* generale *della radice della seconda formola* $x^3 - 3px \pm 2q = 0$, *quando la medesima formola à tre radici ineguali, e tutte libere da grandezza* straordinaria.

ALlorchè p^3 è maggiore di qq, le tre radici della seconda formola sono ineguali, e libere da grandezza straordinaria, tali però, che due di esse sono positive, ed una negativa, se $\pm 2q$ esprime $+2q$, e due di esse sono negative, ed una positiva, se $\pm 2q$ denota $-2q$, e tali ancora, che nel primo caso la somma delle due radici positive è uguale alla radice negativa, e nel secondo caso la somma delle due radici negative è uguale alla radice positiva: Tutto questo in vigore di quanto si è osservato, e provato nell' articolo III. della preparazione particolare.

Ciò posto; le tre equazioni lineari

$x \mp a \pm \sqrt{-3bb} = 0$, $x \mp a \mp \sqrt{-3bb} = 0$, e $x \pm 2a = 0$, rappresenteranno le tre radici della seconda formola, le quali per conseguenza saranno senza grandezza *straordinaria*, perchè nell' algoritmo *nuovo* la $\sqrt{=3bb}$ è una grandezza *ordinaria*.

La

La prima di queste tre equazioni lineari moltiplicata per la seconda produce in virtù dei teoremi CXLIII., e CLXXIX.

$$(x \mp a)^2 \pm (x \mp a)\sqrt{-3bb}$$
$$\mp (x \mp a)\sqrt{-3bb} + 3bb = o,$$

cioè pe' teoremi CXLIII., e CXLIV.

$$-xx \pm 2ax - aa + 3bb = o,$$

e quest' ultima equazione moltiplicata per la terza equazione lineare $x \pm 2a = o$ dà a tenore dei due ultimamente allegati teoremi

$$\begin{array}{ll} x^3 \mp 2axx + aax - 3bbx & \\ \pm 2axx - 4aax & \pm 2a^3 \mp 6abb = o, \end{array}$$

cioè

$$\begin{array}{l} x^3 - 3aax \pm 2a^3 = o \\ \quad - 3bbx \mp 6abb. \end{array}$$

Paragonando adunque il terzo, e il quarto termine di questa equazione col terzo, e quarto termine respettivamente della seconda formola, ne vengono le due seguenti respettive equazioni:

$$-3aa - 3bb = -3p, \text{ e } \pm 2a^3 \mp 6abb = \pm 2q,$$

la prima delle quali divisa per -3, e la seconda divisa per ∓ 2 danno respettivamente

$$(19)\ aa + bb = p,$$
$$(20)\ a^3 - 3abb = q;$$

e questo pe' teoremi CXLVIII., e CLII.

La prima di queste due equazioni cubata, e la seconda quadrata somministrano le due respettive, che seguono, e ciò in virtù dei teoremi CXLIII., e CXLIV.

$$(21)\ a^6 + 3bba^4 + 3b^4aa + b^6 = p^3,$$
$$(22)\ -a^6 + 6a^4bb - 9aab^4 = -qq;$$

aggiungendo pertanto le due ultime equazioni si ottiene

$$b^6 - 6aab^4 + 9a^4bb = p^3 - qq,$$

cioè

$$-b^6 + 6aab^4 - 9a^4bb = qq - p^3,$$

e prendendo la radice quadrata d' ambedue i membri si à

$$(23)\ -b^3 + 3aab = \sqrt{qq - p^3};$$

aggiungasi l' equazione (23) all' equazione (20), e si troverà

$$a^3 + 3aab - 3abb - b^3 = q + \sqrt{qq - p^3};$$

ſottraggaſi l' equazione (23) dall' equazione (20), e ne verrà

$$a^3 - 3aab - 3abb + b^3 = q - \sqrt{qq - p^3};$$

ma le due ultime equazioni non ſono valevoli a far conoſcere il valore di $a+b$, e di $a-b$, perchè i primi membri di eſſe non ſono cubi reſpettivamente di $a+b$, e di $a-b$, oppure di $a-b$, e di $a+b$, e l' equazione (22) ſottratta dall' equazione (21) niente fa ſcoprire a propoſito, perchè ne proviene l' equazione

$$2a^6 - 3a^4bb + 12aab^4 + b^6 = p^3 + qq$$

di niun uſo pel mio intento;

Adunque anche nell' algoritmo *nuovo* queſto metodo laſcia irreſoluto il caſo *irredutibile*, vale a dire non dà l' eſpreſſione generale analitica (ſenza che vi entri grandezza *ſtraordinaria*) del valore di x appartenente alla ſeconda formola, allorchè p^3 è maggiore di qq, poichè queſto è il caſo, che chiamaſi *irredutibile*, non eſſendo ſtato riſoluto ſinora algebraicamente con eſpreſſione generale, e libera da grandezza *ſtraordinaria*, come ſi ſono riſoluti gli altri caſi della prima, e della ſeconda formola.

Per aver dunque l' eſpreſſione analitica di x nel caſo irredutibile (ma non libera da grandezza ſtraordinaria), ſi conſideri, che nell' algoritmo *nuovo* ſignificando con $-Z$ l' unità aſſunta, omogenea a $-a$, ed a $-b$, la $\pm b\sqrt{+Z}$ è una grandezza *ſtraordinaria*, e il cubo di $a \pm b\sqrt{+Z}$ è uguale a queſta eſpreſſione:

$$\text{(Q)} \quad a^3 \pm 3aab\sqrt{+Z} - 3abb \mp b^3\sqrt{+Z};$$

imperciocchè il quadrato di $a \pm b\sqrt{+Z}$ è

$$-aa \mp 2ab\sqrt{+Z} + bbZ$$

pe' teoremi CXLIV., CLXXXV., CLXXXVI., CLXXXVII., e CLXXX., ma pel teorema CLIII. la grandezza $+bbZ$ è uguale a $+bb$; adunque il quadrato di $a \pm b\sqrt{+Z}$ equivale a queſt' altra eſpreſſione

$$-aa \mp 2ab\sqrt{+Z} + bb,$$

la quale moltiplicata per $a \pm b\sqrt{+Z}$ produce in vigore dei teoremi CXLIII., CLXXXV., CLXXXVI., e CLXXXVII.

(R)

(R) $a^3 \pm 2aab\sqrt{\mp Z} - abb$,

$\pm aab\sqrt{\mp Z} \mp 2ab\sqrt{\mp Z} \times (\pm b\sqrt{\mp Z}) \mp b^3\sqrt{\mp Z}$.

Qui si rifletta, che $\mp 2ab\sqrt{\mp Z}$ equivale a $2a \times (\pm b\sqrt{\mp Z})$ pe' teoremi CXLIII., e CXLIV., e conseguentemente l' espressione $\mp 2ab\sqrt{\mp Z} \times (\pm b\sqrt{\mp Z})$ è uguale a quest' altra: $2a \times (\pm b\sqrt{\mp Z}) \times (\pm b\sqrt{\mp Z})$, che pel teorema CLXXX. equivale a $2a \times (bbZ)$, cioè a $-2abbZ$ pel teorema CXLIV., ma la grandezza $-2abbZ$ è uguale a $-2abb$ pel teorema CLIII.; adunque $\mp 2ab\sqrt{\mp Z} \times (\pm b\sqrt{\mp Z})$ è uguale a $-2abb$, e quindi l' espressione (R) equivale all' espressione (Q), a cui per conseguenza è uguale il cubo di $a \pm b\sqrt{\mp Z}$, il quale si è veduto essere eguale all' espressione (R).

Si moltiplichi ora ciascun membro dell' equazione (23) per $+\sqrt{\mp Z}$, e si avrà pe' teoremi CXLIII., CXLIV., e CLXXXV.

(24) $b^3\sqrt{\mp Z} - 3aab\sqrt{\mp Z} = -\sqrt{qq - p^3}\sqrt{\mp Z}$,

e si osservi, che il secondo membro di questa equazione è uguale a $-\sqrt{p^3 - qq}$; atteſochè, supponendo bb eguale alla grandezza positiva $(p^3 - qq)$, vale a dire $-bb$ eguale a $(qq - p^3)$, la $-b$, che è uguale a $-\sqrt{-bb}$, sarà eguale a $-\sqrt{qq - p^3}$; di modo che il secondo membro dell' equazione (24) equivalerà a $-b\sqrt{\mp Z}$, cioè a $-\sqrt{bbZ}$ pel teorema CLXXXII.; ma bbZ è uguale ad bb pel teorema CLIII.; adunque il secondo membro dell' equazione (24) sarà eguale a $-\sqrt{bb}$, cioè a $-\sqrt{p^3 - qq}$. Surrogando pertanto nell' equazione (24) in luogo del secondo membro l' espressione $-\sqrt{p^3 - qq}$, che gli equivale, ne nascerà

(25) $b^3\sqrt{\mp Z} - 3aab\sqrt{\mp Z} = -\sqrt{p^3 - qq}$;

e questa equazione, prima sottratta dall' equazione (20), e poi ad essa aggiunta, darà le due respettive equazioni seguenti:

$a^3 + 3aab\sqrt{\mp Z} - 3abb - b^3\sqrt{\mp Z} = q + \sqrt{p^3 - qq}$,

$a^3 - 3aab\sqrt{\mp Z} - 3abb + b^3\sqrt{\mp Z} = q - \sqrt{p^3 - qq}$,

si tiri da ambedue queste equazioni la radice cubica, e per quello, che si è mostrato di sopra, ne proverranno le due respettive equazioni infrascritte:

(26) $a + b\sqrt{\mp Z} = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}}$,

a —

$$a - b\sqrt{+z} = \sqrt[3]{p - \sqrt{p^3 - qq}},$$

le quali aggiunte mostreranno finalmente

$$(27)\quad 2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 - qq}},$$

ove $\sqrt{p^3 - qq}$, che nell' algoritmo *comune* è grandezza *ordinaria*, nell' algoritmo *nuovo* è grandezza *straordinaria*.

Il valore di $2a$, preso *negativamente*, rappresenta una radice della seconda formola nel caso *irredutibile*, quando $\pm 2q$ è $+2q$, e preso *positivamente*, rappresenta una radice della seconda formola nel caso irredutibile, quando $\pm 2q$ è $-2q$.

ESEMPJ.

Sia l' equazione $x^3 - 15x + 20 = 0$ spettante alla seconda formola; adunque $p = 5$, $q = 10$, e $\sqrt{p^3 - qq} = \sqrt{+25}$; laonde sarà $x = -2a = -\sqrt[3]{10 + \sqrt{+25}} - \sqrt[3]{10 - \sqrt{+25}}$;

Ma nell' algoritmo *nuovo* la $\sqrt{+25}$ è uguale al numero straordinario $|5|$; adunque $x = -\sqrt[3]{10 + |5|} - \sqrt[3]{10 - |5|}$; ma $10 - |5|$ non è 15, e $10 - |5|$ non è 5 pel teorema CLXXXVIII., e per lo scolio, che gli è annesso.

Sia in oltre l' equazione $x^3 - 6x - 4 = 0$, che appartiene alla seconda formola; adunque $p = 2$, $q = 2$, e $\sqrt{p^3 - qq} = \sqrt{+4}$; ma nell' algoritmo *nuovo* $\sqrt{+4}$ è uguale al numero *straordinario* $|2|$; adunque

$x = \sqrt[3]{2 + |2|} + \sqrt[3]{2 - |2|}$; ma $2 + |2|$ non è 4, e $2 - |2|$ non è zero per l' allegato teorema CLXXXVIII., e per lo scolio, che gli va annesso.

Un' altra espressione di $2a$, diversa da quella, che nell' equazione (27) è contenuta, potrà conseguirsi, dividendo l' equazione (19), cioè $aa + bb = p$ per $a + b\sqrt{+1}$, con osservare le leggi dell' algoritmo *nuovo*, ec. poichè si otterrà $-a + b\sqrt{+1} = -p:(a + b\sqrt{+1})$, come calcolando si renderà manifesto; e il valore di $a + b\sqrt{+1}$ preso dall' equazione (26), e introdotto nell' ultima, darà quest' altra:

(28)

(28) $-a+b\sqrt{-1}=-p:\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3-qq}}$,

che sottratta dall' equazione (26) farà scoprire

(29) $2a=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3-qq}}+p:\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3-qq}}$.

SCOLIO.

IN ordine alla proporzionalità, che convien concepire per formarsi l' idea del quoziente, che costituisce il secondo membro dell' equazione (28) si rifletta a quanto si è espresso nel secondo degli scolj annessi al corollario del teorema CLXXIX.

Altro Scolio.

I. DAl confronto dei secondi membri delle equazioni (16), e (18), come pure dal confronto dei secondi membri delle equazioni (27), e (29) si deduce l' infrascritta:

(30) $\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3-qq}}=p:\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3-qq}}$,

con questo, che p^3-qq è una grandezza *negativa* nelle equazioni (16), e (18), ed è una grandezza *positiva* nelle equazioni (27), e (29): In ambedue questi casi l' equazione (30) si riduce ad un' equazione identica;

Imperciocchè cubandola si ottiene pel corollario IV. del teorema CLXIV.

(31) $q-\sqrt{p^3-qq}=p^3:(q+\sqrt{p^3-qq})$:

Facendo ora $\mp A=p^3-qq$ (cioè $-A$ nel caso delle equazioni (16), e (18), in cui la grandezza p^3-qq è negativa, e $+A$ nel caso delle equazioni (27), e (29), in cui p^3-qq è grandezza negativa), l' equazione (31) diverrà

(32) $q-\sqrt{\mp A}=p^3:(q+\sqrt{\mp A})$,

dovendosi notare, che nel caso di $-A$ la grandezza $(q+\sqrt{-A})$ è negativa, e nel caso di $+A$ la grandezza $(q+\sqrt{+A})$ dee trattarsi come positiva, perchè niente contiene di negativo.

Si moltiplichi l' equazione (32) per $q+\sqrt{\mp A}$, e si vedrà essere

(33) $-qq\pm A=-p^3$,

e que-e questo pe' teoremi CXLIII., CXLIV., CLXXIX., e CLXXVIII.; ma essendosi supposto $\mp A = p^3 - qq$, ne segue $\pm A = qq - p^3$; adunque ponendo nell' equazione (33) in vece di $\pm A$, questo suo valore si conseguirà $-qq + qq - p^3 = -p^3$, vale a dire $-p^3 = -p^3$, equazione identica.

II. Con simigliante raziocinio si potrebbe provare, che nel caso dell' equazione (16), e (18) la seguente equazione:

$$\sqrt[4]{q + \sqrt{p^3 - q}} = p : \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 - qq}},$$

si risolve in un' equazione identica, dovendosi avvertire, che la grandezza $(q - \sqrt{p^3 - qq})$ è positiva, perchè nel caso delle equazioni (16), e (18) p^3 è minore di qq, di modo che $\sqrt{p^3 - qq}$ è minore di q.

III. Nel caso poi delle equazioni (27), e (29) la grandezza $(q - \sqrt{p^3 - qq})$ dovrebbe trattarsi come positiva, allorchè la $\sqrt{p^3 - qq}$ (*considerata come nell' algoritmo comune*) è minore di q; e la stessa espressione $(q - \sqrt{p^3 - qq})$ dovrebbe trattarsi come negativa, allorchè la $\sqrt{p^3 - qq}$ (*considerata come nell' algoritmo comune*) è maggiore di q;

Laonde su tal fondamento, raziocinando, come si è fatto nel primo articolo di questo scolio, potrebbe provarsi, che nel caso delle equazioni (27), e (29) l' infrascritta equazione:

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 - qq}} = \pm p : \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 - qq}},$$

si risolve in un' equazione identica, avvertendo, che quando $\sqrt{p^3 - qq}$ (*considerata come nell' algoritmo comune*) è minore di q, allora $\pm$ dee significare $+p$; e quando $\sqrt{p^3 - qq}$ (*considerata come nell' algoritmo comune*) è maggiore di q, allora $\pm p$ à da significare $-p$; di maniera che in virtù de' teoremi CXLIV., e CLXI. il quoziente $\pm p^3 : (q - \sqrt{p^3 - qq})$ moltiplicato per $(q - \sqrt{p^3 - qq})$ sarà sempre uguale a $-p^3$.

Il presente scolio, e lo scolio annesso alla resoluzione della prima formola delle equazioni cubiche serviranno per esercitare il lettore nell' algoritmo *nuovo*, e per comprovarne la giustezza.

Reso-

Resoluzione delle equazioni del quarto grado mediante l' algoritmo nuovo.

SUppongo, che l' equazioni del quarto grado sieno senza il secondo termine; perchè quando non ne fossero prive, potrebbero sempre ridursi ad altre equazioni del quarto grado senza il secondo termine, e ciò mediante l' articolo XIII. della preparazione generale.

Per comprendere in una sola formola tutte quante l' equazioni del quarto grado, io le rappresento generalissimamente nell' infrascritta:

$$(1) \quad -x^4 + pxx + qx + r = 0,$$

ove $+p$ esprime il coefficiente del terzo termine col suo segno, $+q$ denota il coefficiente del quarto termine col suo segno, e $+r$ esprime l' ultimo termine col suo *segno*; mentre per quanto si è esposto nell' articolo III. dello scolio annesso al corollario V. delle presupposizioni, il segno $+$ affisso ad una grandezza positiva, o negativa, non muta lo stato di detta grandezza.

Siccome, a tenore dell' articolo II. della preparazione generale, la formola, o sia equazione (1) si concepisce prodotta da quattro equazioni lineari, così io suppongo, che due di queste equazioni lineari sieno contenute in questa equazione del secondo grado:

$$(2) \quad -xx + yx + \begin{matrix} a \\ +b \end{matrix} = 0\,;$$

e che le altre due equazioni lineari si contengano in quest' altra equazione del secondo grado:

$$(3) \quad -xx - yx - \begin{matrix} a \\ -b \end{matrix} = 0\,:$$

tuttociò in virtù del citato articolo II. della preparazione generale, in virtù di cui un' equazione del secondo grado si concepisce prodotta da due equazioni lineari moltiplicate insieme:

Nelle equazioni (2), e (3) la y, la a, e la b designano grandezze indeterminate, le quali debbono determinarsi.

 Per

Per determinarle adunque si moltiplicheranno tra loro le equazioni (2), e (3), osservando le leggi dell' algoritmo *nuovo* (nelle quali suppongo istrutto ormai sufficientemente il lettore, senzachè io abbia ad accennarle di vantaggio), e si conseguirà questa equazione indeterminata del quarto grado priva del secondo termine:

$$(4)\quad \begin{array}{l} -x^4+2axx+2byx-aa=0 \\ \quad\ +yyxx \qquad\quad\ +bb, \end{array}$$

la quale suppongasi essere la medesima, che la formola (1), e in vigore di questa supposizione si paragonino i termini dell' una co' termini corrispondenti dell' altra. Si avrà per tanto, paragonando i terzi termini di ambedue,

$2a+yy=p$, cioè $2a=p-yy$, e dividendo l' uno, e l' altro membro per -2:

$$(5)\quad a=(p-yy):2,$$

col paragone dei quarti termini si ottiene $2by=q$, cioè $2yb=q$, e dividendo per $-2y$:

$$(6)\quad b=q:2y,$$

comparando in fine gli ultimi termini si trova:

$$(7)\quad -aa+bb=r:$$

si quadri ora l' equazione (5), la quale dà pel teorema CLXIV.

$$-aa=(-pp+2pyy-y^4):4;$$

si quadri ora l' equazione (6), che somministra pel detto teorema

$-bb=-(qq):4yy$, cioè $bb=(qq):4yy$,

i valori di aa, e di bb tratti dalle due ultime equazioni, e posti nell' equazione (7) fanno conoscere:

$$(8)\quad (-pp+2pyy-y^4):4+(qq):4yy=r;$$

ma l' espressione $(-pp+2pyy-y^4):4$ moltiplicata, e poi divisa per yy diviene $(-ppyy+2py^4-y^6):4yy$, e conserva ciò non ostante il suo pristino valore pel teorema CLXII., e pel suo corollario, e per la stessa ragione r è uguale a $(4ryy):4yy$; adunque sostituendo nell' equazione (8) grandezze eguali in luogo d' eguali, si conseguisce quest' altra:

$$(-ppyy+2py^4-y^6):4yy+(qq):(4yy)=(4ryy):(4yy),$$

che moltiplicata per $+4yy$ mostra

$$+ppyy-2py^4+y^6-qq=-4ryy,$$

e da

e da questa equazione ordinata a dovere si deduce:

$$(9).\ y^6 - 2py^4 + ppyy - qq = 0$$
$$+ 4ryy,$$

equazione *derivativa* del terzo grado, onde il valore di yy potrà ritrovarsi col metodo esposto per la resoluzione dell' equazioni cubiche, o con altro modo equivalente; indi dal valore di $-yy$ si trarrà la radice seconda, cioè il valore di $+y$, e questo si concepirà sostituito nelle equazioni (2), e (3) insieme col valore di yy, e con quello di a, e di b preso dalle respettive equazioni (5), e (6); cosicchè l' equazioni (2), e (3) diverranno respettivamente le seguenti:

$$(10)\ - xx + yx + (p - yy) : 2 + (q) : 2y = 0,$$
$$(11)\ - xx - yx + (p - yy) : 2 - (q) : 2y = 0,$$

nelle quali si lasciano y, ed yy in luogo delle loro espressioni, che sono troppo complesse.

Ciò fatto si estrarranno le due radici dell' equazione (10), e le due dell' equazione (11) col metodo già spiegato, e in tal guisa si avranno le quattro radici della formola.

Se alcuna delle lettere p, q, r, ovvero anche tutte rappresentassero grandezze negative, allora si muterebbero respettivamente nelle equazioni (9), (10), e (11) i segni delle medesime lettere p, q, r, ovvero di tutte, attesochè $+-$ equivale a $-$ per l' art. I. dello scolio annesso al coroll. V. delle presupposizioni; ma nell' equazione (9) non si muteranno i segni di $+pp$, e di $-qq$; perchè nell' algoritmo *nuovo* il quadrato di $+p$, ovvero di $-p$ è sempre $-pp$, e il quadrato di $+q$, ovvero di $-q$ è sempre $-qq$.

Se nella formola (1) mancasse anche il quarto termine $+qx$, essa in tal caso sarebbe un' equazione derivativa del secondo grado, e si risolverebbe con la maniera già data di risolvere l' equazioni quadrate, o con altra equivalente, ec.

Altra maniera di dedurre da questo metodo la resoluzione dell' equazioni del quarto grado, mediante l' algoritmo nuovo.

SE in vece di supporre le due equazioni (2), e (3) si supporrà questa sola equazione:

$(12)\ -xx+a=\pm(yx+b)$,

ſi avrà quadrandola:

$-x^4+2axx-aa=-yyxx-2byx-bb$,

e traſponendo, e ordinando ne verrà l' equazione (4); laonde il paragone del terzo termine dell' equazione (4) col terzo della formola (1) darà $2a+yy=p$,

vale a dire $-yy=2a-p$, cioè eſtraendo la radice quadrata:

$(13)\ y=\sqrt{2a-p}$,

dalla comparazione de' quarti termini dell' equazione (4), e della formola (1) riſulterà $2by=q$, cioè (dividendo per $-2y$) $b=q:2y$, e ponendo in luogo di y il ſuo valore teſtè trovato:

$(14)\ b=q:2\sqrt{2a-p}$,

in fine il confronto degli ultimi termini dell' equazione (4), e della formola (1) moſtreranno:

$-aa+bb=r$,

e ſoſtituendo in queſt' equazione in cambio di bb il ſuo valore $qq:(8a-4p)$ dedotto dall' equazione (14) ſi avrà:

$(15)\ -aa+qq:(8a-4p)=r$,

ma pel corollario II. del teorema CLXIV., $-aa$ è uguale a $-aa(8a-4p):(8a-4p)$, vale a dire:

$(16)\ -aa=(8a^3-4paa):(8a-4p)$,

come pure r è uguale ad $r\ (8a-4p):(8a-4p)$, cioè:

$(17)\ r=(-8ra+4pr):(8a-4p)$,

il tutto per la quarta parte del teorema CLXXXIX., e pel teorema LX.

Adunque, ſe ſi pongono nell' equazione (15) in luogo di $-aa$, e di r i loro valori preſi dalle reſpettive equazioni (16), e (17), ſi otterrà la ſeguente:

$(8a^3-4paa+qq):(8a-4p)=(-8ar+4pr):(8a-4p)$,

che moltiplicata per $-(8a-4p)$ ſomminiſtrerà queſt' altra:

$$(18)\ \begin{array}{l}8a^3-4paa+8ar+qq=0,\\ \qquad\qquad\quad -4pr.\end{array}$$

La reſoluzione di queſt' ultima equazione, che è del terzo grado, dà il valore della a, che per evitare la ſoverchia lunghezza, e confuſione dell' eſpreſſioni, ſi ſupporrà in avvenire come cognita.

Tra-

Traspongasi ora l' equazione (12), dopo aver surrogati in essa i valori di y, e di b presi dalle respettive equazioni (13), e (14), e si giungerà a quest' equazione:

$$(19)\quad -xx \mp x\sqrt{2a-p} + a \mp q : 2\sqrt{2a-p} = 0$$

che in virtù del doppio segno in essa contenuto equivale a due equazioni del secondo grado, e risoluta somministra i quattro valori di x, cioè le quattro radici della formola (1).

COROLLARIO.

SE nell' equazione (12) in cambio di a si fosse scritto $\frac{1}{2}c$, sarebbesi ottenuta in vece dell' equazione (18) la seguente:

$$(20)\quad c^3 - pcc + 4rc - 4pr + qq = 0,$$

e in luogo dell' equazione (19) sarebbesi conseguita quest' altra:

$$-xx \mp x\sqrt{c-p} + \frac{1}{2}c \mp q : 2\sqrt{c-p} = 0.$$

L' equazione (20) è più comoda a risolvere, che l' equazione (18).

SCOLIO.

I. SI deve avvertire, che chi volesse risolvere con l' algoritmo *comune* la formola (1), e paragonarne le resoluzioni con quelle, che io ò dedotte mediante l' algoritmo *nuovo*, dovrebbe trasporre la stessa formola (1), e cangiarla in questa:

$$x^4 - pxx - qx - r = 0.$$

I coefficienti generali del secondo, terzo, e quarto termine della quale anno prefisso il segno negativo; laddove i coefficienti generali de' medesimi termini della formola (1) sono dotati del segno positivo.

II. Chi poi volesse valersi del metodo, di cui mi sono servito, e applicarlo a risolvere con l' algoritmo *nuovo* quell' equazioni de' quarto grado, nelle quali esiste il secondo termine, dovrebbe introdurre nell' equazioni (2), (3), e (12) un' altra indeterminata, e in vece dell' equazione (2) prendere la seguente:

—

$$\begin{aligned} -xx+bx+a &= 0, \\ +yx+b&, \end{aligned}$$

in luogo dell' equazione (3) dovrebbe assumer questa:

$$\begin{aligned} -xx+bx+a &= 0, \\ -yx-b&, \end{aligned}$$

e in cambio dell' equazione (12) dovrebbe prendere quest' altra:

$$-xx+bx+a=\pm(yx+b),$$

indi operando nel debito modo, coerentemente alla prima maniera da me usata, troverebbe un' equazione derivativa del terzo grado, la quale avrebbe per incognita il quadrato di y.

Ma operando correlativamente alla seconda maniera, che pure ò qui tenuta, arriverebbe ad un' equazione del terzo grado, che avrebbe la a per incognita.

Tanto a me basta per far comprendere agl' intendenti, che l' algoritmo *nuovo* al pari dell' algoritmo *comune* è utile alle scienze, con questo di più, che istituendo i principj del *nuovo* algoritmo, parmi di aver scritto più nuovamente, e forse anche più ragionevolmente, che non è stato fatto finora in ordine a quella sorta di grandezze, che gli Analisti appellano *immaginarie pure*, la natura delle quali è uno de' misterj dell' Algebra.

APPENDICE PRIMA.

ESsendosi nella prefazione di questo trattato fatta menzione del supplemento dell' Autore al quinto libro d' Euclide, si è giudicato di doverlo qui inserire, acciò meglio possano i lettori paragonare il metodo degli egualmente moltiplici con quello delle aliquote simili per la spiegazione della natura, e proprietà delle proporzioni geometriche.

Supplemento al quinto libro d' Euclide.

BEnchè (*) il quinto libro d' Euclide, attribuito da alcuni ad Eudosso, maestro di Platone, sia una delle produzioni più ingegnose lasciateci dagli antichi; molti de' più celebri moderni non si sono per questo trattenuti d' impugnarlo. Troppo lungo sarebbe il riferire, e il ribattere le loro opposizioni, basterà solamente riflettere, che la definizione Euclidea della proporzionalità è forse più adattata d' ogni altra per comprendere in un solo, e sommamente uniforme concetto le proporzioni commensurabili, e le incommensurabili; laonde almeno per questo motivo meritarebbe a mio credere la considerazione de' geometri. In vano poi si è preteso da alcuni, che essa debba essere dimostrata; imperciocchè come definizion di nome deve aver luogo tra' principj, e per essa anno da dimostrarsi le altre passioni delle quantità proporzionali. Sono insigni tra queste le proprietà, che competono all' analogia in ordine alle aliquote simili de' conseguenti, ovvero degli antecedenti, ma non avendole altri dedotte, per quanto è a me noto, dal metodo degli egualmente moltiplici, ò io tentato di ciò fare nel presente scritto, che potrà forse supplire a quanto di essenziale manca in Euclide intorno la scienza elementare delle proporzioni.

De-

(*) Giornale de' letterati d'Italia tomo XXXVIII., parte prima, pag. 290.

DEFINIZIONI.

CHiamo una grandezza *b* aliquota di un' altra grandezza *A* quando la *b* è contenuta una volta, o un certo numero di volte, e senza resto in *A*. In questo senso ogni tutto è aliquota di se stesso; perchè è contenuto una volta, e senza resto in se medesimo.

Chiamo *b*, e *d* aliquote simili di *B*, e di *D*, quando la *b* è contenuta senza resto in *B* tante volte quanto la *d* è contenuta in *D*; in tal caso dico, che la *b* è aliquota simile di *B*, come la *d* di *D*. In questo senso qualsivoglia tutto è aliquota simile di se medesimo, come qualunque altro tutto la è di se stesso, cioè *B* è aliquota simile di *B*, come *D* di *D*.

POSTULATO.

DImando, che mi si conceda, che date tre grandezze *A*, *B*, *D*, può concepirsi un' altra grandezza *H* tale, che la proporzione di *A* a *B* sia eguale alla proporzione di *H* a *D*.

LEMMA.

POste due grandezze disuguali; io dico, che se si prenderà la metà della maggiore di esse, indi la metà di questa metà, e così successivamente si troverà in fine una parte della maggior grandezza, che sarà minore dell' altra grandezza. Questa proposizione, che potrebbe ancora postularsi, trovasi dimostrata nel commento del Commandino alla prima proposizione del X.

COROLLARIO.

COsa manifesta è, che la parte suddetta della quantità maggiore è un' aliquota di essa, e che le altre aliquote sue eguali si anno dividendo, e suddividendo successivamente ciascuna metà della grandezza maggiore, ec. purchè sia lo stesso il numero delle divisioni, e suddivisioni.

TEOREMA I.

SIeno le quattro grandezze proporzionali *A*, *B*, *C*, *D*: io dico,

dico, che se la prima di esse è uguale, maggiore, o minore della seconda, anche la terza è uguale, maggiore, o minore della quarta.

DIMOSTRAZIONE.

EGli è visibile, che se *A* è uguale, maggiore, o minore di *B*, anche 2*A* è uguale, maggiore, o minore di 2*B*. Ma per la supposta proporzionalità delle quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D*, e per la definizione V. del *V* se 2*A* è uguale, maggiore, o minore di 2*B*, anche 2*C* è uguale, maggiore, o minore di 2*D*;

Adunque se *A* è uguale, maggiore, o minore di *B*; 2*C* è uguale, maggiore, o minore di 2*D*. Ma è chiaro altresì, che se 2*C* è uguale, maggiore, o minore di 2*D*, anche *C* è uguale, maggiore, o minore di *D*; Adunque se *A* è uguale, maggiore, o minore di *B*; anche *C* è uguale, maggiore, o minore di *D*. *Q*. *E*. *D*.

TEOREMA II.

SIeno primieramente quattro grandezze *B*, *D*, *b*, *d* tali, che *b* sia aliquota simile di *B*, come *d* di *D*; io dico in primo luogo, che *B* è a *b*, come *D* a *d*. Sieno in oltre le altre due grandezze *E*, *F* tali, che la *b* sia aliquota simile della *E*, come la *d* della *F*; io dico in secondo luogo, che *B* sta ad *E*, come *D* ad *F*.

Dimostrazione della prima parte.

ESsendo *B*, e *D* egualmente moltiplici di *b*, e di *d*; anche le egualmente moltiplici di *B*, e di *D* sono egualmente moltiplici di *b*, e di *d* per la III. del V. Laonde se *n*, ed *m* significano in generale numeri intieri positivi, tutte le egualmente moltiplici di *B*, e di *D* si esprimeranno così: *nb*, *nd*, siccome *mb*, *md* rappresenteranno tutte le egualmente moltiplici di *b*, e di *d*, ma è manifesto, che se *nb* è uguale, maggiore, o minore di *mb*, anche *nd* è uguale, maggiore, o minore di *md*;

Imperciocchè intanto *nb* è uguale, maggiore, o minore di *mb*, in quanto il numero n è uguale, maggiore, o minore di m, e questa egualità, maggioranza, o minorità di n rispetto ad m fa essere nd eguale, maggiore, o minore di md. Adunque per la definizione V. del V. la B è alla b, come la D alla d. *Q*. *E*. primo *D*.

Dimostrazione della seconda parte.

LA b è alla b, come la d alla d, perchè si mostra come sopra, che se nb è uguale, maggiore, o minore di mb, anche nd è uguale, maggiore, o minore di md; ma per l'ipotesi B, D sono egualmente moltiplici della prima b, e della terza d, ed E, F sono egualmente moltiplici della seconda b, e della quarta d; adunque per la IV. del V. la B è alla E, come la D alla F. *Q*. *E*. secundo *D*.

SCOLIO.

DAl principio della dimostrazione della seconda parte di questo teorema evidentemente apparisce, che se B è uguale all' aliquota b, e D all' aliquota d, la proporzione di B a b, è uguale alla proporzione di D a d.

TEOREMA III.

SIeno le quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, e l' altre quattro grandezze b, e d, E, F tali, che b, e d sieno aliquote simili respettivamente de' due conseguenti B, e D, e anche di E, e di F; io dico primieramente, che se il primo antecedente A è uguale, o maggiore di E, anche il secondo antecedente C è uguale, o maggiore di F.

Io dico in secondo luogo, che se il resto A meno E è minore di b, anche il resto C meno F è minore di d.

Dimostrazione della prima parte.

PEr l' ipotesi A è a B, come C a D, e pel II. teorema B è ad E, come D ad F; adunque *ex æquo* per la XXII. del V. la A sta alla E, come la C alla F; e quindi pel I. teorema se A è uguale, o maggiore di E, anche C è uguale, o maggiore di F. *Q*. *E*. primo *D*.

Di-

Dimostrazione della seconda parte.

SI è già dimostrato nella prima parte di questo teorema, che la *A* è alla *E*, come la *C* alla *F*; adunque per la XVII. del V. il resto *A* meno *E* è ad *E*, come il resto *C* meno *F* è ad *F*. Ma per la prima parte del II. teorema *E* sta a *b*, come *F* a *d*.

Adunque *ex æquo* per la XXII. del V. il resto *A* meno *E* sta a *b*, come il resto *C* meno *F* a *d*, e perciò in vigore del I. teorema se il resto *A* meno *E* è minore di *b*, anche il resto *C* meno *F* è minore di *d*. *Q*. *E*. secundo *D*.

COROLLARIO I.

DA questo teorema chiaramente si deduce, che in qualunque proporzione eguale di *A* a *B*, e di *C* a *D*, gli antecedenti *A*, *C* contengono egualmente qualsivoglia aliquota de' conseguenti respettivi *B*, *D*, cosicchè se *b* aliquota di *B* misura esattamente la *A*, anche *d* aliquota di *D* misura esattamente, e un egual numero di volte la *C*, e se *b* è contenuta un certo numero di volte in *A* con di più un resto minore di se stessa, anche la *d* sarà contenuta un egual numero di volte in *C* con un resto minore di se medesima;

Imperciocchè rappresentando in virtù dell' ipotesi *B* per *nb*, *E* per *mb*, *D* per *nd*, *F* per *md*; si è mostrato nella prima parte del teorema, che se *A* è uguale ad *E*, cioè ad *mb*, anche *C* è uguale ad *F*, cioè ad *md*, e se *A* è maggiore di *E*, cioè di *mb*, anche *C* è maggiore di *F*, cioè di *md*. Nella seconda parte poi si è provato, che se il resto *A* meno *E*, cioè *A* meno *mb* è minore dell' aliquota *b*, anche il resto *C* meno *D*, cioè *C* meno *md* è minore anch' esso dell' aliquota *d*.

COROLLARIO II.

POichè stando la *B* alla *A*, come la *D* alla *C*, sta ancora convertendo pel corollario della IV. del V. la *A* alla *B*, come la *C* alla *D*, in maniera che gli antecedenti della prima proporzione divengono conseguenti della seconda, e i conseguenti della prima si mutano in antecedenti della seconda; egli è chiaro, che in qualunque proporzione eguale della *B* alla *A*, e della *D* alla *C*, i conseguenti *A*, *C* contengono egualmente qualunque aliquota simile *b*, *d* degli antecedenti respettivi *B*, e *D*, cioè con un resto, o senza, conforme si è spiegato distintamente nel precedente corollario, ove *B*, e *D* facevano figura di conseguenti, e *A*, e *C* d' antecedenti.

TEOREMA IV.

Sieno le tre proporzioni di *P* a *Q*, di *R* ad *S*, e di *T* ad *V* tali, che la prima proporzione sia maggiore della seconda, e la seconda eguale alla terza; io dico, che la prima proporzione sarà maggiore ancora della terza.

DIMOSTRAZIONE.

Tutte le egualmente moltiplici degli antecedenti *P*, *R*, *T* sieno rappresentate respettivamente da *nP*, *nR*, *nT*, e tutte le egualmente moltiplici de' conseguenti *Q*, *S*, *V* sieno espresse da *mQ*, *mS*, *mV*.

Ciò posto riflettasi, che essendosi supposta la proporzione di *P* a *Q* maggiore di quella di *R* ad *S*, si darà almeno un caso, che *nP* sarà maggiore di *mQ*, ma *nR* non sarà maggiore di *nS*, e ciò per la definizione VII. del V. Ma supponendosi in oltre la proporzione di *R* ad *S* eguale a quella di *T* ad *V*, ogni volta che *nR* non sarà maggiore di *mS*, nè anche *nT* sarà maggiore di *mV* per la definizione V. del V. Adunque si darà almeno un caso, che *nP* sarà maggiore di *mQ*, mentre *nT* non sarà maggiore di *mV*, e conseguentemente per la definizione VII. del V. la proporzione di *P* a *Q* è maggiore di quella di *T* ad *V*. *Q*. *E*. *D*.

TEOREMA V.

Abbia la *A* alla *B* maggior proporzione della *C* alla *D*; io dico darsi due aliquote simili *b*, e *d* de' conseguenti respettivi *B*, *D* tali, che il primo antecedente *A* contiene la *b* almeno una volta di più, che il secondo antecedente *C* non contiene la *d*.

DIMOSTRAZIONE.

SI concepiſca la grandezza *H*, che ſia alla *D*, come la *A* alla *B*; adunque eſſendoſi ſuppoſta la proporzione di *A* a *B* maggiore di quella di *C* a *D*, ſarà per la XIII. del V. la proporzione di *H* a *D* maggiore di quella di *C* a *D*, e per la X. del V. la *H* ſarà maggiore della *C*. Sia *Q* la differenza tra la *H*, e la *C*, e la *H* ſarà eguale alla ſomma di *C*, e di *Q*.

Dividaſi ora il ſecondo conſeguente *D* in due parti eguali, e ciaſcuna metà di eſsa in due parti eguali, e così ſucceſſivamente finchè ſi giunga a un' aliquota *d* di *D* tale, che non ſia maggiore di *Q* (il che è ſempre poſſibile pel lemma, e ſuo corollario) e poi dividaſi ſimilmente il primo conſeguente *B*, finchè ſi abbia l' aliquota *b* di *B* ſimile all' aliquota *d* di *D*.

Ciò fatto ſi conſideri, che eſsendo per l' ipoteſi la *A* alla *B*, come la *H* alla *D*, ed eſsendo per la coſtruzione *B* tanto moltiplice di *b*, quanto *D* di *d*, ne ſegue pel primo corollario del terzo teorema, che la *A* contiene tante volte la *b*, quante volte la *H* contiene la *d*. Ma per la coſtruzione la *d* non è maggiore di *Q*, e la *H* è uguale alla ſomma di *C*, e di *Q*. Adunque la *H* contiene la *d* almeno una volta più, che la *C* non contiene la medeſima *d*. Adunque anche la *A* contiene la *b* almeno una volta di più, che la *C* non contiene la *d*. *Q.E.D.*

TEOREMA VI.

SIeno le quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D* tali, che la proporzione di *A* a *B* non ſia maggiore della proporzione di *C* a *D*, e la proporzione di *C* a *D* non ſia maggiore della proporzione di *A* a *B*: Io dico, che la proporzione di *A* a *B* è uguale alla proporzione di *C* a *D*.

DIMOSTRAZIONE.

COncepiſcaſi, che la *H* ſtia alla *D*, come la *A* alla *B*; io moſtrerò in primo luogo, che la *H* è uguale alla *C* nella ſeguente maniera.

Sia

Sia primieramente (se è possibile) la *H* maggiore di *C*: Abbiamo supposto essere la *A* alla *B*, come la *H* alla *D*. Ma per l' VIII. del V. la proporzione della *H* alla *D* è maggiore della proporzione di *C* a *D*; adunque per la XIII. del V. la proporzione di *A* a *B* è maggiore della proporzione di *C* a *D*, il che è contro l' ipotesi.

Sia secondariamente (se ciò può essere) *H* minore di *C*; adunque per la VIII. del V. la proporzione di *C* a *D* è maggiore della proporzione di *H* a *D*, ma si è supposto, essere la *H* alla *D* come la *A* alla *B*; adunque pel quarto teorema la proporzione di *C* a *D* è maggiore di quella di *A* a *B*, il che distrugge nuovamente l' ipotesi, e quindi *H* non è minore di *C*, e per conseguenza la medesima *H* non essendo maggiore, nè minore di *C*, è uguale a *C*.

Ora per la supposizione la *A* sta alla *B* come la *H* alla *D*, e per la VII. del V. la *C* eguale alla *H* sta alla *D* come la medesima *H* alla *D*. Adunque per la XI. del V. la proporzione di *A* a *B* è uguale alla proporzione di *C* a *D*. *Q.E.D.*

Teorema VII.

Sieno le quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D*, e le altre due *b*, *d*, che rappresentino tutte le aliquote simili respettivamente della seconda *B*, e della quarta *D*; posto, che la prima *A* contenga tante volte la *b* con un resto minore di *b*, quante volte la terza *C* contiene la *d* con un resto minore di *d*, e che ciò sempre succeda: Io dico, che la proporzione di *A* a *B* è uguale alla proporzione di *C* a *D*.

Dimostrazione.

Primieramente la proporzione di *A* a *B* non è maggiore della proporzione di *C* a *D*; perchè se lo fosse, si darebbe pel quinto teorema una *b* aliquota di *B* simile alla *d* aliquota di *D*, e tale, che la *A* conterrebbe la medesima *b* almeno una volta di più, che la *C* non contiene la *d*; il che sarebbe contro l' ipotesi.

Secondariamente la proporzione di *C* a *D* non è maggiore

della

della proporzione di A a B; perchè se lo fosse si darebbe pel quinto teorema una d aliquota di D simile alla b aliquota di B, e tale, che la C conterrebbe la d almeno una volta di più, che la A non contiene la b, il che è parimente contro l'ipotesi. Adunque pel teorema VI. la proporzione di A a B è uguale alla proporzione di C a D. Q.E.D.

Corollario.

Poste le quattro grandezze B, A, D, C, e le altre due b, d rappresentanti tutte le aliquote simili respettivamente della prima B, e della terza D; se la seconda A conterrà tante volte la b con un resto minore di b, quante volte la quarta C contiene la d con un resto minore di d, la proporzione di B ad A sarà eguale alla proporzione di D a C; poichè mutando la disposizione delle prime quattro grandezze, e ordinandole così: A, B, C, D, l'ipotesi, e il presente teorema fanno conoscere, che la A sta alla B, come la C alla D; adunque pel corollario della IV. del V. si avrà convertendo la proporzione di B ad A eguale alla proporzione di D a C.

Teorema VIII.

Sieno le quattro grandezze A, B, C, D, e le altre due b, d, che esprimano tutte le aliquote simili respettivamente della seconda B, e della quarta D; se la prima A contiene una b maggior numero di volte, che la terza C non contiene una d; io dico, che la proporzione di A a B è maggiore della proporzione di C a D.

Avvertimento.

Questa proposizione, e la sua dimostrazione sussistono, ancorchè la A contenga la b un certo numero di volte, e di più un resto minore di b, e la C contenga la d un numero di volte, e di più un resto minore di d, e ancorchè la A contenga il resto di più, e la C non lo contenga, ovvero la C contenga il resto, e non lo contenga la A.

DIMOSTRAZIONE.

CONcepiſcaſi la grandezza *H*, che ſtia alla *D* come la *A* alla *B*, adunque pel primo corollario del terzo teorema la *H* contiene tante volte la *d*, quante volte la *A* contiene la *b*; ma per l' ipoteſi la *A* contiene la *b* maggior numero di volte, che la *C* non contiene la *d*; adunque la *H* contiene anch' eſſa più volte la *d*, che la *C* non contiene la medeſima *d*, e per conſeguenza *H* è maggiore di *C*, e quindi per la VIII. del V. à maggior proporzione la *H* alla *D*, che la *C* alla ſteſſa *D*. Adunque per la XIII. del V. la proporzione di *A* a *B* è maggiore della proporzione di *C* a *D*. *Q*. *E*. *D*.

APPENDICE SECONDA.

A' Voluto l' Autore nel presente trattato mostrar l' uso del suo nuovo algoritmo in ordine alla resoluzione analitica dell' equazioni del secondo, terzo, e quarto grado; e à giudicato a proposito di prevalersi a tale oggetto de' metodi usitati: Ma perchè egli à date fuori altre maniere di risolvere l' equazioni medesime, le quali sono di sua propria invenzione, si pensa, che non sarà discaro al lettore di vederle inserite in questo libro. Si danno esse pertanto come appunto l' Autore stesso le à pubblicate, cioè stese a tenore dell' Algoritmo *comune*, da cui sono rese più intelligibili a quelli, che non sono abbastanza versati nelle regole, e nella pratica del *nuovo*.

Due nuove maniere di risolvere algebraicamente l' equazioni quadratiche.

Prima Maniera.

Sia l' infrascritta (*) equazione (1) nella quale tanto a, quanto bb significano qualsivoglia quantità positiva, o negativa col suo segno.

(1) $xx + bb = ax$.

Si moltiplichi l' equazione (1) per questa frazione $\frac{2b}{a(xx+bb)}$, e si avrà $\frac{2b}{a} = \frac{2bx}{xx+bb}$, ovvero quadrando, e poi trasponendo $-\frac{4bb}{aa} = -\frac{4bbxx}{(xx+bb)^2}$, indi aggiungendo l' unità a ciascun membro di quest' ultima equazione si troverà dopo fatte le debite operazioni $1 - \frac{4bb}{aa} = \frac{x^4 - 2bbxx + b^4}{x^4 + 2bbxx + b^4}$, ed estraendo la radice quadrata

(2) $\pm\sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}} = \frac{xx - bb}{xx + bb}$, donde si deduce:

(*) Opuscoli Calogerà tomo XII., pag. 493.

$$(3)\ xx = bb\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}}\right] \text{ diviso per } \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}}\right],$$

e per conseguenza la radice vera dell' equazione (1) si trova essere

$$(4)\ x = b\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ diviso per } \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Scolio I.

I. Per conoscere se nel segno ambiguo debba prendersi il superiore, o l' inferiore, aggiungasi l' unità a ciascun membro dell' equazione (2), e ne risulterà:

$$(5)\ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}} = \frac{2xx}{xx + bb}.$$

Ora si consideri, che quando bb, ed a esprimono quantità positive, il secondo membro dell' equazione (5) è positivo, e il primo membro dell' istessa equazione (5) è sempre positivo anch' esso, benchè prendasi nel segno dubbioso il superiore, o l' inferiore; adunque in questo caso l' uno, o l' altro di questi segni dee valere, e l' equazione (4) rappresenta le due radici vere dell' equazione (1), dove la x si suppone positiva.

II. Ma se bb denota una quantità negativa, ed a una quantità positiva, allora il secondo membro dell' equazione (5) è positivo (conforme dimostra l' equazione (1), dove la x si prende per positiva), e conseguentemente anche il primo membro della stessa equazione (5) deve essere positivo, ma egli non può esser tale se non quando nel segno ambiguo si prende il superiore; adunque dee prendersi questo segno superiore, affinchè l' equazione (4) esprima la radice vera dell' equazione (1).

III. Similmente se tanto bb, quanto a significano quantità negative, il secondo membro dell' equazione (5) è negativo, come appare dall' equazione (1), dove la x si suppone positiva, e però negativo deve esser anche il primo membro della suddetta equazione (5); adunque nel segno dubbioso dee prendersi l' inferiore, e non il superiore, e in questo modo l' equazione (4) denoterà il vero valore di x.

Sco-

SCOLIO II.

SE poi nel caso accennato nel secondo punto del precedente scolio la x si suppone negativa, egli è chiaro per una ragione simile a quella ivi accennata, che prendendo nel segno ambiguo dell'equazione (3) il segno inferiore, si avrà la radice falsa dell'equazione (1) purchè si pigli negativamente la radice del secondo membro della medesima equazione (3).

E se nel caso notato nel terzo punto del suddetto precedente scolio la x si suppone negativa, egli è parimente manifesto per una ragione simigliante a quella ivi espressa, che assumendo nel segno dubbioso dell'equazione (3) il segno superiore, si avrà la radice falsa dell'equazione (1) purchè prendasi negativamente la radice del secondo membro dell'equazione istessa (3).

Ma se bb significa una quantita positiva, ed a una quantità negativa, allora egli è visibile, che la x dee concepirsi negativa, acciò non sia negativo il valore di xx nell'equazione (1), e però assumendo negativamente la radice del secondo membro dell'equazione (3) si avranno le due radici negative dell'equazione (1), poichè nel segno ambiguo potrà valere il segno superiore, ed anche l'inferiore.

COROLLARIO I.

POnendo nell'equazione (1) il valore di xx espresso nell'equazione (3), e operando nel debito modo si scopre quest'altra equazione:

$$(6)\ x = \frac{2bb}{a \mp a\sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}}}.$$

COROLLARIO II.

E Dividendo l'equazione (3) per l'equazione (6) ritrovasi

$$(7)\ x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{1 - \frac{4bb}{aa}},$$

cioè $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, e questa è la formola volgare.

SECONDA MANIERA.

Sia l'equazione (1) come sopra, aggiungasi a ciascun membro di essa $2bx$ per avere quest' altra: $xx + 2bx + bb = ax + 2bx$, la quale divisa per $(xx + 2bx + bb)(a + 2b)$ somministra $\frac{1}{a+2b} = \frac{x}{xx+2bx+bb}$, ovvero moltiplicando l' uno, e l' altro membro per $-4b$, si à $-\frac{4b}{4+2b} = -\frac{4bx}{xx+2bx+bb}$, e aggiungendo all' uno, e l' altro membro di quest' ultima equazione l' unità, e operando a dovere, si ottiene $\frac{a-2b}{a+2b} = \frac{xx-2bx+bb}{xx+2bx+bb}$, ed estraendo la radice quadrata: $\pm\frac{\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}} = \frac{x-b}{x+b}$, e in fine sviluppando il valore di x, e poi moltiplicando per maggior eleganza il numeratore, e il denominatore di esso valore per $\sqrt{a+2b}$, si scopre:

(8) $x = b(\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b})$ diviso per $(\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b})$.

SCOLIO III.

Avvertasi, che se bb rappresenta la quantità $\backsim p$ (il segno $\backsim$ denota più, ovvero meno ad arbitrio) allora $b = \pm\sqrt{\backsim p}$.

COROLLARIO I.

Se bb esprime una quantità negativa, si sa, che l' equazione (1) non à radici immaginarie, e pure è notabile, che in questo medesimo caso (per quanto si è accennato nel terzo scolio precedente) il secondo membro dell' equazione (8) contiene quantità immaginarie.

COROLLARIO II.

Quadrando l' equazione (8) ne nascerà quest' altra:

(9) $xx = (2abb \pm 2bb\sqrt{aa-4bb})$ diviso per $(2a \mp 2\sqrt{aa-4bb})$, la quale restituisce l' equazione (3), purchè dividasi per $2a$ il numeratore, e il denominatore della stessa equazione (9).

COROLLARIO III.

SE il numeratore, e il denominatore del ſecondo membro dell' equazione (8) ſi moltiplicheranno per queſta eſpreſſione ($\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}$), e ſi faranno le debite operazioni, la ſteſſa equazione (8) diverrà l' equazione (6), notata nel primo corollario della prima maniera.

COROLLARIO IV.

E Se il numeratore, e il denominatore del ſecondo membro della medeſima equazione (8) ſaranno moltiplicati per queſt' altra eſpreſſione: ($\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}$) dalla ſuddetta equazione (8) naſcerà l' equazione (7) trovata nel ſecondo corollario della prima maniera, e conſeguentemente anche dall' equazione (8), cioè dalla ſeconda maniera, viene la formola volgare.

NUO.

NUOVO METODO

Per riſolvere algebraicamente l' equazioni del quarto grado, applicabile anche alla reſoluzione dell' equazioni del ſecondo grado.

PREPARAZIONE.

SIa l' infraſcritta (*) equazione (1), che rappreſenta qualunque equazione del quarto grado, poichè le lettere m, n, p, q, r dinotano qualſivoglia quantità col ſuo ſegno, e poſſono ſignificare anche zero, e ſia l' altra equazione (2), ove le lettere z, y, u eſprimono quantità indeterminate.

$$(1)\quad mx^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0:$$

$$(2)\quad (zxx + yx + u)^2 = zzx^4 + 2zyx^3 + yyxx + 2yux + uu + 2zuxx;$$

Indi al ſecondo membro dell' equazione (2) aggiungaſi il primo membro dell' equazione (1) moltiplicata per t (quantità parimente indeterminata), e ne riſulterà la ſeguente:

$$(3)\quad (zxx + yx + u)^2 = zzx^4 + 2zyx^3 + yyxx + 2yux + uu + mtx^4 + ntx^3 + 2zuxx + qtx + rt + ptxx.$$

AVVERTIMENTO.

NEl progreſſo di queſto ſcritto ſi aſſumerà la lettera l per rappreſentare l' unità poſitiva, ovvero negativa ad arbitrio, ma nell' atto di calcolare ſi laſcerà di ſcrivere il quadrato di l, poichè in luogo di ll s' intenderà ſempre ſoſtituita l' unità poſitiva, che gli equivale, e quelle quantità, che ſi troveranno diviſe per l, ſi ſcriveranno piuttoſto moltiplicate per l, il che renderà più ſemplici l' eſpreſſioni ſenza mutarne il valore.

PRIMA MANIERA.

SI ſuppongano eguali a zero il ſecondo, e quarto termine del

(*) Opuſcoli Calogerà tomo XIII., pag. 107.

del secondo membro dell' equazione (3), ove in luogo di t scrivasi ly, e da tali supposizioni si dedurrà $z = -\frac{ln}{2}$, ed $u = -\frac{lq}{2}$, surrogando poi questi valori di t, z, u nell' equazione (3) essa prenderà questa sembianza:

$$\left[-\frac{lnxx}{2}+yx-\frac{lq}{2}\right]^2=\left[\frac{nn}{4}+lmy\right]x^4+\left[yy+\frac{nq}{2}+lpy\right]xx+\frac{qq}{4}+lry.$$

Estraggasi la radice del primo membro di quest' ultima equazione, e si tiri per approssimazione la radice del secondo, e si avrà:

$$(4)\ -\frac{lnxx}{2}+yx-\frac{lq}{2}=\pm xx\sqrt{\frac{nn}{4}+lmy}\pm\frac{\left[yy+\frac{nq}{2}+lpy\right]}{2\sqrt{\frac{nn}{4}+lmy}}.$$

Ma egli è chiaro, che acciò il secondo membro dell' ultima equazione sia la radice esatta del secondo membro della penultima, dee valere quest' altra equazione:

$$\frac{yy+\frac{nq}{2}+lpy}{2\sqrt{\frac{nn}{4}+lmy}}=\sqrt{\frac{qq}{4}+lry},$$

la quale, maneggiata nel debito modo, farà conoscere la seguente:

$$(5)\ \begin{array}{l} y^3+2lpyy+nqy+lnpq=0 \\ \qquad\qquad +ppy-lnnr \\ \qquad\qquad -4mry-lmqq, \end{array}$$

donde si deduce il valore di y, che sostituito nell' equazione (4) somministra in virtù del segno $\pm$ due equazioni del secondo grado, tali, che la resoluzione di esse dà le quattro radici dell' equazione (1). Il che dovea ritrovarsi.

SECONDA MANIERA.

NEll' equazione (3) pongasi $-4r$ in vece di t, e si uguaglino a zero il quarto, e quinto termine del secondo membro dell' equazione suddetta, con supporre $uu=4rr$, e $2yu=4qr$, cioè

cioè $u = 2lr$, ed $y = lq$, cosicchè l'equazione (3) si cangi in questa:

$$(zxx + lqx + 2lr)^2 = (zz - 4mr)x^4 + (2lqz - 4nr)x^3 + qqxx + 4lrzxx - 4prxx,$$

da ciascun membro della quale si tiri la radice con modo non dissimile a quello, che si è di sopra tenuto, e ne verrà:

$$(6)\quad zxx + lqx + 2lr = \pm xx\sqrt{zz - 4mr} \pm \frac{(lqz - 2nr)x}{\sqrt{zz - 4mr}},$$

purchè si supponga

$$\frac{lqz - 2nr}{\sqrt{zz - 4mr}} = \sqrt{qq + 4lrz - 4pr}$$

e quest' ultima equazione trattata nella dovuta maniera, e ordinata produce l'infrascritta:

$$(7)\quad z^3 - lpzz + nqz + 4lmpr - 4mrz - lnnr - lmqq,$$

la quale in se contiene il valore di z proprio a far sì, che l'equazione (6) rappresenti, per cagione del doppio segno, due equazioni quadratiche, la resoluzione delle quali mostra le quattro radici dell'equazione (1). Il che dovea ritrovarsi.

TERZA MANIERA.

NEll' equazione (3) facciasi $t = -4m$, e si annullino il primo, e il secondo termine del secondo membro di essa.

Si à per tanto $z = 2lm$, $y = ln$, e la medesima equazione (3) diviene:

$$(2lmxx + lnx + u)^2 = (nn + 4lmu - 4mp)xx + (2lnu - 4mq)x + uu - 4mr,$$

di modo che estraendo (conforme nelle due precedenti maniere si è fatto) la radice da ambedue i membri di questa equazione, si à non solamente:

$$(8)\quad 2lmxx + lnx + u = \pm x\sqrt{nn + 4lmu - 4mp} \pm \frac{(lnu - 2mq)}{\sqrt{nn + 4lmu - 4mp}},$$

ma eziandio

$$\frac{lnu - 2mq \pm \sqrt{uu - 4mr}}{\sqrt{nn + 4lmu - 4mp}},$$

e queſt' ultima equazione trattata a dovere somminiſtra:

$$(9)\quad \begin{aligned} u^3 - lpuu &+ nqu + 4lmpr = 0 \\ &- 4mru - lnnr \\ &\qquad\quad - lmqq\,; \end{aligned}$$

e quindi ſurrogando nell' equazione (8) il valore di u tratto da queſt' equazione, ne naſcono in vigore del ſegno $\pm$ due equazioni del ſecondo grado, che riſolute eſpongono le quattro radici dell' equazione (1). Il che dovea ritrovarſi.

COROLLARIO.

QUARTA MANIERA.

NElle due equazioni precedenti (8), e (9) ſi ſurroghi $g + lp$ in luogo di u, e ne riſulteranno le due, che ſeguono reſpettivamente:

$$(10)\quad \begin{aligned} 2lmxx + lnx &+ g = \pm x\sqrt{nn + 4lmg} \pm \frac{lng + np - 2mq}{\sqrt{nn + 4lmg}} \\ &+ lp \end{aligned}$$

$$(11)\quad \begin{aligned} g^3 + 2lpgg &+ nqg + lnpq = 0 \\ &+ ppg - lnnr \\ &- 4mrg - lmqq, \end{aligned}$$

e ſervono egualmente, che l' equazioni (8), e (9) a ritrovare le quattro radici dell' equazione (1). Il che dovea ritrovarſi.

SCOLIO.

LA formola (9) è la ſteſſa, che la formola (7), ma l' equazione (8), che corriſponde alla formola (9) è diverſa dall' equazione (6), che à rapporto alla formola (7). Similmente la formola (11) non differiſce dalla formola (5), ma l' equazione (10) relativa alla formola (11) è differente dall' equazione (4), che à relazione alla formola (5).

Applicazione di questo metodo alla resoluzione dell' equazioni del secondo grado.

PREPARAZIONE.

Sia l' equazione (12), che segue, nella quale m, n, p esprimono come sopra qualsivoglia quantità col suo segno:

(12) $mxx + nx + p = 0$.

Nell' equazione (2) si eguagli a zero la lettera z, e si otterrà:

$(yx + u)^2 = yyxx + 2yux + uu$.

Da quest' ultima equazione sottraggasi l' equazione (12) moltiplicata per la quantità indeterminata t, ed avremo:

$$(13)\quad (yx + u)^2 = yyxx + 2yux + uu - mtxx - ntx - pt.$$

Ciò posto facciasi $t = p$, e si annullino il secondo, e il terzo termine del secondo membro dell' equazione (13) al qual effetto pongasi $uu = pp$, $2yu = np$, mentre si troverà $u = lp$, $y = \frac{ln}{2}$, e l'equazione (13) diverrà

$$\left[\frac{nx}{2} + p\right]^2 = \left[\frac{nn}{4} - mp\right]xx,$$

e tirando la radice dall' uno, e l' altro membro

$$\frac{nx}{2} + p = \pm x\sqrt{\frac{nn}{4} - mp}, \text{ ovvero}$$

$$(14)\quad x = \frac{-p}{\frac{n}{2} \mp \sqrt{\frac{nn}{4} - mp}}.$$

Il che dovea ritrovarsi.

SECONDA MANIERA.

Suppongasi nell' equazione (13) $t = m$, e si annientino il primo, e il secondo termine del secondo membro della stessa equazione, cioè prendasi $yy = mm$, ovvero $y = lm$, e $2yu = nm$, donde viene $u = \frac{ln}{2}$, e l' equazione medesima si cangia così: $\left[mx + \frac{n}{2}\right]^2 = \frac{nn}{4} - mp$, e pigliando la radice dei due membri

mx

$mx + \frac{n}{2} = \pm\sqrt{\frac{nn}{4} - mp}$, oppure

(15) $x = -\frac{n}{2m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{\frac{nn}{4} - mp}$.

Il che dovea ritrovarsi.

SCOLIO.

SE nel segno doppio d' ambedue le formole (14), e (15) valerà egualmente il negativo, o positivo, allora il valore di x nella prima di dette formole sarà equivalente al valore di x nella seconda.

NUOVA MANIERA

Di risolvere l' equazioni cubiche dedotta dal nuovo metodo di risolvere l' equazioni del quarto grado.

L'Equazione (1) (*), ove n, p, e q rappresentano qualsivoglia quantità col suo segno, riducasi ad un' equazione del quarto grado moltiplicandola per $x+y=0$, cosicchè $-y$ sia una radice dell' equazione (2), le tre altre radici della quale sono le medesime, che le tre radici dell' equazione (1).

$$(1)\quad x^3+nxx+px+q=0,$$

$$(2)\quad \begin{array}{l} x^4+nx^3+pxx+qx+qy=0 \\ \quad +yx^3+nyxx+pyx. \end{array}$$

Concepiscasi quest' altra equazione identica, e si noti, che le lettere y, ed u esprimono quantità indeterminate:

$$\left[xx+\left[\frac{y+n}{2}\right]x+\frac{u}{2}\right]^2=x^4+(y+n)x^3+\left[\frac{y+n}{4}\right]^2xx+\left[\frac{y+n}{2}\right]ux+\frac{u^2}{4}$$
$$+uxx.$$

Sottraendo da quest' equazione l' equazione (2) avremo

$$\left[xx+\left[\frac{y+n}{2}\right]x+\frac{u}{2}\right]^2=\begin{array}{lll}\left[\frac{y-n}{4}\right]^2xx & +\left[\frac{y+n}{2}\right]ux & +\frac{uu}{4} \\ +uxx & -qx & -qy \\ -pxx & -pyx\,; & \end{array}$$

e tirando da ambo le parti la radice quadrata, troveremo

$$xx+\left[\frac{y+n}{2}\right]x+\frac{u}{2}=\pm x\sqrt{\left[\frac{y-n}{4}\right]^2+u-p}\pm\sqrt{\frac{uu}{4}-qy},$$

purchè si supponga:

$$(3)\quad \frac{\left[\frac{y+n}{2}\right]u-q-py}{2\sqrt{\left[\frac{y-n}{4}\right]^2+u-p}}=\sqrt{\frac{uu}{4}-qy},$$

il che può sempre farsi a cagione delle indeterminate u, ed y;

Ma la penultima equazione trasposta somministra quest' altra:

(4)

(*) Opuscoli Calogerà tomo XIV, pag. 227.

$$(4)\ xx+\left[\frac{y+n}{2}\right]x\mp x\sqrt{\left[\frac{y-n}{4}\right]^2+u-p}+\frac{u}{2}\mp\sqrt{\frac{uu}{4}-qy}=0,$$

la quale in virtù del segno doppio equivale a due equazioni quadratiche, e in conseguenza è composta di quattro equazioni lineari, che esprimono il valore delle quattro radici dell' equazione (2), cioè della radice assunta $-y$, e delle tre radici dell'equazione (1). Per trovare adunque una di queste tre radici, la chiameremo f, di modo che avremo $x-f=0$, e moltiplicando quest' equazione con l' altra $x+y=0$ assunta dal principio, ne verrà l' infrascritta:

$$\begin{aligned} xx-fx&-fy=0 \\ +yx&, \end{aligned}$$

la quale dee supporsi la medesima, che l' equazione (4), e paragonarsi termine a termine con essa. Comparando per tanto insieme i secondi termini di queste due equazioni, e operando debitamente, se ne deduce:

$$(5)\ f=\frac{y-n}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{y-n}{4}\right]^2+u-p},$$

siccome paragonando fra loro i terzi termini delle due medesime equazioni, si à:

$$(6)\ f=-\frac{u}{2y}\pm\frac{1}{y}\sqrt{\frac{uu}{4}-qy}.$$

Convien qui osservare, che quando nel segno doppio dell' equazione (4) si prende il superiore, allora in amendue l' equazioni (5), e (6) dee valere il segno superiore: Quando poi nel segno doppio della stessa equazione (4) si piglia l' inferiore, allora nelle equazioni (5), e (6) à da regnare il segno inferiore.

Ora per ottenere un'espressione di f libera dalla doppiezza, ed ambiguità de' segni, si trasponga, indi si quadri l' equazione (5), che ci darà:

$$(7)\ ff-(y-n)f=u-p.$$

Traspongasi parimente, e poi si quadri l' equazione (6), da cui si dedurrà:

$$(8)\ ff+\frac{uf}{y}=-\frac{q}{y}.$$

Sot-

Sottraggasi la prima di queste due ultime equazioni dalla seconda, e ne verrà:

$\frac{nf}{y}+(y-n)f=p-u-\frac{q}{y}$, che fatte le dovute operazioni ci mostra:

$$(9)\quad f=\frac{(p-u)y-q}{(y-n)y+u};$$

laonde per risolvere l' equazione (1) altro non resta, che la determinazione di y, e di u, che nei due seguenti modi si conseguisce.

PRIMA RESOLUZIONE.

L' Equazione (3) ordinata relativamente ad u produce quest'altra:

$$u^3-(p+ny)uu=\begin{array}{l}+3qyu+(py-q)^2\\-npyu+(y-n)^2qy\\-pyyu\\-nqu,\end{array}$$

ove supponendo per maggior brevità del calcolo $g=p+ny$, e aggiungendo all' uno, e all' altro membro $\frac{ggu}{3}-\frac{g^3}{27}$ si passa a questa:

$$(10)\quad \left[u-\frac{g}{3}\right]^3=\begin{array}{l}+3qyu+(py-q)^2\\-npyu+(y-n)^2qy\\-pyyu-\frac{g^3}{27}.\\-nqu\\+\frac{gg}{3}u\end{array}$$

Per determinare il valore di y, si annienti il primo termine del secondo membro di quest' equazione, dopo aver riposto in luogo di $\frac{gg}{3}$ il suo valore in y, e ne verrà:

$$(11)\quad \begin{array}{l}+nnyy+9qy+pp=0\\-3pyy-npy-3nq\end{array}$$

equazione, che risoluta farà trovare due valori di y proprj pel nostro intento, purchè non riescano infetti d' espressione immaginaria.

Estraggasi finalmente dall' equazione (10) la radice cubica, e trasponendo risulterà:

(12)

$$(12)\ u = \frac{g}{3} + \sqrt[3]{(py-q)^2 + (y-n)^2 qy - \frac{g^3}{27}}\,.$$

Ponendo per tanto in quest' equazione, e nell' espressione di g il valore di y tratto dall' equazione (11), rimarrà cognita la u, come pure si conoscerà la f, o sia x, se nell' equazione (9) si sostituiranno i valori di y, e di u. Il che dovea ritrovarsi.

COROLLARIO.

SE l' equazione da risolversi è priva del secondo termine, cioè, se $n = o$, l' equazioni (11), e (12) ben maneggiate somministrano i seguenti valori di y, e di u:

$$y = \frac{3q}{2p} \pm \frac{3}{p}\sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$u = \frac{1p}{3} + \sqrt[3]{qy^3 + pqy + \frac{8p^3}{27} + qq}\,.$$

La prima di queste due equazioni mostra, che nel caso di $n = o$, se la p significa nell' equazione (1) una quantità negativa, e se di più $\frac{qq}{4}$ è minore di $\frac{p^3}{27}$, allora il valore di y contiene un espressione immaginaria, e questo è il caso, che chiamasi irredutibile.

SECONDA RESOLUZIONE.

L' Equazione (3) ordinata per rapporto ad y partorisce quella, che segue:

$$\begin{array}{llll} y^3 + \frac{p}{q}[p-u]yy & = + \frac{nu}{q}[p-u]y & - \frac{nu}{q}[p-u] \\ \quad - 2nyy & \quad + 2py & + nu \\ & \quad - nny & - q \\ & \quad - 3uy\,. & \end{array}$$

E se si fa per minor imbarazzo del calcolo $b = \frac{pp - pu - 2nq}{q}$ indi si aggiunge all' una, e l' altra parte dell' ultima equazione $\frac{bby}{3} + \frac{b^3}{27}$, ne viene:

(13)

$$(13)\ \left[y+\frac{b}{3}\right]^3 = \frac{nu}{q}\left[p-u\right]y - \frac{uu}{q}\left[p-u\right]$$
$$\begin{array}{ll} +\,2py & +\,nu \\ -\,nny & -\,q \\ -\,3uy & +\,\frac{b^3}{27} \\ +\,\frac{bby}{3} & \end{array}$$

Eguagliando a zero il primo termine del ſecondo membro di queſt' equazione con rimettervi in luogo di $\frac{bb}{3}$ il ſuo valore in u, ne naſce:

$$(14)\quad \begin{array}{llll} ppuu & -\,2p^3u & +\,p^4 & =o \\ -\,3nquu & +\,7npqu & -\,4nppq & \\ & -\,9qqu & +\,6pqq & \\ & & +\,nnqq\,. & \end{array}$$

E riſolvendo queſt' equazione ſi trovano due valori di u, ciaſcuno de' quali ſerve al noſtro intento, purchè non racchiuda eſpreſſione immaginaria.

Eſtraendo in fine la radice cubica dall' equazione (13), e facendo la dovuta traſpoſizione, ſi à:

$$(15)\ y = -\frac{b}{3} + \sqrt[3]{\frac{b^3}{27} + nu - q - \frac{uu}{q}\left[p-u\right]}\,.$$

Se il valore di u dedotto dall' equazione (14) ſi porrà nell' eſpreſſione di b, e in queſta di y, la medeſima y ſarà conoſciuta, e ſe nell' equazione (9) ſi ſoſtituiranno i valori di u, e di y, ſarà cognita anche la f, cioè la x. Il che dovea ritrovarſi.

COROLLARIO I.

SUpponendo $n=o$, ſi tira dall' equazione (14) il valore di u eſpreſſo, come ſegue:

$$u = \frac{2p^3+9qq}{2pp} \pm \frac{9qq}{pp}\sqrt{\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}}\,.$$

E ciò moſtra, che ancora in queſta ſeconda reſoluzione è irredutibile il caſo accennato in fine del corollario della prima reſoluzione.

Co-

COROLLARIO II.

FAcendo $p=o$, cioè ſupponendo, che l' equazione da riſolverſi ſia mutilata del penultimo termine (il che ſempre, e in due maniere può farſi dagli Algebriſti) allora $b=-2n$, e dall' equazione (14), trattata con avvedutezza deriva:

$$u=-\frac{3q}{2n}\pm\frac{3q}{n}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{n^3}{27q}}.$$

Siccome dall' equazione (15) riſulta la ſeguente:

$$y=\frac{2n}{3}+\sqrt[3]{u^3+nu-q-\frac{8n^3}{27}},$$

la penultima di queſte due equazioni fa vedere, che nella ſuppoſizione di $p=o$, il caſo irredutibile avviene, quando la q à differente ſegno dalla n, e di più $\frac{1}{4}$ è minore di $\frac{n^3}{27q}$, cioè $\frac{27q}{4}$ è minore di n^3. Lo ſteſſo potrà dedurſi dall' equazione (11), che ſerve alla prima reſoluzione.

SCOLIO I.

QUando il valore di f, che naſce dall' equazione (9) è *poſitivo*, allora nel ſegno dubbioſo delle due equazioni (5), e (6) deve aſſumerſi quello, da cui riſulta un valore *poſitivo* di f nelle medeſime due equazioni.

E quando l' equazione (9) ſomminiſtra un valore *negativo* di f, allora nel ſegno ambiguo delle due equazioni (5), e (6) dovrà prenderſi quello, da cui proviene un valore *negativo* di f nelle ſteſſe due equazioni.

SCOLIO II.

L' Equazione (7) moltiplicata per f, e traſpoſta fa vedere

$$\begin{aligned} f^3-yff+pf&=o\\ +nff-uf&. \end{aligned}$$

L' equazione (8) moltiplicata per y, e traſpoſta dà

$$yff+uf+q=o,$$

 e ag-e aggiungendo insieme queste due equazioni si ottiene la seguente:

$$(f^3 + nff + pf + q = 0,$$

che non differisce punto dall' equazione (1).

In oltre facendo un' equazione delle due espressioni di f tratte dall' equazioni (5), e (6), e maneggiandola a dovere si perviene all' equazione (3).

Tutto ciò comprova la giustezza del mio metodo.

ALTRO NUOVO METODO

Per la resoluzione algebraica dell' equazioni del terzo grado.

Sia l' infrascritta (*) equazione (1), che rappresenta tutte l' equazioni cubiche; imperciocchè le lettere n, p, q esprimono qualsivoglia quantità col suo segno (positivo, o negativo), ed anche zero.

$$(1)\; x^3 + nxx + px + q = 0.$$

Suppongasi quest' altra equazione:

$$(2)\; \begin{array}{l} tt - xt + bb = 0 \\ \quad\;\; - ct, \end{array}$$

ove t, c, b dinotano quantità non ancora determinate. Risolvasi l' equazione (2) colla seconda delle due nuove maniere da me trovate per la resoluzione dell' equazioni quadratiche, e inserite in questo tomo pag. 465. e seguenti, e si avrà:

$$(3)\; t = b(\sqrt{x+c+2b}) \pm \sqrt{x+c-2b} \text{ divis. per } \sqrt{x+c+2b} \mp \sqrt{x+c-2b},$$

e cubando quest' ultima equazione, ne verrà dopo fatte le debite operazioni:

$$(4)\; t^3 = b^3\left[(x+c-b)\sqrt{x+c+2b} \pm (x+c+b)\sqrt{x+c-2b}\right]$$

$$\text{divis. per } \left[(x+c-b)\sqrt{x+c+2b} \mp (x+c+b)\sqrt{x+c-2b}\right].$$

Facciansi ora per minor imbarazzo del calcolo queste due equazioni:

$$(5)\; G = (x+c-b)\sqrt{x+c+2b},$$

$$(6)\; F = (x+c+b)\sqrt{x+c-2b},$$

e operando a dovere, si vedrà essere:

(*) Opuscoli Calogerà tomo XV., pag. 507.

$$(7)\ G = \left[\begin{array}{l} x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3 \\ \qquad\qquad - 3bbx - 3bbc \\ \qquad\qquad\qquad + 2b^3 \end{array}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(8)\ F = \left[\begin{array}{l} x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3 \\ \qquad\qquad - 3bbx - 3bbc \\ \qquad\qquad\qquad - 2b^3 \end{array}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Indi prendendo la radice cubica dell' equazione (4), e ponendo in essa radice G, ed F in cambio de' loro valori, ne risulterà:

$$(9)\ t = b\frac{\sqrt[3]{G \pm F}}{\sqrt[3]{G \mp F}}.$$

Assumendo poscia in vece di x^3 il suo valore $-nxx - px - q$ tratto dall' equazione (1), e sostituendolo nell' equazioni (7), e (8), si ottengono queste altre due:

$$(10)\ G = \left[\begin{array}{lll} +3cxx & +3ccx & +c^3 \\ -nxx & -3bbx & -3bbc \\ & -px & +2b^3 \\ & & -q \end{array}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(11)\ F = \left[\begin{array}{lll} +3cxx & +3ccx & +c^3 \\ -nxx & -3bbx & -3bbc \\ & -px & -2b^3 \\ & & -q. \end{array}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Si concepiscano eguali a zero que' termini delle due ultime equazioni, ove trovasi xx, e poi gli altri, che sono moltiplicati per x, e queste supposizioni somministreranno l' equazioni seguenti:

$$(12)\ c = \frac{n}{3}$$

$3bb = 3cc - p$, cioè ponendo $\frac{n}{3}$ in luogo di c, e dividendo per 3

$$(13)\ bb = \frac{nn}{9} - \frac{p}{3};\ \text{donde nasce:}$$

$$(14)\ b = \backsim \frac{1}{3}\sqrt{nn - 3p}.$$

Il segno $\backsim$ esprime più, o meno ad arbitrio, e questi valori

lori di c, di bb, e di b surrogati nell' equazioni (10), e (11) finalmente daranno

$$(15)\ G = \left[\left(\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right) + \frac{2}{27}, \backsim (nn - 3p)\frac{3}{2} \right]\frac{1}{2}:$$

$$(16)\ F = \left[\left(\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right) - \frac{2}{27}, \backsim (nn - 3p)\frac{3}{2} \right]\frac{1}{2}.$$

La virgola è nota di moltiplicazione in queste due equazioni, nelle quali essendo cogniti i valori di G, e di F, anche il valore di t espresso nell' equazione (9) diventa cognito.

Ma dall' equazione (2) nasce quest' altra:

$$(17)\ x + c = t + \frac{bb}{t};$$

adunque ponendo in questa l' espressione suddetta di t, e in luogo di c il suo valore $\frac{n}{3}$, si scuopre l' equazione, che segue:

$$(18)\ x + \frac{n}{3} = \frac{b\sqrt[3]{G \pm F}}{\sqrt[3]{G \mp F}} + \frac{b\sqrt[3]{G \mp F}}{\sqrt[3]{G \pm F}},$$

ove s' intende per b il suo valore espresso nell' equazione (14).

COROLLARIO I.

Riducendo ad un solo denominatore il secondo membro dell' equazione (18), si à:

$$(19)\ x + \frac{n}{3} = \left[\sqrt[3]{(G \pm F)^2} + \sqrt[3]{(G \mp F)^2}\right] \text{ moltip. per } \frac{b}{\sqrt[3]{GG - FF}}.$$

Ora riflettasi, che in virtù dell' equazioni (15), e (16) ritrovasi:

$$GG - FF = \frac{4}{27}, \backsim (nn - 3p)\frac{3}{2},$$

e questo valore di $GG - FF$ in virtù dell' equazione (14) è uguale a $4b^3$, adunque $\frac{b}{\sqrt[3]{GG - FF}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, e conseguentemente l' equazione (19) prende questa sembianza:

$$(20)\ x + \frac{n}{3} = \frac{\sqrt[3]{(G \pm F)^2}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{(G \mp F)^2}}{\sqrt[3]{4}}$$

Co-

COROLLARIO II.

SE si moltiplica l' equazione (18) per quest' altra $1 = \frac{\sqrt[3]{G \pm F}}{\sqrt[3]{G \pm F}}$, ella diviene:

$$x + \frac{n}{3} = \frac{b\sqrt[3]{(G \pm F)^2}}{\sqrt[3]{GG - FF}} + \frac{b\sqrt[3]{GG - FF}}{\sqrt[3]{(G \pm F)^2}}$$

e surrogando in quest' ultima equazione in cambio di $\sqrt[9]{GG - FF}$ il suo valore $b\sqrt[3]{4}$ trovato nel precedente corollario, si ottiene la seguente:

$$(21)\quad x + n3 = \frac{\sqrt[3]{(G \pm F)^2}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{bb\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(G \pm F)^2}}$$

dove in luogo di bb dee concepirsi il suo valore notato nell' equazione (13).

COROLLARIO III.

SI moltiplichi l' equazione (3) per questa:

$1 = (\sqrt{x+c+2b} \pm \sqrt{x+c-2b})$ divis. per $(\sqrt{x+c+2b} \pm \sqrt{x+c-2b})$

e operando col dovuto accorgimento, si ottiene quest' altra:

$$(22)\quad t = \frac{x}{2} + \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\left[(x+c)^2 - 4bb\right]^{\frac{1}{2}},$$

ove sostituendo in vece di t, di c, e di bb i loro valori registrati respettivamente nell' equazioni (9), (12), e (13), si ritrova:

$$(23)\quad \frac{b\sqrt[3]{G \pm F}}{\sqrt[3]{G \mp F}} = \frac{x}{2} + \frac{n}{6} \pm \frac{1}{2}\left[xx + \frac{2nx}{3} - \frac{nn}{3} + \frac{4p}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

COROLLARIO IV.

EGli è visibile, che siccome sussiste l' equazione (23), sussiste ancora quella, che segue:

$b\sqrt{}$

$$\frac{b\sqrt[3]{G\mp F}}{\sqrt[3]{G\pm F}}=\frac{x}{2}+\frac{n}{6}\mp\frac{1}{2}\left[xx+\frac{2nx}{3}-\frac{nn}{3}+\frac{4p}{3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

e questa aggiunta all' equazione (23) produce nuovamente l' equazione (18).

COROLLARIO V.

NElle formole dell' equazioni (20), e (21) entra questa quantità: $(G\backsim F)^2$, che equivale a quest'altra: $GG+FF\backsim$, $2GF$, e in virtù dell' equazioni (15), e (16) si anno le due seguenti:

$$GG+FF=\frac{2np}{3}-\frac{4n^3}{27}-2q$$

$$(24)\quad GF=\left[\left(\frac{np}{3}-\frac{2n^3}{27}-q\right)^2-\frac{4}{27,27}(nn-3p)^3\right]^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLARIO VI.

IL prodotto delle due equazioni (5), e (6) è quest' altra equazione:

$$GF=(xx+2cx+cc-4bb)^{\frac{1}{2}}(xx+2cx+cc-bb),$$

cioè ponendo in vece di c, e di bb i loro valori espressi nell' equazioni (12), e (13):

$$(25)\quad GF=\left[xx+\frac{2nx}{3}-\frac{nn}{3}+\frac{4p}{3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[xx+\frac{2nx}{3}+\frac{p}{3}\right];$$

adunque comparando questa espressione di GF con l' altra dell' equazione (24), si renderà manifesto, che quantunque fosse reale il valore di x, nulladimeno sarà immaginario il valore di GF, allorchè sarà negativa la quantità $xx+\frac{2nx}{3}-\frac{nn}{3}+\frac{4p}{3}$, che nell' equazione (25) soggiace al vincolo della radice seconda, e perchè nel precedente corollario si è mostrato, che la quantità GF entra nelle due formole dell' equazioni (20), e (21) ne siegue, che in detto caso le medesime formole dovranno essere infette d' espressioni immaginarie.

COROLLARIO VII.

SImilmente, ancorchè fosse razionale il valore di x, ciò non ostan-

oſtante ſarà irrazionale il valore di GF, quando la ſopra notata quantità $xx+\frac{2nx}{3}-\frac{nn}{3}+\frac{4p}{3}$ non ſarà un quadrato, e quindi in tal caſo le due formole dell' equazioni (20), e (21), nelle quali entra GF conterranno eſpreſſioni irrazionali:

COROLLARIO VIII.

LE illazioni de' due precedenti corollarj ſi addattano anche al primo membro dell' equazione (23), e conſeguentemente alla formola dell' equazione (18); imperciocchè nel ſecondo membro dell' equazione (23), ſi contiene la quantità:

$$\left[xx+\frac{2nx}{3}-\frac{nn}{3}+\frac{4p}{3}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

SCOLIO I.

IN ordine alla formola dell' equazione (18) ſi noti:

Primo, che il valore di b è immaginario, allorchè rappreſentando p una quantità poſitiva, nn è minore di $3p$, e ciò è chiaro per l' equazione (14).

Secondo, che quando b è immaginario, la quantità $\frac{b\sqrt[3]{G\backsim F}}{\sqrt[3]{G-\backsim F}}$ che entra nell' equazione (18) è ſempre immaginaria.

Terzo, che quando b è reale, e de' due valori della G nell' equazione (15), ovvero della F nell' equazione (16), uno ſolo è immaginario, la quantità $\frac{\sqrt[3]{G\backsim F}}{\sqrt[3]{G-\backsim F}}$ è ſempre immaginaria.

Quarto, che quando b è reale, e ambedue i ſuddetti valori della G, ovvero della F, ſono quantità immaginarie *pure*, la medeſima quantità $\frac{\sqrt[3]{G\backsim F}}{\sqrt[3]{G-\backsim F}}$ è ſempre reale.

Quinto, che ſe il valore di b è nullo, allora tanto l' equazioni (5), e (6), quanto l' equazioni (15), e (16) moſtrano eſſere $G=F$; dimodochè il ſecondo membro dell' equazione

(18)

(18) diviene $+\frac{o\sqrt[3]{2G}}{\sqrt[3]{o}}+\frac{o\sqrt[3]{o}}{\sqrt[3]{o}}=\frac{o}{o}$

il che nulla fa conoscere, perchè la frazione $\frac{o}{o}$ rappresenta una quantità indeterminata. Il simile accaderà, allorchè $b=o$, nell' equazione (21), quando in essa si prenderà per negativo il segno doppio $\pm$; e perciò in questo caso convien valersi della formola dell' equazione (20), ovvero della formola dell' equazione (21), facendo però in questa positivo il segno $\pm$.

Sesto, che in vigore dell' equazione (14) il valore di b non può essere immaginario allorchè p è nullo, cioè quando nell' equazione (1) manca il terzo termine; laonde se risolvendo con l' equazione (18) l' equazione cubica proposta, incontreremo la quantità b di valore immaginario, potremo trasformare agevolmente la stessa equazione cubica in un' altra del medesimo grado, ove manchi il penultimo termine, servendoci delle maniere di ciò fare esposte nel cap. 14. del trattato sopra la natura dell' equazioni del sig. de' Beaune, e dell' articolo 42. dell' Analisi dimostrata dal padre Reynau, e risolvendo con la formola dell' equazione (18) l' equazione cubica così trasformata, avremo sempre la quantità b di valore non immaginario.

COROLLARIO IX.

Cubando l' equazione (22), e operando con destrezza, si giungerà a quest' altra:

(26) $t^3=\frac{1}{2}(FF+2b^3)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(FF+2b^3)^2-4b^6}$,

ove dee concepirsi in vece di FF il suo valore:

$$\left[\begin{array}{llll} x^3+3cxx & +3ccx & +c^3 & \\ & -3bbx & -3bbc & \\ & & -2b^3 & \end{array}\right]$$

tratto dall' equazione (8), il quale non è distesamente scritto nell' equazione (26), per evitare la prolissità dell' espressione analitica, che ne risulterebbe.

Tirando pertanto la radice cubica da ambedue i membri della medesima equazione (26), si ottiene la seguente.

$$(27)\ t = \left[\tfrac{1}{2}(FF+2b^3) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(FF+2b^3)^2 - 4b^6}\right]^{\frac{1}{3}},$$

nella quale deve ora sottintendersi in luogo di $(FF+2b^3)$, il suo valore affatto cognito $\left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right]$ dedotto dall' equazioni (16), e (14), e in cambio di b^6 il suo valore desunto dall' equazione (13).

COROLLARIO X.

Pongasi per maggior brevità A eguale ad $(FF+2b^3)$, cioè ad $\left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right]$, e l' equazione (27) diverrà:

$$(28)\ t = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{AA - 4b^6}},$$

sostituiscasi nell' equazione (22) in vece di t questo suo valore, e si avrà:

$$(29)\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{AA - 4b^6}} = \tfrac{x}{2} + \tfrac{c}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(x+c)^2 - 4bb}.$$

Indi riflettasi d' una maniera somigliante a quella, che si è tenuta nel corollario IV., che siccome sussiste l' equazione (29), dee sussistere anche questa:

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{AA - 4b^6}} = \tfrac{x}{2} + \tfrac{c}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(x+c)^2 - 4bb};$$

adunque aggiungendo questa stessa ultima equazione all' equazione (29), surrogando in cambio di c il suo valore $\frac{n}{3}$, e trasponendo, si scoprirà:

$$(30)\ x + \tfrac{n}{3} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{AA - 4b^6}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{AA - 4b^6}}.$$

COROLLARIO XI.

SE poi il valore di t preso dall' equazione (28) si porrà nell' equazione (17), allora si troverà la formola, che segue:

(31)

$$(31)\quad x+\frac{n}{3}=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{AA-4b^6}}+\frac{bb}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{AA-4b^6}}}$$

ove $\frac{n}{3}$ ſta in vece di c, a cui è uguale, e in luogo di bb ſi ſottintende il ſuo valore $\frac{nn}{9}-\frac{p}{3}$ eſpreſſo nell' equazione (13).

Corolllario XII.

Uniformemente a quanto ſi è dedotto nei corollarj VI., e VII., deveſi ora dedurre:

Primo, che quantunque foſſe reale il valore di x, nientedimeno ſarebbe immaginario il valore di t, cioè di $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{AA-4b^6}}$ ſe foſſe negativa l' eſpreſſione $(x+c)^2-4bb$ (vale a dire la quantità $(xx+\frac{2nx}{3}-\frac{nn}{3}+\frac{4}{3}p)$ ad eſſa eguale), che nell' equazione (29) ſta ſotto il vincolo.

Secondo, che ancorchè foſſe razionale il valore di x, ſarebbe nulladimeno irrazionale il ſuddetto valore di t, ſe la medeſima quantità $(x+c)^2-4bb$ non foſſe un quadrato.

Laonde in queſti caſi non andrebbero libere da quantità immaginarie, ovvero reſpettivamente da quantità irrazionali le formole dell' equazioni (30), e (31), nelle quali entra il valore di t, cioè l' eſpreſſione $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{AA-4b^6}}$

Scolio II.

Quando il valore di b è nullo, allora l' equazione (30) ſi riduce a queſta: $x+\frac{n}{3}=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{\frac{n^3}{27}-q}$, e l' equazione (31) diventa

$$x+\frac{n}{3}=\sqrt[3]{A}+\frac{o}{\sqrt[3]{A}}=\sqrt[3]{\frac{n^3}{27}-q}$$

purchè nel ſegno doppio ſi faccia valere il ſuperiore, ma diverrebbe $x+\frac{n}{3}=\sqrt[3]{o}+\frac{o}{\sqrt[3]{o}}=\frac{o}{o}$

ſe nel ſegno doppio ſi prendeſſe l' inferiore.

COROLLARIO XIII.

IL confronto delle due equazioni (7), e (8) fa conoſcere, che $(GG-2b^3)$ è uguale ad $(FF+2b^3)$; adunque ponendo nel corollario IX., cioè nell' equazioni (26), e (27) l' eſpreſſione $GG-2b^3$ in vece dell' altra $FF+2b^3$, ſottintendendo poſcia in luogo di $GG-2b^3$ il ſuo valore interamente cognito $\left[\frac{np}{3}-\frac{2n^3}{27}-q\right]$ tratto dall' equazioni (15), e (14), e in cambio di b^6 il ſuo valore dedotto dall' equazione (13), e facendo nel corollario X. la A eguale a $(GG-2b^3)$, ne verranno le medeſime conſeguenze eſpreſſe ne' corollarj X., XI., XII., e nel ſecondo ſcolio.

SCOLIO III.

O' Detto nel corollario IX., che ſe ſi cuba l' equazione (22) ſi giunge all' equazione (26), ma perchè un tal calcolo recar potrebbe a taluno qualche difficoltà, non ſarà inutile, che io ſegni in queſto ſcolio i principali veſtigj, inerendo a' quali ſi arriverà facilmente dall' equazione (22) all' equazione (26).

Se dunque ſi moltiplica per 2 l' equazione (22), e ſi fa in eſſa $x+c$ eguale a D, ſi à

$$2t=D\pm\sqrt{DD-4bb},$$

e quindi, cubando l' uno, e l' altro membro, ſi ottiene

$$8t^3=D^3\pm3DD\sqrt{DD-4bb}+3D^3-12bbD\pm DD\sqrt{DD-4bb}$$
$$\mp4bb\sqrt{DD-4bb}$$

equa-

equazione, che si riduce a quest' altra:

$$8t^3 = 4D^3 - 12bbD \pm 4DD\sqrt{DD-4bb} \mp 4bb\sqrt{DD-4bb}$$

la quale divisa per 8, e ordinata a dovere somministra

$$(32)\quad t^3 = \tfrac{1}{2}\left[D^3 - 3bbD\right] \pm \tfrac{1}{2}\left[DD - bb\right]\sqrt{DD-4bb},$$

ma $(DD-bb)\sqrt{DD-4bb}$ è uguale a

$$\left[\begin{array}{l} D^6 - 2bbD^4 + b^4DD \\ \quad - 4bbD^4 + 8b^4DD - 4b^6 \end{array}\right]^{\frac{1}{2}},$$ vale a dire

$(DD-bb)\sqrt{DD-4bb}$ è uguale a $(D^6 - 6bbD^4 + 9b^4DD - 4b^6)^{\frac{1}{2}}$

donde nasce quest' equazione:

$$(33)\quad (DD-bb)\sqrt{DD-4bb} = \sqrt{(D^3-3bbD)^2 - 4b^6};$$

adunque surrogando nel secondo membro dell' equazione (32) in luogo di $(DD-bb)\sqrt{DD-4bb}$ la sua espressione equivalente tratta dall' equazione (33), si ritrova

$$(34)\quad t^3 = \tfrac{1}{2}\left[D^3 - 3bbD\right] \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(D^3-3bbD)^2 - 4b^6}.$$

Egli è visibile, che riassumendo in vece di D il suo valore $x+c$, si à $(D^3 - 3bbD$ eguale ad $\left[\begin{array}{l} x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3 \\ \quad + 3bbx - 3bbc \end{array}\right]$, cioè si à $D^3 - 3bbD$ eguale ad $FF + 2b^3$, ed anche $D^3 - 3bbD$ eguale a $GG - 2b^3$; adunque l'equazione (34) è la stessa che l'equazione (26), e conseguentemente rimangono dimostrati ambidue i corollarj IX., e XIII.

SCOLIO IV.

Il metodo comune di risolvere l'equazioni del secondo grado venendo applicato all' equazione (2) darebbe immediatamente l' equazione (22), e da questa si dedurebbe come nel precedente scolio l' equazione (34), il secondo membro della quale a dirittura si renderebbe cognito, usando verso il sopraccennato valore in x^3 ec. di $(D^3 - 3bbD)$ quel medesimo artificio, che si è tenuto per render cogniti i valori in x^3 ec., di G, e di F, espressi nell' equazioni (5), e (6), indi si avrebbero l' equazioni (28), (29), (30), e (31), procedendo come si è fatto nel corollario X.

ALTRA RESOLUZIONE

Dell' equazioni cubiche, ec.

$$x^3 + nxx + px + q = 0$$

Sia l' equazione cubica generale, che riducesi a questa:

$$\left[x + \frac{n}{3}\right]^3 = \left[\frac{nn}{3} - p\right]x + \left[\frac{n^3}{27} - q\right]$$

in luogo del di cui secondo membro si surroghi l' espressione ad esso eguale

$$\left[\frac{nn}{3} - p\right]\left[x + \frac{n}{3}\right] + \left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right],$$

indi si trasponga, e ne verrà

$$(A)\left[x + \frac{n}{3}\right]^3 - \left[\frac{nn}{3} - p\right]\left[x + \frac{n}{3}\right] - \left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right] = 0$$

Suppongasi ora quest' equazione:

$$(B)\ t + u - \left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right] = 0,$$

e si consideri, che $t + u$ è uguale a $(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u})^3 - 3\sqrt[3]{tu}\,(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}.)$
Perciò l' equazione (B) non differirà da quella che segue:

$$(C)(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u})^3 - 3\sqrt[3]{tu}\,(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}) - \left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right] = 0$$

In virtù delle due indeterminate t, ed u suppongasi ancora

$$(D)\ x + \frac{n}{3} = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$$

e l' equazione (C) apparirà

$$\left[x + \frac{n}{3}\right]^3 - 3\sqrt[3]{tu}\left[x + \frac{n}{3}\right] - \left[\frac{np}{3} - \frac{2n^3}{27} - q\right] = 0.$$

Paragonata quest' equazione coll' altra segnata (A), mostra subito $3\sqrt[3]{tu}$ eguale ad $\frac{nn}{3} - p$, cioè $\sqrt[3]{u} = \left[\frac{nn}{9} - \frac{p}{3}\right]$ div. per $\sqrt[3]{t}$.

Questo valore di $\sqrt[3]{u}$ posto nell' equazione (D) dà

$$(E)\ x + \frac{n}{3} = \sqrt[3]{t} + \left[\frac{nn}{9} - p\right] \text{ div. per } \sqrt[3]{t},$$

e lo

e lo stesso valore di $\sqrt[3]{u}$ cubato, e poscia introdotto nell' equazione (B), manifesta

$$t+\left[\frac{nn}{9}-\frac{p}{3}\right]^3 \text{ div. per } t-\left[\frac{np}{3}-\frac{2n^3}{27}-q\right]=0,$$

vale a dire moltiplicando per t,

$$tt-\left[\frac{np}{3}-\frac{2n^3}{27}-q\right]t+\left[\frac{nn}{9}-\frac{p}{3}\right]^3=0$$

equazione, che risoluta col modo ordinario, fa conoscere

$$(F)\ t=\frac{np}{6}-\frac{n^3}{27}-\frac{q}{2}\pm\left[\left(\frac{np}{6}-\frac{n^3}{27}-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{nn}{9}-\frac{p}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

Sostituiscasi il valore di t nell' equazione (B), e operando come si dee, ne proverrà

$$(G)\ u=\frac{np}{6}-\frac{n^3}{27}-\frac{q}{2}\mp\left[\left(\frac{np}{6}-\frac{n^3}{27}-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{nn}{9}-\frac{p}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

Quindi se si porranno nell' equazione (D) i valori di t, e di u tratti dalle due equazioni (F), e (G), si avrà un' espressione di x composta di quantità note; e un' altra se ne otterrà, se nell' equazione (E) si porrà lo stesso valore di t.

La stessa maniera di risolvere l' equazioni cubiche applicata alle quadratiche.

L' Equazione quadratica generale sia la seguente:

$$(H)\ xx+nx+p=0;$$

si supponga l' altra

$$(I)\ f+g+p=0,$$

e riflettasi, che $f+g$ equivale a $(\sqrt{f}+\sqrt{-g})^2-2\sqrt{-g}\,(\sqrt{f}+\sqrt{-g})$; talchè l' equazione (I) non è diversa dall' infrascritta:

$$(K)\ (\sqrt{f}+\sqrt{-g})^2-2\sqrt{-g}(\sqrt{f}+\sqrt{-g})+p=0.$$

Facciasi questa seconda supposizione:

$$(L)\ x=\sqrt{f}+\sqrt{-g}$$

e l' equazione (K) diventerà

$$xx-2\sqrt{-g}\times x+p=0.$$

Dal confronto di quest' ultima coll' equazione (H) si à: $-2\sqrt{-g}=n$; onde $\sqrt{-g}=-\frac{n}{2}$, e $g=-\frac{nn}{4}$. Il valore re di g ſoſtituito nell' equazione (I) ſomminiſtra $f - \frac{nn}{4} + p = o$, cioè $f = \frac{nn}{4} - p$, e $\sqrt{f} = \pm \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$. Come pure i valori di $\sqrt{-g}$, e di $\sqrt{f}$ poſti nell' equazione (L) paleſano:

(M) $x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$.

SCOLIO.

L' Aggregato $f + g$ è uguale ancora a queſta eſpreſſione $(\sqrt{f} - \sqrt{-g})^2 + 2\sqrt{-g}(\sqrt{f} - \sqrt{-g})$. Perciò operando in un modo ſimile a quello che ſi è tenuto, e ſupponendo $x = \sqrt{f} - \sqrt{-g}$, ſi conſeguirà la ſteſſa formola (M). Allora $\sqrt{-g}$ ſarà eguale a $\frac{n}{2}$, e g conſerverà il ſuo valore $-\frac{nn}{4}$.

AVVERTIMENTO.

DUe teoremi, da' quali ſi deduce la reſoluzione analitica d' infinite ſpecie d' equazioni ſempre più compoſte in infinito, fanno parte di uno ſchediaſma geometrico, che ſarà inſerto a ſuo luogo nel ſecondo volume.

TEO-

TEOREMA GENERALE,

Da cui ſi deduce la giuſta determinazione de' premj dovuti in ogni ſorta di lotto all' uſo di Roma per ogni ſorta di combinazioni di numeri, che in eſſi poſſa giocarſi, anche con la condizione, che i numeri delle combinazioni da giocarſi ſerbino un luogo, o ſia ordine fiſſo nell' eſtrazione.

CHiamiſi (*u*) (*) la moltitudine de' numeri, che ſtanno nell' urna, (*e*) la moltitudine de' numeri, che ſe n' eſtraggono, (*g*) la moltitudine de' numeri, che ſi giocano combinati inſieme; v. g. ſe ſi giuoca un numero ſolo, o un ambo, o un terno, ec., *g* rappreſenterà reſpettivamente un numero ſolo, o un ambo, o un terno, ec.

Chiamiſi in oltre (*f*) la moltitudine di quei numeri della combinazione (*g*), che debbono avere un luogo, o ſia ordine fiſſo nell' eſtrazione; v. g. ſe ſi giuoca un numero ſolo con queſta condizione, che il numero giocato ſia il primo eſtratto, allora *f* ſignificherà l' unità; ſe ſi giuoca un ambo con la condizione, che due, ovvero uno de' numeri dell' ambo abbiano un luogo fiſſo nell' eſtrazione, allora *f* denoterà 2, o reſpettivamente 1; ſe ſi giuoca un terno con la condizione, che tre, o due, o uno de' numeri del terno abbiano nell' eſtrazione un luogo, o ſia ordine fiſſo, allora *f* eſprimerà 3, o reſpettivamente 2, ovvero 1, e così, ec. Finalmente ſe nel numero giocato ſolo, o nell' ambo, o nel terno, ec. non vi è la condizione, che alcuno de' numeri abbia un luogo fiſſo nell' eſtrazione, in queſto caſo *f* ſignificherà zero.

DEFINIZIONI.

RAppreſentino *n*, ed *m* qualunque numero intiero con queſto, che *n* deve eſſere maggiore di *m*; ed *m* può ſignificare anche zero:

(*) Opuſcoli Calogerà tomo XII, pag. 473.

I.

Se si può concepire una progressione aritmetica *decrescente*, il di cui primo termine sia n, e l' ultimo termine sia m, e la di cui differenza sia l' unità, quest' espressione $(n,,,m)$ significa il prodotto di tutti i termini intermedj di questa progressione aritmetica, quando essa à più di tre termini, e quando ne à solamente tre, allora l' espressione $(n,,,m)$ significa l' unico termine intermedio.

II.

Ma se n, ed m sono tali, che n sia eguale ad $m+1$, allora l' espressione $(n,,,m)$ significa l' unità.

Teorema Generale.

Poste le suddette significazioni, e definizioni, e posto ancora, che (d) rappresenti la spesa contribuita dal giocatore, e (p) la ricompensa, che se gli deve allorchè vince; io dico, che sussiste l' equazione seguente:

$$(1)\quad p=\frac{(u+1,,,u-g)}{(e-f+1,,,e-g)}d-d.$$

Gl' infrascritti corollarj saranno altrettanti esempj generali di questo teorema, poichè le lettere u, ed e serberanno in essi la loro significazione generale.

Corollario I.

Se g significa un solo numero, e questo deve aver luogo fisso nell' estrazione, allora $g=1$, ed $f=1$, l' espressione $(u+1,,,u-g)$ diviene $(u+1,,,u+1)$, ed à il solo termine intermedio u; l' altra espressione $(e-f+1,,,e-g)$ diviene $(e,,,e-1)$, e per la definizione II. denota l' unità; adunque l' equazione (1) si cangia nella seguente:

$$p=ud-d.$$

Corollario II.

Se si giuoca un solo numero, e questo non deve aver luogo fisso nell' estrazione, allora $g=1$, $f=o$, l' espressione $(u+1,,,u-g)$ conserva la sua significazione u registrata nel precedente corollario

lario, l'altra espressione $(e-f+1,,,e-g)$ prende questa forma $(e+1,,,e-1)$, e denota il solo termine intermedio e; adunque dall'equazione (1) risulta:

$$p=\frac{ud}{e}-d.$$

COROLLARIO III.

SE si giuoca un ambo con la condizione, che un solo de' suoi numeri debba aver luogo fisso nell'estrazione; in tal caso $g=2$, $f=1$; tra $u+1$, ed $u-g=u-2$ cadono i due termini intermedj u, ed $u-1$; tra $e-f+1=1$, ed $e-g=e-2$ cade il solo termine intermedio $e-1$; laonde l'equazione (1) si cangia in quella che siegue:

$$p=\frac{(u.u-1)}{e-1}d-d.$$

COROLLARIO IV.

SE nell'ambo giocato ambidue i numeri debbono aver luogo fisso nell'estrazione, allora $f=2$, l'altre significazioni restano come nel corollario, che precede; tra $e-f+1=e-1$, ed $e-g=e-2$ non cade alcun termine intermedio, di maniera che l'espressione $(e-f+1,,,e-g)$ rappresenta l'unità per la definizione II.; adunque dall'equazione (1) si deduce questa:

$$p=(u.u-1)d-d.$$

COROLLARIO V.

SE poi nell'ambo giocato niun numero deve aver luogo fisso nell'estrazione; in quest'ipotesi $f=0$, l'altre significazioni rimangono come nel II. corollario; tra $e-f+1=e+1$, ed $e-g=e-2$ cadono i due termini intermedj e, ed $e-1$, e conseguentemente l'equazione (1) si muta in quella, che siegue:

$$p=\frac{(u.u-1)}{e.e-1}d-d.$$

SCOLIO.

NEl lotto di Roma u significa 90, ed e significa 5, di modochè l' ultima equazione diventa $p = \frac{90.89}{5.4} d - d = 399d + \frac{1}{2} d$ e ponendo in vece di d bajocchi quarantacinque, si vedrà, che ad un tal ambo si deve il premio di scudi 179., e baj. $77\frac{1}{2}$.

COROLLARIO VI.

SE si giuoca un terno colla condizione, che un solo de' suoi numeri abbia luogo fisso nell' estrazione; allora $g = 3$, $f = 1$; tra $u + 1$, ed $u - g = u - 3$ si frappongono i tre termini intermedj $u, u - 1$, ed $u - 2$; tra $e - f + 1 = e$, ed $e - g = e - 3$ intercedono i due termini intermedj $e - 1$, ed $e - 2$, e quindi l' equazione (1) si muta nell' infrascritta:

$$p = \frac{(u.u - 1.u - 2)}{e - 1.e - 2} d - d.$$

COROLLARIO VII.

SE nel terno giocato due numeri debbono aver luogo fisso nell' estrazione, in questo caso $f = 2$, le altre significazioni sussistono come nel corollario, che precede; tra $e - f + 1 = e - 1$, ed $e - g = e - 3$ s' interpone il solo termine intermedio $e - 2$; adunque l' equazione (1) prende questo aspetto: $p = \frac{(u.u - 1.u - 2)}{e - 2} d - d$.

COROLLARIO VIII.

MA se nel terno giocato tutti e tre i numeri aver debbono luogo fisso nell' estrazione, allora $f = 3$; le altre significazioni rimangono come nel corollario VI., tra $e - f + 1 = e - 2$, ed $e - g = e - 3$ non cade alcun termine intermedio, cosicchè in vigore della definizione II. l' espressione $(e - 2,,, e - 3)$ denota l' unità; adunque l' equazione (1) diviene la seguente:

$$p = (u.u - 1.u - 2) d - d.$$

Co-

COROLLARIO IX.

SE finalmente nel terno giocato niun numero deve aver luogo fisso nell' estrazione; in tal supposizione $f = o$; le altre significazioni restano come nel corollario VI.; tra $e - f + 1 = e + 1$, ed $e - g = e - 3$ cadono i tre termini intermedj $e, e - 1$, ed $e - 2$, e per conseguenza l' equazione (1) assume questa forma:

$$p = \frac{(u.u - 1.u - 2)}{e.e - 1\ e - 2} d - d.$$

SCOLIO.

NEl lotto di Roma dovendo u esprimer 90, ed e esprimer 5, l' ultima equazione diventa $p = \frac{90.89.88d}{5.4.3} - d = 11747d$, onde sostituendo in luogo di d tre bajocchi, e mezzo si troverà, che ad un tal terno deesi il premio di scudi 411., e baj. $14\frac{1}{2}$.

Egli è visibile, che dal teorema possono dedursi collo stesso metodo infiniti corollarj generali secondo la varia significazione, che può assegnarsi alla g, ed alla f.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA GENERALE.

Altre Definizioni.

CAso favorevole ne' lotti è quello, succedendo il quale, chi giuoca, vince.

Caso contrario è quello, succedendo il quale, chi giuoca, perde.

Caso indifferente sarebbe quello, succedendo il quale, chi giuoca non perdesse, nè vincesse.

PRINCIPIO GENERALE.

NE' lotti all' uso di Roma tra la spesa, e la ricompensa dee correre la medesima proporzione, che passa tra il numero de' casi possibili favorevoli, e il numero dei casi possibili contrarj.

La somma convenienza di questo principio è evidente, perchè è cosa giustissima, che la spesa (d) sia proporzionata alla speranza di vincere (la quale si chiami S), ed il premio (p)

sia

sia proporzionato al rischio di perdere (il quale si chiami R); ma la speranza di vincere è proporzionata al numero dei casi possibili favorevoli (qual numero dicasi F), e il rischio di perdere è proporzionato al numero dei casi possibili contrarj (qual numero dicasi C); adunque in termini analitici $d.p::S.R$, ma $S.R::F.C$, e perciò $d.p::F.C$.

Corollario.

Se la moltitudine di tutti i casi, che possono avvenire nei lotti all'uso di Roma, si chiama T, e se questi casi possibili sono tutti di tal natura, che esser debbano o favorevoli, o contrarj, e mai indifferenti; ne segue, che C (numero de' casi contrarj) sarà eguale a $T-F$, mentre in questa supposizione $T=F+C$; si avrà pertanto $d.p::F.T-F$, cioè $pF=(T-F)d$, e per conseguenza

(2) $p=\frac{Td}{F}-d$.

Lemma.

Dinotino q, r, t tre numeri interi in modo, che il primo q sia maggiore del secondo r, ed anche del terzo t, il secondo r non sia minore del terzo t, e il terzo t possa significare anche zero. Abbia l'espressione $(q,,,t)$ il significato della definizione I., ed abbiano l' espressioni $(q,,,r)$, ed $(r+1,,,t)$ il significato della definizione I., ovvero della definizione II.. Io dico, che sussiste questa equazione:

(3) $(q,,,t)=(q,,,r)(r+1,,,t)$.

Dimostrazione.

Se r è maggiore di t, l'espressione $(r+1,,,t)$ à il significato della definizione I., e rappresenta il prodotto di tutti i termini intermedj, ovvero l' unico termine intermedio, se ve n'à un solo), che si frappongono tra $r+1$, e t; ma l'espressione $(q,,,r)$ denota il prodotto di tutti i termini intermedj (ovvero l'unico termine intermedio, se ve n'à un solo), che intercedono tra q, ed r, oppure la stessa espressione $(q,,,r)$ rappresenta l'unità, se $q=r+1$, e ciò per la definizione II.;

egli

egli è dunque visibile, che il prodotto delle due espressioni $(q,,,r)$, ed $(r+1,,,t)$ denota il prodotto di tutti i termini intermedj dell'espressione $(q,,,t)$, ovvero l'unico termine intermedio, se ve n'è un solo, e conseguentemente sussiste in quest'ipotesi l'equazione (3).

Se poi r è uguale a t, allora l'espressione $(r+1,,,t)$ à il significato della definizione II., e rappresenta l'unità; adunque ancora in questo caso il prodotto delle due espressioni $(q,,,r)$, ed $(r+1,,,t)$ denota il prodotto di tutti i termini intermedj dell'espressione $(q,,,t)$, ovvero l'unico termine intermedio, se ve n'è un solo, e perciò sussiste ancora in questo caso l'equazione (3). Il che dovea dimostrarsi.

PROBLEMA.

Trovare nei lotti all'uso di Roma il numero di tutti i casi possibili favorevoli, e di tutti i casi possibili contrarj a chi giuoca una combinazione g di numeri colla condizione, che in essa si contengano f numeri, i quali aver debbano un luogo fisso nell'estrazione.

SOLUZIONE.

Poichè u esprime la moltitudine de' numeri esistenti nell'urna, ed e la moltitudine de' numeri, che se n'estraggono, si à in virtù della teoria delle combinazioni:

$$(A)\ \frac{(u+1,,,u-e)}{(e+1,,,o)}$$

pel numero di tutte le combinazioni (e), che possono escire dall'urna, ma perchè ciascuna di queste combinazioni (e) può mutare l'ordine de' numeri, de' quali è composta, tante volte, quante unità contiene questa espressione $(e+1,,,o)$, e ciò per la dottrina delle permutazioni; ne segue, che moltiplicando per quest'ultima espressione l'altra espressione (A), si avrà l'espressione $(u+1,,,u-e)$, la quale dinoterà la moltitudine T di tutti i casi possibili ad avvenire così favorevoli, come contrarj, abbiamo dunque

$$T=(u+1,,,u-e)$$

ovve-

ovvero surrogando in luogo di $(u+1,,,u-e)$ l'altra espressione $(u+1,,,u-g)(u-g+1,,,u-e)$, che gli equivale pel lemma, si otterrà:

(4) $T=(u+1,,,u-g)(u-g+1,,,u-e)$.

Dettraggasi ora la combinazione giocata g dal numero u, il resto $u-g$ comprenderà tante combinazioni designate coll' esponente $e-g$, quante unità contiene quest'espressione: $\frac{(u-g+1,,,u-g-e+g)}{(e-g+1,,,o)}$, cioè

(E) $\frac{(u-g+1,,,u-e)}{(e-g+1,,,o)}$

conforme insegna la dottrina delle combinazioni, ed ognuna di queste combinazioni $e-g$ accoppiata colla combinazione giocata g forma altrettante combinazioni (e) possibili a sortire, e contenenti in se medesime la combinazione giocata g; ma perchè questa stessa combinazione g deve in se contenere f numeri, i quali abbiano un luogo fisso nell' estrazione, ne deriva, che solamente $e-f$ numeri potranno variare l' ordine loro nella combinazione (e) da estrarsi, e (per la dottrina delle permutazioni) potendo $e-f$ numeri variare il loro luogo, o sia ordine nell' estrazione tante volte, quante unità contiene l' espressione $(e-f+1,,,o)$, chiaramente si vede, che moltiplicando per quest' ultima espressione l' altra espressione E, si troverà l' espressione

(I) $\frac{(u-g+1,,,u-e)}{(e-g+1,,,o)}(e-f+1,,,o)$.

la quale rappresenterà la moltitudine F di tutti i casi possibili favorevoli, poichè in essa espressione si contengono tutte quelle combinazioni possibili composte di e numeri, le quali comprendono in se medesime la combinazione giocata g, e la comprendono in maniera, che sortendo ciascuna di esse, f numeri della combinazione giocata g avrebbero un luogo fisso nell' estrazione.

L' espressione (I) ultimamente ritrovata, che rappresenta la moltitudine F di tutti i casi possibili favorevoli, può rendersi più semplice, ponendo in essa in vece dell' espressione $(e-f+1,,,o)$ quest' altra $(e-f+1,,,e-g)(e-g+1,,,o)$, che

che gli equivale pel lemma, mentre allora la stessa espressione I, cioè F, si cangerà nell' altra, che s' include nell' equazione seguente:

(5) $F = (u-g+1,,,u-e)(e-f+1,,,e-g)$

siccome poi è chiaro pel raziocinio sinora tenuto, che tutti gli altri casi possibili compresi nella moltitudine T, i quali non sono contenuti nell' altra moltitudine F, sono casi contrarj al giocatore, di maniera che la suddetta moltitudine T non contiene alcun caso indifferente, così in virtù del corollario del principio generale sarà

$C = T - F$

e sostituendo in quest' ultima equazione in luogo di T, e di F i loro respettivi valori espressi nell' equazioni (4), e (5), indi operando convenientemente si scoprirà

$C = (u+1,,,u-g) - (e-f+1,,,e-g)$ il tutto moltiplicato per $(u-g+1,,,u-e)$.

CorollARIO,

Che contiene la dimostrazione del teorema generale.

Si pongano nell' equazione (2) in vece di T, e di F le loro espressioni respettive contenute nell' equazioni (4), e (5), e si vedrà nascere l' equazione (1). Il che dovea dimostrarsi.

DUE PROBLEMI

Spettanti ai lotti combinatorj.

PROBLEMA I.

POſto che ne' lotti all' uſo di Roma il giocatore abbia preſo un numero di nomi, ed abbia ſpeſo a ſuo talento nel coſto de' terni compreſi in detto numero di nomi; trovare il coſto degli ambi tale, che lo ſteſſo giocatore, incontrando un ſolo ambo in tutto il numero de' nomi, non ſolo ſi rinfranchi di quanto à ſpeſo, ma di più vinca una data quantità di danaro.

SOLUZIONE.

SIa n il numero de' nomi, t il coſto di ciaſcuno de' terni, a il coſto di ciaſcuno degli ambi, q la data quantità, che il giocatore à da vincere, $\frac{d}{p}$ la ragione del coſto di un ambo al guadagno di chi vince l' ambo.

Si ſa, che nel numero n de' nomi ſi contiene queſto numero d' ambi $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$, e queſto numero di terni $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}$. Perciò il coſto di tutti gli ambi ſarà $\left[\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\right]a$, e il coſto di tutti i terni ſarà $\left[\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}\right]t$.

In oltre ſiccome negli ambi il coſto d porta il guadagno p, così il coſto a dovrà portare il guadagno $\frac{pa}{d}$, e per la condizione del problema, ſottraendo dal guadagno $\frac{pa}{d}$ il coſto di tutti gli ambi, e il coſto di tutti i terni, dee reſtare la quantità data q.

Abbiamo pertanto queſt' equazione:

$$\frac{pa}{d}-\left[\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\right]a-\left[\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}\right]t=q,$$

e trae trasponendo:

$$\frac{pa}{d} - \left[\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\right]a = q + \left[\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}\right]t;$$

Adunque:

(1) $a = q + \left[\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}\right]t$ il tutto diviso per $\frac{p}{d} - \left[\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\right]$.

Il che era a ritrovarsi.

COROLLARIO I.

SE il costo di ciascuno degli ambi à da esser tale, che il giocatore incontrando un ambo, si rinfranchi solamente di ciò, che à speso, e non vinca, nè perda; allora q sarà zero, e dall' equazione (1) nascerà quest' altra:

(2) $a = \left[\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}\right]t$ diviso per $\frac{p}{d} - \left[\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\right]$.

COROLLARIO II.

E Se il giocatore non vorrà caricare i terni in conto alcuno, in questo caso t sarà zero, e l' equazione (1) produrrà quella che siegue:

(3) $a = q$ diviso per $\frac{p}{d} - \left[\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\right]$.

COROLLARIO III.

AFfinchè il costo a di ciascuno degli ambi non sia infinito, o negativo, cioè affinchè il problema sia possibile, il denominatore de' secondi membri delle tre equazioni (1), (2), e (3) mostra, che $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$ dev' esser minore di $\frac{p}{d}$.

Applicazione di questo corollario al lotto di Roma.

NEl lotto di Roma il costo dell' ambo di quarantacinque bajocchi porta il guadagno di 120 scudi, cioè di dodici mila bajocchi; di maniera che la ragione data di $\frac{p}{d}$ sarà $\frac{12000}{45} = 266 + \frac{2}{3}$. Laonde dovendo essere $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$ minore di $\frac{p}{d}$, il numero n non potrà esser maggiore di 23..

PRO-

PROBLEMA II.

Posto ora, che ne' medesimi lotti combinatorj il giocatore abbia preso un numero di nomi, e abbia speso a sua voglia nel costo degli ambi compresi in detto numero di nomi; trovare il costo de' terni tale, che il medesimo giocatore, incontrando un sol terno in tutto il numero de' nomi, non solamente si rinfranchi di ciò, che à speso, ma di più vinca una data quantità di danaro.

SOLUZIONE.

Questo secondo problema si scioglie d' una maniera consimile a quella del primo, e simiglianti corollarj se ne inferiscono. Salve rimanendo le denominazioni date nella soluzione di detto primo problema, sia $\frac{D}{P}$ la ragione del costo di un terno al guadagno di chi vince un terno, e si chiami Q la quantità data, che à da vincersi. Sarà $\frac{Pt}{D}$ il guadagno, che dee portare il costo di un terno, e di più dovrà aggiungersi $\frac{3pa}{d}$ pel guadagno dei tre ambi, che seco trae un terno, allorchè viene ambeggiato.

Quindi seguendo le vestigie del primo problema dedurremo

$$\frac{Pt}{D} + \frac{3pa}{d} - \left[\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}\right]t - \left[\frac{n.\,n-1}{1.\,2}\right]a = Q$$

e per trasposizione

$$\frac{Pt}{D} - \left[\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}\right]t = Q + \left[\frac{n.\,n-1}{1.\,2}\right]a - \frac{3pa}{d}$$

e finalmente

(4) $t = Q + \left[\frac{n.\,n-1}{1.\,2}\right]a - \frac{3pa}{d}$ il tutto diviso per $\frac{P}{D} - \left[\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}\right]$.

COROLLARIO I.

Se tale à da essere il costo di ciascun terno, che il giocatore, vincendone uno, si rinfranchi di quanto à speso, e nulla vinca, in questo caso Q è zero, e l' equazione (4) degenera nella seguente

(5)

(5) $t = \left[\frac{n.n-1}{1.2}\right]a - \frac{3pa}{d}$ il tutto diviso per $\frac{P}{D} - \left[\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right]$.

COROLLARIO II.

SE poi il giocatore non vorrà in verun conto caricar gli ambi, l'equazione (4) somministrerà quest' altra:

(6) $t = Q$ diviso per $\frac{P}{D} - \left[\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right]$.

COROLLARIO III.

ACciò nell' equazioni (4), (5), e (6) il costo t di ciascuno de' terni non sia infinito, o negativo (ne' quali due casi il problema sarebbe impossibile) il denominatore dei secondi membri dell' equazioni suddette fa vedere, che $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ à da essere minore di $\frac{P}{D}$.

Applicazione di questo corollario al lotto di Roma.

NEl lotto di Roma il costo del terno sta al guadagno come 35 sta a $\frac{180000}{35}$; perchè un terno di trentacinque bajocchi porta il guadagno di mille, e ottocento scudi. Perciò $\frac{P}{D} = \frac{180000}{35} = 5142 + \frac{6}{7}$; adunque dovendo essere $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ minore di $5142 + \frac{6}{7}$, ne segue, che il numero n non può esser maggiore di 32.

Nel teorema antecedente; nel problema, che lo precede, e gli fa strada; e in questi due problemi si contiene, ed è come assorbita tutta la scienza del lotto di Roma, e degli altri simili, cioè le cognizioni relative ad essi, che dipendono dal raziocinio umano. Il resto esercita la vana curiosità del volgo.

GIUN-

GIUNTA ALLA TEORIA

De' Lotti combinatorj.

TEOREMA I.

LE lettere A, B, ec. rappreſentino i numeri, che ſi eſtraggono; q eſprima quanti ſe n' eſtraggono; io dico,

Che $\left[\frac{q-1}{1}\right](A+B, \text{ec.})$ è la ſomma degli ambi contenuti in A, B, ec.;

Che $\left[\frac{q-1\,.\,q-2}{1\,.\,2}\right](A+B, \text{ec.})$ è la ſomma de' terni contenuti in A, B, ec.;

Che $\left[\frac{q-1\,.\,q-2\,.\,q-3}{1\,.\,2\,.\,3}\right](A+B, \text{ec.})$ è la ſomma delle quaterne contenute in A, B, ec.;

Che $\left[\frac{q-1\,.\,q-2\,.\,q-3\,.\,q-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right]$ moltiplicato per $(A+B, \text{ec.})$ è la ſomma delle cinquine contenute in A, B, ec.

E così ſempre in infinito.

DIMOSTRAZIONE.

PEr dimoſtrare il teorema con maggior diſtinzione, ſarà bene dimoſtrarlo in cinque numeri, vale a dire quando A, B, ec. rappreſenta A, B, C, D, E, ed $A+B$, ec. denota $A+B+C+D+E$.

Gli ambi di queſta cinquina, ne' quali entra il numero A ſono quattro, cioè $\frac{q-1}{2}$. Lo ſteſſo vale in ordine agli ambi della medeſima cinquina, ne' quali entrano gli altri numeri B, C, D, E, conſiderati ad uno ad uno, come ſi è conſiderato di ſopra il numero A; adunque $(q-1)A+(q-1)B+(q-1)C+(q-1)D+(q-1)E$ è la ſomma di tutti gli ambi, che per conſeguenza è uguale a $\left[\frac{q-1}{1}\right](A+B+C+D+E)$; laonde è vera la prima parte del teorema.

La

La moltitudine de' terni della cinquina, ne' quali entra il numero A, è $\frac{q-1.q-2}{1.2}$, perchè la moltitudine degli ambi di essa cinquina, ne' quali non entra A, è la moltitudine degli ambi della quaterna B, C, D, E, cioè $\frac{q-1.q-2}{1.2}$.

Così la moltitudine de' terni della cinquina, ne' quali entra il numero B, è $\frac{q-1.q-2}{1.2}$; e lo stesso à luogo in ordine ai terni, nei quali entrano gli altri numeri C, D, E. Adunque $\frac{(q-1.q-2)}{1.2}$ molt. per $(A+B+C+D+E)$ è la somma di tutti i terni, ed è vera la seconda parte del teorema.

La moltitudine delle quaterne della cinquina, nelle quali entra il numero A, è $\frac{q-1.q-2.q-3}{1.2.3}$; perchè la moltitudine de' terni, nei quali A non entra, è la moltitudine de' terni della quaterna B, C, D, E, vale a dire è $\frac{q-1.q-2.q-3}{1.2.3}$.

La medesima ragione milita in ordine alle quaterne, nelle quali entrano gli altri numeri B, C, D, E. Adunque $\left[\frac{q-1.q-2.q-3}{1.2.3}\right]$ molt. per $(A+B+C+D+E)$ è la somma di tutte le quaterne, ed è vera la terza parte del teorema.

E' chiaro a chi ben riflette, che il simile à luogo rispetto a tutti gli altri infiniti casi del teorema; adunque egli è generalmente vero.

SCOLIO.

Allorchè la lettera q è data, potrà immediatamente ritrovarsi in virtù di questo teorema il rapporto, che anno tra di loro la somma di tutti gli ambi, la somma di tutti i terni, la somma di tutte le quaterne, ec. di qualsivoglia moltitudine di numeri A, B, ec. da estrarsi.

ESEMPJ.

Paragonando la prima, e la quarta parte del teorema, si vede, che la somma di tutti gli ambi della cinquina sta alla somma di tutte le cinquine di essa cinquina, vale a dire alla stessa unica cinquina, come 4 sta ad 1. Pa-

Paragonando la seconda, e la quarta parte del teorema, si vede, che la somma di tutti i terni della cinquina sta alla somma di tutte le cinquine di essa cinquina, vale a dire alla stessa unica cinquina, come 6 sta ad 1.

Paragonando la seconda, e la quinta parte del teorema (la quale, benchè in esso non registrata, si sottintende) apparisce, che la somma di tutti i terni della settina sta alla somma di tutte le sestine della medesima settina, come 5 sta a 2, ec., ec.

TEOREMA II.

Dinotino n, ed m due numeri interi positivi ad arbitrio, ed anche l'unità; esprima f l'esponente di qualsivoglia combinazione contenuta nella moltitudine A, B, ec. e g rappresenti l'esponente di qualunque altra combinazione *maggiore* contenuta nella stessa moltitudine A, B, ec.,

Io dico, che, se la somma di tutte le combinazioni denominate da f sta alla somma di tutte le combinazioni denominate da g, come n sta ad m, sussiste l'infrascritta equazione:

(R) $1 = (q - f . q - f - 1 \ldots . q - g + 1)n$ div. per $(f . f + 1 \ldots g - 1)m$

DIMOSTRAZIONE.

Pel teorema precedente, la somma di tutte le combinazioni denominate da f è uguale a quest'espressione:

(S) $(q - 1 . q - 2 \ldots q - f + 1)$ moltip. per $(A + B$, ec.$)$, e div. per $(1 . 2 \ldots f - 1)$,

e la somma di tutte le combinazioni denominate da g è uguale a quest'altra espressione:

(T) $(q - 1 . q - 2 \ldots q - f + 1 . q - f \ldots q - g + 1)$ moltip. per $(A + B$, ec.$)$, e div. per $(1 . 2 \ldots f - 1 . f \ldots g - 1)$.

Sarà pertanto in virtù dell'ipotesi $\frac{(T)}{(S)} = \frac{m}{n}$, donde si deduce $1 = \frac{(T)n}{(S)m}$. Ma il secondo membro di quest'equazione è uguale al secondo dell'equazione (R); adunque l'equazione (R) sussiste. Il che dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

I. QUando $f=2$, e g è maggiore di 3, l' espressione (S) dev' essere $\left[\frac{q-f+1}{f-1}\right](A+B, \text{ec.})$. L' espressione (T), e l' equazione (R) non si mutano.

II. Quando $g=f+1$, l' espressione (T) à da essere $(q-1.q-2\ldots q-f+1.q-f)$ moltip. per $(A+B, \text{ec.})$ e div.. per $(1.2\ldots f-1.f)$. L' espresisione (S) non si muta, e l' equazione (R) à da essere $1=\left[\frac{q-f}{f}\right]\left[\frac{m}{n}\right]$.

III. Quando $f=2$, e $g=3$, l' espresisone (S) è come nel I. articolo di questo scolio, l' espresisone (T) è $\left[\frac{q-f+1.q-f}{f-1.f}\right]$ $(A+B, \text{ec.})$; e l' equazione (R) è come nel II. articolo.

PROBLEMA I.

RAppresenti f l' esponente di qualsivoglia combinazione, ed $f+1$ dinoti l' esponente della combinazione *prossimamente maggiore*, trovare la moltitudine A, B, ec. dei numeri da estrarsi tale, che la somma di tutte le combinazioni denominate da f, e contenute in A, B, ec. stia alla somma di tutte le combinazioni denominate da g, e contenute nella stessa moltitudine A, B, ec. come n sta ad m.

SOLUZIONE.

PEr la condizione del problema, e pel II., e III. articolo dello scolio precedente, l' equazione (R) à da essere $1=\left[\frac{q-f}{f}\right]\left[\frac{m}{n}\right]$; adunque $q=\frac{fm}{n}+f$. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

AFfinchè il problema sia posibile $\frac{fm}{n}+f$ (e per conseguenza $\frac{fm}{n}$) dovrà essere un numero intero.

Esempj.

Se $n=m$; ſarà $q=2f$. Se $n=f$; ſarà $q=m+f$. Se $n=1$, ſarà $q=fm+f$. Se $f=bn$; ſarà $q=bm+f=(n+m)b$. Se $n=2, f=2$, ed $m=3$; ſarà $q=5$.

Quindi appariſce, che nella cinquina la ſomma di tutti gli ambi ſta alla ſomma di tutti i terni, come 2 ſta a 3.

Se $n=3, f=3$, ed $m=4$; ſarà $q=5$. Di maniera che nella cinquina la ſomma di tutti i terni ſta alla ſomma di tutte le quaterne, come 3 ſta a 2.

Se $n=4, f=4$, ed $m=1$; ſarà $q=5$. E perciò nella cinquina la ſomma di tutte le quaterne ſta alla ſomma di tutte le cinquine (vale a dire alla ſteſſa unica cinquina) come 4 ſta ad 1.

Teorema III.

Nel ſecondo membro dell' equazione (V), che ſegue, i fattori del numeratore ſiano in progreſsione aritmetica, e così i fattori del denominatore, e tanti ſieno gli uni, quanti gli altri.

$$(V)\quad 1=(q+t.q+t+d.q+t+2d \text{ ec.}) \text{ div. per } (u.u+d.u+2d \text{ ec.});$$

io dico, che $q=u-t$.

Prima Dimostrazione.

L'Equazione (V) equivale a queſt' altra:

$$(X)\, 1=\frac{q+t}{u}\times\frac{q+t+d}{u+d}\times\frac{q+t+2d}{u+2d}\times \text{ ec.}$$

la quale è ſuſsiſtente, allorchè $q+t=u$, cioè $q=u-t$; mentre in tale ſuppoſizione l' equazione (X) diviene $1=1\times1\times1$ ec. $=1$, e conſeguentemente anche l' equazione (V) diviene $1=1$; adunque $q=u-t$. Il che dovea dimoſtrarſi.

Seconda Dimostrazione.

Prendendo i logaritmi dei due membri dell' equazione (V), e operando col dovuto accorgimento ſi trova

$$o=\log.(q+t.q+t+d.q+t+2d \text{ ec.})-\log.(u.u+d.u+2d \text{ ec.}), \text{ vale a dire}$$

$l.(q+t.q+t+d.q+t+2d$ ec.$)=l.(u.u+d.u+2d$ ec.$)$, e conseguentemente
$l.q+t+l.q+t+d+l.q+t+2d$ ec.$)=l.u+l.u+d+l.u+2d$ ec.$)$.

Egli è visibile, che quest' equazione sarà sussistente, ove sussistano le seguenti parziali equazioni $l.q+t=l.u$; $l.q+t+d=l.u+d$; $l.q+t+2d=l.u+2d$ ec., la prima delle quali mostra $q+t=u$, cioè $q=u-t$, e ciascuna delle altre fa conoscere questo medesimo valore di q; adunque, ec. Il che dovea dimostrarsi.

Corollario.

Se si avrà quest' equazione
(Z) $1=(q-r.q-r-1.q-r-2$ ec.$)$ div. per $(u.u-1.u-2$ ec.$)$.
Si avrà eziandio $q=r+u$; perchè in questo caso $t=-r$, e $d=-1$.

Problema II.

Trovare la moltitudine de' numeri A, B, ec. da estrarsi tale, che la somma di tutte le combinazioni denominate da f, e contenute in A, B, ec. sia eguale alla somma di tutte le combinazioni denominate da g, e contenute nella stessa moltitudine A, B, ec.

Soluzione.

Facendo $n=m$, e rovesciando il denominatore del secondo membro dell' equazione (R), ne verrà una, che sarà rappresentata dall' equazione (Z); mentre r può significare f, ed u può denotare $g-1$. Quindi pel corollario del teorema III., si avrà $q=f+g-1$. Il che dovea dimostrarsi.

Esempj.

Se $f=2$, e $g=4$; sarà $q=5$; e perciò nella cinquina la somma di tutti gli ambi è uguale alla somma di tutte le quaterne. Se $f=2$, e $g=5$; sarà $q=6$, ec. ec.

 Co-

COROLLARIO.

POssono variare i numeri f, e g considerati a parte, senza che vari l' espressione $f+g-1$, cioè la moltitudine A, B, ec.

ESEMPJ.

NElla settina la somma di tutti gli ambi è uguale alla somma di tutte le sestine, e la somma di tutti i terni è uguale alla somma di tutte le cinquine; perchè tanto $2+6$, quanto $3+5$ sono eguali ad 8, e $8-1=7$.

Nella novina la somma di tutti gli ambi è uguale alla somma di tutte le ottine; la somma di tutti i terni è uguale alla somma di tutte le settine, e la somma di tutte le quaterne è uguale alla somma di tutte le sestine, perchè $2+8=3+7=4+6=10$, e $10-1=9$.

PROBLEMA III.

TRovare la moltitudine dei numeri A, B, ec. da estraersi tale, che la somma di tutte le combinazioni denominate da f, e contenute in A, B, ec. stia alla somma di tutte le combinazioni denominate da g, e contenute nella stessa moltitudine A, B, ec., come f sta a g.

SOLUZIONE.

NEll' equazione (R) pongasi f in luogo di n, e g in cambio di m, e operando a dovere, si conseguirà quest' altra:
$1=(q-f.q-f-1\ldots q-g+2.q-g+1)$ div. per $g.g-1.g-2\ldots f+1)$, che essendo rappresentata dall' equazione (Z), se ne deduce pel corollario del teorema III. $q=f+g$. Il che dovea ritrovarsi.

ESEMPJ.

SE $f=2$, e $g=3$; sarà $q=5$. Cosicchè nella cinquina la somma di tutti gli ambi sta alla somma di tutti i terni, come 2 sta a 3. Il che si è dedotto anche dal problema I.

Se $f=3$, e $g=6$, sarà $q=9$, cioè nella novina la somma

di

di tutti i terni sta alla somma di tutte le sestine, come 3 sta a 6, ovvero come 1 sta a 2, ec.

PROBLEMA IV.

TRovare la moltitudine de' numeri *A*, *B*, ec. ec. da estrarsi tale, che la somma di tutte le quaterne di *A*, *B*, ec. stia alla somma di tutte le settine della stessa moltitudine *A*, *B*, ec., come 20 sta ad 1.

SOLUZIONE.

NEl secondo membro dell' equazione (R) pongasi 4, e 7 in luogo respettivamente di f, e di g; e 20, ed 1 in cambio di n, e di m. Si avrà $1 = (q-4.q-5.q-6.20)$ div. per $(4.5.6)$. E perchè $20 = 4.5$; sarà $1 = (q-4.q-5.q-6.4.5)$ div. per $(4.5.6)$; e perchè in oltre $6 = 3.2.1$; sarà in fine $1 = \frac{q-4.q-5.q-6}{3.2.1}$; adunque pel corollario del teorema III. $q = 7$. Il che dovea ritrovarsi.

Qui la somma di tutte le settine è la stessa unica settina.

PROBLEMA V.

TRovare la moltitudine de' numeri *A*, *B*, ec. da estrarsi tale, che la somma di tutti gli ambi di *A*, *B*, ec. stia alla somma di tutte le sestine della stessa moltitudine *A*, *B*, ec., come 1 sta a 42.

SOLUZIONE.

I Numeri 2, e 6 posti respettivamente in luogo di f, e di g, e i numeri 1, e 42 posti similmente in cambio di n, e di m nel secondo membro dell' equazione (R), danno $1 = (q-2.q-3.q-4.q-5)$ div. per $(2.3.4.5.42)$. Ma $42 = 2.3.7$; e perciò $1 = (q-2.q-3.q-4.q-5)$ div. per $(2.3.4.5.2.3.7)$. Si rifletta, che $5.2 = 10$, che $3.3 = 9$, che $2.4 = 8$. Si vedrà, che $1 = (q-2.q-3.q-4.q-5)$ div. per $(10.9.8.7$; e pel corollario del teorema III., si avrà $q = 12$. Il che dovea ritrovarsi.

PRO-

PROBLEMA VI.

Trovare la moltitudine de' numeri *A*, *B*, ec. da estrarsi tale, che la somma di tutte le cinquine di *A*, *B*, ec. stia alla somma di tutte le novine della stessa moltitudine *A*, *B*, ec., come 14 sta a 3.

SOLUZIONE.

Surrogando 5, e 9 in luogo respettivamente di f, e di g; e così i numeri 14, e 3 in vece di n, e di m nell' equazione (R), si otterrà $1 = (q-5 \cdot q-6 \cdot q-7 \cdot q-8 \cdot 14)$ div. per $(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3)$. E per essere $14 = 2 \cdot 7$, e $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, si vedrà essere $1 = (q-5 \cdot q-6 \cdot q-7 \cdot q-8)$ div. per $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)$; laonde pel corollario del terzo teorema $q = 11$. Il che dovea ritrovarsi.

PROBLEMA VII.

Trovare la moltitudine de' numeri *A*, *B*, ec. da estrarsi tale, che la somma di tutte le cinquine di *A*, *B*, ec. stia alla somma di tutte le ottine della stessa moltitudine *A*, *B*, ec., come 7 sta a 24.

SOLUZIONE.

Facciasi $f = 5$, $g = 8$, $n = 7$, $m = 24$, e l' equazione (R) diverrà $1 = (q-5 \cdot q-6 \cdot q-7 \cdot 7)$ div. per $(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 24)$. Ora $24 = 3 \cdot 8$, e $6 = 2 \cdot 3$; adunque $1 = (q-5 \cdot q-6 \cdot q-7)$ div. per $(5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8)$, cioè $1 = \frac{q-5 \cdot q-6 \cdot q-7}{10 \cdot 9 \cdot 8}$. Talchè pel corollario del teorema III. $q = 15$. Il che dovea ritrovarsi.

SCOLIO.

I. Questi sette problemi sono inversi; perchè si cerca in essi il valore di q. Le soluzioni degli ultimi quattro mostrano la via per giugnere allo scioglimento d' altri dello stesso genere, o per giudicare della loro impossibilità.

II. Con maniera simile a quella, che si è qui tenuta per sciogliere i sette problemi inversi (concernenti la *somma* degli ambi, la *somma* de' terni, la *somma* delle quaterne, ec. ec. della la moltitudine A, B, ec. *non data*, con maniera ſimile, dico, ſi ſcioglieranno ſimili problemi inverſi concernenti il *numero* degli ambi, il *numero* de' terni, il *numero* delle quaterne, ec. ec. della ſteſſa moltitudine A, B, ec. non data. Eccone un eſempio.

PROBLEMA VIII.

TRovare la moltitudine q tale, che il numero delle ſue quaterne ſtia al numero delle ſue ſettine, come 35 ſta a 286.

SOLUZIONE.

IL numero delle quaterne di q è $(q.q-1.q-2.q-3)$ div. per $(1.2.3.4)$, e il numero delle ſettine di q è $(q.q-1.q-2.q-3.q-4.q-5.q-6)$ div. per $(1.2.3.4.5.6.7)$. Dividaſi la ſeconda eſpreſſione per la prima, e a tenore del problema ſi vedrà eſſere $\frac{q-4.q-5.q-6}{5.6.7} = \frac{286}{35}$. Si ſurroghi in queſta equazione in vece del ſecondo membro l' equivalente $\frac{13.11.2}{7.5}$, indi operando, come ſi deve, ſi conſeguirà $1 = (q-4.q-5.q-6)$ div. per $(6.13.11.2)$ vale a dire div. per $(13.12.11)$; adunque pel coroll. del teor. III., $q=17$. Il che dovea ritrovarſi.

PROBLEMA IX.

TRovare la moltitudine q tale, che la ſomma di tutte le combinazioni denominate da f, e contenute in q ſtia alla ſomma di tutte le combinazioni denominate da g, e contenute in q, come $q-f+1$ ſta a g; ovvero come $(q-f+h\ldots q-f+1)$ ſta a $(g+h-1\ldots g)$.

AVVERTIMENTO.

LE due ultime eſpreſſioni analitiche ſignificano due prodotti di più fattori, che ſono in progreſſione aritmetica decreſcente, e la differenza di queſte due progreſſioni è l' unità. La lettera h rappreſenta qualſivoglia numero intero poſitivo, e tanti ſono i fattori di ciaſcuna delle ſuddette due eſpreſſioni, quante unità contiene il numero h.

SOLUZIONE.

PRimieramente pongaſi $q-f+1$ in luogo di n, e g in luogo di di m nel secondo membro dell' equazione (R), indi si dispongano a dovere il numeratore, e il denominatore di esso, e si otterrà

(Y) $1 = (q - f + 1 . q - f \ldots q - g + 1)$ div. per $(g . g - 1 \ldots f)$.

Quest' equazione è rappresentata dall' equazione (Z), perchè r può significare $+ f - 1$, siccome u può denotare g.

Secondariamente si sostituisca nell' equazione (R) in vece di n l' espressione $(q - f + b \ldots q - g + 1)$, e in vece di m l' espressione $(g + b - 1 \ldots g)$; diasi la debita disposizione al numeratore, e al denominatore di essa equazione (R), e ne verrà

(&) $1 = (q - f + b . q - f + b - 1 \ldots q - g + 1)$ div. per $(g + b - 1 . g + b - 2 \ldots f)$.

Ancora quest' equazione è rappresentata dall' equazione (Z); mentre r può denotare $f - b$, ed u può esprimere $g + b - 1$.

Ora in virtù del corollario del terzo teorema si deduce primieramente dall' equazione (Y) $q - f + 1 = g$; e secondariamente dall' equazione (&) $q - f + b = g + b - 1$, e ciascuna di queste due ultime equazioni fa conoscere $q = f + g - 1$. Il che dovea ritrovarsi.

Il secondo articolo del precedente scolio à luogo ancora in ordine a questo problema, come pure in ordine al teorema, che segue, e allo scolio, che gli è annesso.

TEOREMA IV.

Si rovesci il denominatore del secondo membro dell' equazione (R) per avere la seguente:

(RR) $1 = (q - f . q - f - 1 \ldots q - g + 1) n$ div. per $(g - 1 \ldots f + 1 . f) m$.

Se si prendono tali valori di n, e di m, che si aumenti egualmente, e nel numeratore, e nel denominatore dell' equazione (RR) la moltitudine dei loro fattori, salva la continuata progressione aritmetica, con cui essi decrescono; che si aumenti, dissi, egualmente la moltitudine degli stessi fattori, o dalle parti *sinistre* del numeratore, e del denominatore, come nell' *antecedente problema*: o dalle parti *destre* del numeratore, e del denominatore: o dalle parti *sinistre*, *e destre insieme* del numeratore, e del denominatore; io dico, che sarà sempre $q = f + g - 1$.

Ma se si aumenta egualmente la moltitudine degli stessi fattori dalla parte *sinistra* del numeratore, e dalla parte *destra* del denominatore, ed il maggior de' fattori del nuovo numeratore è $q \mp H$; io dico, che $q = g \pm H - 1$.

Quando qui à da valere il segno inferiore, H non deve esser maggiore di $g - 3$.

In fine, se si aumenta egualmente la moltitudine de' fattori dalla parte *destra* del numeratore, e dalla parte *sinistra* del denominatore, ed il maggiore dei fattori del denominatore è $g + P$; io dico, che $q = g + P + F$.

SCOLIO.

I. DA questo teorema possono dedursi le soluzioni di altri quattro problemi simiglianti al nono. La dimostrazione poi di esso teorema non sarà difficile a formarsi da chi à compreso il terzo teorema, il suo corollario, e lo scioglimento dell' ultimo problema.

II. I valori di n, e di m possono esser tali, che l' equazione (RR) si converta in questa

(RRR) $1 = (q - f . q - f - 1 \ldots q - g + 1) K$ div. per $(z . z - 1$ ec.$) L$

dovendosi avvertire, che l' espressione $(z . z - 1$, ec.$)$ denota un prodotto di fattori decrescenti in progressione aritmetica, la di cui differenza è l' unità: che la moltitudine di essi fattori è uguale alla moltitudine dei fattori del prodotto $(g - 1 \ldots f + 1 . f)$.

Nel tempo stesso poi i valori di K, e di L possono esser tali, che accada all' equazione (RRR) il simile di ciò, che nel teorema presente si è veduto poter accadere all' equazione (RR) in virtù dei valori di n, e di m assumibili rispetto a quella.

In tali casi dunque avrà luogo un altro teorema simigliante a quest' ultimo. Io mi dispenso dallo stendere l' enunciazione di sì fatto teorema, bastandomi di averlo semplicemente accennato. Esso potrà dimostrarsi d' una maniera simile a quella, con cui si dimostrerebbe il teorema presente, e potranno inferirsene le soluzioni d' altri problemi.

CONTINUAZIONE

DEL PRECEDENTE SCHEDIASMA.

Rifleſſioni circa il primo Teorema di eſſo.

I. SE ſi vuole immaginare, che l'aggregato de' numeri A, B, C, D, E, ec. ſia una progreſsione aritmetica, di cui A ſia il primo termine, e d la differenza; l'ultimo termine di tal progreſsione continuata ad arbitrio ſi eſprimerà in queſta guiſa $A+(q-1)d$: poichè la q rappreſenta la moltitudine de' termini. Perciò la ſomma del primo, e dell'ultimo termine ſarà $2A+(q-1)d$, e la ſomma di tutti i termini ſarà $2A+(q-1)d$ il tutto moltiplicato per $\frac{1}{2}q$, conforme è noto per gli elementi di matematica, vale a dire ſi avrà

$$(SS)\quad A+B+C+D+E \text{ ec.} = \frac{2qA+(q-1)qd}{2}$$

d eſprime qualſivoglia numero poſitivo, o negativo, ed A qualunque numero poſitivo, o negativo, ed anche zero.

II. E ſe di più ſi vuole, che A, e d ſiano eguali all'unità poſitiva, ſi avrà

$$A+B+C+D+E \text{ ec.} = 1+2+3+4+5 \text{ ec.} = 2q-\frac{(q-1)}{2}q = q\frac{(q+1)}{2}.$$

III. Serve tutto queſto per moſtrare un ſaggio dell'applicabilità del primo teorema; imperciocchè A, B, C, D, E, ec. potrebbe denotare qualunque ſerie di numeri, anche preſcindendo dall'eſtrazioni dei lotti, e allora q denoterebbe quanti foſſero i termini della medeſima ſerie.

Nel caſo ſemplicisſimo del ſecondo articolo la q non ſolo denota la moltitudine de' termini, ma rappreſenta eziandio l'ultimo termine della progreſsione aritmetica A, B, C, D, E, ec. continuata quanto ſi vuole, qual progreſsione è la ſerie de' numeri naturali.

IV.

IV. In questo caso adunque rimane dimostrato in virtù del primo teorema, che in 1, 2, 3, 4, 5....q.

La somma degli ambi è $(q.q+1.q-1)$ div. per 2.

La somma de' terni è $(q.q+1.q-1.q-2)$ div. per 2.2

La somma delle quaterne è $(q.q+1.q-1.q-2.q-3)$ div. per 2.2.3

La somma delle cinquine è $(q.q+1.q-1.q-2.q-3.q-4)$ div. per 2.2.3.4

E generalmente la somma delle combinazioni maggiori denominate da f è

$(q.q+1.q-1.q-2.q-3.q-4.....q-f+1)$ div. per 2.2.3.4....$f-1$

V. Se il numero q è infinito, allora l' equazione (SS) del primo articolo diviene A, B, C, D, E, ec. $=\frac{dqq}{2}$, cioè $A+A+d+A+2d+A+3d+A+4d$, ec. $=\frac{dqq}{2}$. E pel primo teorema si vede, che nella progressione aritmetica A, $A+d$, $A+2d$, ec. continuata in infinito, cioè in modo, che la q dinoti un numero infinito.

La somma degli ambi è dq^3 div. per 2

La somma de' terni è dq^4 div. per 2.2

La somma delle quaterne è dq^5 div. per 2.2.3

La somma delle cinquine è dq^6 div. per 2.2.3.4

E generalmente la somma delle combinazioni maggiori denominate da f è dq^{f+1} div. per 2.2.3.4....$f-1$

Può notarsi, che le formole di questo articolo rimangono invariate, quantunque possa variare in infiniti modi il numero A, ed essere ancora positivo, o negativo, o zero; e quantunque la moltitudine q de' termini resti la medesima.

VI. La serie 1, 2, 3, 4, 5, ec. considerata nel quarto articolo è la serie dei numeri, che si chiamano del *prim' ordine*. Se si vuole adesso, che l'aggregato A, B, C, D, E, ec. rappresenti la serie dei numeri chiamati del *second' ordine*, continuata quanto si vuole, e che il primo termine A sia l' unità, come pure, che la q dinoti la moltitudine de' termini di tal serie: Si rifletta, che la somma dei termini suddetti è ugua-

 le

le a queſt'eſpreſsione $(q.q+1.q+2)$ div. per 2.3, come s' inſegna negli elementi di matematica.

Adunque mediante il primo teorema ſi ſcopre, che nella ſerie de' numeri del *ſecond' ordine*, continuata a piacimento, cioè in 1, 3, 6, 10, 15, 21, ec.

La ſomma degli ambi è $(q.q+1.q+2.q-1)$ div. per 2.3

La ſomma de' terni è $(q.q+1.q+2.q-1.q-2)$ div. per $2.2.3$

La ſomma delle quaterne è $(q.q+1.q+2.q-1.q-2.q-3)$ div. per $2.2.3.3$

La ſomma della cinquine è $(q.q+1.q+2.q-1.q-2.q-3.q-4)$ div. per $2.2.3.3.4$

La ſomma delle ſeſtine è $(q.q+1.q+2.q-1.q-2.q-3.q-4.q-5)$ div. per $2.2.3.3.4.5$

E generalmente la ſomma delle combinazioni maggiori denominate da f è

$(q.q+1.q+2.q-1.q-2.q-3.q-4.q-5 \ldots q-f+1)$ div. per $(2.2.3.3.4.5 \ldots f-1)$

VII. In fine l'aggregato A, B, C, D, E, ec. eſprima la ſerie de' numeri chiamati del *terz' ordine*, continuata ad arbitrio; il primo termine A di eſsa ſerie ſia l'unità, e q indichi la moltitudine de' ſuoi termini: La ſomma di queſti termini ſarà $(q.q+1.q+2.q+3)$ div. per $2.3.4$, per gli elementi di matematica.

Quindi è, che a tenore del primo teorema nella ſerie dei numeri del *terz' ordine*, continuata quanto ſi vorrà, vale a dire in 1, 4, 10, 20, 35, 56, ec.

La ſomma degli ambi è $(q.q+1.q+2.q+3.q-1)$ div. per $2.3.4$

La ſomma de' terni è $(q.q+1.q+2.q+3.q-1.q-2)$ div. per $2.2.3.4$

La ſomma delle quaterne è $(q.q+1.q+2.q+3.q-1.q-2.q-3)$ div. per $2.2.3.4$

La ſomma delle cinquine è $(q.q+1.q+2.q+3.q-1.q-2.q-3.q-4)$ div. per $2.2.3.3.4.4$

La ſomma delle ſeſtine è $(q.q+1.q+2.q+3.q-1.$

$q-2 . q-3 . q-4 . q-5$) div. per $2 . 2 . 3 . 3 . 4 . 4 . 5$

La somma delle settine è ($q . q+1 . q+2 . q+3 . q-1 . q-2 . q-3 . q-4 . q-5 . q-6$) div. per $2 . 2 . 3 . 3 . 4 . 4 . 5 . 6$

E generalmente la somma delle combinazioni maggiori denominate da f è

($q . q+1 . q+2 . q+3 . q-1 . q-2 . q-3 . q-4 . q-5 . q-6 \ldots\ldots q-f+1$) div. per $2 . 2 . 3 . 3 . 4 . 4 . 5 . 6 \ldots\ldots f-1$

VIII. Con simigliante metodo si procederà circa le serie de' numeri chiamati del *quarto*, del *quinto*, del *sesto ordine*, ec. in infinito. Anzi più speditamente così.

Per avere la somma delle combinazioni denominate da f contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* b, si rifletta, che per gli elementi di matematica la somma de' termini di questa serie dovrà essere ($q . q+1 \ldots q+b$) div. per $1 . 2 . 3 \ldots\ldots b$ ambedue progressioni aritmetiche., ec. Adunque pel primo teorema la somma delle combinazioni denominate da f contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* b à da essere

(TT) ($q . q+1 \ldots q+b . q-1 . q-2 \ldots q-f+1$) div. per $1 . 2 . 3 \ldots b+1 . 1 . 2 \ldots f-1$

Anche $1 . 2 . 3 \ldots b+1$, ed $1 . 2 \ldots f-1$ sono progressioni aritmetiche, ec.

IX. Se il numero q è infinito, vale a dire, se la serie de' numeri dell' *ordine* b si considera continuata in infinito, allora la formola (TT) si muta in quest' altra

(VV) q^{b+f} div. per $1 . 2 \ldots\ldots b+1 . 1 . 2 \ldots f-1$

che rappresenta la somma delle combinazioni denominate da f contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* b continuata in infinito.

X. Dal precedente articolo io deduco il seguente.

TEOREMA GENERALE.

SI considerino le serie de' numeri dell' *ordine* b, e dell' *ordine* $f-2$, e si concepisca, che ambedue siano *continuate in infinito*; io dico, che la somma delle combinazioni denominate da f contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* b è uguale alla somma delle combinazioni denominate da $b+2$ contenute nella serie dell' ordine $f-2$.

Dall'

Dall' enunciazione di questo teorema apparisce, che f dev' essere maggiore di 2.

DIMOSTRAZIONE.

SI surroghi nella formola (VV) $f-2$ in luogo di b, ed $b+2$ in luogo di f, e si otterrà

(XX) $q^{f-2+b+2}$ div. per $1,2\ldots f-1.1.2\ldots b+1$

espressione, che in virtù del IX. articolo rappresenta la somma delle combinazioni denominate da $b+2$ contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* $f-2$ continuata in infinito.

Ma è visibile, che l' espressione della formola (VV) è uguale all' espressione della formola (XX) adunque la somma delle combinazioni denominate da f, contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* b continuata in infinito, è uguale alla somma delle combinazioni denominate da $b+2$, contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* $f-2$ continuata in infinito. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

SE il numero q, benchè non infinito, fosse enormemente grande rispetto ai numeri $b+1$, ed $f-1$; allora questo teorema potrebbe reputarsi presso che vero: vale a dire sottraendo dal maggiore il minor membro dell' equazione espressa nel teorema, il residuo sarebbe quasi trascurabile per rapporto a ciascun membro della medesima equazione.

ESEMPIO I.

SE $f=4$, ed $b=1$; sarà $b+2=3$, ed $f-2=2$, cioè la somma delle quaterne contenute nella serie dei numeri del *primo ordine* continuata in infinito, è uguale alla somma de' terni contenuti nella serie de' numeri del *secondo ordine* continuata in infinito.

ESEMPIO II.

SE $f=5$, ed $b=2$; sarà $b+2=4$, ed $f-2=3$; cioè la somma delle cinquine contenute nella serie dei numeri del *se-*

condo

condo ordine continuata in infinito è uguale alla somma delle quaterne contenute nella serie dei numeri del *terzo ordine* continuata in infinito.

ESEMPIO III.

SE $f=3$, ed $b=3$; sarà $b+2=5$, ed $f-2=1$, cioè la somma dei terni contenuti nella serie dei numeri del *terzo ordine* continuata in infinito, è uguale alla somma delle cinquine contenute nella serie dei numeri del *primo ordine* continuata in infinito.

ESEMPIO IV.

E Generalmente. Se rimane ad f la sua indeterminata significazione, ed $b=f$; sarà $b+2=f+2$, ed $f-2$ resterà $f-2$. Quindi la somma delle combinazioni denominate da f contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* f continuata in infinito, è uguale alla somma delle combinazioni denominate da $f+2$ contenute nella serie de' numeri dell' *ordine* $f-2$ continuata in infinito.

ESEMPIO V.

SIgnifica r qualsivoglia numero intero positivo, ed anche l' unità, e zero.

Se $f=4+r$, ed $b=1+r$, sarà $b+2=3+r$, ed $f-2=2+r$. Perciò la somma delle combinazioni denominate da $4+r$ contenute nella serie dei numeri dell' *ordine* $1+r$ continuata in infinito, è uguale alla somma delle combinazioni denominate da $3+r$ contenute nella serie dei numeri dell' *ordine* $2+r$ continuata in infinito.

Questo esempio comprende il primo, e il secondo; supponendo prima $r=0$; e poi $r=1$.

ESEMPIO VI.

RItenga r la significazione di prima.

Se $f=5\pm r$, ed $b=2\pm r$; sarà $b+2=4\pm r$, ed $f-2=3\pm r$. Laonde la somma delle combinazioni denominate da

$5\pm r$

$5 \pm r$ contenute nella ſerie de' numeri dell' *ordine* $2 \pm r$ continuata in infinito, è uguale alla ſomma delle combinazioni denominate da $4 \pm r$ contenute nella ſerie dei numeri dell' *ordine* $3 \pm r$ continuata in infinito.

Ancora queſt' eſempio comprende il primo, e il ſecondo; ſupponendo prima $r = -1$, e poi $r = 0$.

Allorchè nel ſegno doppio vale l' inferiore, r non può eſſer maggiore dell' unità, e così nel ſeguente ſcolio. Ciò avviene a cauſa di $b = 2 \pm r$, la quale b non à da eſſere negativa, nè nulla.

SCOLIO.

SE $f = 4 \pm r$, ed $b = 2 \pm r$, ſarà $b + 2 = 4 \pm r$, ed $f - 2 = 2 \pm r$. Coſicchè queſt' ipoteſi conduce ad una propoſizione identica.

Per altro potranno i lettori dedurre quanti eſempj vorranno. Piace allo ſpirito lo ſpaziar qualche volta nei campi dell' infinito.

Fine del Tomo primo.