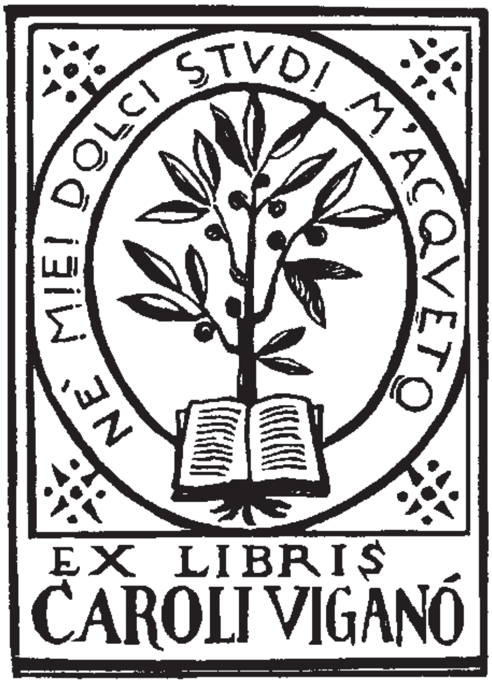

NÉ MIEI DOLCI STVDI M'ACQVETO
EX LIBRIS
CAROLI VIGANÓ

DELL'ARITMETICA
COMUNE E SPECIOSA
TRATTATO

DI D. FRAN.co SAVERIO BRUNETTI

Cappellano della Santità di Noſtro Signore
Papa CLEMENTE XII.

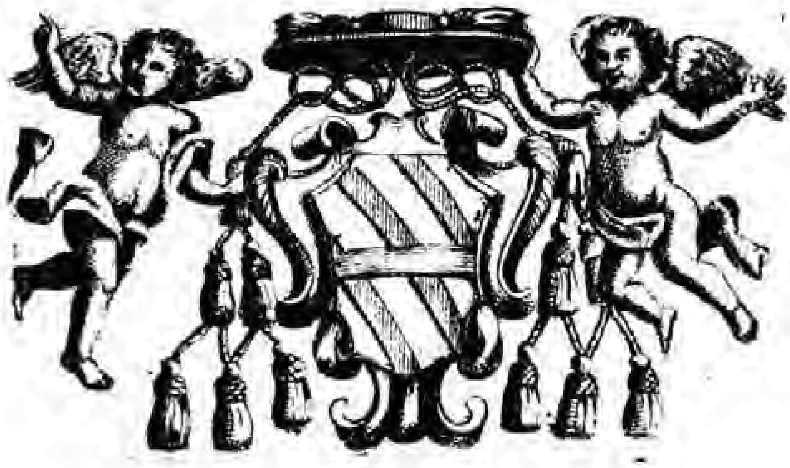
DEDICATO

All' Emin.mo e Rever.mo Principe

IL SIG. CARDINALE

NERIO CORSINI

Nipote della SANTITA' SUA



In ROMA, preſſo Rocco Bernabò, MDCCXXXI.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Eminentissimo, e Reverendissimo

PRINCIPE

COSA *alcuna non v'è, che io abbia più vivamente desiderata, che la protezione veneratissima di V. E.; ma perchè senza veruna sorta di merito non ho creduto possibile di potermela guadagnare, mi sono lusingato, che col dedicarle queste primi-*

zie del mio povero ingegno, o l' E. V. me la dovesse accordare, o almeno non potesse negarmela apertamente. L'opera in se stessa, come V. E. vedrà, è piena di fatica, ed è un risultato di lunghi ed ostinatissimi studj, i quali mi ha reso però leggieri, e soavi l'incredibile amore, che ho sempre avuto per queste bellissime scienze, ed esse non posso negare, che non mi abbiano reso in grandissima parte il contracambio. Imperochè per loro cagione mi condussi dall' angustie del mio paese a questa vastissima Roma, Capo dell' Universo, dove ebbi la gran fortuna d' umiliarmi a V. E. ed essere ammesso, mercè d'un suo favorevole rescritto, nel numero de' Cappellani del Regnante Pontefice suo Zio. Ed oh volesse l'Altissimo Iddio, che questo mio libro qualunque sia per essere accolto dal Publico, riuscisse grato all' E. V., che allora sì che non avrei più altro che desiderare; e se io riguardo all'indole benignissima di V. E., ed alla naturale sua inclinazio-

ne

ne nel favorire le belle arti, ho fondamento fermissimo da sperarlo: ma pure (se per mera rozzezza dell' ottusa mia mente non avessi colpito felicemente nel segno) ho una più che certa fiducia, che l'E.V. non sarà per avvilire l'animo mio con un dovuto disprezzo, ma confortarlo ed accrescerlo con l'incredibile sua amorevolezza ed inesplicabile umanità. Del rimanente non tema l'E.V., che io sia per entrare nel vastissimo Pelago delle Prerogative insigni dell' Eccellentissima Sua Casa, e specialmente della ragguardevolissima Persona sua, perchè queste vorrebbero un libro apparte; e poi sono tanto note, che averei timore, oscurandole colla bassezza del mio stile, ritrarne più tosto riprensione che lode. Inoltre chi non sa l'animo veramente grande e generoso dell' E.V., e l'abborrimento vero, che Ella ha ad ogni genere di lode ancor che meritata per l'aperta inimicizia, che passa tra V.E., ed ogni sorta d'adulazione. Quel-

lo

lo dunque, che io le prometto di fare, sarà di pregare in ogni tempo, e massimamente dal sagro Altare ogni più vera felicità all' E.V., ed una lunghissima vita al regnante Sommo Pontefice acciocchè il Mondo Cattolico goda per molto tempo i vantaggi così bene sperimentati del giustissimo, e pietosissimo suo governo; e con profondissimo ossequio mi dichiaro.

Di V. E.

Umiliss. Divotiss. ed Obbligatiss. Servo
Francesco Saverio Brunetti.

PRE-

PREFAZIONE

POSE Iddio l'Uomo ſopra la terra, perchè operaſſe. Ed allora io mi perſuado, che queſti meglio adempia il ſuo dovere, quando s' impiega in coſe, che riguardino la publica utilità. Eſſendo dunque, che l'Aritmetica è una ſcienza, che chi la poſsiede può eſſere, quando egli voglia, utiliſsimo al genere umano, egli viene per conſeguenza, che colui, che darà i precetti della medeſima, e quegli inſegnamenti varj e molti, che eſſa dona, colui dico, che farà queſto, ſarà utiliſsimo al Mondo. Su queſto fondamento, e con queſta ſperanza io mi ſon meſſo a trattare della per altro difficiliſsima ſcienza de' Calcoli, e ſpezialmente dell'Algebra in queſta noſtra lingua Italiana, sì perchè gli altri, che ne hanno trattato, hanno ſcritto latinamente, o in altri idiomi, sì ancora, perchè trattandoſi di giovare ſi farà ſempre più in comune volgare, che in altre lingue, almeno a quegli de' noſtri Paeſi.

L'Aritmetica degli Antichi è molto diverſa dalla moderna, come ſi vede dal libro di Severino Boezio, che alla maniera degli Antichi trattolla. Migliorata la divolgò poi Iſacco Monaco, e dopo eſſo altri innumerabili.

Gli

Gli Arabi portarono in Europa, oltre la maggior parte delle ſcienze, l'Algebra ancora. Eglino ci comunicarono le traduzioni de' libri greci, e le noſtre verſioni latine ſono delle copie Arabe, non già degli originali greci, e ſu queſte hanno gl'Italiani appreſe, e poi promoſſe le ſcienze.

Il primo, che deſſe alla luce l'Algebra, ſu Fra Luca Pagiolo da Borgo S. Sepolcro Minore Conventuale, ma queſti non fece di più, che ſpiegare l'antico metodo. Niccolò Tartaglia Breſciano molto la promoſſe, e'l Cardano Medico Milaneſe ſpiegò il Metodo del Tartaglia intorno al riſolvere l'equazioni cubiche l'anno 1545. Nè maggior paſſo fece Scipione Ferreo. Ludovico de Ferrari, o ſia il Cardano riduſſe l'equazioni di quarto grado, e Rafael Bombelli l'anno 1579 l'inſerì nella ſua Algebra. Mentre gl'Italiani s'affaticavano ſu queſti metodi uſcì la traduzione di Diofanto Aleſſandrino, in cui maggiori notizie ſi ritrovarono di quelle, che fin allora ſi erano acquiſtate dagli ſtudioſi. L'anno poi 1550 Franceſco Vieta Cavalier Parigino incominciò ad uſare le lettere dell'Alfabeto, e diede contezza di eſtraere le radici dell'equazioni per approſsimazione. Fu ſpiegato il Vieta da Bernardo Ougtred Ingleſe nel 1631. Ma molto meglio con l'aggiunta dei ſegni ora uſati ſpiegò il Metodo del Vieta Tomaſo Ariotto Ingleſe, e'l ſuo libro fu pubblicato dal Warnero l'anno 1631.

Fin quì l'Algebra era bambina, e piena di

mol-

molte difficoltà intorno alle radici dell' equazioni di gradi ſuperiori, ma non molto ſtette a comparire adulta, e ſcoprire la ſua immenſa forza. Poiche l'anno 1637 uſcì Carteſio colla ſua Geometria, in cui talmente l'Algebra colla Geometria s'innesta, che par giuſto, che l'una ſenza l'altra durar non poſſa. Aveva il Vieta detto qualche coſa ſu queſto affare, ma timido non ardì di paſſare oltre al cerchio, e la retta. Il Carteſio d'ogni curva ſi ſerve, ed ogni radice di qualunque equazione colla ſua coſtruzione ritrova. Carteſio è ſtato comunemente abbracciato, nè alcuno ha ne pure in minima parte contradetto al ſuo Metodo, anzi moltiſsimi uomini d'eccellente dottrina lo hanno illuſtrato, e promoſſo, e ſempre felicemente.

Benchè queſto Metodo ſia ſtato con tanto applauſo ricevuto, e con ammirazione oſſervato, nulladimeno gli uomini non ſi ſono già quietati, nè han perduta la mira d'ulterior perfezione, ma tuttavia han coltivato la maſsima di S. Bernardo: *Nemo perfectus, qui perfectior eſſe non appetit, & eo perfectiorem quiſque ſe probat, quo ad majorem tendit perfectionem.* Il Valliſio l'anno 1655 col ſommare le ſerie infinite applicò il metodo di Fra Bonaventura Cavallieri Bologneſe a quadrare le curve, e cubare i ſolidi, che Bullialdo poi con ardue dimoſtrazioni ſi sforzò confermare.

Gio. Guglielmo Leibnizio Tedeſco, ed Iſacco Neuton Ingleſe trovarono circa l'anno 1684 il

b me-

metodo non mai abbaſtanza lodato del Calcolo degl' infinitamente piccoli, detto differenziale, eſpoſto con bell'ordine dal Marcheſe dell'Oſpitalio. Il Metodo roverſcio delle fluſſioni, detto integrale, il di cui vaſto regno non ſarà mai per reſtringerſi a confine alcuno, l'eſpoſe a' principianti il Carrè; e Gabriello Manfredi l'anno 1707 oltrepaſsò di gran lunga non ſolamente il Carrè, ma ogni altro. Di tutte queſte coſe dò io breve notizia; è tale, che credo ſufficiente per far poi paſſaggio alla lettura di sì grandi Uomini. Vorrei che l'effetto corriſpondeſſe al genio, che ho di giovare altrui che certamente non ſarebbe piccolo: che ſe mai riuſcirà, ne darò grazie a Dio fonte d'ogni ſapere, e noſtro ultimo ed unico fine; che ſe poi il contrario accadeſſe, conforme ne ho gran timore, averò ſempre queſto conforto d'aver tentato qualche coſa di più, che non comportavano le mie forze per ſola voglia di giovare ad altrui.

CORREZIONE.

Pag. 28. lin. 33. leggi 233289.

Pag. 224. lin. 8. leggi $\frac{m+n+1}{1} \times \frac{m-n+2}{2} \times \frac{m-n+3}{3} \times \frac{m-n+4}{4}$ ecc.

Im-

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo P. Magistro Sàc. Palatii Apostolici.

N. Baccarius Episc. Bojanen. Vicesgerens.

APPROBATIO

REVERENDISSIMI PATRIS

D. JO. FRANCISCI BALDINI

Cl. Reg. Congreg. Somaschæ SS. Congregationum Rituum, & Indicis Consultoris.

Legi, mandante Reverendissimo P. Jo: Benedicto Zuanelli S. Apost. Palatii Magistro librum inscriptum: *Dell'Aritmetica Comune e Speciosa Trattato di D. Francesco Saverio Brunetti &c.* & cum in illo nihil offenderim, Religioni Catholicæ, aut bonis moribus adversum; sed ad promovenda Mathematica studia plurimum conducere possit, ut typis mandetur, censeo.

Romæ ex Collegio Clementino hac die 28. Septembris 1730.

D. Jo: Franciscus Baldinus Cl. Reg. Congregationis Somaschæ, Sacr. Congregationum Rituum, & Indicis Consultor.

APPROBATIO

Illustrissimi, & Reverendissimi Domini

ANTONII LEPROTTI

Archiatri, & Intimi Cubicularii SSmi DOMINI NOSTRI.

IN libro, cui titulus: *Dell' Aritmetica Comune e Speciosa Trattato di D. Francesco Saverio Brunetti &c.* quemque legi mandavit Reverendissimus P. Jo: Benedictus Zuanelli S. Apost. Palatii Magister nihil aut sanæ Religioni, aut bonis moribus adversum reperi. Dignum itaque censeo, ut in eorum, qui Mathematicis disciplinis sunt informandi utilitatem edatur.

Romæ die 11. Decembris anno 1730.

Antonius Leprotti.

IMPRIMATUR.

Fr. Jo: Benedictus Zuanelli Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apostolici Magister.

TA-

TAVOLA

PARTE PRIMA

Dell'Aritmetica Comune.

CAPO I.

Delle Regole Aritmetiche.

CAPO II.

Calcolo delle Frazioni.

CAPO III.

Calcolo Decimale.

ART.

CAPO IV.

Delle Proporzioni, e loro regole, ove si espone il Calcolo nella quantità continua.

CAPO V.

Del Computo Ecclesiastico.

PARTE SECONDA

Dell'Aritmetica Speciosa.

CAPO I.

Del Calcolo Algebraico.

ART.

CAPO II.

Della Riduzione dell'Equazioni.

CAPO III.

Delle Progressioni.

CA-

CAPO IV.

Calcolo Logaritmico.

CAPO V.

Delle Combinazioni, e Permutazioni.

CAPO VI.

Del Calcolo Differenziale.

ARIT-

ARITMETICA COMUNE, E SPECIOSA.

PARTE PRIMA

Dell' Aritmetica Comune.

CAPO PRIMO.

Delle Regole Aritmetiche.

ARTICOLO PRIMO.

Delle generali notizie per numerare.

LA Scienza Aritmetica, come asserisce Platone in Epimenide, è la prima universale maestra d' ogni Scienza, senza di cui è impossibile, che verun' altra si apprenda. Onde Santo Agostino nel lib. 2. *de libero Arbitrio* concepisce non piccola ammirazione degli uomini, i quali tutti ansiosi cercano la Scienza, e negligentano quasi cosa di poco momento l'Aritmetica, quando questa *est vestibulum, & quasi anima Scientiarum*, come Platone la chiama nel 7. de rep. *Cum hæc duo*, sono parole del Santo, *sint in abditissima, certissimaque veritate, plurimum miror, quare numerus vilis sit multitudini hominum, & cara Sapientia*. Ed in fatti Zenocracrate dir ſoleva l'Aritmetica eſſere manico del ſapere, e Talete Mileſio chiamava le due Scienze Geometria, ed Aritmetica le due ali, con le quali vola l'umano ingegno alla perfetta notizia delle filoſofiche coſe. Ma laſciando da parte l'eſpreſsioni vantaggioſe, che da' dottiſsimi uomini ſi fanno nei loro ſcritti a favore di queſta Scienza, baſti per far di lei idea giuſta il conſiderare, che ella ci ſcuopre le proporzioni, anzi tutta di quelle ſi forma, ſenza le quali le Scienze Matematiche laſcierebbero d'eſſer tali, e l'umana ſocietà ſi rimarrebbe imperfetta. Tanto più, che l'Aritmetica procede per principj evidenti, e regole facili, e dimoſtrate, e per vie pianiſsime conduce finalmente ad alte, e ſublimi contemplazioni. Dunque io t'avverto col Poeta Dante Paradiſo cantica 5.

Apri la mente a quel ch' i' ti paleſo
E fermal v'entro: che non fa Scienza
Senza lo ritenere avere inteſo.

DEFINIZIONI.

1. Aritmetica vuol dire Scienza de' numeri; altra è ſpecolativa, altra pratica: quella conſidera le proprietà de' numeri, ed è quaſi madre, e guida dell' altra; queſta con le ſue regole dimoſtrate trova le verità, e le dimoſtra. Che ſe ſi adoperano caratteri ſempre a' numeri determinati affiſſi, come i notiſsimi 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. zero, ſi dice Aritmetica pratica numerica; ſe poi ſi uſeranno altri caratteri vaghi, e d'arbitrario valore, come le lettere dell'Alfabeto, ſi chiamerà Aritmetica ſpecioſa.

2. L'unità è principio di numero, dalla cui moltiplicazione naſce il numero, e dalla cui diviſione naſcono le frazioni.

3. L'unità, il numero, le frazioni altre ſono poſitive, altre negative; le poſitive ſono quelle quantità, che ſorpaſſano il nulla; le negative ſono meno del nulla; e queſto non è difficile a concepirſi. Pietro abbia cento ſcudi, Paolo nulla, e Giovanni non ſolo abbia nulla, ma debba dare cento ſcudi: è chiaro, che la condizione di Pietro è di cento ſcudi poſitivi, di Paolo nulla, e di Giovanni di cento ſcudi negativi, cioè meno del nulla.

4. I numeri altri ſono primi, e ſono quelli, che non ſono miſurati da altro numero, che dalla unità, come 3, 7. Altri ſono perfetti, e ſono quelli, che tutte le parti, che li miſurano, ſommate li coſtituiſcono di nuovo come 6, 28.

5. Da'

5. Da' numeri paragonati fra loro nascono due relazioni, o ragioni, una aritmetica, quando se ne considera la contenenza; così 3 a 4 diremo avere ragione aritmetica, considerando l' eccesso del 4 sopra il 3; ma se considereremo la contenenza di questo in quello, che è d'1 $\frac{1}{3}$ la chiameremo ragione geometrica.

6. Le ragioni crescono, calano, e s'uguagliano, secondo, che cresce, o cala tal contenenza, v. g. 12 a 12 dicesi ragione d'uguaglianza, ma 12 a 6 dicesi maggior ragione, perchè la contenenza del 6 nel 12 è maggiore di quella del 12 nel 12. Similmente 6 a 12 sarà minor ragione di 12 a 12, perchè la contenenza del 12 nel 6 non è, che per metà, quando quella di 12 a 12 è intiera; sicchè paragonate le ragioni fra loro, una dell' altra sarà eguale, maggiore, o minore. Si sogliono esprimere le ragioni ad uso delle frazioni; quella che farà frazione maggiore, sarà maggior ragione d'un' altra, che faccia minor frazione.

7. Dalla ragione aritmetica nasce la serie, o progressione aritmetica, cioè quando formasi una serie di numeri, che successivamente vanno superandosi con uguale eccesso.

8. Dalla ragione geometrica nasce la serie, o progressione geometrica, cioè quando si forma una serie di numeri, ogn' uno de' quali è egualmente contenuto nel suo conseguente, v. g. 1, 3, 9, 27, 81 ecc.

9. I numeri altri sono potenziali, altri radicali. Ogni potenza ha la sua radice, siccome ogni radice ha la sua potenza. Moltiplicandosi una radice, cioè qualsisia numero in se medesimo, produce la potenza seconda, e questa moltiplicandosi per la radice produce la potenza terza, e questa per la radice la quarta ecc. Sicchè ogni numero ha una serie di potenze infinita, disposte tutte in una serie geometrica, in cui la contenenza, o ragione de' termini è uguale alla radice.

10. Dicesi la potenza seconda quadrato, la terza cubo, la quarta quadroquadrato, la quinta primo relato ecc. ma oggi prescindendo da' due primi nomi, gli altri più non sono in uso.

11. I numeri, che non hanno radice alcuna, si chiamano irrazionali, o sordi; e quelli, che non hanno una radice d'una qualche potenza, si chiameranno sordi di tal potenza, come il 27 è sordo del quadrato, ma razionale del cubo.

12. Numerare è aggiungere a qualunque numero dato l'unità.

13. Sommare è trovare un numero uguale a molti.

14. Sottrarre è trovare la differenza di due numeri.

15. Moltiplicare è dati due numeri trovare il terzo, che contenga tante volte uno dei dati quante volte l'unità sta nell'altro, e questo terzo numero dicesi prodotto, overo fatto.

16. Dividere è dati due numeri trovare la contenenza d'uno nell'altro, e tal contenenza dicesi quoziente.

17. Estrarre radici è d'un numero assegnato trovarne la radice cercata, v. g. se da un numero si abbia da estraere la radice quadra, si cerca un numero, che moltiplicato in se stesso renda il numero dato.

Le altre operazioni aritmetiche altro non sono, che una conveniente applicazione di queste; come si vedrà nel 4. Capo.

18. I numeri si prendono, o per se medesimi, o per le cose numerate; onde le regole aritmetiche variano al variare della natura di queste cose.

ARTICOLO II.

Del Numerare.

1. IL numerare è aggiungere successivamente a qualunque numero l'unità, da cui per fino al nove sonovi altrettanti caratteri Arabici, ciascuno significante il suo numero; il dieci si forma col 1 e'l zero così 10. Onde del zero graziosamente fu detto.

Nulla vaglio; ma presso a quel, che vale,
Per cento e mille il mio valor prevale.

Sicchè fino al cento tutti i numeri con due soli caratteri si esprimono, e 'l cento si esprime coll' uno, e due zeri, così, 100., sicchè fino al mille più di tre caratteri non si adoperano, il primo de' quali alla destra dinota il numero semplice dall'uno fino al 9, il secondo le decine, il terzo centenari; così i giorni dell' anno essendo tre cento sessanta cinque si scriverà 365. La ragione di ciò si desume dalla proporzione decupla, poichè aggiunta una figura ad una, o più altre, le farà crescere dieci volte di più, ed in oltre augumenta il proprio valore, e ciò perchè sono nove le figure significative, e non più, e per la decima si adoperano due figure 1, e 0, come si è detto. A questa maniera di scrivere i numeri stanno appoggiate tutte le regole dell'Aritmetica comunemente dette dell'Algorismo.

2. Po-

2. Potrebbonsi non v'ha dubbio adoperare più, o meno caratteri di nove, e divertire il modo di numerare in altra proporzione, come fecero il Veigelio, e lo Sturmio nella sua *Mathesi Enucleata*, ma a mio credere nulla più ciò sarebbe, che una bizzarria d'ingegno ozioso che s'affanni in ciò, che mai certamente non sarà per ottenere, cioè, che il genere umano muti un costume, che la natura nelle dita delle proprie mani gli ha posto.

3. Il numero già scritto per quanto grande, e superiore al nostro intendimento egli sia, si potrà facilmente leggere, se dalla destra verso la sinistra procedendo, ad ogni ternario di figure si fraponga alternativamente prima il punto, e poi la virgola, ma le virgole susseguentemente vanno crescendo, cioè la prima volta se ne pone una, poi due, poi tre ecc. i punti significano, che ivi le migliaja si devono nominare, e le virgole, o millioni, se sia una, o i billioni, se due, o i trillioni, se tre ecc. billione vuol dire millione di millioni, e trillione tre volte ecc. ecco l'esempio. Alfagrano assegna di capacità all'universo tanto, ehe basti a contenere globi d'un miglio Italiano di Diametro num. 23,,,, 939. 806,,, 430. 288,, 029. 555, 947. 103 si dirà ventitre quadrillioni, novecento trentanove mila, ottocento sei trillioni, quattrocento trenta mila, ducento ottantotto billioni, ventinove mila, cinquecento cinquantacinque millioni, novecento quarantasette mila, cento tre.

4. Varie Nazioni hanno avuto consuetudine di esprimere i loro numeri con le lettere de i loro Alfabeti, come i Greci, gli Ebrei, ed i Romani. Appresso a questi si usano anche oggidì le seguenti C. 100, D. o vero IↃ. 500, I. 1, L. 50, M. o vero CIↃ. 1000, V. 5, X. 10, le quali unite, e variate danno qualunque numero, con avvertenza nel leggerlo, di sottraere dalla seguente le antecedenti di minor significato, v. g. MDCCXXIX. si dirà 1729, perchè I. si sottrae dalla seguente X.

5. I caratteri Arabici volgari furono inventati dagli Indiani, e furono portati in Ispagna da' Saraceni; e Gerberto Monaco, che poi fu Silvestro II. Papa, circa l'anno 999. introdusse l'uso di questi in Francia, ed in Italia, come riferisce il Vallisio nel volume 2. delle Opere Matematiche Tratt. *De Algebra* cap. 4.

AR-

ARTICOLO III.

Del Sommare.

1. SOmmare non è altro, che trovare un numero eguale a molti altri dati. Ma perchè sarebbe molto difficile raccogliere insieme molti, e grandi numeri, perciò è stata trovata una regola, con la quale a poco a poco avendo insieme piccolissimi numeri, si arriva finalmente a ritrovare un numero, che a tutti i dati insieme uguale sia, e tal regola è la seguente. Si dispongano tutti i numeri da sommarsi un sotto dell'altro, di modo che l'ultime figure alla destra in retta linea verticale sieno disposte, così le altre ecc. Quindi dalla prima colonna alla destra incominciando, si aggiungano insieme tutte le figure, o siano numeri, che vi saranno, e si noti sotto essa colonna ciò, che sopra le decine avanza, o pur zero, se nulla avanza, il numero delle decine si sommi con la colonna seguente, ed il simile in questa, ed in tutte le seguenti colonne si faccia, il che compito, troverassi in fine notato un numero, che sarà uguale a tutti gli assegnati.

ESEMPIO.

Epoche Sagre.

2.	Dalla Creazione del Mondo al Diluvio anni —	1656
	Alla Vocazione d'Abramo ————	427
	Alla Legge Scritta ————	430
	Alla fondazione del Tempio ————	487
	Alla fondazione di Roma ————	250
	A Ciro, o siano Giudei liberati ————	218
	Alla ruina di Cartagine ————	334
	Alla Nascita di Gesù Cristo ————	198
	All' Era Volgare ————	4
	Anni dalla Creazione all' Era Volgare ————	4004

4. Che 'l numero 4004. sia agli altri uguale, così si può dimostrare; il 4 è uguale a tutti i numeri della prima colonna eccettuatene le decine, il 0 è uguale a tutte le decine della seconda colonna eccettuatine i centinari, l'altro 0 a tutti i centina-

tinari eccettuate le migliaja, che sono il 4 seguente, dunque tutto il 4004. è uguale a tutti i sopranotati numeri dati. Il che si dovea provare.

4. Un' altro modo di sommare i numeri senza la pena di portare le decine è il seguente. Si aggiungono insieme tutti i numeri della colonna sinistra, e sotto scrivesi la somma tutta avvertendo di non passare avanti la colonna. Indi si sommi la seconda, e tutto il complesso si noti sotto, retrocedendo con le figure quanto sarà bisogno, e così si proceda fino alla fine.

Epoche Cristiane.

5. Dalla nascita del Salvatore alla morte anni —	33
Di là fino alla distruzione di Gerusalemme di Tito	37
All' Era de' Martiri di Diocleziano —	214
A Roma presa da' Barbari —	126
All' Egira degli Arabi —	212
All' Era di Jezdezirde —	10
All' Imperio Occidentale di Carlo Magno —	169
Alla Guerra Sagra prima di Goffredo Buglione	294
Al Primo Giubileo —	205
A Costantinopoli presa da' Turchi —	153
Al Concilio di Trento —	93
All'Anno corrente 1730. —	184
	12
	48
	50
Anni dalla Nascita di Cristo al presente —	1730

6. Se si dovranno raccogliere in una somma varie cose di diversa specie, si pongano le cose della stessa specie in diverse colonne separate. Quindi sommate le colonne della stessa specie infima si esamini quante cose facciano della colonna prossima, si sottoscriva l'avanzo, e si portino quelle nella seguente colonna, e così delle altre.

ESEMPIO.

Giesù Cristo visse anni —	33	mesi 3	giorni 0
S. Pietro sedè anni —	32	1	8
S. Lino —	15	3	12
S. Cleto —	12	1	11
S. Clemente —	9	11	10
Tutti insieme vissero —	102	8	11

7. Per-

7. Perchè ſuole riuſcire a' Principianti alquanto d'imbarazzo il dovere inſieme aggiungere i numeri, ſtimo far loro coſa grata, ſe quì pianto una piccola tabella, dalla cui iſpezione facilmente un numero coll'altro ſommar ſi poſſa. In eſſa ſi cerchi alla ſiniſtra uno de' due numeri, che vogliono ſommarſi, e l'altro ſi cerchi ſopra, poi ſi oſſervi dove queſti confrontano, ed ivi troveraſſi la loro ſomma, come per ſe medeſimo è chiaro. Se queſta Tabella ſi continuaſse, ſervirebbe per ſommare qualunque quantità di numeri anche grandi. Samuel Morlando Ingleſe, il Leibnizio, e Giovanni Poleni han fatte alcune machine Aritmetiche ingegnoſiſſime per bene, e francamente ſommare ſenza fatica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	5	6	7	8	9	10	11
3	5	6	7	8	9	10	11	12
4	6	7	8	9	10	11	12	13
5	7	8	9	10	11	12	13	14
6	8	9	10	11	12	13	14	15
7	9	10	11	12	13	14	15	16
8	10	11	12	13	14	15	16	17
9	11	12	13	14	15	16	17	18

8. La prova del ſommare ſi fa in varie maniere, ma tutte egualmente difficili, e lunghe ſe non più, che l'operazione medeſima; nulladimeno ne accennerò alcune. Primo ſi ſottraggano dalla ſomma ad una ad una tutte le quantità ſommate, ed al fine reſterà zero. Secondo, ſi ſommino tutti i numeri fuorchè uno, e queſta ſomma dalla totale ſi levi, reſterà il numero laſciato. Nella ſomma da' numeri puri ſi poſſono levare alla rinfuſa tutti i 9, overo i 7, e l'ultimo reſiduo ſarà uguale al reſiduo della ſomma ecc.

9. Sia

9. Sia da indovinarſi ciò, che ad uno reſta dopo alcune operazioni, primo ſi faccia radoppiare il numero dallo ſteſso penſato; ſecondo gli ſi faccia aggiungere un numero qualunque; terzo ſi faccia gettare la metà; quarto ſi faccia gettare il numero penſato, e reſteràgli la metà del numero fattogli aggiungere, e ſi può variare il giuoco a talento.

ARTICOLO IV.

Del Sottraere.

1. IL ſottraere è trovare la differenza di due numeri ineguali. Si collochi il minor numero ſotto al maggiore, ed incominciando alla deſtra, il primo carattere inferiore ſi tolga dal ſuperiore, ſe queſto di quello ſia maggiore, o uguale; che, ſe ſarà minore, gli ſi aggiunge una decina, o altro numero della natura delle coſe, che ſi porterebbero nella proſſima colonna ſe ſi ſommaſſe; e tolto il minore dal maggiore, ſi ſegni ſotto l'avanzo, e ſi porti uno nella ſeguente figura; ſi ſeguiti l'operazione così ſino alla fine.

ESEMPIO.

2. La Luna diſta dal centro della terra m. Italiane — 229687
Il ſemidiametro terreſtre è di m. Italiane — 4440

Diſtanza della Luna dalla ſuperficie della terra m. 225247

3. Altro Eſempio. Diſtanza del Sole dal centro della terra m. Ital. — 4013923
Diſtanza della Luna dallo ſteſso centro — 229687

Diſtanza della Luna dal Sole — 3784236

4. Altro Eſempio per i numeri di diverſa ſpecie di coſe. Il Mercurio in tempo ſereno aſcende nel Baromatro piedi parigini — 2. pol. 2. lin. 3. punt. 4.
In tempo tempeſtoſo — 2. 0. 9. 5.

Differenza — 0. 1. 5. 5.

Per intelligenza di queſto eſempio ſappiaſi, che il piede parigino, ſu cui è fatta la detta eſperienza, ſi divide in 12 pollici, e queſti in 12 linee, e queſte in 6 punti. Onde dicaſi 5 da 4 non ſi può levare, ſi aggiunga 6, perchè 6 punti fanno una linea della colonna ſeguente, fa 10, da cui tolto 5, reſta 5, che

che noto ſotto, e porto 1 nel 9 ſeguente, che non potendoſi levare da 3 v'aggiungo 12 linee quantità d'un pollice, levo 10 da 15, reſta 5, ſegno 5, e porto 1 ecc.

5. La prova del ſottraere ſi fa ſommando l'avanzo trovato col numero ſottratto, perchè torni l'altro. Queſta è inſieme prova, e dimoſtrazione, perchè tutte le parti ſono uguali al tutto, ma il numero ſottratto con l' eceſſo ſono tutte le parti del primo numero; dunque la ſomma di queſte ſarà uguale al detto numero.

6. Si facciano ſcrivere quanti numeri vogliansi, purchè ciaſcun' conſeguente creſca ſopra il ſuo antecedente, in un batter d'occhio ſi ſaprà la ſomma di tutte le differenze, ſottraendo il primo dall'ultimo, v. g. 3. 8. 14. 96. Sarà la ſomma delle differenze di queſti numeri la differenza del 3 dal 96, cioè 93, perchè 8 meno 3, più 14, meno 8 più 96, meno 14 è uguale a 93.

ARTICOLO V.

Del Moltiplicare.

1. NEl moltiplicare concorrono due numeri, e ſi cerca il terzo, che tante volte contenga uno de' due, quante volte l'unità ſi contiene nell' altro. Art. 1. num. 15. v. g. 3 via 4 vuol dire, che ſi vuole un numero, che contenga il 4, 3 volte, o per lo contrario il 3, 4 volte, e queſto è 12.

2. Se i numeri, che ſi moltiplicano, ſaranno minori di 10, ſarà bene tenerſi a memoria i loro prodotti, quali nulladimeno trovar ſi poſſono così. Si ſcriva l'un ſotto l'altro, e ſi ponga a ciaſcuno per contro il ſuo compimento al 10, v. g. 7 via 8, ſegno 7 ſotto all' 8, ed all' incontro dell' 8, il 2, ed all' incontro del 7, il 3, e queſti due moltiplicati inſieme fanno il prodotto, che ſi ſegna, ritenendo la decina, ſe vi foſſe; poi ſi tolga per traverſo o 'l 3 dall' 8, o 'l 2 dal 7, che reſterà ſempre l'iſteſſo, e ſottoſcrivaſi l'avanzo augumentato della decina, ſe pur fu ritenuta; nel caſo noſtro ſi ha 56.

$$\begin{array}{ccc} 8 & & 2 \\ & \times & \\ 7 & & 3 \\ \hline & 56 & \end{array}$$

3. Con le dita delle mani ſi ottiene l'iſteſſo, ſtringendo queſte in due pugni, e poi alzandone tante in una mano, quanto manca un numero dato dal 10, e nell' altra pure tante alzandone, quanto manca all'altro mumero dal 10; le dita, che re-

restano calate, sono le decine del prodotto, alle quali si deve aggiungere il fatto delle dita alzate nell' una, e nell' altra mano.

4. Facilissimo sopra ogn' altro modo è l'uso della seguente Tabella detta Pittagorica dal suo inventore Pittagora, che si usa come l'altra posta sopra all'Art. 2. num. 8.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

5. I numeri, che terminano con zeri, si multiplicano senz' essi, e poi si aggiungono nel fine della operazione. V. g. 80 mesi alla ragione di 30 giorni l'uno quanto fanno? Multiplicherò 8 per 3, ed averò 24, a cui aggiungendo i due zeri lasciati, averò 2400 giorni.

6. Quando i numeri saranno maggiori di 10, si scriva il maggiore sopra al minore, ed incominciando dalla destra figura inferiore, questa per tutte le superiori si moltiplichi con ritenere le decine, che si aggiungono sempre al seguente prodotto, e 'l solo avanzo di mano in mano si scrive: l'istesso si ripeta con ciascuna figura inferiore, con notare il prodotto sempre una colonna più indentro.

ESEMPIO.

7. Un grado terrestre contiene 60 miglia Italiane nel cer-

chio maſſimo, ma nel parallelo Romano non ne contiene più che 45, avendo Roma gr. 42 di latitudine. Se dunque ſi voglia circuire tutta la terra per tal parallelo, addimandaſi quante miglia ſaranno fatte finito il giro? Si vede chiaro che deveſi multiplicare 360 per 45, e s'averà per prodotto 16200.

```
  360
   45
-----
 1800
1440
-----
16200
```

8. Altro Eſempio. Se ſi moltiplicherà o 'l 777 per 143, o i moltiplici d'uno di queſti per qualunque figura aritmetica, la ſteſſa darà in tutto il prodotto; v. g. il ſudetto darà il prodotto tutto di unità, il doppio di 777, cioè 1554, lo darà tutto di binarj, il triplo di ternarj ecc. Simili prodotti danno i moltiplici di 900991 per 123321.

```
   777
   143
------
  2331
 3108
777
------
111111
```

9. La dimoſtrazione della regola poſta al num. 5. è, che prendendoſi tutte le parti moltiplici, e poi ſommandoſi, queſta ſomma ſarà uguale al moltiplice del tutto; così nell'eſempio al num. 7. il 16200 è 45 volte moltiplice di 360, e le ſue parti, cioè 0, 6 decine, e 3 centenari ſono 5 volte nel primo prodotto 1800, e nel ſecondo 1440 ſono 40 volte, per eſſere una figura più indentro, per l'Art. 2. num. 1: onde averemo le parti equemoltiplici del tutto, che ſommate daranno l'intiero prodotto, che ſi cerca.

10. Siccome la prova del ſommare è il ſottraere, e del ſottraere il ſommare, così del moltiplicare la prova è il dividere il prodotto per un numero moltiplicato, e 'l quoziente ſenz' avanzo deve eſſere l'altro numero, e del dividere è il moltiplicare, e queſte ſono generali, & infallibili.

11. Le prove del 9, e del 7 ſervono a tutte le regole dell' Aritmetica, ma nè ciaſcuna da ſe, nè ambedue inſieme ſono certe, potendo eſſere errata l'operazione, e pure le prove venir giuſte. Ma in ambedue eſſendo queſto caſo rariſſimo, è neceſſario ſaperle per eſſere molto comode. Poſſono venir bene ambedue le prove in una operazione, ancorche ſia errata, ſe l'errore ſia, o di 63, o d'un equemoltiplice, il che come vedeſi è un caſo aſſai difficile a ſuccedere.

12. La prova del 9 nel moltiplicare ſi fa, togliendo tutti i 9 dal numero moltiplicato, e 'l reſiduo ſegnandoſi in una croce. Poi ſi tolgono i 9 dal numero moltiplicante, e ſimilmente ſi ſegna il reſiduo nella croce; queſti ſi moltiplicano, e dal prodotto ſi levano i 9, e ſi ſegna il reſiduo nella croce, a cui ha da eſſere uguale il reſiduo del prodotto.

Si tolgono i nove da i numeri facilmente sommando i caratteri componenti, e dalla somma gettati i 9, si ha il residuo; questa prova sbaglia se l'errore sia o 9, o un suo moltiplice.

13. La prova del 7 si fa nella stessa maniera, se non che i sette diversamente si gettano. Si sappiano bene i seguenti numeri 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63: acciocchè assegnato un numero inferiore del 70 se ne sappia, toltine i 7, il residuo. Così per la prova dell' esempio posto al num. 7. si dica tolti i 7 dal 36 il residuo è 1, dal 10 è 3, si segni 3 nella croce, poi di 45 è 3, si segni 3, questo per l'altro moltiplicato fa 9, di 9 è 2, e si segni 2 nella croce, a cui il residuo del prodotto deve essere uguale. Onde dicasi di 16 è 2, di 22 è 1, di 10 è 3, di 30 è 2; sicchè va bene.

14. Cerco quanti piedi siano in questo distico:

Mille boves currunt, vitulorum millia centum,
Musca super cornu quolibet una sedet.

Rispondo esservene 5252011, cioè 4000 dei bovi, 400000 de i vitelli, 4848000 delle mosche a sei per mosca, ed 11 piedi del distico, che fanno 5252011.

ARTICOLO VI.

Del Dividere.

1. IL dividere è trovare la quantità della contenenza d'un numero nell'altro. Se il divisore sarà maggiore del dividendo, il quoziente sarà una frazione; se poi il divisore sarà minore del dividendo, e che sia minore del 10, si troverà facilmente il quoziente; che se il divisore supera il 10, in tal caso l'operazione sarà alquanto più faticosa.

2. Nel primo caso si scriva il dividendo, e si noti da parte il divisore, o si ritenga a mente; di poi si esamini quante volte si contenga nella prima, o due prime figure alla sinistra, e sottoscrivasi tal contenenza; e l'avanzo, se v'è, si scriva sopra; ed in questo con la figura, che segue, si esamini quante volte si contenga il divisore, e sotto si scriva tal contenenza col segnar sopra l' avanzo, così seguitando fino alla fine. V. g. fu trovato sopra girare la terra nel Parallelo a gradi 42 miglia Italiane 16200. queste si vogliono ridurre a miglia Tedesche, che costano di quattro miglia Italiane l'uno. Si dovrà dividere il detto numero per 4, e si scri-

va come di contro, e poi ſi dica il 4 in 16 entra 4 volte, ſi ponga ſotto; poi il 4 in 2 entra 0, ſi ponga ſotto, e poi in 20 entra 5, ed in 0, 0, ſenza avanzo; onde le miglia Tedeſche di tal parallelo ſaranno 4050.

| 4) 16200
4050

3. La diviſione per i numeri, che terminano con uno, o più zeri, ſi fa ſegnando tante figure del dividendo, quanti zeri nel diviſore ſi trovano, ed i reſidui ſi dividono, riunito con le figure tagliate l'avanzo, che ſi pone ſopra una riga, e ſotto il diviſore intiero, v.g. a Gubbio ſi ſono coniati 52783 bajocchi, 100 de' quali fanno uno ſcudo, ſaranno ſcudi 527: 83.

4. Quando il diviſore ſarà maggiore del 10, richiede una operazione alquanto più lunga. Sono ſtate trovate varie regole, delle quali io ne ſcielgo tre.

Regola prima. Si ſcriva il dividendo, e di rincontro ſi ponga il diviſore, e poi l'unità, e ſotto queſta la ſerie naturale ſino al 9, per i quali numeri ſi moltiplichi il diviſore. Ciò fatto ſi prendano alla ſiniſtra del dividendo tante figure, quante facciano un numero proſſimamente maggiore d'uno de' moltiplici del diviſore, e tal numero ſottopoſto ſi ſottragga, e da parte in luogo del quoziente ſi noti il numero della ſerie naturale del moltiplice ſottratto; tiriſi poi giù una figura del dividendo, e ſi uniſca con l'avanzo, e da queſto numero ſi ſottragga il proſſimo minore moltiplice del diviſore, e ſi noti nel quoziente il numero corriſpondente al detto moltiplice del diviſore, e così degli altri ecc.

ESEMPIO.

5. Il Padre Riccioli nella ſua Geografia riformata fa il calcolo del numero degli uomini attualmente viventi in tutta la terra; e dandone all' Europa cento milioni, 500 all'Aſia, altri 100 all'Affrica, all'America 200, e cento alle regioni Polari, raccoglie queſti eſſere mille milioni. Ora ſe noi faremo curioſi di fare il calcolo, quanti di queſti ne muojono ogn' anno, ci ſarà facile, ſe ſupporremo, come pare certo, che l'età ordinaria di morire ſia circa 65 anni, ed eſſere ancora queſto numero troppo groſſo, perchè l'eſperienza ci fa vedere eſſere molto più quei, che là non arrivano, che quei, che di là oltre paſſano, Ma, per fare agli amanti di queſta vita di miſerie piena un vantaggioſo partito, concedaſi, che nel giro di 65 anni tutto il genere umano già ſiaſi rinovato. Adunque dividendoſi il numero degli uomini per 65, ſi averanno gli uomini,

mini,

mini, che muojono ogn' anno. Ecco l'operazione, che per eſſere chiariſſima non ricerca maggiore ſpiegazione; ma baſterà ſemplicemente avvertire la maniera di ſegnare il dividendo, il diviſore, la ſerie naturale, ed il quoziente, la ſottrazione, che di mano in mano ſi fa, ed i numeri, che nel quoziente ſi pongono.

Dividendo.	Diviſore, e ſuoi moltiplici.		Quoziente.
1000000000	65	1	15384615
65	130	2	
350	195	3	
325	260	4	
250	325	5	
195	390	6	
550	455	7	
520	520	8	
300	585	9	
260			
400			
390			
100			
65			
350			
325			
Avanzo — 25			

	7	
6		1
2		1

pr. del 9.

	4	
1		6
2		6

pr. del 7.

Regola ſeconda detta danda.

6. Scriveſi il dividendo, e dalla deſtra ſi fa una parenteſi, e dentro s'include il diviſore, ſotto cui ſi tira una riga, perchè ſotto queſta ſi deve ſcrivere il quoziente; poi ſi fa un punto, dopo tante figure alla ſiniſtra del dividendo quante fanno un numero maggiore del diviſore, e ſi eſamina queſto in quello quante volte ſi contenga, il che ſi fa facilmente per parti, cioè la prima del diviſore ſi veda quante volte ſi contiene nella prima, o due prime del dividendo, purchè tante volte parimen-

rimente le ſeguenti del diviſore nelle ſeguenti del dividendo unite agli avanzi ſi contengano, e ſi noti tal contenenza ſotto al diviſore, che ſarà la prima figura del quoziente, queſta ſi moltiplichi per tutto il diviſore, e ſi noti il prodotto ſotto alle dette figure del dividendo, e da quelle ſi ſottragga, il reſiduo ſi uniſca in retta linea alla ſeguente figura dopo il punto del dividendo, e ſi rinuovi come ſopra l'operazione, ſe il diviſore non vi ſi conteneſſe, in tal caſo ſi noterebbe zero nel quoziente, e s'abbaſſerebbe l'altra figura ecc. come nel ſeguente eſempio ſi può vedere.

ESEMPIO.

7. Si cerca quante miglia Italiane corra il Sole col ſuo moto diurno in un minuto d'ora? Secondo le più moderne oſſervazioni l'orbita ſolare diurna è di m. Ital. 2140011712, e 'l giorno naturale, in cui il Sole fa queſta ſua rivoluzione, ha 1440 minuti primi; adunque queſto è il diviſore, e quello il dividendo, che ſi diſporranno nella maniera, che ſegue; avverto, che eſſendo – o – l'ultima figura del diviſore, quella ſi toglie, e ſimilmente l' ultima nel dividendo, il reſto poi ſi divide per 144.

```
214.0.0.1.1.7.1,2     ( 144,0   Diviſore.
144                    ———————
———                    1486119  Quoziente.
 700
 576
 ———
 1240
 1152
 ————
   881
   864
   ———
    171
    144
    ———
     277
     144
     ———
     1331
     1296
     ————
Avanzo — 352
```

3	1
o	1

(1) *pr. del 9.*

5	6
5	6

(2) *pr. del 7.*

$$6.0)\ 148611.9 \qquad 24768\ \tfrac{39}{60}$$

Dun-

Dunque le miglia, che corre il Sole secondo il Sistema Ticorico in un minuto d'ora, sono $1486119\frac{352}{1440}$, che, se curioso fossi di sapere, quante ei ne passi in un minuto secondo, basta, che si divida il detto numero per 60, il di cui quoziente sarà le miglia cercate, cioè $24768\frac{39}{60}$: quindi dirai col Petrarca nel Trionfo del Tempo.

Veggio la fuga del mio viver presta
Anzi di tutti; e nel fuggir del Sole
La ruina del mondo manifesta.

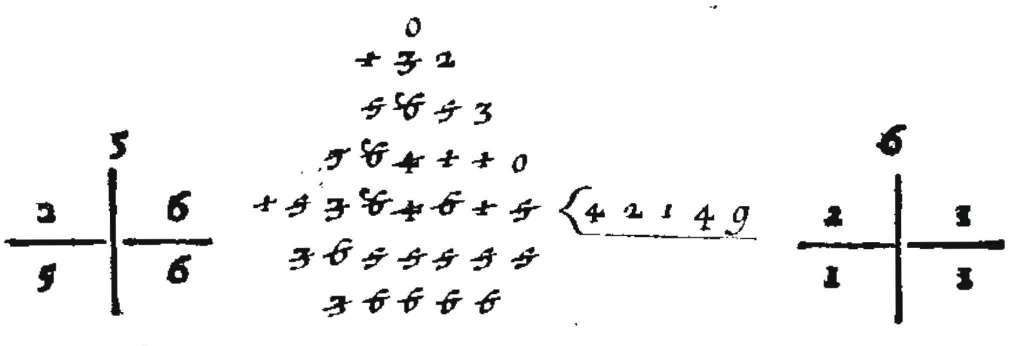
Poichè la regola del dividere è frequentissima nelle soluzioni de' quesiti, e che è necessario aversi franchissima, pongo quì più chiara spiegazione della operazione. Esamino in primo luogo il 1440 quante volte si contenga nel 2140; ma perchè nel divisore vi è un zero al fine, taglio con un punto questo zero, come pure l'ultima figura 2 alla destra nel dividendo. Ora il 144, che resta, vedo quante volte entra nel 214, così l'uno in 2 entra due volte, ma perchè il 4 seguente del divisore non entra due volte nell' uno, che segue dopo il 2 nel dividendo, nè pure l'uno in 2 potrà entrare 2 volte, onde dirò, che v'entra una volta, e perchè anche il 4 entra una volta, anzi di più nell'11, cioè nell'1, che avanza dal 2 unito coll' 1 seguente, pongo 1 nel luogo del quoziente, quindi multiplico il 144 per 1, e'l prodotto 144 lo pongo sotto al 214, e poi, tirando sotto una riga, faccio la sottrazione, e resta 70. Si potrebbero di mano in mano i prodotti delle figure sottraere, per rendere la regola più breve, ma ciò non consiglio ai principianti, a' quali l'operare a memoria suole riuscire d'imbarazzo, e spesse volte è loro occasione d'errore. Ciò fatto dopo il 70 segno il zero, figura seguente nel dividendo, poi esamino l'1 in 7 quante volte entra, quale entra 7, ma perchè il 4 nel zero seguente non v'entra, calo tanto la contenenza dell'1 nel 7, quanto è necessario, che l'avanzo unito al 0 seguente, sia capace di contenere tante volte il 4 seguente, e che di più avanzi tanto, che unito all' altro 0 seguente, l'ultimo 4 parimente tante volte vi si contenga: trovo dunque esser 4, segno questo 4 nel quoziente, lo multiplico per 144, e 'l resto faccio come sopra, così proseguendosi sempre l'operazione fino alla fine, avvertendo all' ultimo avanzo 35 aggiungere il 2, che fin da principio fu tolto, onde il quoziente sarà $1486119\frac{352}{1440}$.

Regola terza detta Galera.

8. Si collochi il divisore alla sinistra sotto al dividendo, di modo però, che le figure prese dal dividendo facciano un numero maggiore del divisore; di poi a parte a parte si esamini, quante volte il dividendo contenga il divisore, e questa contenenza si ponga dentro la parentesi fatta dicontro al dividendo; questa poi multiplicata a figura per figura del divisore; si sottragga subito di mano in mano il prodotto, e cancellate le figure, sopra si noti l'avanzo, finito ciò, di nuovo, si replichi una figura più avanti il divisore, e si faccia l'istesso sino alla fine.

ESEMPIO.

9. Trovammo sopra al num. 5. che il numero degli uomini, che muojono ogn'anno per tutto il mondo, ascende ad 1538461 5. Ora se si voglia sapere, quanti ne muojono ogni giorno, si divida questo numero per 365, che sono i giorni d'un anno. Perilchè fare, scrivo il predetto numero 15384615, ed alla sinistra pongo il 365 sotto al 5 seconda figura, perchè il 153 è minore del 365; poi dico, il 3 nel 15, che gli sta sopra, quante volte entra? trovo entrarvi 5 volte, e non avanza cosa veruna; ora osservo se il 6 seguente entra 5 nel 3, che gli sta sopra, e perchè non v'entra, si dovrà dire, che ne pure il 3 entri 5 nel 15; laonde calo uno, e dico il 3 in 15 entra 4, ed avanza 3, che unito con il 3 seguente fa 33, in cui il 6 entra ben quattro volte, ed anche la terza figura 5 entra quattro volte nella sua superiore unita all'avanzo; segno dunque 4 alla lunula luogo del quoziente, poi multiplico il 5, ultima figura del divisore, per questo 4, fa 20; casso il 5, e



pr. del 9. pr. del 7.

levo il 20 da 8, e non potendosi, aggiungo sempre tante decine, quante bisognano all'8, dico da 28; resta 8, casso 8, e segno sopra 8; poi moltiplico il 4 per 6, fa 24, e 2, che porto, fa 26,

casso

caſſo il 6, e levo il 26 dal 33, reſta 7, e porto 3, ſegno 7 ſopra, avendo prima caſſato il 3, moltiplico poi il 4 per 3, fa 12, porto 3, fa 15, caſſo il 3, levo il 15 da 15, caſſo il 15, e reſta o; ciò eſeguito, replico di nuovo il diviſore una figura più indentro, cioè il 3 ſotto al 6, poi andando in su, ſi veda quante volte ſi contiene nelle figure non caſſate ſue antecedenti, che ſe non vi ſono, ſi pone o nella lunula, e ſe vi ſono, s'opera come ſopra.

10. La prova delle ſudette operazioni ſi fa moltiplicando il quoziente per il diviſore, ed aggiungendo al prodotto l'avanzo, deve tornare il numero diviſo. Le prove poi del 9, e del 7 ſi fanno, togliendo queſti prima dall'avanzo, e notando il reſiduo ſopra la croce, poi ſi tolgono dal quoziente, e'l reſiduo ſi nota da un lato della croce, quindi ſi tolgono dal diviſore, e ſotto nella croce ſi nota il reſiduo, queſti due ultimi reſidui ſi moltiplicano, il prodotto ſi aggiunge al numero ſegnato ſopra la croce, e toltine ſe biſogna i 9, o i 7, ſi ſegni ſotto l'avanzo, e ſi veda ſe il numero diviſo dà l'iſteſſo, altrimenti ſarà corſo errore nella operazione.

11. Due giuocano a sbaraglino, e depongano 30 paoli per ciaſcheduno, naſce tra colluſori diſparere, e venendo a rottura, ogn'uno dal depoſito prende quanto può, ed uno ſen' fugge: tu allora ſopragiungi, e ſenti l'accideute occorſo, e dici di voler' indovinare quanto rapì il fuggitivo, e quanto il preſente giuocatore; per ciò ſapere dirai al giuocatore preſente, che moltiplichi i denari, che ha per 60, numero del depoſito, ed al prodotto farai aggiungere il doppio de' denari, che levò l'altro. Tu moltiplica in tanto 60 per 61, cioè il numero de' denari per uno di più, e dal tuo prodotto gli farai ſottraere la ſomma, che egli ha, poi ti farai manifeſtare il reſiduo, e lo dividerai per 59, numero de' denari meno uno, ed il quoziente ſaranno i denari tolti da chi fuggì, e l'avanzo del preſente.

ARTICOLO VII.

Eſtrazione della Radice Quadra.

1. QUalunque numero moltiplicato in ſe medeſimo produce il quadrato, o ſia potenza ſeconda; e queſta per tal numero, che ſi chiama ſua radice, moltiplicata produce la potenza terza, e queſta per la ſua radice di nuovo moltiplicata

cata produce la quarta, e così in infinito, sicchè infinite sono le radici, ed infinite parimente sono le potenze, anzi ciascuna radice ha una serie di potenze infinita: ma non è però vero, che qualunque numero assegnato abbia qualunque radice, anzi infiniti sono i numeri, che non ne hanno alcuna, ciò che curiosamente avverte il Galileo nel primo dialogo della scienza nuova. Tali numeri, che non hanno radice nessuna, si chiamano sordi, o irrazionali, e quelli, che non hanno. V. g. Radice quadra, si dicono sordi di tal potenza. Si può nulla di meno da qualunque numero estraere radice tale, che vadasi all'infinito approssimando alla sua potenza, come diremo al num. 3. ed al Capo 3. dove del Calcolo Decimale.

2. Per estraere la Radice quadra, si scriva il numero dato, e poi alternativamente si appuntino le figure, incominciando alla destra; questo numero de' punti dinoterà il numero de' caratteri da porsi nel luogo della radice. Ora incominciando dal primo membro alla sinistra, si cerchi la sua radice più prossima, e si ponga nella parentesi; questa si quadri, e si sottragga dal detto primo membro, ed al residuo si aggiunga la seguente figura non puntata, e questa quantità si divida per il doppio della radice trovata, e 'l quoziente sarà la seconda figura della radice; all'avanzo aggiungasi la figura seguente puntata, e da questo si sottragga il quadrato della detta seconda figura, il quale in caso, che non si possa sottraere, sarà segno essere questa troppo grande; onde dovrà scemarsi quanto sarà bisogno. Trovato l'avanzo, e unito con la figura seguente non puntata, si dovrà nuovamente questo dividere per il doppio di tutta la radice, di modo, che dal residuo con la figura seguente puntata se ne possa togliere il quadrato di questa ultima figura, e così si segua sino alla fine.

3. Che se all'ultimo vi sarà avanzo, e si voglia trovare la radice più prossima, s'aggiungano alcuni binarj di zeri, e tanti quanta più prossima si vorrà, e questi daranno altre tante figure, che saranno il numeratore d'una frazione, che averà per denominatore l'unità con tanti zeri, quanti binarj d'essi furono aggiunti; ma a' numeri, che non hanno radice giusta d'intieri, può bene approssimarsi con la radice all'infinito, ma non si troverà mai l'esatta. O pure più speditamente, si ponga l'avanzo sopra una riga, e sotto essa il doppio della radice più uno: perchè il doppio della radice più uno aggiun-

giunto al quadrato d'essa radice, fa sempre il quadrato prossimo maggiore. Ond'è, che nella operazione non può mai avanzare più del doppio della radice, altrimente la radice estratta sarebbe troppo piccola.

4. Si devono sapere a memoria, sì per l'estrazione della Radice quadra, sì per l'estrazione della Radice cuba, i quadrati, & i cubi dall'uno fino al 9; e per non averli a cercare ogni volta con tedio, li pongo nella presente Tabella. Il Padre Guldino Gesuita nell'Appendice della sua Centrobarica ha seguitato questa Tabella dall'uno fino a Centomila, ove subitamente si trovano i quadrati, e i cubi di detti numeri, e similmente di grandissimi numeri le predette radici subitamente si estraggono.

Num.	Quad.	Cub.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

ESEMPIO.

5. Sia una Città quadrata, che abbia di giro 12 mila stadj, sicchè un lato sia lungo stadii 3000, dimando la maggior larghezza da un'angolo all'altro? Per la 47, d'Euclide i due quadrati de' lati del rettangolo danno il quadrato dell'ipotenusa, o sia lato opposto all'angolo retto, sicchè quadrando 3000 fa 9000000, e questo duplicato fa 18000000; cerco la radice di questo numero.

6. Si scriva il numero 18000000. Poi dalla destra incominciando, si faccia un punto sotto la prima figura, indi sotto la terza, poi sotto la quinta, settima ecc. Al primo numero puntato alla sinistra si trova 18, se ne prenda la radice più prossima, che è 4, si segni nella parentesi posta alla destra, poi si quadri questo 4, fa 16, e si sottragga dal 18, resta 2; si segni 2 sotto al 18, poi si tiri in giù il zero, e si ponga vicino al 2; e si raddoppi la radice, che è 4, fa 8, e si segni da parte. Poi si esamini quante volte quest'8 entra nel 20, avertendo di farvelo entrare tante volte, che dall'avanzo insieme con la figura seguente puntata se ne possa estraere il quadrato di questo quoziente. Nel caso nostro l'8 in 20 entra 2, si segna 2 nella radice a canto al 4. Questo 2 si moltiplica per 8, fa 16, ed il 16 si leva dal 20, e resta 4; poscia si tira in giù il zero figura puntata, e si pone vicino al 4; da questo 40 si estrae il quadrato di 2, che è 4, resta 36. Fin quì abbiamo estratta la radice di 1800. Ora seguitando, si cali il zero seguente figura

non

non puntata, e ſi ponga vicino al 36, e ſi raddoppi tutta la radice 42, che fa 84, e ſi ſegni ſotto al primo duplo 8. Poi ſi eſamini, come fu detto ſopra nella diviſione, l'84 quante volte entri nel 360, cioè l'8 in 36 entra 4, che con le cautele della diviſione, e con le cautele dell'eſtrazione della radice ſopradette può entrarvi. Dunque ſegno 4 nella radice, il quale poi moltiplico per 84, e di mano in mano i prodotti ſottraggo dal 360. Trovo, che reſta 24; e tirando giù la figura puntata avrò 240, da cui devo levare il quadrato di 4, che è 16, e reſta 224. Similmente operando per le altre due ſeguenti figure, troverai la radice di 18000000 eſſere 4242 coll' avanzo di 5436. Che ſe ſi voglia trovare radice più proſſima. Si faccia come abbiamo detto al num. 3. che nel caſo noſtro averemo pe'l diametro di detta Città ſtadj $4242\frac{64}{100}$, ed alquanto più.

18000000 (4242.64

20
40
360
240
2240
5440
5436.00
34560
3452400
58320
58304

8
84
848
8484
84852

1	2
1	2

pr. del 7.

2	0
7	0

pr. del 9.

7. La prova ſi fa moltiplicando la radice in ſe ſteſsa, e ne tornerà il numero, da cui è ſtata eſtratta, aggiungendovi però l'avanzo. Vi ſi fanno ancora le prove del 7, e del 9. Prima ſi levano i 7, o i 9 dall'avanzo, e ſi ſegna nella croce il reſiduo; poi ſi tolgono dalla radice, e'l reſiduo ſi quadra, e dal quadrato ſi levano i 7, o i 9, e ciò, che avanza, ſi pone nella croce ſotto al numero già ſegnato. Queſti due numeri ſi ſommano, e dalla ſomma ſi levano i 7, o i 9; e ciò, che reſta, ſi ſegna dall' altra parte della croce; e finalmente queſti 7, o 9 tolti dal numero dato, il reſiduo deve eſsere uguale all' ultimo avanzo nella croce poſto.

8. Tu ſei curioſo ſapere, quante doppie diede un tuo amico

di

di mância a chi gli recò lieta novella. Farai, che aggiunga, o tolga dal numero delle doppie un numero a tuo piacere, v.g. se le doppie furono dodici, farai aggiungere v.g. 8, fa 20, poi farai dividere questa somma in due parti a suo genio, v. g. in 15, e 5; farai raddoppiare una di queste due parti, qual vuolsi, e poi moltiplichi per l'altra parte; v. g. raddoppia il 5, fa 10; lo moltiplica per 15, fa 150; a cui farai aggiungere sì il quadrato di 15, come il quadrato di 5, cioè delle due parti, ch' ei prese del 20. Questa somma ti farai manifestare, da cui tu prontamente togli la radice, dalla quale levato il numero fatto aggiungere, o aggiunto, se lo facesti togliere, averai il numero desiderato. Per la 4, del 3. d'Euclide.

ARTICOLO VIII.

Estraere la Radice Cuba.

1. SI scriva il numero dato, e cominciando dalla destra, si faccia un punto sotto la prima figura, e poi sotto la quarta ecc. di tre in tre; quali punti indicheranno i caratteri della radice. Ciò fatto, si prenda la più prossima Radice cuba delle prime figure sino al numero puntato, che possono essere tre, e ciò troverai facilmente nella Tavola posta all'Art. 7. num. 4. Trovata questa, si riponga nel luogo suo, e'l suo cubo si sottragga dal primo numero puntato, e coll'avanzo s'aggiunga la seguente figura, e questo si divida per il triplo del quadrato della radice. Per trovare il secondo carattere della radice, fatta la divisione, all'avanzo s'aggiunga la seguente figura, e da questa si sottragga il triplo della prima figura della radice, moltiplicato per il quadrato della seconda figura, e finalmente unita a questo avanzo la seguente figura puntata, se ne estragga il cubo della seconda figura, che deve potersi estraere, altrimenti la seconda figura sarebbe troppo grande; onde dovrebbe scemarsi d'una unità, o di più secondo il bisogno. Quindi per trovare la terza figura si triplichi il quadrato delle due figure trovate, e questo sarà il divisore dell'ultimo avanzo unito alla seguente figura non puntata, il resto si continui come sopra, avertendo, che le due prime figure vanno considerate come una, e così essendovi la quarta figura, le tre prime si prendono come una, cioè per quel numero, che significano.

II

2\. Il più numeroſo Eſercito, che abbia ammirato la terra, fu quello, che conduſſe Xerſe Rè di Perſia contro de' Greci, per contarlo, preſe per ripiego di fare un recinto di muraglie quadrato, il quale riempiendo ſucceſſivamente, e votando di Soldati, trovò aſcendere il gran numero degl' uomini, che ſotto la ſua ubbidienza conduceva, a un milione e 700 mila, ſenza le donne, e l'armata navale di 1200 Vaſcelli, e le donne per lo meno dovevano eſſere altre e tante, e con i loro fanciulli potevano aſcendere a 3512000. Tante volte ſuppongo pe 'l noſtro propoſito, che foſſe riempito il ſudetto recinto da tanti uomini, da quanti ſe ne contenevano in un lato dello ſteſſo. Si cerca la capacità del recinto, e quanti ſe ne contenevano per lato? E' chiaro, che eſtraendoſi la Radice cuba del numero ſudetto, ſi avrà il numero de' Soldati, che capivano nel lato del detto recinto, e 'l ſuo quadrato ſarà la capacità.

3\. Si puntino, come ſi vedono, a tre per tre le figure, e nel caſo noſtro reſterà diviſo il numero dato in tre membri; poi ſi prenda la Radice cuba proſſima minore dal primo membro 3, che è 1, ſi ponga nella parenteſi, e' l cubo di queſta radice ſi ſottragga dal primo membro, reſta 2, ſi ſcriva ſotto, e vicino gli ſi ponga il 5 figura prima del ſecondo membro; ora ſi quadri la radice 1, e poi ſi triplichi, fa 3, per queſto 3 ſi divida il 25, che, a cagione delle ſeguenti operazioni, non vi può entrare più di 5 volte, ſi ponga 5 nella parenteſi, e ſotto al numero diviſo 25, ſi ponga il dieci avanzo della diviſione, a cui vicino ſi cali l'uno ſeguente ſeconda figura del ſecondo membro; quindi ſi quadri l'ultima figura della radice 5, fa 25, ſi moltiplichi per l'antecedente 1, fa pur 25, ſi triplichi, fa 75, che ſi ſottrae dal 101, reſta 26, a cui ſi aggiunga il 2 figura puntata, e da queſto numero ſi tolga 125 cubo dell' ultima figura della radice, reſta 137. dunque 15 è la radice di 3512. è bene far ſubito la prova.

3512000 (152

25

101 3

262 675

1370

200

200

192

3	3
6	2

pr. del 7.

3	2
8	2

pr. del 9.

Ora, per ſeguitare, al detto 137 ſi uniſca il o prima figura del

terzo

terzo membro, e ſi faccia il triplo del quadrato di tutta la radice, fa 675, per cui ſi deve dividere il 1370, e'l quozien-te 2, ſi ponga nella radice, deve però avanzar tanto, che con le figure ſeguenti baſti alla ſottrazione delle ſeguenti opera-zioni. All'avanzo dunque della diviſione ſi uniſca il o ſeguen-te: poi ſi quadri l'ultima figura della radice, ſi triplichi il qua-drato, e queſto per le due figure antecedenti ſi moltiplichi, fa 180, il quale ſi levi da 200, reſta 20; ſi tiri giù il o puntato, fa pur 200, da cui ſi levi il cubo di 2, reſta 192. Dunque in un lato ve ne andavano 152, ed in tutto il recinto 23104 qua-drato di 152.

4. Per approſſimarſi, s'aggiunghino uno, o più ternarj di zeri, ſecondo che più ſi voglia proſſima la radice, e ſi ſeguiti nella ſteſſa maniera l'operazione, un ternario di zeri darà una figura nella radice, che ſignifica le decime, due ternarj daran-no 2 figure, che ſignificano le centeſime; 3 le milleſime ecc. all' infinito: perchè i numeri, che hanno avanzo ſono ſordi, nè mai in eterno potrà trovarſi radice giuſta, benchè ſempre ſi poſſa alla giuſta approſſimare, con approſſimazione all' infi-nito; la ragione di ciò ſi deſume dalla dottrina degl' incom-menſurabili data da Euclide nel libro decimo.

5. La prova ſi fa con elevare la radice alla potenza terza, ed a queſta aggiungere in fine l'avanzo; e deve tornare per l'appunto il numero dato. Le prove poi del 7, e del 9 ſi fanno così. Tolganſi primieramente o i 7, o i 9 dall'avanzo, e'l re-ſiduo ſi nota da un lato della croce, poi ſi tolghino dalla radi-ce, e l'avanzo ſi eleva alla potenza cubica, e di nuovo levati o i 7, o i 9, ſi ſegni ſotto la croce ciò, che avanza, e ſi ſom-mino queſti due numeri della croce, e dalla ſomma ſi tolga, ſe ſia d'uopo, i 7, o i 9, e ſi noti dall'altro lato l'avanzo, cui ſimile dovrà eſſere l'avanzo del numero dato dopo eſſerſene tolti i 7, o i 9.

6. Per l'eſtrazione delle altre potenze ſi formano alcuni canoni generali con un Binomio all'uſo Algebraico, co' quali ſi eſtraggono non ſolo nella maniera ſudetta le due già eſpoſte Radici, ma ogn'altra: Avverto, che della quarta potenza ſi eſtrae la Radice quadra due volte; e ſe ſia la radice della po-tenza ſeſta, ſi eſtrae prima la Radice quadra, e poi la cuba, o viceverſa; cioè ſi piglia la Radice cuba della radice quadra ecc.

7. Devo in fine avertire con Criſtiano Ugenio, che le ope-razioni di ſommare, e ſottraere ſono ſempliciſſime, e che le

altre da queste nascono, poichè il moltiplicare non è altro, che un compendio del sommare, e'l dividere una specie di sottraere; ma questa operazione di più ci scuopre le frazioni, che nelle altre regole ci resterebbero occulte. L'estrazione delle radici ci scuopre un altro vastissimo campo degl' incommensurabili, ove l' umana perspicacia non può a pieno penetrare. Ora non essendo dagli Aritmetici altra regola trovata non è meraviglia, se l'ignoranza umana sia infinitamente più ricca di verità, che l'umana scienza.

ARTICOLO IX.

Calcolo Rabdologico con le Lamine Neperiane.

1. Giovanni Nepero nobile Barone di Scozia inventò alcune lamine, con le quali si eseguiscono le 3 regole più difficili dell'Aritmetica, moltiplicare, dividere, ed estraere le radici in una maniera giocosa senza tedio, o travaglio di mente. Si facciano dunque cento laminette eguali, ciascuna dieci volte più lunga che larga, e si dividano tutte da capo a piedi in 9 quadrati, lasciando il decimo quadrato pe'l margine da capo, e da piedi, a' quali si deve tirare la diagonale: ciò fatto dieci lamine si lasciano così in bianco, in altre 10 si scriva la serie de' numeri naturali ne i triangoli destri da 1 fino a 9, in altre 10 si scrive la serie del 2 Aritmetica, e così a 10 a 10 tutte si riempiano con la serie de' primi numeri fino al 9; il che fatto, e distribuite in 10 mazzetti si ridurranno alla pratica nella maniera, che segue. Per abbreviare il numero delle lamine si possono fare parallelepipedi di legno, e nelle 4 faccie scrivere le serie diverse come sopra.

2. Statico, e Momentone si piccavano fortemente di giudicare a vista del numero delle cose. E imbattendosi in un mucchio di grano, diceva Statico, io giudico, che i grani di quel mucchio, siano più di 3500000. Momentone rispondeva, s'accostano a questo numero, ma non lo passano. Statico si pigliava collera, e s'impegnava di sostenere, che il suo giudizio fosse giusto; e Momentone scommetteva di pagare al compagno tanti quattrini, quante volte i grani errati si contenevano negli assegnati. Per decidere la questione si pesò quel mucchio, giacchè si sa, che in una libbra di grano si contengono 6912 grani, e si trovò pesare 507 libre. Ora per sapere quanti grani vi fossero

ſero, biſognerà moltiplicare 6912 per 507, il che così ſi farà con le lamine.

3. Si prendano le 4 lamine, che hanno le 4 figure 6, 9, 1, 2, e con queſte ſi uniſca la ſerie naturale, come ſi vede nella figura prima. Quindi in una carta ſi ſcriva il numero 507, e ſotto ſi tiri una linea, e poi preſo il 7, e cercato nella ſerie naturale, ſi ſommino i numeri, che in eſſa figura ſi ritrovano incontro, ma per traverſo incominciando dalla deſtra, e ſi ſegnano ſotto la linea. Dopo il 7 viene il 0, che ſi ſegna una figura più indentro. Quindi il 5 ſi cerchi nella ſerie naturale, e ſi ſomma la ſua linea traverſa, come fu ſommata quella del 7, e ſi nota la ſomma dopo il zero già notato, e poi tutto ſi ſomma, e ſi averà il prodotto 3504384 numero de' grani del mucchio. Sicchè Statico vinſe la ſommeſſa, ſuperando il detto numero 3 milioni e mezzo di 4384. *Fig. 1.*

507
48384
345600
3504384

4. Per l'intiera ſoluzione del queſito biſogna vedere quante volte il 4384 ſi contenga in 3504384, cioè queſto per quello ſi deve dividere, il che ci dà occaſione di ſpiegare queſta regola con le dette lamine Neperiane.

5. Si ſcrive da parte il dividendo, e ſi prendono le lamine, che hanno prefiſſi i caratteri del diviſore 4, 3, 8, 4, e ſi aggiuſtano con la lamina della ſerie naturale, come nella figura ſeconda. Quindi ſi tagliano con un punto alla ſiniſtra del dividendo tante figure, quante ne ha il diviſore, o una di più, acciochè queſte del diviſore facciano numero maggiore: di poi ſi oſſervi nelle linee traſverſali, quale coſtituiſca numero più proſſimo minore alle dette figure tagliate, e trovato ſi ſegni nel luogo del quoziente il ſuo numero corriſpondente nella ſerie naturale, che nel caſo noſtro è 7; ſi faccia la ſomma delle figure ne i rombi corriſpondenti a queſto 7, e ſi ſottragga da i numeri tagliati col punto, e ſi uniſca al reſiduo la figura ſeguente del dividendo, cioè 8; cerchiſi di nuovo ne i numeri delle linee traſverſali, quale ſia il numero più proſſimo minore al detto avanzo; che ſe neſſuno ve ne ſia minore; ſi nota nella lunula zero, ma nel caſo noſtro v'è il numero corriſpondente al 9 nella ſerie naturale, che ſi ſegna dopo al 7 già notato, e ſi tiri giù l'altro numero, che è 4; ſi ſeguiti l'operazione come ſopra, e ſi troverà $7984\frac{3528}{4384}$, numero de' quattrini, che dovrà pagare Momentone, cioè ſcudi 15 : 96 : $4\frac{79}{137}$. *Fig. 2.*

6. Per l'eſtrazione delle Radici quadra, e cubica biſognerà *F. 3. e 4.*

aggiungere alle dette lamine due altre lunghe al pari di quelle, ma larghe il doppio; poi ſi dividono, come le altre in uguali quadrati, come ſi rappreſenta nella figura terza, e quarta; una deve ſervire per l'eſtrazione della Radice quadra, e l'altra per la cuba. S'oſſervi alla figura terza nella deſtra colonna, che ſerve per le Radici quadre, che ſi nota il doppio di ciaſcun numero ſemplice, e nella ſiniſtra i quadrati de' numeri ſemplici. Nell'altra tavoletta per le Radici cube alla deſtra ſi ſcrivono i numeri quadrati, ed alla ſiniſtra i cubi de' numeri ſemplici.

7. Ciò ſatto ſi ſcriva da parte in una carta il numero, da cui ſi deve eſtraere la radice, e ſi divida co i punti, come fu detto al nnm. 2. dell'Art. 7. Quindi ſi prenda il più proſſimo quadrato del primo membro, che troverai nella lamina de' quadrati, unita alla lamina de' numeri radicali raddoppiati, e ſi vegga in quali delle linee traſverſali trovisi numero proſſimo minore, o eguale al predetto reſiduo; e ſi ſottragga ſegnando prima la ſeconda figura della radice, che ſarà la metà de' numeri incontro a tal linea traſverſale. Eper la terza operazione di nuovo tramezzo alle due già dette lamine ſi aggiunga la lamina della ſeconda figura raddoppiata, che ſe paſſa il 10 biſognerà mutarle ambedue per porre ambi i caratteri, o tre, e più ancora, ſe biſognaſſe per il doppio di tutta la radice, e quivi per traverſo ſi cerchi di nuovo un numero uguale, o proſſimo minore del reſiduo unito al terzo membro del numero dato: ſi ſottragga, e ſi ſegni la figura radicale, che ſarà la metà del numero oppoſto ecc. come ſopra.

ESEMPIO.

8. Un Re ſpedì mille uomini ad una impreſa aſſai difficile, e promiſe loro per premio, ſe tornavano vittorioſi, di dare ad ogn' uno tante doppie d'oro, quanti ne ſarebbero tornati. I Soldati andarono, e tirarono a glorioſo fine l' impreſa, e lo sborſo fu di 133289 doppie. Si dimanda quanti Soldati tornaſſero vittorioſi?

9. Per la ſoluzione di queſto queſito ſi vede chiaramente, che biſogna prendere la radice di 233289. Si ſegni dunque queſto numero come vedi, e ſi puntino le figure alternativamente, ſi prenda la radice del primo membro 23, che è 4, ſi ponga nella lunula; poi ſi quadri, e ſottratta dal 23 reſta 7, che ſi nota ſotto con le due figure ſeguenti.

```
233289 (483
 732
 704
  2889
     0
```

guenti. Ora si raddoppi la radice, che fa 8, e si prenda la lamina di questo numero, e si unisca a quella de' quadrati, come vedi nella figura quinta, e si cerchi nelle linee trasversali il numero più vicino a 732, che sarà, sommati li rombi 704 incontro al 16, la di cui metà pongasi nella lunula, e sottraggasi il 704 da 732, resta 28, a cui uniscasi le seguenti due figure 89; poi raddoppiasi il 48, fa 96; prendansi le due lamine 9, e 6, e mettansi alla sinistra della lamina de' quadrati, come nella figura 6. e cerchisi come sopra nelle linee trasversali il numero più prossimo al 2889, che troverassi per l'appunto dicontro al 6; pongasi la metà di questo nella radice, e l'altro sottraggasi, resta zero. Dunque i Soldati, che ritornarono, furono 483, e tante doppie guadagnarono per ciascheduno. *Fig. 5.* *Fig. 6.*

10. Resta ora da spiegarsi la maniera da estraere la Radice cuba, o sia di terza potenza da qualunque numero con le dette lamine.

11. Primo si scriva in carta il numero, da cui si vuole estraere la radice. Si puntino le figure a 3 per 3, come si disse nell'Articolo 8.

Secondo si estragga la radice cuba più prossima dal primo membro a sinistra per opera della tavoletta alla figura 4. e si noti nella lunula, e'l suo cubo si estragga dal primo membro. *Fig. 4.*

Terzo si triplichi questa radice, e si pongano le lamine, che formano questo triplo a destra della lamina de' cubi; poi si triplica il quadrato della radice, e si ponghino le lamine, che formano questo triplo a sinistra della lamina de' cubi; veggasi in queste sinistre lamine a traverso sino a i cubi inclusive, ove sia il numero prossimo minore a tutto il secondo membro unito al primo residuo, e'l numero corrispondente si segni per numero della radice; questo poi si quadri, e si moltiplichi per il triplo del primo, il prodotto si aggiunga all'altro trovato una figura più indentro, si sommi con esso, e poi si sottragga dal membro superiore secondo; che se non si può, bisognerà calare d'una, o più unità la seconda figura, e fare lo stesso, e così si procederà, se'l numero da cui dee estraersi la radice sarà di più membri, ripetendo per ogni membro la medesima operazione, che io non pongo in esempio per non moltiplicare figure.

CA-

CAPO II.

Calcolo delle Frazioni.

ARTICOLO PRIMO.

Natura delle Frazioni.

1. LA frazione è una parte dell' unità eſpreſſa con due numeri uno ſopra una righetta, che diceſi numeratore, e l'altro ſotto la righetta; che diceſi denominatore, perchè queſto aſſegna il numero delle parti uguali, nelle quali è ſtata diviſa l'unità, e quello il numero, che di tali parti ſi ha $\frac{3}{4}$ vuol dire tre quarti, cioè il quattro ſotto la linea ſignifica, che l'unità fu diviſa in quattro parti uguali, e che di queſte ſe ne hanno 3 denotate dal 3 poſto ſopra la linea. Può ancora in altro modo farſi il concetto delle frazioni dicendo, che il numeratore ſia un numero d'unità diviſo per il denominatore, onde a ciaſcuna unità del denominatore tre quarti dell' unità appartengano, e queſta idea è chiaro, non eſſere dalla ſuperiore idea diverſa.

2. Se poi accada, che il numeratore della frazione ſia maggiore del denominatore, in tal caſo quella frazione ſi chiama ſpuria, e conterrà uno o più intieri, ſecondo che il denominatore più o meno ſi conterrà nel numeratore; $\frac{13}{4}$ ſarà uguale a 3 $\frac{1}{4}$, perchè il denominatore 4 ſi contiene tre volte nel numeratore 13, ed avanza 1, cioè $\frac{1}{4}$. E perchè la frazione non è altro, che una contenenza del denominatore nel numeratore, è ella inſieme eſpreſſione di qualunque ragione Geometrica.

3. Se ſiano due, o più frazioni, o ragioni di diverſo denominatore poſſono facilmente ridurſi a frazioni, che abbiano l'iſteſſo denominatore così.

Si moltiplichi ciaſcun numeratore per ciaſcuno de i denominatori di tutte le altre frazioni, e ponganſi i prodotti di ciaſcuno numeratore ſopra altrettante linee, e ſotto queſte pongaſi il fatto di tutti i denominatori, così le frazioni ſaranno ridotte alla ſteſſa denominazione; v. g. ſpiego la detta operazione: moltiplicando il numeratore 2 di $\frac{2}{3}$ per il denomina-

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{40}{60}$	$\frac{45}{60}$	$\frac{24}{60}$

tore

tore 4 di $\frac{3}{4}$ fa 8, e poi per il denominatore 5 di $\frac{2}{5}$ fa 40, quale pongo sopra una riga; poi il numeratore 3 di $\frac{3}{4}$ lo moltiplico per il denominatore 3 di $\frac{2}{3}$ fa 9, e questo per il denominatore 5 di $\frac{2}{5}$ fa 45, che pongo sopra una riga, quindi moltiplico il denominatore 2 di $\frac{2}{5}$ per il denominatore 4 di $\frac{3}{4}$, e poi per 3 denominatore di $\frac{2}{3}$ fa 24, che parimente pongo sopra una riga. Sotto queste righe si deve porre il prodotto dei tre denominatori 3, 4, 5, che fa 60, e si averanno tre altre frazioni dell' istesso denominatore uguali alle tre date: poichè ogni frazione può avere infinite espressioni, fra le quali sempre se ne ritrova una comune a molte, come nel caso nostro diviso l' intiero in 60 parti uguali abbiamo 40 d'esse uguali a $\frac{2}{3}$, 45 d'esse uguali a $\frac{3}{4}$, e 24 uguali a $\frac{2}{5}$.

4. Con che si conosce ancora quale di due frazioni, o ragioni sia maggiore, poichè ridotte alla stessa denominazione si vede quale ha maggior numeratore, e quella sarà maggiore, come $\frac{2}{3}$ sono maggiori di $\frac{1}{4}$, perchè ridotti li $\frac{2}{3}$ sono eguali a $\frac{8}{12}$, e'l $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{12}$, e'l 8 è maggiore di 3; dunque ecc. La ragione di tutto ciò si è, che l'istessa contenenza hanno gli equemoltiplici di due quantità, che le stesse quantità fra loro, come mostra Euclide prop. 4. lib. 5.

5. Una frazione potendo avere infinite espressioni tutte eguali spesse volte accade doversi ridurre alla minima espressione possibile. Il che si fa con ritrovare il massimo divisore comune al numeratore, ed al denominatore; ed allora i quozienti costituiranno una nuova frazione di minima espressione uguale alla prima. La maniera di ritrovare questo massimo divisore comune è dividere il denominatore per il numeratore, e'l divisore per l'avanzo, seguitando così finche resti o uno, o zero. Che se l'ultimo avanzo sarà uno, la frazione sarà minima, ne potrà abbreviarsi: ma se l'ultimo residuo sarà zero, tal' ultimo divisore sarà il massimo comune cercato, per cui divisi il numeratore, e'l denominatore della frazione data, i quozienti daranno una nuova frazione alla data uguale. Si debba ridurre alla minima denominazione $\frac{6}{22}$ divido il 22 per 6, avanza 4, divido il 6 per 4, avanza 2, divido il 4 per 2, avanza zero; dunque la frazione è riducibile, e'l massimo divisore comune è il 2 ultimo avanzo; dunque diviso tanto il 6 come il 22 per 2 viene $\frac{3}{11}$. Per conoscere, se $\frac{3}{11}$ sono uguali a $\frac{6}{22}$ si moltiplicano i numeri in croce, e i prodotti saranno uguali, per il num. 4.

AR-

ARTICOLO II.

Operazioni del Calcolo nelle frazioni.

1. SI sommano le frazioni, se sono dello stesso denominatore con sommare i numeratori, e porre la somma sopra una riga, e 'l denominatore sotto essa riga; ma se sono di diverso denominatore si riducono al medesimo, come si disse sopra num.3. e poi si sommano i numeratori ecc. V.g. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ ridotte sono $\frac{18}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{15}{90}$; dunque sommate fanno $\frac{93}{90}$ uguali ad 1 $\frac{1}{30}$.

2. Si sottraggono le frazioni, se sono dello stesso denominatore, con sottraere un numeratore dall' altro, ed al residuo sottoscrivere il denominatore; ma se sono di diverso denominatore si riduchino allo stesso denominatore, e poi si faccia come sopra. V.g. da $\frac{3}{4}$ levar devo $\frac{2}{3}$, riduco, saranno $\frac{9}{12}$, ed $\frac{8}{12}$, sicchè resterà $\frac{1}{12}$.

3. Si moltiplicano le frazioni con moltiplicare i numeratori fra loro, e porre il prodotto sopra una righetta, e sotto essa si pone il fatto dei denominatori, v.g. $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{3}$ farà $\frac{3}{12}$.

4. Per dividere le frazioni si capovolta il divisore, e poi si moltiplica con la frazione, che si deve dividere; il prodotto sarà un' altra frazione quoziente. Sonovi due statue d'oro, una delle quali pesa $\frac{1}{12}$ d'una libra, e l'altra $\frac{5}{6}$, si vorrebbe della maggiore fare altre statue uguali alla minore, si dimanda quante se ne faranno? E' chiaro, che tante se ne faranno della maggiore, quante volte $\frac{1}{12}$ si contiene in $\frac{5}{6}$; dunque dividasi $\frac{5}{6}$ per $\frac{1}{12}$, si capovolta il divisore sarà $\frac{12}{1}$, si moltiplica per $\frac{5}{6}$, fa $\frac{60}{6}$, cioè 10; dunque della grande si faranno dieci statue uguali alla piccola.

5. L'estrazione delle radici dalle frazioni si fa con ridurle prima alla minima espressione; poi si estragga la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore; che se uno di questi sarà numero sordo, da tal frazione non si potrà estraere la radice, se non che per approssimazione, come si disse sopra al Capo 1. Articolo 7. numero 3. V.g. si vuole la radice seconda di $\frac{27}{75}$, riduco questa frazione, fa $\frac{9}{25}$, la di cui radice sarà $\frac{3}{5}$, cioè la radice del numeratore 9 è 3, che pongo sopra la riga, e del denominatore 25 è 5, che pongo sotto essa righa.

AR-

ARTICOLO III.

Riflessioni sulle sudette operazioni.

1. SE si riflette alla moltiplicazione delle frazioni, si troverà il prodotto sempre minore tanto della frazione moltiplicata, quanto della moltiplicante; laddove negl'intieri tutto l'opposto succede, cioè il prodotto di due numeri intieri sempre è molto maggiore di ciascuno de' producenti.

2. Similmente nella divisione delle frazioni il quoziente il più delle volte viene molto maggiore della frazione divisa, laddove negl'intieri il quoziente essendo parte del dividendo, viene di esso sempre molto minore; il che per verità pare, che sia contro la natura di queste operazioni.

3. E pure nulla è più accomodato alla natura di quelle, come si farà manifesto a chi bene attende alle definizioni della moltiplicazione, e della divisione. La moltiplicazione è l'invenzione d'un numero, che contenga tante volte il numero moltiplicato, quante volte l'unità nel moltiplicante si contiene, ma l'unità nel moltiplicante frazione non si contiene, che in tal parte; dunque il prodotto dovrà essere tal parte del moltiplicato, cioè se moltiplico $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$ vorrò tante volte li $\frac{2}{3}$, quante volte l'unità sta nel $\frac{1}{2}$, ma questa nel $\frac{1}{2}$ non sta, che per metà; dunque vorrò la metà di $\frac{2}{3}$, cioè $\frac{2}{6}$ uguali ad $\frac{1}{3}$, e per lo contrario $\frac{1}{3}$ sarà $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{2}$.

4. Similmente la divisione è cercare un numero di tante unità, quante volte il divisore si contiene nel dividendo, ma il divisore frazione nel dividendo frazione si può contenere molto più di quello, che sia la frazione dividenda; dunque il quoziente potrà venire maggiore, e maggiore all'infinito del dividendo, giacchè il divisore può essere minore, e minore all'infinito della frazione dividenda. In somma il dividere è esame di contenenza d'una quantità in un'altra qualunque ella sia, o pure distribuzione della quantità divisa in altrettante parti uguali al divisore, come se si divide il 12 per 4 ne vien 3, cioè ho fatto di 12 quattro parti uguali ciascuna a 3, così dividendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{4}$, ne viene $\frac{12}{4}$ uguali a 3, cioè di $\frac{3}{4}$ ho fatto tre parti ciascuna uguale ad $\frac{1}{4}$.

5. Dunque si averta bene, che quando si dice, io voglio dividere $\frac{1}{3}$ per metà, questo dice bensì volere la metà di $\frac{1}{3}$,

ma non già voler ſapere la contenenza di $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{3}$, onde ſi vede, che eſclude la regola della diviſione. Queſta eſpreſſione ſi vuole la metà di $\frac{1}{3}$, vuol dire, ſi vuole il $\frac{1}{3}$ alcune volte, che non arrivano ad eſſere, che la metà d'una ſola volta; che è l'eſpreſſione della moltiplicazione, la quale dà $\frac{1}{6}$, che è appunto la metà d' $\frac{1}{3}$. Così per lo contrario, ſe ſi dica vorrei ſapere $\frac{1}{3}$, che parte è di $\frac{1}{2}$, è chiaro queſto ammettere la diviſione, perchè in buon linguaggio non dice altro, che voler ſapere la contenenza di $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$, che appunto è $\frac{3}{2}$ quanto dà la diviſione; tutto ciò ben s'intenda, poichè rieſce di forte remora alla franchezza dell'operare, e molte volte è cagione di gravi errori a' principianti, maſſimamente ne' calcoli Analitici, ove ſi camina aſſai allo ſcuro nel concetto giuſto delle quantità.

6. Se poi mi ſi dimandi perchè le operazioni ſpiegate nell' Articolo ſuperiore vadano fatte in quella maniera. Riſpondo ciò dipendere da notizie più alte, onde ciò che ſegue dovrà laſciarſi da i principianti per riaſſumerſi dopo aver quelle conſeguite. La ſomma di $\frac{1}{2}$ più $\frac{1}{4}$ è uguale a $\frac{6}{8}$, lo provo ſia $\frac{1}{2}$ più $\frac{1}{4}$, uguale ad x: dunque moltiplicando tutto per 4 ſarà $\frac{4}{2}$ più 1 uguale a 4 x, e poi moltiplicando tutto per 2, ſarà 4 più 2 uguale ad 8 x: dunque dividendo tutto per 8, ſarà $\frac{6}{8}$ uguale ad x, che ſi doveva provare, ſi faccia l'iſteſſo per il ſottraere, cioè ſe ſi abbia da ſottraere $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{2}$, dirai $\frac{1}{2}$ meno $\frac{1}{4}$ uguale ad x, e concluderai $\frac{2}{8}$ uguale ad x.

7. Per il moltiplicare biſogna ſupporre una dottrina delle proporzioni Geometriche, cioè, che così ſtia l'unità al numero moltiplicante; come il moltiplicato al prodotto, per la definizione del moltiplicare, e che gli equemoltiplici ſtiano nella ſteſſa ragione, che i ſemplici termini. Ciò poſto ſiano da moltiplicarſi $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{4}$, dico, che il prodotto ſarà $\frac{1}{8}$; lo provo, perchè 1 a $\frac{1}{2}$ ſta come $\frac{1}{4}$ ad x; dunque multiplicando tutti queſti termini per 2 ſarà 2 ad 1, come $\frac{2}{4}$, a 2 x, e queſti per 4 ſarà 8 a 4, come 2 ad 8 x, e perchè il fatto de' medj è uguale al fatto degli eſtremi ſarà 8 uguale a 64 x, cioè $\frac{8}{64}$, che è $\frac{1}{8}$, uguale ad x. Che ecc.

8. Non altrimenti ſi dimoſtrerà la regola del dividere, in cui il diviſore tante volte ſi contiene nel dividendo, quante volte l'unità ſi contiene nel quoziente, ſe ſi debba dividere $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{4}$ ſi averà 2, ſi prova, così ſta $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$, come 1 ad x, e moltiplicando tutti i termini per 4, ſi averà queſt'altra Analogia

gia 1 a $\frac{4}{2}$, come 4 a 4 x, e moltiplicando tutto per 2 si averà 2 a 4, come 8 ad 8 x, e moltiplicando i medj, e gli estremi, averemo 32 uguale a 16 x, e dividendo per 16 ne viene 2 uguale ad x, che si dovea provare.

ARTICOLO IV.

Calcolo degl' intieri con le frazioni.

1. Con gl' intieri spessissime volte accade essere unite le frazioni, che devono sommarsi, sottraersi, moltiplicarsi, dividersi, ed anche estraersene le radici, come in queste operazioni in tali casi trattare si debbano, quì assumo a spiegare, ma prima è da premettersi la maniera, con cui gl'intieri alla natura d'una frazione si riducono.

2. E' chiaro, che se il numeratore d' una frazione sarà maggiore del denominatore, tal frazione sarà spuria, e conterrà uno, o più intieri, che si ritroveranno divivendo tal numeratore per il denominatore, e 'l quoziente saranno gl' intieri, che costituiranno la detta frazione, e l' avanzo della divisione, se v'è, indicherà la frazione residua oltre gl'intieri. Così per il contrario se si averà un numero con una frazione, questo si metterà in frazione, se si moltiplicherà pe'l denominatore della sua frazione, ed al prodotto si aggiungerà il numeratore della frazione, e tutto si porrà sopra la linea, e sotto essa il denominatore della frazione data; v. g. 2 $\frac{3}{7}$ si moltiplichi 2 per 7 fa 14, aggiungo 3, fa 17, pongo sopra una riga, e sotto essa il 7, sarà $\frac{17}{7}$ uguali a 2 $\frac{3}{7}$. Ciò supposto

3. Si sommano gl' intieri con le frazioni, sommando prima queste, e portando gl' intieri, che costituiscono, e si segna sotto la frazione residua, ed in ciò non v'è altro mistero.

4. Ma se due numeri accompagnati dalle frazioni dovranno detraersi, in tal caso la frazione inferiore si detragga dalla superiore, per l'Articolo 2. num. 2. ma se l'inferiore sarà maggiore della superiore, allora a questa deve aggiungersi un' intiero ridotto alla sua natura, pe 'l num. 2. e poi si sottragga l'inferiore, si segni l'avanzo, e si porti uno nella figura inferiore della prima colonna seguente. Quando poi nel numero superiore non v'è frazione, e questa è nell'inferiore, allora questa si detrae dall'unità assoluta, si segna l'avanzo, e si porta 1 ecc. come sopra.

5. Il moltiplicare gl' intieri con le frazioni è negozio alquanto più importante. Possono ambedue i numeri, che si moltiplicano essere con la frazione, o pure un solo; se uno solo abbia la frazione questo riducendolo volgarmente alla natura d'essa darà un'altra frazione, il di cui numeratore moltiplicato per il numero dato, e'l prodotto diviso pe'l denominatore della frazione data nel quoziente, darà il prodotto, v.g. $4\frac{1}{3}$ per 5, riduco $4\frac{1}{3}$ in terzi, fa $\frac{13}{3}$, moltiplico il 13 per 5, fa $\frac{65}{3}$; poichè il 5 vien considerato come frazione anche egli, che si esprime così $\frac{5}{1}$.

6. Ma se ambi i numeri averanno frazione, ambedue volgarmente si riducono alla natura della sua frazione, num. 2. poi di queste nuove frazioni si moltiplicano i numeratori, e 'l prodotto si divide pe 'l fatto de' denominatori, la quale operazione, anzi complesso d'operazioni quanto sia lunga ogn'uno vede, e meglio si avvederà nel seguente esempio.

ESEMPIO.

7. Il Duca d'Holstein unito alle due Città Anseatiche Amburgo, e Lubecca medita di tirare un canale da Amburgo a Lubecca medesima, per cui passi parte del fiume Albi, e si congiunga nel fiume Trave col Baltico, e così unire questo gran seno coll' Oceano Germanico, e con un taglio di poche leghe rendere Isola la Danimarca, accrescere notabilmente il comercio delle due sudette famosissime Città Imperiali, e vedere per mezzo a quegli Stati perpetuo flusso, e riflusso di Navi cariche di mercanzie. Il canale sarà lungo 15. m. passi Geometrici, largo $55\frac{1}{2}$, e profondo raguagliato lo scavo, ove più, ove meno, passi $25\frac{3}{7}$, si dimanda quanti passi Geometrici cubici di terra dovrà egli trasportare dal canale altrove, avendo fatto il patto con un Architetto, che vuole eseguire il pensiero, di pagare a ragione di bajocchi $4\frac{1}{2}$ il passo la terra trasportata finita l'opera?

8. Si moltiplichi dunque prima la lunghezza 15000 per l'altezza $25\frac{3}{7}$, ridotta $\frac{178}{7}$, il prodotto 267000 settimi, si moltiplichi per passi $55\frac{1}{2}$, ridotti a mezzi sono $\frac{111}{2}$, e'l prodotto diviso pe'l fatto de' denominatori, 2 e 7, cioè per 14, fa passi $2116928\frac{10}{14}$, che ridotto di nuovo a quattordicesimi, e moltiplicato per il prezzo di ciascun passo alla ragione di bajocchi $4\frac{1}{2}$, cioè per 9 metà, fa 266733000, e questo diviso pe'l fatto de' denominatori 2, e 14, cioè 28, ne viene scudi 952617:85 $\frac{5}{7}$ prezzo di tutto lo scavo del canale. Ecco

nella

nella seguente operazione sotto agli occhi tutto il calcolo usato comunemente.

```
     178                                   2670000
    15000                                  111
   -------                                 -------
     890                                    267
    178                                    267
   -------                                267
   2670000                                ---------
                                   14 ) 296370000
                        ------------    16
     296370000          21169285 10/14   23
          9             Quoziente.        97
   ------------                           130
28 ) 2667330000 ( 952617:85 5/7            40
     147          Quoziente.               120
      73                                     80
      173                                    10
        50
       220
        240
         160
          20
```

9. Riuscendo la sudetta maniera d'operare assai lunga, stimo essere cosa molto più addattata alla pratica la seguente regola, che in una sola operazione speditamente fa trovare il prodotto di due numeri, de' quali uno, o ambedue abbiano la frazione. Si dispongano i due numeri dati con le loro frazioni uno sotto dell'altro, poi si moltiplichino gl' intieri secondo il solito, indi si osservi il denominatore della frazione, quante volte si contenga nell' altro numero, e ciò per parti, incominciando dalla figura sinistra sino alla fine, e di mano in mano moltiplicando le contenanze prima di sottoscriverle col numeratore della frazione, e l'ultimo residuo parimente moltiplicato per tal numeratore il prodotto si ponga sopra una linea, e sotto il suo denominatore; che se l'altro numero non averà frazione, fatta la somma sarà finita l' operazione. Ecco nel sopradetto esempio eseguita l'operazione.

```
pr. del 9.          15000
 6 | 6              25 3/7
 - | -             --------
 7 | 6              75000
                   300006
pr. del 7.           6322
 6 | 4                  1
 - | -             --------
 3 | 4             381428 4/7
```

Ma

10. Ma se ambedue i numeri averanno la frazione prima moltiplica gl' intieri, poi la frazione di sotto col numero di sopra, e la frazione di sopra col numero di sotto nell'istessa maniera, che ho detto. Segnerai da parte i residui; che se qualcuno di questi sarà zero, questo istesso segnerai da parte sopra una lineetta, e sotto il denominatore della sua frazione, sicchè alla fine dovrai sommare queste due frazioni. Ma averti di aggiungere a i due fatti de i numeratori ne i denominatori il fatto de i numeratori delle frazioni date; che se si faccia una frazione, che superi l'unità, questa si ponga tra gl' intieri, poi tutto si sommi; e si averà il prodotto esattissimo, che si cerca. Ecco esemplificato tutto questo nell'esempio sopra esposto.

$$\frac{3}{7} \times \frac{0}{2}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 0 \\ 4 \\ \hline 10 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 6 & 0 \\ \hline 3 & 0 \end{array}$$

pr. del 9.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 6 & 3 \end{array}$$

pr. del 7.

$$\begin{array}{r} 381428\frac{4}{7} \\ 55\frac{1}{2} \\ \hline 1907140 \\ 19071404 \\ 190718 \\ 23 \\ \hline 21169285\frac{10}{14} \end{array}$$

11. La dimostrazione di questa regola è doversi moltiplicare, v. g. canne $2\frac{1}{2}$ di panno a scudi $5\frac{1}{2}$ la canna, altro non vuol dire, che volersi il $5\frac{3}{4}$ due volte e mezza, perciò moltiplicati gl' intieri, cioè preso il 5 due volte, prendo anche li $\frac{3}{4}$ due volte, cioè divido il 2 per 4, e moltiplico il quoziente per 3; poichè è l'istesso moltiplicare il 3 per 2, e dividere il prodotto per 4. Ora perchè s'ha da pigliare anche la metà di 5, divido questo per 2, e moltiplico per 1; poi sommo gl' avanzi, e vi pongo il fatto de' numeratori delle frazioni date, che altro non vuol dire, che prendere la metà di $\frac{3}{4}$; tutto sommato si averà l'intiero prodoto, che si doveva provare.

$$\begin{array}{r} 5\frac{3}{4} \\ 2\frac{1}{2} \\ \hline 10 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 14\frac{5}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 7 \\ \hline 5 & 7 \end{array}$$

pr. del 9.

$$\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$

pr. del 7.

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 3 \\ \hline 11 \\ \hline 1 \end{array}$$

12. In questa maniera di moltiplicare gl'intieri, e rotti, si adoperano le prove, sì del 9, come del 7, come segue. Tolgansi i 9, o i 7 dal primo numero, e l'avanzo si moltiplichi per il

il denominatore della ſua frazione, e ſi aggiunga il numeratore, poi ſi tolghino o i 7, o i 9, ſecondo la prova, che ſi fa, e ſi ſegni l'avanzo nella croce; così ſi faccia negli altri numeri ecc. come ſi vede negli eſempi dati. Un' altra maniera di moltiplicare gl' intieri con le frazioni ſi darà nel Capo ſeguente, dove del Calcolo Decimale.

13. Per dividere gl' intieri con le frazioni; ſe il dividendo ſolamente averà la frazione, ſi fa la diviſione degl' intieri, e la frazione va coll' avanzo, ſicchè diventa frazione di frazione. V. g. ſi vuol dividere $10\frac{1}{2}$ per 3, viene 3, ed avanza $1\frac{1}{2}$, che pur per 3 ſi deve dividere, ſi riduca l'intiero alla natura della ſua frazione, così $\frac{3}{2}$, ſi divida queſto per 3, il quale ſi fa frazione, ſottoponendogli l'unità così $\frac{3}{1}$, ed eſsendo egli diviſore dovrà capovoltarſi così $\frac{1}{3}$, e poi moltiplicarſi per $\frac{3}{2}$, farà $\frac{3}{6}$, cioè $\frac{1}{2}$; dunque il quoziente della diviſione ſarà $3\frac{1}{2}$. Poteva ridurſi a drittura il $10\frac{1}{2}$ a mezzi, e ſimilmente il 3, e poi dividere queſti due nuovi numeri, cioè 21 per 6, che dà ancora $3\frac{1}{2}$, ma ne i numeri groſſi rieſce più corta la prima maniera.

14. Se poi il diviſore ſolamente averà frazione, ſi riduca alla natura della frazione tanto il diviſore, che'l dividendo, e poi ſi faccia la diviſione, che ſe ambedue averanno frazione, cioè il diviſore, e'l dividendo ogn' uno ſi riduce alla natura della ſua frazione, poi ſi capovolta il diviſore, e ſi fa la moltiplicazione, come ſi è detto all'Art. 2. num. 4. di queſto Capo.

15. Se un numero averà ſeco unita la frazione, e ſe ne debba eſtraere qualunque radice, ſi riduce il numero alla natura della ſua frazione, e poi ſi eſtrae la radice dal numeratore, e dal denominatore, e ſi forma un'altra frazione con le dette due radici; ed accade ſpeſse volte, che un numero ſordo, colla frazione aggiunta diventa razionale. V. g. $12\frac{1}{4}$, fa $\frac{49}{4}$; la di cui radice è $\frac{7}{2}$; cioè $3\frac{1}{2}$, quando per altro il 12 ſolo è irrazionale.

16. Se ſi abbia una tavola lunga 11 palmi, e larga 4, e ſi voglia ſapere quanti palmi riquadrati ella ſia, è certo, che va moltiplicato l'11 per 4, fa 44, e tanti ſaranno i palmi riquadrati di detta tavola; è certo in oltre, che è l'iſteſso dire 11 palmi, che $\frac{11}{8}$ d'una canna, e 4 palmi è l'iſteſso dire, che mezza canna; dunque tanto dovrebbe venire moltiplicando 11 palmi per 4, quanto moltiplicando $\frac{11}{8}$ per $\frac{1}{2}$, e pure quelli producono 44, e queſti producono $\frac{11}{16}$. Ora ſi deſidera ſapere, d'onde naſca queſta diverſità. Ri-

17. Riſpondo, che s'accorda beniſſimo, e che è l'iſteſſo dire 44 palmi, che $\frac{11}{16}$, poichè biſogna vedere di che quantità ſia parte quella frazione, e vedremo ſubito, che tal parte ſarà uguale a 44 palmi; eſſendo le frazioni moltiplicate $\frac{11}{8}$ d'una canna, e $\frac{1}{2}$ canna, ſarà il prodotto parte d'una canna ſuperficiale, cioè riquadrata, ed una canna riquadrata è 64 palmi riquadrati, preſi per tanto $\frac{11}{16}$, cioè moltiplicato 64 per 11, fa 704, e queſto diviſo per 16 dà per l'appunto 44: dunque tanti palmi riquadrati ſono quegli $\frac{11}{16}$, che ſi dovea ſpiegare.

18. Ogni qual volta ſi ha una frazione d'una coſa, che è compoſta di parti uguali nominate con diverſo nome dal tutto. V. g. lo ſcudo è compoſto di 10 paoli, di 100 bajocchi, di 500 quatrini; il miglio di 1000 paſſi; la canna d'8 palmi; il grado di 60 minuti ecc. ſi potrà ſapere quante delle ſudette parti del tutto la data frazione contenga, riducendo il tutto alle ſue minime parti, e queſte moltiplicandole pe'l numeratore, e poi dividendo il prodotto pe'l denominatore, verrà il numero delle parti minime. V. g. $\frac{5}{6}$ d'una canna, moltiplico 8 per 5, fa 40, divido per 6 ne viene $6\frac{4}{6}$ numero de' palmi de i ſudetti $\frac{5}{6}$ d'una canna, e così in ogni altro caſo.

19. E' coſa molto neceſſaria, ſingolarmente per riſolvere i queſiti dei gradi ſuperiori nell'Algebra, ſaperſi ritrovare tutti i diviſori d'un numero, onde quì ſtimo opportuno darne la regola. Scrivaſi il detto numero, v.g. 42, e queſto ſi divida prima per 2, ſe ſi può ſenz' avanzo, o pure per 3, o per qualunque altro numero primo, che ſi poſſa ſenza avanzo, e tal diviſione gli ſi noti dicontro, e ſotto il quoziente, queſto quoziente di nuovo ſi divida per lo ſteſſo diviſore ſe ſi può, ſe nò, per gli altri numeri primi, come ſopra, e ciò ſi ſeguiti a fare finchè reſta un numero primo da dividerſi, cioè un numero, che non ha neſſun diviſore fuorchè ſe medeſimo; quindi ſi moltiplichino ad uno ad uno i diviſori fra loro, ed anche i loro prodotti, andando con ordine da i primi agli ultimi, finche torna per prodotto il numero dato, come vedi eſeguito nell' anneſſo eſempio. Tutte le regole fin quì eſpoſte, e che dopo ſi ſpiegheranno, ſi devono frequentemente ridurre in pratica per ben ſaperle, altrimenti dicoti con il Tragico Sofocle:

42	2.
21	3. 6.
7	7. 14. 42.
1	

Non quod putas te ſcire ſcis, ſi uſus deeſt.

CA-

CAPO III.

Calcolo Decimale.

ARTICOLO PRIMO.

Natura del Calcolo Decimale.

1. IL primo, che ſubodoraſse l'utilità di queſto Calcolo, ſecondo il Voſſio, fu Mullero Reggiomontano nell' anno 1464, e poi il Cardano. Ma poco fu da eſſi uſato, e meno dopo ſino al tempo di Stevino, che l'eſpoſe in un trattato a parte, e Giovanni Nepero, che con profitto conſiderabile l'applicò al ſuo Calcolo de' Logaritmi, come a ſuo luogo vedremo. Il vantaggio, che apporta ſi è, che le frazioni unite agl' intieri, o da eſſi ſeparate non altrimenti ſi trattano in ciaſcuna regola dell'Aritmetica, che all' uſo degl' intieri, quaſi, che frazione alcuna non vi ſia, tutto conſeguendoſi con facilità, ſpeditezza, e quello, che più importa, con molta precisione. Che ſe alle volte non ſiavi tal' eſattezza, l'errore è non meno conoſciuto, che voluto, dal che può ben comprenderſi quanto ſia utile la ſua intelligenza.

2. Le frazioni decimali ſono quelle, che hanno per denominatore qualche termine della progreſſione decupla, che incomincia dal 10; v. g. 10: 100: 1000: 10000 ecc. e per numeratore qualunque numero inferiore ad uno de' detti denominatori. Queſti denominatori non ſi ſcrivono mai, ma ſi eſprimono punteggiando quel numero con cui tali decimali ſono congiunti, di modo che le figure alla deſtra dopo il punto ſono il numeratore della frazione, che ha per denominatore l'unità con tanti zeri, quante ſono le dette figure dopo il punto; v. g. 37.5 ſignifica $37\frac{5}{10}$, ed 84.09, vuol dire $84\frac{9}{100}$.

3. Dal che ſi ricava, che il zero avanti le figure decimali fa creſcere un zero di più nel denominatore, ma dopo eſſo nulla ſignifica, o per dir meglio è ſuperfluo, potendoſi le cifre poſte dopo dette figure cancellare tanto nel denominatore, come nel numeratere; v.g. 726.700 ſarà l'iſteſſo che dire 726.7.

4. In tutte le operazioni Aritmetiche de i numeri intieri, quando queſti non ſono alterati dalle coſe numerate, ſi portano le decine, e per ogni figura, che a i numeri ſi aggiunge nel

fine oltre il valore di eſſa ſi dà loro un' incremento decuplo, il che ne i decimali ſi ha eſattamente. Onde queſti non altrimenti, ſiano ſoli, ſiano con intieri, ſi trattano nelle operazioni ſudette, che ſe tutti intieri foſſero, ne altra avertenza ulteriore aver ſi deve, ſe non che ſi noti bene nelle ſomme, prodotti, quozienti ecc. il luogo del punto diſcretivo de i decimali dagl' intieri, come meglio vedraſſi in appreſſo.

ARTICOLO II.

Operazioni del Calcolo nelle frazioni Decimali.

1. SI ſommano i numeri, che ſeco anneſſe hanno le parti decimali come i numeri intieri, con queſta differenza, che ſiano tutti i numeri uno ſotto dell' altro, di modo che i punti di ſotto in ſu ſiano tutti in linea retta, e le decime occupino la prima colonna dopo il punto, le centeſime la ſeconda ecc. Siano da ſommarſi miglia 327, e 424 milleſime, con 8, e 6 centeſime, con 32, e 8 decime ecc. ſi ſegnino come in eſempio, e ſi faccia ſecondo la regola detta al Capo 1. Art. 3.

```
 327.424
   8.06
  32.8
1366.907
```

2. Nel ſottraere ſimilmente ſi collocano i numeri, e ſe la frazione decimale non ha ſopra alcun numero, quello di ſotto ſi ſottrae ſempre dal 10; ſi ſegna l'avanzo, e ſi porta 1 nel numero di ſotto, e così ſempre ſi aggiungono i dieci, ſe vi ſia di biſogno, e ſi porta uno come ſopra, nè in ciò v'è altra difficoltà. Vedi l'eſempio, in cui dalla ſomma fatta ſi detrae la ſomma di tutti i numeri dati, eccetto il primo, onde reſta il primo, che è una delle prove del ſommare.

```
1735.191
1407.767
--------
 327.424
```

3. Nella moltiplicazione non s'incontra difficoltà maggiore della regola data al Capo 1. Articolo 5. ſe non che dopo moltiplicati i numeri con le parti decimali, quaſi, che elle ancora intiere ſiano, nel prodotto ſi faccia il punto dopo tante figure alla deſtra verſo la ſiniſtra, quante ne ſono col punto diſgiunte in ambedue i numeri moltiplicati; v. g. la Lombardia è un triangolo lungo da Milano ad Aquileja miglia 212.743, & alto da Trento a Ferrara miglia 104.94; dimandaſi quante

```
    212.743
     104.94
-----------
     850972
   1914687
   850972
  2127430
-----------
22325.25042
```

mi-

miglia riquadrate averà tutto il detto triangolo? Facciasi la moltiplicazione ad uso degl' intieri, e poi dalla destra verso la sinistra si faccia il punto dopo 5 figure, perchè 3 ne ha il numero moltiplicato, e 2 il moltiplicante, onde le miglia riquadrate contenute in tutta la Lombardia, per la 34. del primo d'Euclide, saranno la metà di 22325, e 25042 cento millesime.

4. Per il dividere due cose vengono d'avertirsi, primo, che se il dividendo abbia meno figure ne i decimali, che il divisore, può accrescersi di zeri quanti siano necessarj a farlo divenire maggiore del divisore. Secondo, che il divisore, e 'l quoziente hanno d'avere tante figure decimali prese insieme, quante ne ha il dividendo; ora sapendosi quante ne ha il divisore, subito si vedrà quante ne dovrà avere il quoziente, per altro la divisione si fa come fu insegnato al Capo 1. Art. 6. Con questo modo potrà dividersi per un divisore maggiore un numero minore, facendo dopo questo un punto, ed aggiungendovi tanti zeri, quanti saranno necessarj, che il residuo s'annulli, o divenga insensibile.

5. Nell' estrazione delle radici il Calcolo decimale giova notabilmente per approssimarsi sempre più, e più all' infinito a i numeri sordi, come è stato detto al Capo 1. cioè aggiungendo 2 zeri al numero dato, quindi due altri, e poi altri due, finchè si voglia, e ciò per l'approssimazione alla radice quadra. S'aggiungono questi binarj di zeri, perchè i denominatori delle frazioni decimali siano quadrati, poichè nella progressione decupla, che incomincia dall' uno alternativamente i termini sono quadrati, cominciando dall'unità. Per la radice cuba si aggiungono i ternarj di zeri, perchè nella progressione decupla, che incomincia dall' unità i termini dopo il primo ogni tre sono cubi, come si può vedere nella seguente:

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	10000000.	100000000.	ecc.
Q.C.		Q.	C.	Q.		C.Q.		Q.	

6. Se il numero, da cui dovrà estraersi la Radice quadra averà seco la frazione decimale, e se i caratteri sono impari, loro si aggiunga in fine un zero per farli divenire di denominatore quadrato, altrimente non verrebbe l'interpunzione giusta, e si farebbe errore gravissimo. Non faccia difficoltà aggiungere questo zero, perchè l'aggiungere i zeri a i decimali non altera punto il valore della frazione, tanto vale 0.1, come 0.10, cioè tanto vale un decimo, quanto dieci centesime.

7. Similmente se la frazione sarà assoluta, e sarà di caratteri di numero impari, s'aggiungano quanti zeri si vogliano, ma di numero impari, e poi si estragga la radice, che se giusta non si trova, potrai approssimarti all' infinito con il denominatore sempre razionale. Se i caratteri saranno in numero pari, si aggiungono zeri di numero pari, e poi si estrae la radice come sopra. Similmente si discorra per l'estrazione della radice cubica in quel numero, a cui sta unita la frazione decimale, aggiungendo, se sia di bisogno, tanti zeri, quanti uniti alle figure decimali facciano un numeto di figure divisibile per 3, poi si estragga la radice, come è consueto.

ARTICOLO III.

Riduzione delle frazioni a frazioni decimali.

1. Siccome l'uso massimo di questo Calcolo è nella Astronomia, ove i calcoli sono frequentissimi, ed i numeri il più delle volte vastissimi con frazioni perpetue di minuti primi, secondi, terzi, quarti ecc. talchè il più delle volte stancano per tedio le menti più pazienti, e perite, così dobbiamo agevolare una strada sì aspra col Calcolo decimale: e molto mi maraviglio non esser questo comunemente abbracciato almeno dagli Astronomi, appresso de' quali maggiore scorgesi la necessità. Dividono questi in minuti sì il tempo, come i gradi de i cerchi in 60 parti uguali, e queste in altre 60, e così di 60 in 60 procedono nelle loro suddivisioni, tanto che, replicando frequentissime queste frazioni di frazioni nelle loro operazioni, rendono i calcoli susseguenti sì prolissi, ed intralciati di difficoltà, che il più delle volte rompono la pazienza agli ingegni più sodi. In quest'Articolo si spianano in gran parte queste difficoltà, non dico solamente agli Astronomi, ma a chiunque abbia da fare lunghi calcoli intrigati di frazioni.

2. Qualunque frazione si ridurrà a frazione decimale, se per il denominatore d'essa si dividerà l'unità aggiunta ad uno, due, o più zeri, finchè non resti cosa alcuna, e 'l quoziente si moltiplicherà per il numeratore della frazione data, facendo questo prodotto numeratore, e 'l denominatore l'unità con tanti zeri, quanti ne furono aggiunti nella divisione; v. g. si debbono ridurre $\frac{3}{8}$; divido il 10 per 8 resta due, e segno 1 nel quoziente,

ag-

aggiungo all' avanzo il zero, fa 20; divido per 8, vien 2, ed avanza 4; aggiungo a queſto 4 il zero, fa 40, divido per 8, vien 5, e nulla avanza; ſicchè ſi averà per quoziente 125. Moltiplico queſto per 3 numeratore di $\frac{3}{8}$, fa 375, che pongo ſopra la riga, e ſotto l'unità con tre zeri, quanti ne furono preſi nella diviſione dell' unità, così $\frac{375}{1000}$, o pure 0.375 col punto avanti eſpreſſivo della decimale, perche in luogo degl' intieri quando eſſi non vi ſono ſi pone zero. O pure, e ſarà meglio, ſi aggiungano i zeri a dirittura al numeratore, e ſi faccia la diviſione pe 'l denominatore, e verrà ſubito la frazione ridotta a decimali.

3. Se poi il denominatore non dividerà mai eſattamente queſti numeri accreſciuti di zeri, come accade ne i moltiplici de i numeri primi, ſi potrà continuare la diviſione ad arbitrio, e poi diſprezzare l'ultimo avanzo, come ridotto finalmente a minuzia inſenſibile; poi ſi operi come ſopra; v. g. ſi vuol ridurre a decimale $\frac{1}{3}$, ſe diſprezzo il primo avanzo, e dico $\frac{3}{10}$ ho una frazione minore del giuſto $\frac{1}{30}$, cioè la terza parte d'$\frac{1}{10}$, ſe diſprezzo il ſecondo avanzo, averò $\frac{33}{100}$ frazione minore d'un terzo di $\frac{1}{300}$, ſe il terzo avanzo diſprezzerò, averò un' altra frazione minore $\frac{1}{3000}$, ſicchè come vedi potrai approſſimarti al $\frac{1}{3}$ in infinito, ſenza mai raggiungerlo per queſta via. Veggaſi ora il grande vantaggio, che ſi ricava da queſta riduzione col ſeguente

ESEMPIO.

4. Si vuol fare una ſtrada dritta, da Porta Maggiore a Fraſcati alla magnifica Villa de' Signori Principi Borgheſi, detta Mondragone, e ſi trova eſſervi di lunghezza paſſi 9573 $\frac{3}{4}$, ſi vuol fare larga paſſi geometrici 20 $\frac{1}{2}$; ſi dimanda quanti paſſi riquadrati ſarà tutta la ſtrada? Riduco i rotti a decimali, e ſaranno paſſi 9573.75, ſimilmente il mezzo, e ſaranno paſſi della larghezza 20.5; moltiplico queſti due numeri, e ſenza briga di frazioni a dirittura, ne viene il prodotto eſattiſſimo di paſſi riquadrati 196261.875, in cui vedi il puntino poſto dopo tre figure a man deſtra, perchè tre col punto ne furono moltiplicate, le quali ſaranno milleſime d'un paſſo.

$$
\begin{array}{r}
9573.75 \\
20.5 \\
\hline
4786875 \\
19147500 \\
\hline
196261.875
\end{array}
$$

ALTRO ESEMPIO.

5. Così ne i conti mercantili, d'una pezza d'imbroccato lunga canne 8 $\frac{5}{8}$ a ſcudi 27 $\frac{3}{4}$ la canna, ſi cerca il valore? Si ridu-

riducono le ottave, ed i quarti a decimali, come fu detto al num. 2. trovaremo le $\frac{5}{8}$ uguali a 625 milleſime, e $\frac{3}{4}$ a 75 centeſime, e poi ſi moltiplichi come vedi; ne verrà 239.34375, e riducendo le 34375 cento milleſime di ſcudo a bajocchi, cioè moltiplicando per cento, e dividendo per cento mila, vengono 34 bajocchi: e le reſidue 375 cento milleſime ſi moltiplichino per 5, e'l prodotto ſi divida per cento mila, averemo i quatrini.

$$\begin{array}{r} 8.625 \\ 27.75 \\ \hline 43125 \\ 60375 \\ 60375 \\ 17250 \\ \hline 239.34375 \end{array}$$

6. Ora venendo al Calcolo Aſtronomico, dico doverſi in ciò conſiderare due coſe, la prima di ridurre i minuti a frazione decimale, la ſeconda di ridurre le frazioni decimali a minuti. Ora per ridurre i minuti a frazioni decimali ſi moltiplicano i minuti primi per 60, al prodotto ſi aggiungono i minuti ſecondi, ſi moltiplicano di nuovo per 60, ed al prodotto ſi aggiungono i terzi, e così ſi ſeguiti, finchè vi ſaranno minuzie; e poi ſi moltiplica il 60 per 60, il prodotto di nuovo per 60 tante volte, quante furono le ſudette minuzie, e'l prodotto ſi faccia diviſore del ſudetto primo prodotto, accreſciuto di tanti zeri, quanti ſiano neceſſarj, perchè nulla reſti dalla diviſione, o almeno reſti avanzo tale, che poſſa ſicuramente diſprezzarſi; e ſotto al quoziente ſi ponga l'unità con tanti zeri, quanti ne furono aggiunti per fare la diviſione. O in vece di queſto denominatore, il quale non ſi vuole porre mai, ſi pongono i gradi; o in vece d'eſſi, ſe non vi ſono, il zero, e poi il punto, quindi le figure delle decimali, con avertire di far precedere ad eſſe i zeri, quanti ve ne ſian di biſogno per poter ſottintendere il decimale giuſto.

ESEMPIO.

7. Coll' eſempio ſi farà chiaro il fin quì detto. L'angolo Parallatico maſſimo della Luna Orizontale, ſecondo Delahire, è $1^{\circ}.\ 1^{I}.\ 25^{II}$, ſe ſi vogliono ridurre a minuzie decimali i primi, e 0^{II}, ſi moltiplica 1^{I} per 60, fa 60^{II}, aggiungaſi 25^{II}, fa 85^{II}, e non eſſendovi i 0^{III}, queſto ſarà il dividendo. Ora per trovare il diviſore, moltiplico 60 per 60, fa 360, e non eſſendovi i 0^{III}, queſto ſarà il diviſore. Fatto il punto dopo il dividendo 85, gli ſi aggiungano tanti zeri, quanti ſe ne vedranno neceſſarj, perchè nulla reſti col diviſore 360, o pure, che reſti minuzia affatto diſpreggievole, i quali zeri in pratica s'aggiungono ad uno ad uno, di mano in mano, che ſi va facen-

cendo la divisione; che nel caso nostro avendo aggiunto 6 zeri da 1.° 02361, che è meno del giusto novecento millesime, il che se paja gran cosa, si potrà ancora più e più diminuire senza fine, seguendo l'accrescimento de' zeri, e la divisione.

8. Ora per il regresso, se le minuzie decimali si vogliono ridurre a minuti Astronomici, Ciclometrici, o Temporarj, si moltiplichino le parti decimali per 60, e 'l prodotto si divida per il denominatore decimale, e 'l quoziente sarà i minuti primi, il residuo si moltiplica di nuovo per 60, e si divida come sopra, s'averanno i 0'', e così finchè vi sia avanzo.

9. L'uso principale di queste frazioni decimali è per i logaritmi, poichè queste hanno l'istesso logaritmo, che gl' intieri, fuorchè la Caratteristica, e l'essere defettivi, come a suo luogo di questi diffusamente dovremo parlare.

ARTICOLO IV.

Calcolo coi sassolini.

1. LA Scienza de' numeri comunemente vien chiamata col nome di Calcolo; e la ragione di tal nome si è, che i primi popoli usar solevano i sassolini per notare i loro numeri, siccome i Traci co' sassi bianchi, o neri distinguevano, come riferisce Plinio lib.7. cap.40. i giorni fausti dagl' infausti: *Vana mortalitas*, dice egli, *& ad circumscribendum se ipsam ingeniosa computat more Traciæ gentis, quæ calculos colore distinctos pro experimento cujusque diei in urnam condit, ac supremo die separatos dinumerat, atque ita de quoque pronunciat*. E da Cicerone ne' libri dell'Amicizia: *Ratio datorum & acceptorum* si chiama Calcolo. Ora giacchè da noi per tutto tal nome s'adopra, è dovere, che una maniera d'operare in tal guisa si ponga in pratica, tanto più, che questa è in uso in alcune Piazze di Francia come facile, spedita, e giocosa, ed in vero a' fanciulli riesce di notabile divertimento insieme, ed utile.

2. Si abbiano alquanti sassolini; v. g. 30 della grandezza d'un cece in circa, ed una mezza dozzina di diversa figura, o colore, con essi si può esprimere qualunque numero, disponendoli come segue. Un calcolo posto sopra la tavola per se significa o 5, o 1; se sia nella prima linea a sinistra, che si vuol fare di sotto in su, significherà 5; se nelle altre a destra della prima, sighificherà 1, a sinistra, o sotto questo, se significa 5, non

non se ne pone alcun'altro sopra esso a dirittura, che se si ponga significherà 50, ed i suoi laterali 10 ogn'uno; un altro sopra nel terzo ordine, e prima linea significherà 500, e gli altri suoi laterali ogn'uno 100; similmente il primo nel quarto ordine significherà 5000, e gli altri 1000, e così sempre, sicchè la proporzione decupla sta di sotto in su, e si legge poi di su in giù, come appunto usavano già, ed usano varie Nazioni. I calcoli poi di diverso colore s'adoprano, non per dinotare numero alcuno, ma per accennare, o la linea prima di sotto in su, se manchi, o qualch'una delle trasversali, ponendone uno, o più in vece di quelle, che mancano.

3. Ora debbasi esprimere il numero dell'anno corrente 1730, si porranno i sassolini, come quì si vede, cioè il calcolo del primo ordine superiore, essendo fuori della prima linea perpendicolare dirà mille, il primo del secondo ordine dirà cinquecento, e gli altri due ducento, cioè 700, nel seguente ordine non essendovi il primo i tre calcoli che vi sono diranno 30, e finalmente nell'ultimo ordine averemo • di diverso colore significa zero: onde sarà espresso il numero 1730. Che se si vogliono aggiungere a gli anni dal diluvio fino a Giesù Cristo 2348, si faccia come segue.

o
o.o o
o o o
•

4. Per sommare i numeri co i sassolini, s'esponga il primo numero, e poi dirimpetto con qualche intervallo si ponga il secondo, e poi gli altri, se vi sono; e poi cominciando dagli ordini inferiori dalla destra alla sinistra, si sommino, raccogliendo con la mano tutti i calcoli, e ponendone più innanzi tanti, quanti esprimono, ciò che avanza sopra le decine: queste si portano nell'ordine superiore, che raccolto come il primo, si noti parimente l'avanzo, e così si proseguisca fino alla fine, come nella regola del sommare al Capo 1.

o	o o	o o o o
o.o o	o o o	•
o o o	o o o o	o.o o
•	o.o o o	o.o o o
1730	2348	4078

5. Il sottraere si fa nell'istesso modo, segnando i numeri coi sassetti, prima il minore, poi il maggiore; v. g. Adamo campò anni 930; venne il diluvio l'anno del mondo 1656, si dimanda quanti anni dopo la morte d'Adamo venisse? Disponi i numeri, come vedi, e fu detto al num. 2. nel numero da detraersi manca l'ordine infimo. Ora si sottragga nulla

da

da *6* dicontro, reſta *6*, ſi noti *6* più avanti, poi nell' ordine ſeguente ſi levi il *3* dal *5* reſta *2*, ſi noti *2* dicontro, poi *9* da *6*, e perchè non ſi può, ſi levi da *16* reſta *7*, e ſi porta uno, che levato dall' *1* ſuperiore reſta nulla. Onde gli anni, che dalla morte d'Adamo fino al diluvio paſſàrono furono *726*.

	o	
o.oooo	o.o	o.o o
ooo	o.	oo
•	o.o	o.o
930	*1656*	*726*

6. Per moltiplicare ſi deſcriva prima co' ſaſſolini il numero minore, poi il numero maggiore, poi ſi faccia la moltiplicazione traſverſalmente al ſolito con l'ordine infimo in tutti gli altri del moltiplicando, e ſi ſegni di mano in mano il prodotto dicontro, riſervando le decine ſempre per l'ordine ſeguente; finita la moltiplicazione del primo ordine infimo del numero moltiplicante, s'incominci a moltiplicare il ſecondo ordine del primo numero per tutti gli ordini del ſecondo come ſopra, avendo però trasferito il primo ordine del prodotto primo più avanti, e prima di ſegnare i prodotti, che di mano in mano ſi fanno, ſi ſommino con gli ordini reſidui del primo prodotto, queſto ſecondo prodotto ſarà il totale; che ſe vi ſarà da moltiplicare un altro ordine, ſi trasferiſcono tali quali più avanti i due ordini infimi, e poi ſi proſegua la moltiplicazione come ſopra.

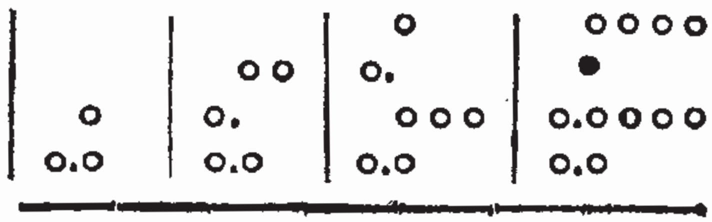
ESEMPIO.

7. Il Levenoche Filoſofo eſperimentale oſſervò, che i Granchi hanno l'ovaja di figura cubica, in ogni lato della quale contò 160 ova. Si dimanda quante ova ha un Granchio, Si moltiplica dunque 160 per 160, e'l prodotto di nuovo per 160, e ſi averanno tutte le ova d'un Granchio. Si laſciano i zeri, che dovranno poi eſſere aggiunti, baſta moltiplicare *16* per *16*; ſcrivo i numeri coi calcoli nella maniera, che vedi, poi dico

			o o
o	o	o.oooo	o.
o.o	o.o	o.o	o.o
16	*16*		*256*

o.o via o.o, cioè *6* via *6* fa *36*; ſegno o.o, e porto *3*; poi o.o via o fa *6*, e tre, che porto, fa *9*; ſegno o.oooo, come vedi nell'eſempio. Ora perchè v'è un altro ordine da moltiplicare, traſporto il primo ordine infimo del prodotto o.o più avanti, e poi dico o via o.o, fa *6*, a cui aggiungo o.oooo, fa *15*; ſegno o. cioè *5*, e porto uno, poi o via o, cioè *1* via *1*, fa *1*, aggiungo uno, che ſi porta, fa *2*, noto oo, ed averò il prodotto totale 256, al quale aggiungendo i due zeri lasciati, fa 25600. Ora tutto il numero delle ova, che si ritrovano in un Granchio sarà come siegue.

8. Moltiplicato 25600 per 16, fa 4096 senza li zeri, aggiunti poi i tre zeri lasciati, o siano tre ordini di sassolini di diverso colore, farà 4096000, che saranno tutte le ova, che in un Granchio ritrovansi. Cosa, che veramente sorprende è, che fa scorgere la fecondissima providenza di Dio, che i semi delle cose così mirabilmente propagato abbia, che tal volta il loro numero, o comprendere non si possa per la vastità, o conseguire ne pur si possa per la picciolezza delle cose da numerarsi.



16 4096

9. Il dividere co' sassolini non riesce più difficile, anzi qualche comodo maggiore reca a colui, che se lo fa familiare. Si noti prima il dividendo, poi alla destra il divisore cogl' istessi sassetti nella maniera sopra esposta; poi si ponga il dito dopo tanti ordini, di sopra in giù nel dividendo, quanti ordini sono nel divisore, o uno più, se eguali facciano numero minore, quindi si faccia secondo il solito l'esame della contenenza, e si segni trovata, che ella sia nel luogo di contro, che sarà il primo ordine del quoziente. Poi l'ordine infimo del divisore si moltiplichi per questo quoziente, e trovato il prodotto, si sottragga dall' ordine, che coll' indice della sinistra fin dal principio si notò: questa sottrazione si fa col disporre i sassolini di quest'ordine, e dell' ordine superiore, in maniera, che rappresentino il numero di prima, meno quello, che attualmente si sottrae; il che in pratica è facile a farsi, ma difficile a spiegarsi in poche parole; e così si faccia in tutti i prodotti di questo quoziente con gli altri ordini del divisore. Quindi si prosegua a ricercare nella stessa maniera le altre contenenze fino al fine, e vedrai una maniera d'operare assai dilettevole, e delle più bizzarre, che si sian fatte giàmai.

10. Abbiamo visto al Capo 1. Art. 7. num. 5. essere la grandezza d'una Città 9000000 di stadj riquadrati, dimandasi quante miglia riquadrate siano. Rispondo essendo ogni miglio 64 stadj riquadrati, dovrà dividersi 9000000 per 64, segno come segue; essendo i sassetti così ordinati, dirai, il 6 in 9 entra 1, porrai un sassetto nel luogo del quoziente, poi

mol-

motiplicherai il divisore per 1, cioè 1 per 4, fa 4, che sottrarrai dal numero in cui tieni il dito, che se da esso non si possa, come nel caso nostro prenderai tante decine, o sassetti superiori, quanti sono necessarj a fare tal sottrazione, e tolti quelli dal numero superiore, segnerai là dove tieni il dito, il residuo, cioè 4 da 10; leva un sassetto superiore, resta o.ooo, e poni nel sito notato dal dito o.o, poi moltiplica 1 per 6, fa 6, sottrarrai dal primo ordine, resta 2, starà dunque così o o
o.o
quindi si prosiegua collo stesso metodo sino alla fine, e troverai il quoziente 140625, numero delle miglia riquadrate della detta Città. Ora non sarà difficile fare co i sassetti anche l'estrazione delle radici.

Dividendo.	*Divisore.*	*Quoziente.*
o.oooo	o.o	o
•	oooo	oooo
•		•
•		
•		o.o
•		oo
•		o.

11. Essendo questa maniera di calcolare giocosa, non sarà fuor di proposito metter quì la prova d'un giuoco per via di sassolini. Per indovinare tre cose nascoste da tre persone; poni trè cose diverse sopra una tavola, intorno a cui molti risiedono, e poni ancora 24 de' tuoi sassetti sopra la stessa tavola, poi ritirati in sito dove ne possi vedere ne esser visto, e dirai, che tre di loro prendano tre cose, che siano, v. g. A, B, C, e le nascondano; poi a chi prese A dirai, che prenda un sassetto, chi prese B ne prenda 2, chi prese C ne prenda 3; quindi il primo ne prenda tanti quanti ne ha, il secondo il doppio di quei, che ha, il terzo il quadruplo. Poi esci fuora, e osserva i sassi restati sopra la tavola, che saranno 1, overo 2, o 3, o 5, o 6, o 7, ed osserva in questo linea come staranno in ordine le cose prese: $\overset{1}{\mathrm{ABC}}$, $\overset{2}{\mathrm{BAC}}$, $\overset{3}{\mathrm{ACB}}$, $\overset{5}{\mathrm{CAB}}$, $\overset{6}{\mathrm{BCA}}$, $\overset{7}{\mathrm{CBA}}$; cioè se restano sei sassetti il primo ha preso B, il secondo C, e'l terzo A ecc.

CAPO IV.

Delle Proporzioni, e loro regole, ove ſi eſpone il Calcolo nella quantità continua.

ARTICOLO PRIMO.

Si ſpiegano le Proporzioni ſemplici, e compoſte.

1. LE regole aritmetiche in realtà altro non ſono, che un retto uſo delle fin quì ſpiegate, come le regole del tre, dritta, everſa, e compoſta, di compagnie, ſoccite, alligazioni, ſconti a capo d'anno, cambi, del falſo, ed altre ſimili, tutte dipendono dalla retta intelligenza delle proporzioni, delle quali ora intraprendiamo la ſpiegazione.

2. Ragione geometrica è quella, come abbiamo detto all'Articolo 1. del Capo 1. che determina la contenenza d'una quantità in un'altra, dalla quantità di tal contenenza, ſi denomina la ragione, come dupla di 2 ad 1; tripla di 3 ad 1; ſeſquialtera di 3 a 2; ſeſquiterza di 4 a 3 ecc. ma di tali nomi non occorre ſervirſi, baſtando generalmente dire la ragione, della tal quantità, alla tal altra.

3. Le ragioni tra loro paragonate, ſiccome ſono capaci del più, e del meno, altre ſono uguali altre diſuguali; il che conoſceſi dalla quantità delle contenenze, che hanno i termini proporzionali fra loro; così la ragione di 2 al 3 diceſi uguale alla ragione di 4 al 6, e minore di 6 al 4, perchè l'iſteſſa contenenza del 3 nel 2, è quella del 6 nel 4, ma la contenenza del 4 nel 6 è maggiore di quella del 6 nel 4.

4. Quando ſi danno più quantità nella ſteſſa ragione, di modo che ſia la prima alla ſeconda, come queſta alla terza, e come queſta alla quarta ecc. ſi chiamerà analogia, o proporzione continua; ſe poi ſe ne daranno quattro, di modo che ſtia ſolamente la prima alla ſeconda, come la terza alla quarta, ſi chiamerà analogia diſcreta, e i termini quantità omologhe.

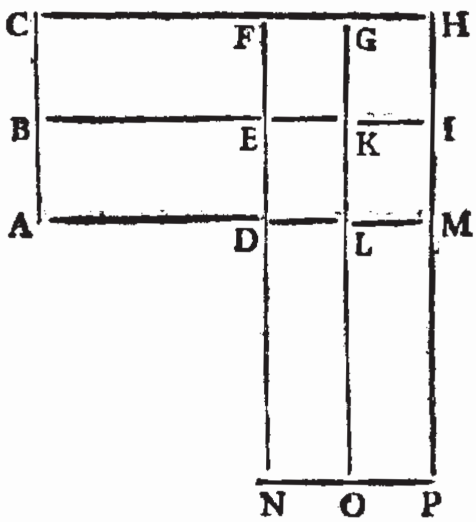
5. Dal che ſi ricava, che una grandezza ha la medeſima proporzione con uno degli eguali, che con l'altro, e per il contrario gli eguali alla ſteſſa hanno l'iſteſſa proporzione, per-

perchè sì nel primo, che nel secondo caso si ha ugual contenenza, e per la stessa ragione le proporzioni uguali ad una terza sono uguali tra loro.

6. Di due grandezze disuguali la maggiore ha maggior ragione alla stessa, che la minore; onde 6 al 2 ha maggior ragione, che 'l 4, essendo maggiori $\frac{6}{2}$ di $\frac{4}{2}$.

7. Due grandezze moltiplicate, o divise per l'istessa grandezza ritengono la proporzione di prima, così 4 a 2 moltiplicati per 3 stanno come 12 a 6, poichè ritengonsi sempre l'istesse contenenze, così si dica se si divideranno i termini per l'istessa quantità.

8. I modi d'argomentare sono stati già dimostrati da Euclide nel 5. libro; ma per via alquanto astrusa degli equemoltiplici; piacemi quì calcare altra strada, che sembrami più spedita, ed atta per mantenerne viva la memoria, sbrigandosi tutto ciò con la presente figura, in cui AD vale *a*, DL uguale ad LM vale *b*, ND *c*, DE uguale ad FE vale *d*, e si supponga *a* stare al *b*, come *c* al *d*. Le lettere piccole servono per dinotare la quantità delle rette espresse nella figura, ed assieme unite significano parallelogrammi, cioè una moltiplicata per l'altra.



9. Dico in primo luogo il parallelogrammo *ad*, cioè il prodotto della quantità *a*, nella quantità *d* essere uguale al parallelogrammo *bc*. Si prova. Nel parallelogrammo AK, come sta AD alla DL, così sta AE al DK, cioè quante volte DL si contiene in DA, tante volte DK si contiene in AE. Similmente nel parallelogrammo NK, come ND alla DE, così NL alla DK; dunque, come *a* al *b*, così *ad* al *bd*, e come *c* al *d*, così *bc* a *bd*, ma per supposizione, come *a* al *b*, così *c* al *d*; dunque per il num. 5. per uguaglianza di ragioni, come *ab* a *bd*, così *bc* al *bd*, e perchè quelle cose, che a cose eguali hanno egual proporzione, per il num. 5. sono fra loro uguali, sarà *ad* uguale al *bc*, che si dovea dimostrare. E così facilmente si proverà la conversa, cioè se *ad* è uguale al *bc*, sarà *a* al *b*, come *c* al *d*.

Co-

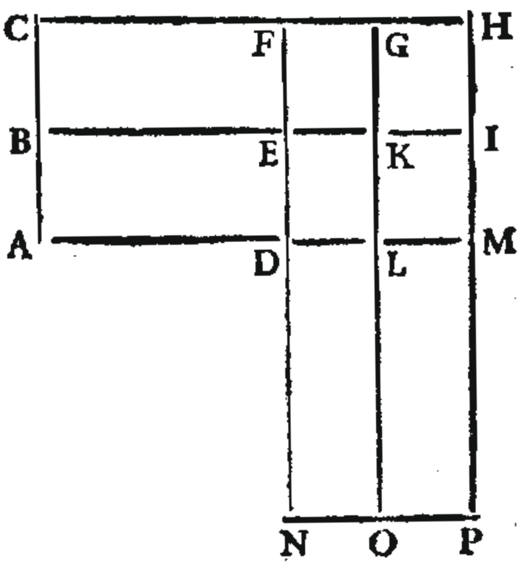
COROLLARJ.

10. Quindi si cava, primo, che in tre termini proporzionali il quadrato del mezzano è uguale al rettangolo degli estremi, perchè l'intermedio è conseguente al primo, ed antecedente al secondo, così se *b* sia uguale al *c*, si averà *ad* uguale *bb*.

Secondo, sia *a* al *b*, come *c* al *d*, convertendo sarà *b* al *a*, come *d* al *c*; poichè ancora quì risulta *ad* uguale *bc*.

Terzo, se sia *a* al *b*, come *c* al *d*, alternando starà *a* al *c*, come *b* al *d*, perchè ancora quì si ha *ad* uguale a *bc*.

Quarto, se *a* al *b*, come *c* al *d*, componendo sarà *a* più *b* al *b*, come *c* più *d* al *d*. Lo provo. AL vale *a* più *b*, LM vale *b*: dunque BK sta a KI, come BG ad HK, cioè *a* più *b* al *b*, come *ad* più *bd* al *bd*. Similmente NE vale *c* più *d*, EF vale *d*: dunque OK a KG, come OI al KH, cioè *c* più *d* al *d*, come *cb* più *bd* al *bd*, ma perchè AE è uguale a DO, cioè *ad* è uguale a *cd*, n. 9. a' quali aggiunto il comune DK uguale al *bd*, ne risulterà *ad* più *bd* uguale a *cb* più *bd*, che essendo nell' una, e l'altra analogìa alla stessa *bd*, come i loro primi termini, sarà *a* più *b* al *b*, come *c* più *d* al *d*, che si dovea dimostrare. Nella stessa maniera, dirai, che in una analogìa di molti termini la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti stia come un antecedente al suo conseguente.



Quinto, così dividendo vuol dire, se *a* al *b*, come *c* al *d*, starà *a* meno *b* al *b*, come *c* meno *d* al *d*. Per dimostrarlo si prenda tutta la AL, e tutta la NE, e si dica come AL meno DL al DL, così NE meno DE al DE ecc.

Sesto, per conversione di ragioni se AL al DL, come NE al ED, dico, che sarà AL ad AD, come NE ad ND, perchè *a* più *b* al *b*, così *c* più *d* al *d*. Dunque dividendo per il corollario 5. *a* al *b*, come *c* al *d*, e convertendo per il corollario 2. *b* al *a*. come *a* al *c*, e di nuovo componendo per il corollario 4. *b* più *a* al *a*, come *d* più *c* al *c*, cioè AL ad AD, come NE ad ED, che si dovea provare.

12. Se

11. Se ſiano ſei quantità AD, DL, LM, ND, DE, EF, e ſia AD prima a DL ſeconda, come ND quarta a DE quinta, e DL ſeconda ad LM terza, come DE quinta ad EF ſeſta, dico così eſſere AD prima ad LM terza, come ND quarta ad EF ſeſta. Si prova. Sia LM uguala z, EF uguale ad x, e per ſuppoſizione a al b, come d al x; dunque alternando ſarà. Coroll. 3.

a al d, come b ad x, e per ſuppoſizione.

b al c, come x a z, ed alternando. Coroll. 3.

c al z, come b ad x, dunque per uguaglianza di ragioni.

a al d, come c al z: cioè la prima alla ſeconda, come la terza alla ſeſta, che ſi dovea provare.

12. Così per la ragione d'inuguaglianza, e ſenza ordine; ſiano le ſei quantità come ſopra, ma ſia a al b, come x al z, e b al c, come d al x, dico, che ſarà pure a al c, come d al z. Si prova. Le ſopra ſuppoſte analogie, danno per il num. 9. bx uguale ad az, e bx uguale a cd; dunque per il num. 5. az uguale a cd, cioè a al c, come d al z. Che ſi dovea provare.

13. Se ſi moltiplicano tutti gli antecedenti di più proporzioni, e poi tutti i conſeguenti il primo al ſecondo prodotto averà proporzione compoſta di tutte le date proporzioni. Che ſe ſiano uguali tutte, e ſiano due, ſi dirà la compoſta duplicata, ſe 3 triplicata, ſe 4 quadruplicata ecc. della data, così una ſerie di termini continuamente proporzionali, il primo al terzo ſi dice avere proporzione duplicata del primo al ſecoudo, e 'l primo al quarto triplicata ecc. e 'l primo al ſecondo diceſi avere ragione ſudduplicata del primo al terzo, ſutriplicata del primo al quarto ecc.

14. Conviene avertire, che con tutto, che la definizione delle quantità proporzionali non ſi ſtenda alle quantità, che non hanno una comune miſura, quale entri eſattamente nell' antecedente, e nel conſeguente, ſi può ad aſſe ancora adattare; purchè ſi averta primo, che una grandezza minore di qualſivoglia aſſegnabile ſi può prendere per nulla, mentre, ſe due grandezze differiſcono d'una quantità minore di qualunque aſſegnabile elle ſono eguali, altrimente ſarebbe aſſegnabile la differenza, che è contro il ſuppoſto, ſecondo, che intendendo eſsere la comune miſura variabile per diminuzione all' infinito, purchè ſia miſura d'una delle due quantità, ſarà miſura ancora dell' altra, di modo, che il reſto ſarà minore della ſteſsa indeterminata, che eſſendo minore di qualunque aſsegnabile, ſarà del reſiduo molto minore: dunque nullo.

15. Pro-

15. Proporzione aritmetica è, quando sonovi più numeri ineguali, che vanno susseguentemente superandosi con eguale eccesso, come 1. 2. 3. ecc. 7. 10. 13. 16. ecc. La proprietà primaria di questa proporzione è, che la somma de' mezzani è uguale alla somma degli estremi, come meglio altrove si parlerà.

16. Evvi una proporzione, che partecipa sì della Geometrica, come dell'Aritmetica, e dicesi Armonica, la quale in meno di tre termini non può trovarsi, ed è quando la differenza tra 'l primo, e 'l secondo termine starà alla differenza tra 'l secondo, e'l terzo, come il primo al terzo. V. g. 2. 3. 6 diconsi in proporzione armonica, perchè 3 meno 2 sta al 6 meno 3, come 2 al 6, e se in quattro termini si voglia, dovrà essere la differenza tra 'l primo, e 'l secondo, alla differenza tra 'l terzo, e'l quarto, come il primo al quarto; dalla continuazione de' quali termini nasce la progressione armonica.

17. La proporzione poi contrarmonica è la relazione de' termini, per cui la differenza tra'l primo, e'l secondo stia alla differenza tra 'l secondo, e 'l terzo, come il terzo al primo. Ma di questa proporzione si tratterà nel seguente Articolo.

ARTICOLO II.

Della proporzione Armonica.

1. ABbiamo accennato cosa sia la proporzione armonica, di cui non possono intendersene le proprietà, se prima non si spiega, che cosa sia suono, ed in che consista l'armonia: che però è qui necessario pigliare dalla Fisica quelle notizie, che indarno altrove si cercherebbero. Non v'ha dubbio, che siccome la luce altro non è, che un moto del raggio comunicato alla retina; così il suono altro non sia, che un tremore del corpo sonoro, comunicato primieramente all' aria ambiente, e da questa impresso ne' nervi acustici, che sono del quinto paro. Ne questa è dottrina nuova, ma da Platone nel suo Timeo insegnata: *Omnino igitur vocem ponimus pulsationem quamdam ab aere per aures, cerebrumque, & sanguinem usque ad animam penetrantem.* E più generalmente Aristotile nel trattato *De Anima* ripone tutte le sensazioni nel moto de' corpi: *Fit sensus cum movetur, aut patitur aliquid.* Cioè essendo percosso un qualche corpo singolarmente duro; questo dal-

la

la forza della percossa vien posto in moto veemente di undulazione, dalla quale agitato eziandio il fluido aereo circumambiente si sparge per ogni banda, fino a pervenire all'organo dell'udito; onde l'animale avvedutosi di tal mutazione, che in tal luogo si fa, per lo tremore di quella membrana, che trovasi nel timpano dell'orecchio, tale impressione si dice suono. E questi suoni sono varj, secondo la variazione di tali tremori, altri sono più acuti, altri meno, altri gravi, altri aspri, in somma secondo che le vibrazioni impresse nell'aria sono più, o meno frequenti, diverso suono si sente.

2. Ma perchè può il fluido diverse vibrazioni nello stesso tempo concepire, e quelle tutte comunicare all'orecchio, ne siegue potersi sentire insieme molti suoni diversi, i quali sono grati, se sono armonici, e disgradevoli, se distonanti. Ora brevemente cerchiamo, in che consista la consonanza, quali sian quei suoni, che in noi generano dispiacere, ed orrore.

3. L'armonia a mio credere consiste nella varietà, distinzione, ed eguaglianza delle vibrazioni del fluido ambiente. Per vedere l'armonia con gli occhi medesimi, ed insieme con quelli osservare la dissonanza, si sospendano varj pendoli di diversa lunghezza tra loro, ed a questi si dia il moto nello stesso tempo. Secondo le leggi de' pendoli, i più curti faranno più frequenti oscillazioni, che i più lunghi in egual tempo; poichè le oscillazioni d'ogni pendolo semplice sono al senso Isocrone, o siano equidiuturne. Ora se tali pendoli siano fra loro lunghi in proporzione armonica, le loro vibrazioni saranno periodiche, di modo, che dopo un determinato giro di queste in tempi eguali si restituiranno tutti i pendoli proporzionali al primo stato, o sia stato parallelo, e cominciaranno il nuovo periodo, e questa è l'eguaglianza singolarmente richiesta per l'armonia. Per lo contrario se le lunghezze de' pendoli saranno in diversa proporzione non riuscirà quasi mai, che si riuniscano ad egual principio, o almeno si tardi ciò avverrà, che dall' orecchio non potranno distinguersi: e questa è la ragione della dissonanza, la quale tiene in continuo, e diverso moto il timpano dell'orecchio.

4. Non istarò io qui a diffondermi su la spiegazione delle proprietà de' pendoli, essendo questa molto più adattata al Mecanico, che a noi, ma bensì esporrò qui le più rimarcabili proprietà della proporzione armonica.

5. Dati due termini della propporzione armonica trovare

il terzo. Sia il primo a, il secondo b, il terzo, che si cerca sia x: avremo questa analogia per l'Articolo 1. num. 16. b meno a ad x meno b, sarà come a ad x; dunque per l'Articolo 1. num. 9. ax meno ab, uguale a bx meno ax; e trasponendo viene $2ax$ meno bx uguale ad ab, e dividendo per $2a$ meno b averemo x uguale ad ab diviso per $2a$ meno b.

6. Secondo. La proporzione armonica non può degenerare in progressione crescente all'infinito, perchè finalmente in tal caso si verrà, che il primo termine abbia l'istessa ragione al terzo, che ad una parte dell'istesso, il che è impossibile.

7. Terzo. Date due quantità trovare la media in proporzione armonica. Sia la prima a, la seconda x, la terza b, averemo questa analogia a al b, come x meno a al b meno x, onde si cava x uguale a $2ab$ diviso per a più b.

8. Nasce la proporzione armonica dalla proporzione aritmetica nella maniera seguente, siano tre termini a, b, c in progressione aritmetica moltiplicandosi a per b, a per c, e b per c, i tre prodotti ab, ac, bc sono in proporzione armonica, la dimostrazione di ciò dipende dalla notizia delle progressioni; basti per ora l'infallibile asserzione.

9. E' bizzarra la proprietà di quei numeri, che sono divisibili esattamente per una serie di divisori in proporzione aritmetica, poichè danno i quozienti in proporzione armonica. V. g. il 60 è divisibile per 1, 2, 3, 4, 5, 6, i quozienzi sono 60, 30, 20, 15, 12, 10, tutti armonicamente proporzionali.

10. Essendo date tre quantità, alle quali si cerchi la quarta in armonica proporzione. Siano le tre quantità date a, b, c, e la quarta x, sarà per l'Articolo 2. num. 17. b meno a ad x meno c, come a al x, onde cavasi ac diviso per $2a$ meno b uguale ad x.

11. Date due quantità trovare la terza in contrarmonica proporzione. Siano le due quantità a, b, la terza x, sarà b meno a al x meno b, come x ad a, e risolvendo questa analogia, la quale è di secondo grado, ne viene $\frac{1}{2}b$ più la radice di $\frac{1}{4}bb$ più ab meno aa uguale ad x, come s'insegnerà a suo luogo.

12. Così ancora essendo date due quantità si troverà la media in contrarmonica proporzione, se nella sudetta analogia in vece di porre l'incognita x in terzo luogo, pongasi in secondo ecc.

13. Non sarà quì fuor di proposito aggiungere brevemente l'istoria del sistema Musico. Pittagora nel passare dalla bot-

bottega d'un fabbro, sentendo un non so che di consonanza nel percuotere di quei martelli, si fermò ad ascoltare, ed a riflettere alla cagione di quel concento, pensò alla forza di quei, che battevano, ma col far barattare fra essi i martelli, la stessa armonia facevasi. Dicono alcuni, che nel peso, e nella mole riconoscesse la cagione dell'armonìa, ma s'ingannano, poichè il peso, o mole del martello non varia la qualità, ma la quantità del tono, il martello maggiore fa il tono più basso del minore; ne' siti della percossa sopra l'incudine sta tutta la variazione de' tuoni: percossa l'incudine nel mezzo, e nel quarto di essa fa l'ottava. Onde fece egli un' istrumento di sette cicute, o sia scala di consonanze; e perchè fu osservato, che la voce umana rade volte si stende oltre due ottave; gli antichi Greci, come si può vedere in Platone, Aristotile, Plutarco, Boezio ecc. fecero quattro Tetracordi secondo la serie Musica; vedasi Gassendo nella sua Musica Teoretica.

14. Guido Aretino Monaco intorno all'anno 1024 tutta la scala musica ridusse a queste oggidì usate voci, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, che pigliò dall'Inno di S. Gio: Battista:

UT quæant LAxis REsonare fibris,
MIra gestorum FAmuli tuorum,
SOLve polluti LAbii reatum.

Sonosi poi i gusti della musica molto raffinati co i passaggi, con l'aggiunta de' semitoni, nel sistema di due Eptacordi; nel che non è mio intento prolungarmi di vantaggio, poichè questa materia ricercherebbe un volume a parte.

ARTICOLO III.

Regola del Tre.

1. LA regola del tre vien chiamata comunemente Aurea, perchè, siccome l'oro nell' umana società serve ad ogni cosa si piacevole, che necessaria, così questa serve opportunamente alla soluzione delle questioni Aritmetiche, e Geometriche. Abbiamo dimostrato nell' Articolo 1. al num. 9. che in quattro termini proporzionali il prodotto de i medj è uguale al prodotto degli estremi; dunque se averemo noti tre termini, e si cerchi il quarto, di modo, che il primo al secondo stia come il terzo a questo quarto, è chiaro, che facendosi il prodotto del secondo nel terzo, si averà il prodotto, che fa-

rebbe il primo col quarto: dunque dividendosi questo prodotto per il primo termine, ne risulterà per quoziente il quarto.

2. Conviene in questa regola sapere, che il primo termine deve esser sempre della stessa natura del terzo, cioè devonsi per il primo dinotare le stesse cose, che si dinotano per il terzo, e 'l quarto verrà ad essere della natura del secondo, ciò posto si consideri il seguente esempio.

ESEMPIO I.

3. Leghe 25 di Francia fanno 60 miglia Italiane, ed essendovi da Lione a Parigi leghe 78; si dimanda da Lione a Parigi quante miglia Italiane vi siano? Si dirà, se leghe 25 mi danno 60 miglia, leghe 78 quante miglia daranno? Moltiplico 60 per 78, e divido il prodotto per 25, viene $187\frac{1}{5}$, che sarà il quarto termine cercato, cioè le miglia Italiane, che corrono tra Lione, e Parigi.

4. Poichè non sempre i termini nella regola aurea compariscono così palesi, che con qualche discorso non debbano rintracciarsi, perciò stimo opportuno aggiungere un altro esempio.

ESEMPIO II.

Pietro consuma al mese cento scudi; Pietro, e Paolo insieme li consumano in 8 giorni, dimando quanto consuma ciascuno ogni dì? Dove si vede, che bisogna prima trovare quanto ciascuno consumi in otto giorni: è chiaro, che se Pietro in 30 giorni consuma 100, in otto giorni per la regola aurea consumerà $26\frac{2}{3}$, e quel, che resta alli 100, cioè $73\frac{1}{3}$ sarà il denaro, che consuma Paolo ne i detti otto giorni: onde dividasi ciò che consuma ciascuno per 8, si averà ciò che consuma ogn' uno ogni dì.

5. La prova di questa regola si fa col moltiplicare il primo coll' ultimo termine trovato, e ne deve risultare il prodotto del secondo nel terzo. Vi si fanno eziandio le prove del 9, e del 7, si levino questi primieramente dal primo termine, e si riserbi l'avanzo, poi dall'ultimo trovato con la sua frazione, se v'è, facendosi come fu detto all'Articolo 4. num. 12. del Capo 2. e questo avanzo si moltiplica per il primo, e di nuovo se sia di bisogno si gettano li 9, o li 7, ed a questo avanzo dovrà essere uguale l'ultimo avanzo del termine secondo moltiplicato per l'avanzo del terzo, e questo moltiplicato per l'avanzo del denominatore della frazione del quarto.

CONSIDERAZIONI SOPRA LE MONETE.

6. La moneta è un istrumento comodo agli uomini per provedersi delle cose necessarie, togliersi d'attorno le superflue, fare quanto si vuole, *omnia pecunia effici possunt*, Cic. in Verr. Per ordinario è di Oro, Argento, e Rame, come nello Stato Ecclesiastico, in cui le monete di rame reali sono il quattrino, il mezzo bajocco, e 'l bajocco. D'argento il quarto di paolo, il mezzo paolo, il paolo, che vale 10 bajocchi, o sia 50 quattrini di rame, il testone, che vale tre paoli, la mezza piastra, e la piastra, che vale paoli $10\frac{1}{2}$. D'oro il mezzo scudo, lo scudo, che vale paoli $16\frac{1}{2}$, e la doppia, che vale paoli 33, il doblone, che vale 66 ecc. evvi ancora di fresco il zecchino Romano. Le altre monete sono imaginarie, come lo scudo di 10 paoli, la doppia di 30, i ducati di Camera, i fiorini ecc.

Con una libra di rame si coniano quattrini 120.

Con una libra d'argento si coniano paoli 111, in paoli, testoni, e piastre; ma in mezzi paoli, e quarti paoli se ne coniano 113.

Con una libra d'oro si coniano doppie 51, o siano scudi d'oro 102, e zecchini 99 oro fino. Ogni libra d'oro coniato ha un oncia di lega, e perchè una libra d'oro coniato sono paoli 1683, cioè il valore di 11 once d'oro puro: dunque per la regola aurea sarà il valore d'una libra d'oro puro paoli 1836.

7. L'argento puro parimenti ha un oncia di lega per ogni libra, ed una libra d'argento coniato vale paoli 111; sicchè una libra d'argento puro valerà paoli $121\frac{1}{11}$: onde la proporzione dell'oro all'argento nello Stato Ecclesiastico sarà di 1836 a $121\frac{1}{11}$, o sia di $15\frac{6}{37}$ ad 1.

8. Nell' Italia vedesi notabilmente di giorno in giorno andare diminuendo il numero delle monete d'argento, e crescere il numero delle monete d'oro, tanto che par quasi, che l'oro arrivi ad uguagliare l'argento, come può scorgersi dalle somme, che ritrovansi ne' banchi publici d'imprestiti, depositi, e mercantili, e forsi anche nella maggior parte delle borse private. Quando per altro doverebbe la quantità dell' oro effettivo alla quantità dell'argento effettivo mantenere in quanto al peso la proporzione sudetta di circa 1 a 15. Ora perchè tal proporzione va accostandosi alla proporzione d'uguaglianza; bisognerà necessariamente confessare, che siavi qualche potente cagione di tal disordine, a cui, se non si provede a tempo, potrebbe recar danno assai notabile al publico interesse.

9. Le

9. Le cagioni dunque dello ſcemamento dell'argento, ed in conſeguenza dell' accreſcimento dell' oro, ſaranno, o che ſi converta più copia aſſai d'argento in altri uſi, che d'oro, ed in fatti il luſſo de' vaſi, e d'iſtrumenti d'argento sì ſagri, che profani oggidì vedeſi creſciuto a diſmiſura ſingolarmente in Italia; o che dall' Occidente maggiore ſia la copia dell'oro, che ci ſi porta, che dell' argento; o che vada in Oriente più argento, che oro, il che ſtimo la più vera; poichè la noſtra infingardagine ci rende biſognoſi di molte coſe di quelle parti, e là ſento, che 'l valore dell'oro all'argento ſia ſolamente di 12 a 1. Che ſe ancor noi non ridurremo a tal proporzione i due metalli, dubito certamente, che a longo andare perderemo affatto l'uſo dell'argento, e ſi farà ſenza profitto, anzi con diſcapito, quello, che ora utilmente potrebbe farſi.

10. Laſciando intatto il prezzo delle monete d'argento ſi domanda, che prezzo debba ſtabilirſi allo ſcudo d'oro, ſicchè ſalga l'argento all'oro, come 1 a 12, ſi dica ſe quel, che è argento vale 1, d'oro vale 12, quel, che argento è 111, oro quanto valerà? Ritroveraſſi 1332, e perchè queſto deve eſſere il valore di 102 ſcudi d'oro, uno di detti ſcudi valerà ſcudi 1.35.4 $\frac{7}{17}$.

11. Se per il contrario ſi voglia laſciare intatto il prezzo dell'oro, e ſi voglia alzare l'argento ſi farà così. Se quello che è oro vale 12, d'argento vale 1; quello, che oro è bajocchi 18360, per argento quanto valerà? Si troverà 1530, ſicchè diviſo per 111 paoli, verrà per valore d'un paolo bajocchi 13. 3. $\frac{34}{37}$; alzandoſi dunque il valore del paolo corrente a tal prezzo, reſtando intatto il valore dell' oro avremo l'argento all'oro come 1 a 12; e così ſi farà in qualunque altra ragione ſi vorranno ridurre queſti due metalli.

12. Sonovi varj luoghi nella Sagra Scrittura, che diſcorrono del prezzo di varie coſe, ma adoprando ella i nomi della moneta allora corrente, ſtimo far coſa grata ſe porto il valore di dette monete ragguagliate alle noſtre Pontificie. Nel Geneſi capo 37. 28. fu venduto Gioſeppe da i fratelli per venti denari d'argento. Abramo pagò la ſepoltura di ſua moglie 400 Sicli. Abimelecco regalò a Sara mille Denari d'argento ecc.

13. Il Siclo pertanto, o Stater peſava mezz' oncia Romana, e 'l ſuo valore corriſpondeva a quattro giulj de' noſtri. Il Gerac valeva due bajocchi. Il Keſiat moneta d'oro valeva 36 giulj. Il Siclo d'oro, o vero Darconim, o Adarconim, o

Da-

Dariche valeva 4 ſcudi. La Mina, o Mna d'argento valeva 60 Sicli, o ſiano ſcudi 24, e la Mna d'oro valeva 60 Sicli d'oro, cioè 240 ſcudi. Il Talento d'argento valeva 12000 ſcudi. Il Talento d'oro valeva cento mine d'oro, cioè ſcudi 24000. Vedaſi il Calmet nelle Diſſertazioni ſopra la Sacra Scrittura.

ARTICOLO IV.

Regola del Tre roverſcia.

1. NOn ſempre è vero, che dati tre termini proporzionali ſi debba moltiplicare il terzo per il ſecondo, e'l prodotto dividere per il primo; ma alle volte biſogna operare tutto all' oppoſto, cioè moltiplicare il primo per il ſecondo, e'l prodotto dividere per il terzo alla deſtra. Per conoſcere quando così operare ſi debba, s'oſſervino i termini dati, che ſtaranno reciprocamente come il primo al terzo; così il quarto doverà ſtare al ſecondo, o pure quanto più del terzo tanto meno del quarto, o vero quanto meno del 3. tanto più del 4.

ESEMPIO.

2. L'anno 1534 il Veſcovo di Muſter in Veſtfaglia, chiamati in ſoccorſo il Langravio d'Aſſia, gli Arciveſcovi di Colonia, e di Treveri, e'l Duca di Gheldria, aſſediò con poderoſo Eſercito la forte Rocca di quella Città, in cui eraſi ritirato come in aſilo ineſpugnabile un Sartore, acclamato per Re da 9794 Eretici Anabatiſti: *Qui ſummis*, dice Carion nella ſua Cronica, *ut poterant viribus ſe defendentes obſidionem uſque in annum proximè ſequentem pertulerunt: etſi interim magna fame vexarentur, ita ut, & ſenes decrepitos, & imbelle vulgus ejicerent è Civitate, ne aliis commeatus deeſſet*.... Poſto che il reſiduo delle vettovaglie non poteſſe loro baſtare più, che 18 giorni. Ma perchè all' incontro i loro Profeti predicavano, che ſarebbero ſtati liberati dopo 75 giorni; erano perciò neceſſitati a ſcacciare fuori tanti uomini, quanti foſſe neceſſario per fare, che la vettovaglia baſtaſſe a quei, che reſtavano. Si cerca quanti ne dovettero mandar fuori? Il queſito ſarà così ordinato: ſe la vettovaglia di Muſter baſta 18 giorni ad 8794 bocche, la ſteſſa in 75 giorni a quante bocche baſterà? Onde ſi vede, che quante volte il primo termine ſi contiene nel terzo, tante volte reciprocamente il quarto deve eſſere contenuto nel ſecondo; cioè quanti più giorni tanto meno bocche.

On-

Onde si adoprerà la regola del tre roverscia, moltiplicando 58 per 8794 fa 510052 questo diviso per 75 ne viene 6800, che è il numero de' soldati, a' quali basteranno le sudette vettovaglie in 75 giorni; dunque ne dovettero scacciare 1994: *Qui egressi*, soggiunge il Carion sopracitato, *herbas, & gramina, ut bruta depascebant, quapropter milites obsidentes, misericordia moti, eos ad deditionem Urbis amicè hortati sunt; sed obstinati spiritu & prophetiis, quibus agitabantur, Urbem dedere noluerunt, donec tandem ipso die Joannis Baptistæ anno* 1535, *non sine proditionibus portæ Urbis apertæ sunt. Ubi omnes hosti resistentes interfecti sunt, & Rex ipse, & ejus Consiliarii capti ignitis forcipibus lacerati, & è Turri in caveis ferreis aliis in exemplum, & terrorem suspensi sunt.*

ARTICOLO V.

Regola delle compagnie.

1. LA regola delle compagnie consiste in dividere i numeri dati per mezzo della regola del tre, si fa sommando i numeri, nella proporzione de i quali si vuol dividere il numero dato, e poi si discorre così. Se tal somma ha tal numero, tal altro numero, parte di detta somma, qual numero averà proporzionale al suo tutto, e così in tutte le parti si deve procedere, replicando tante volte la regola del tre, quante sono le parti nelle quali si deve dividere il tutto.

ESEMPIO.

2. Cudeberto Tonstallo riferisce un testamento così concepito da un padre di famiglia, che lasciò 3000 scudi a cinque suoi figliuoli. *Primus filius meus natu maximus ex semisse mihi hæres esto; secundus natu proximus ex triente; tertius ex quadrante; quartus ex quinta parte; quintus ex sextante.* Si cerca quanto a ciascuno si debba, e la ragione di dubitare si è, che tali parti supereranno talmente il tutto, che per il quarto, e quinto figlio non vi resterà niente, essendosi assorbito tutto il denaro, e la metà del primo 1500, il $\frac{1}{3}$ del secondo 1000, e'l $\frac{1}{4}$ al terzo figlio ne pure può darsi intiero, perche avanzano, scudi 500, quando il $\frac{1}{4}$ di 3000 è 750. Dunque per determinare le parti proporzionali di ciascuno, giacchè l'intiero pagamento niuno può ricevere, trovisi un numero, che abbia esattamente tutte le predette parti, il che s'otterrà moltiplicandosi tutti i denominatori delle frazioni $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$,

cioè

cioè 2 in 3 in 4 in 5 in 6, che faranno 720; poi prese di questo numero le sudette parti, ciascuna si faccia secondo termine; la somma loro 1044 primo termine; ultimo, o vero terzo il 3000, operandosi per la regola del tre, si averanno le parti, che competono a ciascheduno.

ARTICOLO VI.

Regola del Tre Composta.

1. QUando nella questione concorrono cinque numeri, tre de' quali dinotano le cose, e due le circostanze, si cerca la circostanza d'una delle dette tre cose. Si ordinano i detti numeri così, nelli due primi luoghi i termini, che hanno la circostanza simile alla richiesta, ed in mezzo si pone questa circostanza nota, negli altri due luoghi si pongono gli altri due termini, ed il fatto delli tre ultimi termini, diviso per il fatto de i due primi sarà il sesto termine cercato.

ESEMPIO.

2. L'Acqua Paola nel Gianicolo esce, per cinque grandi canali; e suppongo, che in sette ore gettino 850 botti d'acqua; si domanda l'acqua Vergine a Trevi, e Sista a Termini, che hanno 6 bocche, in 24 ore quante botti d'acqua getteranno? Si moltiplica 5 per 7 fa 35, questo si serbi per divisore di 850 moltiplicato per 6, e 'l prodotto di nuovo moltiplicato per 24 fatte le operazioni sarà $3497 \frac{1}{7}$ numero delle botti, che si getteranno dalle sudette due fontane in 24 ore.

3. Si propone ancora la questione in sette termini, e si cerca l'ottavo, e si può ancora in nove, e più termini proporre, secondo le circostanze: i termini si dispongono sempre come sopra, ponendo in mezzo la circostanza, a cui la simile si cerca, e prima d'essa i termini a quella appartenenti, e gli altri dopo, e poi il prodotto degli antecedenti alla intermedia servirà per divisore del prodotto di tutti i seguenti.

4. Per il più però accade non essere questa regola diretta, ma inversa, il che si conosce ogni qual volta, che nel quesito vi è un termine, di cui quanto più se ne ha tanto meno d'un altro termine dovrà aversi. V. g. 12 Copisti in 28 ore hanno scritto 828 facciate; dimandasi 17 Copisti in 24 ore quante facciate scriveranno? La regola del tre è roverscia, perchè tanto più sono i Copisti, tanto meno tempo si ricercherà a

ſcrivere egual numero di facciate, nulla di meno non diverſo ſarà il modo di ſcrivere il queſito dall' eſpoſto nel numero 1. ſe non quando ſi cerchi appunto quella tal coſa, di cui meno ſe ne ricerchi, quando d'una tal altra ve ne è più. V. g. nel caſo ſudetto, ſe ſi diceſſe 12 Copiſti ſcrivono facciate 828 in ore 24; domando 17 Copiſti in quanto tempo ſcriverebbero facciate $1005\frac{3}{7}$, che è il numero cercato nel ſudetto queſito, e in ſimili altri. Si moltiplicano tutti i termini di mezzo, e ſi divideranno per il fatto del primo nell'ultimo; o pure quando i termini vi ſiano ordinati come ſegue; ſe facciate 828 ſi ſcrivono da 12 Copiſti in ore 24; $1005\frac{3}{7}$; da 17 Copiſti in quanto rempo ſi ſcriveranno? Allora il fatto del primo, terzo, e quinto doverà dividerſi per il fatto degli altri.

5. Ma per conoſcere quando, e quale di queſte regole, debba adoprarſi, la difficoltà è notabile, e conſiſte in conoſcere il principale, che deve collocarſi nel primo luogo, e nel luogo immediato all' intermedio, che bene ſpeſſo viene queſto collocato in altro luogo, benchè la queſtione ſia bene eſpoſta. E' da notarſi, che il Taquet, dopo aver fatta un' ammirazione: *Mirum eſt quam confusè, & imperfectè, hæc regula paſſim tradatur!* Se la paſſa ſenza accennare, quando debbano le ſudette due regole adoprarſi. Dico dunque, che quando la coſa principale occupa il primo luogo ſi adopri la prima; e quando la coſa principale occupa il ſecondo luogo s'adoperi la ſeconda regola però.

6. Confeſſo richiederſi non mediocre acume per non ingannarſi in queſtioni tanto involte; onde ſtimo bene ſuggerire una maniera aſſai facile da uſcirne con ſicurezza; cioè con riſolvere la queſtione propoſta in alcune regole del tre ſemplici. V. g. nel medeſimo eſempio ſi dica, ſe 12 Copiſti ſcrivono alquanti fogli in 28 ore, 17 Copiſti gl' iſteſſi fogli in quanto tempo gli ſcriveranno? Queſta è roverſcia, verrà in $19\frac{13}{17}$; ora ſi dica, ſe in ore $19\frac{13}{17}$ ſi ſcrivono 828 fogli, in ore 24 dagl' iſteſſi quanti ſe ne ſcriveranno? Queſta è diretta ſi troverà $1005\frac{3}{7}$. Si potrebbe ancora ſciogliere per due regole del tre dirette: dicendo, ſe 12 Copiſti ſcrivono 828 fogli, 17 quanti ne ſcriveranno? E poi trovato il quarto termine, che è 1173 fogli, ſi dica, ſe in ore 28 ſi ſcrivono fogli 1173 in ore 24 quanti ſe ne ſcriveranno? Eccone due regole dirette; e queſto eſempio può baſtare per qualunque altro.

7. Se poi ſi proporrà così 12 Copiſti in 28 ore ſcrivono

828 fac-

828 facciate di 20 linee l' una, e 19 sillabe per linea; dimandasi 17 Copisti quante facciate scriveranno in ore 24 di 26 righe, e 7 sillabe l'una. Nelle facciate sta la questione, onde si ordinerà così:

12 . 28 . 20 . 19 . 828 . 17 . 24 . 26 . 7 .

in mezzo sta il termine simile a quello, che si cerca, e li primi quattro corrispondono alli quattro, che seguono dopo il mezzo; onde per il prodotto de' primi quattro si divida il prodotto de' cinque seguenti, o pure si risolva in regole auree come sopra.

ARTICOLO VII.

Regola del falso semplice.

1. FRa tutte le regole Aritmetiche, questa non è dubbio essere la più bella, poichè dal falso supposto per vero, con la regola Aurea se ne ricava il vero. Alcune questioni si possono sciogliere con un sol falso supposto, alcune altre con due, e queste si chiamano di doppia posizione, e quelle di semplice posizione. Si suppone dunque un numero per vero, e con quello si verificano le condizioni del problema, e si osserva, se queste corrispondono al quesito, che se a caso corrispondessero il numero supposto fu il vero; ma se non corrispondono, allora s'istituisca la regola Aurea così; se tal numero, dopo aver verificate le tali condizioni, risulta da tal numero supposto, questo tale dato da quale vero risulterà?

ESEMPIO PRIMO.

2. Un viandante dice aver avuto il terzo della strada buona, il quinto sassosa, il resto, che furono 60 miglia, tra le selve; si domanda quanto fu tutta, quanto la buona, quanto la sassosa? Piglio un numero ad arbitrio, che abbia il $\frac{1}{3}$, e'l $\frac{1}{5}$ in numeri intieri, e questo si trova moltiplicando i denominatori delle frazioni; cioè 3 via 5 fa 15, si prenda di questo il terzo, che è 5, e 'l quinto, che è 3 fa 8, che levato da 15 lascia 7, ora dicasi, se 7 resta da 15, 60 da che resterà? Si faccia la regola Aurea si troverà 128 $\frac{4}{7}$, che furono le miglia fatte dal detto viaggiatore.

ESEMPIO SECONDO.

3. Interrogato uno, che ora fosse, rispose doverne suonare tante, quante sono $\frac{2}{3}$, ed $\frac{1}{6}$ delle passate; si dimanda, che ora fosse? Essendo tutte le ore del giorno 24, suppongo, che al-

allora fossero 18 ore; prendo di 18 due terzi, sono 12, e poi un sesto, che è 3, ambi fanno 15, che unite con le 18, che supposi, fanno 33, e doverebbero fare 24, onde dico se 33 viene da 18, 24 da che verrà? Faccianſi l'operazioni si troverà $13\frac{1}{11}$, e di fatto $\frac{2}{3}$ di $13\frac{1}{11}$, sono $8\frac{8}{11}$, & $\frac{1}{6}$, fa $2\frac{2}{11}$, che in tutto fanno appunto 24 ore.

ARTICOLO VIII.

Regola del falso doppia.

1. Molte questioni un poco più intrigate sciogliere non si possono con una semplice posizione, ma se ne ricercano due, trovati che siano gli errori d'ambedue le supposizioni, si scrivono d'incontro a' loro numeri prima supposti col segno di più o di meno, secondo che l'errore sarà di eccesso, o di difetto, che se ambedue siano simili, cioè ambedue d'eccesso, o ambedue di difetto si sottraggono; che se sono dissimili si sommano, e tal somma, o differenza sarà il divisore della somma, o differenza de i prodotti di tali errori alternativamente presi, cioè l'errore d'uno si moltiplica per il supposto numero, che dà l'altro errore; il quoziente della divisione sarà il numero cercato.

ESEMPIO PRIMO.

2. Pietro dice a Paolo, se mi dai dieci averò il doppio di te, e Paolo risponde, e se tu mi dai dieci averò cinque volte più di te; dimando quanto aveva ciascuno? Si supponga, che Pietro abbia 40, è chiaro, che dandone 10 al compagno gli ne resteranno 30, che essendo il quinto di tutto quello, che aveva Paolo più 10, Paolo dovrà avere 140, ed ora ha 150: che se da principio ne avesse dati 10 a Pietro glie ne sarebbero restati 130, che dovrebbero essere la metà di 50, cioè 25: dunque abbiamo 105 di più: diremo per tanto per 40 più 105. Ora si supponga, che Pietro abbia 20, che dandone 10 a Paolo gli resterà 10, e Paolo aveva 40, de' quali dandone 10 a Pietro gli resterà 30, che dovrebbe essere la metà di quello, che averà Pietro, ma Pietro ancora avrebbe 30: dunque Paolo ha 15 più del dovere, però si dica: per 20 più 15. Ora si sottraggano gli errori resta 90, si sottraggano i prodotti resta 1500, che, diviso per 90, viene $16\frac{2}{3}$ denari di Pietro, onde Paolo averà $23\frac{1}{3}$. Che se Paolo dà a Pietro 10, gli resta $13\frac{1}{3}$, e

Pie-

Pietro avrà il doppio, cioè $26\frac{2}{3}$, che se questo dà a Paolo 10 gli resta $6\frac{2}{3}$, che è la quinta parte di $33\frac{1}{3}$, che avrebbe Paolo.

ESEMPIO SECONDO.

3. Giovanni imbarca 48 balle di tabacco, e 80 Paolo, giunti al porto ne danno una per uno al Padrone della barca, acciochè vadi a venderla, e si paghi del nolo, e'l resto lo riporti, egli riporta uno scudo a Giovanni, e due a Paolo; si domanda quanto vendesse il tabacco, e quanto pagasse per nolo ogni balla? Si vede chiaro, che bisogna trovare un numero prezzo del nolo d'ogni balla, che moltiplicato per 48, e per 80, ed aggiungendo al primo prodotto 2, ed al secondo uno faccia due numeri eguali, cioè il prezzo, che fu venduta ogn'una delle due balle date in isconto del nolo. Suppongo dunque, che pagassero di nolo 2 scudi per balla; dunque il primo pagò scudi 96, e'l secondo 160. Ma perchè al primo furono restituiti indietro 2 scudi, ed uno al secondo; doverebbero restare in mano al Padrone prezzi eguali al numero delle balle. Ma viene 96 più 2 per il prezzo del primo, e 160 più 1 per il prezzo del secondo, sicchè si dirà per 2 più 63. Suppongasi ora, che si pagasse uno scudo per balla, dunque il nolo del tabacco del primo sarebbe scudi 48, e del secondo 80: dunque fu venduta la balla del primo scudi 50, e del secondo 81, sicchè si dirà per 1 più 31. Ora fatte le operazioni, come fu detto al num. 1. ne verrà per il prezzo del nolo $\frac{1}{32}$ di scudo, e le balle furono vendute scudi $3\frac{1}{2}$ l'una, che dando in dietro al primo due scudi, resta per il nolo del suo tabacco scudi $1\frac{1}{2}$, e uno al secondo, resta $2\frac{1}{2}$, cioè fu pagato da ambedue $\frac{1}{32}$ di scudo per balla.

ESEMPIO TERZO.

4. Tre Pastori Titiro, Dameta, e Menalca discorrendo fra loro del numero delle pecore, disse Titiro a gli altri due, se la metà delle vostre pecore mi date; io in tal caso con le mie averò mille pecore. Dameta soggiunse, ed io pur mille ne averei, se il terzo di quelle, che voi due avete mi donaste. Menalca allora rispose, a me solamente il quarto delle pecore d'ambedue basterebbero; perchè giungessero con le mie al numero di mille. Si domanda quante pecore costoro in tutto avessero, e quanto ciascuno di loro? Suppongasi, che Titiro abbia 100 pecore, in tal caso Dameta, e Menalca insieme, ne averanno 1800, perchè dandone la metà a Titiro egli ne abbia 1000; ora per sapere quante delle 1800 ne abbia Dameta,

e quane quante Menalca, biſogna fare la regola del falſo doppia, e cercare un tal numero di pecore per Dameta, a cui aggiunto il terzo delle pecore, che averanno Menalca, e Titiro faccia mille; il qual trovato che ſia, veggaſi ſe queſto numero di pecore di Dameta con quelle di Titiro unite, e preſone il quarto, e dato a Menalca, anche eſſo poi ne abbia 1000. Che ſe in ciò ſia errore, ſi dica per 100, che di prima fu poſto, ne riſulta più o meno del dovere tanto. E poi di nuovo pongaſi altra poſizione, e ſi ſeguiti ad operare nella maniera medeſima quì eſpoſta: ſicchè ſi vede, che per la ſoluzione di queſto queſito ricercaſi replicare la regola del falſo doppia tre volte, una principale, e due acceſſorie. Io quì non ſtendo tutto il calcolo, poichè chi bene ha inteſo i ſopra poſti eſempi non potrà in queſto eſitare. Solamente dico Titiro averà pecore numero $294\frac{2}{17}$, Dameta $647\frac{1}{17}$, Menalca $764\frac{12}{17}$, in tutto averanno $1705\frac{15}{17}$.

ARTICOLO IX.

Calcolo nella quantità continua.

1. I Vocaboli, che ſi adoprano dagli Aritmetici di ſommare, ſottraere, moltiplicare, dividere, eſtraere le radici ſono ſtati tolti in preſtito, a mio credere, dalla Geometria, ed adattati a ſignificare operazioni nelle quantità diſcrete, ſimili a quelle, che fanno i Geometri nella quantità continua. Poichè il tutto è uno, e continuo, e'l numero non è, che una denominazione delle coſe conſiderate ciaſcheduna da per ſe come tutto, onde è conſeguente al continuo il diſcreto. Ma eſſendo che a' Matematici è lecito più, che ad ogn'altro ſervirſi di qualunque vocabolo, anche inventato a capriccio per ſignificare qualunque coſa loro venga in acconcio; quindi è, che nè queſti, nè quelli devono riprenderſi, ſe s'impreſtano ſcambievolmente nelle loro ſcienze i nomi delle coſe per loro uſo in materia affatto diverſa. I Geometri chiamano radice il lato d'una ſuperficie, o ſolido, o ſurſolido. Gli Aritmetici chiamano radice un numero, che tante unità contenga quante volte egli in un altro numero ſi contiene ecc. Quando per altro radice comunemente ſignifica la parte ſotterranea de' vegetabili. Così alcune curve diconſi iperboli, o parabole, o concoidi, o ſpirali, o con altri nomi ſtravaganti, a miſura del genio,

degl'

degl' inventori, i quali hanno per altro avuto ſempre riguardo a qualche analogia.

2. Il ſommare delle linee, ſuperficie, e ſolidi non è altro, che trovare una linea, ſuperficie, o ſolido a molte di tale ſpecie uguali, così ſe abbiamo più linee, e ſi vogliano ſommare, baſterà tirare una linea indefinita, e da quella per la terza del primo d'Euclide ſegarne tante uguali alle date linee, e tutte queſte inſieme ſaranno la ſomma.

3. Qui biſogna avvertire, che ſono problemi difficiliſſimi, e che appartengono alla più ſublime Geometria, quando s'entra a ſommare linee rette, e curve, e trovare una retta a tutte quelle uguali: quì con tutto l'ajuto de' calcoli differenziali, e ſommatorj l'umano intendimento ſi perde, di modo che neſſuno ancora ha ſaputo uſcire d'un sì intralciato ginéprajo. Noi per ora ci contentaremo d'una via piana, che drittamente, e ſenza imbarazzo ci conduca dolcemente a quel diletto ineffabile, che provono coloro, che ſanno.

4. Se ſi abbiano più circoli di diverſa grandezza, e ſe ne voglia uno eguale alla circonferenza di tutti, ſi ſommino tutti i diametri, per il num. 2. e la ſomma sarà il diametro del cerchio uguale di circonferenza a tutti, perchè ſtando le circonferenze in ragione de i diametri, come un diametro ad una circonferenza, così tutti i diametri ſtaranno a tutte le circonferenze.

5. Si ſommano tutte le ſorti di ſuperficie rettilinee riducendole a parallelogrammi equiangoli d'egual altezza, per la 45 del primo d'Euclide, e poi poſte tutte le baſi di queſti parallelogrammi in una retta linea, con l'altezza d'uno ſi compiſca il parallelogrammo, che sarà eguale a tutte le ſuperficie date, per la 14 del 6.

6. Tutte le ſuperficie curvulinee ſimili ſi ſommano con pigliare i diametri di due, e formare un angolo retto, e tirata l'Ipotenuſa, ſopra di quell'altra figura ſimile ſi proſiegua ſino a formare una tal figura, che ſia a tutte le date figure ſimile, ed eguale.

7. Per ſommare i ſolidi ſi facciano queſti tutti parallelepipedi equiangoli d'ugual' altezza, per la 27 dell' XI. d'Euclide, e poi tra due ſuperficie parallele tutti ſi diſpongano, e ſi averà un ſolido uguale a tutti i ſolidi dati. Similmente, ma in contraria maniera operare ſi deve pe'l ſottraere, di cui pongo un ſolo eſempio.

8. Un

8. Un viandante parte da Lisbona, e traversando tutta la Spagna, Francia, Alemagna, Ungheria; Servia, Tracia, Natolia, Armenia, Assiria, Media, Persia, Indostano, ambedue l'Indie di quà, e di là dal Gange, arriva a Pechino nella Cina; dimando quanto viaggio fatto egli abbia con li piedi, e quanto con la testa? E' chiaro per il num. 4. che caminando costui per la terra, che è un globo, descriverà co' piedi un circolo tanto minore di quello, che descrive con la testa, quanto egli è grande di statura; laonde formandosi due cerchi concentrici, uno de' quali sia la circonferenza della terra, l'altro maggiore a misura della grandezza del detto uomo, e la differenza di questi due cerchi sarà il cerchio formato dalla differenza de' diametri, presa per diametro; cioè la statura del detto uomo. Ma perchè egli non ha girata tutta la terra sarà facile indagare la proporzione de' settori di detti cerchi, giachè l'angolo, o sia l'arco intercetto da Lisbona a Pechino è circa 135 gradi.

9. Nella moltiplicazione d'una linea in un'altra ne può venire tanto una linea, quanto una superficie, e ciò non deve essere cagione di meraviglia, perchè se s'introduce nella Geometria l'unità, cioè una porzione di linea, o pure tutta presa per unità, se ne ha non picciolo vantaggio, anche nella considerazione dell'equazioni, per conservare in esse l'omogeneità de' termini, come altrove si dirà. Intanto per il nostro proposito il prodotto d'una linea in un'altra linea, che conterrà tante volte la prodotta, quante volte la producente contiene la sua parte, o sia quella tal linea, che fu presa per unità. V. g.
Fig. 1. nella figura prima siano le due linee AB, AC da moltiplicarsi, assumo per elemento, o sia per unità la parte AD della AB; v. g. d'un dito, poi adatto al punto A l'AC a qualunque angolo, e congiungo il fine dell'elemento AD, e l'estremo della linea AC con la CD, produco AC, e dal punto B, per la 31 del primo, tiro BE pararella alla DC fino al concorso dell'AC prodotta indefinitamente. Ciò fatto dico la linea AE essere il prodotto dell' AB in AC: abbiamo, per la 2. del 6. AD ad AB, come AC ad AE, cioè l'elemento AD alla linea moltiplicante, come la moltiplicata al prodotto. Onde vedi, che variata la grandezza dell' elemento AD, si varia in infinite maniere la grandezza del prodotto.

10. La linea poi moltiplicata per la linea fa la superficie, quando tante linee si vogliono tutte eguali alla prodotta, quanti

quanti elementi ſono nella producente, che eſſendo queſti infiniti ſi comprendono tutti in una ſuperficie generata dall' inceſſo perpendicolare della prodotta ſopra la producente. Euclide, e con eſſo tutti i Geometri, introducono ancora qui l'unità, cioè una parte sì della producente, che della prodotta, ſiano queſte uguali o no, ed allora ne riſulta un parallelogrammo diſtinto in tanti parallelogrammi minori, quanto è il prodotto delle quantità delle parti d'ambedue le linee, e tal maniera è comuniſſima per miſurare le ſuperficie, anzi in pratica, è l'unica per intendere la loro grandezza, e ſingolarmente nell'Agrimenſura, Architettura, Geografia ecc.

11. Accade bene ſpeſſo doverſi moltiplicare le ſuperficie per qualche numero, cioè trovarne una d'un' altra alquante volte maggiore, ed anche accade doverſi di queſte prendere una qualche determinata parte; per ciò fare ſe la ſuperficie ſarà rettilinea baſterà per la 45. del 1. fare di tal ſuperficie un parallelogrammo, o triangolo uguale, e poi raddoppiare di queſto tante volte la baſe, quanto ſi richiede, e ſi compiſca con tal baſe, o altezza il parallelogrammo, o triangolo, e per la 1. del 6. ſi averà la ſuperficie moltiplice della data; ſe ſe ne voglia parte, ſi divida la baſe per la 9. del 6. in tante parti, quante ſe ne richiedono, e con tali parti, ed altezza ſi compiſca o'l triangolo, o'l parallelogrammo.

12. Che ſe ſi debba moltiplicare un circolo per un qualche dato numero, cioè ſi debba fare un circolo alquante volte d'un'altro maggiore, ſi farà così. Sia il circolo ADB nella figura 2. di cui ſi voglia il triplo. Si faccia il quadrante DCB: DB ſarà il raggio d'un cerchio uguale a due fatti col raggio DC per la 31. del 6. facciaſi dunque concentrico al dato, e ſia IEG, e ſi tiri la EB; queſta ſarà il raggio del cerchio triplo del dato, EG del quadruplo, e così di qualunque altro moltiplice. *Fig. 2.*

13. Se ſi dovrà moltiplicare una ſuperficie per una linea, o pure tre linee fra loro, non ſarà difficile la maniera d'operare. Moltiplicandoſi una linea per un' altra, ſi forma una ſuperficie, e queſta fatta caminare per una linea forma un ſolido; che ſe le tre linee ſaranno ineguali, ſi farà un parallelepipedo, e ſe uguali un corpo, che diceſi cubo. Ora ſe il cubo ſi voglia moltiplicare per un dato numero, v. g. per 2, queſto problema non è ſtato fin'ora geometricamente ſciolto per li puri elementi, poichè dipende dalla invenzione di due medie

proporzionali, che sono problemi di più alto grado, che non possono con la sola riga, e compasso eseguirsi. Pure sembrami quì luogo per accennare come queste medie si trovino.

14. La media proporzionale tra due quantità date, se siano numeri, si averà moltiplicandoli insieme, e dal prodotto estraendone la radice seconda. Così il 4 è medio proporzionale geometrico tra 2, e 8, che se le quantità sono linee per l'8. del 6. si pongono in retta linea, che poi si divide per metà, e quivi fatto il centro si descriva un semicerchio, si tiri un' ordinata dal punto della congiunzione, questa sarà la media proporzionale cercata, come ivi dimostra Euclide.

15. L'invenzione delle due medie dicesi problema Deliaco, perchè come racconta Plutarco nel libro del genio di Socrate: essendo il popolo di Delo da varie calamità oppresso ricorse all' Oracolo di Delfo, per intendere, che far mai potesse per liberarsene. L'Oracolo rispose, che raddoppiassero l'altare: era principio di religione, costruire l'altare di figura cubica; quelli lieti subito s'accinsero all' opera, la quale eseguita s'accorsero esser quella ottupla del primiero altare. Onde incominciarono a cercare la maniera di eseguire il comando, ma essendo eglino ignoranti di geometria indarno tutto facevano. Che però si risolvettero di mandare Ambasciadori a Platone, il quale allora a caso trovavasi in Caria, e da lui un secondo Oracolo riportarono, cioè, che il Nume aveva schernita la loro infingardaggine nelle cose geometriche, e che non averebbero mai dupplicato l'altare, se prima non trovavano le due medie proporzionali tra'l simplo, e'l duplo. I Greci le cercarono, l' han cercate tutti i Matematici fin ora per la via piana, ne s'è trovato fin quì chi abbia avuto la sorte di trovarle, benchè non sia mai mancato chi abbia dato il vanto di questa invenzione al suo cervello così stravolto, Redi.

Che quadrar nol potria ne meno in pratica
Del Viviani il gran saper profondo,
Con tutta quanta la sua Matematica.

16. Pure non mancano ingegnosissimi istromenti per l'invenzione delle due medie, per la trisezione dell' angolo, e per conseguenza per la quadratura del cerchio, duplicazione del cubo, formazione dell' eptagono, ed altri poligoni regolari, ed insieme molti metodi facili, ma puri organici in quanto alla costruzione, la quale supposta quelli geometricamente si dimostrano. Ora per l'invenzione di due medie faci-

cilissima mi sembra quella di Jerone, riferita da Pappo nel 3. libro, ed è la seguente.

17. Siano nella figura 3. AB, AD le due linee, delle quali si cercano le due medie proporzionali; con esse si faccia il parallelogrammo rettangolo DB, si prolunghino indefinitamente i due lati DE, DF, si tirino i diametri DB, AC, si appoggi una riga all'angolo B, e tanto intorno esso si raggiri, finchè le due linee GF, GE siano uguali; ciò posto dico le quattro linee AB, AF, CE, CB essere in continua proporzione. Si prova. Per la 6. del 2. il rettangolo DFA più il quadrato AH, più il quadrato HG, cioè GA sono eguali a i quadrati HF, HG, cioè GF; tolti i comuni, resta il rettangolo DFA uguale al quadrato GF; similmente il quadrato GE essendo uguale al rettangolo DEC i due rettangoli DEC, DFA saranno uguali, dunque come ED a DF, così FA a CE. Ma per la 4. del 6. come ED a DF così sta EC a CB, e così la BA ad AF; dunque come BA ad AF, così AF a CE, così a CB, che si dovea dimostrare. *Fig. 3.*

18. Per estraere la radice quadra da qualunque superficie rettilinea (giachè dalla maggior parte delle curvilinee resta occulto peranche alli Geometri Elementari), si faccia un parallelogrammo rettangolo uguale alla data superficie per la 44. del 1. il che fatto per la 14. del 2. si trovi il quadrato a tal parallelogrammo uguale, e 'l lato di questo sarà la radice cercata della data superficie.

19. Ho detto di sopra, che pur di qualche superficie curvilinea se ne possa trovare il quadrato uguale, e per conseguenza ancora la radice. Per dare un saggio prenderò la famosa quadratura delle Lunule d'Ippocrate. Sia nella figura 4. il triangolo rettangolo ACB. Per la 31. del 6. qualunque figura simile, che sopra l'Ipotenusa AB si faccia, sempre è uguale alle figure descritte sopra i lati. Laonde sopra AB descrivasi il semicerchio ACB, il quale passerà per l'angolo retto C, per la 31. del 3. e similmente due altri semicerchi si descrivano sopra BC, e CA; ciò posto lo spazio compreso dal semicerchio AGCFB sarà uguale alli due spazj AEC, CDB, quindi togliendo le porzioni comuni AGC, CFB resteranno le Lunule AECF, CFBD uguali al triangolo rettilineo ACB, che si dovea dimostrare. *Fig. 4.*

CAPO V.

Del Computo Ecclesiastico.

ARTICOLO PRIMO.

Della Solennità Pasquale, e suoi motivi.

1. LA Solennità Pasquale origine ebbe dalla famosa liberazione del Popolo Ebreo dalla schiavitù d'Egitto, come si ha nell'Esodo al cap. 12. v. 14. *Habebitis hunc diem in monumentum, & celebrabitis eum solemnem Domino*, ed al cap. 23. v. 5. del Levitico se ne prescrive il mese, e'l giorno: *Mense primo quartadecima die mensis ad Vesperum Phase Domini est, & decimaquinta die mensis hujus solemnitas Azymorum Domini est.*

2. Ma perchè quello, che nell'antica legge troviamo scritto essere stato osservato, o fatto, tutto fu in ordine ai Sagrosanti Misterj rivelatici da Giesù Cristo, quindi è, che la Pasqua della Legge antica fu figura della Pasqua, che celebrar doveasi in memoria della Passione, e Risurrezione del Salvatore, con cui diede il compenso pe'l genere umano alla Divina Giustizia. Conc. Trid. sess. 22. cap. 1. *Nam celebrato veteri Pascha, quod in memoriam exitus de Ægypto multitudo filiorum Israel immolabat, novum instituit Pascha, seipsum ab Ecclesia per Sacerdotes sub signis visibilibus immolandum in memoriam transitus sui ex hoc mundo ad Patrem, quando per sui sanguinis effusionem nos redemit, eripuitque de potestate tenebrarum, & in Regnum suum transtulit.*

3. Essendosi poi questo mistero operato circa il tempo, che dagli Ebrei la solennità Pasquale celebravasi, si deve anche da noi Fedeli per istituto Apostolico * solennizare quel dì, in cui dalla orribile schiavitù del peccato siamo stati per Divina misericordia liberati, il qual giorno è certo, che fosse posteriore al plenilunio, che dopo l'equinozio Verno succede. Il che sta esposto nel Canone Apostolico al cap. 7. *Si quis Episcopus, aut Presbyter, aut Diaconus sanctum die Paschæ, ante Vernum æqui-*

* S. Ignazio M. nell' Epistola 8. e S. Agostino *sermone de tempore 25.* attestano, che la Pasqua fosse istituita dal Prencipe degli Apostoli S. Pietro.

æquinoctium cum Judæis celebraverit deponitor; il quale benchè da' moderni Scritt ori non si riferisca al tempo de' Santi Apostoli, che che ne sia non aspetta a me entrare in questa difficile questione, è però certo essere stato in uso nella Chiesa sino dal VI. secolo, come apparisce dalla raccolta fattane dall' Abate Dionigi Esiguo, che dal Greco ne fece la traslazione in Latino; eccone le sue parole: *In principio itaque Canones, qui dicuntur Apostolorum de Græco transtulimus, quibus quia plurimi consensum non præbuere facilem, hoc ipsum vestram noluimus ignorare sanctitatem, quamvis postea Constituta Pontificum ex ipsis Canonibus assumpta esse videantur.*

4. E' certo ancora, che dagli Apostoli medesimi stabilito fosse nel dì di Domenica, come riferisce il Baronio all' anno 567. num. 10. *Meminisse oportet, quod alias diximus sic statuisse olim Apostolos celebrandum Pascha die Dominico* ecc. Insorse nella Chiesa una gravissima disputa nel secondo secolo sotto S. Pio Primo tra li Vescovi d'Asia, e i Romani, poichè quelli volevano con gli Ebrei celebrare la Pasqua nella decimaquarta, e questi nella Domenica seguente la decimaquarta; onde il Papa inerendo alla tradizione Apostolica decretò contro gli Orientali, e non volendosi questi quietare al decreto di S. Pio, riferito da Graziano *de Consecratione* dist. 3. cap. *nosse*, passò la disputa a tal segno, che S. Vittore Papa, dopo avere scritto a tutti i Vescovi, e tenuti su questo punto varj Concilj, solennemente decise, che la Pasqua doveasi celebrare la Domenica susseguente la decimaquarta del primo mese, contro chiunque avesse avuto l'ardire di sostenere il contrario, che pur ve ne furono, e sempre venivano sotto il nome di Quartadecimani. *De Consecratione* cap. *celebritatem*, ove è da notarsi, che il Santo Padre determina i dì della Luna, che possono essere Pasquali: *A quartadecima verò Luna primi mensis usque ad vigesimamprimam ejusdem mensis eadem celebretur festivitas.* E finalmente tutto ciò fu decretato, e deciso nel primo Concilio Ecumenico di Nicea, come attestano tutti li SS. PP. che di ciò hanno parlato, e si può vedere il Baronio all' anno 198.

5. E' certo in terzo luogo, che debba celebrarsi la Pasqua da tutti li Fedeli nello stesso giorno, come si ha per un decreto dello stesso Concilio Niceno riferito da Giovanni Scolastico, il quale è questo .... *Quia igitur postquam, & expensum est oportere ab universis, qui sub Cœlo sunt, uno modo*

do agitari Pascha, inventæ sunt tres partes Orbis, quæ Pascha concorditer agunt cum Romanis, & Alexandrinis, una vero Orientis dubitat, & displicet, visum est sublata omni quæstione, & controversia, ita etiam agant fratres, qui in Oriente sunt, sicut Romani, & Alexandrini, ac cæteri omnes, ut omnes uno die Pascha celebrent. Et subscripserunt omnes Orientales, qui in aliis discrepabant. E nel Concilio Arelatense riferito nel decreto *de Consecratione* dist. 3. cap. *de observatione. Statuimus ut uno die, & tempore per omnem orbem Pascha observetur*.

6. Tutto ciò presupposto tutta la difficoltà consiste in assegnare una regola facile, e sincera, con cui si possa ritrovare la Luna Pasquale. Ed acciochè si sappia donde nasce questa difficoltà, si deve avvertire, che l'anno Astronomico costa di giorni 365. ore 5. 49'. 24'', e'l Civile di giorni 365. o 366. ogni 4 anni per compensare le dette ore; ma la compensa non è giusta, e gli si danno di più 42'. 24'' ogni 4 anni: quindi è, che nello spazio di anni 1257, che passarono dal Concilio Niceno al 1582, eransi aggiunti 10 giorni di più, secondo lo stile di Giulio Cesare; onde l'equinozio Verno, che del 325 successe ai 21 Marzo, nel 1582 veniva agli 11 Marzo. Ma perchè questi punti cardinali sono di difficilissima osservazione, per non dire impossibile, se non si dà un tal turno agli anni, ed ai mesi Solari, e Lunari, che ogn'anno facciano ricorrere l'ingresso del Sole sotto la Linea in un determinato giorno; ed una regola, con cui la decimaquarta Lunare si riconosca posteriore a tal giorno, e per conseguenza all'equinozio, ne potrebbe facilmente nascere un tal disordine, che o non si sapesse il dì della Pasqua, o che da varj popoli in varj giorni si celebrasse, o che in mesi proibiti da' Canoni, Decreti, e Concilj si solennizasse il massimo de' nostri Sacrosanti Misterj.

7. Alle quali inconvenienze, oltre a quella di retrocedere a poco a poco l'equinozio Verno verso Natale, di modo che il digiuno Quaresimale sarebbe finalmente accaduto nella solennità di Natale, si è preteso di rimediare l'anno sudetto 1582 con la Riforma Gregoriana, della quale il computo, e 'l Calendario qui ora si spiega.

ARTICOLO II.

Notizia del tempo in ordine al Computo Ecclesiastico.

1. SE l'idee delle cose in noi sono scarse, certamente sono quelle del tempo, e del moto, poichè se vogliamo spiegare il moto, ricorriamo al tempo, e se'l tempo vogliamo intendere, ci ajutiamo col moto: sicchè nè per se medesimo nè per relazione ad altre cose ne abbiamo la notizia giusta. Comunemente il moto del Sole prendesi per misura del tempo, e lo distingue in giorni, ore, anni, e mesi, de i quali noi dobbiamo dar contezza.

2. Giorno naturale è una rivoluzione intiera del Cielo, e del Sole intorno alla Terra. Giorno artificiale dicesi dal nascere al tramontare, ambedue questi giorni sono ineguali. Che i giorni artificiali siano ineguali è chiaro per esperienza nella nostra sfera obliqua, ma nella retta sono eguali; poichè i circoli diurni paralleli all' Equatore nella sfera obliqua sono tagliati in parti disuguali dall' orizonte, e nella retta egualmente. Che i giorni naturali ancora siano ineguali, così si prova. L'Equatore è l'esatta misura del tempo, ma a i gradi dell' Equatore non corrispondouo eguali gradi dell' Eclittica a cagione della sua obliquità, e'l Sole ogni dì fa eguali parti dell' Eclittica; dunque i giorni non sono eguali. Ciò basti avere accennato, non essendo qui luogo di dimostrazioni geometriche.

3. Diverse Nazioni diversamente prendono l'Epoca, o sia principio del giorno. Anticamente la prendevano dal nascere del Sole i popoli Persiani, Siriaci, e quei di Celesiria, o sia di Damasco; oggidì quei dell' Isole Baleari, i Greci, e quei di Norimberga. Dal tramontare la prendevano già gli Ateniesi, i Giudei, Austriaci, Boemi Marcomanni, e quei della Slesia: oggidì i soli Italiani, ed i Cinesi. Dal mezzodì incominciavano il giorno gli Umbri, e gli Arabi; oggi i soli Astronomi. Dalla mezza notte incominciavano già gli Egizj, e i Romani; oggi quasi tutta l'Europa, e la Chiesa per l'osservanza de' suoi precetti, come di festività, digiuni ecc. le Solennità poi, Indulgenze ecc. da' primi Vesperi.

4. Dividesi il giorno comunemente in 24 parti uguali, che diconsi ore, e queste in 60 minuti, e questi in secondi ecc.

I Cal-

I Caldei anticamente dividevano l'ore in 1080 ſcrupoli; quei di Babilonia, i Greci, e gli Ebrei dopo la ſchiavitù di Babilonia dividevano il giorno artificiale, e la notte in 12 parti uguali. Joann. 11. 9. *Nonne duodecim ſunt horæ diei*; ma nella Scrittura prima di Eſdra non ritrovanſi mai nominate le ore; di queſte ore non ſe ne trovano nominate che quattro, prima, terza, ſeſta, e nona. Marc. c. 15. 25. *Erat autem hora tertia*. Joan. 19. 14. *Hora quaſi ſexta*. Act. Apoſtolor. *Petrus, & Paulus aſcendebant in templum ad horam orationis nonam*.

5. Iddio creò il mondo in ſei dì, e'l ſettimo ſi riposò; così ſei giorni impiegavano gli Ebrei alle opere, e'l Sabato, cioè il ſettimo, ſi ripoſavano: queſti ſette giorni ſi chiamano ſettimana ignota agli antichi Romani, che in ſua vece uſavano le ottoadi, che poi dagli Ebrei la preſero. La ragione del nome dei giorni della ſettimana viene dall' Egitto: denominavano queſti il dì dal Pianeta dominante la prima ora del giorno, che ſecondo la ſerie SIM SUM *Luna ſubeſt* dei Pianeti, dicevano eſſere dominate, dando la prima ora del Sabato a Saturno, la prima della Domenica avrà il Sole, la prima del Lunedì la Luna ecc. La Chieſa tutti i giorni chiama ferie, *quaſi debeamus quotidie feriari Domino*, e la Domenica giorno ſolenne *quaſi dies Domini*, poichè in queſto dì ſucceſſe la Riſurrezione di Criſto, maſſimo miſtero della noſtra Redenzione.

6. Il Sole, come abbiamo detto, in giorni 365. ore 5. 49'. 24'' compie tutto il giro dell'Eclittica. E queſto tempo ſi chiama anno. Si divide l'Eclittica in dodici coſtellazioni, che

♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍
Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Piſces.

Il tempo, che il Sole ſi trattiene in ciaſcuno di queſti ſegni, o per dir meglio il tempo, in cui paſſa 30 gradi dell'Eclittica (poichè oramai le coſtellazioni ſi ſono ſuccedute ſuſſeguentemente una nel luogo dell' altra, ſicchè ove prima era Leone ora è Vergine, e dove era Capricorno, ora ſucceduto è Aquario) ſi chiama meſe; i meſi comuni ſono ineguali, altri ſono di 30, altri di giorni 31, e Febraro ne ha 28, o 29, ed i loro nomi hanno il fondamento ſu la Religione, e Politica degli antichi Romani. I meſi Aſtronomici ſecondo il moto Vero del Sole, cioè ſecondo il moto oſſervato dalla ſuperficie della terra ſono ineguali; ma ſecondo il Medio, cioè in riſguar-

risguardo al centro sono eguali, e secondo il Casini, e Delaire costano di giorni 30. ore 10. 29'. 5''. Dissi le costellazioni non corrispondere ora all'antica distribuzione, perchè le Fisse ancora si muovono secondo la succeſſione de' segni, ed in anni guasi 72 compiscono un grado: sicchè l'Apocatastasi, o sia grande anno Platonico non sarà come volevano i Stoici, e gli Accademici, anni Solari 36 mila, ma bensì anni 25920.

7. L'anno Lunare è il tempo, che impiega la Luna in 12 mesi Sinodici, cioè in 12 Sigizie, o siano congiunzioni col Sole. Un mese Sinodico costa di giorni 29. ore 12. 44'. 3''. 11''', sarà l'anno Lunare giorni 354. ore 8. 48'. 38''. 12''', questi giorni, senza le minuzie d'ore, e minuti, fanno l'anno Civile, a differenza dell' Embolismeo di giorni 384.

8. Il mese Periodico Lunare dicesi quel tempo, che impiega la Luna a ritornare nel punto medesimo donde partissi, che è di giorni 27. ore 7. 43'. 7''. Il mese comune altro è pieno di giorni 30, altro cavo di 29; ma perchè in ogni Lunazione avanzano 44'. 3''. ogni 32 lunazioni fanno quasi un dì, cioè ogni 32 mesi si pone un mese pieno di più: per ridurre il mese Civile concorde all'Astronomico.

9. In una rivoluzione del Sole per l'Eclittica la Luna ne compie 12, ed avanzano giorni 10. ore 21. 0'. 48'', onde ogni tre anni bisogna crescere nn mese Lunare, che si chiama Embolismico. Avanzano in oltre ogn' anno le dette ore 21, che per compensarle si fanno embolismali gli anni 3. 6. 9. 11. 14. 17. e 19. del Ciclo metonico Lunare tutti di mesi Embolismi pieni, fuorchè il 19.

ARTICOLO III.

De' Cicli, e Periodi.

1. PRenderò dalla dottrina Cronologica tutto quello, che al Computo Ecclesiastico stimarò opportuno; cioè per ritrovare la Lettera Domenicale, l'Aureo Numero, l'Epatta, il Novilunio, l'età della Luna, l'anno Embolismico, la Lettera del Martirologio, l'Indizione, le Feste Mobili, e'l luogo del Sole, e della Luna nel Zodiaco: quante ore della notte risplenda la Luna; la durata dei Crepuscoli, ed altre cose simili necessarie, utili, e dilettevoli.

DEL CICLO SOLARE, E DELLA LETTERA DOMENICALE.

2. Il Ciclo Solare è la rivoluzione di 28 anni, ne' quali si restituisce la Lettera Domenicale a dinotare lo stesso dì; mi spiego, si nominano i giorni della settimana colle sette prime lettere dell'alfabeto A, B, C ecc. v.g. se il 1. di Gennaro è Domenica, e sia dinotato colla lettera A, il 2. sarà B, il 3. C ecc. sino alla fine dell'anno, il quale avendo 52 settimane, ed un dì, nel seguente anno sarà dinotato dalla lettera A il Lunedì, e per conseguenza dal G la Domenica: onde se gli anni fossero tutti eguali in sette anni si compirebbe il giro; ma perchè nei bisestili si cresce un dì a Febraro dopo S. Mattia, e si dice tanto il dì di S. Mattia, come il dì seguente *sexto Kalendas*, cioè in quest' anno si dice *bis sexto Kalendas*, d'onde ne è nata la denominazione all'anno di bisestile, le Lettere Domenicali in tal'anno saranno due, una, che precede detta festa, e l'altra, che serve a tutto il resto dell'anno; e perchè ogni quattro anni si ha il bisesto, e sette sono le Lettere Domenicali, il Ciclo Solare sarà composto da 4, e da 7, cioè 28, e sarà il seguente dall'anno 1700 sino al 1900. exclusivè.

d b a g	f d c b	a f e d	c a g f	e c b a	g e d c	b g f e
c	e	g	b	d	f	a

3. Il primo anno dell' Era Volgare era il decimo del Ciclo, adunque si aggiunga all' anno corrente il 9, e si divida per 28 l'avanzo, dinoterà qual' anno del Ciclo sia l'anno corrente, e per conseguenza nel Ciclo la Lettera Domeicale; ma perchè non sempre si può avere alla mano la tavola delle Lettere Dominicali si è ritrovato il seguente distico di dodici parole, che incominciano colle stesse lettere, che nel Calendario si prefiggono a i primi giorni di ciascun mese incominciando da Gennaro.

Astra dabit Dominus, gratisque beabit egenos
Gratia Christicolæ feret aurea dona fideli.

Ora volendosi sapere la Lettera Domenicale dell' anno corrente 1730, essendo Lunedì 25 Decembre, si prenda la undecima parola del distico *fideli*, che sarà la lettera del Venardì primo del mese, dunque al Sabato compete il G, ed alla Domenica A Lettera Domenicale corrente.

DEL

DEL CICLO LUNARE.

4. I Greci molta induſtria uſarono per ridurre il Corſo del Sole a quello della Luna uniforme, finalmente Metone aſſegnò la ſua *Enneadecaeteride*, o ſia Ciclo decennovennale, che per l'uſo grande, che egli aveva per l'invenzione delle Sizigie, e faſi Lunari lo ſcrivevano con caratteri d'oro, onde gli è reſtato il nome di Aureo Numero. Egli è dunque così

Il Sole in 19 anni compie 6939 giorni, ed ore 18, e la Luna nello ſteſſo tempo ſi reſtituiſce allo ſteſſo aſpetto col Sole, dandoſi all'anno giorni $365\frac{1}{4}$, ed al meſe Sinodico Lunare giorni $29\frac{1}{2}$: ma poichè queſta ſuppoſizione di Metone non è giuſta, anche queſto Ciclo in progreſſo di tempo ha avuto biſogno di correzione.

5. L'Aureo Numero del primo anno dell'Era Volgare era 2, adunque per trovare l'Aureo numero di qualunque anno ſi aggiunga 1 all'anno dato, poi ſi divida per 19 il reſiduo della diviſione, ſarà l'Aureo Numero cercato v. g. per l'anno corrente 1730, ſi divida 1731 per 19, reſta 2 Aureo Numero corrente, che ſe reſtaſſe zero l'Aureo Numero ſarebbe 19.

DELLA INDIZIONE.

6. Solevano i Romani ogni Luſtro, cioè ogni cinque anni, riſcuotere i tributi dalle Provincie ſoggette; il primo Luſtro riſcuotevano il ferro, il ſecondo l'argento, il terzo l'oro; e poi incominciavano da capo a riſcuotere il ferro ecc. ſicchè ogni 15 anni ſi compivano le riſcoſſioni de' tributi, e queſto è 'l numero del Ciclo dell' Indizione; il primo anno dell'Era Volgare avea 4, dunque per ſapere l'Indizione di qualunqe anno gli ſi aggiunga 3, e poi ſi divida per 15, l'avanzo ſarà l'Indizione. L'uſo di queſto Ciclo è frequentiſſimo nelle Bolle Pontificie, Iſtrumenti, ed altre publiche ſcritture.

DEL PERIODO GIULIANO.

7. Dalla moltiplicazione di queſti Cicli Solare, Lunare, e di Indizione naſce il Periodo Giuliano di anni 7980, nel quale non ſi trovano due anni, che abbiano l'iſteſſi numeri del Ciclo Solare, Aureo, e di Indizione. Abbiamo detto, che il primo anno dell'Era Volgare foſſe 10 del Ciclo Solare, 2 del Numero Aureo, e 4 d'Indizione: ſi cerca, che anno del Periodo foſſe? Queſto problema ſi riſolve nella Parte Seconda al Capo 3.

per ora sappiasi: Il dato Ciclo della Luna sempre si moltiplichi per 4200, il Ciclo del Sole per 4845, e'l Ciclo dell' Indizione per 6916, tutti i prodotti si sommino, e la somma si divida per 7980, il quoziente sarà l'anno del Periodo cercato, che nel caso proposto è il 4714; laonde questo Periodo precede la creazione del mondo anni 710. Uso massimo avrebbe nella Cronologia, se gli antichi Scrittori avessero avuta la contezza, e l'uso de' Cicli. Il nome di Giuliano lo ha da Giulio Scaligero Padre di Gioseppe suo promulgatore. Prima adopravasi nella Chiesa il Periodo Vittoriano fin dal tempo di S. Ilario Papa nell' anno 458, che era formato dai due Cicli Solare, e Lunare, cioè d'anni 532.

ARTICOLO IV.

Riforma Gregoriana.

1. A Due grandi difetti del Calendario Giuliano procurò dare il compenso Gregorio XIII. Primo, alla ritrocessione perpetua della Pasqua verso Natale, poichè Sosigene avea fatto l'anno troppo grande di 10'. 36''. Secondo, all'aver supposto il Ciclo Lunare esattissimo, quasi che ogni 19 anni ritorni la Luna all' istesso aspetto nell'istesso sito del Cielo col Sole, cioè, che i Novilunj, e Plenilunj ritornino negl' istessi giorni, ore, e minuti, quando questi anticipano quasi un' ora e mezza; che in 314 anni e mezzo già anticipano il Ciclo d'un dì.

2. Questo affare importantissimo fu raccomandato da i PP. del Concilio di Trento al Sommo Pontefice Romano, e Gregorio XIII. sopra lodato, con scegliere i migliori Astronomi del Mondo Cristiano, mise mano alla Correzione, che felicemente successe.

3. Al primo inconveniente fu facilmente posto riparo col togliere i dieci giorni, che fin' allora era retroceduto l'equinozio dall'anno 325 al 1582, in cui con sua Bolla comandò, che il dì 5 Ottobre fosse 15: perchè poi l'istesso regresso non succedesse in avvenire si providde così; che tre anni secolari dopo il 1600 fossero comuni, e'l quarto bisestile, e così tre altri anni secolari si facessero comuni, e'l quarto bisestile ecc.

4. Quel consesso Astronomico trovavasi assai imbarazzato per porre riparo al secondo inconveniente del Ciclo, quando fu offerto al Sommo Pontefice un libretto composto poco prima della sua morte da un Medico Romano detto Luigi Lilio,

ove

ove contenevasi, e spiegavasi il Ciclo delle Epatte, con cui ingegnosamente, e con facilità si dà il compenso al difetto del Ciclo Aureo.

DELLA EPATTA.

5. L'anno Solare, come abbiamo detto, supera il Lunare di 11 giorni; sicchè i Novilunj anticipano ogn'anno 11 giorni i Novilunj dell'anno scorso, e l'anno susseguente anticipa giorni 22, e 'l terzo essendo embolismico 3, il quarto 14 ecc. fino al 19, anno in cui anticipa la Luna il precedente di 12; questi numeri si chiamano Epatta, e sono rappresentati nella seguente tabella, che incomincia dall' anno 1700, e durerà fino all'anno 1900.

Aur. N.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
Epatte.	IX.	XX.	I.	XII.	XXIII.	IV.	XV.	XXVI.	VII.	XVIII.
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
	*	XI.	XXII.	III.	XIV.	XXV.	VI.	XVII.	XXVIII.	

Dissi fino al 1900 esclusive, perchè allora questa si muta in un' altra per le ragioni seguenti.

6. Due cose, che dagli Astronomi diconsi *Metemptosi*, e *Proemptosi* si devono avvertire nel Ciclo delle Epatte: mi spiego; abbiamo detto, che ogni 4 anni secolari si tralasciano tre intercalazioni, o siano tre bisestili, laonde in tal caso la Luna nuova indicata dal Ciclo viene un dì più tardi, e questa tardanza dicesi *Metemptosi*. Quindi perchè il Ciclo Aureo dopo anni 312$\frac{1}{2}$ posticipa la Luna d'un giorno, tal posticipazione dicesi *Proemptosi*. Onde ogni volta, che accadono queste anticipazioni, o posticipazioni dovrebbonsi, o promuovere, o retrocedere l'Epatte ne' Calendarj, come si fa nella Tavola spasa, il che sarebbe un' incomodo insopportabile: o pure dovrebbonsi fare 30 Calendarj di mole troppo enorme. Al che ottimamente providde il sopralodato Lilio con disporre l'Epatte a ciascun giorno del mese.

7. Per ritrovare l'Epatta di qualunque anno si cerchi per l'Articolo 3. num. 5. l'Aureo Numero dell'anno dato, si moltiplichi per 11, al prodotto s'aggiunga la distanza del principio dell' anno Giuliano dal Gregoriano, che è 11 per essersi tolto, oltre i 10 della Riforma un' altro dì il 1700, tutto questo si divida per 30, il resto sarà l'Epatta.

8. Ora

8. Ora prendasi il Calendario posto al principio del Breviario. Quivi deve rendersi ragione, primo, perchè al 1. Gennaro siaci l'Asterismo * ? Secondo, perchè in alcuni mesi si trovino l' Epatte XXIV. e XXV. in un sol dì ? Terzo, perchè l'Epatte si ponghino in ordine retrogrado ? Quarto, perchè si trova ne' mesi l'Epatta 25 replicata in margine di diverso colore, e carattere alle volte incontro all' Epatta XXVI. altre volte incontro alla XXV. ed una volta all' ultimo Decembre si trova avanti alla Epatta XX. il 19.

9. Rispondo: al 1. Gennaro si pone * per dinotare, che può essere in quel dì l'età della Luna nulla, o pure 30, o pure ambedue. Al secondo. Si pongono ne i mesi Febraro, Aprile, Giugno, Agosto, Settembre, e Novembre l'Epatte XXIV. e XXV. in un sol dì, perchè in questi mesi le Lunazioni sono cave di giorni solamente 29. Terzo. Si pongono l'Epatte in ordine retrogrado, perchè così meglio si dinotano i giorni residui della Luna. Quarto. Si pone l'Epatte 25 di diverso carattere, perchè se in un anno dentro al Ciclo aureo corrono l'Epatte XXIV. e XXV. per la XXV. si adoprerà la 25. posta prima; poichè è impossibile, che dentro al Ciclo possino cadere due Lune nell' istesso giorno. Finalmente a i 31 Decembre si trova oltre l'Epatta XX. anche la 19, per quel caso rarissimo in cui l'aureo numero 19 s'incontra con l'Epatta 19, poichè allora l'ultimo mese Lunare è Embolismico, ma cavo; e perchè nulladimeno gli si attribuiscono 30 giorni, bisogna compensare coll'Epatta l'uso comune.

ARTICOLO V.

Uso del Calendario Gregoriano.

1. IN primo luogo l' Epatta dell' anno corrente indicherà nei mesi il dì del Novilunio, e per conseguenza l' età della Luna in qualunqe giorno assegnato. Questa età suol essere la somma dell' Epatta corrente, i giorni del mese, e numero de' mesi tolti i 30. Saputa questa si saprà ancora a che ora ella nasca, perchè il dì del Plenilunio nasce sempre al tramontare del Sole, i giorni seguenti nasce sempre poco più di $\frac{3}{4}$ d'ora più tardi, ogni giorno avanti anticipa il nascere parimente poco più di $\frac{3}{4}$ d'ora. Dunque ecc.

2. Siccome tutte le Feste Mobili dipendono dalla Pasqua, e sa-

e ſapendoſi queſta tutte le altre ſi ſanno, con l'Epatta dell'anno corrente ſubito ſi trova la Paſqua di tal'anno così. Si cerchi nel Calendario l' Epatta corrente tra li 8 Marzo, e li 5 Aprile incluſivè, che ſono i due limiti delle Lune Paſquali, da queſta Epatta ſi contino 14, e ſe ivi ſi trovi la Lettera Domenicale corrente ſe ne contino altri 7, altrimenti ſi arrivi alla Lettera Domenicale proſſima, che indicherà il dì di Paſqua di quell'anno. Conoſciuta la Paſqua facilmente ſi viene in cognizione delle altre Feſte Mobili.

3. Con l'Epatta parimente ſi trova la Lettera del Martirologio. Queſte ſono 29, e la trigeſima è ✠; e ſono 19 minuſcole dall' *a* ſino all' *u*, laſciando la *o*, e dieci majuſcole A. E. C. D. E. F. G. M. N. P. ✠, ſi contino queſte lettere, cominciando dalla minuſcola *a*, ſino al numero dell' Epatta corrente, e quella lettera, che s' incontra al numero dell' Epatta è la lettera del Martirologio dell' anno corrente, la quale indica in tutti i dì l'età della Luna, che ſono i numeri Arabici ſotto eſſa ſcritti. Nell' anno Biſeſtile a' 25 Febraro ſi nomina l'iſteſſa età della Luna, che fu nomata ai 24. E quando l'Aureo Numero è 1 per tutto Gennaro ſi dà un giorno di meno alla Luna di quei, che ne indica il Martirologio.

4. Appartiene al Computo Eccleſiaſtico ancora la notizia de' Crepuſcoli, poichè abbiamo il precetto di non poter celebrare la Meſſa avanti l'Aurora; e molti Teologi ſoſtengono, che il valore delle Indulgenze aſſiſſe a giorni determinati duri dopo il tramontare del Sole, finchè dura il Crepuſcolo Veſpertino; e perciò eccone ſuccintamente indicata la dottrina.

5. Il Crepuſcolo è 'l principio di Luce, che la matina appare prima del naſcere del Sole, e diceſi Aurora; ed il reſiduo di Luce della ſera dopo il tramontare del Sole diceſi Crepuſcolo Veſpertino. Queſta luce è cagionata dai Raggi Solari, che percuotono nell'Atmosfera, e ſi riflettono all' occhio noſtro; e ſiccome l'Atmosfera ora più, ora meno s'inalza d'intorno al Globo Terraqueo, quindi è, che 'l Crepuſcolo nello ſteſſo dì dell' anno, alle volte ha maggiore, alle volte ha minore durata. Ma eſſendo piccola queſta variazione, nè potendoſi in conto veruno indagare, poichè dipende da un compleſſo di cagioni incoſtantiſſime non ſe ne fa conto nell' uſo Civile.

6. Varia eziandio la durata del Crepuſcolo di giorno in gior-

giorno tutto l'anno nella Sfera obliqua, a cagione, che i Circoli diurni sono segati inegualmente dall' Orizonte, e dal suo parallello posto 18 gradi sotto esso, a cui arrivando il Sole comincia l'Aurora, e finisce il Crepuscolo Vespertino, sono però gl' archi di questi Cerchi interecetti ineguali, maggiori sono i segmenti dei Tropici, che quei dell' Equatore, e suoi collaterali; onde maggiori sono i Crepuscoli Solstiziali, che quei intorno agli Equinozj, di modo che i minimi in Roma sono a gradi 19. 10' di libra, e gradi 2. 20' di Scorpione. Le ragioni di questi Fenomeni si lasciano agli Astronomi. Vedi l'Ospitalio negl' infinitamente piccoli sezzione 3. Esempio 13.

7. Che è quanto del Computo Ecclesiastico mi par sufficiente avere indicato. Alle obiezzioni, che contro questa Correzione si fanno non è qui luogo rispondere, nè pure voglio per ora entrare nel gran punto se questo Computo abbia mai indicato falsamente la Pasqua, o sia per indicarla? E se vi bisogni ulteriore Correzione? Dico solamente, che tanti, che si sono sollevati contro questa Riforma, dopo avere esagerato varj difetti minutissimi, o nulla di meglio propongono, o prescrivono cose aliene dall' uso Ecclesiastico, e perciò altre volte rigettate, come attesta Gregorio XIII. nella sua Costituzione al Calendario prefissa: *Quod rationes emendandi Calendarii, quæ à Cœlestium motum peritis proponebantur propter magnas, & ferè inestricabiles difficultates, quos hujusmodi emendatio semper habuit, neque perennes erant, neque antiquos Ecclesiasticos Ritus incolumes (quod in primis hac in re curandum erat) servabant*. Una ingegnosa, e comoda costruzione del Calendario Gregoriano ha dato il dottissimo P. Orazio Borgondi della Compagnia di Gesù l'anno 1729.

Fine della Prima Parte.

PAR-

Capo P.° Articolo 9.

Fig. P.ª

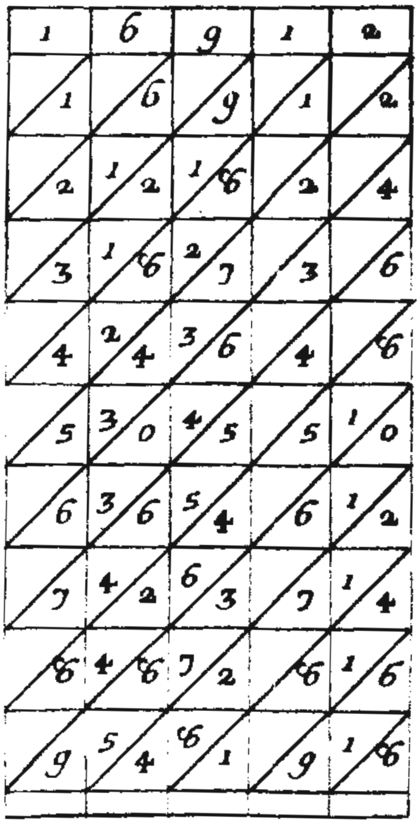
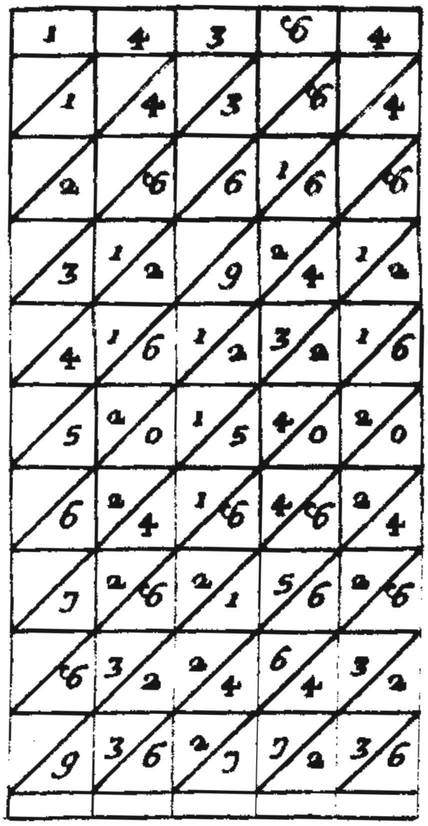
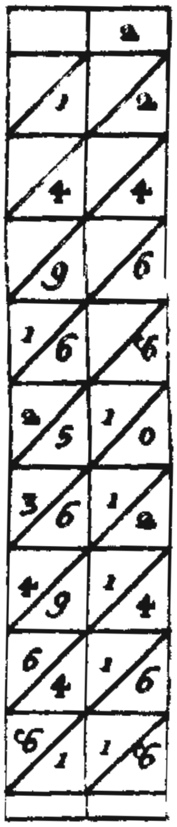


Fig. 2.ª



Alle R.Q.F. 3.ª



Alle R. Cubo F. 4.ª

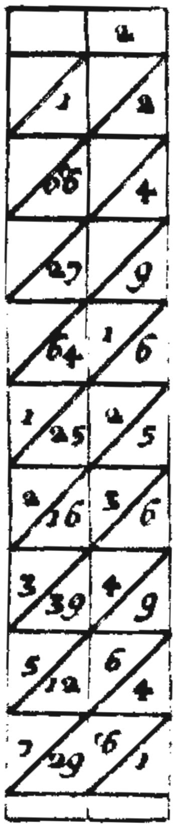


Fig. 5.ª

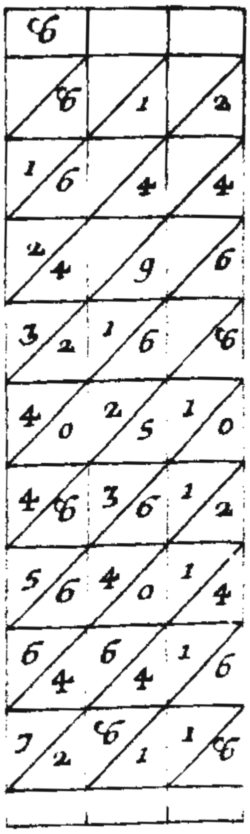
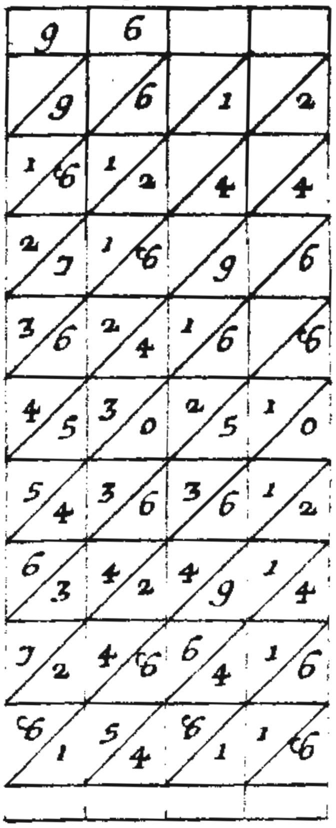
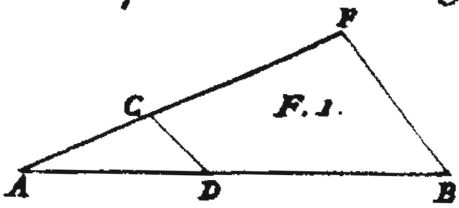
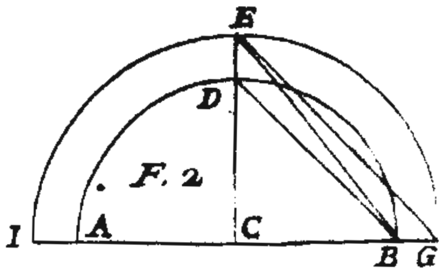


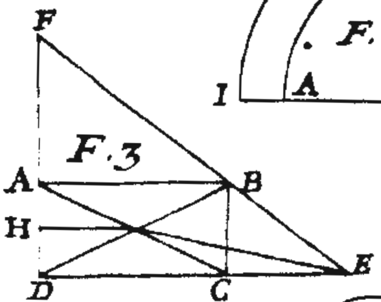
Fig. 6.ª

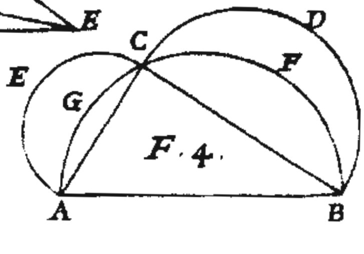


Capo 4. Articolo 9.









PARTE SECONDA
Dell'Aritmetica Speciosa.

CAPO PRIMO.
Del Calcolo Algebraico.

ARTICOLO PRIMO.
Nozioni preliminari a questo Calcolo.

1. SE si osservano le memorie degli antichi Scrittori delle Matematiche, l'Algebra, che al presente è in uso, si giudicherà essere stata agl' istessi affatto incognita. Ma se si esaminano le loro ingegnosissime invenzioni, le acerrime dimostrazioni delle verità più astruse, ed involte entro le tenebre di poco meno, che imperscrutabili proprietà del suo oggetto, non si potrà a meno di non confessare essere stata la nostra Algebra, anche all'erudita Antichità conosciuta. E di fatto Pappo Alessandrino Collettore molto avveduto delle cose Matematiche nel VII. libro ci dà indizj assai manifesti, che Euclide, Apollonio, Aristeo, Sereno, Archimede, ed altri chiarissimi lumi di que' secoli sapessero vera-

mente la ſcienza Analitica : *Reſolutio igitur eſt via*, ſono ſue parole, *à quæſito tanquam conceſſo per ea, quæ deinceps conſequuntur ad aliud conceſſum in compoſitione: In reſolutione enim id, quod quæritur tanquam factum ponentes, quid ex hoc contingat conſideramus; & rurſum illius antecedens, quouſque ita progredientes incidamus in aliquod jam cognitum, vel quod ſit è numero principiorum*. Il che, e nulla più è il procedere degli Algebriſti. E pure ne i libri degli Antichi parola di queſta ſcienza non trovaſi, forſe perchè un ſuperſtizioſo riſpetto li tratteneva a non divulgare una ſcienza creduta capace di rendere gli uomini uguali agli Iddii. Diofanto Aleſſandrino forſe meno ſcrupoloſo degli altri ſi avanzò a dare alcuni elementi dell'Algebra numerica, e ſciolſe con maniere leggiadre varie bizzarre, e dilettevoli queſtioni.

2. Quella parte d'Algebra, che quì ora noi intraprendiamo a ſpiegare, conſiſte in tre operazioni, o ſiano meditazioni, cioè Denominazione, Equazione, e Riduzione. Mi ſpiego: data qualunque queſtione quella ſempre involve alcune quantità note, ed alcune altre ignote, e queſte tutte come cognite ſi denominano co i caratteri dell'Alfabeto, con queſta differenza però, che le note ſi denominano con le lettere prime a, b, c, d, ecc. e le incognite con le ultime x, y, z, ecc. ſe altre poi ſianvi indeterminate, e di arbitrario valore, tali per le medie m, ed n ſogliono denominarſi.

3. Le coſe poi così denominate ſi paragonano fra loro, e talmente ſi uniſcono mediante alcuni ſegni, che corriſpondano alle circoſtanze richieſte nella queſtione, ſicchè ne riſultino due qnantità fra loro evidentemente eguali, conoſciute tali, o per forza di un qualche aſioma, o di coſa già dimoſtrata.

4. Trovata l'equazione, tanto con le regole del calcolo intorno a queſta ſi opera, finchè le quantità prima incognite ad altre cognite ritroviamo uguali. Che

ſe

se esaminato bene tutto non si ritroveranno tante equazioni, quante sono le incognite, questo sarà segno, che alcune d'esse incognite potranno assumersi d'arbitrario valore, e che la questione data averà infinite soluzioni.

5. I segni, de' quali si servono gli Algebristi per compendio delle loro operazioni introdotti nell'Algebra da Ariotto sono i seguenti.

$+$ Segno di Addizione, che significa PIÙ.

$-$ Segno di Sottrazione, che significa MENO.

$\times$ Segno di Moltiplicazione, che significa IN.

$\frac{a}{b}$ o vero $a:b$, Segno di Divisione, e significa a diviso per b, negli esponenti fratti pongo un punto.

$\div$ Segno di Proporzione, e Progressione Aritmetica.

:: Segno di Proporzione Geometrica, e significa così.

∞ Segno espressivo dell'INFINITO.

$*$ Significa NULLA, o mancanza d'un MEMBRO.

$=$ Segno d'EGUAGLIANZA.

$>$ Segno d'INEGUAGLIANZA, così $a > b$ vuol dire a maggiore di b, ed $a < b$, a minore di b.

$\sqrt{}$ Segno RADICALE, sopra il quale, se non si prefigge numero alcuno, significa radice seconda, se poi vi sia prefisso qualche numero, significa radice di tal potenza, come $5\sqrt[3]{ab}$ denota, che da ab si debba estraere la radice terza, e 'l numero 3 sopra posto al segno radicale si chiama Esponente, e'l numero 5, che precede il detto segno si chiama Coefficiente.

6. Le potenze si scrivono o indicano col numero espressivo di tal potenza, v. g. a^2, a^3, a^4, a^7, vuol dire a sollevato alla potenza indicata dal numero prefisso, così ancora $(a+b)^3$ vuol dire le due quantità a, b sommate, e sollevate alla potenza terza; si esprimono ancora con replicare tante volte la quantità quante unità si ritrovano nell'esponente della potenza, v. g. $aaaa$ vuol dire a^4, perchè le quantità senza segno intermedio significano una per l'altra essere moltiplicata.

7. Alle volte si notano le potenze con l'esponente

negativo, v.g. a^{-2}, e questo vuol dire $a:aaa$, o pure $1:aa$, poichè la divisione delle potenze si fa con la sottrazione degli esponenti, onde $a^3:a^5$ sarà in altra maniera espresso così $a^{3-5}=a^{-2}=1:a^2$.

8. Alle volte ancora si esprimono con una frazione positiva, e vuol dire radice della potenza espressa dal denominatore della frazione, v.g. $a^{1\cdot 2}$ è l'istesso che dire $\sqrt{a}$; $a^{5\cdot 3}$ è l'istesso dire $\sqrt[3]{a^5}$ ecc. perchè l'estrazione delle radici si fa per la divisione dell'esponente della quantità, da cui si ha da estraere la radice, per l'esponente del segno radicale.

9. Che se la frazione sarà negativa, v. g. $a^{-1\cdot 3}$ significherà $\sqrt[3]{1:a}$, perchè $1:a$ è l'istesso che dire $a:a^2$, cioè a^{1-2}, cioè a^{-1}, dunque dividendosi l'esponente meno uno per l'esponente del segno radicale, che è 3, verrà $a^{-1\cdot 3}$. Tutto ciò bene si osservi, perchè ha uso perpetuo in tutti i calcoli della speciosa, e singolarmente ne' calcoli differenziali, ed integrali, come a suo luogo vederemo.

ARTICOLO II.

Regole del Calcolo nelle quantità semplici.

1. LE regole del Calcolo nell'Algebra non sono diverse dalle regole numeriche in altro, che nella maniera de' segni; così se si ha da sommare a con a, si dirà $a+a$, o vero $2a$, e se si dovrà sommare a con b, si dirà $a+b$, ma sommandosi a con $-a$ la somma sarà $a-a$, cioè $*$; in somma tutte le quantità, che si sommano, si dispongano in linea retta con gl'istessi segni, che hanno; che se molte quantità simili vi siano, quelle si uniscano in una col numero espressivo della loro quantità, v.g. $3a+ab$ con $2ab-2a$, la somma sarà $a+3ab$, perchè li $3a$ sommati con meno $2a$ fanno a, ed ab con $2ab$ fa $3ab$.

2. Il

2. Il ſottraere ſi fa mutando i ſegni alle quantità da ſottraerſi in ſegni contrarj, cioè alle quantità, che hanno il ſegno $+$ ſi dia il $-$, e per lo contrario a quelle, che hanno il ſegno $-$ ſi dia il $+$, e poi ſi diſpongano in linea retta con le altre, v. g. da $3a+b-2d$ ſi hanno da ſottraere $2a+b-sc$, ſtaranno così, fatta la ſottrazione $3a+b-2d-2a-b+sc$, cioè riducendo le ſimili $a-2d+sc$.

3. Nel moltiplicare ciò, che è da notarſi bene, è il prodotto de' ſegni, cioè $+\times+$ fa $+$, $-\times-$ fa $+$, ma $+\times-$, e $-\times+$ fanno $-$. Ciò ſi deve dimoſtrare, e primo, che $-\times+$ fa $-$. Si prova, ſia da moltiplicarſi $a-b$ per c, dico, che ſi averà $ac-bc$. Si faccia $a-b=d$; dunque aggiungendo ad ambedue le parti il b, ſi averà $a=d+b$, e moltiplicando ambedue le parti per c ſi averà $ac=cd+cb$, e togliendo d'ambe le parti cb ſi averà $ac-ca=cd$; che ſi dovea provare. Nell' iſteſſo modo ſia da moltiplicarſi $-\times-$ dico, che farà $+$. Lo provo. Si debba moltiplicare $a-b$ per c, dico, che ſi avrà $-ac+cb$. Si faccia $a-b=d$; dunque aggiungendo da ambe le parti il b, ſi averà $a=d+b$, ſi moltiplica tutto per $-c$ ſi averà per quello, che ora abbiamo detto $-ac=-dc-bc$, ed aggiungendo ad ambe le parti bc ſi averà $bc-ac=-dc$; che ſi dovea dimoſtrare.

4. Ciò poſto, la moltiplicazione ſpecioſa ſi fa all'uſo de' numeri. Si pongano le quantità da moltiplicarſi una ſotto dell'altra; di poi ciaſcun membro della quantità inferiore ſi moltiplica per ciaſcun membro della quantità ſuperiore, e poi ſi raccolgono i fatti in una ſomma. Si avverta di mano in mano, che ſi vanno ſegnando i prodotti, di aggiungervi il ſegno, che loro compete; per moltiplicare le potenze d'una ſteſſa radice ſi ſommano gli eſponenti con la ſteſſa radice, v. g. $a^3\times a^5$ fa $a^{3+5}=a^8$, ed in genere $b^m\times b^n=b^{m+n}$.

5. La diviſione ſi fa con interporre una linea tra 'l diviſore, e 'l dividendo ad uſo delle frazioni, così ſe ſi deb-

debba dividere ab per c si farà così $ab:c$, ma se si dovesse dividere ac per c si scriverebbe pur così $ac:c$, che sarà uguale ad a, perchè quando nel divisore è una quantità, che in tutti i membri del divisore si ritrova, si cancella dappertutto, e così $(ab-ax-a^2+a):(ab+a^2)=(b-x-a+1):(b+a)$, poichè la quantità a trovasi in tutti i membri del divisore, e del dividendo. Ho posto $+1$, perchè $a:a=1$. Dal che si ricava, che nelle potenze divise per un'altra potenza si sottrae dall'esponente del dividendo l'esponente del divisore, e 'l residuo è l'esponente del quoziente, quando però le radici siano simili, v. g. $a^5:a^3=a^2$, perchè $a^5=aaaaa$, ed $a^3=aaa$, dunque sarà $aaaaa:aaa=aa$ cancellando sopra, e sotto gli eguali.

6. Se si abbia da dividere una quantità complessa, o composta per un'altra complessa, in tal caso s'opera, come ne i numeri, e regola data al Capo I. Parte I. Art. 6. num. 6. Si considerino i due seguenti esempj, ne i quali spiegasi tutto ciò, che in questa regola occorre; nel primo per dividere $a^2-ac-ab+bc$ per $a-c$, dico a^2 diviso per a viene a, pongo a nel quoziente, poi per questo a moltiplico tutto il divisore fa a^2-ac, lo sottraggo dal dividendo, e resta $*$, similmente seguito la divisione

$$a-c\ )\ a^2-ac-ab+bc\ (\ a-b\ .\ \textit{Quoziente}.$$
$$\underline{a^2-ac-ab+bc}$$
$$*\quad *\quad *$$

di $-ab$ per a ne viene $-b$ pongo $-b$ nel quoziente, poi fatta la moltiplicazione, e sottrazione resta $*$; dunque ecc.

ALTRO ESEMPIO.

$$a^2+ab\sqrt{2}+b^2\ )\ a^4+b^4\ (\ a^2-ab\sqrt{2}+b^2$$
$$\underline{a^4+a^3b\sqrt{2}+a^2b^2}$$
$$*-a^3b\sqrt{2}-a^2b^2+b^4$$
$$\underline{-a^3b\sqrt{2}-2a^2b^2-ab^3\sqrt{2}}$$
$$*\ a^2b^2+ab^3\sqrt{2}+b^4$$
$$\underline{a^2b^2+ab^3\sqrt{2}+b^4}$$
$$*\quad *\quad *$$

Dalla

Dalla sola ispezione potrà apparire la maniera di questa divisione, cioè $a^4:a^2=a^2$, e questo moltiplicato per tutto il divisore produce la quantità nell' esempio sotto scritta, la quale si deve sottraere dal dividendo, e segnare il residuo, come vedi, e così si seguiti.

7. Non voglio io quì per ora confondere il principiante con la divisione delle quantità per altre di diversa denominazione, nascendo da ciò un quoto infinito uguale al vero quoto finito, sì perchè ciò appartiene al calcolo degl' infiniti, e presuppone notizia delle serie, sì perchè nelle cose seguenti per ora non averemo di tal notizia bisogno.

8. Ora passiamo all' estrazioni delle radici quadra, e cubica, che delle altre non ve ne è l'uso sì frequente, che se pur capitasse col metodo, con cui si estraggono queste, facilmente anche quelle potranno estraersi. Sia bene dunque ripetere la nozione di queste cose. Quando una quantità complessa, o incomplessa è moltiplicata in se stessa, il prodotto si chiama quadrato, e quella quantità radice del quadrato, o radice seconda, e se questo quadrato si moltiplica per la sua radice il prodotto si chiamerà cubo, e di questo cubo la radice si dirà cubica, o terza; così se questo cubo si moltiplica per la sua radice il prodotto si dirà potenza quarta, e la sua radice, quarta ecc. onde a è radice seconda di a^2, terza di a^3, quarta di a^4, quinta di a^5 ecc. ed a^2, a^3, a^4, a^5 ecc. si chiamano potestà di a.

9. Sia $a^2+2ab+b^2$ da estrarne la radice. Si prenda del primo membro a^2 la radice, che è a, e si segni da parte; poi si raddoppi, fa $2a$ si divida per questo doppio l'altro termine $2ab$, viene b, si segni questo dopo il primo membro della radice trovato; quindi quadrato questo secondo membro, e sottratto resta $*$, sicchè la radice sarà $a+b$, che moltiplicata in se stessa restituisce il quadrato proposto, così se fosse $a^2+ab+bb:4$, si troverà similmente la radice essere $a+b:2$. Così ancora per la

ra-

radice di $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ si farà così. Prendasi la radice d'un membro quadrato, si noti da parte, e poi per il doppio d'essa si dividano tutti i prodotti, che si possono dividere appunto, ed il quoziente s'aggiunga alla prima radice, e dal dato quadrato si tolgano tutti i prodotti del doppio della radice nel quoziente, e di più il quadrato del quoziente ultimamente trovato. Se non rimane altro, la radice sarà trovata. Nel dato esempio eccola. Prendo a radice di a^2, e segno a da parte, la raddoppio fa $2a$, e per $2a$ divido tutti i termini, che si possono dividere senza avanzo, i quali sono $2ab+2ac$, viene il quoziente $b+c$, il quale segno dopo a; moltiplico questi per $2a$, poi li quadro, tutto tolgo dal numero dato, e sarà finita l'operazione, come siegue

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+cc \; (\underline{a+b+c} \\ \underline{a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+cc} \\ \quad * \qquad\quad * \qquad\quad * \end{array}$$

10. Per cercare la radice cubica si faccia nell'istessa maniera. Si prenda la radice cubica d'un termine di quelli, che sono nel cubo dato, e si scriva a parte; di poi per il triplo del suo quadrato si dividano tutti i prodotti senza resto, e'l quoziente si scriva appresso la prima radice, si tolgano poi dal cubo dato i prodotti divisi, e si tolgano ancora tre prodotti dalla prima radice per il quadrato del quoziente ultimo trovato, e di più si tolga il suo cubo; se non rimane altro, la radice è trovata. Ecco l'esempio.

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+1ab^2+b^3+3a^2c+3bcc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3)\; a+b+c \\ \underline{a^3} \qquad\qquad\qquad\quad * \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad * \\ * \end{array}$$

11. Ma se non si potessero estraere le radici delle quantità come di ab allora si adoprano i segni radicali, e si dirà $\sqrt{ab}$, o vero $\sqrt[3]{ab}$ &c.

12. Per le frazioni Algebraiche il calcolo non è diver-

verso dalle cose dette alla Parte Prima Capo 2. brevemente però riassumo quì alcune cose. Si riduce una grandezza composta d' una grandezza intiera, e d'una frazione ad una sola frazione, si moltiplichi l' intiera per il denominatore della frazione, ed al prodotto si aggiunga il numeratore della frazione, e tutto questo si ponga sopra la riga, e sotto essa si ponga il denominatore comune; così $a + \frac{bd}{c} = \frac{ac + bd}{c}$.

13. Due frazioni, v.g. $a:b$, $c:d$ si ridurranno allo stesso denominatore, moltiplicando il numeratore, e 'l denominatore della frazione $a:b$ per d denominatore dell'altra, e sarà $ad:bd$, e parimente il numeratore, e'l denominatore della frazione $c:d$ per b denominatore dell'altra, sarà $bc:bd$, onde le due frazioni $ad:bd$, $bc:bd$ hanno lo stesso denominatore bd; che poi riserbino l'istesso valore, è chiaro, perchè $ad:bd = a:b$ per il numero 5. e $bc:bd = c:d$. Ora e sommare, e sottraere così ridotte si potranno facilmente, sommando, o sottraendo i loro numeratori.

14. Si moltiplicano, e dividano le frazioni, ed ogn' altra operazione si fa, come insegnammo al Capo 2. nè quì viene cosa alcuna di più da notarsi; se non che la divisione delle frazioni fa conoscere la loro proporzione, cioè $a:b$ per $c:d$ il quoziente $ad:cb$ esprime la proporzione, che è tra $a:b$, e $c:d$, come a suo luogo si farà manifesto.

ARTICOLO III.

Calcolo delle quantità affette, o siano Incomensurabili.

1. Quelle grandezze, che sono involte ne' segni radicali, diconsi incomensurabili, perchè non si possono esattamente determinare con una espressione semplice. Ne i numeri è chiaro, che $\sqrt{18}$ è in-

incomensurabile, perchè non trovasi un numero, che l'esprima, dal che ne segue, che non ha con altro numero alcuna contenenza, che esprimere si possa di numero a numero ciò, che s'intende incomensurabiltà, così ancora $\sqrt{ab-bb}$ è incomensurabile con qualunque altra quantità esprimibile. Di queste quantità proponiamo il calcolo.

2. Se siano date due quantità incomensurabili sotto qualunque segno radicale di diverso esponente, si possono ridurre ambedue sotto segni d'eguale esponente, v. g. $\sqrt{2ab}$, e $\sqrt[3]{4ab^2}$. Si moltiplicano gli esponenti 2×3 fa 6, e questo sarà l'esponente comune, poi la quantità, che sta sotto un'esponente, si eleva alla potenza espressa per il segno, o sia esponente dell'altra quantità, e ciascun prodotto si ponga sotto al segno $\sqrt[6]{\ }$, onde si dovrà nel caso nostro quadrare $4ab^2$ fa $16a^2b^4$, e fare il cubo di $2ab$ fa $8a^3b^3$ ciascuna di queste poste sotto al segno viene $\sqrt[6]{16a^2b^4}$, e $\sqrt[6]{8a^3b^3}$ ambe uguali alle prime date.

3. Nota primo, che se un'esponente sarà divisore esatto d'un'altro, si potrà dividere il maggiore per il minore, e poi la quantità sotto al segno della minore si elevi alla potenza indicata dal quoziente, e tal potenza si ponga sotto al segno coll'esponente della maggior quantità, v. g. $\sqrt[3]{2ab}$, e $\sqrt[6]{4ab^2}$ divido l'esponente 6 per 3 ne viene 2, dunque quadro $2ab$ fa $4a^2b^2$, e lo pongo sotto al segno di sesta potenza, starà così $\sqrt[6]{4a^2b^2}$, e per conseguenza l'altra quantità $\sqrt[6]{4ab^2}$ resta nell'esser suo.

4. Nota secondo, che se un'esponente non dividerà esattamente l'altro, potrà nulla di meno tal volta avere una comune misura; allora si trovi questo divisore comune, per cui si divida il fatto d'ambedue gli esponenti,

e'l

e'l quoziente ſarà l'eſponente comune d'ambedue le radici. Ora ſi troverà la potenza, a cui devono elevarſi ambedue le quantità ſotto al ſegno, cioè ſi divida l'eſponente comune trovato per l'eſponente di ciaſcuna quantità data, i quozienti ſaranno indicj delle poteſtà, a' quali devono ſollevarſi le quantità ſotto a i ſegni, v. g. $\sqrt[4]{2ab}$, e $\sqrt[6]{4ab^2}$ trovo la comune miſura, che è 2, poi moltiplico 4 per 6 fa 24, e divido queſto per 2 ne viene 12, ed ecco l'eſponente comune; ora queſto diviſo per 4 viene 3, dunque $2ab$ dovrà elevarſi alla potenza terza, e diviſo per 6 vien 2, dunque $4ab^2$ dovrà ſollevarſi alla potenza ſeconda, e ſtarà così $\sqrt[12]{8a^3b^3} = \sqrt[4]{2ab}$, e $\sqrt[12]{16a^2b^4} = \sqrt[6]{4ab^2}$.

5. Per ridurre poi un' incomenſurabile all'eſpreſſione più ſemplice, che ſi poſſa, ſi prenda il più grande quadrato, o cubo, o oltra potenza determinata dal ſegno, e con eſſo ſi divida la grandezza, che è ſotto al ſegno, e 'l quoziente ſi ponga ſotto al detto ſegno, e la radice della potenza ſi ponga avanti al ſegno, v. g. per ridurre $\sqrt{75}$, prendo 25, che è il più gran quadrato, che divide 75, ed è 3 il quoziente, lo pongo ſotto al ſegno, ed avanti al ſegno pongo il 5 radice di 25, così $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. Per ridurre $\sqrt[3]{81}$ prendo 27, che è il più gran cubo, che divida 81, il quoziente è 3, che lo pongo ſotto al ſegno di terza potenza, e li pongo avanti per coeficiente 3 radice cubica di 27, così $3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81}$. Per rimettere le quantità fuori del ſegno, o ſiano coeficienti ſotto eſſo ſegno, ſi operi all' oppoſto, cioè ſollevandole alla potenza indicata dal ſegno, e poi ſi moltiplichi per la quantità ſotto eſſo ſegno, così $12\sqrt{2} = \sqrt{288}$.

6. Per ridurre $\sqrt{a^3b}$, prendo il quadrato a^2 per diviſore, dà per quoziente ab, pongo ſotto al ſegno, ed avanti eſſo ſegno la radice di a^2, ſarà $a\sqrt{ab} = \sqrt{a^3b}$, così

ancora per ridurre $\sqrt{aac+2abc+bbc}$, il più grande quadrato diviſore è $a^2+2ab+bb$, il quoziente c reſta ſotto al ſegno, e fuori la radice $a+b$, dunque ſarà $\overline{a+b}\sqrt{c}=\sqrt{aac+2abc+bbc}$, che ſe non ſi trova alcuna potenza eſpreſſa dal ſegno, che divida appunto la quantità ſoggetta al ſegno, non ſi potrà ridurre ad eſpreſſione più ſemplice.

7. Se foſſero frazioni incomenſurabili, il quadrato del numeratore ſi divida per la quantità ſotto al ſegno del denominatore, e poi tutto ſi metta ſotto un ſol ſegno, come $\sqrt{ab^2}:\sqrt{cd^2}=\sqrt{a^2b^4:cd^2}$. E' da notarſi, che due incomenſurabili poſſono tra loro eſſere comenſurabili, e ſono in caſo, che ridotti, ſia in ciaſcuno una ſteſſa quantità ſotto al ſegno, come ſarebbero $\sqrt{a^3b+a^2b^2}$, $\sqrt{c^2ab+c^2b^2}$, i quali ridotti, il primo è $a\sqrt{ab+b^2}$, il ſecondo è $c\sqrt{ab+b^2}$, che ſtanno come $a.c$.

8. In due maniere ſi può conoſcere, ſe due quantità incomenſurabili ſiano tra loro comenſurabili, o come ancora dir ſi ſuole comunicanti, cioè colla moltiplicazione, e colla diviſione. E primo ſe le radici ſono di potenza ſeconda, v.g. $\sqrt{2}$, e $\sqrt{8}$ ſi moltiplicano le quantità ſotto al ſegno, e ſe riſulterà quadrato, ſi concluderà eſſere comenſurabili, altrimenti non lo ſarebbero; nel caſo dato 2×8 fa 16, che avendo per radice 4 dinota le due date radici eſſere comunicanti; ſe poi ambe ſiano d'un' altro eſponente maggiore; allora una di eſſe ſi eleva alla potenza un grado minore dell' eſponente comune, e queſta ſi moltiplica per l'altra quantità ſotto al ſegno, e ne deve venire un prodotto, che ſia razionale in quella potenza, che eſprime il ſegno, v. g. $\sqrt[3]{2}$, e $\sqrt[3]{54}$, poichè gli eſponenti ſono di terza potenza, e levo una delle quantità, che ſono ſotto al ſegno alla po-

tenza

tenza ſeconda, v.g. il 2 fa 4, e lo moltiplico per 54 numero ſotto all' altro ſegno, fa 216, di cui radice terza è 6, dal che raccolgo le due radici propoſte eſſere comunicanti; ſimilmente ſe foſſero gli eſponenti di quarta potenza, una delle quantità ſi ſolleva alla terza, e ſi moltiplica per l'altra ecc.

9. Molto più facilmente ciò ſi conoſce colla diviſione delle quantità ſotto al ſegno, che ſe elle daranno un quoziente razionale riſpettivamente alla potenza eſpreſſa per il ſegno comune, ſaranno le date radici comunicanti, e queſto in tutte le potenze ſenza eccezione alcuna, v.g. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$, divido il 27 per 3 dà 9 numero quadrato. $\sqrt[3]{2}$, e $\sqrt[3]{54}$, divido 54 per 2 dà 27 numero cubo ecc. dunque ambedue ſono comunicanti. Dicaſi l'iſteſſo, ſe il quoziente in numeri ſarà con frazione, purchè ſia quadrato, v.g. $\sqrt{8}$, e $\sqrt{18}$, il quozienre di 18 diviſo per 8 è $\frac{9}{4}$, la di cui radice è $\frac{3}{2}$, o pure per il contrario, ſe ſi divide 8 per 18, il quoziente ſarà $\frac{4}{9}$, la di cui radice è $\frac{2}{3}$, onde anche eſſe ſaranno comenſurabili. Si poſſono eſemplificare tutte le ſudette pratiche, anche nelle quantità Analitiche, come ogn' uno per ſe medeſimo potrà fare.

SOMMARE, E SOTTRAERE GL'INCOMENSURABILI.

10. Si riducano le quantità incomenſurabili per il numero 2. e 5. e ſe ſono comenſurabili ſi ſommano le quantità, che ſono avanti a i ſegni, e la loro ſomma ſcrivaſi avanti al ſegno, v.g. $\sqrt{75}+\sqrt{27}$ ridotte ſono $5\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$; dunque ſommate ſaranno $8\sqrt{3}$, e così $\sqrt{75}-\sqrt{27}$ verrà $2\sqrt{3}$. La ſteſſa regola è del ſottraere mutando i ſegni alla quantità, che ſi ſottrae.

MOLTIPLICARE.

11. Si moltiplicano sì le quantità, che ſtanno fuori, sì quelle, che ſtanno ſotto al ſegno, e ſarà fatto il prodotto, v.g. $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5}$, farà $6\sqrt{15}$, che, ſe ſono comenſurabili, il ſegno ſvanirà, ciò ricerca dimoſtrazione. Siano da moltiplicarſi $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$, dico il loro prodotto eſſe-

eſſere $\sqrt{ab}$; ſi prova, ſia $\sqrt{a}=r$, e $\sqrt{b}=t$, dunque $a=r^2$, e $b=t^2$, onde $ab=rrtt$, e però $\sqrt{ab}=\sqrt{rrtt}=rt=\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. Che ſi dovea provare.

DIVIDERE.

12. Dividanſi le quantità sì fuor del ſegno, sì ſotto al ſegno del dividendo per le quantità fuori, e ſotto al ſegno del diviſore; e ne verrà il quoziente, come $32\sqrt{6}$ diviſo per $4\sqrt{2}$ ſtarà così $\frac{32}{4}\sqrt{\frac{6}{2}}=8\sqrt{3}$, che ſe ſaranno comenſurabili, il ſegno ſvanirà. Si dimoſtra come ſopra nel moltiplicare.

13. Se il diviſore ſarà un binomio, ſi moltiplicherà il diviſore, e 'l dividendo per il contrario del diviſore: onde il diviſore ſi ridurrà ad un monomio, per cui tutto il dividendo prodotto col ſudetto contrario andrà diviſo, v. g. $\sqrt{21}+\sqrt{80}$ ſi ha da dividere per $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, moltiplico ambedue per $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ contrario del diviſore, e 'l prodotto $\sqrt{105}+20-\sqrt{42}-\sqrt{160}$, divido per 3 prodotto del diviſore, ſtarà così $\frac{1}{3}\sqrt{105}+6\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{42}-\frac{1}{3}\sqrt{160}$.

REGOLA PER TROVARE I CONTRARJ.

14. Il contrario d'una quantità incomenſurabile è quella quantità, per cui l'incomenſurabile moltiplicata produce un altra quantità comenſurabile, eſſendo le quantità incomenſurabili eſpreſſe, o in monomj, o in binomj, o in trinomj ecc. ſi deve dare la regola per trovare a tutti queſti il contrario, e prima per i monomj. Si elevi la quantità ſotto al ſegno alla potenza eſpreſſa dall'eſponente del ſegno meno uno, e queſta ſotto l'iſteſſo ſegno poſta ſarà il contrario cercato, v.g. il contrario di $\sqrt{a}$, è $\sqrt{a}$, perchè la quantità ſotto al ſegno, dovendoſi elevare alla potenza 2 meno uno, non ſi muta; il contrario di $\sqrt[3]{a}$, è $\sqrt[3]{a^2}$, di $\sqrt[3]{a^2}$, è $\sqrt[3]{a^4}$ ecc. Nota, che l'eſponente della potenza ſotto al ſegno, quando è diviſibile per l'eſponente della potenza, a cui ſi deve inalzare, in vece di alzarla, ſi potrà abbaſſare per la diviſione degli eſponenti; così il contrario di $\sqrt[3]{a^2}$ è non ſo-

solamente $\sqrt[3]{a^4}$, ma ancora $\sqrt[3]{a}$; così ancora $\sqrt[4]{a^9}$ ha per contrario non meno $\sqrt[4]{a^{27}}$, che $\sqrt[4]{a^3}$, poichè non meno moltiplicandosi $\sqrt[4]{a^9}$ per $\sqrt[4]{a^{27}}$ si produce un razionale, che è $\sqrt[4]{a^{36}}$, che moltiplicandosi per $\sqrt[4]{a^3}$ produca $\sqrt[4]{a^{12}}$, la di cui radice quarta è a^3, siccome di a^{36} la radice quarta è a^9.

15. Per i binomj si troverà il contrario, se prima si muta il segno ad un suo membro in segno contrario, cioè $+$ in $-$, o vero $-$ in $+$, e poi si alzino ambedue le quantità alla potenza indicata dall'esponente del segno un grado meno, quindi si cancellino tutti i coefficienti, sarà questa la quantità contraria cercata, v. g. il contrario di $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; per ritrovare il contrario di $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, essendo l'esponente 3, si dovrà le quantità $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ mutato il segno, una delle due sollevare alla potenza seconda; il che fatto, e cancellati i coefficienti, viene $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ quantità contraria della sudetta $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

16. Se un membro del binomio sarà razionale, v. g. $a+\sqrt[3]{b}$ si farà l'istesso, facendo il quadrato di $a-\sqrt[3]{b}$, che è cancellati i coefficienti $a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$, o pure $\sqrt[3]{b}-a$ quadrato darà per contrario $\sqrt[3]{b^2}-a\sqrt[3]{b}+a^2$. Vedasi la seguente Tabella, in cui i contrarj d'alcuni binomj si presentano per esercizio de' studiosi.

Divisori.	*Contrarj.*
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$
$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$	$\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}$
$\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}$	$\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}$
$\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$	$\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}+\sqrt[6]{b^5}$

17. Per

17. Per i trinomj più rade volte accade doverſi indagare i contrarj; nulla di meno ecco la regola. Si muta un ſegno d'un termine del trinomio, e ſi moltiplica per il detto trinomio, verrà un prodotto di termini razionali, fuorchè uno; di queſto conſiderato come binomio ſe ne trovi il contrario per il numero 15; e ſarà il contrario ancora del trinomio dato; così il contrario di $\sqrt{a}+\sqrt{b}+c$ mutato il ſegno al membro $\sqrt{b}$ ſarà $a-b+c^2+2c\sqrt{a}$. Se di maggiori polinomj ſi vogliono i contrarj, il che è caſo rariſſimo; ſi veda Ozanam. nella ſua Algebra, ove ha molto bene eſpoſto il metodo dell'Inventore Nicolò Tartaglia nell'Aritmetica Parte 2. Lib. 12.

18. Prima di paſſare più oltre devo avvertire una maniera d'eſprimere le radici ſenza i ſegni, la quale è utiliſſima. Siccome per ſollevare a qualunque potenza una data potenza, o quantità, v. g. a^2 ſi moltiplica il ſuo eſponente per l'eſponente di queſta potenza, a cui ſi vuole elevare, v. g. alla potenza terza, a^2 cubato, fa a^6, così a^4 ſollevato alla potenza quinta fa a^{20}, ora per il contrario volendo di queſte eſtraere qualunque radice, ſi dividerà tale eſponente della potenza data per l'eſponente della radice, che vuolſi eſtraere come $\sqrt[3]{a^6}=a^{6.3}=a^2$, che ſe ſi voleſſe la $\sqrt[3]{a^2}$ ſi averebbe per eſponente una frazione $a^{\frac{2}{3}}$. E generalmente $\sqrt[m]{a+b^2}$ ſarà $\overline{a+b^2}^{\frac{1}{m}}$ ecc. S'avverta, che $\sqrt[3]{3a^5}$, v. g. non ſi può dire $3a^{5.3}$ a cagione del coefficiente, ma deve dirſi $\overline{3a^5}^{\frac{1}{3}}$, e così delle altre.

19. Per prendere la radice d'un altra radice, v. g. $\sqrt[3]{}$ di $\sqrt[2]{}$ ſi ſegna così $\sqrt[3]{\sqrt{ab^2}}$, overo $\sqrt[3]{b\sqrt{a}}$, overo $\sqrt[6]{ab^2}$, cioè ſi moltiplicano gli eſponenti de i ſegni dati, e viene il nuovo ſegno col ſuo eſponente; ma ſe ſi debba prendere la radice d'un binomio, o moltinomio, in cui ſianvi uno, o più ſegni radicali, allora non potrà tutto metterſi ſotto d'un ſol ſegno: v.g. ſe ſi debba prendere la

ra-

radice di $a+\sqrt{b}$ non si potrà esprimere in altra forma, che così $\sqrt{\overline{a+\sqrt{b}}}$.

20. E' chiaro, che siccome dovendosi dividere una potenza d'una quantità per un'altra potenza della stessa quantità, v.g. a^3 per a^2, si devono sottraere gli esponenti così $a^{3-2}=a^1$; così se il divisore sarà uguale al dividendo, v. g. se a^3 debba per a^3 dividersi, verrà $a^{3-3}=a^0$, onde a^0 sarà 1, ed a^3 diviso per a^5 darà per quoziente $a^{3-5}=a^{-2}$, cioè $=1:a^2$. Ora se di queste potenze di esponente negativo se ne voglia estraere una qualche radice, v. g. $\sqrt[3]{a^{-2}}$ si potrà anche esprimere così $a^{-2.3}$, cioè la radice terza di $1:a^2$. Che se, se ne volesse la radice seconda, verrebbe $\sqrt{a^{-2}}=a^{-2.2}=a^{-1}=1:a$. Art. 1.

21. Se si debba dividere a per $\sqrt{bc}$ starà così $a:\sqrt{bc}$, il quale può mettersi sotto al segno facendo la seguente operazione; $a:\sqrt{bc}=x$; dunque $a=x\sqrt{bc}$, e quadrando $a^2=bcx^2$, ed $a^2:bc=x^2$, e $\sqrt{a^2:bc}=x=a:\sqrt{bc}$, cioè il quadrato del numeratore diviso per la quantità sotto al segno del denominatore, tutto riposto sotto al segno dà la quantità uguale alla frazione data, ed universalmente

$$a:\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{a^m:x}.$$

22. Per estraere le radici dalle quantità irrazionali composte, v. g. si voglia la radice seconda di $10+\sqrt{91}$, si farà così. Si supponga questa essere $x+\sqrt{y}$, sarà $x^2+2x\sqrt{y}+y=10+\sqrt{91}$, ora si facciano i due quadrati $x^2+y=10$, e'l rettangolo $2x\sqrt{y}=\sqrt{91}$; si quadrino ambedue l'equazioni, viene $x^4+2x^2y+y^2=100$, e $4x^2y=91$, e sottraendo questa da quella, resta $x^4-2x^2y+y^2=9$, e prendendo la radice d'ambe le parti, si averà $x^2-y=3$, e perchè $x^2+y=10$, sarà $3+y=10-y$, cioè $y=\frac{7}{2}$, ed $x=\sqrt{\frac{13}{2}}$, onde $\sqrt{\overline{10+\sqrt{91}}}=\sqrt{3\frac{1}{2}}+\sqrt{6\frac{1}{2}}$.

23. Se da un binomio irrazionale composto si debba estraere la radice terza, v. g. da $10+\sqrt{108}$, ponghiamo esse-

essere la radice $x+\sqrt{y}$, sarà il suo cubo $x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y^3}=10+\sqrt{108}$: ora si faccia $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=\sqrt{108}$, sarà $9x^4y+6x^2y^2+y^3=108$; e si facciano gli altri due termini $x^3+3xy=10$; e questi quadrati si averà $x^6+6x^4yy+9x^2y^2=100$, e sottraendo quella da questa equazione resta $x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=-8$, ed estraendo la radice cuba sarà $x^2-y=-2$, cioè $x^2+2=y$, questo valore sostituito nella equazione $x^3+3xy=10$, viene $4x^3+6x=10$, cioè $x^3+\frac{6}{4}x=\frac{10}{4}$; ora togliendo la frazione, e trovando il valore, per quello, che si dirà a suo luogo, si troverà $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}=x$.

ARTICOLO IV.

Calcolo de' segni positivi, e negativi, e delle quantità imaginarie.

1. Le quantità negative nascono dalla sottrazione, poichè dovendosi da una quantità togliere una quantità maggiore, la prima tutta s'annulla, e restavi una quantità, che dovrebbesi levare, e non potendosi si scrive col segno negativo $-$, e chiamasi negativa, come $1-2=-1$. Per dilucidare ciò, che in quest' occorre, pongo alcuni esempj, e poi la soluzione d'alcune difficoltà le più considerabili. E primo Pietro abbia 1, e debba 2 a Paolo: è chiaro, che dando ciò, che ha, non solamente gli resta nulla, ma ancora meno, cioè -1. Ciò non vuol dire, che il meno 1 sia quantità minore del nulla, perchè tal nozione repugna, ma ben vuol dire l'opposto del positivo in ragione di quantità Aritmetica, cioè, che se uno ha tanto di positivo, quanto un' altro di negativo, ambedue insieme hanno nulla, poichè il positivo del primo ragguaglia il negativo del secondo, onde $-1+1=0$, essendo così meno uno distante dal zero, come $+1$ dall' istesso zero, ma di distanza opposta.

Si-

Similmente in un'altra maniera mi spiego: se Pietro da Roma s'incammini verso Frascati, e abbia fatto 5 miglia fuori di Porta Maggiore, si dirà essere andato verso Frascati miglia $+5$, ma se poi torni indietro 3 miglia sarà ito verso Frascati $5-3$, se seguiti a retrocedere, e vada a Ponte Molle 6 miglia, sarà il suo avvicinarsi a Frascati da Porta Maggiore $5-3-6$, sicchè con questo modo di viaggiare si dirà avanzato -4 miglia, cioè non solamente averà annullato il primiero progresso, ma di più in parte contraria sarà ito 4 miglia, sicchè, volendo da Ponte molle di nuovo inviarsi verso Frascati, dovrà porre di positivo prima 4 miglia per ridursi al primo stato di Porta Maggiore, e poi altri 12 per fino al termine, onde giunto a Frascati, dirà egli aver camminato $+5-3-6+4+12=12$. Ma perchè i negativi tutti, ed i positivi sono stati realmente passati, benchè indarno, averà egli fatto 30 miglia, ed ecco come i negativi possono partecipare anche essi del positivo, cioè in una maniera in quanto al fine nulla, e superflua.

2. Se mi si dimanda se tra'l negativo, e'l positivo vi possa essere proporzione, rispondo, che proporzione Aritmetica ottimamente vi si ritrova, senza difficoltà di rimarco; ma il punto sta nella Geometrica, poichè è difficile ad accordare insieme scambievole contenenza in due cose tanto diverse, quanto è il negativo, e'l positivo, ed insieme vedesi alcune regole della progressione con queste adattarsi bene, alcune altre poi non potervisi adoperare. Ora veggiamo da uscire da questo labirinto, in cui gli Autori passano con soverchio silenzio.

3. Prima difficoltà. E' certo che $1.-1::1.-1$, onde per l'Articolo 1. del Capo 4. Parte I. $-1=-1$. Ora come s'accorda, e per qual regola, che anche il fatto sotto i medj sia uguale al fatto sotto gli estremi in quest'altra proporzione $1.-1::-1.1$, cioè $1=1$? Rispondo, che le due quantità $+1$, e -1 in una ispezione sono ineguali,

guali, in un'altra eguali; conſiderate Aritmeticamente ſono ineguali; e'l -1 diſta $+2$ da $+1$: ma ſe ſi conſiderano Geometricamente ſono eguali, poichè la contenenza di $+1$ in -1 è quella ſteſſa di -1 in $+1$, imperocchè una comune miſura x tante volte s'include nel poſitivo $+1$ quante volte s'eſclude del negativo -1, dunque le ſudette ragioni eſſendo d'eguaglianza, benchè diverſe non variano mai proporzione in qualunque modo variate.

4. Seconda difficoltà. Stando $-2.-1::-1.-2$, ſi cerca, ſe $-2.-1$ ſia maggiore, eguale, o minore proporzione di $-1.-2$, cioè qual ſia maggior frazione $=\frac{-2}{-1}$, o pure $=\frac{-1}{-2}$? Riſpondo, che di due quantità negative, quella, che ha maggiore eſpreſſione, è ſempre minore di quella quantità, che ha eſpreſſione minore, v. g. $-4<-1$, e ciò è chiarò, perche il -4, è molto più di ſotto dal nulla, cioè diſta più dal poſitivo, che il -1; ma, eſſendo queſte quantità negative poſte in frazione la maggiore è ſempre della minore maggiore, perchè, ſecondo quello, che abbiamo detto all'Articolo 2. numero 3. la diviſione de' negativi dà ſempre un poſitivo, cioè $-$ diviſo per $-$ fa $+$. Sicchè io ſtimo, che anche $=\frac{-2}{-1}>=\frac{-1}{-2}$, perchè queſti realmente ſono poſitivi, e non negativi, come ſono, v. g. $-3>-4$, perchè i negativi quanto più ſi ſcoſtano ſotto al nulla, tanto più ſono minori, onde riſolverai la ſeguente.

5. Terza difficoltà. Sia $a-b>x$, procedendo ſecondo le regole del calcolo ordinario, ſi trova un paradoſſo, cioè $a-b<x$. Come ſiegue? Aggiungo b d'ambe le parti, viene $a>x+b$, dunque $a-x>b$, ora tolgo d'ambe le parti a, ne viene $-x>b-a$, e mutando tutti i ſegni in ſegni contrarj, ſarà $x>a-b$. Riſpondo, il calcolo procedere ottimamente, finchè ſi fa la mutazione in ſegni contrarj, perchè allora va mutato ancora il ſegno di $>$ in $<$, e la ragione ſi è, che quando una quantità negativa è maggiore d'un'altra pur negativa, allora la mag-

maggiore più si scosta dal positivo, che la minore, come -4 è minore di -2, perchè è più distante il -4 dal positivo, che il -2, ma voltando questi allo stato positivo, è chiaro, che se $-4 < -2$ sarà $4 > 2$, perciò mutandosi i segni di $+$, e di $-$, eziandio mutare si deve il segno di $>$ in $<$, e di $<$ in $>$, che si dovea spiegare.

6. Quarta difficoltà. Sia $1 . -1 :: -1 . 1$, ancora componendo sarà $1-1$, cioè $0 . -1 :: 0 . +1$, cioè il zero ha tanto meno di negativo -1, quanto meno ha l'istesso di positivo, dunque se l'istesso termine averà l'istessa ragione a due altri, quelli saranno uguali fra loro, cioè $-1 = 1$; ma si deve ben notare, che l'antecedente non risguarda l'uno, e l'altro termine secondo l'istesso genere di quantità, cioè una volta negativamente, ed un' altra volta positivamente; laonde nella prima comparazione si ha la ragione di minore ineguaglianza in genere negativo, e nella seconda la ragione di minore ineguaglianza in genere positivo, e l'una, e l'altra minore di qualunque finita, overo ∞, laonde $1 . -1$, sarà più che infinita, cioè di un' infinito positivo minore, e minore, ed un' infinito negativo pur minore, e minore per fino al 0, e -1.

7. Frequentissime volte accade aversi nelle equazioni alcune radici imaginarie, cioè radici di quantità negative, che mai non furono, nè essere possono in natura, anzi ciò, che è mirabile senza sapersi, o intendersi ciò, che elle siano. Per mezzo loro nascono in noi bellissime del pari, che certissime conclusioni. Mi spiego, se si cerchi, quanto abbia Paolo, caso, che si sappia egli avere la radice del prodotto di ciò, che ha Pietro in ciò, che ha Giovanni; e Pietro abbia a, e Giovanni $-a$, il prodotto di queste due quantità è $-aa$, sicchè Pietro averà $\sqrt{-aa}$, che cosa sia ciò, non si sa, nè saprassi giamai, o per dir meglio questa radice non è cosa alcuna. Ma se pure s'insista a chiedere cosa abbia Paolo, cioè se ei abbia qualche cosa di positivo, o vero di negativo, o

pure

pure nulla, non potendosi da ciò uscire, la secca risposta, che egli abbia $\sqrt{-aa}$ non sodisfa punto, perchè non determina nessuno di quei tre stati; nè pure si può dire, che sia in uno stato imaginario, perchè sarebbe un tale stato troppo ingiurioso a Paolo, cioè, che una regola degli Algebristi senza sua licenza lo facesse impazzire; dunque il suo stato ha da essere reale, e vero, e non chimerico, e falso.

8. Rispondo, che Paolo onninamente ha nulla, poichè tra due quantità una positiva, e l'altra negativa può ben darsi il medio Aritmetico, Armonico, e Contrarmonico, ma non mai il Geometrico; onde è affatto chimerico lo stato, o sia avere di colui, che stima aver qualcosa, quando dicesi avere una quantità imaginaria; nè quì può dirsi con profitto cosa alcuna di vantaggio, anzi dico, che vi si getterà ogn'altro pensiero.

9. Nell'Algebra di Nicolò de Martino v'è un'idea giusta della proporzione, quale ancora alle quantità negative egregiamente s'adatta, nè punto discorda dalla dottrina sopra data, cioè, che quelle quantità chiamar si debbano proporzionali, se tutto ciò, che ad uno antecedente si fa, acciocchè al suo conseguente s'agguagli, l'istesse cose far si debbano al secondo antecedente per ragguagliarlo al suo conseguente; onde in tanto sta il 2 al 6, come il -4 al -12, in quanto il 2 tante volte si deve nel suo stato prendere, quante volte il -4 nello stato suo prender si deve per ragguagliare e l'uno, e l'altro a' loro conseguenti. Similmente le dette quantità così variate $2.-4::6.-12$, o in qualunque altra maniera nota, ritengono proporzione fra loro, poichè tante volte il 2 si ha da prendere nello stato contrario per agguagliarlo al 4, quante volte il 6 nello stato pur contrario prendere si deve per agguagliarlo al -2.

10. Dal che si ricava, che non mai può darsi proporzione fra tre termini negativi, ed un positivo, o fra

tre

tre positivi, ed un negativo, in qualunque maniera disposti; onde si dimostra essere impossibile il medio proporzionale tra due termini uno negativo, e l'altro positivo, tra' quali però è ben facile trovarne 2. 4. 6. 8. ecc. ma sempre impossibile 1. 3. 5. 7. ecc. onde tali medj costituiscono il terzo genere di quantità dette imaginarie.

11. Ora venendo alle operazioni del calcolo di queste quantità. Per sommarle, o sottraerle, se siano sotto segni di diverso esponente si riducano per l'Articolo 3. num. 2. e per il num. 5. si trovi se siano comunicanti, e poi si sommino, o sottraggano i loro coefficienti, v. g. $\sqrt{-2}+\sqrt{-18}=1\sqrt{-2}+3\sqrt{-2}=4\sqrt{-2}$; e $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{-3}-1\sqrt{-3}=2\sqrt{-3}=\sqrt{-12}$.

12. Nel moltiplicare, o dividere le radici imaginarie si fanno queste operazioni con le quantità sotto a i segni, e ne viene una nuova quantità alle volte anche reale, ma non mai positiva, se i segni estrinseci saranno simili, onde $\sqrt{-2}\times\sqrt{-18}$, fa $\sqrt{+36}=-6$, ma $\sqrt{-2}\times-\sqrt{-18}=6$, e di tutto ciò eccone la ragione. Ogni quadrato può avere la radice positiva, come negativa, v. g. $\sqrt{36}=6$, e può ancora essere -6, ora quando sono i producenti tal quadrato numeri imaginarj, si prende sempre la negativa, ma se uno di loro fuori del segno è positivo, e l'altro è negativo, perchè il prodotto de' segni estrinseci sempre è negativo, questo fa, che i segni sotto al segno moltiplicando, ed estraendo attualmente la radice, si mutino in segni contrarj, onde $\sqrt{-2}\times-\sqrt{-18}=-\sqrt{36}=6$; si doverebbe veramente prendere -6 per radice di 36, ma a cagione del segno fuori negativo si prende la radice positiva.

CAPO II.

Della riduzione delle Equazioni.

ARTICOLO PRIMO.

Regole per ridurre l'Equazioni del primo grado.

1. I Problemi altri ſono determinati, altri indeterminati, i primi hanno un numero determinato di ſoluzioni, i ſecondi ne hanno infinite. I problemi, che hanno una, due, tre, o più ſoluzioni, diconſi di una, due, tre, o più dimenſioni. Tutti i problemi ſi ſciolgono con l'equazioni, le quali dopo fatta la conveniente denominazione delle quantità date, e cercate, ſi oſſervano le condizioni del problema, e ſecondo quelle ſi determinano l'equazioni, delle quali ſe ſe ne ritrovano tante, quante ſono le incognite, il queſito ſarà determinato, ma ſe non ſi troveranno tante equazioni, quante ſono le incognite, allora il queſito ſarà indeterminato. Trovate dunque tutte l'equazioni del problema dato, ſi cerchi in una di eſſe il valore di una incognita, cioè ſi renda queſta ſolitaria da una parte; e queſto ſuo valore ſi ſoſtituiſca nell'altre, ove queſta incognita ſi rincontra, e tante volte ſi ripeta coll'altre equazioni queſta ſoſtituzione, finchè ſi averà una ſola equazione con una incognita ſola, la quale ſi riduce alla ſua più ſemplice eſpreſſione, e ſi oſſervi a qual grado aſcende l'incognita, e 'l numero di queſti gradi indicherà le dimenſioni, e 'l numero delle ſoluzioni del problema dato. Tutti i problemi ſi devono conſiderare in aſtratto, per rendere ſempre le ſoluzioni univerſali applicabili ad infiniti caſi ſimili, v. g.

2. Pietro, e Paolo interrogati quanti ſcudi aveſſero, riſpoſe Pietro, Paolo ne ha tre volte più di me, e ſe

da

da esso ne toglierai $20=m$ gliene resteranno tanti più di $50=n$, quanti io ne ho meno di 50, si ridurrà il problema in astratto così: si cerca un numero, dal cui triplo levando m, il resto superi n di tanto, quanto egli manca da n, la soluzione sarà $3x-m=n+m$, cioè $x=(n+2m):3$, dove vedi, che m, ed n possono sciogliere qualunque problema proposto sotto altri numeri. Se nel problema non vi siano espresse le condizioni, si devono cercare altrove, come fece Archimede per risolvere il problema della Corona datagli da Jerone Tiranno, che le prese dal peso dell'oro, e dell'argento fuori, e dentro dell'acqua.

3. Si devono osservare nella soluzione d'un problema tre cose. Primo le quantità note, secondo le ignote, terzo le proporzioni, che passano tra le grandezze note, e le ignote; le quantità note si esprimono con le prime lettete a, b, c, d ecc. e le ignote con le ultime x, y, z ecc. come sopra si è detto.

4. Quindi si supponga sciolto il problema, e secondo le condizioni date si considerino le proporzioni, che passano tra le quantità note, e le ignote, dalle quali nasceranno l'equazioni, v. g. si debba dividere talmente il 30, che le parti stiano come 2 a 3, denomino il $30=a$, il $2=b$, il $3=c$, e perchè suppongo il quesito sciolto, chiamo le parti ignote di 30, una x, e l'altra y, ciò posto sarà $x+y=a$, e starà $x.y::b.c$, da cui si cava un altra equazione $cx=by$, Parte I. Capo 4. Art. 1. num. 9. dunque si hanno due equazioni, e due incognite, il che indica il quesito essere determinato, cioè non potersi trovare, che un sol numero per il valore di una incognita, che sodisfaccia, che se fossero più incognite, che equazioni, in tal caso il quesito averebbe infinite soluzioni, cioè l'incognite averebbero infiniti valori.

5. Ora per l'intiera soluzione della sopradetta equazione, bisogna separare le incognite dalle cognite, e fare queste svanire, finchè una resti uguale alle quantità cognite; e così ella ancora sia nota, e poi si sostitui-

tuiſca, e con l'iſteſſo metodo ſi venga in cognizione delle altre ignote. Il che ſi ottiene per traſpoſizione, moltiplicazione, diviſione, eſtrazioni di radici ecc. come ſiegue. Spiego ora ad una ad una le dette maniere di ſciogliere i problemi, quali biſogna renderſi familiari.

6. L'antiteſi, cioe l'addizione, o ſottrazione fa paſſare un membro dell'equazione da una parte all' altra, poichè ſe un membro da una parte dell'equazione ſarà poſitivo, cioè col ſegno $+$, è chiaro, che ſottraendolo da ambe le parti, da una parte ſvanirà, e ſi troverà dall'altra col ſegno contrario, v. g. $x+y=a$ per trasferire y ſi farà $x+y-y=a-y$, cioè $x=a-y$; ſe poi il membro da una parte dell'equazione ſarà negativo, s'aggiunga l'iſteſſo da ambe le parti col ſegno $+$, e ſvanirà da una parte.

7. Il paraboliſmo, o ſia diviſione purga la quantità incognita dai coefficienti, cioè da quelle quantità, che la moltiplicano: così $cx=by$, volendoſi purgare x dal ſuo coefficiente c, ſi dividano ambi i membri per c, ſarà $cx:c=by:c$, cioè $x=by:c$; fu ancora trovato quì ſopra $x=a-y$: dunque ſe tanto $by:c$, quanto $a-y$ ſono uguali ad x, ambi fra loro ſaranno uguali, cioè $a-y=by:c$, onde ſi vede, che purgando l'y in queſta nuova equazione ſi troverà il ſuo valore come ſiegue.

8. Iſomeria, o ſia moltiplicazione libera l'equazione dalle frazioni, allorchè ſi moltiplicano tutti i termini per li denominatori delle frazioni, onde $a-y=by:c$, moltiplicando tutto per c, ſi averà $ac-cy=by$. Ora per trovare y, ſi porti alla deſtra il cy, ſi averà $ac=by+cy$, num. 4. poi per il num. 5. ſi dividano ambi i membri per $b+c$, ſi averà $ac:(b+c)=y$, onde volendoſi x, ſi prenda una delle ſopradette equazioni, ed in luogo di y ſi ſoſtituiſca il ſuo valore, ſi averà x, v. g. nell'equazione $x+y=a$, ſi averà $x+ac:(b+c)=a$, cioè (per il numero 4.) $x=a-ac:(b+c)$. Si avverta, che mutando il ſegno ad una quantità ſi devono mutare a tutte i ſegni in contrarj.

9. Si

9. Si purifica l'equazione per l'estrazioni delle radici, ridotte tutte le quantità incognite da una parte, della equazione, e purgato il massimo membro da ogni suo coefficiente per le regole superiori, si estragga la radice, che indica l'esponente da ambe le parti della equazione, se si può, v. g. sia l'equazione $x^4+2ax^3+a^2x^2=aabb$, estraggo da ambe le parti la radice seconda viene $x^2+ax=ab$: per trovare il valore del x, vedi l'Articolo seguente.

10. Onde se la parte dell'equazione non ha la radice, che si cerca, ma estraendo quella avanza qualche, quantità cognita, allora quell'avanzo, se è positivo, si sottragga, e se è negativo, s'aggiunga da ambe le parti dell'equazione, che così potrà estraersi la radice, e ciò ben si noti, che è utilissima regola per la pratica, v. g, se si vorrà estraere la radice cubica dalla equazione, $x^3+6axx+12ax=abb$ nella radice cubica del membro incognito resta $-8a^3$; dunque aggiungendo questa, quantità da ambe le parti della equazione, si averà la radice $x+2a=\sqrt[3]{(abb+8aaa)}$. Schooten nelle osservazioni sopra Cartesio per rintracciare questa radice batte la via lunghissima della sterminazione del secondo termine.

11. Liberare una equazione dalle asimerie, cioè dai membri affetti dai segni radicali. Tutti i calcoli ove sono frequenti i segni radicali per l'ordinario riescono assai prolissi, onde è sommamente necessario sapersi bene le maniere di strigarsi da questi intoppi. Se nella equazione vi sia una sola asimeria il negozio è facilissimo, si pone quel membro solitario da una parte della equazione, poi ambi li membri si elevano alla potenza del segno radicale, e sarà fatto.

12. Se nella equazione sianvi due termini affetti di segno radicale simile d'un sol termine, e che l'incognita d'ambedue sia dello stesso grado, allora per la semplice antitesi si pongono i due membri affetti da una parte

dell' equazione, e si alzano alla potenza indicata dall' esponente de' segni come sopra, e nulla più si averà l'equazione purgata, v. g. $\sqrt{ax}+\sqrt{cx}=ab$, sarà $ax+x\sqrt{4ac}+cx=aabb$, il segno del secondo termine essendo di quantità cognita non è d'imbarazzo alcuno; e questa regola servirà eziandio se i segni saranno più di due, purchè si tengano le sudette supposizioni.

13. Quando le quantità sotto a i segni sono di più termini dell' istesso, o di diverso grado, allora bisogna fare due moltiplicazioni, e sarà meglio porre un segno solitario, ma più facilmente si opera per sostituzione, come siegue. Sia l'equazione $\sqrt{ax}+\sqrt[3]{bbx}=c$, si faccia $\sqrt{ax}=y$, sarà $yy=ax$, ed $y^3=axy$, e si faccia $z=\sqrt[3]{bbx}$, e si averà $z^3=bbx$; ora l'equazione proposta si risolverà in questa $y+z=c$, e $z=c-y$, dove prendendosi il cubo d' ambedue i membri si averà $z^3=c^3-3ccy+3cy^2-y^3=bbx$, e per l'antitesi si averà y^3, overo $axy+3ccy=c^3+3cax-bbx$, e per il parabolismo, $y=(c^3+3cax-bbx):(ax+3cc)$, e per conseguenza si averà yy ecc. veda chi più desidera Ozanam Algebra Tomo I.

ESEMPIO PRIMO.

14. Il quarto di tutto il Popolo concorso ad una festa stava nella prima Sala, nella seconda il terzo, e quivi eran 36 persone di più, che nella prima, tutti gli altri stavano nella terza Sala; si dimanda quanti vennero alla festa, e quanti ne erano per Sala?

Si cerca un numero, il di cui terzo sia 36 maggiore del quarto. Suppongo essere un tal numero x: dunque sarà $\frac{1}{4}x+36=\frac{1}{3}x$, onde per il numero 4. sarà $432=x$, sicchè nella prima Sala v'erano 108 persone, nella seconda 144, e nella terza 180, e il numero della prima è minore del numero della seconda di 36, come si chiedeva.

ESEMPIO II.

15. Alessi disse a Coridone, e Titiro, se io avessi la metà degli anni di voi due, oltre quei, che ho, averei an-

anni 81. Rispose Coridone, ed io ancora averei anni 81, se avessi $\frac{1}{3}$ degli anni d'Alessi, e di Titiro. E Titiro soggiunse, ed a me basterebbe $\frac{1}{4}$ degli anni di voi due per contarne co' miei 81; si dimanda quanti anni aveva ciascheduno di costoro? Si supponga, che Alessi abbia anni x, Coridone y, e Titiro z, poi per le condizioni del problema si averanno le tre seguenti equazioni $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=z+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}x=81=a$. Dalla prima equazione per l'antitesi trovo subito essere $x=a-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$, che sostituito nella seconda equazione, darà $y+(a-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z):3=a$., e moltiplicando tutto per 3, e poi per 2, viene $6y+2a-y+z=6a$, questa ridotta dà $5y+z=4a$, da cui cavo $z=4a-5y$. Ora questo valore sostituito nell' equazione trovata del valore di x, si averà $x=2y-a$, e poi tanto il valore di z, quanto quello di x sostituiti nella terza equazione, si averà $4a-5y+\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}a=a$, che moltiplicato tutto per 4 darà $16a-20y+3y-a=4a$, che ridotta dà $11a=17y$, cioè $y=11a:17$.

E sostituendo ne i valori di x, e di z in luogo del y, il suo valore $\frac{11}{17}a$, si averà $x=\frac{22}{17}a-a=\frac{5}{17}a$, e $z=4a-\frac{55}{17}a=\frac{13}{17}a$, cioè il primo x aveva anni $23\frac{14}{17}$, y, $52\frac{7}{17}$, e z, $61\frac{16}{17}$.

ESEMPIO III.

16. Il prezzo di tre Gioje Diamante, Smeraldo, e Topazio ascende ad 8 libbre d'oro. Un vezzo di perle vale più del diamante 3 libbre d'oro, più dello smeraldo 7, più del topazio 8. Si dimanda quanto vagliano le sudette quattro gioje? Il valore del diamante sia x, dello smeraldo y, del topazio z, e del vezzo u, sarà per le condizioni del problema $x+y+z=8$, ed $x+3=u$, $y+7=u$, $z+8=u$, laonde $x=u-3$, $y=u-7$, $z=u-8$, i quali valori sostituiti nella prima equazione daranno quest'altra $u-3+u-7+u-8=8$, cioè $3u=26$, cioè $u=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$; dunque $x=5\frac{2}{3}$, $y=1\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$.

AR-

ARTICOLO II.

Si risolvono l'equazioni del secondo grado.

1. Quando nell'equazione la quantità incognita sale al secondo grado possono darsi due casi, il primo, che siavi l'incognita sola di secondo grado senza alcun'altro membro, che abbia l'istessa incognita semplice, allora purificata l'incognita da' suoi coefficienti, se sianvi, e ridotta sola da una parte dell'equazione, si estragga da ambe le parti la radice, si averà il valore della detta incognita, nulla importando, se la quantità sotto al segno sia sorda, perchè questa almeno potrà esprimersi con una linea, come s'insegna, ove dei luoghi Geometrici, e si potrà anche in numeri esprimere per approssimazione per mezzo del Calcolo decimale, come abbiamo insegnato al Capo 1. Articolo 7. della Prima Parte.

ESEMPIO.

2. Un Capitano di Nave dopo lungo contrasto avendo fatta schiava una Peotta Algerina, torna al Porto d'Anzio, dove trova un Mercatante Turco, che vorrebbe riscattare gli schiavi, onde dimanda del prezzo d'essi, il Capitano risponde valere tutti insieme scudi centomila. Quegli vede, che i suoi denarj non bastano, che per riscuoterne un solo, onde disperato dona agli schiavi tutta la borsa, che divisa fra loro fa toccare scudi 10 per uno. Si chiede quanti schiavi erano, e quanti scudi avesse il mercatante? Si denomini 100 mila $=a$; $10=b$; numero degli schiavi $=x$; denari del mercatante $=y$. Per la prima condizione del problema $xy=a$, e per la seconda $y:x=b$: dunque risolvendo queste due equazioni sarà $x=a:y$ per la prima, e per la seconda sarà $x=y:b$; dunque $a:y=y:b$; dunque $ab=y^2$, ed estraendo da'ambe le parti la radice si averà $y=\sqrt{ab}$, cioè scudi mille ave-

aveva il mercatante ; poi sostituendo in una delle due equazioni date il valore di y trovato $\sqrt{ab}$, si troverà ancora il valore di x, si sostituisca nella prima, nella quale si averà $x\sqrt{ab}=a$; dunque dividendo $x=a:\sqrt{ab}=100$ numero degli schiavi.

3. Il secondo caso è, quando l'equazione è affetta, cioè quando oltre il membro della incognita quadrato v'è anche un' altro membro con l'incognita semplice, ed in questo caso sonovi tre altri espressi dalle tre seguenti equazioni, alle quali finalmente tutti gli altri si riducono $x^2-px+aq=0$, $x^2-px-aq=0$, $x^2+px-aq=0$. Il quarto $x^2+px+aq=0$ è impossibile, perchè il positivo non può essere uguale al negativo.

4. La regola di risolvere tutti tre questi casi, che poi si dovrà dimostrare, è. Per la prima equazione, cioè quando l'incognita affetta è negativa, e la cognita positiva, si faccia il quadrato della metà del suo coefficiente, che sarà $\frac{1}{4}pp$, e da esso si estragga la quantità assoluta $\frac{1}{4}pp-aq$, e da ciò, che resta, se ne estragga la radice $\sqrt{(\frac{1}{4}pp-aq)}$, e questa, o si aggiunga alla metà del coefficiente $\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}pp-aq)}$, o da esso si estragga, e si averanno due valori di x, de' quali ambedue sodisfaranno alla questione. Avverti, che ogni qual volta il quadrato della metà del coefficiente è minore della quantità cognita, il valore della incognita è una quantità imaginaria.

5. Quando tanto la quantità incognita affetta, che la cognita sono negative come nella seconda equazione, si faccia come sopra il quadrato della metà del coefficiente $\frac{1}{4}pp$, a cui si aggiunga la quantità nota $\frac{1}{4}pp+aq$, da cui si estragga la radice così $\sqrt{(\frac{1}{4}pp+aq)}$, ed a questa si aggiunga la metà del coefficiente, che si averà $\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}pp+aq)}$.

6. Quando poi la quantità affetta è positiva, e la cognita negativa, si faccia il quadrato del coefficiente, e si aggiunga alla cognita, ed estrattane la radice si sottragga

da

da questa la metà del coefficiente $-\frac{1}{2}p+V(\frac{1}{4}pp+aq)$.

7. Ora ragion vuole, che di tutto ciò si renda conto, ed eccone la dimostrazione. Essendo l'equazione $x^2\pm px\pm aq=0$, sarà $x^2\pm px=\mp aq$, sicchè al primo membro manca il quadrato della metà di p per essere quadrato s'aggiunga dunque da ambe le parti, si averà $x^2\pm px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2\pm aq$, onde estraendo da ambe le parti la radice si averà $x\pm\frac{1}{2}p=V(\frac{1}{4}pp\pm aq)$, laonde $x=\pm\frac{1}{2}p+V(\frac{1}{4}pp\pm aq)$, che si doveva dimostrare.

8. Spesse volte accade, che lo stato della questione involve più d'una quantità incognita, perilchè insorgono molte equazioni, e d'ogni equazione il suo officio è togliere una incognita; laonde essendo tante l'equazioni, quante le incognite, tutte finalmente si potranno ridurre ad una sola equazione, nella quale siavi una sola incognita. Che se non tante fossero l'equazioni quante le incognite, la questione allora dicesi indeterminata, e si riduce ad una ultima equazione, in cui sianvi le meno incognite possibili, di cui parleremo all'Articolo seguente. Diamo quì le regole per esterminare queste incognite.

9. Primo, quando l'incognita è d'una sola dimensione in due equazioni, si ritrovi in ambedue il suo valore, e ne insorgerà un'altra equazione, in cui sarà sterminata quella incognità; così $a+x=b+y$, e $2x+y=3b$, acciochè si tolga y, si trovi il suo valore sì nella prima, che nella seconda equazione; che nella prima sarà $a+x-b=y$ nella seconda $3b-2x=y$; adunque, $a+x-b=3b-2x$, in cui è tolto y, quindi si cava $x=(4b-a):3$.

10. Secondo, si sterminano ancora le quantità per sostituzione del loro valore, e ciò si fa, quando in una delle equazioni si trova l'incognita d'una sola dimensione, v. g. $xyy=b^3$, ed $xx+yy=by-ax$, acciochè si tolga l'x, la quale nella prima equazione è d'una sola dimensione; primieramente si deve trovare il valore d'x, il quale è $b^3:yy=x$; dipoi questo valore sostituito dappertut-

pertutto nei termini della ſeconda equazione, ne' quali ſi trova x, ne inſorge un'altra equazione, che è queſta $b^6:y^4+y^2=by-ab^3:y^2$.

11. Terzo, quando poi la quantità da ſterminarſi è di più dimenſioni in ambedue l'equazioni: primo ſi procuri, che in ambedue l'equazioni aſcenda l'incognita all' iſteſſo grado: poi ſi cerchi il valore di queſta poteſtà in ambedue l'equazioni: ſecondo, naſcerà da queſti due valori di detta poteſtà un'altra equazione, in cui averaſſi l'incognita depreſſa a minor grado, v.g. acciochè ſi tolga l' x dall'equazioni $xx+5x=3y^2$, e $2xy=3xx+4$, ſi cerchi il valore di xx in ambedue l'equazioni; verrà nella prima $x^2=3y^2-5x$, e nella ſeconda $x^2=\frac{2}{3}xy-\frac{4}{3}$; adunque ſi averà $3y^2-5x=(2xy-4):3$, dove x è ridotta ad una ſola dimenſione, ed operando ſecondo le ſopra eſpoſte regole ſi troverà $x=(9y+4):(2y+15)$, il qual valore deve ſoſtituirſi in ambedue le prime equazioni. Altro eſempio: ſiano l'equazioni $y^3=xy^2+3x$, e $yy=xx-xy-3$, acciochè ſi tolga l'y, primieramente moltiplico la ſeconda equazione per y, in cui ſi fa $y^3=x^2y-xy^2-3y$, e ſoſtitnendo in ambedue l'equazioni il valore di y^2, ſi farà $x^3-x^2y=x^2y-x^3+x^2y+3x-3y$, ove y è d'una ſola dimenſione. Similmente ſi potrà operare in altre maniere, come ſuggerirà l' ingegno, e la pratica di chi opera. Avverta di renderſi ogn' uno familiari queſte regole talmente, che niente più franco abbia pronto nella memoria.

ESEMPIO I.

12. Trovare tre numeri x, y, z, in guiſa, che la ſomma di due qualunque moltiplicata pe'l terzo faccia a, b, c dati; per la ſoluzione di queſto queſito devonſi premettere due altri.

13. Trovare tre numeri x, y, z, di modo che $x+y=m$, $x+z=n$, $y+z=p$, ſi averà.

$$y=m-x. \qquad z=n-x. \qquad m-x+n-x=p$$

$$m(+n-p):2=x,\ y=(m-n+p):2,\ z=(-m+n+p):2$$

Q 14. Tro-

14. Trovare tre numeri x, y, z, di modo che $xy=m$, $xz=n$, $yz=p$ si averà $x=m:y=n:z$; onde si cava $z=ny:m$, che sostituito nella terza equazione dà $nyy:m=p$, cioè $y=\sqrt{mp:n}$, $x=\sqrt{mn:p}$, $z=\sqrt{np:m}$.

15. Ora si venga alla soluzione del quesito posto al num. 12. siano i numeri cercati x, y, z, e i prodotti a, b, c, cioè $xy+xz=a$, $yz+xy=b$, $xz+yz=c$, sarà sommando tutto $2xy+2xz+2yz=a+b+c$, o pure $xy+xz+yz=(a+b+c):2$. Si faccia $xy=m$, $xz=n$ $yz=p$, averemo $m+n=a$, $m+p=b$, $n+p=c$, per il problema al num. 13. si averà $m=(a+b-c):2$, $n=(c-b+a):2$, $p=(b+c-a):2$. Ciò posto si cerchino i valori delle incognite, per il num. 14. e si sostituiscano in loro vece nelle seguenti equazioni, si troverà

$$z=\frac{\sqrt{cc+2ab-bb-aa}}{2a2b-2b-2c},\quad y=\frac{\sqrt{bb+2ac-aa-cc}}{2a+2c-2b},\quad x=\frac{\sqrt{aa+2bc-bb-cc}}{2b+2c-2a}$$

che se, v. g. sia $a=14$, $b=18$, e $c=20$, sarà $x=2$, $y=3$, $z=4$. Onde si ricava essere caso impossibile, quando si assumono tre prodotti, il quadrato di qualunque de' quali con due rettangoli degli altri due non facciano somma maggiore de' quadrati degli altri due; perchè in tal caso verrebbero per valore delle incognite radici imaginarie, come è evidente.

16. Sonovi alcune altre strade per condursi alla soluzione dell' equazioni quadratiche, che stimo bene quì accennare. Si prenda la metà del coefficiente del secondo termine con la quantità incognita, e si pongano queste due ad un' altra incognita uguali; poi il valore cavato da questa equazione dell' incognita si sostituisca in luogo d'essa nella equazione data, e ne verrà un'altra semplice.

ESEMPIO II.

17. Sia $x+y=40$, $x^2+y^2=1000$, $x=40-y$, $x^2=1600-80y+y^2=1000-y^2$, $-40y+y^2=-300$. Suppongo ora $y-20=z$, sarà $y=z+20$. Sostituisco, vie-

viene $-40z-800+z^2+40z+400=-300$, cioè tolti quei, che si elidono, viene $z^2=100$; dunque $z=10$; dunque $y=30$, ed $x=10$.

Esempio III.

18. Racconta lo Sturmio brevemente un fatto successo in persona d'una Figlia del Re Cristiano di Danimarca, ove si vede quanta possanza abbia amore ne' petti umani: *Sicna*, dice egli, *cum amatorem suum Hagbarum ab irato Patre in crucem agi audivisset, tum ipsa amore victa injecto prius in Regiam domum igne suspensa è lacunari zona sua vitam sibi eripuit*. Il sito di macerie pieno, ove tal Reggia sorgeva, si vede ora nell' Isola di Selandia vicino ad un Castello detto Sicnaria; tutto lo spazio, che occupano quei rottami sono piedi quadrati $5400=a$, e la lunghezza supera la larghezza piedi $250=b$ si cerca quanto sia lungo, e quanto largo. Suppongo la lunghezza x, e la larghezza y, sarà $xy=a$, ed $x-y=b$, donde si cava $x=a:y=b+y$, cioè $a=by+y^2$, e per il numero 7. $a+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}b^2+by+y^2$; sicchè estraendo da ambe le parti la radice, ne viene $\sqrt{(a+\frac{1}{4}b^2)}=\frac{1}{2}b+y$; dunque $y=\sqrt{(a+\frac{1}{4}b^2)}-\frac{1}{2}b=20$ piedi di larghezza, che sostituita in una delle due prime equazioni dà $x=270$ piedi di lunghezza.

Esempio IV.

19. Tizio ha venduto una gioja scudi 100, e v' ha guadagnato tanto per 100, quanto la pagò; si dimanda quanto la pagasse?

Questo non vuol dir' altro, se scudi 100 guadagnano x, cioè il prezzo, che fu pagato il diamante, questo istesso prezzo quanto guadagnerà? Trovato il guadagno di x, e tolto da 100, dovrà restare una quantità uguale ad x, con la qual equazione si troverà il valore di x, prezzo del diamante della prima spesa. Ecco il calcolo.

$100.x::x.x^2:100 \quad 100-xx:100=x \quad 10000-xx=100x$

$10000=x^2+100x \qquad 12500=x^2+100x+2500$

$\sqrt{12500}=x+50$, sicchè $x=\sqrt{12500}-50$

20. Avverto, che l'equazioni di quarto grado, nelle quali non si rincontra, che o'l solo primo termine, o'l solo primo, e 'l terzo, sono biquadratiche facendo $x^2 = z$, come è chiaro.

ARTICOLO III.

Applicazione del Calcolo a i problemi indeterminati.

1. I Problemi sin'ora sciolti sono stati tutti determinati, cioè, che ammettono una sola soluzione, o due al più. E' di ragione, che oltre passiamo a sciogliere quei, che hanno infinite soluzioni, e diconsi indeterminati, e per questi molto maggiore attenzione è necessaria, poichè bisogna non solamente denominare a dovere, ma eziandio dal risultato ricavare con grande sottigliezza di ragioni il modo di assumere per note le ignote; ne i problemi indeterminati giunti, che siamo all'ultima equazione, quando la quantità da determinarsi avrà una sola dimensione, allora si prenderà un numero a caso; v. g. cerco un numero, che moltiplicato per a sia quadrato, sia x tal numero sarà $ax = y^2$; dunque $x = y^2 : a$; adunque dovrò io trovare un quadrato a mio genio, che sia divisibile per a, e'l quoziente sarà il valore della x.

2. Quando poi la quantità da determinarsi è quadrato positivo, e senza coefficiente, si assuma un' altra incognita meno la cercata per radice di tal quantità cercata; cerco un quadrato, che aggiunto ad a sia quadrato. Sia tal radice $y - x$, sarà $x^2 - a = y^2 - 2yx + x^2$, cioè $(y^2 + a) : 2y = x$, cioè si prenda per y qualunque quadrato, a cui aggiungendo a sia divisibile per il doppio della radice. In vece d' altre regole stimo meglio proporre alcuni quesiti, dalla soluzione de' quali mi confido, che sarà a sufficienza spiegato il metodo di risolvere ogn' altro, purchè non involva una equazione di grado superiore al secondo. Si conoscono i quesiti di tal natura dal non

po-

poterſi cavare tante equazioni dalle condizioni del problema, quante ſono le coſe cercate, v. g.

3. Se ſi chieda quante parti abbia il continuo, denomino la grandezza delle parti x, il numero d'eſſe y, una quantità continua qualunque, v. g. palmare a, è chiaro, che tutte le parti di queſta quantità ſaranno $xy = a$; nè ſi può ritrovare altra equazione, onde o determinata la grandezza viene il numero, o determinato il numero viene la grandezza delle parti; che ſe nè l'uno, nè l'altro ſi determini, coſtruendo quella equazione, come al ſuo luogo inſegneremo, ne naſce una iperbola tra li ſuoi Aſintoti, che come è noto vanno approſſimandoſi all'infinito, ſenza mai raggiungerſi.

4. Onde ſi vede quanto egregiamente s'imbarazzino coloro, che fan queſtione, ſe 'l continuo ſia diviſibile in infinito, o no, poichè altri cercano la grandezza, o minutezza delle parti, e nulla penſano al numero d'eſſe, ed altri ſi perdono dietro a queſto numero di parti, e nulla penſano alla loro grandezza; onde non è da ſtupirſi, ſe dopo proliſſe diſpute, e meditazioni fantaſtiche, altro non ne ricavino, che confuſione maggiore, non avvedendoſi, che una tale queſtione è indeterminata, e che nè numero, nè grandezza ſi ſaprà mai del continuo, ſe un di eſſi ad arbitrio non ſi aſſume per noto, e perchè nè meno aſſumere ſi poſſono parti diverſe all'infinito, che in numero maggiore, e maggiore pur ſenza fine non ve ne ſiano, quindi è, che il queſito è indeterminato, e che ammette ſoluzioni ſenza numero. Vengo dunque alla ſoluzione de' queſiti.

Esempio Primo.

5. Un fornaciaro diſpone tutti i ſuoi mattoni in figura cubica, di modo, che i mattoni di tal figura tolto il primo ſuolo ſi poſſono diſporre in un quadrato. Queſto vuol dire, ſi trovino due numeri, i quadrati de' quali ſommati faccano il cubo del minore. Si ſupponga il numero maggiore uguale ad x, il minore y, ſarà per la

con-

condizione del problema $x^2+y^2=y^3$. Ora si cerchi il valore di x sarà $x^2=y^3-y^2$, cioè $x=\sqrt{(y^3-y^2)}=y\sqrt{(y-1)}$, sicchè ho da prendere per y un tal numero, da cui toltone uno resti quadrato, acciochè si abbiano ambedue razionali; sia dunque $y=4+1$, sarà $x=10$, $y^2+x^2=125=y^3$, che si doveva trovare. Così supponi per y qualunque altro numero maggiore d'una unità di qualunque quadrato troverai l'istessa corrispondenza.

ESEMPIO II.

6. Trovare quanti triangoli rettangoli si vogliono, che abbiano i lati de' numeri intieri. Per trovare due quadrati, che abbiano la loro differenza quadrata, bisogna supporre la somma di due incognite per il primo, e la differenza d'esse per il secondo, per poter' avere una equazione; sia dunque il maggiore $=x+y$, e 'l minore $=x-y$; averemo $x^2+2yx+y^2-x^2+2yx-y^2=4yx$, che dovendo essere quadrato sarà $4yx=z^2$, dunque $x=z^2:4y$; dal che si cava, che bisogna assumere per y un tal numero, per il di cui quadruplo si possa dividere un qualche quadrato, il che potrai trovare facilmente. Così assumi un quadrato a tuo genio, dividi questo per qualunque numero, che ti torni in acconcio, e questo divisore diviso per 4 ti darà il numero cercato; ora trovato questo, si averà anche x, onde si averanno i due numeri cercati, v. g. per z^2 prendasi 64, poi un suo divisore, v. g. 32, che diviso per 4 dà $8=y$. Si riassuma l'equazione $x=z^2:4y$, cioè $x=64:32=2$, dunque $x+y=10$, ed $x-y=6$, ove il quadrato del primo è 100, del secondo è 36, la differenza de' quali è quadrata, cioè 64.

ESEMPIO III.

7. Sonovi due stanze quadrate, se ne vogliono fare due altre pur quadrate coll' istesso numero de' mattoni; questo vuol dire dividere la somma di due quadrati in due altri quadrati. Siano i lati de i quadrati dati a, b, saranno i lati de i cercati $a-z$, e l'altro sarà maggiore di b; si potrebbe dire $b+y$, che pure ottimamente scio-

gliera

glierà il problema, ma con irrazionali, per evitare i quali si supponga $yz-b$ per la seconda radice, per la condizione del problema sarà $a^2-2az+z^2+y^2z^2-2byz+b^2$, cioè $z^2+y^2z^2-2az-2byz=0$, e $z+y^2z-2a-2by=0$, onde $y^2z+z=2a+2by$, cioè $z=(2a+2by):(y^2+1)$; ed essendo $a=5$, $b=3$, assumasi per y qualunque numero si voglia, v. g. 2 averemo $z=(10+12):(4+1)=4\frac{2}{5}$, onde $yz-b=5\frac{4}{5}$ eguale alla radice del primo quadrato, e'l secondo sarà $a-z$, cioè $5-4\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, dunque il quadrato di $5\frac{4}{5}=33\frac{16}{25}$, e di $\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=a^2+b^2=34$; che si dovea trovare.

ESEMPIO IV.

8. Vi sono due Squadroni di Soldati in uno vi sono più soldati, che nell' altro al numero di a; dimando quanti soldati sono in ciascuna squadra? Si trovino due quadrati, la differenza de' quali sia un numero dato; sia il lato del minore x, e del maggiore $x+y$, la loro differenza a, sarà $x^2-x^2+2xy+y^2=a$, dunque $x=(a-y^2):2y$; onde si vede, che per y si ha da prendere un numero, che sia minore della radice di a; sia dunque $a=16$, $y=3$, sarà $(a-y^2):2y=(16-9):6=\frac{7}{6}=x$; dunque l'altro numero sarà $x+y=4\frac{1}{6}$.

ESEMPIO V.

9. Un Prencipe fingendosi mendico chiese l'elemosina ad un suo Servo, il quale aveva un numero di paoli, e glie ne diede alquanti. Il Prencipe scopertosi regalò al Servo, e gli raddoppiò la moneta, che aveva ricevuta tante volte, quanti paoli erano restati al detto suo servo, il servo contò tutto il denaro ricevuto, e vidde essere un numero quadrato; cerco quanti denari diede per elemosina? Questo vuol dire dividere talmente un numero, che il fatto delle parti sia quadrato. Sia il numero dato a, x una parte, e l'altra sarà $a-x$; dunque $ax-x^2=z^2$, da cui si cava $x=\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-z^2)}$; dunque si deve prendere per z tal numero, che quadrato sia minore del quarto del quadrato del numero dato:

sia

sia $a=10$, $z=4$, sarà $x=5-\sqrt{(25-16)}=2$; dunque l'altra parte $a-x=8$, e di fatto 2×8 fa 16 quadrato.

ESEMPIO VI.

10. Pietro ha alquante once d'oro $=a$, e Paolo ne ha pure alquante $=b$, ambedue ne fanno tirare un tal numero di fogli per oncia, che ciascuno co i suoi cuopre un soffitto quadrato; chiedesi quanti fogli per oncia furono tirati? Trova un numero, che moltiplicato per due dati facciano due prodotti quadrati. Sia un numero dato a, l'altro b, il cercato x, sarà $ax=y^2$, $bx=zz$, dal che si ricava $x=y^2:a=zz:b$, e da questa equazione $by^2=azz$, cioè $y=\sqrt{azz:b}=z\sqrt{a:b}$; onde si vede, che questo problema ammette soluzione in numero razionale, ogni qual volta diviso un numero dato per l'altro venga un numero quadrato. Sia dunque $a=108$, $b=3$, averemo $x=zz:3$; si faccia $z=m$ qualunque numero si voglia divisibile per 3, v. g. $=12$ sarà $zz=144$, il suo terzo sarà $48=x$, ora questo moltiplicato per 108, fa 5184 numero quadrato, la cui radice è 72, e'l 48 moltiplicato per 3 fa 144, la cui radice è 12.

11. Il Mogol ha d'entrata, quanto il quadrato dell' entrata del Gran Turco; unita poi l'entrata del Re di Persia con l'entrata del Gran Mogol, e presane la radice quadra, questa agguaglia l'entrata del Turco, e del Persiano; si cerca l'entrata di ciascuno di questi Prencipi? Dunque se il Mogol ha quanto il quadrato del Turco abbia questo x, quegli averà x^2, ed aggiungendo a questo quadrato, cioè alle rendite del Mogol l'entrata del Persiano, che nomino y, sarà $x^2+y=$ al quadrato di ciò, che hanno il Turco, e'l Persiano insieme, cioè $x^2+2xy+y^2$, onde si cava $y=2xy+y^2$, cioè $1=2x+y$, cioè $x=(1-y):2$, onde x sarà minore dell'unità, e similmente y; sia dunque $y=\frac{1}{2}$, si averà $x=\frac{1}{4}$ entrate del Turco, $\frac{4}{2}$ del Persiano, ed $\frac{1}{16}$ del Mogol, a cui aggiuntovi l'entrata del Persiano $\frac{8}{16}$, fa $\frac{9}{16}$, la di cui radice è $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, che si dovea trovare. Suppongasi pure

per

per y qualunque altra frazione, che bene ſempre procederà.

Esempio VII.

12. Nel Cortile d'un Limoſiniere erano 100 Poveri; egli chiama il ſuo diſpenſiere, e gli ordina, che dia mezza pagnotta per ciaſcheduno ai fanciulli, due ſimilmente alle donne, e tre pure agli uomini. Il diſpenſiere eſeguito l'ordine trova aver diſtribuito 100 pagnotte. Si dimanda quanti uomini, quante donne, e quanti fanciulli erano nella corte? Gli uomini chiamo x, le donne y, i fanciulli z, averemo

$$x+y+z=100=3x+2y+\tfrac{1}{2}z$$

$$\tfrac{1}{2}z=2x+y$$

$z=4x+2y$, e queſto ſoſtituito nella prima equazione dà $5x+3y=100$, onde vedeſi, che 100 deve dividerſi in due parti, una diviſibile per 5, e l'altra per 3, v. g. 15, ed 85, che danno $x=17$, $y=5$, $z=78$. O pure 30, e 70, che danno $x=14$, $y=10$, $z=76$; o pure 45, e 55 ecc.

ARTICOLO IV.

Problemi preliminari alla ſoluzione dell' equazioni di più alto grado, e ſi riſolvono l'equazioni di terzo grado.

1. Siccome un problema aver può varj caſi, ne' quali verificare ſi poſſa, ed in ciaſcun d'eſſi ſi può pervenire alla ſteſſa equazione, quindi è, che il valore dell' incognita nella ſteſſa equazione può eſſere diverſo, v. g. nell' equazione $x^2-x-6=0$ può eſſere $x=3$, ed $x=-2$, poichè in ambedue i caſi $x^2-x=6$; ciò poſto per conoſcere la natura dell' equazioni ſe ne compone una con la radice di varj valori, e dal riſultato ne ſono ſtati ricavati tre problemi utiliſſimi, v. g. ſia $x-2=0$, $x+3=0$, $x-4=0$, e moltiplicate queſte viene $x^3-3x^2-10x+24=0$. Ora ſi rifletta ſu queſti prodotti ſi troverà primo,

2. Che la quantirà cognita del ſecondo termine è la ſomma delle radici, ma affette di ſegno contrario, e la quantità cognita del terzo è la ſomma de' prodotti delle radici preſe a due a due; la quantità cognita del quarto è la ſomma de' prodotti delle radici preſe a tre a tre ecc. e l'ultimo termine è'l prodotto di tutte le radici.

3. Secondo, che l'equazione ha tante radici, o ſiano valori dell' incognita, quante unità ha l'eſponente maſſimo.

4. Terzo, che in qualunque equazione tante ſonovi radici vere, o poſitive, quante ſonovi permutazioni di ſegni, e tante falſe, o negative, quante ſonovi ſucceſſioni di ſegni. Queſto problema fu avvertito da Ariotto, ma non è ſtato ancora con più forte argomento della coſtante induzione ſtabilito.

5. La principale utilità di queſti problemi ſi è quella di abbaſſare l'equazioni di più alto grado alla loro più ſemplice eſpreſſione, cioè trovare tutti i diviſori dell' ultimo termine noto, e con quelli tolti, o aggiunti all' incognita tentare la diviſione di tutta l'equazione, e tutti quei, che la divideranno eſattamente ſenza avanzo alcuno, manifeſteranno in primo luogo il valore della incognita, e abbaſſeranno anche l'equazione al minor grado. L'equazioni poi di quarto grado, o di più alto, poſſono non ſolo aver l'origine dalle ſemplici, ma eziandio dalle compoſte, v. g. l'equazione di quarto grado può comporſi dalla moltiplicazione di due quadrati, ed allora eſſa non ſi dirà eſſere nella ſua ſede, abbenchè talvolta non ſi poſſa dalla ſemplice incognita col ſudetto diviſore eſattamente dividere, laonde ſarà duopo allora abbaſſarla per via del ſecondo grado dell' incognita col ſuo diviſore, come ſopra. Avverto, che non occorre tentare la diviſione con i diviſori negativi, quando dalle alternazioni de' ſegni ſappiamo, che l'equazione ha tutte le radici poſitive.

6. Si troveranno tutti i diviſori di qualunque quantità,

tità, se ella sarà numerica, secondo il metodo insegnato a carte 40. il che si potrà ottenere ancora se la quantità sarà letterale composta, ma non abbia divisori composti, che se ella sarà letterale, e composta talmente, che sia probabile, che abbia divisori ancora composti, allora si divida prima per tutti i suoi semplici divisori, e poi l'ultimo quoziente, che resta si ordini secondo le dimensioni della lettera più inalzata, e si finga eguale al zero, e poi si trovino tutti i divisori dell'ultimo termine, e si tenti la divisione nella data equazione per la lettera, che fa le veci della incognita più, o meno uno de' detti divisori dell'ultimo termine, finchè si ritrovino quelli, che la dividono esattamente, ed allora questi con i loro quozienti saranno i divisori composti di detta quantità prima data.

7. Per più brevità si osservino i termini della equazione, dove trovasi una lettera di una sola dimensione, e questi si separino dagli altri; poi di questi, e di quelli si ritrovino tutti i divisori, i quali saranno i divisori di tutte le equazioni; nè quì occorre esemplificare, essendo la cosa spiegata abbastanza.

8. Risolvo un'equazione cubica per mezzo dei divisori dell'ultimo termine; sia l'equazione $x^3-7x-6=0$, tutti i divisori di 6 sono 1, 2, 3, 6, co' quali tentandosi la divisione si trova $x+1=0$ essere divisore esatto; dunque -1 sarà una radice, e l'equazione abbassata, e risoluta ne dà due altre, che sono $+2$, e $+3$, le quali anch'esse unite all' incognita $x-2=0$, $x-3=0$ sono divisori esatti. Nota, che se si ridurrà questa equazione alla formola del Cardano segue al num. 16. sembrerà irreducibile, poichè verrà la radice imaginaria; nulladimeno questa si riduce come sopra, ed indica infiniti angoli trisecabili.

9. Per l'invenzione delle radici nell' equazioni di più alto grado è spesse volte necessario accrescersi, o diminuirsi, moltiplicarsi, o dividersi la incognita con

 qual-

qualche data quantità, il che facilmente si ottiene, facendo l'incognita dell'equazione, v. g. $x+m=y$ se aggiungere: $x-m=y$ se levare: $mx=y$ se moltiplicare: $x:m=y$ se dividere si debba, e trovato il valore di x questo si sostituisca nell'equazione data, si averà la radice di questa nuova equazione trasformata, come si desidera. Gli esempj si daranno nella soluzione de' seguenti problemi.

10. Si riempie l'equazione de i termini, de i quali è mancante con accrescere, o sminuire la sua radice d'una data quantità, v. g. $x^3-23x-70$, si faccia $x+1=y$, sarà $y-1=x$, sostituito il valore di x nella equazione, cioè

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3-3y^2+3y-1 \\ 23x = & \quad\quad -23y+23 \\ -70 = & \quad\quad\quad\quad -70 \\ \hline & y^3-3y^2-20y-48=0 \end{array}$$

Questa equazione è compita di tutti i suoi termini, ed ha $y=x+1$.

11. Si toglie da qualunque equazione il secondo termine se è positivo accrescendo, se negativo sminuendo la radice del coefficiente del secondo termine diviso per l'esponente del primo per il num. 9. il che fatto tutte le equazioni cubiche si ridurranno ad uno di questi tre casi:

$$x^3+px-r=0 \qquad x^3-px-r=0 \qquad x^3-px+r=0$$

12. Si libererà l'equazione dalle frazioni, restando libera la massima potenza da ogni coefficiente, se si moltiplica la radice per il fatto di tutti i denominatori delle frazioni, o pure per la comune misura degl' istessi denominatori, v. g. $y^3-\frac{67}{3}y-\frac{880}{27}=0$, si faccia $3y=x$, perchè il 3 misura senza avanzo i due denominatori 3, e 27; sarà dunque $y=x:3$, questo sostituito nell'equazione viene $x^3:27-67x:9-\frac{880}{27}=0$, tutto questo moltiplicato per 27, fa $x^3-201x-880=0$, in cui $x=3y$.

13. Tutto l' artificio di risolvere l'equazioni di secondo

condo grado consiste in togliere da esse il secondo termine, il che ottennero gli antichi Arabi con la considerazione della 4. del 2. d'Euclide, ove ci scuopre la composizione del quadrato, con cui si toglie il secondo termine. Tentarono la stessa strada i nostri Italiani considerando la composizione del cubo, e quì fu loro di mestieri trovare la maniera di togliere dalla equazione cubica il secondo, e terzo termine, cosa per vero dire assai ardua, ma non insuperabile a quegli ingegni non mai abbastanza commendabili. Videro questi subito la maniera di togliere il secondo termine, onde ridussero a quattro soli casi tutto il negozio de i cubi, e sono quei, in cui solamente il primo, e terzo termine ritrovasi; quindi osservando con maggior diligenza il cnbo, s'avvidero, se in luogo della incognita se ne sostituirà un' altra accresciuta, o diminuita del quoziente, che nasce dalla terza parte del coefficiente del terzo termine diviso per questa nuova incognita, ne insorge un' equazione di sesto grado, ma essendo derivativa del secondo, col metodo di questo si abbassa all' ultima soluzione, v.g.

14. Si debba risolvere l'equazione $x^3+12x-12=0$ si faccia $y-\frac{1}{4}y=x$, facendosi la debita sostituzione di questo valore si averà finalmente $y^6+12y^3=64$, la quale si risolve per il metodo di secondo grado, facendo $y^3=z$, che ne insorgerà $z^2+12z=64$; con quest'arte si sono formate le seguenti tre formole universalissime nella maniera seguente.

15. Primo, dalla equazione si tolga il secondo termine, per il num. 11. e sia, v. g. $z^3+pz+q=0$ già purgata, e vogliasi il valore di x si prenda $z=x-y$ (si dovrebbe prendere $x+y$, se l'equazione avesse $-pz$) e sostituendosi in luogo di z il suo valore $x-y$ nella data equazione, si averà $z^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=x^3-3xy \times (x-y)-y^3=x^3-3xyz-y^3$, e conseguentemente $z^3+3xyz+y^3-x^3=0$, la quale equazione paragonata con $z^3+pz+q=0$, dà primo $3xyz=pz$, overo $y=p:3x$.

Se-

Secondo $q=y^3-x^3=p^3:27x^3-x^3$, o pure $x^6+qx^3=\frac{1}{27}p^3$; onde risulta $x^3=\frac{1}{2}q\pm V(\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3)$; perche poi $q=y^3-x^3$ (si potrebbe ancora adoperare $y=p:3x$, come più sotto al numero 17. diremo) per condurci presto alle formole consuete si averà ancora $y^3=q+x^3=\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$; adunque $z=x-y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

16. Gli altri tre casi, che sono sì consueti, che possibili, si ritroveranno nella stessa maniera, onde si averanno le seguenti tre formole generalissime, con le quali ogni questione di terzo grado si risolve.

$$z^3+pz-q=0 \quad z=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

$$z^3-pz+q=0 \quad z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

$$z^3-p^2-q=0 \quad z=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

17. Si avverta, che il calcolo di queste formole diviene più corto, se si adopra il valore di y, che risulta dalla equazione $y=p:3x$, e facendo la trasformazione de' termini, e la loro comparazione ne insorgeranno tre formole alquanto diverse in apparenza, ma in sostanza le medesime. Cardano attribuisce l'invenzione di queste formole a Scipione Ferreo, e Giacinto di Cristofaro in una lettera al Galizia espone eruditamente l'equazioni di quarto grado, che prende, come egli dice, da Ludovico de Ferrari discepolo del sopra mentovato Giovanni Cardano.

18. Pone il Cardano al libro 9. de' suoi quesiti Aritmetici la regola di risolvere l'equazioni di terzo grado, ma egli è sì conciso, che difficilissima cosa è l'intendere ciò che prescrive: ma perchè pur da suo pari ei parla, stimo conveniente spiegar quì il suo metodo, acciocchè si veg-

ſi vegga di quale acume dotati foſſero i noſtri antichi ritrovatori delle ſcientifiche coſe. Ecco il metodo.

19. Si prenda la terza parte del coefficiente del membro, ove è la radice ſimpla, queſta ſi cubi, e poi ſi cerchino due cubi tali, che moltiplicati fra loro facciano il ſudetto, e la differenza delle loro radici ſia uguale all' incognita data.

20. Poi ſi prenda il ſudetto coefficiente, e ſi moltiplichi per la differenza delle radici de i due cubi trovati. Dipoi ſi cubi queſta differenza, queſte due coſe ſommate hanno da eſſere uguali al numero noto della data equazione. Ecco l'eſempio.

21. $x^3+mx-n=0$ la terza parte del coefficiente è $m:3$, il ſuo cubo è $m^3:27$; ora ſi debbono trovare due cubi, che moltiplicati fra loro facciano $m^3:27$, e che la radice dell' uno ſottratta dalla radice dell' altro reſti x; ſiano queſti $y^3z^3=m^3:27$, ſarà $y-z=x$, ſi cubi queſta equazione, ſarà $y^3-3y^2z+3yz^2-z^3=x^3$, e moltiplicando il valore $y-z$ per m ſi averà $y^3-3y^2z+3yz^2-z^3+my-mz=x^3+mx=n$; ma eſſendo $y^3z^3=m^3:27$, ſarà $z=m:3y$, e ſoſtituita queſta quantità nell' ultima equazione, quella in queſt'altra ſarà traſformata $y^3-my+m^2:3y-m^3:27y^3+my-m^2:3y=n$, che ridotta viene $y^6-ny^3=m^3:27$, da cui per il metodo di ſecondo grado viene $y^3=\frac{1}{2}n+\sqrt{(m^3:27+\frac{1}{4}n^2)}$, e perchè $z^3=m^3:27y^3$ ſarà $z^3=m^3:(27\sqrt{(m^3:27+n^2:4)}+\frac{1}{2}n)$. Ora ſia $m=6$, $n=20$, avremo $216:(270+27\sqrt{108})$, e diviſo tutto per 27, viene $8:(10+\sqrt{108})$, ed attuandoſi la diviſione ſecondo il metodo dato al Capo 1. Parte 2. Art. 3. num. 13. ſi averà $(80-8\sqrt{108}):-8=-10+\sqrt{108}$ cubo minore, e $10+\sqrt{108}$ cubo maggiore cercati, che l'un per l'altro moltiplicati fanno $m^3:27=8$; ed eſtraendo la radice cubica da $10+\sqrt{108}$, per l'Articolo ſopracitato num. 23. viene $1+\sqrt{3}=y$, e da $-10+\sqrt{108}$, viene $-1+\sqrt{3}=z$, e perchè $y-z=x$ per ſuppoſizione, ſarà $1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=x=2$, che ſi dovea trovare.

22. Ne

22. Ne è questa l'unica via di procedere per risolvere i quesiti di terzo grado, secondo il metodo del Tartaglia, ma ve ne sono ancora altre, tra le quali sciego la seguente. Si cerchino due cubi uno maggiore dell'altro, che insieme sommati s'agguaglino all'ultimo termine, o sia quantità nota dell'equazione, e che il quadrato del maggior cubo più il prodotto del cubo della terza parte del coefficiente del membro, ove è la radice simpla, sia uguale al maggior cubo moltiplicato per l'ultimo termine noto, e le radici di questi due cubi siano uguali all'incognita della equazione.

23. Si desidera un cubo, da cui tolte sei sue radici, resti 40. Ecco l'equazione $x^3 - 6x = 40$, sia y^3 il maggior cubo, e z^3 il minore, sarà $y^3 + z^3 = 40$, ed $y^6 + 8 = 40y^3$, la quale essendo di secondo grado si troverà $\sqrt{392} + 20 = y^3$; laonde sostituendo questo valore nell'altra equaziene averemo $z^3 = 20 - \sqrt{392}$, e perchè $y + z$ si suppongono uguali ad x, sarà $\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})} = x$. Ora per l'Articolo 3. al Capo 1. numero 22. la radice terza di $20 + \sqrt{392} = 2 + \sqrt{2}$, e la $\sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})} = 2 - \sqrt{2}$; sicchè $x = 4$, che si dovea trovare.

24. Avvertasi, che quando l'equazione è $x^3 - x + m = 0$, bisogna il valore del x trovato mutarsi in negativo, ed in questa maniera si scioglieranno innumerabili quesiti, a' quali non arrivano le formole sopra esposte del Cardano.

25. Ora devesi quì notare, come si trovino le tre radici dell'equazioni cubiche, e primo nella semplice equazione $x^3 - a = 0$, si otterrà con dividere l'equazione per la sua radice obvia $x - \sqrt[3]{a} = 0$, e ne verrà $x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 0$; ora le due radici imaginarie di questa equazione sono gli altri due valori cercati; similmente si faccia nelle equazioni affette, si trovi prima una radice secondo il metodo sopra esposto, e poi per l'incognita + questa radice si divida l'equazione, il quoziente, che sarà sempre una equazione di secondo grado, darà le due altre radici.

26. Non

26. Non devonsi passare sotto silenzio i casi irreducibili, i quali accadono solamente quando le tre radici della equazione sono reali; cioè quando, ridotta l'equazione ad una delle formole, il terzo termine è negativo, e'l cubo della terza parte del suo coefficiente è maggiore del quadrato della metà dell' ultimo termine, in tal caso, venendo il valor dell' incognita sempre una radice imaginaria, sembrar potrebbe impossibile; ma fin' ora non abbiamo il metodo, che ci conduca ad altra espressione numerica, senon in caso, che la radice espressa da quantità imaginaria sia reale, e razionale; si possono nulladimeno assegnare tali radici per mezzo della costruzione Geometrica dell' equazioni, e ciò, che nelle quantità discrete non si ritrova secondo il desiderio, nella quantità continua esattamente si ottiene.

27. Si devono dunque distinguere due casi nella risoluzione dell' equazioni di terzo grado: primo quando in esso v'è una sola radice reale, e l'altre due imaginarie; l'altro quando tutte le radici sono reali.

28. Quando l'equazione ha una sola radice reale, si conosce, perchè in essa manca il secondo, e terzo termine, o quando manca il secondo, e 'l terzo è positivo, o quando è negativo, ma 'l cubo della terza parte del suo coefficiente è minore del quadrato della metà dell' ultimo termine, in questi casi l'equazione sempre è risolubile, gli altri casi avendo nell' equazione tutte le radici reali, sono solubili solamente per la costruzione Geometrica, e vien sempre la trisezione dell'angolo.

ARTICOLO V.

Soluzione dell'equazioni di quarto grado, e'l metodo universale per ogn' altra.

1. L'Equazioni di quarto grado altre si riducono al secondo altre al terzo, di queste quì occorre parlare, poichè di quelle abbastanza si è detto a suo luogo.

go. Se dunque sarà data una equazione di quarto grado, in cui sianvi tutti i termini, da quella dovrà prima togliersi il secondo termine, per l'Articolo 4. numero 7. Quindi si ridurrà alla cubica come siegue. Sia l'equazione $x^4+qx^2+rx+s=0$, si prendano due equazioni quadratiche $x^2+yx+z=0$, ed $x^2-yx+u=0$, le quali moltiplicate fra loro daranno

$$\begin{aligned} x^4 &+ zx^2 + yux + uz = 0 \\ &+ ux^2 - yzx \\ &- y^2x^2 \end{aligned}$$

e perchè questa equazione si suppone la stessa, che la proposta, facendo il paragone de' termini, cioè il coefficiente q del terzo termine s'agguagli a i coefficienti del terzo termine nella nuova equazione, r a i coefficienti del quarto, e s all'ultimo termine, si troveranno tre altre equazioni

$z+u-y^2=q$ $\qquad yu-yz=r$ $\qquad uz=s$

$z=q-u+y^2$, questo valore di z si sostituisca nella equazione $yu-yz=r$, si troverà $u=\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}y^2+r:2y$, e questo valore di u si sostituisca nella equazione $z=q-u+y^2$, si troverà $z=\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}r:2y$; e questi valori di u, e z sostituiti nella equazione $uz=s$, si averà finalmente $y^6+2qy^4+q^2y^2+r^2-s=0$, in cui facendo $y^2=t$ verrà $t^3+2qt^2+q^2t-r^2-s=0$.

2. Ridotta così l'equazione al terzo grado coi metodi dati nell'Articolo superiore, si potrà risolvere, e trovare tutte e quattro le sue radici. Si deve avvertire però, che solamente quelle equazioni di quarto grado si possono risolvere, che hanno due radici reali, e due imaginarie, perchè ogni qual volta, o tutte le radici sono reali, o tutte imaginarie, da esse derivano tali equazioni cube, che hanno tutte le radici reali, e siccome queste sono irresolvibili, così ne pur quelle potranno risolversi. Si conosce un'equazione di quarto grado avere, o tutte le radici reali, o tutte le radici imaginarie; primo, ogni qual volta in una equazione di quarto

gra-

grado manca il ſecondo termine, e'l terzo ha il ſegno $+$ tale equazione ha due radici imaginarie. Se poi da tale equazione derivi una di terzo grado, che abbia tutte le radici reali, allora l'equazione di quarto le averà tutte imaginarie. Secondo, quando l'equazione cubica derivata ha il ſecondo termine negativo, e 'l terzo poſitivo, l'equazione di quarto grado ha tutte le radici reali. Terzo, ſe nell'equazione cubica derivata il ſecondo, e terzo termine ſaranno negativi, tutte le radici dell'equazione di quarto grado ſaranno imaginarie.

3. Ora è neceſſario far vedere come l'equazioni di quarto grado ſi riducano al terzo; ſi aſſumono indeterminatamente due equazioni di ſecondo grado, e ſi moltiplicano fra loro, il prodotto ſi paragoni coll'equazione data, e ne inſorgeranno tante equazioni, quante furono le incognite preſe nelle due ſudette equazioni; laonde ſe da queſte equazioni ſe ne ricaverà un'altra, nella quale reſti quella ſola quantità indeterminata, che è coefficiente al ſecondo termine in ambedue l'equazioni componenti, aſcenderà quella a ſei dimenſioni riducibile ad un'altra di terzo. Ecco l'eſempio.

4. Sia $x^4+px^2+qx+r=0$ da ridurſi ad un'altra cubica; ſi prenda $x^2+yx+a=0$, ed $x^2-yx+b=0$, i ſecondi termini ſi prendono di ſegni contrarj, acciochè la compoſta manchi del ſecondo termine; il fatto di queſte due è $x^4+ax^2+bx^2-y^2x^2-ayx+byx+ab=0$, e facendo il paragone de i termini ſi trova $a+b-y^2=p$; $by-ay=q$; ed $ab=r$.

5. Ora da queſte equazioni ſe ne deve cavare un'altra, in cui non s'incontri, che la incognita y, nella prima ſi ha $a+b=p+y^2$, e moltiplicandola per y verrà $ay+by=py+y^3$, nella ſeconda ſi ha $by-ay=q$, aggiunta queſta alla ſuperiore, ſi averà $2by=py+y^3+q$; e ſottraendola dalla ſteſſa verrà $2ay=py+y^3-q$, perciò moltiplicando inſieme queſte due equazioni, ſi farà $4aby^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$, e perchè nella terza equazione abbiamo

mo $ab = r$ si averà $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$, e facendo $y^2 = z$, si averà $4rz = p^2z + 2pz^2 + z^3 - q^2$, e questa essendo formola generale potrà a questa ogn' altra equazione ridursi.

6. Un' altro metodo propone Giacinto di Cristoforo, ed è il seguente: sia $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, si supponga essere la radice della prima parte $x^2 + y$, sarà la quantità da aggiungersi da ambe le parti $2yx^2 + y^2$, onde averemo $x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2px^2 + 2yx^2 + 4qx + r + y^2$, in cui ambedue le parti saranno quadrati perfetti.

7. Ora perchè il fatto de i due termini estremi del quadrato d'un binomio è uguale al quadrato della metà del termine di mezzo; quindi è che il fatto di $2px^2 + 2yx^2$ in $r + y^2$ sarà uguale al quadrato della metà di $4qx$; laonde fatta questa equazione, si troverà $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$, con cui potremo trovare il valore di y, Art. 4. Sempre che poi l'equazione proposta sarà divisibile in due altre quadratiche l'equazione cubica sudetta potrà risolversi, e così si troverà il valore di $2yx^2 + y^2$, cioè delle quantità da aggiungersi da ambe le parti dell' equazione data per farla divenire quadratica: chi più desidera vegga la Lettera del sudetto Giacinto al Galizia posta al fine del suo Trattato de i Triangoli.

METODO GENERALE PER RISOLVERE TUTTE L'EQUAZIONI.

8. Per la soluzione dell' equazioni di qualunque grado devesi primieramente osservare, se queste siano di dimensioni pari, o dispari, poichè, se sono di dimensioni pari, devono avere due radici reali, e le altre imaginarie, altrimenti sono irresolubili; se poi sono di dimensioni in numero dispari, allora devono avere una sola radice reale, e le altre tutte imaginarie. La radice poi delle equazioni può contenere solamente tanti termini, quante sono le dimensioni, alle quali ella sorge, nè può averne di più, ma bensì di meno, e ciò succede quando

l'equal'equazione non è piena di tutti i suoi termini; e perchè tra i termini delle radici dell'equazioni sempre ve ne è uno uguale al coefficiente del secondo termine diviso per l'esponete del primo, ogni qual volta nell'equazione mancherà il secondo termine mancherà ancora nelle radici un termine; onde per le sue risoluzioni potranno assumersi tanti termini per la radice, quante sono le dimensioni del primo termine, ed una di meno.

9. Si assumino le radici dell' equazione indeterminate, e con esse si faccia un' altra equazione, e comparando questa con la data, le radici poichè si prendono indeterminate, siano una reale, e l'altre tutte imaginarie, se l'equazione sarà di grado dispari: se poi sarà di grado pari se ne prendono due reali, e l'altre tutte imaginarie. Tutto ciò esemplificherò in una equazione quadratica $x^4+4px^2+8qx+4r=0$ si supponga aver questa due radici reali $x-a-b=0$, $x-a+b=0$, e due imaginarie $x+a-\sqrt{-c^2}$, $x+a+\sqrt{-c^2}$, moltiplicate queste fra loro, nasce $x^4-2a^2x^2-b^2x^2+c^2x^2-2ab^2x-2ac^2x+a^4-a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2=0$, e paragonati i termini di questa coi termini della equazione data ne insorgono altre tre equazioni $4p=c^2-b^2-2a^2$, $8q=-2ab^2-2ac^2$, $4r=a^4-a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2$, ed essendo tre equazioni, e tre incognite a, b, c, sarà facile venire in cognizione di esse, dico a, b, c essere incognite, perchè tali sono nel caso nostro, e per conseguenza della radice x, per avanzo della resoluzione d'un altra equazione di terzo grado, a cui le sudette equazioni conducono.

10. Un' altro metodo si pone per arrivare alla notizia delle radici d'una equazione. Si faccia l'incognita eguale a tanti termini, a quanti ascende nell' equazione meno uno, poi si alzino questi alla potestà, a cui sorge l'equazione data, quindi si faccia il paragone de' termini come siegue, e si abbasserà l'equazione un grado, e si ripeta lo stesso tante volte, finchè si arrivi all'equazione di secondo grado.

11. Sia

11. Sia v. g. $x^3 = 3px + 2q$; si ponga $x = a + b$, sarà $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Si devono dunque separare dal cubo della radice binomia $a + b$ i termini, che devono agguagliarsi a $3px$ da i termini, che devono agguagliarsi a $2q$; e primo essendo $2q$ quantità del tutto razionale, e $3px$ contenga la radicale x, le quantità della potenza del binomio dovranno dividersi in due, una razionale, e l'altra, che moltiplica $a \times b$, e sarà uguale a $3p$, e quella a $2q$, cioè $a^3 + b^3 = 2q$, e $3ab = 3p$: ora facilmente si stermineranno le quantità a, b. Ecco il calcolo

$$a^3 = 2q - b^3 \qquad a^3 = p^3 : b^3 \text{; dunque}$$
$$2q - b^3 = p^3 : b^3$$
$$b^6 - 2qb^3 = -p^3$$
$$b^3 = V(q^2 - p^3) + q$$
$$a^3 = p^3 : (V(q^2 - p^3) + q)$$

Sia ora $p = 2$, $q = 4\frac{1}{2}$, averemo $b^3 = 8$, cioè $b = 2$, ed $a = 1$, sicchè sarà $x = 3$ radice desiderata.

12. Per le radici ineffabili si è pensato a ricercare di esse almeno i Limiti, cioè due quantità una certamente minore, e l'altra maggiore della radice cercata, e la minore va con progresso all'infinito crescendo, allorchè la maggiore con egual passo scema, sempre in maggiori angustie riducendo la vera radice, senza potere mai raggiungerla. Questa regola da molti viene spiegata, onde io me ne astengo.

ARTICOLO VI.

Applicazione del Calcolo alla Fisica.

1. Uno de i grandi vantaggi, che riportan coloro, che alla scienza del Calcolo s'applicano, si è quello di veder la natura nel suo giusto lume, ravvisare le vere cagioni de' suoi effetti, spiegare i diversi modi di operare, nè potere essere abbacinati, o dalla rappresentazione delle cose, che da i sensi loro si fa, o da

un

un ſucato circuito di parole, nelle quali, oltre il puro ſuono della voce, altro non ſi ritrova.

. . . . ſoliti dare nomina rebus
Pro cauſis unoque ſecans problemata verbo.

La ſcienza, di cui ſi ſono quì eſpoſti i principj, grazie a Dio, è quella, che ſquarcia il velo all'intelletto, e ſcuopre il vero sì bene, che la noſtra mente incapace di tanto lume bene ſpeſſo dalla gioja ſorpreſa, ammirandone la cagione, eſaggera, come già fece il Licida d'Arcadia.

Saggio filoſofar, da cui tralucemi
Dolce barlume di quel ben, che l'anima
A ſpiragli de' ſenſi ſpuntar vedeſi
Per farle giorno, ma non cape l'oſpite
Nel troppo anguſto miſero tugurio.

2. In tutta la ſcienza naturale ſi trovano intoppi sì gagliardi, che del più delle coſe non ſe ne ſa rendere la ragione, e ſenza dubbio le a noi più oſcure ſono le Meteorologiche, sì perchè noi d'appreſſo, come ſi converrebbe, non le poſſiamo rimirare, sì perchè ci mancano ſufficienti eſperienze. Nulladimeno da che i più ſcienziati hanno incominciato ad adattare le figure, ed i caratteri Mattematici alla Filoſofia, quaſi con facelle in mezzo a un gran bujo molto ſi va ſcoprendo di quanto prima era incognito. Io per tanto, acciochè ſi abbia qualche ſaggio circa l'applicazione del calcolo in queſta materia, pongo nel preſente Articolo la ſoluzione di un problema Fiſico de' più volgari, ma per l'ordinario male inteſi, e peggio ſpiegati; e ſia del come ſi forma la Pioggia.

3. Vuolſi in primo luogo premettere, che i corpi fluidi ſiano compoſti di menome parti, e che ſiano tra loro facilmente ſeparabili, ma non talmente, che ſcambievolmente non ſi reggano da un glutine, o ſia capillizio, per cui una qualche forza non ſi ricerchi per ſepararle. Che però i corpi immerſi, e poi tolti dall'acqua eſcono veſtiti d'una ſottiliſſima tonaca di quell'umore,

e le

e le goccie s'attaccano alla ſuperficie de' corpi, ed in ſe ſteſſe pendule reſtano.

4. In ſecondo luogo i fluidi, che nella noſtr'aria immerſi ſono, ſogliono eſſere abbondantemente d'aria impregnati, come ci atteſtano l'eſperienze fatte nella machina del Boile, il moto in eſſi eccitato dal fuoco, l'accreſcimento del gelo, e mille altre.

5. In terzo luogo, eſſere l'aria capace di condenſazione, e rarefazione, e tale effetto in eſſa indurſi dal moto turbinoſo eccitato da i raggi del Sole, o dal fuoco, che volgarmente diceſi calore, e che in eſſa la diminuzione del moto nelle ſue particelle ſia un ridurla in minor luogo, che ſe poſſibile foſſe ogni moto da lei togliere, è probabile, che ridurrebbeſi alla ſolida conſiſtenza di gelo, o ſia coagulo, quale ſi oſſerva nell'acqua, che per eſſere più corpulenta, o ſia di molecule più groſſe compoſta è più diſpoſta alla quiete.

6. In quarto luogo, che i corpi quanto più ſcemano in mole tanto più creſcono in ſuperficie, cioè non iſcemare le ſuperficie nella ragione de i corpi, ma queſte reſtare ſempre maggiori, v. g. ſe una sfera ſi ſeghi per mezzo, abbenchè dall' emisferio ſia ſtata tolta la metà della sfera reſta intatta la metà della ſuperficie, ed inoltre ſi ſcuopre di nuovo un' intiero cerchio maſſimo. Le quali coſe eſſendo preſuppoſte

7. Le particelle dell' aria nell' acqua ſepolte da eſſa d'ogni intorno premute occupano sì piccolo ſpazio, e ſono di tanta ſuperficie, che con tutto, che ſiano di gravità ſpecifica minore d'egual particella d'acqua, non poſſono per l'adeſione con le particelle circumambienti in eſſa ſormontare: onde ivi vengono a forza ritenute; ma ſe un agente gagliardo come il Sole, e 'l fuoco le agiti, elleno concepiſcono il moto impreſſo, ed occupando luogo maggiore poſſono da maggior copia di particelle eſſere circondate, ed in ſu ſollevate dalla forza, che altri dicono di gravità, altri centripeta, la di cui cagione

ne è al pari d'ogni oſcuriſſima coſa naſcoſta. Queſte dunque così gonfiate ſalgono alla ſuperficie dell'acqua, ma coperte, e veſtite di eſſa quaſi un palloncino da giucare, in quella guiſa appunto, che nell' eſtate, cadendo dalle alte nubi groſſe goccie d'acqua ſopra d'una peſchiera, formano in quella altrettante di quelle palle, perchè eſſendo ben grande il globo d'acqua cadente, e per l'altezza, onde partiſſi, facendo impeto notabile ſopra la ſuperficie della peſchiera, in quella fa un profondo forame, cui l'acqua ſuperiore toſto ricopre, e l'aria nel foro ſepolta ſubito in alto viene riſpinta dall'acqua d'intorno poſta, ed ella veſtita va poi galleggiando ſopra eſſa. Così ſe queſti globuletti, o come altri dicono ſonaglietti ſiano piccoli, ſi ſtaccano dalla ſuperficie dell' acqua, e benchè d'eſſa veſtiti eſſendo pur'anche in iſpecie meno gravi dell' aria in eſſa ſormontando tant' alto ſalgono, ſinchè dilatandoſi pur di vantaggio l'aria intrinſeca per la minor preſſione dell'ambiente, o reſtringendoſi per il freddo del ſito, ove ſi adunano, crepano, ed immediatamente circondata quell'acqua dalla preſſura dell'aria vien riſtretta in un piccioliſſimo globuletto, o ſia elliptoide, il quale a cagione dell'adeſione, e della poca differenza di gravità ſopra egual volume d'aria, quella penetrare non potendo ivi a rimanerſene è coſtretto.

8. Così eſſendo molti di queſti globuletti quaſi ſemi della pioggia ragunati nell'Atmosfera, giacchè dal mare, da i fiumi, laghi, e corpi tutti perpetuamente ſi eſalano, e poi dalla forza de' venti conglomerati, in grandi nuvole ſi uniſcono, e creſcendo di mole, e ſcemando di ſuperficie ſi fa in maniera, che la loro gravità ſuperi l'adeſione, onde giù precipitano, e ſi forma la pioggia, che ſe molte ſiano le particelle per l'aria diſperſe, la pioggia non ceſſa così preſto, ma giorni, e meſi proſeguiſce a ſcaricarſi dall'aria l'umore aſſorbito. Onde Lucrezio nel libro 6.

At retinere diu pluviæ, longumque morari
Consueverunt ubi multa fuerunt semina aquarum.

9. Tutto questo discorso dà un barlume della cosa, come ella vada, ma nulla determina precisamente. Ecco dunque che con l'ajuto del calcolo discenderemo ad intenderla sino all'ultima esattezza. E' dimostrato, che il peso de' corpi cresce, o cala, al calare, o crescere della loro massa in triplicata ragione de i diametri, e la superficie cresce parimente, o cala in sola duplicata ragione de i diametri, cioè il peso della sfera di diametro 2 al peso della sfera di diametro 1, sta come 8 a 1, e la superficie della prima alla seconda sta come 4 a 1; onde vedesi, che sotto quattro superficie stanno 8 pesi, e sotto una solamente uno, onde la forza di superare l'adesione di 4 superficie nel primo corpo è 8, e nel secondo la forza di superarne una è una.

10. Che però se al vapore, il di cui diametro sia $= a = 1$, e'l peso $= b$, resista l'aria con la resistenza $= c$, e si ponga il peso del vapore al peso dell' aria dell' istessa mole in qualunque ragione di maggiore ineguaglianza di $m:n$; che secondo l'esperienze del Burchero in *quæst. Acc. de Aeris gravitate Th.* 52. sta come 74743:77, sarà $m.n :: b.nb:m$, e questo sarà il peso dell'aria, che fa forza contro il peso b, e $b - nb:m$ sarà il peso parziale del vapore, a cui resiste l'adesione dell'aria con la resistenza c. Ora si ponga x diametro del vapore più grande, acciochè la resistenza dell'aria sia nulla, e perchè la resistenza cresce in duplicata ragione de i diametri, se si faccia $a^2.x^2 :: c.cx^2:a^2$ sarà $cx^2:a^2$ la resistenza dell'aria al vapore, il di cui diametro è x, la quale acciochè sia nulla, deve uguagliarsi all'eccesso, col quale il peso del vapore cercato supera il peso dell' aria d'egual mole. Si faccia dunque $a^3.x^3 :: b.bx^3:a^3$, sarà $bx^3:a^3$ il peso del vapore cercato; ma facendo $m.n :: bx^3:a^3.nbx^3:ma^3$, sarà $nbx^3:ma^3$ il peso dell'aria, la di cui mole uguagliasi al vapore cercato: adunque questo peso sottraendolo dal peso del

va-

vapore cercato sarà $mbx^3 - nbx^3 : ma^3$ l'eccesso del peso conveniente al vapore cercato sopra altrettanta aria. Laonde per ipotesi questo eccesso essendo uguale alla resistenza dell' aria sarà $mbx^3 - nbx^3 : ma^3 = cx^2a^2$, overo $a^2mbx^3 - a^2nbx^3 = ma^3cx^2$, e dividendo per a^2x^2 sarà $mbx - nbx = mac$, adunque $x = mac:(mb - nb)$, laonde accresciuta di qualunque augmento la quantità di questo diametro, il vapore scenderà nell' aria. Ora secondo il sopracitato Burchero essendo $a = 1$, $b = 74743 = m$, $n = 77$, averemo $x = c:74666$.

11. Così il vapore di minor diametro sarà in su spinto dall'aria, e nella stessa maniera si determinerà la grandezza della particella aerea, che in su si spinge dall'acqua. Avverto di passaggio, che la sollevazione de' vapori si fa ancora dalla pressione dell'aria sopra de' corpi bagnati in quella guisa, che posto un cannellino capillare, o due lastre insieme unite perpendicolarmente sott'acqua in esse oltra il livello in su ascende il liquore da se medesimo ad altezza assai considerabile, donde ripeter si può la nutrizione di tutti i vegetabili, ed altri effetti mirabili in natura.

12. Si osserva nel Barometro il Mercurio rade volte perseverare alla stessa altezza per tempo notabile, ed allora singolarmente discendere, quando o è in procinto per cadere la pioggia, o già l'aria de' non suoi vapori si scarica, e nelle grandi procelle sensibilissima è la sua discesa, ed allora solamente alla massima altezza sale, quando l'aria è affatto quieta, e tranquilla. Che di questi effetti ne sia cagione il Cilindro Aereo sopra il Mercurio premente, dopo il Torricelli non v'è stato chi ciò ragionevolmente abbia in dubbio rivocato; si cerca ora la cagione della variazione del peso di tal Cilindro in tali circostanze di pioggia, e di serenità.

13. Quando l'aria è serena stanno in quella gli attenuati vapori dispersi, e perchè in quiete, ed aderenti all' aria premono sopra di lei con la loro differenza di

peso sopra egual volume d'aria, onde essa più grave si rende, e più in alto solleva nel Barometro il Mercurio, che se pura fosse, o di tali vapori spogliata.

14. Ora se questi vapori dal vento insieme raccolti, si uniscano, e già la loro gravità specifica superi l'adesione, ed incomincino a precipitare, il Cilindro Aereo, sopra cui si appoggiano, scema di peso, e cala nel Barometro il Mercurio. Si deve di ciò render ragione per cui gravissima controversia insorse tra'l Ramazzini Professore di Medicina in Padova, e'l Schelamero Professore della stessa Scienza in Kiel d'Olstein, la qual controversia fu poi terminata dal sublime ingegno del Leibnizio con una esperienza degna di tanto uomo. Pose egli in una parte della bilancia un vaso pieno di acqua, entro cui immerse un piombo sostenuto da un sottil filo pendente dal braccio della bilancia, e dall'altra parte ad esatto equilibrio contrapose un' altro peso. Stando così le cose, tagliò il filo, che sosteneva il piombo, sicchè quello scendesse al fondo del vaso, entro cui già era sommerso; ed avvertì, che nel tempo della discesa tal parte della bilancia meno grave divenne, onde tolto l'equilibrio salì in alto; dunque ei concluse il corpo, che in un' altro fluido si muove, non gravita più con lo stesso peso contra il fondo comune. Se di ciò ne cerchi in Leibnizio la ragione, ei a guisa d'oracolo nella lettera scritta da esso al Ramazzini riferita dallo stesso nelle sue Efemeridi Barometriche alla carta 196. dell' edizione del Gonzati di Padova, così parla: *His positis durante descensu corporis cessaturum esse æquilibrium ajo, descensurumque pondus, ac tubum elevatum iri. Cujus rei ratio est manifesta, quod quantum descendit pondus, in tantum ab aqua in tubo libra non sustinetur, & eatenus non resistit ponderi opposito*. Questo, che dice essere sì manifesto il Leibnizio, ricerca nondimeno in chi egli non è, notabile attenzione per bene intenderlo.

15. Ora noi consideriamo tutto ciò, che succede do-

po

po il taglio del filo nel vaso, immediatamente il piombo con l'eccesso di gravità sostenuta prima dal filo gravita sopra il fluido sottoposto, ma questo cedendo tal gravitazione s'impiega a comunicare il moto alle particole sottoposte per quella parte ove esse possono andare, che è nel luogo superiore abbandonato dal piombo. Laonde il corpo discende con la medesima velocità, con la quale egual volume di parti acquee sormonta il detto corpo. Ora questo discendendo, e spingendo le sudette parti altrove non gravita, che in esse, ed esse salendo allora in su gravitare non possono verso del fondo, adunque nel vaso nell'atto della discesa manca il peso d'egual volume di parti, quanto è di quelle, che salgono. Che manchi poi la gravitazione del corpo discendente, io stimo di no, perchè egli discendendo perpetuamente comunica eguale impeto alle parti del fluido sottoposte, le quali con egual forza spingono le inferiori, che le superiori, e non potendo quelle cedere per la loro impenetrabile natura fan forza contro del fondo, e necessitano quelle a procacciarsi altra strada di sotto in su, onde tal forza nel fondo è uguale all'impeto del corpo cadente. Il simile si dica dell'acqua discendente, allorchè in essa un corpo in ispecie meno grave ascende, come confermasi con ripetere la stessa esperienza all'opposto.

16. Ora è facile l'applicazione di ciò al caso nostro, le particelle dell'acqua calando per mezzo all'aria fanno egual mole d'aria in alto ascendere, onde questa cessa nel soggetto piano a gravitare, ed ecco come il Mercurio discenda nella fistola Torricelliana, anzi come si dilatino i pori de' corpi umani, maggiori si facciano le traspirazioni, più torpide seguano in essi le circolazioni de i fluidi, a cagione de i dilatati canali, meno esatte si facciano le separazioni degli umori in tempo piovoso, ed aria leggiera, che in tempo sereno, e mille altri effetti assai bizzarri, che luogo quì non è di ridire per essere

ſere tutt' altro il noſtro aſſunto, quando a noi di ſoverchio ſarà, ſe una volta tutti credano ciò, che è certiſſimo, cioè, che *biſogna confeſſare* (per uſare le parole del Guglielmini nel Proemio della natura de' fiumi) *che la Filoſofia è obligata di riconoſcere tutto il ſuo qualſiſia incremento dall' attenzione, che hanno avuto i Matematici d'impiegare in vantaggio d'eſſa medeſima le regole della Geometria ecc.*

ARTICOLO VII.

Calcolo applicato alla Geometria.

1. LE queſtioni Geometriche, o ſono circa le linee, o circa le ſuperficie, o circa i corpi, tutte o ſono di definita relazione, o pure di relazione indeterminata. Per quelle ſi viene alla finale, e preciſa ſoluzione, e per queſte ſi adoprano le coſtruzioni de i luoghi Geometrici, e delle equazioni, che è appunto la quarta regola dell'Algebra, e diceſi propriamente Analiſi; le queſtioni definite ſi poſſono variamente proporre mutate, o le coſe, che ſi cercano, o i dati, v. g.

Fig. 1. 2. Sia un circolo ADBC, in cui ſia il diametro AB, e la corda CD ad angoli retti, e dal vertice del diametro ſiano tirate altre due corde CB, BD, queſte quattro linee poſſono eſſere fra loro di definita relazione; pure di queſte poſſono proporſi diverſe queſtioni diverſificandoſi le linee cercate, e le date. Poichè, dati i lati del triangolo CBD, può cercarſi il diametro, o pure eſſendo dati due lati del triangolo, e 'l diametro può cercarſi la baſe, o pure dato il diametro, e la baſe poſſono cercarſi gli altri lati, e mutandoſi come ſi voglia, eſſendo determinata la relazione di queſte linee, ſempre ne inſorgerà l'equazione definita, e ſempre del grado medeſimo, come ora vedremo.

3. Dati i lati $CD = a$, $CB = DB = b$ ſi cerchi il diame-

metro AB$=x$ per la 47. d'Euclide $\sqrt{(b^2-\frac{1}{4}a^2)}=$EB, e per la 29. del 3. AE$\times$BE$=x\sqrt{(b^2-\frac{1}{4}a^2)}-b^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2$, cioè $\sqrt{(b^2x^2-\frac{1}{4}a^2x^2)}=b^2$, onde si cava $x=b^4:(b^2-\frac{1}{4}a^2)$. E nella stessa maniera operando per gli altri casi si caverà la stessa equazione.

4. Ora ben si attendano i precetti fondamentali alla soluzione de' problemi Geometrici. In primo luogo si denominino le linee date, e le cercate, poi non avendosi alcun riguardo al noto, o all'ignoto, si considerino le loro relazioni, se cavar si possa qualche equazione. Quindi si faccia tal costruzione con tirare nuove linee, o perpendicolari, o parallele, o antiparallele, o in altro modo come si giudicherà opportuno per avere la congrua dimostrazione. Le proposizioni frequentissime ad usarsi per la soluzione de' problemi, e che bisogna avere in pronto, sono la 47. d'Euclide, tutte del 2. la 29. ecc. del 3. tutte le proporzioni espressive le proprietà della proporzione Geometrica; onde gran cura aver si dee a scoprire la similitudine de i triangoli, o indurvela con industria, così nel sommare, e sottraere le linee, e le potenze; sicchè tante equazioni da diversi canali si derivino, quante sono le quantità cercate.

5. Per i problemi particolari sarà bene sapere i problemi più speciali, v. g. se fatta cadere la perpendicolare dal vertice alla base d'un triangolo scaleno, e si cerchino i segmenti gioverà sapere, che la differenza de i quadrati de i lati è uguale al doppio rettangolo sotto la base, e la distanza del perpendicolo dal mezzo della base, il che viene per corollario della 13. del 2. d'Euclide, quale io dimostro per esercizio.

6. Nel triangolo ABC, sia AB$=a$, BC$=b$, CA$=c$, BE$=x$ per la 47. CE$^2=c^2-x^2+2ax-a^2$, e $b^2=x^2+c^2-x^2+2ax-a^2=c^2+2ax-a^2$, cioè $b^2-c^2=2ax-a^2$, ora essendo la base a, la distanza dal perpendicolo al mezzo della base $x-\frac{1}{2}a$, i due rettangoli saranno $2ax-a^2$. Che ecc. *Fig. 2.*

7. Se

7. Se si dia la ragione delle linee, esse non date, si assumano due linee ad arbitrio, che siano nella proposta ragione, se la necessità del calcolo lo esigga, si possono assumere più incognite ad arbitrio, così ancora più cognite, con avvertenza però, che a ciascuna delle incognite, che si pone, si possa trovare l'equazione, e che le cognite sian veramente tali, o almeno talmente dipendenti da altre cognite, che facilmente trovare si possano. Se nella questione entrino gli angoli, si adoprano le lettere esprimenti i seni di quegli angoli ecc. Ecco gli esempj.

8. Nel rettangolo ACB il quadrato dell' ipotenusa AB è uguale ai quadrati degli altri due lati AC, CB; si prova. Sia il triangolo rettangolo ACB, sopra la base AB si faccia il quadrato AE, e si dividano tutti i lati egualmente in I, e si facciano i semicerchi, che per esser l'angolo C retto, per C passerà il cerchio, e la BC sarà uguale ad AH$=$DF$=$EG, poichè gli angoli CAB, CBA sono eguali ad un retto, ed ancora gli angoli DAH, e CAB sono anch' essi uguali ad un retto; dunque tolto il comune CAB restano CBA, DAH uguali; dunque essendo i due triangoli equangoli, ed avendo un lato AB$=$DA saranno uguali, il simile dicasi degli altri DFE, EGB. Ora faccian si AB$=a$, CA$=b$, BC$=c$, sarà CH$=c-b$, dico $a^2=b^2+c^2$, il quadrato AE$=a^2$, il triangolo ACB $=\frac{1}{2}bc$, ma questi sono 4; dunque tutto il quadrato AE meno il quadrato HG è uguale a $2bc$, ma il quadrato GH è uguale al quadrato di $b-c$, cioè $b^2-2bc+c^2$; dunque $a^2=b^2-2bc+c^2+2bc$, cioè $a^2=b^2+c^2$, che si dovea provare.

Fig. 3.

9. Il Guisneo nel Libro 8. degli Elementi Parte 16. pone la seguente costruzione per provare il lato del pentagono, ma tace la dimostrazione: eccola dunque. Si tirino i due diametri BH, AH ad angoli retti, CB si seghi egualmente in D, si tiri AD, da cui si seghi DF $=$DC, e da AC si seghi CE$=$FA, asserisce la EB essere lato

Fig. 4.

lato del pentagono. Dimoſtra egli, che la potenza del lato del pentagono ſia uguale alle due potenze de' lati dell'eſagono, e del decagono; ma eſſendo BC raggio lato dell' eſagono, reſterà ſolamente a provarſi, che EC ſia lato del decagono. Il ſuo valore, per il numero 8. è $\sqrt{\frac{5}{4}rr}-\frac{1}{2}r$. Che queſto ſia valore del lato del decagono chiaramente ſi cava dalla 9. del 13. d'Euclide, nella quale ſi dimoſtra, che il raggio AC è medio proporzionale tra il lato del decagono, ed AB. Ora ſia $AD=x$, $AC=DB=r$ ſarà per la ſimilitudine de' triangoli ABC, ACD, $x+r.r :: r.x$, onde riſulta $x=\sqrt{\frac{5}{4}rr}-\frac{1}{2}r$. Che ſi dovea provare. *Fig. 4.* *Fig. 5.*

10. Pone il detto Guiſneo una particolarità degna d'eſſere avvertita, cioè, che la linea, che dal punto E parte per B debba neceſſariamente ſegare $CE=AF$, il che io così dimoſtro, ſuppoſta la coſtruzione della figura 4., ſi ha da dimoſtrare $CE=AF$; ſia dunque $EC=x$, $CA=CB=r$, $AD=\sqrt{\frac{5}{4}rr}$, $DF=CD=\frac{1}{2}r$, $FA=\sqrt{\frac{5}{4}rr}-\frac{1}{2}r$, $FG=y=\sqrt{\frac{1}{5}rr}$, $DG=\sqrt{\frac{1}{20}rr}$, ora ſi eſamini il ſeguente calcolo $BG=\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{20}rr}.FG=\sqrt{\frac{1}{5}rr} :: CB=r.CE=x$, e moltiplicando i medj, e gli eſtremi viene $\frac{1}{2}rx+x\sqrt{\frac{1}{20}rr}=\sqrt{\frac{1}{5}r^4}$, che diviſo per $\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{20}r^2}$ viene $x=\sqrt{\frac{1}{5}r^4}:(\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{20}r^2})$, il quale deve eſſere uguale a $\sqrt{\frac{5}{4}r^2}-\frac{1}{2}r$, come è di fatto. *Fig. 4.*

11. Nel quadrante del cerchio ſe ſi ſegano archi uguali AG, GF, FC, e dai punti delle ſezzioni cadano le perpendicolari GD, FE al raggio, le porzioni di eſſo raggio più vicine al centro ſono maggiori delle ſeguenti, cioè $BD>DE>EC$; ſi prova. Cadano dal punto F le perpendicolari FH, FI, FE, da C, CL da G, GD, ciò poſto l'angolo retto ABC è ſegato per ſuppoſizione in tre parti uguali, dunque l'angolo $CBF=BGD$ alterni nelle parall. AB, GD, e gli angoli $BDG=BHF$, e la $BF=BG$; adunque per l'8. del 1. $FH=BD$, ma $FH>FK>FI=DE$; dunque $BD>DE$; ſimilmente ſi dimoſtra $DE>EC$, poichè la CL prodotta paſſerebbe pe'l punto G; dunque ſe- *Fig. 6.*

gherebbe la IF, ma FL=EC, ed IF> LF; dunque è anche maggiore della EC. Che ecc. Ho voluto dimoſtrare queſta propoſizione, perchè è neceſſaria ne' Calcoli infiniteſimale, e differenziale per l'intelligenza delle differenze ſeconde.

12. E' chiaro, che ſe in vece di dividere il quadrante AC in parti uguali ſi dividerà il raggio, ſicchè ſi faccia BD=DE=EC, l'arco AG<GF<FC ecc.

13. Nel triangolo ACB ſia il lato CB> CA, da cui ſi ſeghi BD=CA, e ſi mandino da i punti D, C le perpendicolari alla baſe DE, CE, dico eſſere CA. CB :: DF. CE; cioè i lati come i ſeni degli angoli oppoſti, vedi il Capo ſeguente Artic. 2. ſi prova per la ſimilitudine de' triangoli BD=AC. BC :: BC. DE; che ſi dovea ecc.

Fig. 2.

14. In queſti, e ſimiglianti problemi eſſendoſi fatto eſercizio ſi può far paſſaggio alla ſoluzione de i problemi, che ſi propongono intorno alle curve, per i quali ſi deve attendere, o la deſcrizione d'eſſe curve per il moto locale d'altre linee, o ricercarſi l'equazione, che indefinitamente eſprima la relazione delle rette in una certa legge diſpoſte, e che terminano alle curve, o pure cavarſi l'equazione dalla natura di quel ſolido, dalla cui ſezione naſce la curva. Similmente ſi opererà, quando la curva non è in iſpecie data, ma cercaſi la ſua determinazione, e queſta ſi ricaverà dalla equazione, che ne inſorgerà dalle condizioni date, e dalla iſpezione della equazione, che inſorge dal Problema propoſto.

15. Per conoſcere una equazione a qual luogo Geometrico debba ella ridurſi porrò alcuni verſi, ne' quali nobilmente, e conciſamente ſi ſpiega dal Padre Abate D. Guido Grandi gran lume delle Scienze, onore della noſtra Italia nel ſecolo preſente, e Lettore delle Matematiche nello Studio di Piſa.

Qua-

Quadratum ignotæ alterius sine ductu utriusque, $y^2+ax-by=0$
Aut idem ductus junctus utrique quadro.
Si modo perfecti quadrati hinc forma resultet $y^2-2yx+x^2-ay=0$
Certa parabolici sint tibi signa loci.
Cum ductu ambarum si quando secunda potestas $xy+xx-ab=0$
Unius ignotæ, sive utriusque vacet, $xy-aa=0$
Inter assymptotos se flectet hyperbola: sed si
Cum signo absimili bina quadrata forent. $y^2-x^2+aa=0$
Aut simili conjuncta notâ, planoque duarum $y^2+x^2-3xy-bb=0$
Aucta, redundante hinc proveniente quadro.
Semper hyperbolicam poscet natura figuram,
Quæ diametralis segmina respiciat;
Cum simile est signum, quod jungit utrunque quadratum
Plani radicum deficiente nota. $\frac{1}{3}y^2+x^2-ab=0$
Aut, ubi non desit, quando minor esse videtur $ab-y^2-bx^2:c=0$
Quam quę juncta illis compleat inde quadrũ, $by^2:c+xy+x^2-ab=0$
Est locus ellypsis, quadrato ubi utrique deesset $y^2+xy+x^2-a^2=0$
Omne coefficiens, circulus esse potest.

Tanto credo essere sufficiente per introdurre il principiante nell'applicazione del Calcolo alla Geometria.

CAPO III.

Delle Progressioni.

ARTICOLO PRIMO.

Definizioni.

1. CRedettero alcuni degli Antichi Filosofanti questo solo sapersi, che nulla si sappia; ma grazie a Dio, che si sono scoperte, e di nuovo si vanno scoprendo in ogni facoltà nuove strade, e nuovi metodi sempre più facili, e certi, co' quali svelansi molte verità affatto celate agli Antichi. Così il mondo ha nuovamente saputo infiniti effetti prodursi dal peso dell' aria, e dal suo elaterio, altri innumerabili dall' equilibrio de' liquidi, il sugo nutrizio circolare nelle piante, e'l sangue con perpetuo giro scorrere per ogni fibra non meno de' corpi umani, che di tutti gli altri animali, de' quali la generazione, il numero, la specie poco meno che infinite, che ne ha manifestato il microscopio, chi può ridire? Quanti corpi vastissimi ne' Cieli con incredibile vantaggio sì delle Scienze, che delle Arti non ci ha scoperti il Telescopio? Passo sotto silenzio l' invenzioni Anatomiche, i moti mecanici ne' viventi, la resistenza de' solidi, ed altre innumerabili scoperte di cose o affatto celate agli antichi, o da loro, e da' posteri non bene intese, e basti per tutte la bella invenzione dell' Algebra, che ora abbiamo per le mani, che tuttodì va perfezionandosi da chi va dolcemente divorando fatighe immense, e gustando quel piacere ineffabile di chi vede la verità,

Che non gusta, non s'intende mai, Dante.

non piccolo antitodo recando alle miserie della nostra peraltro vita infelice, che laddove il peccato partorì l'ignol'ignoranza, e la morte, questa procura condurci al sapere, ed alla vita.

2. Dalla seguente particola dell'Algebra, che è delle progressioni, si giunge a parlare con evidenza d'un' obietto stimato già affatto imperscrutabile tanto, quanto è l'infinito. Questa è quella particola, di cui si servono i Matematici di miglior nota per rintracciare il vero ne' casi disperatissimi, come bene il de Martino avverte al Capo 9. *Hujusmodi series est, quasi sacra anchora, ad quam in maximè arduis, & desperatæ solutionis problematibus, ubi omnes aliæ humani ingenii vires naufragium passæ sunt, velut ultimi remedii loco saniores Mathematici confugiunt.*

3. La progressione è una moltitudine di termini in continua proporzione o Aritmetica, o Geometrica.

4. La progressione Aritmetica è una moltitudine di termini, che differiscono successivamente di qualche numero determinato.

5. Il termine della progressione è qualche numero positivo, o negativo, intiero, o fratto.

6. Progressione naturale è quella, i di cui termini successivamente differiscono della unità.

7. Incremento de' termini è la differenza dell'antecedente dal conseguente.

8. La progressione Aritmetica altra è crescente, altra è decrescente; questa va continuamente sminuendo i termini con egual diminuzione, quella va sempre augumentando i termini con egual' incremento. La decrescente ha il primo, e l'ultimo termine, cioè finalmente si viene ad un termine minore, o uguale alla differenza de' termini stando sempre ne' positivi. Ma la crescente posto il primo termine va all'infinito, non essendovi termine a cui non possa aggiungersi un tale incremento per formare il termine susseguente.

9. La progressione Geometrica crescente è una serie di termini, che nascono da qualche numero per un' altro

tro moltiplicato, e 'l prodotto ſucceſſivamente per lo ſteſſo moltiplicato in infinito, o pure è una ſerie di termini, in cui gli antecedenti egualmente ſi contengono ne' conſeguenti.

10. La progreſſione Geometrica decreſcente è quella, che naſce dalla continua diviſione di un numero per un' altro, eſſendo il diviſore coſtante, e li quozienti ſempre ſuddiviſi, e queſta va diminuendoſi parimente all' infinito: diconſi Geometriche, perchè tutti i termini ſono in continua proporzione Geometrica; v. g. la progreſſione creſcente è a, ab, ab^2, ab^3, ab^4 ecc. all'∞, la decreſcente a, $a:b$, $a:b^2$, $a:b^3$ ecc. all'∞.

11. Naſce ancora la ſerie infinita dalla diviſione, e dall' eſtrazione delle radici in un'altra maniera. Primo in numeri, ſe 'l diviſore non miſuri eſattamente il dividendo, il decuplo d'eſſo per il calcolo decimale, va creſcendo i quozienti in una ſerie infinita, così il 4 diviſo per 3 dà 1, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{3}{10000}$ ecc. all' ∞, e così dirai nella eſtrazione delle radici, ogni qual volta il numero da cui ſi eſtrae, è irrazionale procedendoſi per il calcolo decimale all' infinito, come già fu detto al Capo 3. Articolo 2. num. 5. Parte Prima.

12. Secondo, nelle quantità Analitiche ſe il diviſore ſia, v.g. binomio, e'l dividendo ſemplice, il quoziente è una ſerie infinita decreſcente, ſe ſi faccia a parte a parte non tutto inſieme, come ſiegue

$b-c)\ a\ (a:b+ac:b^2+ac^2:b^3+ac^3:b^4$ ecc. all' ∞.

$$
\begin{array}{r}
a-ac:b \\
\hline
ac:b \\
ac:b-ac^2:b \\
\hline
ac^2:b^2 \\
ac^2:b^2-ac^3:b^3 \\
\hline
ac^3:b^3
\end{array}
$$

Si noti in primo luogo, che ſe $b > c$ il quoziente infinito compoſto di termini tutti poſitivi è uguale alla quantità finita $a:(b-c)$, e forma una ſerie continuamente decreſcente, e diceſi Convergente. Ora ſupponendo $b=c$, cioè $b-c=0$ ne riſulta un mirabile quoziente, cioè $a:b$ infinite volte replicato, e pure tal'infinito moltiplicato per $b-c$ reſtituiſce la quantità finita a.

13. Si-

13. Similmente dividendosi lo stesso monomio per un binomio positivo ne viene una progressione Geometrica infinita di quantità alternativamente positive, e negative, v. g. a diviso per $b+c$ dà $a:b-ca:b^2+c^2a:b^3-c^3a:b^4+c^4a:b^5$ ecc. all' ∞, che se sia $b=c$, tutto sarà uguale $a:(c+b)$, il che pare un paradosso; poichè se $b=c$ la serie degenera in quest' altra $a:b-a:b+a:b$ ecc. all' ∞, e pure questa deve essere, come è di fatto, uguale ad $a:2b$, e pure essendo sì li termini positivi, che i negativi uguali, ed in numeri infiniti, pare, che dovrebbero essere tutti uguali a zero, e non ad $a:2b$, o al più ad $a:b$, dicendo, che l'ultimo termine della serie infinita (il che per altro è manifesto falso sopposto) sia un positivo, poichè in tal caso solamente quest' ultimo non si eliderebbe.

14. A questa difficoltà facilmente rispondo, che nella divisione perpetuamente avanza tutto il dividendo a. Ora sempre sarà vero, che il quoziente sarà quest' avanzo diviso pe'l suo divisore $b+c$. Ma se poi si voglia vedere ciò, che sia della serie $a:b-a:b+a:b-a:b$ ecc. all' ∞, questa è evidentemente uguale a zero, perchè ella è composta d'infiniti termini positivi, e d'altri infiniti negativi, i primi a questi secondi uguali: dunque questi con quelli tutti si elidono, e resta sempre come sopra tutto il divisore a da ulteriormente dividersi per $b+c$ per supposizione $=2b$.

ARTICOLO II.

Delle principali proprietà della progressione Aritmetica.

1. NElla progressione Aritmetica la somma del primo, e dell' ultimo termine equivale alla somma de i due equidistanti dal mezzo, ed al doppio del termine di mezzo, se il numero de' termini sia imparo.

Si

Si prova; siano quattro termini $\div a.\ b.\ c.\ d$, dico $a+d = b+c$, essendo gl' incrementi de' termini uguali, sarà $a-b=c-d$, dunque trasponendo sarà $a+d=b+c$: e se siano solamente tre $\div a.\ b.\ c$, essendo $a-b=b-c$ trasponendo sarà $2b=a+c$: e così se fossero in maggior numero i termini, sempre la somma de' due equidistanti da uno, o due intermedj è uguale, o al doppio del termine di mezzo, o alla somma de i detti intermedj. Che ecc. onde si cava.

2. Primo. Che qualunque termine della progressione Aritmetica contiene il primo termine, e tante volte la differenza della progressione per quanti termini ei sta lontano dal detto primo termine esclusivamente. Secondo. Dunque la somma sarà il numero de' termini moltiplicato per la metà della somma del primo, ed ultimo, poichè, essendo la somma del primo, ed ultimo uguale alla somma di ciascun binario de' termini equidistanti dai mezzani, per il num. 1. tanti saranno questi binarj, quanti la metà di tutti i termini, ancorchè i termini siano impari.

3. Se siano dati due termini d'una progressione, trovare i due di mezzo: siano i termini dati a, b, i mezzani saranno $\div a.\ a+x.\ a+2x.\ b$, per il numero 1. dunque $a+b=2a+3x$; dunque $x=\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}a$, e sostituendo questo valore in luogo di x, verrà questa progressione $\div a.\ \frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a.\ \frac{2}{3}b+\frac{1}{3}a.\ b$, se si voglia il termine di mezzo si chiami questo x, si averà $a+b=2x$: dunque il termine di mezzo sarà $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=x$.

4. Se siano dati il primo termine, che chiamo a, il numero de' termini m, e l'incremento n, è chiaro, che l'ultimo termine sarà $a+mn-n$, per il numero 2. e per lo contrario, se siano dati il primo, e l'ultimo termine d'una progressione Aritmetica con la differenza de' termini si troverà il numero de' termini, se dal massimo si levi il primo, e'l residuo si divida per la differenza de' termini, ed aggiungasi al quoziente uno.

5. Onde

5. Onde si cava primo, che se dall'ultimo termine se ne sottragga il primo, e 'l residuo si divida pe 'l numero de' termini meno uno, il quoziente sarà l'incremento, cioè supposte le sopradette denominazioni il primo termine è a, l'ultimo è $a+nm-n$, dunque $(a+nm-n-a):(m-1)$, cioè $(nm-n):(m-1)=n$.

6. Secondo. Il numero de' termini meno uno moltiplicato per la differenza, e sottratto dall'ultimo termine lascia il primo.

7. Terzo. Queste cose poste si troverà la somma della progressione per il numero 2. se si moltiplicherà $2a+nm-n$ per $\frac{1}{2}m$, cioè $ma+\frac{1}{2}nm^2-\frac{1}{2}mn$, cioè il primo + l'ultimo termine moltiplicato per la metà de' termini, danno la somma della progressione.

8. Quarto. Sia $a=1, n=2$; la somma della progressione de i numeri impari, che cominciano dalla unità, è il quadrato del numero de' termini; adunque tutti i quadrati nascono da questa progressione.

9. Quinto. Sia $a=2$, $n=2$, sarà l'espressione, $ma+\frac{1}{2}nm^2-\frac{1}{2}nm=m+m^2$, cioè il quadrato del numero de' termini più l'istesso numero de' termini sarà la somma della progressione, e così se $a=2$, $n=3$, sarà $\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m^2$ uguale alla somma di tutta la progressione ecc.

10. Nella progressione Aritmetica naturale sta la sua somma, o l'ultimo termine moltiplicato pe'l numero de' termini +1 come 1 a 2, cioè $(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})m.\ m+m^2 :: 1.2.$

ESEMPIO PRIMO.

11. Una sfera di metallo cada dalla Luna, il primo minuto faccia un miglio, il secondo 3, il terzo 5 ecc. secondo la legge de' corpi gravi cadenti, e nello stesso tempo venga dalla Luna verso la terra con moto equabile di 100 miglia per minuto il raggio riflesso, se è vero, che la luce non si propaghi in un'istante; dimando dopo quanti minuti la sfera giungerà alla luce? Suppongo x numero de' minuti, ne' quali la luce è arrivata dal glo-

bo, dunque ſarà arrivata a capo di 100 x, averemo per il viaggio del globo una progreſſione, in cui ſono noti il primo termine 1, il numero de' termini x, e la differenza de i medeſimi 2; dunque per il numero 4. l'ultimo termine ſarà $2x-1$; dunque per i numeri 2. e 7. la ſomma ſarà x^2, dunque $100x=x^2$, cioè $x=100$; adunque il globo perverrà alla luce al fine del centeſimo minuto; poichè la luce al centeſimo minuto averà corſo 10000 miglia, e'l globo a capo del centeſimo minuto anch'eſſo ſi troverà aver paſſato miglia 10 mila.

ESEMPIO II.

12. Tizio cava un pozzo profondo 100 cubiti con un maſtello capace d'una terza parte di cubito del terreno, vuol' egli guadagnare un quattrino per cubito, che farà di viaggio il detto maſtello. Si dimanda quanto dovrà avere? Quì è noto il numero de' termini, che ſono cento, è noto il primo, e l'ultimo termine 1, e 100, e la differenza de' termini 1, e perchè la ſecchia per cavare un ſol cubito di terra biſogna, che diſcenda tre volte vota, ed aſcenda tre volte piena, non portando più d'un terzo di cubito di terreno per viaggio, quindi è, che la ſomma della progreſſione naturale da 1 ſino a 100 dovrà moltiplicarſi per ſei, e ſi averanno tutti i cubiti corſi da eſſa ſino alla fine dell' opera, e per conſeguenza tutti i quattrini guadagnati da Tizio; ora per la ſoluzione vedi il numero 2. ſi ſomma il primo coll' ultimo termine, fa 101, quale ſi moltiplica per 50, fa 5050, che è la ſomma di tutta la progreſſione; ora perchè queſta deveſi prendere ſei volte ſi averà 303000 quattrini guadagnati da Tizio per cavare il detto pozzo, che ſono ſcudi 606.

ESEMPIO III.

13. Trova un numero, che diviſo per tre reſti due, diviſo per 5 reſti 4, e diviſo per 7 reſti 6. Nelle progreſſioni Aritmetiche, che hanno il primo termine uguale alla differenza, ſi trova un termine comune dopo

tanti

tantì termini reciprocamente quante unità sono nelle loro differenze, e la ragione si è, perchè ogni termine di tali progressioni contiene tante differenze, quanto egli dista dal primo; onde se si prenderà un numero de' termini della prima progressione, quanta è la differenza della seconda, e di questi tanti termini, quant'è la differenza della prima, si avrà in ambedue le dette progressioni il numero uguale, e 'l primo sarà il fatto di queste due differenze, e i susseguenti sono di questi i moltiplici; che se le progressioni saranno più di due, si pigliano i fatti di ciascun termine nell' altro, e si averà il sito in tutte tre le serie, ove trovasi il termine comune, avvertendo di prendere i minori prodotti per indicj delle serie di maggior differenza, e per l'opposto i maggiori per le minori.

14. Ciò posto si formino tante serie, quanti sono i divisori, e queste incomincino dagli avanzi, e si proceda con la differenza de' divisori, fino che si trovi il primo termine comune a tutte tre, il quale è chiaro, che diviso per le differenze darà per avanzo i primi termini di ciascuna serie, e dopo questo primo comune trovato gli altri successivamente saranno dopo tanti termini, quanto i fatti delle differenze reciprocamente si applichino, come sopra abbiamo detto, così nel caso nostro averemo per termine comune il 104, che sta nel 35 della prima, nella seconda al 21, e nella terza al 15, e questa procede collo stesso ordine di termini, perchè per il numero 4. sia il numero de' termini della prima progressione x, della seconda y, della terza z, gli ultimi uguali saranno $2+3x-3=4+5y-5=6+7y-7$, che ridotta dà $3x=5y=7z$; onde moltiplicati i coefficienti 3 per 5 fa 15, 3 per 7 fa 21, e 5 per 7 fa 35.

15. Questo istesso conto si suol proporre in varie maniere, come siegue. Un Capitano dimanda ad un' altro quanti soldati abbia: e risponde, che contandosi i suoi soldati a due a due, e poi a 3 a 3, e poi a 4 a 4,

e poi a 5 a 5, e poi anche a 6 a 6, non ne avanza alcuno, ma contandoli a 7 a 7 ne avanza uno. Si dimanda quanti soldati avesse il detto Capitano? Per la soluzione di questo quesito potrai fare come sopra, ma per più brevità trova un numero, che abbia le sudette parti, e che sia il minimo, che sarà 60; ora perchè diviso per 7 deve avanzar' uno, tante volte lo raddoppierai, finchè troverai quello, che sodisfa, che nel caso nostro è il 120; e se seguiterai a raddoppiarlo, ne troverai altri infiniti, il secondo sarà 540. Per sapere quante volte devi raddoppiare il 60 per trovare il numero moltiplice dello stesso, che diviso per 7 avanzi uno, vedi l'avanzo di 60 diviso per 7, ed avanza 4, i moltiplici di questo avanzo, che divisi per 7 avanza uno, indicano i moltiplici del 60, che divisi per 7 avanza uno, cioè 8 duplo del 7 è il primo, dunque il 120 duplo del 60 è il primo, che sodisfa, il 36 noncuplo del 4 è il secondo; dunque il noncuplo del 60, che è 540 sarà il secondo, che sodisfa, così il 64 sedicecuplo di 4 indica, che il sedicecuplo di 60 sarà il terzo numero, che sodisfa, e così degli altri.

16. Tutte queste dottrine van bene, ma sono assai difficili in pratica, perciò stimo meglio porre quì la maniera esposta da Giovanni Keil lezione 19. *ad veram Astron.* e la esemplificherò in una materia utilissima, quale è il quesito al §. 181. (e da noi promesso sopra Parte I. Capo 5. Art. 3. num. 7.) Cronol. di Cristiano Wolfio: *Datis Cyclis Lunæ, Solis, atque Indictionum invenire annum Periodi Julianæ, cui proprii sunt*; e lo risolve: *Cyclus Lunæ ducatur in* 4200, *Cyclus Solis in* 4845, *Cyclus denique Indictionum in* 6916, *facta partialia colligantur in unam summam, hæc dividatur per* 7980 *residuus est annus Periodi*; la soluzione è giusta, ma egli non rende ragione, perchè adoperare si debbano tali numeri, nè dà regola alcuna per ritrovarli. Egli cerca un numero, che diviso per 19 resti il numero del Ciclo Lunare

nare

nare competente all'anno dato, e lo stesso numero diviso per 28 resti un' altro avanzo, che sia il numero del Ciclo Solare dello stesso anno, e poi diviso il medesimo numero per 15 resti l'Indizione corrente in quell'anno. Per trovare questo numero bisogna trovarne tre, il primo de' quali diviso per 19 avanzi uno, e diviso per ciascuno degli altri due avanzi zero; l'altro numero diviso per 28 avanzi uno, e diviso per gli altri avanzi zero; il terzo diviso per 15 avanzi uno, e per gli altri avanzi zero; e questi tre saranno i numeri trovati dal Wolfio, i quali poi moltiplicati ciascuno per il suo numero ciclare dell'anno dato daranno tre prodotti, che sommati, e la somma divisa pe'l fatto de i tre Cicli intieri, che è il quarto numero del Wolfio, avanzerà il numero Ciclare Giuliano, in cui ritrovasi l'anno dato. Così si risolve.

17. Si trovi un numero, che diviso per 28 avanzi zero, e per 15 avanzi zero, e per 19 avanzi uno: si moltiplichi 28 per 15 averemo 420, che moltiplicato per un qualche numero x, e dal prodotto levando uno resterà un numero divisibile per 19: onde averemo $(420x-1):19$, che fatta la divisione avanza $2x-1$, il quale diviso per 19 non deve avanzare niente, dunque si faccia $2x-1=19z$, cioè $x=(19z+1):2$, e questo ancora deve essere divisibile per 2 senza avanzo; fatta la divisione avanza $z+1$, che diviso per 2 senza avanzo è chiaro, che $z=1$, dunque retrocedendo $x=10$, dunque il numero sarà 4200.

18. Per l'altro, in cui i divisori senza avanzo, sono 19, e 15, e per 28 avanza 1 si osservi il calcolo di contro, e si troverà 4855. Similmente, operando per l' invenzione del terzo numero, si troverà 6916, e per il quarto divisore basta moltiplicare i tre Cicli insieme.

$$19 \times 15$$
$$(285x-1):28$$
$$(5x-1):28$$
$$5x=28z+1$$
$$x=(28z+1):5$$
$$3z+1=5y$$
$$z=(5y-1):3$$
$$2y-1=u$$
$$y=(u+1):2$$

$(u+1):2$; dunque $u=1$, $y=2$, $z=3$, $x=17$, che

so-

sostituito nella quantità $(285x-1):28$, dà il secondo numero cercato 4845.

19. Si può a dirittura venire in notizia di un numero, che diviso per due, o più altri avanzino numeri determinati, v. g. sia dato il Ciclo del Sole 21, e della Luna 17 d'un'anno dato, cercasi qual'anno sia del periodo Dionisiano: si cerca un numero, che diviso per 28 resti 21, e diviso per 19 resti 17. Si farà così: si cerchino due numeri, il primo de' quali diviso per 28 avanzi zero, e diviso per 19 avanzi 17, l'altro diviso per 19 avanzi zero, e diviso per 28 avanzi 21.

20. Si ponga il primo numero essere $28x$, da cui suppongo, che togliendo 17 il residuo sarà divisibile per 19 senza avanzo; dunque si divida attualmente $28x-17$ per 19 avanza $9x-17$, il quale avanzo ancora è divisibile per 19 senza avanzo. Si faccia dunque $9x-17=19z$, sarà z numero intiero, ed $x=(19z+17):9$; essendo x numero intiero il 9 dividerà esattamente $19z+17$, e fatta la divisione avanza $z+8$, il quale ancora sarà divisibile per 9 senza avanzo, dove è chiaro, che $z=1$, e retrocedendo $x=4$, e $28x=112$, numero primo che si dovea trovare.

21. Per il secondo si discorra nella medesima maniera facendo $(19y-21):28=z$ concluderai $y=7$, e $19y=133$ secondo numero, che si cercava; dunque $112+133=245$ sarà il numero, che sodisfa al quesito, cioè l'anno dato è il ducentesimo quarantesimo quinto del Periodo Dionisiano. Che se si voglino due determinati moltiplicatori, si operi come al numero 14. e troverai uno essere 589 per il Ciclo Solare, e l'altro 476 per il Lunare, questi si moltiplichino per i numeri Ciclari dati, si sommino i prodotti, si divida la somma per il fatto di 19 in 28 resterà l'anno del Periodo 245.

ARTICOLO III.

Della progressione Geometrica.

1. LA principale proprietà di questa progressione è, che il fatto di due termini dovunque questi siano, ed in qualunque distanza fra loro, sempre è uguale al fatto di due altri termini da loro equidistanti di distanza opposta, cioè se d' uno si prende l' equidistante alla destra, dell' altro si prenda alla sinistra, e così ancora il fatto di due termini è uguale al quadrato del termine di mezzo; e la ragione si è, perchè sono tutti termini in continua proporzione Geometrica.

2. L'ultimo termine meno il primo diviso per il numero denominante la progressione meno uno è uguale alla somma di tutti i termini suoi antecedenti. Si prova. Siano sei termini in progressione Geometrica, starà così il primo al secondo come tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti; ma tutti gli antecedenti sono tutti i termini meno l' ultimo, e tutti i conseguenti sono tutti i termini meno il primo; dunque starà il primo al secondo meno il primo, come tutti i termini meno l'ultimo all'ultimo meno il primo. Ma perchè il primo al secondo meno il primo sta come 1 al numero denominante meno uno, adunque la somma di tutti i termini d'una progressione meno l'ultimo è uguale all'ultimo meno il primo diviso per il numero denominante meno uno, che si dovea dimostrare.

3. Dal che si cava, che la somma della progressione dupla sarà il doppio dell'ultimo termine meno il primo, la somma della progressione tripla sarà l'ultimo termine con la metà dello stesso meno il primo, e così della quadrupla sarà l'ultimo termine con il terzo della differenza tra esso, e'l primo ecc. Così nella progressione sesquialtera il doppio del primo sottratto dal triplo dell'

ulti-

ultimo darà la ſomma; nella ſeſquiterza il triplo del primo ſottratto dal quadruplo dell' ultimo sarà la ſomma; nella ſeſquiquarta il quadruplo del primo ſottratto dal quintuplo dell' ultimo darà per reſiduo la ſomma di tutta la progreſſione: e così delle altre.

4. Nella progreſſione Geometrica qualunque termine in ſe ſteſſo moltiplicato produce un' altro da ſe diſtante quanto egli ſta lontano dal primo, ſe è l' unità. Similmente ſe due termini ſi moltiplicano, il prodotto ſarà lontano dal maggiore quanto il minore ſta dall'unità diſcoſto, o pure tal prodotto diſta dall'unità quanto la ſomma de i due termini ſottopoſti della ſerie naturale Aritmetica, che incomincia dal zero, che è il fondamento del Calcolo Logaritmico Neperiano.

5. Nella progreſſione poi, che non incomincia dall' unità, il prodotto di un termine in ſe medeſimo diviſo per il minimo produce un' altro termine diſtante da ſe, quanto egli dal minimo ſi trova lontano. Similmente ſe due termini ſi moltiplicano, ſi produce un'altro termine tanto dal maggiore lontano, quanto il minore ſta dal minimo diſcoſto, diviſo però prima tal prodotto per queſto minimo.

6. Onde ſi deduce, che la ſomma di qualunque progreſſione Geometrica ſi trova togliendo il primo dall'ultimo, e'l reſiduo ſi divida pe'l numero denominante meno uno, ed al quoziente ſi aggiunga l'ultimo termine. Si troverà qualunque termine della progreſſione continuando queſta per alquanti termini ad arbitrio, e l'ultimo di queſti quadrato per il numero 4. darà un termine diſtante dal primo il doppio del numero della ſerie naturale ſottopoſta, queſto di nuovo quadrato darà il ſuo doppio ſito ecc. e preſi due termini, la ſomma de' due termini della progreſſione Aritmetica ſottopoſta ſarà il ſito del termine, che ſi vorrà, e moltiplicati i due detti termini della ſerie Geometrica il prodotto ſarà il termine cercato.

7. Si

7. Si deduce ancora, che nella progressione decrescente all' infinito si ha il massimo termine, e 'l minimo, il quale essendo infinitamente piccolo meritamente come nulla si reputa. Si ha ancora il denominatore della progressione, laonde sarà nota la somma di tal progressione infinita, cioè il massimo termine diviso per il denominatore della progressione diminuito della unità, a cui si aggiunga il primo termine, o pure come la differenza del primo dal secondo termine è al secondo, così il primo termine sta a tutta la somma di tutti i termini meno il primo; v. g. della progressione dupla discendente all' infinito $1. \frac{1}{2}. \frac{1}{4}. \frac{1}{8}. \frac{1}{16}$ ecc. all'∞, la somma sarà $(1-0):1 + 1 = 2$. o pure $\frac{1}{2}. \frac{1}{2} :: 1. x-1$, ove si cava la somma $x=2$.

8. Di quì nasce successivamente tutta l'Aritmetica degl' infiniti inventata già dal Wallisio, e proseguita da Isacco Bullialdo, la quale però cede di lunga mano al Calcolo differenziale del Leibnizio scoprendo questo infinite cose di più con felicità, e facilità mirabile.

9. Nella serie Aritmetica naturale ci sono infinite cose, delle quali scielgo le più utili; e primo, se si sommano i termini, e di mano in mano si segnano, per ogn' uno, che se ne aggiunga, si farà un' altra serie di numeri, che chiamansi poligoni triangolari, cioè numeri, che si possono disporre in figura triangolare senza avanzo.

10. Sommando poi i termini alternativamente cominciando dal primo 1, che saranno gl' impari, ne risulteranno tutti i quadrati, e sommando i termini per salto di tre in tre, ne risulteranno li pentagoni, e di 4 in 4 gli esagoni, e così di qualunque altro numero poligono, ma di questi si tratterà a parte.

11. Per ora lasciando gli altri mi giova considerare solamente la serie de' numeri quadrati. Nascono questi, come si vede, dalla serie de' numeri impari; ora si osservi., che qualunque numero quadrato costa di tanti termini di tal progressione quante unità ha la sua radice.

In oltre il quadrato di numero impari costa di tanti termini della progressione naturale, quante unità ha la radice: di questi termini è il medio la stessa radice, v. g. 25 sarà composto di 3. 4. 5. 6. 7, ma se il quadrato sarà pari, la radice si ponga due volte, o pure si prendano i suoi antecedenti, e li conseguenti uguali, e la radice si lasci, v. g. il 36, la di cui radice è 6 sarà formato dalla seguente progressione 4. 5. 6. 6. 7. 8, o pure da 3. 4. 5. 7. 8. 9; si osservi di più, che sapendosi il numero quadrato, e la sua radice si troverà subito il quadrato prossimo maggiore, se al detto quadrato si aggiungerà il doppio della sua radice, ed uno più, v. g. 25 ha per sua radice 5, se a 25 aggiungo due volte 5 più uno fa 36 numero quadrato prossimo maggiore di 25, e se vorrassi il prossimo minore si dovrà togliere dal quadrato dato uno meno del doppio della radice.

12. La famosa pittagorica dimostra, che i quadrati de i lati sono uguali alla ipotenusa, si cercano quali sono quei quadrati, che sommati facciano quadrato? Ecco la regola per trovarli tutti, parlo de' numeri intieri. Prendi due numeri differenti d'una unità, fanne il prodotto, il doppio di questo sarà un numero, la differenza de i quadrati di detti numeri sarà l'altro, v. g. prendo 6 e 7, i quali moltiplicati fanno 42, il suo doppio è 84 primo numero, il quadrato di 6 è 36, il quadrato di 7 è 49, la differenza di questi quadrati è 13 secondo numero: il quadrato di 13 è 169, il quadrato di 84 è 7056, questi sommati fanno 7225 quadrato di 85.

13. In qualunque progressione Geometrica, che incomincia dall' 1 tutti i termini alternativamente sono quadrati; e dopo il primo ogni tre termini sono cubi, ed ogni quarto sono quadro quadrati ecc.

14. In qualunque progressione Geometrica presi due numeri contigui ad arbitrio, e moltiplicati, e poi due altri contigui pur moltiplicati, e i due prodotti moltiplicati insieme sempre fanno quadrato. Vale questo in qua-

qualunque caso, che i due primi siano nella stessa proporzione de i due secondi.

15. Il numero cubo contiene tanti termini della progressione Aritmetica naturale, quante unità ha la radice. Il quadrato della radice è il termine intermedio, se ella è numero impari, se poi è pari, il quadrato di essa radice si pone due volte, v. g. la radice cuba di 125 è 5, e di 216 è 6, i termini della progressione componenti il primo cubo saranno 23. 24. 25. 26. 27, i termini componenti il secondo cubo saranno 34. 35. 36. 36. 37. 38 la dimostrazione è facile, poichè la somma di due medj, o'l doppio del medio è ugnale alla somma degli equidistanti, Art. 2. num. 1; ora il medio essendo il quadrato della radice, e tutti i termini essendo altretanti di questi quadrati quante unità ha la radice: dunque la somma di questi termini sarà il cubo della radice.

16. Dalla progressione dupla nasce la regola di ritrovare tutti i numeri perfetti data già da Euclide nella 39. del 9. cioè, che si sommino i termini della progressione dupla, che incomincia dalla unità; ed ogni qual volta s'incontra un numero primo, questo per l'ultimo aggiunto moltiplicato fa sempre un numero perfetto.

ESEMPIO PRIMO.

17. Se si ponga nel primo gradino della Scala d'Araceli un grano, 2 al secondo, 4 al terzo, 8 al quarto ecc. sino al 124; dimando quanti grani vi andranno? Per la soluzione di questo quesito, per cui v'è chi ha stampato libri intieri; si faccia una serie Geometrica dupla di nove termini con la serie naturale sotto, come vedi nell'esempio, poi si quadri il detto nono termine, che ha sotto l'otto, s'averà il 16°, questo nono per l'ottavo moltiplicato si averà il 15°, e'l 15° moltiplicato per il 16° si averà il 31°, il quale quadrato dà il 62°, e questo quadrato dà il 125°, che averà la caratteristica della serie naturale 124, dunque per il numero 6. la somma

sarà quest'ultimo quadrato meno il primo termine, cioè meno 1.

1. 2. 4. 8. 16. 256. 512. 32768. 65536. 2147483648.
0. 1. 2. 3. 4. 8. 9. 15. 16. 31.

non pongo tutto il numero per esser lunghissimo, e costa di 39 caratteri, il primo de' quali è 3, cioè vicino a 340 sestilioni in circa, numero affatto incomprensibile.

ESEMPIO II.

18. Lo Sturmio ne' suoi libri *de Mathesi Juvenili* riferisce alla pag. 119. tomo 1. quest' Istoria: *Sessa Ebn Dabir Indus cum Schachorum ludum à se inventum Regi Seberamo exposuisset, hic autem inventi præstantiam admiratus, ut quidquid liberet peteret reliquisset liberum, is nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola positum continuè duplicaretur, donec ad ultimum perventum fuisset. Rex conditionem tam vilem egrè ferens, istum granorum, triticorum numerum ei dari jussit nè uno quidem grano auctiorem. Quod ubi computistis ejus datum esset negocium illi facto computo retulerunt non esse in toto terrarum Orbe, ne dum in ipsius regno eam tritici copiam reperiundam, quæ summam istam adæquaret, quo audito, & evidenter sibi demonstrato magis admiratus est ingeniosam petitionem quàm ipsum primùm inventum.* Rui Lopez, che scrive di proposito di questo giuoco, vuole, che l'inventore si fosse un certo Filosofo, che viveva nella Corte di Amilino Re di Babilonia per nome Xerse dallo stesso inventato per ammonire il suo Re del suo ingiusto, e barbaro governo come felicemente è fama, che gli sortisse.

19. Per la soluzione di questo quesito si faccia come nel superiore, in cui essendosi trovato il termine 31°, questo si quadri si averà il 63°, il cui duplo meno il primo sarà la somma di tutta la progressione meno il primo, che compie per l'appunto il numero di granelli

18446744073709551615.

AR-

ARTICOLO IV.

Formazioni delle potenze.

1. Qualunque quantità ſi eleverà a qualunque potenza data, ſe ſi faccia uguale ad un binomio, v. g. ad $a+b$. Quindi ſi facciano due ſerie Geometriche, una delle quali incominci dall' unità, e proceda per a denominante, e l'altra, che ſotto a queſtà ſi deve porre, incominci dalla potenza data a ſiniſtra, e deſcenda ſino alla unità denominando la progreſſione il b. V. g. ſi voglia elevare $a+b$ alla potenza ſeſta le ſerie ſtaranuo così:

$$a^6.\quad a^5.\quad a^4.\quad a^3.\quad a^2.\quad a.\quad 1.\quad \textit{Serie prima.}$$
$$1.\quad b.\quad b^2.\quad b^3.\quad b^4.\quad b^5.\quad b^6.\quad \text{———} \textit{ſeconda.}$$

$$a^6.\ a^5b.\ a^4b^2.\ a^3b^3.\ a^2b^4.\ ab^5.\ b^6.\quad \textit{Prodotti.}$$

quindi i termini ſuperiori della prima ſi moltiplicano per gl' inferiori della ſeconda, come ſotto ſi vede eſeguito.

2. Ora biſogna trovare i coefficienti. Si facciano due altre ſerie: una degli eſponenti di a, l'altra degli eſponenti di b, che ſaranno Aritmetiche così:

$$6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$
$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$$

ſi divida il primo termine della ſerie ſuperiore a ſiniſtra per il ſuo inferiore, ſi averà per quoziente il coefficiente del ſecondo termine, il fatto de' due primi ſuperiori termini della ſerie Aritmetica diviſo per il fatto de' due primi inferiori dà il coefficiente del terzo termine, e così il fatto de' tre primi ſuperiori diviſo per il fatto de' tre primi inferiori dà il coefficiente del quarto termine, e così ſi proceda ſino alla fine, i quali coefficienti ſaranno 6. 15. 20. 15. 6, onde la potenza ſeſta di $a+b$ ſarà $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

3. Sa-

3. Sarà quindi facile far paſſaggio ad elevare un binomio a qualunque potenza indeterminata, che ſi chiami m, ſe ſi facciano due ſerie indefinite, che ſtaranno come ſegue:

$$a^m.\ a^{m-1}.\ a^{m-2}.\ a^{m-3}.\ a^{m-4}.\ a^{m-5}.\ \text{ecc.}$$
$$1.\ b.\ b^2.\ b^3.\ b^4.\ b^5.\ \text{ecc.}$$

i quali termini moltiplicati come ſopra danno i termini della potenza compita, ma ſenza i coefficienti; per trovare i quali ſi facciano ſimilmente degli eſponenti le due ſerie Aritmetiche come ſopra così:

$$m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.\ \text{ecc.}$$
$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$$

Ora i fatti de' ſuperiori diviſi di mano in mano per i fatti degl' inferiori daranno i coefficienti de' termini della potenza trovata. Laſcio l'ulteriore compendio ſu ciò di Neuton, che ſi trova in una lettera al Leibnizio dell'anno 1676, riferita dal Valliſio nel terzo volume delle ſue opere a carte 622. e ſpiegato dal Wolfio a carte 267. poichè non ha altra prova, che una induzione coſtante.

4. Ora ſarà facile aſſegnarſi la formola generale eſpreſſiva di qualunque poteſtà, a cui voglia inalzarſi un binomio, ſe inſieme ſi uniſcono i ſopradetti termini co i loro coefficienti, e ſarà la formola così $a^m + ma^{m-1}b + (m^2 - m):2.\,a^{m-2}b^2 + (m^3 - m^2 + 2m):6.\,a^{m-3}b^3$ ecc. all'∞. L'uſo di queſta formola in quello conſiſte, che determinandoſi l'eſponente m, cioè la poteſtà, a cui dovrà elevarſi il binomio, ſi averanno tutti i termini della poteſtà d'eſſo binomio, finchè m s'annulli, v. g. volendoſi il quadrato di $a+b$ ſarà $m=2$, dunque il primo termine della formola a^m ſarà a^2, il ſecondo termine $ma^{m-1}b$, ſarà $2a^{2-1}b = 2ab$, il terzo $(m^2 - m):n.\,a^{m-2}b^2$ ſarà $\frac{4-2}{2}a^{2-2}b = a^0b^2 = b^2$, ove m divien nullo; laonde tutti gli altri termini della formola generale per l'elevazione del binomio alla potenza ſeconda ſono inutili. Così ſi faccia per elevare il binomio a qualunque altra potenza, la qual coſa per eſſere chiariſſima fa, che io non ponga altri eſempj.

5. E'

5. E'da notarsi, che non solamente con questa formola può elevarsi a qualunque potenza il binomio, ma eziandio il trinomio, o altro multinomio proposto, se un termine del trinomio si prenda solitario, e tutti gli altri come uno; e fatta di questo nuovo binomio la potenza, in essa poi si sostituiscano i valori delle quantità prese separatamente, v.g. si vuole il quadrato di $c+d+f$, si faccia $c+d=a$, si averà per la formola $a^2+2af+f^2$, ora sostituendo in luogo di a^2 il quadrato di $c+d$, che pure per la formola è $c^2+2cd+d^2$, ed in luogo di a nel secondo termine si sostituisca $c+d$, si averà $2cf+2df$, onde si averà il quadrato del trinomio $c^2+2cd+d^2+2cf+2df+f^2$, e così delle altre potenze.

6. La predetta formola egualmente bene serve ad elevare le quantità alle potestà positive, che alle negative, cioè se l'esponente m sia uguale ad un negativo, con questo però, che la potestà viene infinita, uguale però sempre ad una frazione.

7. Similmente se l'esponente m sia una frazione ecco, che la predetta formola serve ancora ad estraere qualunque radice da qualunque quantità data, giacchè $a^{2.3}$, v. g. altro dir non vuole, che $\sqrt[3]{a^2}$, e se l'esponente m sarà uguale ad una frazione negativa, altro non vorrà dire, che estraersi una radice assegnata dal denominatore della frazione da una frazione, giacchè $a^{-2.3}$ altro dir non vuole, che $\sqrt[3]{a^{-2}}=\sqrt[3]{1:a^2}$. Con la penna alla mano ogn'un da se potrà ridurre in pratica questi utilissimi precetti.

8. Io vedo benissimo, che gli usi della sopra esposta formola generale si ridurranno in pratica facilmente, ma questo di elevare un polinomio ad una potenza fratta, o sia estrazione di radici non riuscirà così facile, onde è pur necessario, che io quì dica qualche cosa di più.

9. Sia dunque proposta la quantità $x^3-3xxy+3xyy-y^3$ da elevarsi alla potenza $\frac{1}{3}$, o sia, che è lo stesso, da estraersi da essa la radice terza. Si ponga il primo mem-

membro x^3 dell' equazione uguale ad un termine del binomio elevato nella formola data al num. 4. cioè $x^3 = a$, e tutti gli altri membri ſi facciano uguali al ſecondo termine del binomio elevato nella formola, cioè $-3xxy + 3xyy - y^3 = b$, ſarà $m = \frac{1}{3}$; ora ſe le radici da eſtraerſi ſono razionali baſterà ſervirſi dei due ſoli primi termini della formola, poichè gli altri ſi troveranno ſuperflui, i due primi termini della formola ſono $a^m + ma^{m-1}b$, in cui ſoſtituendo in vece di a il ſuo eguale x^3, ed in vece di b il ſuo eguale, ſi averà $x^{3m} + mx^{3m-3} \times (-3xxy + 3xyy - y^3)$ ed in luogo di m ponendo $\frac{1}{3}$, e facendoſi attualmente la moltiplicazione ſi averà $x - x^0 y + x^{-1} yy - \frac{1}{3} x^{-2} y^3$, cioè $x - y$, cioè il primo, e ſecondo; gli altri termini ſono ſuperflui per eſſere la quantità data razionale.

ARTICOLO V.

Nozioni per l'intelligenza delle Serie Infinite.

1. SE v'è coſa, in cui la mente umana reſti per così dire affatto ſommerſa, e perduta in un vaſto pelago di penſare confuſo, ell'è per comune conſenſo, e per univerſale eſperienza l'oggetto, o infinitamente grande, o infinitamente piccolo, che eſſa tal'ora propone alle ſue meditazioni. Sa ella felicemente sbrigarſi da quegli imbarazzi, ne' quali le coſe limitate, e finite ſogliono talor condurla, ma dal penſiere dell'immenſo ne eſce più umiliata bensì, ma non mai più erudita. Nulladimeno le Matematiche ſpeculazioni ſovente là ci conducono, ove al penſiero dell'infinito ci allettano, ed inſieme non laſciano di partorire anch' in noi molte belliſſime verità ſovra un'oggetto sì grande ſiccome adeſſo vedremo.

2. Quell'immenſo, che traſcende ogn'altro penſiero, che egli ſteſſo non ſia, è quel ſommo bene, cumulo d'ogni perfezione sì per eſſenza, sì per durevolezza, da cui

noi,

noi, e le cose tutte apertamente sappiamo avere l'origine, che essendo per ogni parte smisurato non può a' nostri Calcoli, o alle nostre troppo corte misure in modo alcuno soggettarsi,

E quinci appar, ch' ogni minor natura
E' corto recettacolo a quel bene,
Che non ha fine, e se in se misura. Dante Parad. c.9.

Onde noi rimirare lo dobbiamo più tosto come fine ultimo, a cui tendere perpetuamente si debba, che come soggetto del nostro intelletto, in quanto ad essere inteso il suo modo d'operare ineffabile, e molto meno il suo essere imperscrutabile.

3. Non è questo quell'infinito, di cui ora intraprendiamo a discorrere, ma ben'egli ci lascia uno spaziosissimo campo per le nostre speculazioni in quegli oggetti, che da noi si chiamano infiniti, o perchè in essi non sappiamo ritrovare l'ultimo limite, o perchè in verità sian tali, quali da noi illimitati si pensano. Tale è la legge, in cui create furono le nostre menti, almeno finchè nel presente esilio ritrovansi, cioè, che possa loro la immaginazione rappresentare una grandezza di qualunque altra concepita maggiore, e maggiore, cioè far si può un progresso indefinito, che è quanto dire non potersi alcuna determinata grandezza assegnare, di cui le nostre menti un' altra concepir non ne possano maggiore, ed a cui non possano intendere aggiunta simigliante grandezza; ma per quanto vasto sia l'oggetto del loro pensiero sempre sarà limitato, e finito.

4. Tal sorta d'infiniti a tre specie si riduce, o di durevolezza, come l'eterno, o di estensione, come gli spazj oltramondani, o di numero, come le parti del continuo. Tali infiniti, benchè assolutamente parlando, come sopra dicemmo, restino a noi imprescrutabili, non è però, che molto non ne possiamo affermare con evidenza, e molto più con induzione sufficiente a condurci a conclusioni poco meno, che certissime. Dell'Infinito di dura-

razione, che noi avvezzi nel tempo concepiamo come labile, e fuggitiva cosa, poco più dir possiamo, senonchè quanto per fede abbiamo, che tali persevereremo, laddove ora facciamo, che sia Iddio di noi per prendersi eterna gloria, il qual dovunque sia per essere è certo, che là *Non avrà luogo fu, sarà, nè era,*

Ma è solo in presente, & ora, & oggi, Petr. Trionf. di Divinità.

E sola eternità raccolta e 'ntera.

5. Abbiamo detto di sopra cadere sotto le nostre considerazioni anche l' infinitamente piccolo, onde ora si cerca, se una data finita quantità, v. g. un legno palmare si divida per metà, e questa metà di nuovo per metà si divida, così procedendo senza fine; si cerca dico, se si possa in tal divisione, se non realmente almeno mentalmente procedere senza fine, o pure una volta sia per rinvenirsi tal parte incapace di ulterior divisione? Questa è famosa questione nelle Scuole con maniera

.... quæ ingeniis puerorum discruciandis Q. Luc. Alfei

Apta magis, tenebris quàm errorum discutiendis. Diacrisi.

agitata; altri asserendo con gli Epicurei le parti ultime, altri coi Peripatetici le parti infinite, cui io già indicai la risposta sopra al Capo 2. Articolo 3. numero 3. ma quì ulteriormente procedo, e cerco tal parte infinitesima minore di qualunque parte assegnabile, e per conseguenza non assegnabile già mai, cosa ella sarà? Certamente, che su ciò seriamente riflettendo, o si consideri per se medesima, o in relazione al tutto, sempre ci sparirà per così dire di vista, che come nulla, e come tale onninamente, qualvolta occorra ne' nostri calcoli, dovrà essere disprezzata, poichè l'infinitesima porzione, o pure qualunque aggregato finito di tali infinitesime, v.g. d'un mondo aggiunta, o tolta dal mondo, chi è mai, che di sana mente sostenga essere o 'l mondo accresciuto, o scemato? Se la cosa aggiunta, o scemata si confessa minore di qualunque assegnabile, di modo che ad una ad una tutte le cose quante assegnabili vengono con perfetta

enu-

enumerazione esclufe da tale incremento, o decremento del mondo.

6. Tali cose tra me medesimo meditando mi occorse alla mente una piccola storia di alcuni viaggiatori, che inoltratisi più addentro del solito nel Indostano trovarono anche in que' luoghi barbari, uomini, che attendevano alle speculazioni più culte delle scienze naturali. Fossero questi Ginnosofisti, o Bracmani, co' quali i detti discorrendo non senza ammirazione si avanzarono, portando ciò la materia, a richieder loro qual fosse il suo parere circa di ciò, di che Dio avèsse fatto il mondo; eglino francamente risposero, *ex scobe nihili*. Tal risposta così materiale fece ben ridere coloro, ma non per questo ella fu sì spropositata, che non suggerisca quì qualche cosa di buono al nostro proposito. E' ben vero, che distribuito il continuo nelle sue parti infinitesime ciascuna di tali parti sia paragonabile al nulla assoluto, ma è anche vero, che tal parte nulla per se medesima presa infinite volte ci restituisce puntualmunte la quantità finita, onde queste infinitesime sono come tante nullità, o siano segatura del nulla, ed unite sono un quanto di vera, reale, e concepibile grandezza.

7. Ma quì potrei essere ragionevolmente interrogato questa parte infinitesima d'un quanto è? ha le dimensioni del suo tutto? può ulteriormente dividersi? o pure è un nulla assoluto, ovvero essendo qualcosa è punto zenonico? Chi sì interroga mostra di non bene intendere cosa sia ciò, che nè egli, nè altri intendono. Dico dunque, che tal parte infinitesima è d'una picciolezza così enorme, a cui umana imaginazione non può giungere, e perciò essere in comparazione del tutto, di cui è parte, un nulla, ma in se medesima essere ella sì vasta, che contiene le parti, e ben si concepisce, anzi si dimostra, come tali infinitesime siano infinitamente grandi in relazione ad altre quantità, non solo perchè elleno possano suddividersi ulteriormente in infinito, ma

eziandio paragonate colle quantità infinitamente piccole d' inferior grado, elleno sono infinitamente grandi: dunque non sono nulla, senonchè relativo, nè sono punti zenonici, perchè sempre in infinito divisibili, nè piacemi in ciò punto il Nievezio, che vuole le differenze seconde essere finalmente nullità assolute.

8. Tale spiegazione, ed idea dell'infinitamente piccolo supposta è incredibile quanti vantaggi risultano nelle Matematiche. Nulla, se ciò si ammetta per vero, si può dire, che resti più nascosto a i Geometri, tutto si apre felicemente, ed ogni questione a maraviglia si risolve, come non me, che tant' alto per ora salir non voglio, nè forsi il potrei se'l volessi, ma altri vedendo, come il Vallisio, Bullialdo, Leibnizio, Neuton, Ospitalio, Grandi, Manfredi, ed altri innumerabili lumi del presente secolo, resterà ogni bell' ingegno pienamente appagato.

ARTICOLO VI.

Calcolo delle grandezze infinitamente piccole.

1. SI deve primieramente avvertire, che in quest'Articolo non si espone il Calcolo differenziale, di cui più a lungo in tutto un' altro Capitolo a parte dovrà trattarsi, ma il Calcolo, che quì si propone non è altro, che una sequela delle cose sopra esposte per maggior loro spiegazione, e chiarezza, poichè su questi fondamenti inalzasi poi la grande invenzione de' non mai a sufficienza lodati Calcoli differenziale, ed integrale, a' quali noi quasi a scopo ultimo c'incaminiamo, con premettere le notizie di tutti i Calcoli più semplici, ed usitati, acciochè con maggior chiarezza ci si sveli la bellezza incomparabile di quest' ultimo sublimissimo ritrovamento.

2. Dico dunque, che dalle sopradette cose quasi corollarj se ne deducono le seguenti asserzioni. Primo, che

se

sè una grandezza s'intenda accresciuta d'un' altra, o pure della stessa scemata, e non per questo s'intenda sensibilmente diminuita, o accresciuta, tale incremento, o decremento può dirsi infinitamente piccolo in riguardo a quella grandezza, a cui ei presente, o lontano non fa mutazione alcuna.

3. Secondo, se altra quantità s'intenda a questa infinitesima aggiunta, o tolta, e pure ella nè accresciuta, nè diminuita sensibilmente s'intenda, sarà quella infinitesima in quanto alla prima grandezza, ma in quanto a questa seconda sarà infinitamente grande, onde questa seconda dovrà chiamarsi infinitesima del secondo grado, così si discorra delle infinitesime del terzo, quarto, quinto genere ecc.. Per maggior intelligenza di ciò si osservi la figura 6. a c. 153. in cui s'intenda la linea DG infinitamente vicina alla AB, e gli archi infinitamente piccoli AG, GF uguali, ciò posto la linea BD con tutto che sia infinitamente piccola, sarà nulladimeno maggiore della DE, sussistendo pur quì tutta la dimostrazione del Capo 2. Articolo 4. num. 11. ora la differenza, che passa tra queste due infinitesime sarà un' altra infinitesima, ma del secondo ordine.

4. In terzo luogo si deduce, che qualunque numero d'infinitesime tolto, o aggiunto alla grandezza rispettivamente alla quale sono infinitesime, quella dal suo stato non rimuove punto, ma preso infinite volte costituisce il tutto, di cui quelle sono parti, poichè qualunque numero finito in risguardo all' infinito è sempre infinitamente piccolo, nè una, due, cento, duemila ecc. infinitesime sono più, o meno d'una infinitesima rispetto a tutte le infinitesime: ma una infinitesima, perchè adegui il suo tutto, deve infinite volte prendersi; onde è chiaro, che una infinitesima presa una infinità d'infinite volte ella ascende ad un grado di grandezza il doppio maggiore, poichè se sia infinitesima del primo grado, costituirà una grandezza infinitamente grande, perchè una infinite-

tesima presa infinite volte fa una grandezza finita, e questa presa ancora infinite volte fa una grandezza infinita, e per lo contrario, se si piglierà una infinitesima parte d'un'altra infinitesima, questa sarà d'un grado inferiore ecc.

5. Dalle quali cose eccone chiarissimamente, che se ne deduce il calcolo di queste quantità infinitamente piccole; molte infinitesime dell' istesso genere sommate niente più, che una sola infinitesima costituiscono, e similmente molte di diverso genere una delle massime, e nulla più formano: similmente della sottrazione si dica; non è poi così nelle altre due operazioni di moltiplicare, e dividere, poichè il moltiplicare le scema a tanti gradi quanti ne ha la frazione moltiplicante, e'l dividere le fa salire a tanti gradi superiori quanti ne ha il divisore, cioè moltiplicandosi un' infinitesima di qualunque grado per un' altra di qualunque grado si sommano gli esponenti, e si ha l'esponente del prodotto; e dividendosi una infinitesima per un' altra si sottrae l'esponente del divisore dall'esponente del dividendo, e dà per residuo l'esponente del quoziente.

6. Dalla sottrazione degli esponenti nella divisione può accadere, come di fatto accade quando si divide una infinitesima dello stesso genere per un' altra simile, che resti zero, ed allora il quoziente è infinito in risguardo al divisore; ma se dividasi una infinitesima di grado inferiore del divisore, e ne verrà un' esponente negativo, tale significherà un' infinitamente grande di quel grado, che è il negativo.

7. Ora si noti, che bella verità quindi ne insorge, che moltiplicandosi un' infinitesima di qualunque genere per un' infinito dello stesso grado produce sempre una quantità finita, v. g. l' infinitesima di quinto grado per l' infinito di -5 gradi fa una quantità, che ha per esponente zero, quantità finita $=1$, dunque essendo il nulla assoluto un' infinitesima d'infiniti gradi, e Dio un'

In-

Infinito d'infiniti gradi, si arriva a convincersi di falso il detto troppo generale di Lucrezio:

Ex nihilo nihil, in nihilum nil posse reverti.

perchè si vede bene, che tal'infinito elide gl'infiniti gradi della infinitesima, e ne fa risultare una quantità finita.

ARTICOLO VII.

Calcolo degl' Infiniti.

1. Spesse volte, come sopra abbiamo detto all'Articolo 1. num. 2. accade per la soluzione di varj problemi difficilissimi, e per quali altra soluzione non si ritrova doversi ricorrere alle serie infinite. Laonde è d'uopo esporre la maniera di maneggiare queste serie, delle quali per altro il Geometra non deve servirsi, se non che ne' casi di disperata soluzione. Il Calcolo dunque degl' infiniti è il metodo di sommare le serie d'infiniti termini, o pure è il metodo di rintracciare la ragione, che hanno fra loro le stesse serie infinite. L'applicazione di questo Calcolo nella Geometria fu indicata al pubblico dal Vallisio nella sua Aritmetica degl' Infiniti, ma egli altro non fece, che adattare al Calcolo il metodo della Geometria degl' Indivisibili di Fra Bonaventura Cavalieri, il quale è stato il primo motore di questi metodi, come confessa anche il Wolfio alla pag. 1031. *Methodum Cavalerii ad Calculum aptare studuit Joannes Vallisius*. Fu poi molto promossa da Tomaso Bullialdo nella sua Aritmetica stampata in Parigi l'anno 1682. Ma conducendo le sue dimostrazioni per varj circuiti degli antichi metodi rende la materia molto difficile a' principianti, e di poco uso a' provetti.

2. Abbiamo sopra indicata all' Articolo 3. num. 7. la maniera di sommare le serie infinite, di cui ora dò la soluzione generale. Sia una serie Geometrica decrescente all' infinito, di cui le frazioni abbiano il numeratore comune, ed i denominatori procedano in qualunque

ra-

ragione coſtante. Si denomini il numeratore comune m, il denominatore della prima frazione a, e' l denominatore della ragione n, ſarà la ſerie da ſommarſi $m:a+m:na+m:n^2a+m:n^3a$ ecc. all'∞; onde per il numero 6: dell'iſteſſo Articolo la ſomma ſarà $mn:(na-a)$.

3. Laonde ſe ſi faccia $m=5$, $a=6$, $n=2$, ſarà la progreſſione $\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{24}+\frac{5}{48}$ ecc. all'∞. Sia $m=1$, $a=2$, $n=3$, ſarà la progreſſione $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$ ecc. all'∞, la ſomma ſarà $\frac{3}{4}$.

4. Dal che ſi cava, che la ſomma delle progreſſioni delle ſerie Geometriche infinite, e decreſcenti ſi averà, ſe al primo termine ſi aggiunga tal parte di ſe, qual parte di 1 è il ſuo conſeguente ſminuito ſempre d'una unità nel denominatore, cioè ſe la progreſſione è dupla, eſſendo i conſeguenti la metà degli antecedenti ſi dovrà, aggiungere al primo termine $\frac{1}{2-1}$; ſe la progreſſione è tripla, cioè quando il conſeguente è $\frac{1}{3}$ dell'antecedente, il primo termine ſi dovrà augmentare della ſua metà, poichè ſcemato di 1 il denominatore di $\frac{1}{3}$ fa $\frac{1}{2}$ ecc.

5. Aggiungo alcune curioſe, ed utili rifleſſioni, con le quali ſi ſpianano alcuni paradoſſi, che in queſta materia occorrono. Dalla diviſione di b per $a-1$ naſce queſta ſerie infinita $b:a+b:a^2+b:a^3+b:a^4$ ecc. all'∞, la di cui ſomma è $b:(a-1)$. Ora tre caſi poſſono accadere, primo $a>1$, ſecondo $a=1$, terzo $a<1$, quali ſi devono eſaminare.

6. E primo ſia $a>1$, v. g. $a=2$, la ſerie ſopradetta ſi muterà in queſt'altra $\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}b+\frac{1}{16}b$ ecc. laonde, per il numero 2. la ſomma ſarà b, e così ſi diſcorra di qualunque grandezza maggiore di 1, a cui a ſi faccia uguale, e quì non occorre di più delle coſe ſopradette.

7. Ma ſe ſi faccia $a=1$ in tal caſo la detta ſerie ſi muterà in queſt' altra $b+b+b+b+b$ ecc. cioè ſe ſi divida b per zero ne viene un quoziente d'infinita grandezza, poichè una quantità finita preſa infinite volte forma una grandezza infinita, nè di ciò dobbiamo meravigliarci, per-

perchè la divisione è 'esame di contenenza, e 'l nulla nella quantità finita ha una contenenza incomparabile, onde ne viene un quoziente infinito. Ora si noti, che siccome la somma di questa progressione è un' infinitamente grande, ed è quoziente di b diviso per $1-1$, se questo si moltiplicherà per il divisore $1-1$, dovrà prodursi di nuovo b, cioè una quantità finita, e così moltiplicandosi la sopradetta serie infinita b, b, b ecc. per $1-1$, dà $b-b+b-b+b-b$ ecc. all'∞, la quale sempre è uguale a zero, ma perchè sempre per avanzo si ha il b, ancorchè si supponga esaurita la detta serie averemo oltre la serie eziandio la frazione $b:(1-1)$, che moltiplicata per $1-1$ dà b, come sopra, vedasi ancora l'Art. 1. num. 13. ond' è, che l'infinito pe 'l nulla moltiplicato in qualche modo ci dà il finito, onde di nuovo in genere è falso il detto di Lucrezio:

Ex nihilo nihil in nihilum nil posse reverti,

ogni qual volta siavi e l'infinito, e 'l nulla; ma essendovi il finito, dunque evvi un tale infinito, onde il finito ne venne. Vedi l'Articolo 6. num. 7.

8. Ma ciò che maggiore ammirazione cagiona a chi a primo incontro s'imbatte in ciò, che segue dal supporsi $a<1$ nella sudetta operazione, si è perchè in tal caso la serie $b:a+b:a^2+b:a^3$ ecc. si trasmuta in quest'altra $2b+4b+8b+16b$ ecc. quando per altro $b:(\frac{1}{2}-1)$ è uguale a $-2b$, supponendosi $a=\frac{1}{2}$, poichè pare impercettibile come una serie doppia infinita positiva sommata faccia una quantità finita negativa. Così ancora ottimamente corrisponde, che una quantità finita positiva divenga uguale ad una infinita negativa, cioè se si abbia a dividere $-b$ per $a-1$, e sia $a=\frac{1}{3}$ si averà la serie negativa $-b:a-b:a^2-b:a^3$ ecc. la quale sommata dovrà essere uguale a $-b:(a-1)$, cioè a $\frac{3}{2}b$, il che pare un' enorme paradosso, che una quantità infinita negativa degeneri finalmente in una finita, e positiva.

9. Io per me, se ho da formare giudizio su questa

facenda, con pace di tanti uomini illustri, che varie cose mirabili han detto, piacemi con niuno di loro convenire, anzi affatto da tante differenti opinioni discordare; poichè chi crede col Vallisio, che tali serie siano più che infinite; De Martino vuole, che oltre l'ascendere della serie all' infinito siavi poi una discesa sino al negativo quoziente, o pure siavi una discesa d'una serie infinita negativa, e poi una salita di positivi sino al quoziente finito, che per quante belle cose si dicano, nulla di ciò indicandone il calcolo, mi ha fatto pensare, che non vada veramente la cosa come questi han giudicato; che se bene, o male io pensi no'l so, so bene, che sembrami molto pianamente, e semplicemente senza tanti prodigj la facenda spiegarsi come segue.

10. La questione è questa: dividendosi b per $a-1$ viene una serie infinita $b:a+b:a^2+b:a^3$ ecc. nella quale se $a>1$, la serie diventa decrescente all' infinito; se $a=1$, la serie diviene una infinità di termini uguali; se poi $a<1$, la serie si muta in un' altra d'infiniti termini crescenti, e positivi, e se la quantità b è negativa, li termini saranno infiniti, e negativi. Si cerca che quantità siano questi termini indicati da queste serie, e come s'accordi colla divisione della quantità finita il quoziente infinito?

11. Rispondo al primo, e secondo caso abbastanza essere stato detto a i numeri 6. e 7. tutto il punto sta negli ultimi due; ora supposto $a=\frac{1}{2}$ in tal caso il quoziente è $-2b$, ma facendosi la divisione attuale viene la serie $2b+4b+8b$ ecc. dove quanto più si procede a dividere sempre avanza un termine maggiore, e maggiore all' infinito da dividersi, il quale è sempre l'ultimo termine della serie, onde ne ho sospettato una egregia illusione del calcolo. Ed ecco, come divido per $a-1$ il b, viene $b:a$; moltiplico questo per $a-1$ viene $b-b:a$, sottraggo da b resta $b:a$, dove essendo $a=\frac{1}{2}$, sarà oltre il quoziente $b:a$, cioè $2b$, l'avanzo anche $2b$, doppj ambedue del dividen-
do,

do, e ciò seguendo l'operazione si vedrà crescere all'infinito non meno il quoziente, che l'avanzo, e pure, ovunque cessi la serie se si moltiplica per il divisore, ed al fatto si aggiunga l'avanzo puntualmente restituisce il dividendo, v. g. la serie $2b+4b+8b$ moltiplicata per $\frac{1}{2}-1$ (pongo i numeri per più chiarezza) dà $b-2b+2b-4b+4b-8b$ ecc. a cui aggiunto l'ultimo termine $8b$ è appunto uguale al b dividendo.

12. Ora vedasi come bene tutto si spiega, la somma della detta serie è $14b$, ed essendo l'avanzo $8b$, e questo diviso per $-\frac{1}{2}$ fa $-16b$, che aggiunto alla somma delle serie fa $14b-16b=-2b$, che è appunto il quoziente esatto; dunque tutta la serie infinita sommata coll'avanzo parimente diviso è $=-2b$. Donde si vede, che l'avanzo sempre distrugge tutta la serie, divenendo dopo la divisione suo contrario, il quale dopo avere annullata la serie lascia tal parte di se, che è per l'appunto il giusto quoziente della divisione. Tutto ciò si accenna dal Wolfio al §. 49. dell'Analisi. Dunque concludo, e dico, che quella serie è infinitamente grande, ma con sempre alle coste un'altro infinito, che la combatte, e la fa stare ne' limiti del giusto quoziente.

13. Ora devesi passare a riconoscere la ragione, che hanno fra loro le progressioni crescenti all'infinito, giacchè d'esse è impossibile rinvenirne la somma; e primieramente si deve avvertire, che il continuare in infinito una serie altro dir non vuole, che tanto essa debba prodursi, finchè una quantità in risguardo ad un'altra svanisca, e s'annulli, non perchè essa divenga veramente nulla, ma perchè in comparazione dell'altra ella sia sì piccola, che come nulla sicuramente si possa prendere; così l'altezza d'un monte sopra la terra in risguardo alla grandezza d'un topo è grandissima, ma in risguardo a tutta la terra è un nulla, e la terra medesima paragonata colla vastità del sistema mondano meritamente un punto si stima, in somma niente può dirsi o grande, o piccolo, senonchè relativamente.

14. Eccone l'esempio nella progressione Aritmetica naturale, che comincia dalla unità essendo il numero de' termini $=n$, la differenza $=1$, in cui l'ultimo termine sarà n, e perciò la somma di tutta la progressione anche infinita sarà espressa per l'Artic. 2. num. 2. da $n+1$ moltiplicato per $\frac{1}{2}n$, cioè $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$, ora nella serie infinita n dinota una quantità infinita, dunque n^2 sarà più che infinita, dunque infinitamente grande rispettivamente ad n, dunque n sarà nullo in riguardo ad n^2, ma tutti gli n sono uguali ad n^2, cioè l'ultimo termine n preso tante volte, quanti sono i termini della progressione, che pur sono n, sarà la somma della progressione $\frac{1}{2}n^2$ alla somma di tutti i termini uguale all' ultimo n^2, come 1. 2, ove si vede, che per la somma della progressione si prende solamente $\frac{1}{2}n^2$, poichè $\frac{1}{2}n$ divien nullo rispetto a $\frac{1}{2}n^2$.

15. Che se la progressione incomincia dal zero allora si denomini il massimo termine u, la somma sarà per l'Articolo 3. numero 6. $\frac{1}{2}nu$, e tutti i termini uguali al massimo saranno nu, dunque la somma della progressione Aritmetica infinita naturale sta alla somma d'altrettanti termini uguali al massimo come $\frac{1}{2}nu . nu :: 1 . 2$. Vedi l'Articolo seguente al num. 10.

ARTICOLO VIII.

Delle serie de' Numeri figurati.

1. NAscono dalle serie Aritmetiche, come sopra si è detto, i numeri poligoni, e da questi i piramidali, cioè dalla serie Aritmetica naturale nascono sommando i termini i numeri triangolari, e dalla somma di questi nascono i piramidali trigoni primi, e se questi di nuovo si sommano nascono i piramidali trigoni secondi, e la somma di questi dà i terzi ecc. Così dalle altre serie Aritmetiche, i termini delle quali procedono con

pa-

pari intervallo nascono parimente gli altri numeri figurati, gli angoli de' quali si indicano dalla differenza accresciuta sempre di 2, v. g. la progressione 1. 3. 5. 7 9. 11 ecc. che procede con intervallo di 2, al quale intervallo aggiunto 2 indicherà, che la somma di tal progressione darà i numeri figurati di 4 lati, cioè i quadrati, e questi i piramidali quadrati primi, e la somma di questi darà i piramidali quadrati secondi ecc. la progressione 1. 4. 7 ecc. forma sommando i termini i numeri pentagonali, poichè gl'intervalli sono di 3, a' quali sempre si aggiunge il 2 per aversi il numero degli angoli, o lati del poligono, e così degli altri. Tali nomi a tali numeri si danno, perchè se si prendano, v. g. tante palle uguali, quante uno di tali numeri, quelle si potranno disporre in una figura di tanti lati uguali, quante ne indica il numero se sia poligono, o in una tal piramide se sia numero piramidale; di alcune proprietà di questi numeri occorre quì discorrere.

2. Pongo prima sotto gli occhi alcune di queste serie:

	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
Serie naturale	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10. ecc. all'∞.
N.^{i} Triang.^{i} p.^{mi}	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.
N.^{i} Piram.^{li} p.^{mi}	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220.
N.^{i} Piram.^{li} 2.^{di}	1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.	715.
Serie Aritmet.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	
Quadrati	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	
Piram. Qu. p.^{mi}	1.	5.	14.	30.	55.	91.	104.	168.	249.	
Piram. Qu. 2.^{di}	1.	6.	20.	50.	105.	196.	300.	468.	717.	
Serie Aritmet.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.	25.	
Pentagoni	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92.	117.	
Piram. Pent. p.^{i}	1.	6.	18.	40.	75.	126.	196.	288.	3[illegible]5. ecc. all'∞	

E così si facciano tutte le altre. Il primo, che avvertisse questi numeri fu un' antico Geometra detto Ipsicle, e dopo esso alquanto più diffusamente ne trattò Diofanto Alessandrino; e poi compiutamente molti moderni, che

non

non si fermano nella sola considerazione delle prime somme come gli antichi, ma oltrepassano all'esame delle proprietà d'altre innumerabili.

3. Ora si osservi la bella proprietà della progressione Aritmetica: la prima, e più semplice serie è quella della unità successivamente replicata come 1. 1. 1. 1. 1. ecc. la di cui somma sta all' ultimo termine preso tante volte, quanti sono i termini in ragione d'eguaglianza, quindi in questa serie sommandosi i termini, e di mano in mano sotto notando le somme nasce la serie naturale, la di cui somma, come fu detto all'Articolo 5. num. 12. sta all'ultimo termine moltiplicato per uno più del numero de' termini come 1 a 2, poi sommandosi i termini della serie naturale, e successivamente notandosi le somme vengono i triangolari, e la somma di questi sta all' ultimo termine moltiplicato per il numero de' termini, e due più, come 1 a 3, e così crescendo i piramidali secondi, terzi, quarti ecc. si cresce di mano in mano uno al numero de' termini moltiplicante, ed alla ragione della somma al prodotto.

4. Ciò posto sarà facilissimo trovare la somma di qualunque numero de' termini de' numeri figurati, che nascono dalla serie naturale, purchè si abbiano il numero de' termini, l'ultimo d'essi, e la denominazione di detti numeri, v. g. il quinto termine de' numeri triangolari è 15, dirò $5+2=7\times15=105$, e questo diviso per 3 dà 35 somma de' sudetti cinque termini; così ancora il sesto termine de' numeri piramidali secondi è 126, al numero de' termini 6 aggiungo 4 fa 10, moltiplico per 126 fa 1260, che diviso per 5 numero denominante, cioè i triangolari piramidali secondi sono la quinta serie dopo la simpla, viene 252 somma de' sudetti sei termini.

5. Su le quali cose seriamente riflettendo se ne cava come corollario la seguente regola per sommare qualunque serie di numeri figurati nati dalla serie naturale. Si

fac-

facciano due ſerie, una delle quali incominci dal numero de' termini della progreſſione, che ſi ſomma, e l'altra dalla unità, e procedano ambedue per il numero denominante la progreſſione de' figurati data, e due più, quindi ſi moltiplichino ſucceſſivamente tutti i termini della prima ſerie, e'l prodotto ſi divida per il prodotto di tutti i termini della ſeconda, il quoziente ſarà la ſomma cercata, cioè ſi debbano ſommare tre termini primi de i piramidali ſecondi, eſſendo queſti la quinta progreſſione dopo la ſerie ſimpla, o ſiano i terzi figurati, le ſerie ſaranno queſte 3. 4. 5. 6. 7 il fatto della ſuperio-
1. 2. 3. 4. 5
re per il fatto della inferiore diviſo dà 21 ſomma cercata delli tre detti termini. Col ſeguente eſempio ſi farà meglio la coſa chiara.

6. Nelle Fortezze ſogliono per l'ordinario diſporſi le palle sì di Bombe, che de' Cannoni in varie piramidi: ora in mezzo alla piazza d'una fortezza ſi vuol fare una piramide di palle di Cannone, che ſia triangolare, e ne abbia 40 per lato; ſi cerca quante delle dette palle ci vorranno per il compimento di detta piramide?

Per la ſoluzione di queſto queſito biſogna trovare quante palle andranno nella baſe della piramide, acciochè ſi abbia l'ultimo termine della ſerie de i triangolari; eſſendo pertanto la baſe un triangolo formato dalla ſerie naturale da 1 ſino a 40, che, per l'Art. 2. num. 2. ſomma 820, e la piramide coſta d'una ſerie di numeri triangolari, il di cui primo termine è 1, l'ultimo 820, e'l numero de' termini 40, laonde, o pe'l numero 4., o 5. ſempre ſi troverà 11480, che ſarà tutta la ſomma.

7. Che ſe la detta piramide ſi voleſſe piantata in quadro allora l'ultimo termine ſarebbe 1600. Si deve dunque trovare la ſomma di tutti i quadrati, che ſono da 1 ſino a 1600, i quali ſono 40, il che è chiaro, che dipende dal ſommare le potenze. Ora poichè ogni numero della ſerie naturale ſi chiama m, ſarà anche queſto m ultimo

timo termine, e numero de' medesimi: sicchè, per l'Artic. 2. num. 2. la somma di tutta la serie sarà $\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m$, cioè questo sarà il numero figurato del primo ordine, che se $m=40$ sarà il quarantesimo, ora la somma di tutti questi quadrati, per il num. 4. è $(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m)\times(m+2):3 = \frac{1}{6}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m$, ora duplicando ambedue questi numeri avremo m^3+m, cioè $\int m^2+\int m=\frac{1}{3}m^3+m^2+\frac{1}{3}m$, ma perchè abbiamo quì detto, che $\int m=\frac{1}{2}m^3+\frac{1}{2}m$; dunque sostituendo in luogo di $\int m$ il suo valore si averà $\int m^2=\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m$, che è il Canone generale per sommare qualunque serie di quadrati, ora nel caso nostro essendo $m=40$ il numero piramidale quadrato primo sarà 22140. Mi avvedo, che tutto questo §. ha bisogno di maggiore spiegazione, eccola dunque.

8. Primieramente giacchè m si suppone uguale a qualunque termine, ed al numero de' termini della serie naturale, la di cui somma è $\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m$, cioè questa quantità è uguale a tutti gli m, ma la somma indefinita di tutti i numeri figurati del primo ordine espressi dalla formola generale $\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m$ è per il num. 4. $\frac{1}{6}m^3+\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$: ora questa somma si raddoppia per togliere la frazione, si avrà $\frac{1}{3}m^3+m^2+\frac{2}{3}m=\int m^2+\int m$, ora perchè $\int m=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m$, come fin da principio si disse: dunque tolta questa quantità da $\frac{1}{3}m^3+m^2+\frac{2}{3}m$ resta, come al num. 7. $\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m=\int m^2$, cioè la somma di tutte le palle della piramide quadrata. Si veda il Wolfio a carte 298.

9. Similmente se si voglia la somma de i cubi de i numeri naturali. La somma indefinita di tutti i numeri figurati del secondo ordine per i numeri 3. e 4. è $\frac{1}{24}m^4 + \frac{1}{4}m^3+\frac{11}{24}m^3+\frac{1}{4}m$. Laonde questa medesima quantità è la somma di tutti i triangolari primi, $\frac{1}{6}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m$, la quale sestupla fa m^3+3m^2+2m, ma perchè $\int m=\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$, sarà $\int 2m=m^2+m$, e similmente perchè $\int m^2=\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m$, sarà $\int 3m^2=m^3+\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{2}m$: laonde se da quella quantità sestupla se ne sottraggono queste due re-

resterà la somma d'infiniti cubi $\frac{1}{4}m^4+\frac{1}{2}m^3+\frac{1}{4}m^2$, essendo m il numero de' termini, cioè de' cubi, che si sommano, ogn'uno da se potrà farne gli esempj.

10. Tutte queste cose essendo presupposte sarà facile ritrovare la ragione, che ha la somma di tutti i quadrati d'una progressione infinita con il massimo, alla somma d'altrettanti uguali al massimo. Sia il termine massimo m, sarà la somma de i quadrati, per il numero 7. uguale ad $\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m$, ora essendo m infinito starà $1.m::m^2.m^3$, cioè siccome l'unità è l'infinitesima di m, così ancora m^2 sarà infinitesima di m^3, e per conseguenza $\frac{1}{2}m^2$, e molto più $\frac{1}{6}m$ rispettivamente ad m^3 si dovranno riputare come nullità, dunque la somma d'infiniti quadrati sarà $\frac{1}{3}m^3$; ma la somma di tutti i quadrati uguali al massimo m^2, che sono tanti, quanti i termini, cioè infiniti, o sia $=m$ sarà m^3: laonde la somma della serie $\frac{1}{3}m^3$, alla somma di tutti i quadrati uguali al massimo quanti i termini, sarà come $\frac{1}{3}m^3.m^3$, cioè come 1. 3.

11. Similmente si troverà la ragione della serie infinita de i cubi alla somma d'altrettanti cubi uguali al massimo; poichè essendo la somma d'infiniti cubi uguale ad $\frac{1}{4}m^4+\frac{1}{2}m^3+\frac{1}{4}m^2$, in cui come sopra $\frac{1}{2}m^3+\frac{1}{4}m^2$ svaniscono per il loro valore infinitamente piccolo in riguardo ad $\frac{1}{4}m^4$, e la somma di tutti gl' infiniti cubi uguali al massimo essendo m^4, sarà la ragione della somma della serie a questa come $\frac{1}{4}m^4.m^4::1.4$.

13. In fine ecco un Canone generale, in cui si ravvisa la ragione, che ha la somma di qualunque genere di potenze infinite, alla somma di altrettanti termini uguali al massimo. Si deve quì riassumere il Canone generale delle potenze sopra esposto all' Articolo 4. di cui basta solamente prendere il primo termine siccome quello, che per la sua vastità tutti gli altri quasi nulla assorbisce, che è $m^{n+1}:(n+1)$, in caso che siano i termini infiniti, ma la potenza massima è m^n, adunque quella a questa starà come $m^{n+1}:(n+1).m^{n+1}$, cioè come $1.n+1$.

Sia a cagione d'esempio $n=2$ la somma d'una serie infinita di quadrati starà ad altrettanti uguali al massimo come 1. 3 di più sia $n=7$ starà la somma delle potenze settime ad altrettante uguali all'ultima come 1.8.

ARTICOLO IX.

Metodo delle Serie applicato alla Geometria.

1. VOlendo Giovanni Vallis applicare alla dimensione degli spazj la regola trovata da lui di sommare le serie delle dignità dei numeri naturali principiando la serie dal zero, e chiama i termini della serie naturale Primani, i loro quadrati Secondani, i loro cubi Terziani ecc. siccome le loro radici seconde Subsecondani, le terze Subterziani ecc. suppone, che gli spazj vengano composti di tante linee secondo il metodo degli indivisibili del Cavalieri, o pure se si vuole più accuratamente parlare, da infiniti rettangoli infinitamente piccoli, i quali principiando dal zero, cioè dal principio delle coordinate, e sempre crescendo vengono a formare una serie, la quale se sarà di Primani, Secondani, Terziani ecc, si sommerà con la sua regola posta a i numeri 10, e 11. dell'Articolo 8. la quale è, che così sta la serie all'ultimo termine preso tante volte, quanto è il numero de' termini della medesima serie come l'unità all'esponente della serie accresciuto dell'unità, di maniera che se chiameremo la somma della serie s, il numero de' termini n, l'ultimo termine u, e l'esponente della serie e, starà $s.\ nu :: 1.e+1$, e però $s=nu:(e+1)$ come sopra si è spiegato.

2. Per indagare poi in qual serie procedano questi tali indivisibili, o elementi, suppone il detto autore, che l'asse della figura 7. AB sia diviso in parti uguali infinitamente piccole Ac, Ac, Ac ecc. sicchè le dette parti prese sempre dal punto A vadano crescendo secondo la se-

Fig. 7.

ſerie de' numeri naturali, e coſtituiſcano la ſerie o. 1. 2. 3. 4 ecc. oſſerva dalla proprietà della figura in qual proporzione ſtieno colle aſciſſe le ordinate CD; e perciò in qual ſerie vadano creſcendo, come apparirà da' ſeguenti eſempj.

ESEMPIO I.

3. Se la figura ACD ſarà un Triangolo è manifeſto, che le ordinate ſtando in egual proporzione colle aſciſſe, per la proprietà del triangolo, e procedendo le aſciſſe come ſi ſuppone in progreſsione de' numeri naturali, ancora le ordinate ſaranno termini di una tal progreſsione, e perciò coſtituiſcono una ſerie di Primani: ſtarà dunque il triangolo, che è la ſomma di queſta ſerie al rettangolo circoſcritto, il quale è l'ultimo termine moltiplicato pe'l numero de' termini della ſerie, come l'unità all'eſponente della ſerie, il quale è uno per eſſere ſerie di Primani accreſciuto dell'unità, cioè a dire come 1.2

ESEMPIO II.

4. Se la detta figura 7. foſſe una parabola d'Appollonio, le ordinate CD ſtando in ſudduplicata ragione delle aſciſſe, procedendo le aſciſſe ſecondo i numeri naturali, le ordinate coſtituiranno una ſerie delle radici di detti numeri, e perciò faranno una ſerie di Subſecondani, il cui eſponente è $\frac{1}{2}$: ſarà dunque tutta la parabola, che è la ſomma della ſerie, al paralelogrammo circoſcritto, che è l'ultimo termine moltiplicato per i termini della ſerie come $1.\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$, o pure come 2.3.

5. Il Trilineo Parabolico ADE ſi miſura all'isteſſo modo, perchè diviſo l'aſſe AE in parti uguali, ſicchè le parti Ae, Ae creſcano in progreſsione de' numeri naturali, l'ordinate di e, che ſtanno in duplicata ragione faranno una ſerie di Secondani, e perciò ſtarà il trilineo al paralelogrammo circoſcritto come $1.2+1$.

ESEMPIO III.

6. Generalmente ſia l'equazione della Parabola $x^m=y^n$, chiamando AC x, e l'ordinate CD y; ſarà dun-

que $x^{m:n}=y$, procedendo le x ſecondo i numeri naturali, le y procederanno in una ſerie delle dignità di detti numeri, il cui eſponente è $m:n$; ſarà dunque la parabola al paralelogrammo circoſcritto come $1.m:n+1=(m+n):n$, dal che ſe ne deducono i ſeguenti Corollarj.

7. Se ſarà la Parabola Appolloniana, eſſendo $m=1$, ed $n=2$, ſtarà quella al rettangolo come $\frac{2}{3}$, il che conſente coll'eſempio al numero 4. Se foſſe la parabola cubica del primo genere, cioè $a^2x=y^3$, ſtarà la parabola al paralelogrammo come $1.\frac{4}{3}$, cioè come 3.4.

8. Similmente per miſurare i trilinei parabolici delle ſudette parabole, ſi deve avvertire, che le y, overo AE procedono per i numeri naturali, e che le x coſtituenti il trilineo ſtanno come y elevato ad $n:m$, cioè $x=y^{n.m}$, onde ſtarà il trilineo al rettangolo $::1\,(n+m):m$.

ESEMPIO IV.

9. Giri la parabola attorno l'aſſe AB, i cerchi coſtituenti il Conoide parabolico ſtaranno come i quadrati delle ordinate nella parabola, e perciò come le aſciſſe, le quali eſſendo come i numeri naturali verranno perciò i detti cerchi a coſtituire una ſerie di Primani; ſarà dunque il Conoide al Cilindro della medeſima baſe, ed altezza come 1.2.

ESEMPIO V.

10. Girando la parabola intorno la linea AE, e producendo il Fuſo parabolico i cerchi delle ordinate di E coſtituenti il fuſo ſtanno in duplicata ragione delle DE, e queſte in duplicata delle CD, ſtaranno perciò detti cerchi in quadruplicata ragione delle AE, che procedendo ſecondo i numeri naturali ſaranno detti cerchi una ſerie di Quartani, e però il fuſo al Cilindro della medeſima baſe, ed altezza ſtarà come 1.5.

11. Il Cono vien coſtituito da infiniti cerchi, i quali ſtando in duplicata ragione dei raggi, e però delle aſciſſe dell'aſſe vengono a coſtituire una ſerie di Secondani, e però ſtarà il Cono al Cilindro come 1.3.

CA-

CAPO IV.

Del Calcolo Logaritmico.

ARTICOLO PRIMO.

Si spiegano i Logaritmi, e'l modo di ritrovarli.

1. TUTTO l'obbligo del grandissimo comodo, che ai Matematici risulta dalla scienza de' Logaritmi, si deve a Giovanni Nepero Barone di Marchistonio nella Scozia, benchè questa invenzione l'abbiano molto accresciuta le speculazioni, e fatiche d'uomini dottissimi, come furono Beniamino Ursini, Enrico Briggio, ed Adriano Ulacq, il quale empì la grande laguna tra li 20 mila, e 90 mila, ed ampliò eziandio le tavole de' Seni per fino a ciascuna decade de' secondi. Il comodo pertanto de' Logaritmi in questo consiste, che le operazioni Aritmetiche laboriosissime di moltiplicare, di dividere, estrarre radici di qualunque grado, col semplice sommare, e sottraere si eseguiscono con sicurezza, e prestezza mirabile. Eccomi intanto applicato alla spiegazione di sì bella invenzione.

2. Il Logaritmo è un termine di qualunque serie Aritmetica, che corrisponde ad un'altro d'un'altra serie Geometrica, con questo però, che la serie de' Logaritmi incomincia dal zero, e la Geometrica dalla unità; dicesi Logaritmo quasi indice del termine nella serie Aritmetica indice del termine della Geometrica; vedasi nel Capo superiore l'Articolo 3. num. 4. Ora se si moltiplicheranno due termini della progressione Geometrica, il logaritmo del prodotto sarà la somma de' logaritmi de' due termini moltiplicati, perchè per il detto Articolo 3. il prodotto dista dal maggiore quanto il minore dalla unità, dunque al logaritmo maggiore aggiunto il logaritmo

del

del minore, s'averà il logaritmo del prodotto.

3. Quindi come corollario si deduce, che il logaritmo del quadrato di qualunque termine della progressione Geometrica sarà il doppio del logaritmo di tal termine, e la terza potenza il triplo, e la quarta il quadruplo ecc. E così per l'opposto se si vorrà dividere un termine della progresione Geometrica per un'altro, basterà sottraere il logaritmo del divisore dal logaritmo del dividendo, e'l residuo sarà il logaritmo del quoziente. E volendosi estraere una qualunque potenza da un termine della progresione Geometrica, si divida il logaritmo di questo termine per l'esponente della potenza, e'l quoto sarà logaritmo della radice.

4. Tutte le sopradette operazioni, come si vede, possono eseguirsi nei numeri della progresione Geometrica, ma ne i numeri intermedj tra un termine, e l'altro non si può: tutta l'invenzione dunque consiste nel ritrovamento dei i logaritmi di ciascun numero, perchè in tutti egualmente eseguire si possano le predette operazioni di moltiplicare, dividere, elevare a potenze, ed estraere radici col semplice sommare, o sottraere: questa è l'invenzione sì utile del sopralodato Nepero, posta poi in atto da Enrico Briggio Professore pubblico di Matematica nella Città di Oxfort costruendo il Canone logaritmico da 1 sino a 20000, e da 90000 sino a 100000, lasciando voti, preoccupato dal fato comune, tutti i numeri da 20000 a 90000, quali ultimamente ha riempiti, come sopra si disse, Adriano Ulacq. Io quì accennerò solamente come siano state costruite queste Tavole, perchè si comprenda la gran fatica usata da costoro a pubblico beneficio.

5. Suppongono dunque una serie Geometrica decupla, il cui principio è 1, e segue sino a 100000, che sono sei termini: ora perchè si può assumere qualunque progresione Aritmetica corrispondente alla Geometrica, assumono zero per il primo termine d'essa, che lo fanno

no corriſpondere all' 1, o ſia primo termine della Geometrica, e 100000000 è il termine ſecondo dopo il zero nell'Aritmetica, che corriſponde al ſecondo 10 della Geometrica; così per il terzo 100 della Geometrica, mettono 200000000, e per il quarto mille, mettono 300 milioni ecc. chiamando le iniziali di queſti numeri Caratteriſtica. Ora perchè di centomila numeri non ſi hanno i logaritmi, che di ſoli ſei, ſi devono degli altri trovare, e primieramente da 1 ſino a 10; ed eſſendo di 1 il 0, e del 10, eſſendo il logaritmo 100 millioni, abbenchè non poſſa averſi il logaritmo preciſo in rigore Matematico, può però sì proſsimo ritrovarſi, che al vero s'agguagli in quanto all'uſo.

6. Tra 1 e 10 della ſerie Geometrica, o pure tra 1. 0000000, e 10. 0000000, per il Calcolo decimale, ſi trovi il medio proporzionale, ſimilmente tra 0. 0000000, e 100. 000000 ſi trovi il medio equidifferente, e queſto ſarà il logaritmo di quel medio proporzionale, e queſti medj proporzionali tante volte ſi cerchino con li loro logaritmi, finchè ſi arrivi alla preciſione del numero, che ſi cerca, avvertendo di replicare tante volte l'operazione, finchè l'errore non ſuperi un millioneſimo, e così ſi proſeguiſca per ciaſcun numero. E' ben vero però non tutti i numeri richiedere un calcolo sì laborioſo, poichè i compoſti della ſomma de i componenti ſi formano, o pure trovato il logaritmo d'un numero quadrato, la ſua metà ſarà il logaritmo della radice, e così in un cubo il terzo ſarà il logaritmo della radice cubica ecc. Ecco accennato brevemente bensì, ma a ſufficienza il metodo di coſtruire le Tavole logaritmiche, le quali eſſendo già fatte dalla pazienza altrui, godiamo di quella con induſtriarci anche noi ad ulteriore beneficio de i noſtri poſteri nello ſcoprimento di nuove verità.

7. Ma perchè non ſempre ſi poſſono avere le Tavole maggiori di Briggio, e di Ulacq, che ſono ſtampate in foglio, ma alle mani ſi hanno per l'ordinario le Tavole

in

in piccolo, che non assegnano i logaritmi di più, che 10000, ed alle volte accade doversi prendere il logaritmo di numero maggiore, però è quì necessario dare la regola di trovare con l'ajuto d'esse Tavole minori questi logaritmi, purchè il numero di cui si vuole il logaritmo non sia maggiore di 10 millioni.

8. Si tagliano alla sinistra del numero, di cui si vuole trovare il logaritmo, quattro figure, e di queste nelle Tavole si cerchi il logaritmo, alla cui Caratteristica si aggiungano tante unità, quante sono le figure, che restano alla destra. Dipoi il logaritmo trovato si sottragga dal logaritmo prossimo seguente, e si formi questa Analogia: come la differenza de i numeri nelle Tavole, che è 10, 100, 1000 ecc. cioè si prenda 10, se resta alla destra una sola figura, 100 se due ecc. alla differenza de i logaritmi trovata, così le figure residue del numero dato alla differenza logaritmica da trovarsi, la quale se si aggiunge al logaritmo delle 4 figure tagliate accresciuto nella Caratteristica come sopra, si avrà il logaritmo del numero, che si cerca.

9. Eccone l'esempio. Si cerca il logaritmo di 92375, prendo le 4 prime figure 9237, ne cerco nelle Tavole il logaritmo, che è 3.9655309, alla cui Caratteristica 3. agginngo l'unità, perchè nel numero dato resta una sola figura; quindi lo sottraggo dal logaritmo prossimo seguente, che è 3.9655780, resta 471: poi dico, come la differenza de' numeri nel Canone, che è 10, alla differenza de i logaritmi trovata, così il numero delle figure residue, cioè 5, alla differenza logaritmica, che sarà nel nostro caso 235, che aggiunta al logaritmo di 9237 aumentato di 1 nella Caratteristica fa 4.9655544 logaritmo cercato di 92375.

10. Avverto in primo luogo, che se il numero, di cui si vuole il logaritmo, è composto di due altri minori di 10000, basterà trovare nelle Tavole i logaritmi di questi due fattori, e sommarli, che si avrà il logaritmo del

del numero cercato, come di fatto nel caso nostro abbiamo due fattori di 92375, che sono 125, e 739, i logaritmi de' quali sono 2.0969100, e 2.8686444, che sommati fanno come sopra 4.9655544.

11. E' vero, che le differenze de i numeri non sono proporzionali alle differenze de i loro logaritmi, ma nella pratica di queste cose non dobbiamo essere molto scrupolosi, sicchè le minuzie d'ogni sensibile errore minori ci abbiano da spaventare, perchè è certo, che in pratica tutto esattissimo riesce senza un minimo errore. Come negli esempj, che darò all' Articolo 5. si vedrà manifesto, poichè di ciò come d'ogn' altra Teorica ne è ottima prova l'esperienza, come asserisce Dante al Canto 2. del Paradiso:

Da questa istanzia può deliberarti
Esperienzia, se giammai la provi,
Ch' esser suol fonte a' rivi di nostr' arti.

12. Sarà più facile la maniera di trovare il numero corrispondente ad un logaritmo maggiore di quelli, che sono nelle Tavole così; si sottragga dal dato logaritmo il logaritmo di 10, o di 100, o di 1000 ecc. finchè resti un logaritmo minore di quei, che si ritrovano nelle Tavole; al residuo si trovi il numero corrispondente, il quale si moltiplicherà per 10, o per 100 ecc. secondo di qual numero fu fatta la sottrazione; il prodotto sarà il numero cercato.

13. Alle volte accade doversi prendere il logaritmo d'una frazione, ma essendo la frazione minore della unità, e questa avendo per logaritmo il zero, sarà il logaritmo della frazione negativo, come bene notò Michele Stifelio; ora questo logaritmo si troverà così. Si trovino i logaritmi sì del numeratore, che del denominatore della frazione, il primo dal secondo si sottragga, il residuo col segno negativo — sarà il logaritmo della frazione data; la ragione si è, che la frazione non è altro, che il quoziente d'una divisione, e la divisione ne'

logaritmi si fa sottraendo, come si disse al numero 3.

14. Se per l'opposto sia dato un logaritmo negativo, di cui se ne voglia la frazione corrispondente, si sommi il logaritmo dato, che vuol dire si sottragga (poichè è negativo) dal logaritmo massimo delle Tavole, al residuo si trovi il numero corrispondente, e sarà il numeratore della frazione, e 'l denominatore sarà il numero massimo del Canone.

15. Se nelle Tavole non si trovi il logaritmo, di cui si cerca il numero corrispondente, ma sianvi il prossimo maggiore, e minore, sarà segno, che il numero di tal logaritmo sarà uno corrispondente al minore con una frazione; per trovare questo si faccia così. Il logaritmo prossimo minore si sottragga dal prossimo maggiore, e'l residuo si faccia denominatore, e poi l'istesso minore si sottragga ancora dal logaritmo dato, e sarà ciò, che resta numeratore, onde averassi una frazione da aggiunger' al numero corrispondente al logaritmo minore; la quale potrai facilmente ridurre a frazione decimale, per il Capo 3. Articolo 3. Parte 1.

16. Ecco finalmente la regola aurea eseguita con le Tavole logaritmiche. Si sommano i logaritmi de i due ultimi termini, da' quali si sottragga il logaritmo del primo, il residuo sarà il logaritmo del quarto termine proporzionale.

17. Si può ancora col semplice sommare eseguire la regola del tre. Per il che si osservi, che il logaritmo del seno sommato col Tomologaritmo del complemento fa il doppio del raggio. Ciò posto in vece di porre il logaritmo, che si deve sottraere, si ponga il tomologaritmo del complemento (e se nelle Tavole non sianvi i tomologaritmi, si ponga l'eccesso del doppio del logaritmo del raggio sopra il logaritmo dato) e poi questo con gli altri due sommato, e dalla Caratteristica della somma levato 2, il residuo sarà il logaritmo del quarto proporzionale. Vedi nell'Articolo 5. gli esempj.

A R-

Articolo II.

Calcolo de i Seni, Tangenti, e Seganti con i loro Logaritmi.

1. Non perchè dall'altrui fatica ſiano già ſtate fabbricate le Tavole de' Seni, Tangenti, e Seganti, ſi deve da noi traſcurare la ſcienza di coſtruirle, sì perchè a noi ſia paleſe l'induſtria di coloro, che a noſtro vantaggio l'hanno con tanta pazienza, ed attenzione impiegata, sì perchè la fecondità de' termini a ciò opportuni non è sì ſcarſa, che ad altri uſi non vagliano egregiamente. Io da ciò ſtimolato porrò quì brevemente le più neceſſarie propoſizioni, acciochè chi di maggiori notizie ha deſiderio, poſſa con facilità apprenderle, laddove più diffuſamente non ſenza gran lode degli Autori ſi trattano, come fa Urſino ſopracitato, e dopo molti altri, il Rondelli Geometra Bologneſe.

2. Gli antichi Arabi furono i primi a ſervirſi de' Seni per l'Analiſi de' Triangoli, ma in una maniera molto dall'uſo d'oggidì diverſa, e per conſeguenza molto più labile, ed aſtruſa. Giovanni di Regiomonte fu il primo, che ſuppoſe il raggio d'una unità, che poi nelle comuni Tavole s'intende diviſa in dieci millioni di parti uguali, e nelle Tavole maggiori in più ancora per determinare con maggior'eſattezza i minuti. Ciò preſuppoſto vengo alle definizioni.

3. Nella figura 8. la linea EI ſi chiama Diametro, *Fig.8.* IHEBI Cerchio, EC Raggio, AB Corda, FC Segante, FE Tangente, tanto dell'arco AE, come dell'AI, ACE angolo dato, ACI ſarà angolo del compimento a due retti, ACH ſarà angolo del compimento ad un retto, KH ſarà tangente, KC ſegante dell' arco AH dette ancora Cotangenti, e Coſeganti dell'arco EA, e così nell' arco EA riſpetto all'arco AH.

 4. Seno

4 Seno retto dell'angolo ACE è AD perpendicolare alla CE, e la DE è Seno verſo, li quali ſono ancora Seni dell'angolo ACI, CE è il ſeno totale, cioè dell'angolo retto, AG, che è ſeno dell'angolo HCA, ſi chiama ancora Coſeno, e così KH ſarà cotangente ecc. come ſopra.

5. La miſura degli angoli ſono gli archi de' cerchi, da' quali ſono ſotteſi, così la miſura dell'angolo ECA ſarà l'arco AE. La circonferenza de' Cerchi s' intende diviſa in 360 parti uguali, le quali ſi chiamano ancora gradi, e queſti ſi dividono ciaſcuno in 60, che diconſi minuti primi, quali ſuddiviſe in altre 60 fanno li ſecondi ecc. e ſi ſcrivono così $15^{\circ}.\ 18^{I}.\ 27^{II}.\ 13^{III}.$ e vogliono dire gradi, primi, ſecondi, terzi ecc. per dividere il Cerchio in gradi. Dividerai il Cerchio prima in ſei parti uguali, che farai con l'iſteſſa apertura del compaſſo, poi ogn' una di queſte in due parti ſi ſeghi, quindi ogn' una di queſte ſuddividaſi in altre ſei parti uguali, e finalmente ciaſcheduna di queſte ultime parti dividaſi in cinque parti uguali, e'l Cerchio ſarà diviſo in 360 parti uguali, perchè ſei via 2, 12, via 6, 72, via 5, 360, ſecondo il verſo

In ſex in binas, in ſex, in quinque ſecatur.

6. I quadrati del ſeno retto, e del compimento ſono uguali al quadrato del raggio, poichè $AG = DC$, per la 34. del primo; dunque per la 47. $DC^2 + AD^2 = AC^2$.

7. Avendoſi il ſeno AD ſi averà il coſeno AG, ed avendoſi queſto ſi averà il ſeno verſo DE, ed avendoſi queſto ſi averà la corda $EA = \sqrt{(ED^2 + AD^2)}$, la cui metà ſarà ſeno della metà dell'angolo ACE.

8. E'l doppio di ACE parimente ſi troverà così, dato il ſeno BG dell' angolo FCB, ſi averà il ſeno del
Fig. 9. doppio DCB. Si prolunghi BG in D, e ſi tiri DE perpendicolare a BG ſeno di DCB, eſſendo li due angoli BED, BGC retti, e l'angolo B comune ſarà BC. BG :: DB. BE; dunque ſarà nota EC, dunque per la 47. DE ecc.

9. Eſſendo dati i ſeni di due archi non ſarà difficile coſtruire il ſeno della loro ſemidifferenza, poichè il quadrato

drato della differenza de' seni, e'l quadrato della differenza de' coseni danno il quadrato della sottesa alla differenza degli archi: dunque si ha il seno della semidifferenza di due archi dati.

10. Su questi pochi problemi la grande opera delle Tavole de' seni è fondata, poichè sapendosi le relazioni de' seni di qualunque grado, o col seno totale, o con qualunque altro, si saprà la quantità delle parti centomillionesime, che ciascun seno contiene. E ciò basti per avere un berlume della maniera della costruzione delle Tavole de' Seni.

11. Costruito il Canone de' seni facilmente si fa passaggio alla costruzione del Canone sì delle tangenti, sì delle seganti, perchè il triangolo FEC è simile al triangolo ADC, in cui è tutto noto, e nell'altro il raggio; dunque ecc. i logaritmi de' seni, e delle tangenti, che diconsi ancora Tomologaritmi, si potranno avere per ciò, che abbiamo spiegato sopra nell' Articolo 1. al numero 7. e seguenti. Ed ecco come brevissimamente abbiamo esposto la costruzione delle Tavole poste a carte 214.

ARTICOLO III.

Uso delle Tavole nella Trigonometria piana.

1. Tutto il negozio Trigonometrico consiste in ritrovare tutte le linee, e gli angoli di un triangolo, di cui note siano tre cose, o due lati, ed un'angolo, o due angoli, ed un lato, o tre lati, perilchè cinque soli Teoremi si devono dimostrare.

2. Teorema primo. Ne i rettangoli l'ipotenusa, se si farà raggio, gli altri lati saranno seni degli angoli opposti. Si prova. Fatto centro A, coll' intervallo AB, *Fig.* 10. si descriva l'arco BGD, e centro B, collo stesso intervallo si descriva l'arco AFE, sino al concorso de' lati prodotti.

dotti. Ora poichè le corde AD, AE sono segate ad angoli retti da i raggi BF, AG, per la terza del terzo sono segate in parti uguali; dunque BC sarà seno dell'angolo BAC, ed AC di ABC per il numero 3. Articolo 2.

3. Donde si cava, che negli Ortogonj dati gli angoli, si dà la di loro proporzione colla Ipotenusa, onde posta questa di 10000000, e l'angolo A di 31°. 44', sarà l'angolo B compimento al retto di 58°. 16', de' quali cercati i seni nelle Tavole, si averanno tre numeri in proporzione de' lati 10000000, AB; 5259665, BC; 8050505 2, AC.

4. Teorema secondo. Nel triangolo rettangolo, se si faccia raggio uno dei lati, l'altro sarà tangente, e l'ipotenusa segante. Fatto centro C con l'intervallo CB, si descriva il cerchio BD per la 16. del 3. essendo B retto

Fig. 11. AB sarà tangente, ed AD segante dell'angolo C; similmente nell'altro angolo A. Dunque l'istessa ipotenusa è segante ambedue gli angoli acuti C, ed A; Dal che si cava un'altra maniera per conoscere la proporzione de' lati nel rettangolo, cioè supposto CB raggio di 10000000; si cerchi nelle Tavole la quantità della tangente BA dell'angolo dato C, e la segante CA.

5. Teorema terzo. In qualunque triangolo stanno

Fig. 12. i lati fra loro come i seni degli angoli opposti. Si prova. Sia dato il triangolo ABC in ambedue le figure 12. e dal centro D per la 5. del 4. trovato, si circoscriva il cerchio, e cadano ai lati perpendicolari DE, DF, DG, che per la 3. del 3. si segherà in parti uguali; qnindi si tirino le BD, DA, ciò fatto l'angolo ADB è doppio dell'angolo ADE, e per la 20. del 3. è doppio ancora dell'angolo ACB; dunque per l'asioma primo ACB sarà uguale all' angolo EDA, ma di questo è seno AH, dunque ancora sarà seno di quello, e così negli altri; ma i lati tra loro stanno come le loro metà, dunque stanno come i seni degli angoli opposti, che si dovea provare. Dunque in qualunque triangolo il seno di ciascun'angolo è la metà del lato opposto.

6. Teo-

6. Teorema quarto. In qualunque triangolo la somma di due lati alla loro differenza sta come la tangente della semisomma degli angoli alla base, alla tangente della semidifferenza de i medesimi angoli. Si prova. Si prolunghi BA in H, e si faccia uguale ad AC, e da questa si seghi AI eguale ad AB, sarà BH somma dei lati, ed HI la differenza del punto A; a CH sia AE perpendicolare, che per la 16. del primo segherà l'angolo HA, e la linea HC egualmente; AD, IG siano parallele a BC, poi si seghi EF=ED, e si tiri AF, e fatto centro A coll' intervallo AE si descriva il cerchio dicui tangente per la 16. del 3. sarà HC. Ora se HAC=ABC+ACB per la 32. del 1. EAC sarà la semisomma de i due angoli B, C, e di questo è tangente CE, e la semidifferenza sarà DAE, perchè HAE=EAC, ed EAD=EAF per la 4. del 1. dunque FAH=DAC=BCA per la 28. del 1. dunque de i due B, C differenza è FAD, e semidifferenza EAD, di cui è tangente DE, essendo poi BA=AI, e per la 4. del 6. CD=DG; ma CD=FH per costr.; dunque DG=FH toltane, overo aggiuntane la comune GF, resterà DF=GH. Ora perchè BH. HI :: CH.HG= DF per la 4. del 6. ma CH. DF :. CE. DE; adunque per l'eguaglianza delle ragioni, come la somma de' lati BH alla di loro differenza HI; così sta la tangente della semisomma CE alla tangente della semidifferenza DE. *Fig.13.*

7. Teorema quinto. In ogni triangolo come sta il lato massimo alla somma degli altri, così la differenza di questi alla differenza de i pezzi segati dalla perpendicolare, che cade sul lato massimo. Si prova. Si faccia centro A, e coll' intervallo del lato minimo AB si descriva il circolo BGH, che segherà gli altri lati in D, ed H; cada dal punto A la perpendicolare AE, che segherà BD in parti eguali per la 3. del 3. e si produca CA in G, le linee segate dalla perpendicolare saranno BE, EC, delle quali la differenza è DC, la somma de i lati sarà GC, e la loro differenza è HC. Ora per la 36. del 3. *Fig.14.*

i reti rettangoli GCH, BCD sono uguali, per la 14. del 6. saranno i loro lati reciproci, cioè sarà BC. GC::HC. DC, cioè come il lato massimo alla somma degli altri, così la differenza di questi, alla differenza di quelle porzioni segate dalla perpendicolare nel lato massimo. Si avverte, che i due lati DA, AC devono essere ineguali, e che se gli altri sono eguali, può o l'uno, o l'altro assumersi in luogo del maggiore.

8. Avverto, che se d'un triangolo saranno noti tre angoli non si può venire in cognizione, senonchè della proporzione de i lati, ma non mai essi potranno indagarsi, perchè infiniti triangoli equiangoli si danno maggiori, e minori d'un'altro dato; e la ragione de i lati sta come i seni degli angoli opposti.

ARTICOLO IV.

Canoni per il Calcolo Trigonometrico.

1. DAi cinque Teoremi sopra esposti come Corollarj se ne deducono i seguenti Canoni risolutivi de' triangoli, cioè se d'esfi siano note tre cose, v. g. o due angoli, ed un lato, o due lati, ed un'angolo ecc. tutto il resto si farà noto. Il triangolo, o è ortogonio, cioè rettangolo, o scaleno, cioè obliquangolo, per ambedue questi ecco le regole.

PER IL RETTANGOLO.

Data la base, e due angoli.

2. Come il raggio al seno dell' angolo opposto al lato cercato, così la base al lato cercato. Articolo superiore numero 2.

Dati due angoli, ed uno de' due lati.

3. Come il seno dell'angolo opposto al lato dato, al seno del complemento, così il lato dato all' altro lato cercato. Articolo superiore num. 5.

O pure come il raggio alla tangente dell'angolo opposto

posto al lato dato, così il lato dato all'altro. Articolo superiore num. 5.

Dati due angoli, e un lato trovare la base.

4. Come il seno dell'angolo dato al lato opposto al raggio, così il lato dato alla base. O pure

Come il raggio alla segante dell' angolo adjacente al lato dato, così il lato dato alla base. Articolo superiore num. 5.

Data la base, ed un lato, trovare gli angoli.

5. Come la base al lato dato, così il raggio al seno dell'angolo opposto al lato dato. O pure

Come il lato dato alla base, così il raggio alla segante dell'angolo adjacente all'altro lato.

PER L'OBLIQUANGOLO.

Dati tre lati trovare gli angoli.

6. Come la base alla somma de i lati, così la differenza de i lati al segmento della base; e come questo aggiuntovi la metà del residuo al lato maggiore, così il raggio alla segante dell'angolo adjacente al lato minore; sicchè avendosi due angoli si averà il terzo compimento a due retti. Avverto, che per segmento della base sopra mentovata s'intende quella porzione, che tolta nella metà del residuo cade la perpendicolare. Articolo superiore num. 7. ed 8.

Dati due lati, ed un'angolo ottuso, o acuto, purchè gli altri almeno si conoscano in specie, trovare gli altri angoli, e lato.

7. Si faccia come il lato dato opposto al dato angolo, al seno dell' angolo dato, così l'altro lato, al seno dell' angolo opposto maggiore, o minore del retto secondo, che l'angolo in specie sarà. Ora conoscendosi due angoli si saprà ancora il terzo per la 26. del 1. quindi il lato così si trova. Come il seno dell' angolo noto al lato opposto, così il seno del terzo angolo al terzo lato.

Dati due angoli, ed un lato trovare il resto.

8. Come il seno dell' angolo opposto al dato lato,

al lato dato, così il ſeno dell'angolo ſecondo al lato oppoſto. Articolo ſuperiore num. 5.

Dati due lati, & angolo compreſo.

9. Come la metà della ſomma data de' lati, alla differenza della metà della ſomma dall'altro lato; così la tangente della metà del reſiduo dell'angolo al ſemicircolo, alla tangente dell'angolo, del quale l'angolo oppoſto al lato minore è minore della metà di detto reſiduo dell'angolo al ſemicerchio, e l'oppoſto al maggiore è maggiore; poi ſi dica, come il ſeno d'uno de' due angoli al lato oppoſto, così il ſeno dell' angolo oppoſto al lato cercato, a queſt' iſteſſo lato cercato. Art. 4. num. 6.

ARTICOLO V.

Problemi Trigonometrici.

1. PRoblema 1. Determinare la proporzione de' gradi del Cerchio maſſimo terreſtre, v.g. dell'Equatore, ai gradi di qualunque Parallelo. In qualunque maniera, che ſi ſeghi la Sfera la ſezione ſempre è circolo, il quale è maggiore, o minore, ſecondo che più, o meno dal centro ſi dilunga, e quelle ſezioni, che paſſano pe'l centro fanno circoli in quella sfera maſſimi; di queſti, e degli altri minori ſi cerca la proporzione. Si cerca quì ſiccome ſi dimoſtra da Teodoſio, che le circonferenze tra loro ſtiano in proporzione de' diametri.
Fig. 14. Sia nella figura 14. il cerchio ABCE, che rappreſenti la terra HA l'Equatore, IE l'Orizonte razionale, AB il parallelo, AG ſeno dell'angolo, ADG di gradi 42, ſarà FC=AD per la 29. del 1. Dunque per il num. 2. Art. 4. ſe ſi farà come il raggio al ſeno del Compimento al quadrante, così un grado dell' Equatore ad un grado del parallelo, cioè così AC ad AD: perchè, come ſi diſſe, AD è raggio del parallelo, ſiccome HC è raggio dell' Equatore. Ecco il Calcolo.

Lo-

Logaritmo del Raggio ——— 1000000.00
Logaritmo del Seno di 48° ——— 987107.35
Logaritmo di 60 ——— 177815.13
Logaritmo di $44\frac{39}{40}$ ſcemato nel- ———
la Caratteriſtica di 1. ——— 0.164922.48

2. Problema 2. per il num. 3. Trovare qualunque, diſtanza BC. Si oſſervi nella figura 15. l'angolo BAC, e ſia di gradi 85, l'altezza con cui ſi fa l'oſſervazione ſia un'eſapeda. Ora ſi dica, come il ſeno di C di gradi 5 oppoſto al lato noto, che è 8715.57, al ſeno del Compimento, cioè di 85°, che è l'angolo BAC. 99619.47, così il lato dato, cioè AB, che ſi ſuppone di piedi 6 alla diſtanza BC. Ecco il Calcolo Logaritmico. *Fig.15.*

Logaritmo del Seno di 85° ——— 999834.42
Logaritmo di 6 ——— 077815.13

1077649.55
Logaritmo del Seno di 5° ——— 894029.60

Logaritmo 69 diſtanza cercata ——— 183619.95

3. Problema 3. per il num. 4. Trovare qualunque diſtanza del vertice D dal punto B. Si oſſervi l'angolo DBC, che lo ſuppongo di 6°, poi eſſendo BC v.g. di 462, ſi dica, come il ſeno dell'angolo BDC di 84°, il cui ſeno è 99452.18, al raggio 1000000.00, così il lato 462 alla baſe cercata BD, ecco il Calcolo Logaritmico. *Fig.15.*

Logaritmo del Seno totale ——— 10.00000.00
Logaritmo di 462 ——— 2.66464.20

12.66464.20
Logaritmo del Seno di 84° ——— 9.99761.43

Logaritmo di 465 lunghezza BA 2.66702.77

4. Problema 4. per il num. 5. Si ha l'altezza AD 124. Si cerca a che angolo ſi debba dirigere un Cannone in B per colpire il punto A. Si ritrovi per il problema an- *Fig.15.*

Dd 2 te-

tecedente la base BC=462, e poi si faccia come 463 a 124; così il raggio al seno dell' angolo opposto al lato dato AC.

Logaritmo di 124	209342.17
Logaritmo del Raggio	1000000.00
	1209342.17
Logaritmo di 465	266745.30
Logaritmo di 15°. 28	94259687

5. Problema 5. per il num. 6. In Roma da S. Pietro in Vaticano a Trinità di Monti sono passi 2300, da S. Pietro a S. Giovanni Laterano sono passi 3100, da S. Giovanni a Trinità di Monti sono passi 2550. Si cercano gli angoli di questo triangolo, per la cui soluzione vi vogliono due Analogie. Prima Analogia.

Logaritmo di 2300+2550=4850	3.68574.17
Logaritmo di 2550—2300=250	2.39794.00
	6.08368.17
Logaritmo delle base 3100	3.49136.17
Logaritmo del segamento della base, che tolto da essa, e nel Residuo cadendo la perpendicolare dal Vertice lo sega egualmente, il quale Logarit. è di passi 391.	2.59232.00

Seconda Analogia, come (3100—391):2=1745½. 3100 :: così il Raggio, alla tangente dell' angolo opposto al lato 3300.

Logaritmo di 1745½	3.24200.00
Logaritmo di 3100	3.49136.17
Raggio	10.00000.00
Tomologaritmo dell'angolo adjacente al lato 2300. 55°. 43'.	10.24936.17

6. Problema 6. per i numeri 7. 8. 9. Misurare la distanza di due luoghi C, B fra loro lontani, e lontani parimente dal sito della osservazione A. Per il Proble-

Fig. 17.

ma

ma 2. ſuppoſte note le diſtanze AB, AC ſi miſuri l'angolo BAC, che ſuppongo $=8^{\circ}: 27'$ ſi averà un triangolo, in cui ſono noti due lati, e l'angolo intercetto da queſti; onde per il numero 9. Articolo ſuperiore, ſi dirà come $(AB+AC):2$. $AC-(AB+AC):2$, così la tangente di DAF $81^{\circ}. 33'$ alla tangente dell' angolo C; ſia $AB=340$, $AC=496$, ſarà $(AB+AC):2=418$, ed $AC-(AB+AC):2=78$. Ecco il Calcolo.

Logaritmo di 78 ———	189209.46
Logarit. dell'angolo *d*AF $81^{\circ}. 33'$ —	1082810.11
	1272019.57
Logaritmo di 418 ———	262117.61
Meſologaritmo di $51^{\circ}. 29'$. ———	1009901.96

Che ſarà l'angolo ABC per eſſere oppoſto al lato maggiore AC. Ora per il num. 8. ſi dica come il ſeno dell' angolo B al lato AC, così il ſeno dell'angolo A al lato cercato BC.

Logaritmo del lato $AC=496$ ——	269548.17
Logaritmo dell' angolo A $16^{\circ}. 54'$ -	946344.83
	1215893.00
Logaritmo di $51^{\circ}. 29'$ ———	989344.39
Logaritmo di 184 lato BC cercato -	226548.61

7. Perchè ſi veda in pratica la dottrina data all'Articolo 1. num. 17. pongo in vece del ſeno di $51^{\circ}. 29'$ il Tomologaritmo del complemento, cioè — 1010655:61
che ſommato con gli altri due, e tolta la 269548.17
Caratteriſtica 2 reſta come ſopra il ſeno 946344.83
di 184, il che certamente è maggior compendio avendoſi le Tavole con i logaritmi delle ſeganti come le ſeguenti. 2.226548.61

Seguono le Tavole de' Seni tangenti, e ſeganti co i loro Logaritmi.

Ta-

Tavola de' Seni Tangenti, e Seganti al Raggio 100000, ed i loro Logarit. al Raggio 1000000.

Gr.	SENI.	TANG.	SEGAN.	*Logarit.*	*Mesolog.*	*Tomolog.*
1	1745	2745	100015	824185	824192	1000006
2	3490	3492	100060	854281	854308	1000026
4	5233	5240	100137	871880	871939	1000059
3	6976	6992	100244	884358	884464	1000105
5	8716	8748	100381	894029	894195	1000165
6	10452	10510	100550	901923	902162	1000238
7	12186	12278	100750	908589	908914	1000324
8	13917	14054	100982	914355	914780	1000424
9	15643	15838	101246	919433	919971	1000538
10	17365	17632	101542	923967	924631	1000664
11	19081	19438	101871	928059	928865	1000805
12	20791	21255	102234	931787	932747	1000959
13	22495	23086	102630	935208	936336	1001127
14	24192	24932	103061	938367	939677	1001309
15	25882	26794	103527	941299	942805	1001525
16	27564	28674	104029	944033	945749	1001715
17	29237	30573	104569	946593	948533	1001940
18	30902	32491	105146	948998	951177	1002179
19	32557	34432	105762	951264	953697	1002432
20	34202	36397	106417	953405	956106	1002701
21	35837	38386	107114	955432	958417	1002984
22	37461	40402	107853	957357	960640	1003283
23	39073	42447	108636	959187	962785	1003597
24	40674	44522	109463	960931	964858	1003926
25	42262	46630	110337	962594	966867	1004272
26	43837	48773	111260	964184	968818	1004633
27	45399	50952	112232	965704	970716	1005011
28	46047	53170	113257	967160	972567	1005406
29	48481	55430	114235	968557	974375	1005818
30	50000	57735	115470	969897	976143	1006246
31	51504	60086	116663	971183	977877	1006693
32	52992	62486	117917	972420	979579	1007157
33	54464	64940	119236	973610	981251	1007640
34	55919	67450	120621	974756	982898	1008142
35	57358	70020	122077	975859	984522	1008663
36	58779	72654	123606	976921	986126	1009204
37	60181	75355	125213	977946	987711	1009765
38	61566	78128	126901	978934	989280	1010346
39	62932	80978	128675	979887	990836	1010949
40	64279	83909	130540	980806	992381	1011574
41	65606	86928	132501	981694	993916	1012222
42	66913	90040	134693	982551	995443	1012892
43	68200	93251	136732	983378	996965	1013587
44	69466	96568	139016	984177	998483	1014306
45	70711	100000	141421	984948	1000000	1015051

Tavola de' Seni Tangenti, e Seganti al Raggio 100000, ed i loro Lagarit. al Raggio 1000000.

Gr.	SENI .	TANG.	SEGAN.	*Logarit.*	*Mesolog.*	*Tomolog.*
89	99985	5728996	5729868	999993	1175807	1175814
88	99939	2863625	2865370	999973	1145691	1145718
87	99863	1908113	1910732	999940	1128060	1128119
86	99756	1430066	1433558	999894	1115535	1115641
85	99619	1143005	1147371	999834	1105804	1105970
84	99452	951436	956677	999761	1097837	1098076
83	99255	814434	820550	999675	1091085	1091410
82	99027	711536	718529	999575	1085219	1085644
81	98768	631375	639245	999461	1080028	1080566
80	98481	567128	575877	999335	1075368	1076032
79	98163	514455	524084	999194	1071134	1071940
78	97815	470463	480973	999040	1067252	1068212
77	97437	433147	444541	998872	1053663	1064791
76	97030	401078	413356	998690	1060322	1061632
75	96593	373205	386370	998494	1057194	1058700
74	96126	348741	362795	998284	1054250	1055966
73	95630	327085	342030	998059	1051466	1053406
72	95106	307768	323606	997820	1048821	1051001
71	94552	290421	307155	997567	1046302	1048735
70	93969	274747	292380	997298	1043893	1046554
69	93359	260508	279042	997015	1041582	1044567
68	92718	247508	266946	996716	1039359	1042642
67	92050	235585	255930	996402	1037214	1040812
66	91355	224603	245859	996073	1035141	1039068
65	90631	214450	236620	995727	1033132	1037405
64	89879	205030	228117	995366	1031181	1035815
63	89101	196261	220268	994988	1029283	1034295
62	88295	188072	213005	994593	1027432	1032839
61	87462	180404	206266	994181	1025624	1031442
60	86603	173205	200000	993753	1023856	1030103
59	85717	166427	194160	993306	1022122	1028816
58	84805	160033	188707	992842	1020421	1027579
57	83867	153986	183607	992359	1018748	1026389
56	82904	148256	178829	991857	1017101	1025243
55	81915	142814	174344	991336	1015477	1024140
54	80902	137638	170130	990795	1013873	1023078
53	79864	132704	166164	990234	1012288	1022053
52	78801	127994	162426	989653	1010719	1021065
51	77715	123489	158901	989050	1009163	1020112
50	76604	119175	155572	988425	1007618	1019193
49	75471	115036	152425	987777	1006083	1018305
48	74314	111061	149447	987107	1004556	1017448
47	73135	107236	146627	986412	1003034	1016621
46	71934	103553	143955	985693	1001516	1015822
45	70711	100000	141421	984948	1000000	1015051

1	000000.00	51	170757.02	101	200432.14	151	217897.69	201	230319.61
2	030103.00	52	171600.33	102	200860.02	152	218184.35	202	230535.14
3	047712.13	53	172427.59	103	201283.72	153	218469.14	203	230749.60
4	060206.00	54	173239.38	104	201703.33	154	218752.07	204	230963.02
5	069897.00	55	174036.27	105	202118.93	155	219033.17	205	231175.39
6	077815.13	56	174818.80	106	202530.59	156	219312.45	206	231386.72
7	084509.00	57	175587.49	107	202938.38	157	219589.97	207	231597.03
8	090309.00	58	176342.80	108	203342.38	158	219865.71	208	211805.33
9	095424.25	59	177085.20	109	203742.65	159	220139.71	209	232014.63
10	100000.00	60	177815.13	110	204139.27	160	220412.00	210	232221.93
11	104139.27	61	178532.98	111	204532.30	161	220682.59	211	232428.25
12	107918.12	62	179239.17	112	204921.80	162	220951.50	212	232633.59
13	111394.34	63	179934.05	113	205307.84	163	221218.76	213	232837.96
14	114612.80	64	180618.00	114	205690.49	164	221484.38	214	233041.38
15	217609.13	65	181291.34	115	206069.78	165	221748.39	215	233243.85
16	120412.00	66	181954.39	116	206445.80	166	222010.81	216	233445.38
17	123044.80	67	182607.48	117	206818.59	167	222271.65	217	233645.97
18	125527.25	68	183250.89	118	207188.20	168	222530.93	218	233845.65
19	127875.36	69	183884.91	119	207554.70	169	222786.67	219	234044.41
20	130103.00	70	184509.80	120	207918.12	170	223044.89	220	234242.27
21	132221.93	71	185125.83	121	208278.54	171	223299.61	221	234439.23
22	134242.27	72	185733.25	122	208635.98	172	223552.84	222	234635.30
23	136172.78	73	186332.29	123	208990.51	173	223804.61	223	234830.49
24	138021.12	74	186023.17	124	209342.17	174	224054.92	224	235024.80
25	139794.00	75	187506.13	125	209591.00	175	224303.80	225	235218.25
26	141497.33	76	188081.36	126	210037.05	176	224551.27	226	235410.84
27	143136.38	77	188649.07	127	210380.37	177	224797.33	227	235602.59
28	144715.80	78	189209.46	128	210721.00	178	225042.00	228	235793.48
29	146239.80	79	189762.71	129	211053.97	179	225285.30	229	235983.55
30	147712.13	80	190308.99	130	211394.34	180	225527.25	230	236172.78
31	149136.17	81	190848.50	131	211729.13	181	225767.86	231	236361.20
32	150515.00	82	191381.39	132	212057.39	182	226007.14	232	236548.80
33	151851.39	83	191907.81	133	212385.16	183	226245.11	233	236735.59
34	153147.89	84	192427.93	134	212710.48	184	226481.78	234	236921.59
35	154406.80	85	192941.89	135	213033.38	185	226717.17	235	237106.79
36	155630.25	86	193449.85	136	213253.89	186	226951.29	236	237291.20
37	156820.17	87	193951.93	137	213672.06	187	227184.16	237	237474.83
38	157978.36	88	194448.27	138	213987.91	188	227415.78	238	237657.70
39	159106.46	89	194939.00	139	214301.48	189	227646.18	239	237839.79
40	160206.00	90	195424.25	140	214612.80	190	227875.36	240	238021.12
41	161278.39	91	195904.14	141	214921.91	191	228103.34	241	238201.70
42	162324.93	92	196378.78	142	215228.83	192	228330.12	242	238381.54
43	163346.85	93	196848.29	143	215533.60	193	228555.73	243	238560.63
44	164345.27	94	197312.79	144	215836.25	194	228780.17	244	238738.98
45	165321.25	95	197772.36	145	216136.80	195	229003.46	245	238916.61
46	166275.78	96	198227.12	146	216435.29	196	229225.61	246	239093.51
47	167209.79	97	198677.17	147	216731.73	197	229446.62	247	239269.70
48	168124.12	98	199122.61	148	217026.17	198	229666.52	248	239445.17
49	169019.61	99	199563.52	149	217318.63	199	229885.31	249	239619.93
50	169897.00	100	200000.00	150	217609.13	200	230103.00	250	239794.00

251	239967.37	301	247856.65	351	254530.71	401	260314.44	451	265417.65
252	240140.05	302	248000.69	352	254654.27	402	260422.61	452	265513.84
253	240312.05	303	248144.26	353	254777.47	403	260530.50	453	265609.82
254	240483.37	304	248287.36	354	254900.33	404	260638.14	454	265705.59
255	240654.01	305	248429.[illegible]8	355	255022.84	405	260745.50	455	265801.14
256	240824.00	306	248572.14	356	255145.00	406	260852.60	456	265896.48
257	240993.31	307	248713.84	357	255266.82	407	260959.44	457	265991.62
258	241161.97	308	248855.07	358	255388.[illegible]	408	261066.02	458	266086.55
259	241329.98	309	248995.85	359	255509.44	409	261172.33	459	266181.27
260	241497.33	310	249136.14	360	255630.25	410	261278.39	460	266275.78
261	241664.05	311	249276.04	361	255750.72	411	261384.18	461	266370.09
262	241830.13	312	249415.46	362	255870.86	412	261489.72	462	266464.20
263	241995.57	313	249554.43	363	255990.66	413	261595.01	463	266558.10
264	242160.39	314	249692.96	364	256110.14	414	261700.03	464	266651.80
265	242324.59	315	249831.06	365	256229.29	415	261804.81	465	266745.30
266	242488.16	316	249968.71	366	256348.11	416	261909.33	466	266838.59
267	242651.13	317	250105.93	367	256466.61	417	262013.61	467	266931.69
268	242813.48	318	250242.71	368	256584.78	418	262117.63	468	267024.59
269	242975.23	319	250379.07	369	256702.63	419	262221.40	469	267117.28
270	243136.38	320	250515.00	370	256820.17	420	262324.93	470	267209.79
271	243296.93	321	250650.50	371	256937.39	421	262428.21	471	267302.09
272	243456.89	322	250785.59	372	257054.29	422	262531.25	472	267394.20
273	243616.26	323	250920.25	373	257170.88	423	262634.04	473	267486.11
274	243775.06	324	251054.50	374	257287.16	424	262736.59	474	267577.83
275	243933.27	325	251188.34	375	257403.13	425	262838.89	475	267669.36
276	244090.91	326	251321.76	376	257518.78	426	262940.96	476	267760.70
277	244247.98	327	251454.78	377	257634.14	427	263042.79	477	267851.84
278	244404.48	328	251587.38	378	257749.18	428	263144.38	478	267942.79
279	244560.42	329	251719.59	379	257863.92	429	263245.73	479	268033.55
280	244715.80	330	251851.39	380	257978.36	430	263346.85	480	268124.12
281	244870.63	331	251982.80	381	258092.50	431	263447.73	481	268214.51
282	245024.91	332	252113.81	382	258206.34	432	263548.37	482	268304.70
283	245178.64	333	252244.42	383	258319.88	433	263648.79	483	268394.71
284	245331.83	334	252374.65	384	258433.12	434	263748.97	484	268484.54
285	245484.49	335	252504.48	385	258546.07	435	263848.93	485	268574.17
286	245636.60	336	252633.93	386	258658.73	436	263948.65	486	268663.63
287	245788.19	337	252762.99	387	258771.10	437	264048.14	487	268752.90
288	245939.25	338	252891.67	388	258883.17	438	264147.41	488	268841.98
289	246089.78	339	253019.97	389	258994.96	439	264246.45	489	268930.89
290	246239.80	340	253147.89	390	259106.46	440	264345.27	490	269019.61
291	246389.30	341	253275.44	391	259217.68	441	264443.86	491	269108.15
292	246538.29	342	253402.61	392	259328.61	442	264542.23	492	269195.51
293	246686.76	343	253529.41	393	259439.26	443	264640.37	493	269284.69
294	246834.73	344	253655.84	394	259549.62	444	264738.30	494	269372.69
295	246982.20	345	253781.91	395	259659.71	445	264836.00	495	269460.52
296	247129.17	346	253907.61	396	259769.52	446	264933.49	496	269548.17
297	247275.64	347	254032.95	397	259879.05	447	265030.75	497	269635.64
298	247421.63	348	254157.92	398	259988.31	448	265117.80	498	269722.93
299	247567.12	349	254282.54	399	260097.29	449	265224.63	499	269810.05
300	247112.13	350	254406.80	400	260206.00	450	265321.25	500	269897.00

501	269983.77	551	274115.16	601	277888.45	651	281358.10	701	284571.80
502	270070.37	552	274193.91	602	277959.65	652	281424.76	702	284633.71
503	270156.80	553	274372.51	603	278031.73	653	281491.32	703	284695.53
504	270243.05	554	274352.98	604	278103.69	654	281557.77	704	284757.27
505	270329.14	555	274429.30	605	278175.54	655	281624.13	705	284818.91
506	270415.05	556	274507.48	606	278247.26	656	281690.38	706	284880.47
507	270500.80	557	274585.52	607	278318.87	657	281756.54	707	284941.94
508	270586.37	558	274663.42	608	278390.36	658	281822.59	708	285003.33
509	270671.78	559	274741.18	609	278461.73	659	281888.54	709	385064.62
510	270757.02	560	274818.80	610	278532.98	660	281954.39	710	285125.83
511	270842.09	561	274896.29	611	278604.12	661	282020.15	711	285186.96
512	270927.00	562	274973.63	612	278675.14	662	282085.80	712	285248.00
513	271011.74	563	275050.84	613	278746.05	663	282151.35	713	285308.95
514	271096.31	564	275127.91	614	278816.84	664	282216.81	714	285369.82
515	271180.72	565	275203.84	615	278887.51	665	282282.16	715	285430.60
516	271264.97	566	275281.64	616	278958.07	666	282347.42	716	285491.30
517	271349.05	567	275358.31	617	279028.52	667	282412.58	717	285551.92
518	271432.98	568	275434.83	618	279098.85	668	282477.65	718	285612.44
519	271516.74	569	275511.23	619	279169.06	669	282542.61	719	285672.89
520	271600.33	570	275587.49	620	279239.17	670	282607.48	720	285733.25
521	271683.77	571	275663.61	621	279309.16	671	282672.25	721	285693.53
522	271767.05	572	275739.60	622	279379.04	672	282736.93	722	285853.72
523	271850.17	573	275815.46	623	279448.80	673	282801.51	723	285913.83
524	271933.13	574	275891.19	624	279518.46	674	282865.99	724	285973.86
525	272015.93	575	275966.78	625	279588.00	675	282930.38	725	286033.80
526	272098.57	576	276042.25	626	279657.43	676	282994.67	726	286093.66
527	272181.06	577	376117.58	627	279726.75	677	283058.87	727	286153.44
528	272263.39	578	276192.78	628	279795.96	678	283122.97	728	286213.14
529	272345.57	579	276267.86	629	279865.06	679	283186.98	729	286272.75
530	272427.59	580	276342.80	630	279934.05	680	283250.89	730	286332.29
531	272509.45	581	276417.61	631	280001.94	681	283314.71	731	286391.74
532	272591.16	582	276492.30	632	280071.71	682	283378.44	732	286451.11
533	272672.72	583	276566.86	633	280140.37	683	283442.07	733	286510.90
534	272754,13	584	276641.28	634	280208.93	684	283505.61	734	286569.61
535	272835.38	585	276715.59	635	280277.37	685	283569.06	735	286628.73
536	272916.48	586	276789.76	636	280345.71	686	283632.41	736	286687.78
537	272997.43	587	276863.81	637	280413.94	687	283695.67	737	286746.75
538	273078.23	588	276937.73	638	280482.07	688	283758.84	738	286805.64
539	273158.88	589	277011.53	639	280550.09	689	283821.92	739	286864.44
540	273239.38	590	277085.20	640	280618.00	690	283884.91	740	286923.17
541	273319.73	591	277232.17	641	280685.80	691	284947.80	741	286981.82
542	273399.93	592	277232.17	642	280753.50	692	284010.61	742	287040.39
543	273479.98	593	277305.47	643	280821.10	693	284073.32	743	287098.88
544	273559.89	594	277378.64	644	280888.59	694	284135.95	744	287157.29
545	273639.65	595	277451.70	645	280955.97	695	284198.48	745	287215.63
546	273719.26	596	277514.63	646	281023.25	696	284260.92	746	287273.89
547	273798.73	597	277597.43	647	281090.43	697	284323.28	747	287332.06
548	273878.06	598	277670.12	648	281157.50	698	284385.54	748	287390.16
549	273957.23	599	277742.68	649	281224.47	699	284447.72	749	287448.18
550	274036.27	600	277815.13	650	281891.34	700	284509.80	750	287506.13

751	287563.99	801	290363.25	851	292992.96	901	295472.48	951	297818.05
752	287621.78	802	290417.44	852	293043.96	902	295520.65	952	297863.69
753	287679.50	803	290471.55	853	293094.90	963	295568.77	953	297909.29
754	287737.13	804	290525.60	854	293145.79	904	295616.84	954	297954.84
755	287794.70	805	290579.59	855	293196.61	905	295664.86	955	298000.34
756	287852.18	806	290633.50	856	293247.38	906	295712.82	956	298045.79
757	287909.5[illegible]	807	290687.35	857	293298.08	907	295760.73	957	298091.19
758	287966.92	808	290741.14	858	293348.73	908	295808.58	958	298136.55
759	288024.18	809	290794.85	859	293399.32	909	295856.39	956	298181.86
760	288081.36	810	290848.50	860	293449.85	910	295904.14	960	298227.12
761	288138.[illegible]7	811	290902.09	861	293500.32	911	295951.84	961	298272.34
762	288195.50	812	290955.60	862	203550.73	912	295999.48	962	298317.51
763	288252.45	813	291009.05	863	293601.08	913	296047.08	963	298362.63
764	288309.34	814	291062.44	864	293651.37	914	296094.62	964	298407.70
765	288366.14	815	291115.76	865	293701.61	915	296142.11	965	298452.73
766	288422.88	816	291169.02	866	293751.79	916	296189.55	966	298497.71
767	288479.54	817	291222.21	867	293801.91	917	296236.93	967	298542.65
768	288536.12	818	291275.33	868	293851.97	918	296284.27	968	298587.54
769	288592.63	819	291328.39	869	293901.98	919	296331.55	969	298632.38
770	288649.07	820	291381.30	870	293951.93	920	296378.78	970	298677.17
771	288705.44	821	291434 32	871	294001.82	921	296425.96	971	298721.92
772	288761.73	822	291487.18	872	294051.65	922	296473.09	972	298766.63
773	288817.95	823	291539.93	873	294101.42	923	296520.17	973	298811.28
774	288874.10	824	291592.72	874	294151.14	924	396567.20	974	298855.90
775	288930.17	825	291645.39	875	294200.81	925	296614.17	975	298900.46
776	288986.17	826	291698.00	876	294250.41	926	296661.10	976	298944.98
777	289042.10	827	291750.55	877	294299.96	927	295707.97	977	298989.46
778	289097.96	828	291803.03	878	294349.45	928	296754.80	978	299033.89
779	289153.75	829	291855.45	879	294398.89	929	296801.57	979	299078.27
780	289209,46	830	291907.81	880	294448.27	930	296848.29	980	299122.61
781	289265.10	831	291960.10	881	294497.59	931	296894.97	981	299166.90
782	289320.63	832	292012.33	882	294546.86	932	296941.59	982	299211.15
783	289376.18	833	292064.50	883	294596.07	933	296988.16	983	299255.35
784	289431.61	834	292116.61	884	294645.23	934	297034.69	984	299299.51
785	289486.97	835	292168.65	885	294694.33	935	297081.16	985	299343.62
786	289542.25	836	292220.63	886	294743.37	936	297127.58	986	299387.69
787	289597.47	837	292272.55	887	294792.36	937	297173.96	987	299431.72
788	289652.62	838	292324.40	888	294841.30	938	297220.28	988	299475.69
789	289707.70	839	292376.20	889	294890.18	939	297266.56	989	299519.63
790	289762.71	840	292427.93	890	294939.00	940	297312.79	990	299563.52
791	289817.65	841	292479.60	891	294987.77	941	297358.96	991	299607.37
792	289872.52	842	292531.21	892	295036.49	942	297905.09	992	299651.17
793	289927.32	843	292582.76	893	295085.15	943	297451.17	993	299694.92
794	289982.05	844	292634.24	894	295133.75	944	297497.20	994	299738.64
795	290036.71	845	292685.67	895	295182.30	945	297543.18	995	299682.31
796	290091.31	846	292737.04	896	295230.80	946	297589.11	996	299825.93
797	290145.83	847	292788.34	897	295279.24	947	297635.00	997	299869.52
798	290200.29	848	292839.59	898	295327.63	948	297680.83	998	299913.05
799	290254.63	849	292890.77	899	295375.97	949	297726.62	999	299956.55
800	290309.00	850	292941.89	900	295424.25	950	297772.36	1000	300000.00

ARTICOLO VI.

Calcolo Analitico, e Trigonometrico per la soluzione de' Problemi Geometrici.

1. Sonovi alcuni problemi, per la soluzione de' quali entra l'Algebra per mezzo della Trigonometria, e di questi alcuni scelti quì ne pongo. Problema 1. Data
Fig. 14. nella figura 14. la linea $BC = a$, e l'angolo ACB, si vuole dal punto B tirare una linea al lato CA, di modo che $CA = z$ stia alla $BA = x$, come m ad n di maggiore, o minore ineguaglianza secondo la quantità dell'angolo C. Sia il seno di $ACB = s$, sarà per l'Articolo 4. numero 8. $x.s :: z.sz:x$ seno dell'angolo CBA, ma perchè $z.x :: m.n$, sarà $mx:n = z$, che sostituito nel seno $sz:x$, viene $sm:n$; dunque sarà noto ancora l'angolo CBA, laonde per l'istesso Articolo 4. saranno eziandio noti gli altri lati CA, BA. Ove si vede, che per la soluzione d'un triangolo basta, che il terzo noto sia una ragione.

2. Problema 2. Data la base $CB = a$, e gli angoli C, B trovare l'altezza $AE = x$. Sia il seno dell'angolo $C = s$, e'l suo coseno $CE = c$, e'l seno dell'angolo $B = p$, e'l suo coseno $BE = q$, sarà per l'Articolo 3. num. 6. $s.x :: c.CE = cx:s$, e $p.x :: q.BE = qx:p$: laonde si avrà $cx:s + qx:p = a$, e ridotta l'equazione si trova $x = spa:(cp + sq)$.

3. Problema terzo. Similmente data l'altezza $AE = b$, e gli angoli del triangolo BAC, essendo AE il seno totale, che chiamo t, $BE = x$, $EC = y$ saranno cotangenti degli angoli B, e C; dunque sarà come $b.x :: t.m$, da cui si cava $x = bm:t$, e $b.y :: t.n$, da cui si cava $y = bn:t$, adunque $x + y = (bm + bn):t$ quantità della base, e per conseguenza viene noto tutto il triangolo per il num. 8. Artic. 4.

4. Problema quarto. Data la somma de i lati $BA + AC = a$, e gli angoli alla base, trovare i detti lati; sia il seno dell'angolo $B = m$, e'l seno dell'angolo $C = n$,

e

e BA$=x$, sarà AC$=a-x$: laonde per il num.8. Art.4. $x.n::a-x.m$, ove si cava $x=na:(m+n)$.

5. Problema 5. Dati gli angoli d'un triangolo, e 'l segmento della base ove cade la perpendicolare BE$=a$ trovare l'altro segmento; sia EC$=x$, il seno dell'angolo B$=m$, il seno dell'angolo C$=p$, e'l suo coseno $=$EC$=q$, e'l coseno dell' angolo B$=$BE$=n$, sarà per il numero 8. Articolo 4. la perpendicolare AE$=am:n=px:q$; dunque $x=amq:pn$, che si doveva trovare.

6. Problema 6. Nella stessa figura 14. sia data l'area del triangolo AEC, e l'angolo C, trovare i lati AE, BC. Sia l'area $=a$, AB$=x$, BC$=2a:x$, il seno totale $=r$, la tangente CE$=t$, per l'Articolo 4. num. 3. $r.t::x.2a:x$, ove si cava $x=\sqrt{2ra:t}$. Avverto che dalla considerazione di questi ultimi valori ne insorgono i Teoremi, espressivi di ciò, che nel problema cercavasi, v. g. Si risolva il valore $x=\sqrt{2ra:t}$ in una analogia starà così: $a:x^2::t.2r$, cioè l'area d'un triangolo rettangolo sta al quadrato d'un lato come la tangente dell' angolo opposto al detto lato, al doppio del seno totale; ed in quanti modi tal valore può variarsi, in altrettanti parimenti potrà esprimersi il Teorema.

CA-

CAPO V.

Delle Combinazioni, e Permutazioni.

ARTICOLO PRIMO.

Si spiegano le Combinazioni.

1. SI spiega in questo Capo l'applicazione delle progressioni sì Aritmetica, che Geometrica, come ancora de' numeri figurati, e di tutte le già esposte regole nel Capo IV. quì necessarie per la retta intelligenza delle combinazioni, e permutazioni; dal che non piccolo vantaggio ne ricaverà il nostro studioso deponendo parte di quella maraviglia, che recar suole l'immensa variazione delle cose create, le quali hanno stancato tutti gli osservatori della Natura. Se si eccettui un'Anasagora, sappiamo aver creduto gli altri Filosofi, i primi componenti delle cose non esser molti, anzi il loro numero essere sì tenue, che non pochi lo ristrinsero ad un solo, variato solamente per forza di moto nelle sue parti, e di figura, e di mole, e queste riunite, ed in varie guise combinate rappresentare ora un pomo, ora un'uccello, ora un diamante, ora una rosa, ora tante altre cose quante a' nostri sensi si apprestano, e quante a quegli s'involano, che certamente in più numero sono, e dicono, che Dio solamente la materia creasse, e che a questa poi comunicasse un gagliardo impulso,

Ond' ei forte crollar fea l'Universo,
Cedero al fine un poco — Il Milani nella Canzona della Luce.
Le parti varie di figura, e pondo,
In cui si scioglie, e di cui fatto è il Mondo.

Tal maraviglia si toglierà in parte da un'altra maggiore, che nascerà dalla considerazione delle combinazioni, e permutazioni, le quali crescendo oltre ogni

cre-

credere fanno ben comprendere, come da poche cose altre innumerabili ne possano nascere.

2. La combinazione è la variazione di molte cose diverse o a 2 a 2, o a 3 a 3, o a 4 a 4 ecc. sicchè in ciascuna di queste siavi almeno una cosa delle sudette diversa. Ora essendo date alcune cose si deve esaminare in quanti modi possano quelle combinarsi, al che rispondo, che il numero delle combinazioni a 2 a 2 di qualunque numero di cose è sempre un numero triangolare, che ha per lato una di meno delle quantità date, perchè due cose non ammettono che una combinazione, 3 ne hanno 3; 4 ne hanno 5; 6. 10 ecc. onde per il Capo III. Art. 7. num. 4. chiamandosi il numero delle cose da combinarsi $= m$, sarà $m - 1 \times \frac{1}{2}m - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$, che vuol dire la metà del quadrato delle cose — il loro numero fanno i binarj, o pure, come insegna Pietro Erigonio, che coincide colla medesima regola, si moltiplica il numero dato per lo stesso meno uno, diviso per due, come nel Gioco di Genova usavasi per ricercare gli ambi.

3. Se le cose si dovranno combinare a 3 a 3, allora dico, che il numero delle combinazioni sarà numero piramidale trigono primo, che averà per lato due meno del numero delle cose date, perchè tre cose non ammettono, che una sola combinazione, 4 ne ammettono 4, e 5. 10, e 6. 20 ecc. che sono numeri piramidali triangolari primi; laonde per il Capo III. Art. 7. num. 5. se il numero delle quantità si farà $= m$, sarà il Canone generale de' ternarj $m - 2 \times \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}m - \frac{0}{3} = \frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{6}3m^2 + \frac{1}{6}2m$, che è il dire, il cubo — 3 quadrati + due volte le cose date, tutto diviso per 6 dà il numero de i ternarj, e perchè $m - 1$ per m fa il doppio degli ambi, è chiaro, che moltiplicandosi gli ambi ritrovati per il numero dato — 2, il prodotto poi diviso per 3 restituirà il numero de' ternarj, che è la misura, che volgarmente usavasi per trovare i terni nel sopramentovato Gioco di Genova, come bene esaminando il Canone si ricava.

4. Se

4. Se poi le coſe ſi vorranno combinare a 4 a 4, il numero delle combinazioni ſarà un numero piramidale triangolare ſecondo; ſe a 5 a 5 ſarà un piramidale triangolare terzo, e così degli altri procedendo all' infinito; onde ne riſulta un Canone generale per trovare il numero di qualunque combinazione. Sia il numero da combinarſi $= m$, il numero eſponente le combinazioni $= n$, ſarà il Canone il ſeguente, $m - n + 1 \times \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}n + 3 \times \frac{1}{4}m - \frac{1}{4}n + 4$ ecc. finchè n ſvaniſca, così ſe $m = 20$, $n = 10$, cioè ſi voglia ſapere quante combinazioni a 10 a 10 ammettono 20 coſe, averemo il Canone così $\frac{11}{1} \times \frac{12}{2} \times \frac{13}{3} \times \frac{14}{4} \times \frac{15}{5} \times \frac{16}{6} \times \frac{17}{7} \times \frac{18}{8} \times \frac{19}{9} \times \frac{20}{10} = 92664$, cioè moltiplicati i numeratori, e'l fatto diviſo per il fatto de i denominatori s'avrà il numero delle combinazioni richieſte.

5. Queſto Canone coincide con la regola di Pietro Erigonio aſſegnata nel ſuo Corſo Matematico, ſenza che egli avvertiſſe alla proprietà delle ſerie ſudette, cioè ſe ſi voglia trovare il numero delle combinazioni di qualunque quantità di coſe in qualunque maniera combinate, ſi facciano due progreſſioni Aritmetiche naturali, la prima incominci dalla unità, e finiſca col numero delle coſe, che deve avere una combinazione. La ſeconda incominci dal numero delle coſe date, e che devono combinarſi, e vada decreſcendo per tanti termini, quanti ha la prima ſerie; queſte due progreſſioni ſi moltiplichino ciaſcuna da ſe per continua moltiplicazione, e'l prodotto della prima ſi divida pe'l prodotto della ſeconda, il quoziente ſarà il numero delle combinazioni cercato. Vedi il Capo IV. Art. 8. ſtaranno le ſerie nell' eſempio ſopra poſto così:

20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10

Che come vedi è la ſteſſa operazione, che la ſuperiore.

6. Ma ſe ſi voglia ſapere la ſomma di tutte le combinazioni poſſibili d'un dato numero di coſe, ſi faccia una

ſerie

serie Geometrica dupla, che incominci dalla unità di tanti termini quante sono le cose da combinarsi, poi questa si sommi, per il Capo III. Artic. 3. num. 3. cioè si raddoppj l'ultimo termine meno uno, e da questa somma si levi il numero de' termini, resterà il numero delle combinazioni diverse, che possono di tali cose aversi; v. g. si desidera sapere in quante maniere diverse possono combinarsi le 23 lettere dell'Alfabeto a 2 a 2, a 3 a 3 ecc. Faccio la serie Geometrica dupla da 1 sino al 23 termine, o pure trovo il 23 termine per il Capo III. Articolo 3. num.4. che sarà 4194304, questo raddoppiato, e poi toltone 1, fa 8388607, da cui sottraendo 23 numero delle lettere date, restano 8388584 combinazioni, diverse, che delle dette lettere possono farsi, delle quali se ne formano poi parole innumerabili ripetendo in esse l'istesse lettere, come rade sono quelle parole, che simile repetizione non abbiano, e poi in quanto al formare le parole si deve eziandio attendere alle permutazioni d'esse combinazioni, che per dire il vero ascendono a numero immenso, come nella dottrina, che daremo nel seguente Articolo si farà manifesto.

7. Se di questa regola bellissima se ne voglia la dimostrazione si veda il Wolfio Tomo 1. pag. 305. Avverto, che se il numero delle cose, che si vogliono combinare, si dividerà in due altri numeri, il tutto averà egual numero di combinazioni denominate da esse parti, v. g. l'8 si divide in 5, e 3; dunque ha tanti quinarj, quanti ternarj: di più si divide in 6, e 2; dunque ha tanti senarj, quanti binarj, e così se in più parti d'intieri dividere si potesse, dovrebbe dirsi, come in effetto sperimentando ogn'uno per se medesimo potrà chiarirsi.

Esempio.

8. Lucio, e Sabina erano infelici genitori di 20 figli; i quali essendo tutti rei di lesa Maestà furono dal Principe condannati a crudel morte; ma tanto si ajutò la peraltro meritevole pietà de' genitori, che impetrò la

grazia per 10; ma perchè questa meschiata fosse d'un grande dolore, volle il Principe, che quei dieci il primo dì fossero scelti dal Padre, ed il dì seguente approvati dalla Madre, che se ella approvare non li volesse, ne sciegliesse altri 10, quali il dì seguente dovesse il Padre approvare, che se egli nè pure approvar volesse, fosse a suo arbitrio, ma altri 10 ne scegliesse, quali il dì seguente approvasse la Madre, e così a vicenda andasse la cosa, finchè cessasse l'arbitrio di non approvare, quando tutti gl'istessi 10 due volte si proponessero, o dall'uno, o dall'altro. Si dimanda quanti giorni si poteva durare da questi sventurati Genitori a sciegliere, e ricusare prima di proporre gl'istessi 10 due volte. Rispondo ciò consistere in ritrovare tutte le combinazioni a 10 a 10 di 20 cose, che facendosi le serie come sopra al num. 5.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10
20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11

Si averanno combinazioni 92378, cioè tanti giorni potevano proporre, e ricusare, che danno anni $281\frac{1}{2}$, onde si vede, che tutti i giovani vissero i loro giorni compiutamente senza tema di morte infame, sicuri di essere preoccupati dal fato comune, a cui ci spinge necessità di natura, o per dir meglio pena di fallo.

ARTICOLO II.

Delle Permutazioni.

1. LA permutazione è variazione di sito di una cosa rispetto alle altre, v. g. *tu* permutata dice *ut*, così quel verso, che leggesi dritto, e roverscio:

Roma tibi subito motibus ibit amor.

così ancora sono tutti gli anagrammi, che da questa regola hanno l'origine, o per dir meglio, nelle permutazioni consiste tutta l'arte di ritrovarli.

2. Si cerca ora dato un numero di cose in quante ma-

maniere diverſe poſſano permutarſi? Quanto è facile la regola di rinvenire le combinazioni, altrettanto è difficile intenderne il riſultato. La regola è queſta; ſi faccia una ſerie naturale, che incominci dalla unità, e proſiegua ſino al numero delle coſe date da permutarſi, poi ſi moltiplichino ſucceſſivamente tutti i termini di queſta ſerie, e l'ultimo prodotto ſarà il numero delle combinazioni cercato; v. g. ſi vuol ſapere in quante maniere diverſe permutar ſi poſſano le cinque vocali, che compongono il nome ineffabile *Ieoua*, faccio la ſerie 1. 2. 3. 4. 5, e moltiplicati tutti i termini ſucceſſivamente producono finalmente 120, ed in tante maniere appunto poſſono permutarſi.

3. Ma per vedere l'incredibile prodigioſo numero, a cui aſcendono le permutazioni anche di poche coſe, v. g. di 12 nel ſeguente eſempio ſi farà manifeſto, il quale io traduco fedelmente dal P. Scotti, che 'l riferiſce al Tomo 3. Magia Naturale pag. 614.

Esempio.

4. Nacque un dì conteſa tra dodici Cavalieri Tedeſchi circa il prendere poſſeſſo d'una Eredità. Si aſſegna il giorno, in cui tra loro placidamente ſi componga il negozio; convengono; ma perchè fieriſſima è la cupidigia d'avere, dopo lunghi contraſti ſi dividono in diverſi pareri; altri vogliono, che ſi rimetta al giudizio privato di uomini ſaggi di comune conſenſo ſcelti, altri vogliono, che da pubblico giudizio ſia deciſa la Cauſa, altri vorrebbero colla ſpada sbrigarſi: uno però non meno ſcaltro, che placido pronuncia, tanta lite doverſi comporre col ſangue di Bacco tra i bicchieri. Non fu mirabile il comune conſentimento a tal propoſta fra contradittori di tal Nazione, e la condizione fu tale, che quegli l'Eredità otteneſſe, che a tutti tante volte deſſe il pranzo, quante volte potevano tutti mutare l'ordine di ſedere a tavola, di modo che mai coll'iſteſſo ordine non ſedeſſero; con tal legge però, che ſe poi incapace di tanta ſpeſa ſi riputaſ-

tasse, dovesse egli cedere la peraltro ricca Eredità a dividersi egualmente tra' suoi commensali. Il più ricco, ed audace di loro, e poco ne' calcoli assuefatto, accetta la condizione, giudicando, che in pochi mesi, o anni al più si sarebbe da tal' obbligo sbrigato, e padrone di tutto il peculio divenuto sarebbe. Ma ingannata fu la sua speranza dall'evento, perchè dopo non pochi anni abbandonò l'impresa, e perdè oltre tutti i pranzi l'eredità ancora. Dopo questo racconto segue il predetto Padre Scotti: *Quot annos arbitraris lector curiose, exigi ut tali debito satisfiat? tria forsitan quatuorve lustra? quinque aut sex sæcula? falleris vehementer: nam si in dies singulos symposia instituerentur mille sæcula, hoc est centies annorum millia neutiquam sufficerent, sed requiruntur convivia* 47900160, quanto appunto fa il prodotto della progressione da 1 sino a 12, che diviso per 365 giorni di un' anno fa anni 131434; cioè sì mirabile, che, benchè evidente, appena troverà fede.

5. Per fare gli Anagrammi spessissimo accade trovarsi nelle parole da permutarsi molte lettere simili, in tal caso si trovano le permutazioni prima operando come se tutte le cose fossero diverse, le quali si dividono per il numeto delle permutazioni delle lettere simili, e se vi saranno altre lettere simili si seguiti la suddivisione per il numero dell' altre permutazioni simili, e così finchè ve ne sono; e si averà tutto il numero delle combinazioni, che con tali cose possono farsi, v. g. *Innocentius XI.* sono 13 lettere, le quali darebbero combinazioni numero 6227020800, se fossero tutte lettere diverse, ma essendovi la *n* tre volte, e la *i* due volte dovrà il sudetto numero prima dividersi per le combinazioni di tre, e poi per due, o pure, che è lo stesso per 12, che dà per quoziente 518918400, che sono tutte le combinazioni possibili di tutte le sudette lettere, fra le quali v'è quella verissima *Innocens vixit*.

6. Dal gran numero, che abbiamo detto, risultare

dalle

dalle sole sudette 13 lettere, potrà ogn'un concepire quanta estensione prendano le cose, che si permutano, ma perchè meglio ciò si concepisca, pongo tutte le permutazioni, che ammettono le 23 lettere dell'Alfabeto, che è un numero eccedente la forza della nostra imaginativa, perchè sono 25952016738884976640000. Vedasi da chi ha su ciò curiosità il Padre Scotti nel Tomo 3. della sua Magia, e singolarmente Caramuel nell'Arte Metrica.

7. Per conclusione di quest'Articolo porrò un verso fatto in lode della Gran Madre di Dio Maria sempre Vergine, che appunto può mutarsi in 1022 maniere, quante sono le Stelle del Cielo a' nostri occhi disarmati cospicue, conservandosi però sempre il metro nel verso:

Tot tibi sunt Dotes Virgo, quot Sydera Cœlo.

ARTICOLO III.

Calcolo applicato alla scienza de i Giuochi.

1. L'Ingegno umano laddove si applica seriamente, e con diletto, benchè cosa frivola, e giocosa sia l'oggetto de' suoi pensieri, notabili vestigj lascia della sua possanza. E di fatto chi ben riflette sulla invenzione de i giuochi, che pajono scherzi d'allegro spirito, si avvedrà ben presto essere quegli parti delle menti più sublimi, e serie, che abbia mai ammirato la terra; e benchè tutto l'applauso agl'inventori dovuto venga assorbito dalla invenzione medesima, questa nulladimeno fa vedere quanto feconda fosse la mente onde uscirono. Sono quegli casuali, o d'ingegno, o misti, nè devonsi escludere dal numero delle Virtù Morali, come saggiamente Aristotile sotto l' Eutropelia, o sia Urbanità li ripose, benchè assai facilmente degenerino in vizio. Imperciocchè si deve il giuoco usare per refocillamento de i perduti spiriti nelle serie applicazioni, onde poi ad

esse

esse si ritorni col corpo più forte, e vegeto, e con lo spirito più pronto. Onde il Satirico satira 4.

. . . . *vires instillat alitque*
Tempestivæ quies; major post otia virtus.

Il giuoco pertanto, di cui ora noi trattiamo, è una scommessa, che fanno tra loro i collusori, l'asserzione di ciascuno de' quali sarà manifestata vera dall'evento, o casuale, come la Riffa, Faraone, Primiera ecc. o d'industria come Scacchi, Trucco ecc. o misti d'ingegno, e caso, come lo Sbaraglino, Toccatillo, Ombre, ed altri innumerabili.

2. Ciò, che de' giuochi intraprendo quì a trattare, è senza dubbio una delle più astruse parti della scienza Numerica, nella quale occorrono questioni utilissime, e che non volgare ingegno ricercano per risolverle; onde con il gran Geometra Chr. Ugenio dirò: *Quanquam si quis penitus ea, quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuo reperturus sit rem non ut videtur, ludicram agi, sed pulchræ, subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari.* Quindi è, che giudico non ispendere in vano le mie contemplazioni, se adoprerò qualche industria per render piana, e facile una materia dallo stesso Ugenio, e da i Bernoulli trattata per istrade molto astruse, e difficili, inerendo però sempre a i loro sodi principj presi dalle viscere del vero. Onde se con ragione ogn'uno vede in questo Articolo più, che in ogni altro mi è forza avvertire il Lettore, che sia *Algebræ memor, qui ludus Aritmeticorum*. Ott. lib. 2.

3. Data la natura del giuoco si può cercare cosa debba deporsi, o pure essendosi già incominciato il giuoco, ed a giuoco non compito si voglia lasciare; si cerca come andrà diviso il deposito. In ogni giuoco sonovi due sorti di casi, ed alle volte tre, cioè i favorevoli, gli svantaggiosi, e gl'indifferenti; il numero de' casi favorevoli ad uno de' due collusori si chiami x, de' favorevoli al secondo si chiami y, e gl'indifferenti q; è chiaro che acci-

cio-

ciochè il giuoco ſia giuſto, deve ciaſcuno deporre quanto è grande la ſperanza, che ha di vincere, e queſta è fondata ſu la moltitudine de' caſi a ſe favorevoli; ſimilmente l'altro a proporzione de' caſi pur' a lui favorevoli deponga, v. g. due ſcommettono, e'l primo dice io tirando un dato ſu la tavola, moſtrerà 6, o pure non farà numero imparo, che ſe fa 6, voglio vincere il depoſito, ſe ſcuopre imparo, lo perderò, ſe farà paro, tutto reſti intatto; ſi cerca quanto ha da deporre ciaſcuno? Riſpondo, che i caſi favorevoli al primo ſono non più che uno, cioè ſe il dato ſcuopre 6, ed i caſi favorevoli al ſecondo ſono tre, cioè 1, 3, 5, e due ſono i caſi indifferenti; dunque il primo deporrà 1, e 'l ſecondo 3. I caſi poi indifferenti, non eſſendo proficui, nè dannoſi a veruno, non vanno conſiderati ſe non in quanto moltiplicano le combinazioni, e rendono il giuoco più lungo, vario, e giocondo. Onde ſi vede, che ſtanno i caſi favorevoli al primo a i caſi favorevoli del ſecondo, come il depoſito del primo, al depoſito del ſecondo, che ſe quello ſia a, e queſto b dovrà ſtare $x.y :: a.b$, cioè $bx = ay$, eſponendovi i caſi indifferenti, ſaranno $qx.qy :: a.b$, cioè $bqx = aqy$.

4. Se poi incominciato ſia il giuoco, e voglia laſciarſi, biſogna giuſtamente dividere il depoſito tra' colluſori, cioè pro rata delle ſperanze di ciaſcuno, che ſi deſumerà dalla quantità de' caſi, che lo fanno vincere, o col compagno l'agguagliano, o pure allo ſteſſo l'approſſimano, ed a proporzione di queſti ſi deve regolare la diviſione di tutto il depoſito; come ſi ſpiegherà in appreſſo.

5. Queſto numero di caſi ſi determina per l'ordinario per le regole delle combinazioni ſopra date nell'Articolo 1. come ne i Problemi particolari vedremo, e particolarmente nel numero ſeguente. Vuole Giovanni Rizzetti, che a lungo andare ne i giuochi giuſti, cioè di proporzionato vantaggio ne i depoſiti allo ſvantaggio de i caſi non vi ſucceda perdita alcuna, ma dopo varie vicende finalmente s'agguaglino le partite, come afferma

ma dependentemente dalla dottrina di Giacomo Bernoulli nel ſuo libretto *de ſcientia Ludorum Theorema primo*.

6. Ma prima di paſſare innanzi voglio quì porre una propoſizione applicata al giuoco del Treſette, da cui non ſolamente ſi apprenderà la maniera di ritrovare tutti i caſi poſſibili ne i giuochi, ma eziandio ſi vedrà in che vaſtità di materia ci ritroviamo. La propoſizione è queſta: da che fu inventato il giuoco delle carte, ſe ſi foſſe giuocato a treſette continuamente da quattro giuocatori ſino alla fine dell'anno 1731, facendoſi le carte 33 volte l'ora, dico che ſarebbe ſtato poſſibile non ſortire mai allo ſteſſo tutte le dieci carte due volte.

7. Vogliono pigliaſſe la ſua origine il giuoco delle carte da quella tanto decantata oziosiſſima decade d'anni impiegata da più Miriadi di Greche Squadre ſotto la ſuperba Città di Priamo, per ricuperare a Menelao la rapita Conſorte. Fu l'ingegnoſo Palamede, che pensò con tal ripiego tenere i Corpi di guardie sì applicati, che da importuno ſonno non foſſero ſorpreſi, e ben ſortigli, molto più di quello, che ſperava, perchè non ſolamente le guardie, ma gran parte del Campo ſi teneva dal ſuo giuoco in lunga vigilia. Erodoto però nel ſuo primo libro, prende l'origine delle Carte dalla Lidia; ma ſia onde ſi voglia, crediamolo noi dalla guerra Trojana, come aſſeriſcono Caramuel, ed altri, ed è più veriſimile. Queſt' aſſedio ſecondo i migliori Cronologiſti ſucceſſe 1184 anni prima dell' Era Volgare, cioè d'allora in poi ſono corſi 2915 anni, che ridotti in giorni montano a $1064703\frac{3}{4}$, che ſono ore 25552890.

8. Ciò preſuppoſto biſogna indagare in quanti diverſi modi ſi poſſono combinare 40 Carte, a 10 a 10, per il che ſecondo la regola aſſegnata all'Articolo 1. num. 5. ſi faranno le due progreſſioni così:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
40.	39.	38.	37.	36.	35.	34.	33.	32.	31

Ora

Ora moltiplicati tutti i numeri della seconda serie, e diviso il prodotto per il fatto di tutti i termini della prima, si avrà il quoziente 847660528 per il numero delle combinazioni; queste poi divise pe 'l numero delle ore 25552890, che dalla guerra Trojana sino alla fine del detto anno 1731 sono passate, daranno il quoziente 33, e più: dunque se dalla guerra di Troja in quà senza mai cessare si fosse giuocato a tresette, facendo le carte 33 volte l'ora, sarebbe stato possibile, che mai allo stesso non fosse ritornata la stessa decina, che una volta uscì; che si doveva provare.

9. Per regolare il deposito di ciascuno dalla diversità de' casi favorevoli, e svantaggiosi, prenderò l'esempio dal giuoco medesimo del tresette: se dunque un giuocatore con un' altro scommetta, che nelle dieci carte, che aspetta, gli verrà la Napolitana di fiori, e l'altro lo nieghi: Si dimanda in che proporzione deve stare il deposito del primo al deposito del secondo? Rispondo, che così hanno da stare le combinazioni delle 40 carte a 10 a 10, nelle quali trovasi la Napolitana di fiori, a quelle, ove non trovasi la detta Napolitana, come la somma, che depone il primo alla somma, che depone il secondo. Per trovare queste combinazioni, si faccia come sopra all'Articolo 1. num. 5. supponendo tre carte costanti togliendole da 40; sicchè le progressioni saranno di 7 soli termini, una che dall' 1 procede sino al 7, e l'altra, che dal 37 retrocede sino al 31, perchè a ciascuna combinazione si devono aggiungere le tre carte della Napolitana.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7
37.	36.	35.	34.	33.	32.	31

Che fanno 10295472 combinazioni, delle quali a ciascuna si devono intendere aggiunte le tre carte della Napolitana di fiori, e si averanno tutte le combinazioni diverse, nelle quali solamente trovasi la Napolitana predetta. Ora le combinazioni di 40 carte a 10 a 10, come sopra al num. 8. si disse, essendo 847660528, dovrà stare il deposito del primo al deposito del secondo come 847660528 — 10295472, cioè 837365056 a 10295472.

10. Questo negozio non è stato lasciato intatto dalla gran mente del Galileo, avendo egli fatto nel terzo Tomo delle sue Opere dell'ultima edizione di Fiorenza, alcune osservazioni sul giuoco de i dadi, alle quali per non essersi alcuno opposto, come ad ogni altra sua cosa accadeva, è restato privato il Mondo d'una Apologia, che su questa materia non averebbe lasciato cosa da desiderare.

11. Dalle cose già dette puoi facilmente dedurre la maniera di rendere giusti i lotti, e'l giuoco detto di Genova. Cerca i binarj, o siano ambi possibili ad uscire, e quelli che certamente usciranno, e poi dirai come quelli meno questi a questi, così la somma, che si deve pagare dall'Impresario, al deposito del giuocatore; similmente dirai ne i terni. Per trovare gli ambi moltiplicar si deve il numero degl'imbussolati, v. g. 90 per un meno, cioè per 89, e 'l prodotto si divida per due, fa 4005, ora perchè si estraggono solamente cinque nomi, che hanno 10 ambi, dirai 10.4005—10 :: 1.399$\frac{1}{2}$, cioè per ogni moneta, che si depone dal giuocatore, si ha da riscuotere se viene il suo ambo 299$\frac{1}{2}$. Per i terni si moltiplichino gli ambi trovati per due meno del numero dato, cioè per 88, fa 352440, e questo si divida per 3, fa 117480 terni: dunque perchè cinque nomi, che si estraggono sono 10 terni, si dirà, come sta 10.117480—10 :: 1.11747, cioè ogni moneta, che si depone in un terno, se questo viene se ne devono vincere 11747: altrimenti per questo conto il giuoco non è giusto.

AR-

ARTICOLO IV.

Modo di dividere i Depositi a giuoco imperfetto.

1. DA ciò, che è stato detto nell'Articolo superiore, si cava questa verità, che tanto ha da essere grande il pericolo di perdere nel giuocatore, quanto è grande la speranza di guadagnare, e che questo pericolo o speranza si compone dalla somma, che si depone, e dalla quantità de' casi svantaggiosi, o favorevoli. Ciò dunque presupposto passo alla soluzione d'alcuni casi, a' quali ogn' altro su tal materia potrà ridursi.

2. Se due insieme giuocano v. g. agli scacchi, dicendo chi prima vincerà cinque giuochi, prenderà tutto il deposito, che chiamo a, avendo giuocato sette partite, delle quali 4 ne ha vinte il primo, e 3 il secondo, non vogliono più giuocare. Si dimanda come andrà divisa la somma depositata? Rispondo doversi discorrere come segue: se seguitassero a giuocare, e'l primo vincesse il primo giuoco otterrebbe il deposito, ma se lo perdesse s'agguaglierebbe col suo compagno: dunque ha speranza di ottenere o a, o $\frac{1}{2}a$, che non può perdere in un sol giuoco: dunque nel giuoco seguente per lui è dubbia l'altra metà, sicchè volendo lasciare gli si deve $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a$: e'l secondo spera, o zero se perde, o $\frac{1}{2}a$ se vince; dunque gli si deve la metà di questa sua speranza, cioè $\frac{1}{4}a$.

3. Che se al primo manchi un solo giuoco per vincere, ed al secondo trè, è chiaro, che vincendo il primo vince il deposito a, e vincendo il secondo per il numero secondo vince $\frac{1}{4}a$, dunque il primo ha sicuri $\frac{3}{4}a$, e dubbio $\frac{1}{4}a$, a cui ha egual gius, che il compagno, cioè $\frac{1}{8}$ per uno; se dunque lascieranno il giuoco in questo stato di cose, al primo si dovranno $\frac{3}{4}a+\frac{1}{8}a=\frac{7}{8}a$, ed al secondo $\frac{1}{8}a$; e così si discorra se al secondo più ne mancassero retrocedendo sempre come sopra.

4. Onde si cava per regola generale. Si faccia della me-

metà del depoſito una ſerie decreſcente all' infinito in ragione dupla, e ſi ſommino per il primo colluſore tanti termini, quanti giuochi mancano all' altro per vincere, e ſarà la ſua parte; la ſomma degl' infiniti termini ſeguenti ſarà la porzione, che toccherà all'altro colluſore; e queſta ſi troverà per il Capo III. Articolo 6. num. 2.

5. Se al primo mancano due giuochi, ed al ſecondo tre, e ſi voglia in tale ſtato dividere pro rata il depoſito, ſi vede chiaro, che ſe ſeguitaſſero a giuocare, e 'l primo vinceſſe, gli mancherebbe un giuoco, ed al ſecondo tre; dunque pe'l num. 3. la ſperanza ſarà del primo $\frac{7}{8}a$, overo $\frac{1}{2}a$, ſe tal giuoco perdeſſe; dunque ha ſicuro $\frac{1}{2}a$, e $\frac{3}{8}$ in dubbio, e 'l ſecondo aſpira, o ad avere $\frac{1}{2}a$, ſe vince, o $\frac{1}{8}a$, ſe perde; dunque ha ſicuro $\frac{1}{8}$, e'l reſto a $\frac{1}{2}a$, cioè $\frac{3}{8}a$ in dubbio, de' quali ſe ne devono $\frac{3}{16}$ per uno, cioè al primo toccherà $\frac{1}{2}a + \frac{3}{16}a = \frac{11}{16}$, ed al ſecondo $\frac{1}{8}a + \frac{3}{16}a = \frac{5}{16}$.

6. Che ſe al primo manchino due giuochi, ed al ſecondo 4, ſuppoſto, che vinceſſe il primo giuoco il primo, ſarebbe il caſo, che a queſto mancherebbe un giuoco, ed al ſecondo 4, che ſommando i primi quattro termini della ſerie al num. 4. fanno $\frac{15}{1}$, ed al ſecondo reſterebbe $\frac{1}{16}$ ſomma degl' infiniti termini ſeguenti, che non può perdere in un giuoco ſolo; che ſe poi vinceſſe il ſecondo reſterebbongli da vincere tre giuochi, ed al primo due, cioè per il num. 5. $\frac{5}{16}$, e detratto $\frac{1}{16}$, che non può perdere reſterà il ſuo gius ad egual ſomma, a cui in quel giuoco da ambedue ſi aſpira, cioè a $\frac{5}{16}$, dunque in queſto ſtato laſciando, gli ſi deve $\frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16}$, ed al primo ſi dovrà $\frac{1}{16} + \frac{12}{16} = \frac{13}{16}$, e così ſi proſiegua ſe al ſecondo mancano più giuochi.

7. Se al primo mancheranno 3 giuochi, ed al ſecondo 4 ritorna il numero 6. perchè ſe vinceſſe il primo, a queſto ne mancherebbero 2, ed al ſecondo 4; dunque per il num. 6. ei dovrebbe riſcuotere $\frac{13}{16}$, e l'altro $\frac{3}{16}$, che dal ſecondo queſti $\frac{3}{16}$ non poſſono perderſi in un ſol

giuo-

giuoco, e per lo contrario se vincesse il secondo, questi acquista gius alla metà; dunque il primo giuoco, che si farebbe sarebbe decisivo di $\frac{5}{16}$, a' quali avendo gius eguale ambedue ne toccherà $\frac{5}{32}$ per uno, che aggiunto alla somma, che non può perdere il secondo, cioè a $\frac{1}{2}$ fanno $\frac{21}{32}$, ed alla somma, che non può perdere il secondo, cioè a $\frac{3}{16}$ fanno $\frac{11}{32}$, che sono le parti di ciascuno, se nel detto stato volessero dividere: ed ecco trovato il filo per isbrigarsi da simili labirinti.

8. Ma quì con ragione potrebbesi lamentare lo studioso di dovere un sì prolisso calcolo di frazioni ogni volta istituire da capo, singolarmente quando i punti, o i giuochi, che mancano a ciascuno de i collusori, sono di numero considerabile; al che rispondo aver' io speso qualche ora per togliere la pena sudetta, e facilitare il calcolo, ne altra averne trovata, senonchè di apprestargli una Tabella, in cui con una occhiata si vegga quanto a ciascuno de' collusori si debba a giuoco imperfetto.

Punti, che mancano al giuocatore A.

Punti, che mancano al giuocatore B, e sue porzioni.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{2}$									
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$								
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$							
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{2}$						
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{93}{256}$	$\frac{1}{2}$					
6	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{37}{256}$	$\frac{65}{256}$	$\frac{193}{512}$	$\frac{1}{2}$				
7	$\frac{1}{128}$	$\frac{9}{256}$	$\frac{23}{256}$	$\frac{44}{256}$	$\frac{281}{1024}$	$\frac{793}{2048}$	$\frac{1}{2}$			
8	$\frac{1}{256}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{14}{256}$	$\frac{29}{256}$	$\frac{397}{2048}$	$\frac{595}{2048}$	$\frac{2619}{4096}$	$\frac{1}{2}$		
9	$\frac{1}{512}$	$\frac{11}{1024}$	$\frac{67}{2048}$	$\frac{419}{4096}$	$\frac{1113}{8192}$	$\frac{3493}{16384}$	$\frac{9959}{32768}$	$\frac{26353}{65536}$	$\frac{1}{2}$	
10	$\frac{1}{1024}$	$\frac{6}{1024}$	$\frac{79}{4096}$	$\frac{119}{4096}$	$\frac{1511}{16384}$	$\frac{2502}{16384}$	$\frac{14973}{65536}$	$\frac{21663}{65536}$	$\frac{54431}{131072}$	$\frac{1}{2}$

SPIE-

SPIEGAZIONE DELLA TABELLA.

Se ad uno de' giuocatori mancano due giuochi per vincere, che chiamo A, ed all' altro, che chiamo B mancano 5 giucchi; si cerchi 2 nella parte superiore, e 5 nella sinistra vedo, che queste s'incontrano nel $\frac{7}{64}$, che sarà la porzione, che tocca a B, e per conseguenza $\frac{57}{64}$ sarà la porzione, che tocca ad A; di quì poi vedesi quanto si dilungassero dal vero i nostri Antichi nella soluzione di somiglianti questioni; poichè il P. Forestani fa questo stesso quesito nella sua Aritmetica car. 219. dicendo: Un Gentiluomo vecchio ritrovandosi a una sua Villa, e dilettandosi del giuoco di palla, chiamò due giovani, e disse, eccovi 4 ducati, giuocateli quì in mia presenza alla palla, e chi di voi prima vince 8 giuochi, voglio, che abbia vinto li 4 ducati, e così cominciarono a giuocare, e quando uno di loro ebbe vinto 6 giuochi, e l'altro 3 si perdè la sua palla, e non poterono finire, e il Gentiluomo disse, eccovi i danari divideteli fra voi; si domanda quanti ne toccherà per uno? E poi la risolve, dicendo, che al primo toccherà $\frac{87}{30}$, ed al secondo $\frac{13}{30}$.

9. Se siano tre giuocatori A, B, C, ad A manchi un giuoco per vincere, a B parimenti ne manchi uno, a C ne manchino due, vogliono lasciar di giuocare. Dimandasi quanto averà da prendere ciascuno del deposito, che chiamo a? Si discorra così: se si seguitasse a giuocare, ed A vincesse, prenderebbe tutto il deposito, e se vincesse B, non prenderebbe A cosa alcuna. Ma se vincesse C si agguaglierebbero le partite, e del deposito ne toccherebbe $\frac{1}{3}$ per uno; dunque l'espettazione di A è $a + o + \frac{1}{3}a = \frac{1}{4}a$, e similmente l'espettazione di B, e l'espettazione di $C = \frac{1}{3}$. Ora per supposizione con egual facilità si può da tutti ottenere il primo giuoco, l'espettazione di ciascuno si dovrà dividere per 3, cioè al primo toccherà $\frac{4}{9}a$, al secondo $\frac{4}{9}a$, ed al terzo $a:9$. Se poi al C mancassero tre giuochi, ed agli altri due uno per uno, allora vincendo C guadagnerebbe $\frac{1}{9}a$; dunque

la-

lasciando gli appartiene $\frac{1}{27}a$, e se glie ne mancassero 4, gli apparterrebbe $\frac{1}{81}a$ ecc. onde si cava

10. Per regola generale si faccia una serie tripla decrescente della terza parte del deposito; si sommino di questa tanti termini, quanti giuochi mancano al terzo, e sarà la parte de i due primi, e l'ultimo di questi termini sarà la parte del terzo. Ecco la serie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{273}$, $\frac{1}{819}$ ecc. all' ∞. Supposto, che a i due primi manchi un giuoco per uno, ed al secondo 3; sommo i tre primi termini, fanno $\frac{13}{27}$, che è la parte di ciascuno de i due primi, e la parte del terzo sarà $\frac{1}{27}$, che in tutto fanno l'intiero appunto.

11. Che se ad A manca un giuoco, a B 2, a C 2, vincendo A acquista il deposito, ma se vince o B, o C acquista, per il num. 8. solamente $\frac{4}{9}$, quali non può in un sol giuoco perdere; dunque il resto, cioè $\frac{5}{9}$ è la speranza comune. Sicchè volendo in questo stato di cose lasciare di giuocare, e dividere il deposito, ad A toccherà $\frac{4}{9}+\frac{5}{27}$, ed agli altri $\frac{5}{27}$ per uno.

12. Che se ad A manca un giuoco, a B 2, a C 3, bisogna vedere come andrebbe la faccenda dopo la vincita del primo giuoco. Se vince A tira tutto il deposito, se vince B, per il num. 10. A tira $\frac{13}{27}$, se vince C, per il num. 11. A tira $\frac{17}{27}$, queste parti sommate, e divise per 3, danno $\frac{19}{27}$. Ora se vince B, per il num. 10. tira $\frac{13}{27}$, ma se vince A, B tira o, se C per il num. 11. tira $\frac{5}{27}$, che sommate queste porzioni fanno $\frac{18}{27}$, e divise per 3 danno $\frac{6}{27}$, e per il terzo opera similmente, troverai $\frac{2}{27}$, e così in ogni altro caso simile procedendo assegnerai esattamente le parti di ciascuno.

AR-

ARTICOLO V.

Si ſpiegano altri caſi ne' Giuochi, ed in ſpecie la prerogativa della Mano.

1. SE A abbia un dado, e dica, che in un tiro vuol fare un punto determinato, v. g. 6; ſi dimanda la ragione del depoſito di A, al depoſito di B? Riſpondo, che 6 ſono i punti, che egualmente poſſono eſſere ſcoperti in un tiro, de' quali A ne ha uno favorevole, e cinque contrarj: dunque la ſperanza di A è, o di avere tutto il depoſito ſcoprendo 6, o nulla ſcoprendo qualunque altro numero de i cinque, che reſtano; dunque i depoſiti ſtaranno come 1 a 5.

2. Se poi A aſſumeſſe per ſe due tiri; ſi cerca qual ragione averà il depoſito di A al depoſito di B? Riſpondo, che A nel primo tiro vince tutto il depoſito, o pure la ſeſta parte di quello, cioè per vincere tutto ha un caſo, e 5 per vincere la ſeſta parte, purchè dopo tirato il primo tiro, ſe non ſcuopre 6 reſta nel caſo del numero ſuperiore; dunque ei nel primo tiro ha ſicuro $\frac{1}{6}$ del depoſito, e ſpera $\frac{1}{6}$ per 5 tiri, che vale quanto $\frac{5}{6}$, e l'altro per un tiro ha o, e per 5 tiri $\frac{5}{6}$, che vale allo ſteſſo $\frac{25}{6}$, ſicchè unite le ſperanze del primo ſono $1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$, e la ſperanza del ſecondo è $\frac{25}{6}$, ne ſegue, che il depoſito del primo al depoſito del ſecondo ha da ſtare come 11 a 25.

3. Se in tre tiri A dica voler far 6, e B lo nieghi; ſi cerca la ragione del depoſito di ciaſcono? E' chiaro, che non ſortendo nel primo tiro il 6, per il numero ſuperiore ſtarà la ragione d'entrambi come 11 a 25; dunque A ha cinque tiri per ottenere 11, ed uno per ottenere tutto, cioè 36: dunque la ſua ſperanza ſara $55 + 36 = 91$, e B ha cinque tiri per ottenere 25, ed uno ha zero: dunque la ſua ſperanza ſarà 125, il depoſito pertanto di A, al

al depoſito di B ſtarà come 91 a 125, e così ſi faccia negli altri caſi, e ſi troverà, che ſe A pretende ſcoprire 6 in quattro tiri ſtarà *a.b* :: 4651.3125, e ſe in 6 A.B.::31031. 15625; onde vedeſi, che non c'è il caſo d'avere da deporre egualmente.

4. Se poi con due dadi lo ſteſſo ſi cerchi, v. g. di fare due ſei, chi ciò aſſume averà una ſola ſcoperta per tirare tutto il depoſito, e 35 contrarie, perchè tanti ſono i tiri diverſi, che due dadi far poſſono, poichè ſtando ogn' uno de i punti d'un dado immobile può con i ſei dell'altro combinarſi. Sicchè i tiri diverſi ſaranno 36; dunque chi in un tiro pretende fare due ſei deporrà 1, e l'altro ſuo colluſore 35; ſi ſeguiti a diſcorrere come ſopra, ſi troverà, che in due tiri ſta A.*B* :: 7.1225, ed in tre ſta A.*B* :: 178991.1600625.

5. A, e B giuocano con due dadi, e reſtano d'accordo, che ſe A ſcuopre 7, tiri il depoſito, e ſe ſcuopre 10, il depoſito ſia di B, che ſe altro non ſi ſcuopra, ſi abbia tutto il depoſito a dividere per metà. Si cerca la ragione al depoſito d'ambedue? Riſpondo, i punti dei dadi ſi poſſono ſcoprire in 36 maniere diverſe, il 7 in 6, e'l 10 in 3; ſicchè 27 ſcoperte danno la metà del depoſito ad ambedue i colluſori, 6 danno tutto ad A, e 3 tutto a B; dunque A averà $6+\frac{27}{2}$, e B averà $3+\frac{27}{2}$; dunque riducendo ſtarà il depoſito di A al depoſito di B, come 13 ad 11.

6. Ciò, che ne' giuochi viene da notarſi è la prerogativa della mano; ſpiego: due giuocano a treſette in tavola, ambedue ſcuoprono tanti punti quanti a ciaſcuno baſtano per vincere, in tal caſo vince quegli, che ha la mano; la mano dunque è una prerogativa, che chi l'ha in parità di giuoco, o vince, o ſi avanza in punti, o in altra condizione favorevole. Voglio quì eſaminare il valore di queſta prerogativa, le proporzioni de' depoſiti d'entrambi i colluſori, ed altri queſiti ſu queſto affare non meno curioſi, che utili per non offendere la giu-

ſtizia in queſta ſorta di contratti, i più frequenti del mondo.

7. Sia il primo eſempio nel Bancofallito, in cui il banchiero ſempre ha la prerogativa della mano, fa egli due monti (dicaſi l'iſteſſo ſe più ne faccia, perchè per tutto milita la ſteſſa ragione) il ſuo colluſore ha gius di ſcegliere, e deporre ſopra lo ſcelto, che ſe ſotto eſſo ſi ritrovi numero minore, o uguale al numero, che ritrovaſi ſotto all'altro monte del banchiere, perde il ſuo depoſito, e vince ſolamente nel caſo, che'l ſuo numero ſia maggiore; ſi dimanda la condizione d'entrambi, e la proporzione del depoſito d'ambedue?

8. Riſpondo tutto queſto negozio conſiſtere in ritrovare tutti i caſi favorevoli al primo, e tutti i caſi favorevoli al ſecondo, e giuſto queſti ſtaranno le ſorti d'ambedui; onde nel bancofallito ſcoprendoſi ſempre non più di due carte, le quali eſſendo 40 tutti i caſi poſſibili, per l'Articolo 1. num. 2. ſaranno 780, de' quali franchiſſimi ne ha il banchiere 60, cioè tutti gli eguali, a cagione della prerogativa della mano, che ſenz' eſſa ſarebbero indifferenti. Che i caſi eguali ſiano 60 è chiaro, poichè quattro ſono le ſeguenze ſimili, ed uguali, ed ogni quaternario ha ſei caſi; dunque eſſendo 10 quaternarj 60 ſono le combinazioni diverſe d'egual valore. Tutti gli altri caſi poi ſono egualmente favorevoli ad entrambi; ſicchè ſi deve dividere il 780 in due parti, di modo che la prima ſia di 60 maggiore della ſeconda, e ciò dividendo il 780 per due, e da una parte levando 30, ed aggiungendolo all'altra, ſi averanno le due parti cercate 420, e 360, e queſta è la ragione del banchiere col ſuo colluſore, che in minimi termini è di 7 a 6.

9. Due giuocano a qualunque giuoco, che ammetta queſta prerogativa della mano, e ſono ambedue in tale ſtato, che con un' altro giuoco ſi decida la vincita, o dell' uno, o dell'altro; con queſta ſola differenza, che uno goda ſopra l'altro la prerogativa della mano, v. g. a

tre-

tresette, a bazica ecc. ad ambi manchi un sol punto per vincere. Si dimanda, se in tale stato vogliono lasciare il giuoco, come debbano dividere il deposito? Rispondo doversi operare nella stessa maniera del caso superiore, ricercando tutti i casi indifferenti, che rendonsi favorevoli ad uno per la prerogativa della mano, gli altri si dividono per metà, e ad una di queste si aggiungono quelli, e tal sarà la proporzione, in cui andrà diviso il deposito.

10. Alle volte accade non potersi stimare il valore della mano dalla quantità de' casi, che questa rende favorevoli a chi la gode, ma deve indagarsi per altra via, v. g. se due scommettono di far 6 con un dado, e di tirare alternativamente, è chiaro, che il primo a tirare il dado gode la prerogativa della mano, talmente, che scoprendo il 6 guadagna il deposito senza, che il compagno abbia campo d'esperimentare la sua sorte; ora si cerca qual debba essere la ragione del deposito d'ambedue, concedendosi il primo tiro ad uno? Rispondo, si supponga, che la sorte del primo, che chiamo A sia y, e del secondo B sia x, e per conseguenza y sarà valore della sorte di B, quando ei dovrà tirare; ora questi prima, che tiri A, spera, o zero in caso che A scuopra 6, o pure y non scoprendo 6, e perchè un sol caso v'è, che scuopra 6, e 5, che 0; dunque per l'Art. 1. num. 3. la sua sorte allora sarà $(0+5y):6=x$, e 'l primo scoprendo 6 guadagna 1, cioè tutto il deposito, e non scoprendo 6 guadagna x, dunque sarà la sua speranza $(1+5x):6=y$, in cui sostituendo il valore di x sopra trovato, viene $(6+25y):36=y$, e moltiplicando per 36, sarà $6+25y=36y$, da cui si cava $\frac{6}{11}=y$, e questo valore sostituito in luogo dell'y sopra, si cava $x=\frac{5}{11}$, cioè $x.y::5.6$; il che può ancora confermarsi con una ragione popolare; in 6 tiri almeno è possibile, che ogn'uno dei dadi si scoprano, e perchè chi prima incomincia a giuocare, prima compisce i 6 tiri, cioè quando l'altro ne ha fatti sola-

mente 5; dunque la ragione di quello a questo è di 6 a 5.

11. Se A con B giuochi con due dadi, con condizione, che se A scuopre 7, vinca, e se B scuopre 6, vinca, e debba tirare il primo B. Si cerca la ragione della sorte d'entrambi. Pongo la sorte di A essere x, quando ha la mano B, quando poi deve tirare egli, la sua sorte sia y, onde in principio di giuoco la sorte di A sarà uguale a $\frac{31}{36}=x$, perchè di 36 tiri 5 gli danno zero, e 31 gli danno y, quando poi egli deve tirare, la sua sorte sarà $y=(6+30x):36$, perchè in tal caso 6 tiri gli danno tutto il deposito, e 30 gli danno x, cioè lo restituiscono in pristinum; dunque sostituendo nella prima equazione il valore di y, si ha per valore della sorte di A in principio di giuoco $\frac{31}{61}$, e per conseguenza il valore di B sarà il residuo all' intiero $\frac{30}{61}$, cioè A. B :: 31.30.

12. E' bizzarro non potersi mai agguagliare la sorte tra due collusori in un giuoco peraltro semplicissimo, v. g. A, e B deposero egual somma, e con un dado tiri A tanti tiri quanti la giustizia richiede, ne' quali se fa 6 vinca, altrimente perda il deposito. Si dimanda quanti tiri debba assumere A per rendere il giuoco giusto, che se non possa agguagliarsi coi tiri si agguagli almeno coi depositi, onde si cerca ancora la ragione di questi più prossima, che si possa all' eguaglianza? Rispondo, che assumendo A un sol tiro deve stare il suo deposito al deposito di B come 1. 5, cioè la sua sorte vale $\frac{1}{6}$, ed assumendone due, siccome nel primo tiro spera, o 1, overo $\frac{1}{6}$, cioè un tiro gli dà 1, e cinque $\frac{1}{6}$, sarà la sua speranza in due tiri $\frac{11}{36}$, come sopra fu già detto al numero 2. e così assumendo per se tre tiri, il primo de' quali, o gli dà 1, o $\frac{11}{36}$, ma cinque tiri gli danno $\frac{11}{36}$, ed un tiro gli dà tutto il deposito, cioè 1; dunque la sua sorte allora sarà $\frac{91}{216}$, e se per se assuma quattro tiri troverà $\frac{671}{1296}$; onde nel primo caso abbiamo A. B :: 1. 5, nel secondo 11. 25; nel terzo 91. 125, nel quarto 671.

671. 625, cioè le ſorti, come le parti del depoſito; onde ſi vede, che 'l terzo non arriva ad agguagliare, e'l quarto paſſa, onde non poſſono deporre egualmente, che ſe egual ſomma deponeſſero, o l'uno, o l'altro ſempre averebbe vantaggio.

13. Fin quì m'è parſo dovere de' giuochi diſcorrere, dalle quali coſe mi confido eſſerſi aperta ampia ſtrada alla ſoluzione d'innumerabili queſtioni ſu queſta peraltro aſtruſa materia, ed inſieme a poterſi agevolmente intendere quanto diffuſamente ſu ciò hanno ſcritto l'Ugenio, ed il Bernulli in *Arte conjectandi*. Tutto ciò ſaper deve il Matematico. Che ſe poi io ſia richieſto ſe ſia meglio ſapere, o pure ignorare i giuochi: Io per me riſpondo, che l'ignoranza ho ſempre giudicato doverſi poſporre alla ſcienza, che ſe queſta poſſa facilmente ne' giuochi acquiſtarſi, non ſi debba in conto alcuno tralaſciare, poichè ella ancora il ſuo ornamento porta all' Uomo, che vivere deve nella ſocietà, purchè a buon uſo l'adopri. Diſſi ſe poſſa facilmente acquiſtarſi, che ſe grande ſtudio ſi richieda per imparare un giuoco, allora per certo tanta applicazione per sì poco vantaggio non deve ſpenderſi; onde il Caſtiglione nel ſuo Cortigiano alla pag. 71. edizione d'Aldo, così giudica parlando del belliſſimo giuoco degli ſcacchi, *e queſto è, che ſe pò ſaperne troppo, di modo che a cui vuol eſſer excellente nel gioco de' ſcacchi credo biſogni conſumarci molto tempo, e mettervi tanto ſtudio, quanto ſe voleſſe imparare qualche nobile ſcienza, o far qualſivoglia altra coſa ben d'importanzia, e pur in ultimo con tanta fatiga, non s'ha altro, che un gioco, però in queſto penſo, che intervenga una coſa rariſſima, cioè, che la mediocrità ſia più laudevole, che la excellenzia*. Quello che degli ſcacchi dice ſaggiamente queſto nobile Scrittore, deve ſenza dubbio intenderſi d'ogn'altro giuoco.

CAPO VI.

Del Calcolo Differenziale.

ARTICOLO PRIMO.

Prenozioni al Calcolo.

1. SOno varj i metodi, co' quali si perviene alla notizia delle verità Geometriche, e co' quali sicuramente si risolvono i problemi più astrusi d'ogni scienza. Negli antichi Geometri non si scorge, che un metodo solo, che chiamiamo Sintetico, prolisso, e ciò, che più importa in maniera intralciato, che è necessaria lunghezza di tempo per giungere a possederlo. Sia per esempio il solo libro degli Elementi d'Euclide, nel primo si parla di linee, triangoli, e parallelogrammi, e quasi saltando si dimostrano alcune particolari proprietà di quelle figure. Nel secondo si espongono alcune proposizioni universali; nel terzo, e quarto di nuovo tenendosi sul particolare si considera il cerchio, e le figure scritte, e circoscritte; nel quinto si spiega l'universalissima dottrina delle proporzioni, e nel sesto si applica vagando in alcune proposizioni per verità utilissime: ma tanta varietà di cose occupano sì fattamente l'umana mente, che il più delle volte quasi per forza è tratta a dare il suo consenso, o per riduzioni all' impossibile, o per dimostrazioni prolisse, in cambio di restare illuminata con la proposizione nuda, semplice, e facile della verità. Non usarono miglior metodo Apollonio, Archimede, o altri; onde è, che non si è pensato dopo tanti secoli, che a togliere dalle Matematiche tali imbarazzi; ma per quanto siansi gli uomini affaccendati, stando sul metodo degli antichi, non l' hanno punto renduto più chiaro, e molto meno promosso. Veggiamo tuttavia quei venerandi vecchi for-

forti, e robusti passare pe' nostri secoli con fasto, portando i libri in trionfo per la compiuta vittoria di chiunque ha voluto attaccarli.

2. Ora alcuni talenti *quos æquus amavit Juppiter*, sdegnando di vedere il mondo perpetuo discepolo degli Antichi, scossero il giogo, e liberi salirono a rintracciare quel medesimo metodo analitico, quale gli antichi Geometri sotto un quasi religioso manto tennero celato. Vieta, Ariotto, e Cartesio pubblicarono questo nuovo metodo al mondo, conducendolo per quello, quasi ad inesausta miniera di tutto ciò, che dissero gli antichi, e di tutto quel di più, che han detto, e son per dire i moderni.

3. Un tanto ritrovamento fu solletico a varie nazioni di vie più facilitare l'acquisto del vero, con nuovi metodi; onde uscì in campo Bonaventura Cavalieri con la Geometria degl' Indivisibili, che con inesplicabile chiarezza dimostra i più difficili Teoremi, e risolve i Problemi più astrusi. Quindi il Guldino per altra parte alto ascende col suo metodo Genitivo, con cui movendo il centro di gravità de i corpi, figure, e linee tutto fa, e dimostra. Il Vallisio seguita il metodo del Cavalieri, ma in una maniera tutta sua, che è di sommare le serie infinite, onde dicesi delle flussioni. E'l Neuton pe'l metodo delle ragioni prime, ed ultime tutta la sua dottrina fisica espone; ma tutto ciò con cui la nostra età ha oltrepassato con innumerabili scoprimenti la prisca, è pur poco in confronto del Calcolo Differenziale, che ora intraprendiamo a spiegare.

4. Che questa invenzione sia la massima del nostro secolo non può rivocarsi in dubbio, poichè ella è perfetta, e passa i limiti sì della Geometria sì dell'Algebra prima d'essa scoperti. La gloria di darla i primi alla Repubblica delle lettere furono il Neuton sotto il nome del metodo delle flussioni in Inghilterra, e'l Leibnizio in Germania col nome di Calcolo differenziale, ma questi

ha

ha avuta la ſorte d' incontrare maggiore applauſo nella ſua maniera più facile di calcolare, ed il Marcheſe dell' Oſpitalio ha pienamente illuſtrato il ſuo metodo. Io in queſto Capo altro non intendo di fare, che eſporre, quanto più chiaramente potrò, le regole del Calcolo differenziale, e ne darò quegli eſempj, che ſtimerò ſufficienti ad intendere il ſudetto Auttore, o altri, che ſe ne ſono ſerviti sì ne i Giornali di Lipſia, sì negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi, Tranſazioni d' Inghilterra, ed in altre adunanze d'Uomini dotti. Avverto però, che neſſuno ſi ponga allo ſtudio di queſto Calcolo, ſe prima non abbia letto con diligenza il libro delle Sezioni Coniche del detto Marcheſe dell' Oſpitalio, per intendere il quale ſenza intoppo baſterà aver bene inteſo i Calcoli ſopra eſpoſti. So per eſperienza, che queſto libro dell' Oſpitalio darà grandiſſimo piacere agli ſtudioſi, ma ſappiano, che quel diletto, e profitto ſarà un ſaggio di ciò, che gli aſpetta nel libro degl' infinitamente piccoli. Paſſiamo dunque alle nozioni preliminari.

5. Differenza diceſi quella porzione di linea minore di qualunque linea aſſegnabile, che paſſa tra due ordinate, o aſciſſe immediatamente ſeguenti, e ſi eſprime coll'anteporre alla variabile la lettera d, come uſa il Leibnizio, e tutti gli altri, fuorchè il Neuton con i ſuoi Ingleſi, che alla variabile ſoprapongono un punto. La differenza dunque di due aſciſſe infinitamente vicine x ſi eſprimerà così dx, e di due ordinate y ſi eſprimerà dy. Queſte differenze ſono infinitamente piccole, laonde non ritengono alcuna proporzione con le quantità differenti x, ed y, poichè l'infinito non ha eſprimibile contenenza col finito: le quantità coſtanti non hanno differenza per queſto iſteſſo, che ſono coſtanti.

6. Le predette due aſciſſe, o ordinate poſſono ſtimarſi uguali, abbenchè le loro differenze non ſiano un' aſſoluto nulla, ma ſiano nulla in relazione alle quantità, delle

delle quali ſono differenze; onde queſte aggiunte, o tolte dalle quantità finite nè maggiori, nè minori le fanno, ma perſeverano nello ſtato medeſimo, perciò ſe le quantità variabili x, ed y non iſvaniſcono nelle equazioni, ſi potranno le loro differenze diſprezzare, e molto più i loro prodotti, e poteſtà, eſſendo che un' infiniteſima per un'altra moltiplicata produca una infiniteſima porzione d'un' infinito piccolo, o ſia un rettangolo di lati infinitamente piccoli.

7. Quando poi le variabili x, ed y ſcambievolmente ſi elidono, le differenze dx, dy ſi ritengono, e ſi rigettano i rettangoli infiniteſimi $dxdy$, $dxdx$ ecc. benchè queſti ancora alle volte ſi debbano ritenere in mancanza delle differenze prime. Si ſuppongono poi tutte le curve formate da un'aggregato di linee rette infiniteſime ſucceſſivamente declinanti dalla retta ad un'angolo infiniteſimo. Tutte queſte coſe eſſendo preſuppoſte, quali io non voglio con ragioni più a lungo ſtabilire, sì perchè ſono già ſtate addotte, e ventilate dalle Accademie, e ben fortemente convalidate, sì perchè devo brevemente procedere; pure gioverà rileggere gli Articoli 5. 6. ecc. del Capo III.

8. Deveſi dunque ſaper prendere la differenza di qualunque quantità data, o ſia ſommata, o ſottratta, o moltiplicata, o diviſa con altre, o ſollevata a qualunque potenza, o affetta di ſegno redicale. Differenziare queſte tali quantità, vuol dire in ſuppoſizione, che le dette variabili creſcono d'un' incremento infiniteſimo: ſi cerca quanto ſia per eſſere un tale incremento nella ſuppoſizione data.

9. Se le quantità ſono ſommate, o ſottratte come $a+x-y$ accreſciute della loro differenza diventeranno $a+x+dx-y-dy$, ſicchè la loro differenza ſarà $dx-dy$, onde ritenendoſi gl'iſteſſi ſegni, non ſi fa altro, che prendere la differenza di ciaſcun termine.

10. Se le quantità ſaranno tra loro moltiplicate, co-

me xy ſi prenda la differenza de i termini moltiplicati, cioè $x+dx$, $y+dy$, queſti poi ſi moltiplicano, e fanno $xy+xdy+ydx+dxdy$, il che eſprime la quantità xy augumentata d'un' infiniteſima; dunque la differenza cercata ſarà $xdy+ydx+dxdy$, ma perchè il rettangolo $dxdy$ è nullo riſpetto agli altri; $xdy+ydx$, ſi laſcia, come inutile, e di niun valore. E che ſia vero paragonato con un ſol termine ydx, e diviſi ambedue per dx viene $y+dy$, onde dy non rimove l'y dal ſuo valore.

11. La differenza di axy ſarà $aydx+axdy$, e la differenza di xyz ſarà $xydz+xzdy+yzdx$ per la ſteſſa ragione, e delle quantità ſollevate a potenze come x^m ſarà $mx^{m-1}dx$, nè ſu ciò può cadervi difficoltà alcuna.

12. Per differenziare una frazione tengaſi bene a memoria la ſeguente regola per non avere a cercarla ogni volta col ſeguente calcolo. Si moltiplica la differenza del numeratore col denominatore, da cui ſi leva il prodotto della differenza del denominatore per il numeratore, tutto poi divideſi per il quadrato del denominatore; e che ſia vero, ſia da differenziarſi $x:y$ ſi faccia $=z$, ſarà $x=yz$, di queſte quantità ſe ne prenda la differenza, ſarà $dx=ydz+zdy$, onde ſi cava $(dx-zdy):y=dz$, ora reſtituendo in luogo di z il ſuo valore $x:y$, ſi averà $(ydx-xdy):y^2=dz$, che ſi dovea provare; così troverai la differenza di $a:x$ eſſere $-adx:xx$ ecc.

ARTICOLO II.

Trovare la differenza delle potenze perfette, ed imperfette.

1. LA differenza delle potenze perfette facilmente ſi trova come ſopra, v. g. x^4 ha per differenza $4x^3dx$, e del cubo di $a+x$ ſi averà $3\times(a+x)^2\times dx=3a^2dx+6axdx+3x^2dx$, cioè facendo attualmente il cubo di $a+x$ ſi ha $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, la di cui differenza è come ſo-

ſopra; così ancora per le dignità decreſcenti x^{-m} la differenza ſarà $-mx^{-m-1}dx$, come per le creſcenti x^m la differenza è $mx^{m-1}dx$.

2. Ma per le potenze imperfette non è così facile il diſcorſo; però per isfuggire tutto l'imbarazzo delle ſerie, e degli eſponenti fratti, e negativi, ſi faccia la potenza data $=z$, poi ſi elevi l'equazione alla poteſtà del ſegno radicale, quindi tutto ſi differenzi al modo uſato, e verrà puntualmente la differenza cercata, v. g. la differenza di $\sqrt{(xy+a)}$ ſi faccia $\sqrt{(xy+a)}=z$, ſi quadri d'ambe le parti, ſi averà $xy+a=z^2$, la differenza di queſte quantità è $xdy+ydx=2zdz$, e dividendo tutto per $2z$, ſi averà $(xdy+ydx):2z$, e ſoſtituendo in luogo di z il ſuo valore verrà $(xdy+ydx):2\sqrt{(xy+a)}$ differenza cercata.

3. Così ancora per la differenza di $1:\sqrt{x}$ ſi faccia $1:\sqrt{x}=z$, e moltiplicando $1=z\sqrt{x}$, e quadrando $1=z^2x$, e differenziando $0=z^2dx+2xzdz$, e dividendo per z, viene $zdx+2xdz$, e ſoſtituendo in luogo di z il ſuo valore $1:\sqrt{x}$, averemo $0=dx:\sqrt{x}+2xdz$, e per trovare dz, ſi traſporti $dx:\sqrt{x}$, ſi averà $-dx:\sqrt{x}=2xdz$, e dividendo $-dx:2x\sqrt{x}=dz$ differenza cercata.

4. Si abbia a differenziare $\sqrt[m]{xy^n}$, ſi faccia $=z$, ſarà $xy^n=z^m$, e differenziando verrà $y^ndx+ny^{n-1}xdy=mz^{m-1}dz$, e dividendo $\dfrac{y^ndx+ny^{n-1}xdy}{mz^{m-1}}=dz$, e per ſoſtituire il valore di z ſi moltiplichi la frazione ſotto e ſopra per z, e poi ſi ſoſtituiſca il valore di detto z, ſi averà

$$\frac{y^nzdx+nzy^{n-1}xdy}{mz^m}=\frac{y^2\sqrt[m]{xy^n}dx+n\sqrt[m]{xy^n}y^{n-1}xdy}{mxy^n}=1:my^n$$

$$\overline{xy^n}^{\frac{1}{m}-1}dx+n:mx\overline{xy^n}^{\frac{1}{m}-1}dy=1:my^n\sqrt[m]{\overline{xy^n}^{1-m}}dx+n:m$$

$$x\sqrt[m]{\overline{xy^n}^{1-m}}dy$$ differenza cercata.

5. Ora perchè le potenze ſi differenziano moltiplicando per l'eſponente la potenza degradata d'un grado, come la differenza di x^{m}, è $mx^{m-1}dx$. Così conſiderare ſi poſſono tutti i binomi, o moltinomj elevati a qualunque potenza perfetta, o imperfetta, sì poſitiva, che negativa, e queſto modo d'operare è molto familiare all' Oſpitalio, onde deve ogn' uno renderſelo eſpedito, per cui bene intendere gioverà molto rileggere attentamente l'Articolo 4. del Capo III. Avendoſi adunque da differenziare il cubo di $ay-x$, cioè $(ay-x)^3$, degrado il binomio alla potenza proſſima minore, moltiplico tutto per l'eſponente dato, e per la differenza del binomio, così $3 \times (ay-x^2) \times (ady-dx) = 3a^3y^2dy - 6a^2xydy + 3ax^2 dy - 3a^2y^2dx + 6ayxdx - 3x^2dx$.

6. Per la differenza di $\sqrt[m]{x^n}$ prenderemo, ſervendoci della eſpreſſione $x^{n.m}$, e ſarà $n:mx^{n.m-1}dx$, e perchè $x^{n.m-1} = x^{\frac{n-m}{m}} = \sqrt[m]{x^{n-m}}$, ſi potrà altresì eſprimere la detta differenza così $n:m\sqrt[m]{x^{n-m}}dx$.

7. Di più la differenza di $1:m\sqrt{x^2}$ ſervendoci della eſpreſſione $x^{-n.m}$, ſarà $-n:mx^{-n.m-1}dx$, e perchè $x^{-n.m-1} = x^{\frac{-n-m}{m}} = \sqrt[m]{x^{-n-m}}$, ſi potrà altresì eſprimere la detta differenza così $-n:m\sqrt[m]{x^{-n-m}}dx$.

8. Si avverta in oltre. Si cerca qual ſia la differenza di $a^2=xy$, e come debbaſi regolare l'equazione? La differenza della detta equazione è $xdy+ydx=0$, ma l'equazione non cammina bene, perchè $ydx=xdy$, e la ragione ſi è, perchè ſe $xy=aa$, ſe x creſce, per neceſſità y dovrà ſcemare, e per l'oppoſto ſe y creſce, x dovrà divenire minore, e perchè ſono tutti gli $xy=aa$ caleranno o creſceranno nella ſteſſa ragione, che hanno fra loro, cioè come $x.y :: dx.dy$, onde ne riſulta l'equazione differenziale $xdy=ydx$. Il che ſi conferma così: creſca x del ſuo differenziale dx, e diminuiſca per conſeguenza y del

ſuo

suo dy, è certo, che starà il minore al maggiore $x.x+dx :: y-dy.y$, donde cavasi questa equazione $xy=xy+ydx-xdy-dxdy$, e da questa $ydx=xdy$, come sopra, che si dovea spiegare.

ARTICOLO III.

Uso del Calcolo differenziale per determinare le Tangenti delle Curve.

1. SIa la curva AMO, alle di cui semiordinate PM sia infinitamente vicina pm, si tiri MR parallela all' asse AH, sarà $MR=Pp$ differenza dell' ascissa, Rm differenza della semiordinata, e 'l triangolino MmR dicesi caratteristico della curva, essendo egli il distintivo della curva, Mm prodotta in T sarà la tangente, la quale si determinerà così, $Rm=dy. AM=dx :: PM=y. TP=ydx:dy$. Ora differenziandosi l' equazione alla curva data, e trovato il valore della dx si sostituisca in questa espressione generale, svaniranno le differenziali, e resterà il valore della sottangente TP in quantità comuni. *Fig. 18.*

2. L'istesso valore della tangente si averà, se in vece del concavo della curva, sia rivolto verso l' asse il suo convesso come nell' Iperbola in risguardo a' suoi assintoti. Ponghiamo qualche esempio: sia AMO parabola, la di cui equazione è $ax=y^2$, la quale differenziata è $aax=2ydy$, e $dx=2ydy:a$; ora sostituendo questo valore di dx nel valore trovato della sottangente $TP=ydx:dy$, viene $2y^2:u$, e perchè $y^2=2x$, sarà $2x=PT$; dunque nella parabola sempre la sottangente è doppia dell'ascissa. E così per infinite parabole $a^m-{}^1x=y^m$, si averà $PT=mx$.

3. L'equazione al Circolo è $ax-x^2=y^2$, la di cui differenza è $adx-2xdx=2ydy$, e $dx=2ydy:(a-2x)$, il qual valore sostituito nel valore di $PT=ydx:dy$, viene $2y^2dy:(ady-2xdy)=2y^2:(a-2x)$, e perchè $y^2=ax-x^2$

ave-

averemo $2y^2:(a-2x)=(2ax-2x^2):(a-2x)$; donde si cava $x.a+x::a-x$.PT sottangente, quindi non sarà difficile trovare la sottangente d'infiniti cerchi, l'equazione fondamentale, a i quali è $ax^m - \bowtie x^{m+1} = y^{m+1}$.

4. L'equazione alla Ellisse Appolloniana è $ay^2 = abx - bx^2$, in cui si troverà PT$=(2ax-2ax^2):(a-2x)$.

5. Per l'Iperbola $ay^2=abx+bx^2$, PT$=(2ax+2x^2):(a+2x)$; e per l'Iperbola fra gli assintoti $xy=a^2$, si averà PT$=-x$, ed essendo il valore di PT negativo sarà segno, che dovrà prendersi la sottangente dalla parte contraria della origine di esso assintoto.

6. Finalmente essendo l'equazione a qualunque curva Algebraica $ay^m+bx^n+cy^rx^s+df=0$, si troverà la tangente di ogni curva, paragonando l'equazione della curva data, con questa generalissima prima si differenzi la formola, se ne cavi il valore di dx, e si sostituisca nella equazione BT$=ydx:dy$, questi trasmutati co i valori, che risulteranno dalla comparazione dell' equazione data colla formola, daranno il valore della sottangente PT.

DELLE MASSIME, E MINIME.

7. Se le semiordinate di una curva crescano sino ad un certo segno, e poi scemino, si troverà la loro massima, e minima col metodo seguente. Nelle Curve, che hanno il massimo, e'l minimo, la Tangente degenera finalmente in una linea infinita parallela all' asse, e la sottangente s' annulla: può succedere ancora all' opposto, cioè quando la tangente divenga finalmente retta alle ordinate. Adunque si prenda la differenza dell' equazione alla curva, e'l valore di dy, si faccia uguale a zero, o all' ∞, quindi si troverà il valore dell'ascissa. Ecco l'esempio.

8. L'equazione al cerchio è $ax-xx=y^2$, la differenza $adx-2xdx=2ydy=0$, onde si cava $a=2x$, overo $a:2=x$, cioè la massima ordinata è uguale al semidiametro.

ARTICOLO IV.

Calcolo Integrale.

1. SIccome la massima invenzione del secolo presente è stata il Calcolo differenziale, così quella, che supera ogn' altra d'ogni età, è quella del Calcolo integrale, con questo tutto giorno si van facendo in tutte le scienze nuove scoperte bellissime, e ciò che prima era ignoto, e pareva affatto imperscrutabile, ora si rinviene così bene, che diventa cosa elementare. Consiste questo nel regresso, e'l ritrovamento delle grandezze differenziate, o sia nella somma delle differenze delle quantità per ritornare a quelle. Gl' Inglesi, che dichiarano il Calcolo differenziale metodo delle flussioni, chiaman questo metodo delle flussioni Roverscio.

2. Questo calcolo però siccome non è ancora perfezionato, così pare, che non sia mai per giungere al suo compimento, forse perchè essendo egli applicabile a tutte le scienze naturali, nè l'uomo di queste su la terra potendo conseguire la pienezza, non pare, che possa mai assolutamente rintracciare un metodo, che tutto ciò che voglia apertamente gli sveli. E' vasto il paese laddove è giunto fin' ora oltre ogni sapere degli Antichi, che ben può bastare per allettare ogn' uno a possederlo, ed a vie più coltivarlo per le nuove scoperte, le quali essendo inesauste, quanto è inesausto ciò, che può sapersi, difficilmente intorno a quello si faticherà senza riportarne sommi vantaggi per la mente, che dal solo vero può perfezionarsi.

3. Le regole del Calcolo integrale sono quelle istesse del Calcolo differenziale, ma al roverscio, la sua caratteristica è $\int$, e tutte si riducono ad una sola regola generale: cioè si alzi la quantità variabile del differenziale alla potenza maggiore della unità, e poi si divida per l'esponente di questa potenza, e per la sua differen-

za.

za. Così la differenziale di x è $x^0 dx$, overo dx, l'integrale di dx, o sia $\int dx$ sarà x, la differenza di $x+y$ è $dx+dy$, la $\int(dx+dy)$ sarà $x+y$; la differenza di xy è $xdy+ydx$, la di cui somma sarà xy, così $\int mx^{m-1}dx=x^m$, e la $\int n:mx^{n.m-1}dx=x^{n.m}$, che sono tutti i casi, che si possono sommare. Che se il differenziale dato non si possa ridurre ad uno di questi, allora bisognerà ricorrere a qualche serie infinita, i di cui termini si possono sommare.

4. L'uso singolarissimo di questo calcolo è la rettificazione delle curve, la quadratura degli spazj curvilinei, la misura de i solidi, e delle loro superficie, e simiglianti cose, nelle quali cogli altri metodi nulla, o molto poco si trova.

5. L'elemento d'una superficie è l'area d'un parallelogramo fatto dalla semiordinata y nella differenza della ascissa dx, sicchè la somma di tutti quei parallelogrami ydx sarà la superficie della data figura. Dall'equazione della figura data si cavi il valore di y si sostituisca nell' espressione ydx, poi si integri l'equazione, e si avrà la superficie cercata. Ecco l'esempio.

QUADRARE IL CIRCOLO.

6. Nel Circolo sia il raggio r, la circonferenza a, e sia tra'l centro, e la circonferenza qualunque punto, dal centro a questo punto si dica x, la circonferenza per questo punto tirata y, a questa s'intenda infinitamente vicina un' altra circonferenza averemo un'anello, la di cui superficie sarà ydx, la somma di tutti questi anelli agguaglia tutta la superficie del dato cerchio; ora essendo $r.a::x.y$, averemo $ax:r=y$, il qual valore sostituendosi nel valor dell'anello ydx, averemo $axdx:r$, la di cui somma $ax^2:2r$, e facendosi $x=r$ averemo $ar:2$ valore di tutta la superficie circolare, cioè il triangolo rettangolo, che ha per lati concorrenti ad angoli retti il semidiametro, e la circonferenza del cerchio, come dimostrò Archimede nel libro della dimensione del Cerchio.

FINE.

Parte 2.a Cap. 2.