

NEWTON
ARITHMETICA
QVM
ECCHIO
P. I.

ARITHMETICA

UNIVERSALIS

ISAACI NEWTONI

SIVE

DE COMPOSITIONE
ET RESOLUTIONE
ARITHMETICA

PERPETUIS COMMENTARIIS
ILLUSTRATA ET AUCTA

AUCTORE

P. ANTONIO LECCHI S. J.

IN UNIVERSITATE BRAYDENSIS
MATHESEOS PROFESSORE.

MEDIOLANI MDCCLII.

EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROS.

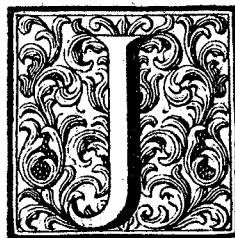
APUD JOSEPH MARELLUM

SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.



REVERENDISSIMO ET CELSISSIMO
S. R. I. PRINCIPI
ET MONASTERII EINSIDLENSIS ABBATI
D. D. NICOLAO DE RUPE

ANTONIUS LECCHI S. J.
FELICITATEM.



JAMDIU, Celssime Prin-
ceps, ut aliqua se daret
occasio, vehementer ex-
optabamus, qua officia
Tibi nostra probarentur,
omnesque intellerent,
quantum cū privato
ego nomine Tibi, tum Collegium Bray-
dense universum debeat propter præclara
Tua,

Tua, maximaque in nos merita. Nunquam enim excident animo litteræ illæ amantissimæ, quibus Universitatis nostræ Professores ad sacram Eremum superioribus annis lubens volensque invitasti. Memoriam tenemus, qua eos benevolentia amplexus sis, quo amore prosecutus, ut minus teneri jam Patriæ desiderio viderentur, multosque menses sic moram protraherent, ut sese abs Te divelli acerbius jam ferrent: ita autem deinde in Italiam redirent, ut plenissimum beneficiorum a Te acceptorum animum referrent, & non minus gratissima cæterorum officia, quam omnium admirationem maximarum rerum commemoratione commoverent.

Et verò quis non libentissimo animo acciperet, cum tuam in Deum, Deique Matrem Religionem ita prædicarent, ut omnes obstupescerent abs Te Te uno in tantum esse auctum, & exornatum Templum hocce sanctissimum? Narrabant Odæum denuo a fundamentis excitatum, tholum, & fornicem restitutum, statuas magno numero collocatas, signa, & tabulas ubique perfectas, parietes ad splendorem, lucemque adornatos, Operis, Pictoribus, Archi-

Architectis ex omni Italia, Germaniaque advocatis, maximaque vi auri largissime effusa. Atqui tamen prima hæc modò dixerim Religionis, magnificentiaque Tuæ argumenta. Nimirum jam tum majora animo versabas, eoque Tua omnia referebantur consilia, ut Altare maximum existeret, quod Templi augustissimi famam, celebritatemque compleret. Multa quidem objiciebantur, neque ea minima erat difficultas, Marmoris videlicet in Helvetia inopia. Non animo concidisti tamen; omnigeni marmoris copiam in Italia comparasti, Opus Mediolani elaborari iussisti, elaboratum in Helvetiam comportari; brevique, quod incredibile videbatur, maximæ opus magnitudinis, marmoraque superare alpes, per Gothardi montis juga transportari, nives altissimas, æternamque glaciem transcendere vidimus. Ad sacram Eremum omnia convehantur, Peregrinis admirantibus, Alpinis attonitis, reque nova percussis.

Ita demum opus longè maximum, extructum, confectum, perfectum, tanta dignitate, auctoritateque, ut cum Italia, hoc rerum genere celebrata, jam cer-

At tot tantisque sumptibus exhaustamne Tuam fuisse quisquam magnificen-

Erat hæcenus Helvetia magnis montibus circumvallata, in ipsisquemet sita; saxa tamen, & lapides desiderabantur; certè quidem ad opera, venustatemque accommodata nusquam apparebant. Unus Tu omnium primus lapicidis longius accersitis, & ubique in valles, jugaque dimissis tentari montes, cautes excidi, effodi, erui jussisti. Votis consiliisque Tuis favit fortuna. Lapidinæ constitutæ apertæque sunt, eaque vis marmoris extitit, quæ pulchritudine, splendore, pretio cum Italia, Gallia, Hispania certet. Ex eo Helvetii montes Achates, & omne genus

lapillos

lapillos admirati sunt se habere, cum opes antea suas, pretiumque ignorarent. Hinc lapicidinæ jam fervent, evocanturque ex omnibus partibus Artifices ad marmora, lapillosque intersecandos, expoliendos, in omnem formam concinnandos. Jamque Altarium duorum constructiones maximæ institutæ sunt, quæ utrinque medium Sacellum reverendum, atque sanctissimum accipiant. Quorum quanta majestas sit futura, declarant, quæ ære corinthiaco hic Mediolani confecta jam vidimus, numismata maxima quindecim, Rosarii, quæ vocant, mysteria figuris extantibus referentia; totidemque alia designata, atque in primis totius Einsidlensis Sacelli proposita figuris historia ex ære, quæ antipendii vices gerat: opus profectò regium, eoque elaboratum Artifice, ad cujus laudes hoc videtur deesse unum, quod minimè Græcis, & Romanis illis ætatibus vixerit. Sane is est labor, ea gravitas, id ingenium, ut e nostris civibus quotquot vident, admirentur, Patriæque esse suæ ornamento expetant, quod Einsidlensis Templi augebit auctoritatem, documentoque erit re impendi nulla opes clarius, quam

in

in Religionis cultu amplificando.

Atque hæc quidem; quæ ad Templum ipsum interius pertinent; Quid ea dicam, quæ ad exteriorem aut ad reliquam quamdam dignitatem? Aditum dico ad ipsum Templum in Theatri speciem patefactum, exporrecta hinc, atque hinc, decurrenteque Porticu amplissima, cujus medium habet spatium prægrandis Dei Marris statua ex ære, & cupro cum basi satis illa magnifica, & fontibus largissimè ab imo exsurgentibus: opus Roma non hac solum, quam habemus, sed Veteri illa dignum. Dico Mausolæa duo maxima, longeque magnificentissima Abbatibus, & Monachis ad tumulum constituta, Statuis, Emblematis, Inscriptionibus, omni Architectonices gratia, atque splendore exornata. Dico denique Monasterium ad Templi prospectum, & symmetriam continuatum. Sunt hæc ampla, sunt magna, sunt ejusmodi, quæ erectam, excellentemque indolem, & Infeldiana tua Familia pace ac bello clarissima dignos spiritus declarent. Hæc nos oculis ipsi nostris usurpavimus, hæc admirabuntur Posterī, Teque Religione magnum prædicabunt.

b 2

Neque

Neque verò minus Pietatem, Charitatemque in subjectos populos, atque in Monachos hosce tuos magna virtute claros admirabitur posteritas; Quibus primis est abs Te præclarè, providèque prospectum, ut inopiam sublevares, otium abigeres, necessaria omnia, utilitatesque conciliares. Propterea artes invecatæ, textrinæ excogitatæ, constituta opificia, aquæ longissimè perpetuis ductibus derivatæ, inductæque, Horrea publica exædificata, Moletrinæ a fundamentis excitatæ eo sumptu, eaque operis firmitate, ut regium ejus, qui extruendas curavit, animum declarent. Monasterio autem sic voluisti esse consultum, ut neque ad magnificentiam quidquam deesset, Theatro e regione leniter assurgentium collium aptissimè posito, Typographiâ auctâ, Bibliothecâ locupletatâ, ædibus amplificatis; & omnia Monasterii commodo curarentur. Cum enim ob diuturnum, acerbissimumque frigus ex Religiosis plerique antea invaletudine plurimum per hyemem conflictarentur, ægerri-
mèque ad senectutem vitam tolerarent, huc omnia initio statim consilia retulisti, ut cubiculis hypocausta singulis adjicerentur,

tur, & largiùs, atque commodiùs ad vitam omnia suppeditarentur.

Qua Patria Tua in Tuos Pietate confirmatæ vires, recreati animi, ut alacriùs Musicen, Psalmodiam, omnia, quæ ad Religionis, ac Templi cultum pertinent, pares essent sustinendo; atque alii quidem juventuti excolendæ præessent, alii maximo numero, neque minùs viginti, excipiendis, expiandisque Confessione popularibus, & peregrinis quotidie velut in specula excubarent: hi privatis studiis, publicisve concionibus exercerentur: hi denique Pagos excurrerent, Paræcias curarent, omnia administrarent tantâ sapientiâ, atque solertiâ, ut dici verò cum laude, haberi que posset Einsidienſe Monasterium unum maximum contra hæreticos Fidei, Religionisque Propugnaculum. Hæc una est omnium, atque communis opinio: hanc nos accepimus, neque accepimus solùm, sed coram præsentibusque admirati sumus. Terna enim illa mea in Helvetiam profecti-
one, Celsissime Princeps, qui, quem absentem litteris humanissimis ad iter incenderas, præsentem indulgentia isthac animi Tua amantissimè complexus es, terna,

inquam, illa professione mea, non tam Tua, Tuorumque consuetudine delectatus sum, quàm omnium Gentium, per quas erat iter aut peragratio, sermonibus de Einsidlensi Monasterio amplissimis, & famâ pulcherrimâ.

Quæ cum ita sint, minus mirabere, si in maximo licet locorum intervallo Te ego interpellandum statuerim, ut lucubrationes hæcce meas, quas sisto Tibi, atque inscribo, perhumaniter acciperes, gratissimique nostri erga Te animi documento, qualecunque sit demum, esse tamen velles. Hoc beneficiorum Tuorum erga nos magnitudo, hoc studia, atque officia nostra postulabant.

Mediolani in Universitate Braydensi
Kal. Novemb. cico cclii.

LECTORI.

Quid spectaverim, quid hisce Commentariis egerim, paucis habeto. Scopus mihi propositus est, Tironem a primis usque elementis ad supremum Analyticæ artis apicem summa, quoad potero, facilitate, atque etiam delectatione provehere, & quod audacius fortasse dixero, ita cæca regere Tironum vestigia, ut nihil anfractuosum offendant, implicatum nihil. Magnum opus omnino, & arduum conatur: quippe illa in tradendis præsertim sublimioribus disciplinis perspicuitas, & æquabilis progressio nullis salebris impedita, quamquam imitabilis quidem videatur cupienti, nihil tamen est experiienti minus. Audendum tamen; malo enim, cum studiis Adolescentum illorum, qui Scholas nostras frequentant, sim obsecutus, desiderari a plerisque ingenium meum, quàm aut muneri meo, aut illorum voluntati defuisse.

Nam, cum publicè per hosce annos Newtoni Arithmeticam universalem in Scholis interpretarer, animadverti locos quosdam difficiles plerisque, & suboscuros videri. Est enim illa præcipiendi ratio, quam ferè sequitur vir summus, pressa, & subtilis, & brevi verborum circuitu complectens plura, quàm quæ Tironum imbecillitas ferre possit. Nulla autem res magis fatigat, & abjicit Adolescentes

in primo aditu facultatis cuiuspiam, quàm nimia in docendo festinatio: nimirum, cum fertur quasi torrens institutio, quamvis multa scitu dignissima secum rapiat, nihil tamen eos tenere, nihil ferè apprehendere dolebis. Præceptionem rapidam coerceas oportet commutatione aliqua, ne ante præterlabatur, quàm comprehensa sit. Quamobrem, cum rudia quædam, & inchoata jam mihi excidissent e manibus commentariola, putavi mihi faciendum, ut extremam manum illis imponerem, atque Newtoni Arithmeticam universalem, discipulis meis id flagitantibus, facilem, ac veluti familiarem redderem, obscuriora explanarem, &, quæ inter se disjuncta videbantur, ea interjectis theorematibus, & integris interdum tractationibus copularem; tum quæ usu, & exercitatione docendi animadversa, & notata a me fuerant, vel necessaria, vel utilia, suis locis aptè digererem. Nam, ut optime monet Tullius, nihil est simul inventum, & perfectum, omniumque artium Conditoribus illud usuenit, ut omnia non possint pervidere, quæ Tironum infantiam, ut sic dixerim, fugiant.

Erunt fortasse, qui hoc a me requirant, cur brevitati minus studuerim, cur paucis annotationibus adscriptis contentus non fuerim, cur potius, ut nutrices infantibus pueris, sic ego omnes tenuissimas particulas, atque omnia minima mansa studiosis apposuerim. Dicam equidem, &, ut cum eodem Tullio loquar, dicam

non

non tam doctus, quàm, id quod majus est, expertus. Omnes, qui nullius ope Magistri, lectione sola addiscendis artibus, reconditis præsertim, & subtilioribus animum adjicere volunt, providere debent, ne primam institutionis formam hauriant ab iis, quæ passim volitant, compendiis disciplinarum, quæque nostra hæc ætas, si quæ unquam alia, quotidie parturit, magnoque tuetur opere. Hæc ego, si nihil dicam adjuvare, sanè mentiar; quin imò habent non mediocrem laudem locupletissimi id genus rerum indices, quos commodè præ manibus habemus. At cavendum, ne decipiant specie brevitatis; nam caput artis in docendo est videre, quid cuique congruat, ne Sicyonios calceos cursori paremus, sed non aptos ad pedem. Quemadmodum ii, qui diù, multumque peregrinati sunt, mirificè delectantur, dum in parva tabella contractos vident diffitos terrarum tractus, ac flumina monstrant, urbesque, quas oculis olim usurparunt; contra verò iis, qui a suo oppidulo pedem vix extulerunt, confusa omnia apparent: Ita hæc scientiarum compendia, quantum doctis prosunt commemoratione eorum, quæ jam didicerint, tantum iis, qui facultatis illius, qua de agitur, mysteriis nondum initiati sunt, vel planè infructuosa sunt, vel nocent sæpissime; velut in hac Analytices institutione, in qua quàm lentè, & pedetentim agi cum iisdem oporteat, intelligent ii, qui ætatem in hac palæstra diù, multumque contriverint. Et sanè

quàm

quam multa vel in solo Algorithmico tradendo definienda, ac præmonenda sunt, ne salebras sibi fingant in vocibus. Complures enim offendit per hosce annos ingenio præstantes Adolescentes, quos sola calculi litteralis novitas absterruit, & hæc de causa tanquam profanos Sibyllæ monitu arceri se a limine Analysis falso arbitrabantur. Sunt, quibus nimium quantum operosa videri solet Radicum e potestatibus datis extrahendarum ratio; Constitutione potestatum ita subigenda erit hæc pars Algorithmi, ut formulæ in quaque operatione passim progredient, quarum normæ, quod voluerint, assequantur. Alios spinæ Radicalium arcent: convellantur oportet uno, vel altero principio posito. Ipsæmet regulæ proportionum non ita pacatè fluunt, quin habeant syrtes suas, quas, nisi bono remigio studiosi utantur, vix enavigare possunt. Jam quantum illud est, non modo defectum principiorum habere, quæ animos prima aggressione occupent, sed, quod non minus & artis est, & laboris, videre, quomodo quidque dicatur, ne quid contortum, ne quid asperum, sed omnia sint ad ingeniorum modulum commensa, & exacta. Hæc qui faciat, næ ego illum instituendo timido utcunque, & omnia circumspicienti Adolescenti idoneum fore censeam, cui non satis esse putet signa, & notas ostendere locorum, quibus cognitis ille sibi ipse fodiat, sed quæ retrusa, & abdita sunt, & proferat in lucem, & in bono lumine collocet, digitoque veluti commonstret.

Atqui

Atqui si scriptor sepiat se se, ac veluti circumscribat compendio aliquo tradendo, quid fieri possit, ut hæc sustineat? Est illud quidem ab Horatio verissimè dictum: *Quidquid præcipies, esto brevis, ut citò dicta percipiant animi dociles, teneantque fideles*. At quæ præcipiunt Poetæ, utilitati serviunt, aut delectationi. *Aut prodesse volunt, aut delectare poetæ*. Popularia sunt illa per se se, & in medio posita, & quod brevius, eò facilius influunt in animos. Longè alia ratio est disciplinarum, quas speculatrices vocant. Altius in hisce effodiendum est solum, & iteratò subigendum. Datur enim concessu omnium hæc venia Scriptoribus, qui recondita in arte quapiam scribunt imperitis, ut ne vitio iis vertatur ubertas quædam, quæ sensim contrahitur accedente Tironum usu, atque exercitatione. Quibus elementis si quis & mihi liberaliter institutus, & satis acri ingenio esse videatur Adolescens, illuc eum rapiam, ut cum Tullio loquar, ubi non seclusa aliqua aquula teneatur, sed unde universum flumen erumpat totius calculi analytici.

Restat unum genus reprehensorum, quibus videar actum agere, mihiq; etiam aurem vellant Horatiano dicto: *In Sylvam ne ligna feras*. Ajunt Ovghredum, Harriotum, Vietam, Slusium, Cartesium, Leibnitium, Newtonum, Wallisium, reliquosque artis analytica inventores egregios abundè materiam hanc ita locupletavisse, ut spem omnem aliis ademerint eorum præscripto, & quasi formulæ quid-

quidquam addendi. At quotusquisque est qui non intelligat quàm dispar sit ratio, & institutum eorum, qui multarum rerum copiam in disciplinas omnium primi invexerunt, & Juniorum, qui ratione, atque arte res ab illis inventas ad communem usum accommodarunt? Jam verò, methodo, & facilitate docendi qui lucem non parvam inventis priscorum obscurioribus afferrent, plures nostrà, multi patrum memorià extiterunt, Schootenius, Prestetus, Wolfius, Nicolaus Martinus, P. Fortunatus a Brixia, Deidier, Paulinus a S. Josepho, & nuperrime editis in lucem præclarissimis institutionibus analyticis lectissima, & eruditissima Domina Agnesi, Patriæ nostræ & sæculi decus. Quamobrem, etsi Juniores cum antiquis superioris ævi scriptoribus inventionem quidem non sint comparandi: tamen ordinem, dispositionem, perspicuitatem sibi si assumant recentiores, quis est, qui non præclare & ab illis positam, & a nobis susceptam operam hujus analyticæ institutionis tradendæ arbitretur? Quid, quod Wallisius ipse veteres quidem scriptores artis usque ab principibus illis Luca Paciolo, Scipione Ferreo, Cardano, Tartalea, Vieta, Ovghtredo repetitos in suam Analysim conduxit, & nominatim cujusque præcepta, magnâ conquisita curâ perspicuè scripsit, atque enodata diligenter exposuit, ac tantum inventoribus ipsis nitore, & facilitate præstitit, ut nemo jam ferè illorum inventa ex ipsorum libris cognoscat, sed omnes, qui, quod illi præcipiant,

cipiant, velint intelligere, ad hunc, quasi ad quemdam multò commodiorem explicatorem revertantur.

Nec solum antiqua, sed domestica etiam exempla me ad hanc aleam subeundam perpulerunt. Incidimus enim in eam ætatem, in qua ad excolendam, & facilitandam Analysim collatis studiis conspirare videntur ingeniosissimi quique scriptores, quorum numero si me accenseam, neque his solum locum esse judicem, sed horum vel secundis, vel etiam infra secundos, Ecquis erit, qui voluntatem saltem quoquo modo plurimos juvandi reprehendendam putet? Annon prævisse mihi putandus est P. Fridericus San-Vitali aureo, & eleganti opusculo Arithmeticæ, quod anno superiore typis vulgavit, in quo & brevitatis nihil quidquam nitore detrahit, & demonstrandi rationem, quam nunquam inflexit, cum summa facilitate temperavit? Quid, quod inaudio hoc ipso tempore Geometriæ elementa propediem editurum P. Boschovich, virum cum summis illis antiqui ævi Geometris comparandum; Quin etiam, si vera est fama, in eandem cogitationem defixum narrant P. Riccati, & inventionis acumine, & calculi peritia hac ætate nemini secundum. Quod ergo scriptoribus omnibus semper licuit, cur non idem mihi putem licere? Nam uti laudi datum est Junioribus accepta a primis inventa fecisse meliora, quæ quidem digna statuissent, in quibus elaborarent: ita Analysi excolendæ fortasse aliquid attulimus & nos.

nos. Volo enim hæc mea commentariola vicem ut obeant Magistri, qui studiosis præsto semper adsit, ac identidem in aurem illud moneat: Scopulosus ille locus est; cave ne offendas: Æstuosus ille, & abruptus; En principia, quibus insistas. Præterea, ne quid studiosæ Juventuti deesset, quod ejus curriculum interpellaret, hoc etiam mihi faciendum duxi, ut haberet in hoc opere, & collectam segetem inventorum, quibus, & primi, & postremi Analysis conditores artem hanc locupletarunt, & quæ de suo penu Newtonus adjecit, auctiora, & pleniora. Hinc quamvis primas Newtono demus, tamen a reliquis etiam scriptoribus, quod quisque opportunè præcipere videbatur, excerpimus, & ex variis ingeniis optima quæque libavimus. Nam in tanta scriptorum dissimilitudine unus uni, alter alteri commodior videri solet. Sunt quos hujus brevitatis delectet, alterius copia juvet, ille mihi partem aliquam Analysis feliciter altero tractavit, hic exemplorum delectu reliquos antecelluit. Sic omnium in dispari scribendi genere par pene laus, & eorum etiam in tenui labor, & contentio non tenui accessione scientias auget. Quemadmodum in nautarum remigio, quamvis cujusque palmula navigio promovendo impar sit, tamen omnium conspiratione velocissimè illud propellitur: Sic quæ amplificandis scientiis pro se quisque confert, leviuscula interdum videri solent, sed omnium accessione facultates singulæ longissimè quidem provehuntur.

tur. Quæ cum ita sint, temeritati mihi vertendum non est, si quod post illorum messem colligam, etiamnum superesse putem spicilegium. Ita est sanè, eritque semper. Par est omnes, inquit Tullius, omnia experiri, nec raro usuvenit ut, cum summa miremur, inferiora tamen probemus, & mediocritati ingeniorum aptiora.

Rem ipsam quod attinet, primus hic, quem scribere aggredior, liber duas partes complectitur; nam de secundo, & reliquis suo loco dicetur. Pars prima tota in Algorithmi tractatione versatur. Algorithmum voco tractationem, quæ additionem, subtractionem, reliquasque operationes analyticas, & arithmeticas docet. Pari passu Tironem, & in vulgari Arithmetica, & in calculo litterali provehimus. Definitiones tamen multò universaliiores cum Newtono esse volumus, quàm quæ ab Arithmetica vulgari repeti solent; nimirum Arithmeticæ universali jam nunc proludimus. Notiones serendæ sunt, quæ calculo geometrico profint, quibus præparetur animus ad reliquos doctrinæ satus percipiendos.

Primam partem secunda excipit multò amœnior, eaque tota versatur in aureâ, quam vocant, regulâ proportionum tradendâ. Miraberis cur tantam exemplorum copiam congeram, in iisque creber adeo sim; quod, & hoc loco, & alibi semper factitabimus. Nimirum, ajebat Tullius, minimum est de arte loqui, maximum ex arte dicere. Prætervolant præcepta,

cepta, nisi usu, atque exercitatione configantur. Neque studiosi Adolescentes hæc sibi exempla per se ipsi parare possunt. Præire debet scriptor. Præterea, si qua ars est, quæ experimentum deposcat calamo, manuque Tironem, certè Arithmetica est, multoque magis Analysis; Omnia sub acumen styli subeant necesse est, non tam probandi necessitate, quam experiundi voluntate.

Satis multa de hoc primo Arithmeticae universalis curriculo dixisse videor, de instituto autem meo nimis fortasse multa. Habetis studiosi Adolescentes, quoniam ita voluistis, fontes unde vobis hauriendum est, habetis itinera ipsa, quibus gradiendum, quæque ita putavi esse demonstranda, non ut ipse dux essem, sed ut monstrarem tantum viam per Newtoni vestigia, &, ut dici solet, digitum ad fontes intenderem.

PARS



PARS PRIMA.

Computatio vel fit per numeros, ut in vulgari Arithmetica, vel per species, ut Analystis mos est. Utraque iisdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat. Arithmetica quidem definitè, & particulariter, Algebraica autem indefinitè, & universaliter; ita ut enunciata ferè omnia, quæ in hac computatione habentur, & præsertim conclusiones theorematum dici possint. Verùm Algebra maximè præcellit, quod, cum in Arithmetica quæstiones tantum resolvantur progrediendo a datis ad quæsitæ quantitates, hæc a quæsitis tantum datis ad datæ tanquam quæsitæ quantitates plerumque regreditur, ut ad conclusionem aliquam, seu æquationem, quocunque demum modo, perveniat, ex qua quantitatem quæsitam elicere liceat; eoque pacto conficiuntur difficillima problemata, quorum resolutiones ex Arithmetica sola frustra peterentur. Arithmetica tamen Algebrae in omnibus ejus operationibus ita subservit, ut non nisi unicam perfectam computandi scientiam constituere videatur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quæ hic de utraque methodo analytica, & synthetica strictim attingit Newtonus, latius exponam lib. 2. n. 1.

L. I.

A

Quis-

Quisquis hanc scientiam aggreditur, imprimis vocum, & notarum significationes intelligat, & fundamentales addiscat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, Extractionem radicum, Reductiones fractionum, & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos æquationum, ac incognitas quantitates, ubi plures sunt, exterminandi. Deinde has operationes, reducendo problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam, & resolutionem æquationum contempletur.

CAPUT PRIMUM.

De vocum quarundam, & notarum significatione.

CUM Tyrones hæere interdum soleant in Scriptorum lectione, recentiorum præfertim, tum propter disparem, quæ apud ipsos invaluit, scribendi, notandique rationem, quamvis omnium sit ferme par institutio, ac forma docendi; tum propter multiplices casus, in quos subinde imparati offendunt, in hoc primo Analysis vestibulo morem illis esse gerendum judico, ac utrique incommodo occurrendum exemplorum copia, in quibus referendis nedum Newtoni, sed Leibnitii pariter, atque Cartesii scribendi, præcipiendique rationem sequar, eo planè consilio, ut Auctorum principum, pene dixerim, linguam, quæ cuique vernacula est, penitus cognoscant; peractoque hoc primo tyrocinio ad fontes, & doctrinarum ca-

pita

pita sine ulla offensione contendant. Quodd verò in harum vocum significatione dilucidè explananda adeo multus fuerim, nemo mediocriter doctus mirabitur, cogitans, inquit Tullius, in omni arte, cujus usus vulgaris, communisque non sit, multam novitatem nominum esse, cum constituentur earum rerum vocabula, quæ in quaque arte versantur.

SYNOPSIS.

NOtio numeri universalior, quæ quantitarum genus omne complectatur. Figurarum numeralium valor duplex. Scopus Arithmeticæ Decimalium, ejusque origo, & notatio. Gradus ascendentes, & descendentes in proportionem decupla, & subdecupla. Origo Arithmeticæ speciosæ; & quibus de causis alphabeti litteræ notis numericis substituantur. Quid inter Algebram veterum, & recentiorum intersit. Quantitates positivæ, & nihilo majores: negativæ, & nihilo minores. Utilitas calculi litteralis. Multiplicationis notio latius sumpta; atque hinc geometrica multiplicandi ratio. Divisio pariter latius accepta, & ad Geometriam traducta: hinc Multiplicatio interdum minuit, & Divisio interdum auget. Origo potestatum in Algebra, quæ melius a recentioribus designantur per gradus arithmeticos, quàm per geometricas dimensiones. Index potestatum. Fractionum origo, & notatio. Quomodo radices potestatum duplici affectione innotescant.

A 2

DE-

DEFINITIONES.

1. **P**ER numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quæ pro unitate habetur, rationem intelligimus. Estque triplex: Integer, Fractus, & Surdus. Integer, quem unitas metitur: Fractus, quem unitatis pars submultiplex metitur; & Surdus, cui unitas est incommensurabilis.

Quamvis Euclides numerum definiverit compositam ex unitatibus multitudinem, tamen multò universalior est Newtoniana definitio, & Analytices speculationibus accommodatior. Idipsum animadverterant Cartesius, ejusque interpres Franciscus a Schooten. Illi enim, dum effectiones geometricas arithmetice operationibus adaptant, unitatem ad placitum assumunt ut lineam quamdam; reliquosque deinceps numeros aliis designant lineis, quæ ad lineam assumptam habeant eandem rationem, quam dati numeri ad unitatem. Numerus itaque ita generatim definendus, ut cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irracionales, & quantitatum genus omne complectatur.

2. **I**ntegrorum numerorum notas 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & notarum, ubi plures inter se neſtuntur, valores nemo non intelligit.

Nū-

Notio numeri universalior.

Numerorum notæ præter valorem simplicem habent præterea alium ratione loci, quem singulæ occupant, ubi plures inter se neſtuntur; locorum verò valor in proportionem decupla in infinitum procedit. Itaque nota quælibet, a dextra ad sinistram sumpto initio, primo loco posita significat unitates: posita secundo loco significat tot decades, quot habet unitates: tertio loco tot centenæ: quarto loco tot milia; atque ita deinceps. Potuisset quidem aliqua quævis proportio adhiberi, puta quadrupla, quintupla &c.; sed, ut notat Wallisius, in numerorum dispositione omnes ubique terrarum gentes in hac proportionem decupla mirificè consenserunt.

Notarum duplex valor.

3. **Q**uemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, sive ad sinistram scripti denotant denas unitates, in secundo centenæ, in tertio millenæ &c.; sic numeri in primo loco post unitatem scripti denotant decimas partes unitatis, in secundo centesimas, in tertio millesimas &c. Hos autem dicimus Fractos Decimales, quod in ratione decimali perpetuò decrescant; & ad distinguendum integros a decimalibus interjici solet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'569, denotat septingentas triginta duas unitates unâ cum quinque decimis, sex centesimis, & novem millesimis partibus unitatis. Qui & sic, 732,569, vel sic, 732.569, vel etiam sic, 732|569, nonnunquam scribitur. Atque ita numerus 57104'2083

A 3

de.

denotat quinquaginta septem mille, centum, & quatuor unitates una cum duabus decimis, octo millesimis, & tribus decimis millesimis partibus unitatis; & numerus 0'064 denotat sex centesimas, & quatuor millesimas partes. Surdorum, & aliorum fractorum notæ in sequentibus habentur.

Scopus Arithmeticae decimalium eò colli-
mat, ut omnes operationes arithmeticas ad
usum humanæ vitæ pertinentes sine molestia
fractorum absolvi possint. Præclarum Simo-
nis Stevinii inventum, qui primus docuit lo-
co fractionum vulgarium decimales adhibere,
quas insigni compendio ita tractare liceat, ac
si integri essent numeri. Ut autem hæc theoria
probè intelligatur, quid nomine decimalium
intelligi oporteat, breviter est declarandum.

Recentiores itaque Arithmetici non modò
quaslibet supra unitatum locum ascendentes si-
nistrorum sedes crescere in proportionem decu-
pla tradunt; sed etiam infra unitatum locum se-
des quaslibet descendentes dextrorsum imaginan-
tur decrecere perpetuò in ratione subdecupla.

Itaque fractiones, seu numeri decimales
sunt totius cuiuspiam partes decimæ, centesi-
mæ, millesimæ &c., denominatæ videlicet a
numeris progressionis decuplæ ab 1 incipientis,
10, 100, 1000 &c.: quæ quidem more vul-
gari fractionum ita scriberentur: $\frac{3}{10}$, seu
tres decimæ: $\frac{7}{100}$, seu septem centesimæ.

Cum verò horum fractorum denominato-
res non aliis consent notis, quàm unitate,
& ci-

Scopus De-
cimalium.

Decima-
lium origo.

Et notatio.

& ciphris, expeditior calculus redditur, si,
uti fit in scrupulis astronomicis, exprimantur
signis quibusdam, uti hic factum vides.

Decimæ. Centesimæ. Millesimæ. Decimilles. Centimilles. &c.

Signa	I.	II.	III.	IV.	V.
Valor	10.	100.	1000.	10000.	100000. &c.

Igitur decimalium *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, hic
valor est: *a* tres decimæ; *b* quatuor centesimæ;
c sex millesimæ &c.

I	II	III	IV	V	VI
3	4	6	2	9	4
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>

Quòd si notis signatis aliæ non signatæ ad
sinistram adhæreant, integros illæ numeros de-
signant, velut in hoc exemplo: $83.\overset{I}{2}\overset{II}{6}$

Habes hinc ad fractionem decimalem ex-
primendam duo scribi oportere, numerum, &
signum. Numerus significat, quot partes deci-
males ex toto accipiantur: signum quales.

Invaluit autem apud plerosque Scriptores
mos scribendi, ut ad secernendos integros a de-
cimalibus tantummodo interjiciatur comma, vel
punctum, vel etiam lineola, omisiss penitus si-
gnis; vel postremæ dextrorsum figuræ signum
unicè apponatur, uti $732|569$, vel $732|\overset{III}{569}$.

4. **C**Um rei alicujus quantitas ignota est, vel
indeterminatè spectatur, ita ut per nu-
meros non liceat exprimere, solemus per speciem
aliquam, seu litteram designare. Et si quando

cognitas quantitates tanquam indeterminatas spectemus, discriminis causa designamus initialibus alphabeti litteris a, b, c, d, & incognitas finalibus z, y, x, &c.; aliqui pro cognitis substituunt consonantes, vel majusculas litteras, & vocales, vel minusculas pro incognitis.

Sciscitabitur fortasse Tyro, quorsum hæc nova signa, seu symbola adhibeantur numeris exprimendis, potius quam vulgares numerorum notæ? Respondet Joannes Wallisius cap. II. de notatione algebrica, triplici de causa hoc factum esse; partim necessitatis, partim brevitat, partim perspicuitatis, atque aded utilitatis gratiâ. I. inquam, necessitatis causa, cum pro numero aliquo adhuc ignoto substituitur symbolum, seu character eo usque, dum innotescit. II. brevitat, & facilitatis causa, cum illud non raro citius peragatur per symbola, seu species, quam per ipsos numeros. III. perspicuitatis, adeoque majoris utilitatis gratiâ, ubi enim per symbola, seu species procedit inquisitio, tota operationum series sic peracta, evidentius in ipsa tandem quantitate proveniente patet. Quod si operationes ipsis numeris peragerentur, quamvis eadem tandem provenire posset quantitas quæsitâ, nulla tamen ipsarum operationum vestigia superessent. Ea verò, quæ provenit, quæstionis solutio in hujusmodi symbolico operationum progressu, universalem ostendit methodum, qua non modò proposita difficultas speciatim solvatur, sed & in-

Origo Arithmetice speciosa.

infinitæ aliæ quæstiones conjunctæ, eadem operâ solutionem accipiant; si generalis nempe solutio proveniens speciatim applicetur, prout quæstionis hypothesis variata postulat. Hæc postrema Wallisii animadversio usu ipso, atque exercitatione problematum Tyronibus constabit.

5. **Q**uantitates vel Affirmativæ sunt, seu majores nihilo, vel Negativæ, seu nihilo minores. Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona affirmativa, debita verò bona negativa. Inque motu locali progressus dici potest motus affirmativus, & regressus motus negativus, quia prior auget, & posterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, si linea versùs plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit, quæ versùs plagam oppositam ducitur. Veluti si AB dextrorsum ducatur, & BC sinistrorsum; ac AB statuatur affirmativa, tunc BC pro negativa habebitur, ed quidd inter ducendum diminuit AB, redigitque vel ad breviorè AC, vel ad nullam, si fortè C inciderit in ipsum A, vel ad minorem nullà, si BC longior fuerit quàm AB, de qua aufertur. Negativæ quantitati designandæ signum —, Affirmativæ signum + præfigi solet. Signum ± incertum est, & signum ± etiam incertum, sed priori contrarium.



Non temerè ab Analystis quantitates nihilo minores, seu infra nihilum excogitatæ fue-

fuerunt, quæ verissimè debitis comparantur. Finge enim, inquit Wolfius, te habere nummorum nihil, tibi que donari 100.: habebis ergo 100. nummos, adeoque plus nihilo; plus nempe habes, quàm ante, cum hi nummi quantitatem positivam constituent. Ponamus e contrario te nihil habentem solvere debere 100. nummos: 100. ergo nummorum debitum contrahes; adeoque, antequam solutio fiat, minus nihilo habebis; solvendi enim sunt 100. nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa est.

Itaque 0, seu nihilum medium censeretur debet inter numeros, seu quantitates affirmativas, & negativas. Quemadmodum enim supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem fractiones unitatis, ut unitas media sit inter numeros integros, & fractos, ita supra 0, seu nihilum ponitur unitas cum reliquis numeris, seu quantitativis affirmativis, & infra 0 fingitur series alia planè similis quantitativum negativarum ab unitate incipientium. Itaque 0, seu nihilum est veluti limes, unde quantitates positivæ, & negativæ originem ducunt.

Ut autem hæc notio quantitatis positivæ, & negativæ genus omne quantitatis complectatur, jam nunc Tyro assuescat signa hæc +, — sensu invicem contrario intelligere; puta, ubi signum + innuit sursum, prorsum, lucrum, incrementum, supra, ante, additionem &c., ibidem signum — innuit deorsum, retrorsum, damnum, decrementum, infra post, subtractionem &c. Ubi + hæc designat, contraria designat —.

6. In

6. **I**N aggregato quantitatum, nota + significat quantitatem suffixam esse cæteris addendam, & nota — esse subducendam: & has notas vocabulis plus, & minus exprimere solemus. Sic $2 + 3$, sive 2 plus 3, valet summam numerorum 2, & 3, hoc est, 5; & $5 - 3$, sive 5 minus 3, valet differentiam, quæ oritur subducendo 3 a 5, hoc est, 2; & $-5 + 3$ valet differentiam, quæ oritur subducendo 5 a 3, hoc est, — 2; & $6 - 1 + 3$ valet 8. Item $a + b$ valet summam quantitatum a, & b; & $a - b$ valet differentiam, quæ oritur subducendo b ab a; & $a - b + c$ valet summam istius differentiæ, & quantitatis c; puta, si a sit 5, b 2, & c 8, tum $a + b$ valebit 7, & $a - b$ 3, & $a - b + c$ 11. Item $2a + 3a$ valet 5a; & $3b - 2a - b + 3a$ valet 2b + a; nam $3b - b$ valet 2b, & $-2a + 3a$ valet a, quorum aggregatum est 2b + a; & sic in aliis. Hæ autem notæ +, & — dicuntur Signa; & ubi neutrum initiali quantitati præfigitur, signum + subintelligi debet.

Quamvis Tyronibus videatur tantundem esse, sive scribatur $2 + 3$, sive 5, vel $a + b$, ac potius c, quæ summam utriusque designet, duplex tamen hinc ortum commodum, ut jam innui, & clarius constabit in solvendis problematis. Primum, quia, posteaquam Franciscus Vieta non modò quæsitæ quantitati ignotæ, ut prius, suum imposuit nomen; sed & cognitis, seu datis in quæstione quantitativis sua pariter indidit nomina, quas species appel-

Utilitas
calculi li-
teralis.

pellabat, factum est, ut operationes hujusmodi arithmeticae non solum ad numeros, sed ad alias quasvis magnitudines peraeque extenderentur, atque in numeris quidem solutio habeatur generalis, quae alias particularis foret. Altera autem pars utilitas est, quod totius processus vestigia maneant adhuc conspicua in solutione, quae ceterum numerorum confusione involverentur.

7. **M**ultiplicatio proprie dicitur, quae fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicanda, quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed aptioris vocabuli defectu multiplicatio etiam dici solet, quae fit per fractos, aut surdos numeros, quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem.

Aggreditur Auctor notionem multiplicationis universalissimam, quae quidem genus omne numerorum, & quantitatum latissime comprehendat. Quod si rite explicetur, quo modo etiam in Geometriam inuenta sit, vitabuntur plurimae, quae sensim irrepere solent æquivocationes. Itaque ipsa voce satis innuitur multiplicationem proprie dici, quae fit per numeros integros; nam multiplicare est numerum dati multiplex invenire: hinc multiplicatio est multiplex additio, sive additionis usus compendiarus.

At

At verò, ut notat Wallisius cap. 18., quoties multiplicatio per unitatem, aut numeros fractos, aut etiam surdos, puta, per $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ &c. occurrit, multiplicationis vox latiori sensu intelligenda erit.

Multiplicatio latius accepta.

Qui enim quantitatem quamlibet per unum multiplicat, hoc est, semel præcisè ponit, non proprie multiplicare dicendus est, neque datae quantitatis multiplex invenire. Hinc est, quod dici solet, unitatem neque multiplicare, neque dividere.

Qui autem per $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c. multiplicare dicitur, non tam revera multiplicare dicendus est, quam dividere (ut infra melius constabit, ubi divisionis naturam exponemus). Nam, sicut qui multiplicat per 2, 3, 4 &c., datae quantitatis quærit duplum, triplum, quadruplum &c., sic qui per $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c. multiplicat, non nisi datae quantitatis semissem, trientem, quadrantem quærit; hoc est, revera dividit per 2, 3, 4 &c.; adeoque, sicut qui quantitatem negativam affirmativæ addit, puta, qui numero 4 adjungit — 2, reapse tollit, ita qui per $\frac{1}{2}$, aut aliam quamlibet aliquotam partem multiplicare dicitur, reipsa dividit; tantundem enim est, atque per 2 dividere; ut enim additioni subductio, sic multiplicationi divisio est contraria.

Multiplicatio inter-dū minuit.

Tandem qui per $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}$ &c. multiplicare dicitur, partim multiplicat, partim dividit; nempe multiplicat per numeratores 2, 3, & per denominatores 3, 4, dividit; sicut qui quan-

Multiplicatio strictè sumpta.

quantitati affirmativæ addit 4 — 2, partim addit, partim aufert.

Verum hæc omnia rectius percipientur, ubi de numeris fractis, & surdis tractabimus. At interim hæc juvat attigisse, ut Tyrones intelligant, quid multiplicationis nomine strictissimo sensu acceptæ, & quid sensu laxiore intelligi oporteat: atque ita planè liquet, multiplicatione non semper augeri numerum, aut multipulum produci, quamvis idipsum vi vocis perhiberi videatur.

Itaque, cum multiplicatio strictè sumpta, quæ sit per numeros integros, ea dicatur esse, qua quæritur nova quantitas toties major quantitate multiplicanda, quoties numerus multiplicans major est unitate, hæc notio multò universalior reddi potest, ut integros peræque, ac fractos, & surdos numeros complectatur, si cum Newtono multiplicationem definiamus illam esse, in qua *quæritur nova quantitas in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem*; vel cum Clavio, qui Euclidæam multiplicationis definitionem ita universaliorem reddit: *multiplicatio numeri in numerum est inventio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad unitatem.*

Ex his sequitur in omni multiplicatione proportionem haberi, in qua primus terminus est unitas, secundus terminus est multiplicator, tertius terminus est multiplicandus, & quartus ter-

mi-

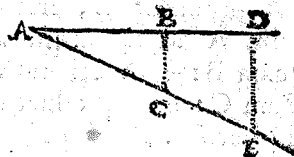
minus est productum, seu factum, ut vocant. Hæc proportio ita exhiberi potest: uti 1 ad a , ita b ad c : tres primi termini dati sunt, quartus c multiplicatione invenitur.

Illud etiam consequitur perinde esse, sive multiplicandus pro multiplicatore interdum accipiat, aut versa vice. Quamvis enim Arithmeticæ practicæ magistri non raro doceant ex numeris datis majorem dicendum esse multiplicandum, minorem verò multiplicantem, non tamen illud putandum est aut semper, aut necessariò faciendum esse, sed prout sibi commodius putaverit calculator. Ratio est, quia sive b multiplicetur per a , sive a per b , idem prorsus productum exhibetur. In primo casu proportio erit, ut 1 ad a , ita b ad c : in secundo casu erit alternando, ut 1 ad b , ita a ad c .

Ex definitione multiplicationis illud etiam palam constat, cum fracti multiplicandi singuli minores sunt unitate, productum utrolibet minus esse: quod mirari solent Tyrones multiplicationis communi vocabulo decepti. Esto 1, $\frac{2}{3}$ A, $\frac{3}{4}$ B, $\frac{6}{12}$ C; cum enim A multiplicans B producit C, unitas est ad A, ut B ad C; sed unitas ponitur major, quàm A: ergo etiam B major est, quàm productum C. Quod si B multiplicans A producat C, erit rursum, ut unitas ad B, ita A ad C; atqui unitas ponitur major, quàm B: ergo etiam A major est, quàm productum C: ergo productum utrolibet minus est. Sin verò multiplicandorum unus est unitate major, tunc productum erit hoc minus, sed altero majus. Ty-

Tyrōnes, posteaquam arithmeti-
cibus exercitati fuerint, clarissimè intelli-
gent ea, quæ hoc loco attuli, ut multiplica-
tionis notionem multò magis universalem exem-
plis adhibitis explanarem. Verùm pergamus
cum eodem Newtono.

8. **N**Equè tantum fit per abstractos numeros,
sed etiam per concretas quantitates, ut
per lineas, superficies, motum localem, ponde-
ra &c.; quatenus hæc ad aliquam sui generis no-
tam quantitatem tanquam unitatem relatæ, ra-
tiones numerorum exprimere possunt, & vices
supplere. Quemadmodum, si quantitas A multi-
plicanda sit per lineam duodecim pedum, posito
quoddam lineæ bipedalis sit unitas, producentur per
istam multiplicationem 6 A, sive sexies A, pe-
rinde ac si A multiplicaretur per abstractum nu-
merum 6, siquidem 6 A sit in ea ratione ad A,
quam habet lineæ duodecim pedum ad unitatem
bipedalem. Atque ita, si duas quasvis lineas AC,
& AD per se multiplicare oportet, capiatur AB
unitas; & agatur BC, eique parallela DE, &
AE productum erit hujus multiplicationis, eò
quod sit ad AD, ut AC ad unitatem AB.



Hæc

Hæc universalior multiplicandi ratio in
Geometriam commodè etiam traduci potest;
eademque perinde lineis perfici, ac numeris
fieri solet. Nimirum, si, quemadmodum inter
quantitates numeris abstractis designatas confi-
deratur una, ad quam omnes aliæ referuntur,
quæque unitas dicitur, ita eandem unitatem
consideremus quoque inter quantitates concre-
tas, quæ lineas, superficies, motum localem,
pondera &c. designant, hac lege, ut ad eam
omnes aliæ quantitates ejusdem generis tan-
quam unitatem relatæ, rationes numerorum
exprimere possint, & vices supplere. Quod
luculenter exemplo declarat Newtonus: sint
duæ quævis lineæ AC, AD, quas per se mul-
tiplicare oportet. Ex tradita definitione
multiplicantur inter se mutuo duo numeri,
cum tertius invenitur, qui sit ad unum ipso-
rum, ut est alter ad unitatem: ergo ad eum-
dem modum capiatur AB unitas; idest, assu-
mamus rectam AB hac lege, ut ad eam omnes
aliæ lineæ tanquam unitatem relatæ rationes
numerorum exprimere possint. Agatur BC,
eique parallela DE: erit AE productum
hujus multiplicationis.

Geometri-
ca multipli-
candi ratio.

Quæret fortasse quispiam, quid fieri pos-
sit, ut ex duarum linearum multiplicatione
possit alia lineæ simplex oriri, præsertim cum
Euclides doceat duas lineas per se mutuo mul-
tiplicatas rectangulum producere, quasi verò
linea, & rectangulum a se mutuo minimè dif-
ferant. Huic ambiguitati, quæ Tyrōnibus

L. I.

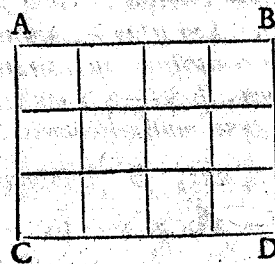
B

fami-

familiaris esse solet, occurrit Newtonus ipse his verbis.

9. **Q**uin etiam mos obtinuit, ut genesis, seu descriptio superficiei per lineam super alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam, quamvis linea utcumque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque hæc superficiei è lineis generatio longè alia sit a multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra lineâ, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensa, si modò unitas superficialis definiatur, ut solet, Quadratum, cujus latera sunt unitates lineares. Quemadmodum, si recta AB constet quatuor unitatibus, & AC tribus, tum rectangulum AD constabit quater tribus, seu duodecim unitatibus quadratis, ut inspicienti Schema patebit. Estque similis analogia solidi, & ejus, quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc vicissim evenit, quod vocabula ducere, contentum, rectangulum, quadratum, cubus, dimensio, latus, & similia, quæ ad Geometriam spectant, arithmetice tribuantur operationibus. Nam per quadratum, vel rectangulum, vel quantitatem duarum dimensionum non semper intelligimus superficiem, sed ut plurimum quantitatem alterius cujuscunque generis, quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum produci-
tur, & sæpissime lineam, quæ producitur mul-
pli-

plicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus cubum, vel parallelepipedum, vel quantitatem trium dimensionum pro eo, quod binis multiplicationibus producitur, latus pro radice, ducere pro multiplicare; & sic in aliis.



Nomine itaque producti ex multiplicatione duarum linearum non semper intelligimus superficiem, sed lineam sæpissime, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem. Hoc artificium unitatis a recentioribus in Geometriam invecum, mirum, quantum ejusdem fines amplificaverit.

10. **N**umerus speciei alicui immediatè præfixus denotat speciem illam toties summendam esse. Sic 2 a denotat duo a, 3 b tria b, 15 x quindecim x.

Duæ, vel plures species immediatè connexæ designant factum, seu quantitatem, quæ fit per multiplicationem omnium in se invicem. Sic a b denotat quantitatem, quæ fit multiplicando a per b; & a b x denotat quantitatem, quæ fit mul-

multiplicando a per b , & factum illud per x . Puta, si a sit 2, & b sit 3, & x sit 5, tum a b erit 6, & $a b x$ 30.

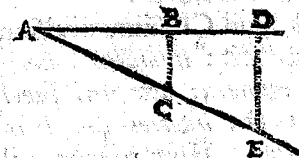
Inter quantitates sese multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum in, ad factum designandum nonnunquam interscribitur. Sic 3×5 , vel 3 in 5 denotat 15. Sed usus harum notarum præcipuus est, ubi compositæ quantitates sese multiplicant. Veluti, si $y - 2b$ multiplicet $y + b$, terminos utriusque multiplicatoris lineolâ superimpositâ connectimus, & scribimus $y - 2b$ in $y + b$, vel $y - 2b \times y + b$.

Alii more Leibnitiano compositas quantitates sese invicem multiplicantes parenthesi includunt: hinc factum ex $a + b - c$ in $d - g$ in hunc modum scribunt: $(a + b - c)(d - g)$. Alterutra notandi ratio, prout commodior visa fuerit, poterit usurpari.

Signum multiplicationis est etiam punctum unicum inter factores duos medio loco positum. Sic 4 . 3 denotat factum ex 4 in 3 &c.

11. **D**ivisio propriè est, quæ fit per numeros integros, quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda, quoties unitas sit minor divisore. Sed ob analogiam vox etiam usurpari solet, cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quaeritur, quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus, aut sordus numerus, aut alia

alia cujuscvis generis quantitas. Sic ad dividendum lineam AE per lineam AC , existente AB unitate, agenda est ED parallela CB , & erit AD quotiens. Immo & divisio propter similitudinem quamdam dicitur, cum rectangulum ad datam lineam tanquam basem applicatur, ut inde noscatur altitudo.



Dividere nihil est aliud, quàm numerum quemvis datum in quotlibet æquales partes dirimere, sive numerum invenire, qui doceat, quoties numerus quivis datus in dato quovis continetur. In omni verò divisione duos habemus numeros datos, nempe *Dividendum*, & *Divisorem*, quibus datis tertius quaeritur, quem vocant *Quotum*, sive *Quotientem*; ostendit enim, quoties divisor in dividendo continetur. Si numerus 12 in 3 partes sit dirimendus, quotus 4 ostendit unius trientis valorem; vel etiam quoties divisor 3 in dividendo 12 continetur. Divisionis autem operationem sive perfectam, sive perficiendam solemus interdum sic indicare $\frac{12}{3}$: quod notat numerum 12 per 3 divisum, vel dividendum.

Est autem divisio eo ferè modo multiplicationi opposita, quo additioni subductio; ut

enim quæ additio componit, subductio resolvit, ita quod multiplicatione componitur, id resolvitur divisione. Ita, ubi ex multiplicatis 3 in 4 oritur 12, si 12 per alterutrum divides, alterum prodibit; divisio enim retexit, quod multiplicatio componit; & quæ in divisione sunt divisor, & quotiens, eadem in multiplicatione sunt factores.

Euclides apud Clavium divisionem strictius usurpat, ac definit: *numerus numerum dividere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis unitatibus indicat, quoties dividens numerus in diviso continetur.* Hinc numerus ille solus alterum dividere, seu metiri apud Euclidem dicendus erit, qui est ipsius aliquota pars, seu qui aliquoties positus dividendum æquet. Quoties autem ponendus sit, id divisione quæritur, & suis unitatibus quotus inde ortus demonstrat. Huc respicit Newtoniana definitio: *Divisio propriè est, quæ fit per numeros integros, querendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda, quoties unitas sit minor divi-fore.*

Divisio la-
tius sumpta.

Verum, sicuti multiplicatio laxiori sensu sumpta non ad illam solummodo restringitur, ubi Factus est numeri propositi multiplex, ita nec divisio ita restringi debet, ut divisor necessario sit dividendi aliquota pars, vel unitate major, quamvis voces illæ multiplicationis, & divisionis id inprimis designent. Quare, quo sensu numeri fracti pro numeris habentur, eodem & pro factoribus in multiplicatione, &

in

in divisione pro divitore, vel quoto haberi possunt. Itaque, ut indicaret, quo sensu quilibet numerus sive integer, sive fractus numerum quemlibet dividere posset, universaliorum attulit Newtonus definitionem his verbis: *sed ob analogiam vox etiam usurpavi solet, cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quæritur, quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus, aut surdus numerus, aut alia cujuscunque generis quantitas.*

Hinc illud consequi necesse est, quod, ut multiplicatione laxiori sensu sumpta non semper augetur quantitas multiplicata; sed aliquando vel eadem manet, vel etiam minuitur, sic divisione universalius sumpta non semper minuatur quantitas divisa; sed vel eadem maneat, vel etiam augeatur. Nempe, quoties divisor est unitate major, quotiens erit numero dividendo minor; quoties autem divisor est unitate minor, quotiens erit numero dividendo major: si denique divisor sit unitas, quotiens numero dividendo æqualis erit.

Divisio in-
terdum au-
get.

Denique, sicut multiplicationem vix aliud esse diximus, quam multiplicem additionem, seu additionis compendium, ita & de divisione monendum, eam nempe vix aliud esse, (saltem cum divisor est numerus integer) quam multiplicem subductionem, sive subductionis compendium, ut acutè notat Wallisius. Nam qui quærit, quoties numerus 12 contineat 3, idem facit, ac qui quærit, quoties ex 12 subduci possint 3. Qui igitur continua subductione

B 4

idip-

idipsum invenerit, eadem operâ intelliget, quoties 3 in 12 præcisè contineantur: quod ipsissimum est dividere. At, cum infiniti prope laboris esset in divisionibus majoribus tot subtractiones singillatim peragere, quot numero dividendo grandiori penitus exhauriendo sufficiunt, Arithmeticæ practicæ magistri viam expeditiorem excogitarunt; nempe *pro multiplici divisoris subtractione subducunt divisoris multipulum*: quod eodem planè recidit. Sic in exemplo præcedente, ubi numerus 12 per 3 dividendus proponitur, perinde est, sive ternionem quater subducamus, sive ternionis quadruplum.

Supereſt jam, ut, quo artificio accommodari possit Geometriæ hæc universalior dividendi ratio, paucis exponamus. Nimirum dividitur numerus unus per alium numerum, cum tertius invenitur, qui sit ad dividendum, ut est unitas ad divisorem. Itaque, si oporteat dividere lineam AE per lineam AC, assumatur rursus AB unitas; idest, instar unitatis consideretur: jungantur puncta B, C per rectam BC, & ducta ED parallelâ CB, erit recta AD quotiens hujus divisionis; nam propter similitudinem triangulorum erit ex elementis, ut AB ad AC, ita AD ad AE; idest, ut unitas ad divisorem, ita quotiens ad dividendum.

Immo & *Divisio*, inquit Newtonus, propter similitudinem quamdam dicitur, cum rectangulum ad datam lineam tanquam basem applicatur,

Geometri-
ca dividen-
di ratio.

tur, ut inde noscatur altitudo. Nam quæ de multiplicatione jam dicta sunt, & de divisione sunt intelligenda, servata proportionē; quippe quod multiplicatione conficitur, id divisione dissolvitur. Ut igitur ex datis longitudine, & latitudine habetur area rectanguli multiplicando, sic ex data area cum longitudine habetur latitudo; vel ex data area cum latitudine habetur longitudo dividendo. Voces autem illæ, quibus dicitur rectangulum applicari ad latus, vel altitudinem, ut proveniat basis, vel contra, non alio nomine ad divisionem videntur referendæ, quàm prout quantitates illæ singulæ ad instar numerorum considerantur. Non enim quæritur, quoties linea in superficie rectangula contineatur, quod omnino esset incongruum; sed quoties numerus, puta, quadratorum in area rectanguli contineat numerum longitudinum in latere, ut proveniat numerus longitudinum in reliquo latere: idem dicendum de solido. Istiusmodi divisiones, seu applicationes, ut vocant, circa numerum abstractum versantur, non circa magnitudines, aliasve quantitates numero heterogeneas.

12. *Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, seu quantitatem, quæ oritur ex divisione superioris quantitatis per inferiorem. Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem, quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc est 3; & $\frac{5}{1}$ quantitatem, quæ oritur dividendo 5 per*

5 per 8, hoc est, octavam partem numeri 5;

¶ $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem, quæ oritur dividendo

a per b; puta, si a sit 15, ¶ b 3, tum $\frac{a}{b}$

denotat 5; ¶ sic $\frac{ab - bb}{a + x}$ denotat quantita-

tem, quæ oritur dividendo $ab - bb$ per $a + x$; atque ita in aliis. Hujusmodi autem quantitates fractiones dicuntur, parsque superior Numerator, ac inferior Denominator.

Aliquando Divisor quantitati divisæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad designandum quantitatem, quæ oritur ex divisione $\frac{a \times x}{a + b}$ per

$a - b$, scribi potest $a - b \overline{) \frac{a \times x}{a + b}}$.

Hinc fractionum origo, de quibus uberiùs infra.

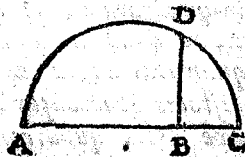
13. **E**T si multiplicatio per immediatam quantitatem conjunctionem denotari solet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat summam utriusque. Sic $3 \frac{1}{2}$ denotat tria cum semisse.

Si quantitas se ipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, suffigi solet. Sic pro aaa scribimus a^3 , pro aaaa scribimus a^4 , pro aaaaa scribimus a^5 , ¶ pro aaaa bb scribimus $a^3 bb$, vel $a^3 b^2$. Puta, si a sit 5, ¶ b sit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$, sive 125, ¶

a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$, sive 625; atque $a^3 b^2$ erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$, sive 500. Ubi nota, quodd numerus inter duas species immediate scriptus ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate $a^3 bb$ non denotat bb ter capiendum esse, sed a in se bis ducendum. Nota etiam, quodd hæ quantitates tot dimensionum, vel potestatum, vel dignitatum esse dicuntur, quot factoribus, seu quantitatibus se multiplicantibus constant, ¶ numerus suffixus vocatur Index potestatum, vel dimensionum. Sic aa est duarum dimensionum, vel potestatum, ¶ a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus; ¶ sic porro; ¶ quantitas a, ex cujus in se multiplicatione hæ potestates generantur, dicitur earum Radix, nempe radix quadratica quadrati aa, cubica cubi a^3 , ¶c.

Cum autem radix per seipsam multiplicata producat quadratum, ¶ quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum ¶c., erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, ¶ quadratum ad cubum ¶c.; adeoque quantitatis cujuscunque radix quadratica erit medium proportionale inter unitatem, ¶ quantitatem illam, ¶ radix cubica primum e duobus mediè proportionalibus, ¶ radix quadrato-quadratica primum e tribus; ¶ sic præterea. Duplici igitur affectione radices innotescunt, tum quodd seipsas multiplicando producant superiores potestates, tum quodd

quoddam sint e mediis proportionalibus inter istas potestates, & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam esse 8, & cubicam 4, vel ex eo patet, quoddam 8×8 , & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64; vel quoddam sit 1 ad 8, ut 8 ad 64, & 1 ad 4, ut 4 ad 16, & 16 ad 64. Et hinc, si lineæ aliqujus AB radix quadratica extrahenda est, producat eam ad C, ut sit BC unitas; dein super AC describe semicirculum, & ad B erige perpendicularum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis est inter AB, & unitatem BC.



Potestas vocatur ea magnitudo, seu numerus, ad quem evehitur quantitas aliqua, cum semel, aut pluries ipsa per se multiplicatur. Veteres has potestates suis propriis nominibus donarunt: vocabant radicem, seu latius primam potestatem; hoc est, illam ipsam quantitatem, quæ per multiplicationem repetita ad superiores evehitur potestates; deinde ejus lateris quadratum, cubum, quadrato-quadratum, quadrato-cubum, cubo-cubum; atque ita deinceps.

Antiqua hæc potestatum nomina jamdiu obsoleverunt: nunc temporis secundum Indices

ces potestates singulæ ab aliis secernuntur. Est autem Index, seu Exponens potestatis numerus ille, qui quantitati a tergo adscriptus, designat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debeat. Itaque recentiores vocant potestatem primam, cujus index est unitas, uti a^1 ; potestatem secundam, cujus index est binarius, uti a^2 ; & sic deinceps in infinitum.

Cum autem genesis harum potestatum sit ejusmodi, ut radix per se ipsam multiplicata producat quadratum; & hoc iterum per radicem multiplicatum producat cubum &c., erit ex def. multiplicationis, inquit Newtonus, ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum.

Quamobrem potestates istiusmodi non aliud sunt, quam series, seu progressio geometrica continue proportionalium ab unitate inchoatorum. His accommodari solent exponentes in progressionem arithmetica ab 0 inchoati, qui indicent, quot in quaque potestate sint dimensiones, uti vides in proposita serie, cujus usum paulo infra intelliges, quam latissime pateat.

Exponentes 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 .
Potestates 1, a, a, a, a, a &c.

Non est itaque, cur Tyrones absterreant nomina quadrato-quadrati, supersolidi; quippe nihil aliud sibi volunt duriuscula hæc veterum nomina, quam geometricam progressionem, seu rationem eandem toties repetitam; quod absque limite fieri posse nemo ignorat. Hinc facile

cilè intelliges, cur dicatur a Newtono quantitatis cujuscunque radix quadratica esse medium proportionale inter unitatem, & quantitatem illam, & radicem cubicam primum e duobus mediè proportionalibus; & sic præterea.

Extrahio
radicem geo-
metricam.

Habes jam methodum geometricè extrahendi radicem quadraticam ex data quavis linea AB. Nam, uti nuper docuimus, extrahitur ex aliquo numero radix quæcumque, cum inter ipsum, & unitatem tot mediæ proportionales inveniuntur, quot designat exponens radicis extrahendæ diminutus unitate; hoc est, una, si radix sit quadrata; duæ, si cubica; atque ita deinceps. Quare, si lineæ alicujus AB radix quadratica, inquit Newtonus, extrahenda sit, produc &c.

14. **A**D designandam radicem alicujus quantitatis præfigi solet nota $\sqrt{}$, si radix sit quadratica; $\sqrt[3]{}$, si sit cubica; $\sqrt[4]{}$, si quadrato-quadratica &c. Sic $\sqrt{64}$ denotat 8; $\sqrt[3]{3:64}$ denotat 4; $\sqrt[4]{aa}$ denotat a; $\sqrt[4]{ax}$ denotat radicem quadraticam ex ax; $\sqrt[3]{3:4axx}$ radicem cubicam ex 4axx. Ut, si a sit 3, $\sqrt{x12}$, tum $\sqrt{ax}$ erit $\sqrt{36}$, seu 6; $\sqrt[3]{3:4axx}$ erit $\sqrt[3]{3:1728}$, seu 12. Et hæc radices, ubi non licet extrahere, dicuntur surdæ quantitates, ut $\sqrt{ax}$; vel surdi numeri, ut $\sqrt{12}$.

Nonnulli pro designanda quadratica potestate usurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadrato-

dratica qq, pro quadrato-cubica qc &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipsius A, scribitur Aq, Ac, Aqq &c.; & pro radice cubica ex abb—x³, scribitur $\sqrt[3]{c:abb-x^3}$. Alii alias notas adhibent, sed quæ jam ferè exoleverunt.

Alii radices ita notant: $\sqrt[2]{}$, si radix sit quadratica; $\sqrt[3]{}$, si cubica &c.

Nota = designat quantitates hinc inde æquales esse. Sic x = b designat x æqualem esse b.

Hoc signo primus usus est Harriotus: nunc passim usurpatur. Nonnulli cum Cartesio adhibent signum ∞ : apud Auctores Harrioto antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.

Signum majoritatis est $>$; minoritatis est $<$. Hæc quoque signa primus invenit Harriotus, eumque secuti sunt recentiores.

Signum similitudinis apud plerosque est $\sim$; sed plerique nullo utuntur signo similitudinis.

16. **N**Ota :: significat quantitates hinc inde proportionales esse. Sic a.b::c.d significat esse a ad b, ut c ad d; & a.b.e::c.d.f esse a, b, & e inter se, ut sunt c, d, & f inter se respectivè; vel esse a ad c, b ad d, & e ad f in eadem ratione.

Denique notarum, quæ ex his componuntur, interpretatio per analogiam facilè innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb ;

a^3bb ; $\odot 3 \frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$; $\odot 7 \sqrt{ax}$ septies $\sqrt{ax}$.

Item $\frac{a}{b}x$ denotat, id quod fit multiplicando x

per $\frac{a}{b}$; $\odot \frac{5ee}{4a+9e} Z^3$ id, quod fit multipli-

cando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$, hoc est, per quotum exor-

tum divisione $5ee$ per $4a+9e$; $\odot \frac{2a^3}{9c} \sqrt{ax}$.

id, quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; $\odot \frac{7\sqrt{ax}}{c}$

quotum exortum divisione $7\sqrt{ax}$ per c ; $\odot$

$\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum divisione $8a\sqrt{cx}$

per summam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et sic

$\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum divisione

differentiæ $3axx-x^3$ per summam $a+x$; $\odot$

$\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus quoti; $\odot 2a+3c$

$\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id, quod fit multiplicando radicem

illam per summam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa}$

$+bb$ denotat radicem summæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$,

$\odot bb$; $\odot \sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem sum-

mæ quantitatum $\frac{1}{2}a$, $\odot \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; $\odot$

$\frac{2a^3}{aa-zz} \sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam

multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$; $\odot$ sic in aliis.

Cæ.

Cæterum nota, quod in bujushodi comple-
xis quantitibus non opus est ad significationem
singularum litterarum semper attendere; sed suf-
ficit in genere tantum intelligere, e. g. quod

$\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ significat radicem aggre-

gati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, quodcunque tandem

prodeat illud aggregatum, cum numeri, vel li-
neæ pro litteris substituuntur; atque ita, quod

$\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$
 $a-\sqrt{ab}$ significat quotum exortum

divisione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ per

quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac si quantita-

tes illæ simplices essent, $\odot$ cognitæ, etsi, quæ-

nam sint impræsentiarum, prorsus ignoretur, $\odot$ ad

singularum partium constitutionem, aut significa-

tionem neutiquam attendatur. Id quod monen-

dum esse duxi, ne complexione terminorum Tyrones

quasi conterriti in limine hæreant.

Quæ hucusque præmisimus quasi prolego-

mena, eo quidem loco sunt habenda, quo de-

finitiones, & terminorum explicationes, a qui-

bus rerum mathematicarum Scriptores ordiri

solent. Notationes alias, prout occasio tulerit, in medium proferemus.

L. I.

C

CA-

CAPUT SECUNDUM.

De calculo numerico, & litterali.

SYNOPSIS.

Additio quid, ejusque demonstratio. Additionis praxis in numeris simplicibus, compositis, & in variis quantitatum denominationibus, ac præsertim in fractionibus decimalibus. Additio algebraica, & regulæ signorum $+$, & $-$. Fractionum uberior explicatio, & universalior origo, quæ quantitativis irrationalibus etiam conveniat. Fractionum cognominum additio. Subductio quid, ejusque demonstratio, & variæ praxes. Decimalium, & diversarum specierum subductio. Regulæ subductionis algebraicæ. Cur signum $-$ mutetur in $+$. Multiplicatio laxiore sensu definita, ejusque praxis demonstrata in numeris simplicibus, compositis, & decimalibus. Multiplicatio algebraica, ejusque regulæ. De signis $+$, & $-$ in multiplicationis producto. Multiplicatio radicalium ejusdem denominationis. Euclidis elementum secundum analyticè demonstratum. Divisio arithmetica, & algebraica. Multiplicationis per divisionem, & divisionis per multiplicationem examen. Regulæ signorum $+$, & $-$ in divisione.

DE

DE ADDITIONE.

17. Numerorum, ubi non sunt admodum compositi, Additio per se manifesta est. Sic, quod 7 & 9 , seu $7 + 9$ faciunt 16 , & quod $11 + 15$ faciunt 26 , prima fronte patet. At in magis compositis opus peragitur scribendo numeros serie descendente, & summas columnarum singulatim colligendo. Quemadmodum, si numeri 1357 , & 172 addendi sunt, scribe alterutrum 172 infra alterum 1357 , ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 subjiciantur, cæterique numeri numeris correspondentibus, nempe deni 7 denis 5 , & centenis 1 centenis 3 . Tum incipiendo ad dextram, dic, 2 & 7 faciunt 9 , quem scribe infra; item 7 & 5 faciunt 12 , cujus posteriorem numerum 2 scribe infra, priorem vero 1 asserua, proximis numeris 1 & 3 adjiciendum. Dic itaque præterea, 1 & 1 faciunt 2 , cui 3 adjectus facit 5 , & scribe 5 infra, & manebit tantum 1 prima figura superioris numeri, quæ etiam infra scribenda est, & sic habebitur summa 1529 .

Sic numeros $87899 + 13403 + 885 + 1920$, quod in unam summam redigantur, scribe in serie descendente, ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam constituent; & sic præterea. Deinde, dic, $5 + 3$ valent 8 , & $8 + 9$ valent 17 , scribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo, $1 + 8$ valent 9 , $9 + 2$ valent

C 2

11,

11, ac 11 + 9 valent 20.; subscriptoque 0, dic iterum, ut ante, 2 + 8 valent 10, 10 + 9 valent 19, 19 + 4 valent 23, & 23 + 8 valent 31; adeoque asserto 3, subscribe 1, ut ante, & iterum dic, 3 + 1 valent 4, 4 + 3 valent 7, & 7 + 7 valent 14; quare subscribe 4, denuoque dic, 1 + 1 valent 2, & 2 + 8 valent 10, quem ultimò subscribe, & omnium summam habebis 104107.

87899
13403
1920
885
104107

Additio
quid, ejus-
que demon-
stratio.

Additio est numerorum plurium in unam summam collectio, sive inventio numeri ex duobus, vel pluribus homogeneis datis, qui datis conjunctim sumptis æqualis est. Demonstratio pendet ex illo axiomate: Totum æquatur partibus suis omnibus simul sumptis. Nam ex tota operationis serie liquet, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus est ergo ex omnibus datis simul sumptis, atque adeo ipsis æqualis.

Si quantitates addendæ ex pluribus constent speciebus diversis, seu, ut loquuntur, denominationibus, prout in addendis monetis, ponderibus, mensuris, motibus &c. contingere solet, curandum, ut, quoties inferioris alicujus speciei summula eò usque crescat, ut unitatem proximè superioris speciei vel æquet, vel excedat, aut etiam duas pluresve unitates, subscribatur suo loco excessus, si quis sit, &

re-

reliquum superiori seriei adjungatur. Illud igitur prospiciendum est sedulò, ut sciatur, quot unitates speciei inferioris unitatem superioris adæquent; ex. gr. in addendis monetis diversæ speciei juxta valorem nostræ regionis 12 denarii constituunt unum solidum, & 20 solidi unam libram; ideoque in apposito exemplo, cum numerus denariorum sit $17 = 12 + 5$, in denariorum loco subscribo 5, & pro reliquis 12 adjungo 1 solidum proximæ seriei; deinde, cum summa solidorum simul cum 1 transmissio sit $41 = 40 + 1$, sub serie solidorum scribo 1, & pro reliquis 40 adjungo 2 li- Lib. S. D.
bras proximæ seriei; denique li- 7. 19. 4
brarum summulam cum 2 trans- 16. 8. 6
missis reperio 33; adeoque om- 8. 13. 7
nium addendorum summa reperi- 33. 1. 5
tur 33. 1. 5.

Eodem modo in fractionibus astronomicis addendis procedendum erit: ubi, diviso Zodiaci in 12 signa, & quolibet signo in 30 gradus, quolibet gradu in 60 minuta prima, & quolibet horum in 60 minuta

secunda, & sic deinceps, Sig. Grad. 11 11
pro 60 secundis substitui- 1. 3. 16. 30
endum 1 minutum pri- 0. 12. 23. 15
mum; pro 60 primis 1 2. 5. 47. 45
gradus; pro 30 gradibus 4. 23. 51. —
1 signum: ut in apposito 8. 15. 18. 30
exemplo.

Simili planè methodo in aliis ejusmodi additionibus procedendum; nec quidquam in-

38
terest discriminis, nisi quodd nunc plures, nunc pauciores unitates in gradu inferiori adæquent unitatem gradus proximè superioris.

18. **A**D eundem modum numeri $630'953$
decimales adduntur, ut in $51'0807$
annexo paradi-gmate videre est. $305'37$
 $987'4037$

Si quando numeri addendi fractiones decimales annexas habeant, seu, quod eodem recidit, gradus aliquot infra unitatem descendentes in proportionem subdecupla, operatio eodem omnino modo peragenda est, quo in numeris integris, & iisdem principiis demonstranda. Illud autem cautè prospiciendum, ne decimalium gradus confundantur; adeoque non semper ultima figura unius numeri ultimæ alterius est subscribenda, sed graduum ratio sic habenda est, ut monades monadibus, decades decadibus &c. in eadem serie subscribantur; adeoque linea separans, sive illud quodcumque pro libito assumptum, quod separantis munus obit, in omnibus numeris aptè conveniat, ut exemplum appositum docet: neque ulla hinc nova difficultas occurrit.

19. **I**N terminis algebraicis *Additio fit connexendo quantitates addendas cum signis propriis, & insuper uniendo, quæ possunt uniri.* Sic a & b faciunt $a+b$; a & $-b$ faciunt $a-b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a-b$; $7a$
C 9

39
& $9a$ faciunt $7a+9a$; $-a \vee ac$ & $b \vee ac$ faciunt $-a \vee ac + b \vee ac$, vel $b \vee ac - a \vee ac$; nam perinde est, quo ordine scribantur.

Quantitates affirmativæ, quæ ex parte specierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos, quibus species multiplicantur. Sic $7a+9a$ faciunt $16a$; & $11bc+15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$; & 2

$\vee ac+7\vee ac$ faciunt $9\vee ac$; & $6\vee ab-xx+7\vee ab-xx$ faciunt $13\vee ab-xx$; & ad eundem modum $6\vee 3+7\vee 3$ faciunt $13\vee 3$. Quinetiam $a\vee ac+b\vee ac$ faciunt $a+b\vee ac$, additis nempe a & b , tanquam si essent numeri multiplicantes $\vee ac$; & sic $2a+3c\vee \frac{3axx-x^3}{a+x}+3a\vee \frac{3axx-x^3}{a+x}$ faciunt $5a+3c\vee \frac{3ax-x^3}{a+x}$, eò quodd $2a+3c$ & $3a$ faciant $5a+3c$.

Quantitates radicales dicuntur simplices, quotiescunque unicum habent terminum, eumque affectum signo radicali, ut $\vee a$, $\vee c$, $\vee ac$: dicuntur compositæ, cum duos aut plures terminos habent affectos signo radicali, ut $\vee a+\vee b$, vel $\vee a-\vee b$. Jam verò, quoties quantitates radicales erunt ejusdem denominationis, idest, singulæ vel radices quadraticæ, vel cubicæ, & eandem sub signo radicali
C 4 quan-

quantitatem contineant, additio radicalium eodem modo peragitur, quo in numeris integris. Nam, sicuti ad designandum duplum, triplum, quadruplum quantitatis commensurabilis a , scribitur $2a$, $3a$, $4a$, sic ad designandum duplum, triplum, quadruplum quantitatis radicalis $\sqrt{a}$, scribendum erit $2\sqrt{a}$, $3\sqrt{a}$, $4\sqrt{a}$. De calculo radicalium uberius infra.

20. **F**Ractiones affirmativæ, quarum idem est denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$; & $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}} + \frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; & $\frac{aa}{c} + \frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa+bx}{c}$.

Notationem, & originem fractionum, seu minutiarum, quos numeros fractos dicimus, vix cum Newtono attigimus n. 12; & quamvis fractionum natura perfectius infra intelligetur, operæ pretium tamen existimo ea de re nonnulla hic adungere eo consilio, ut Tyrones doctrinæ seriem paulatim, & quasi per gradus assequantur.

Fractiones, seu numeri fracti nihil aliud sunt, quàm partes unitatis aliquod totum divisibile representantis. Nam, quamvis unitas sit numerorum minimus, (cum paucius, quàm unum esse non possit, inquit Wallisius)

Fractionum origo.

uni-

unitas tamen illa concipi solet divisa in membra sive plura, sive pauciora, prout res postlaverit, æqualia tamen.

Cum itaque in fractionibus omnino duo designanda sint; puta, unius, sive integri in partes diremptio, nunc plures, nunc pauciores, earumque partium, unius, pluriumve assumptio, quod utrumque indicetur, duobus propterea numeris fractio signari solet, altero supra, infra altero, interposità lineolà, hoc modo: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c., quorum inferior indicat, in quot æquales partes unitas dirempta sit, & Denominator dici consuevit: superior, quot earum assumi volumus, dicique solet Numerator. Denominator autem dicitur, quia denominat, quales sint partes, in quas dirimitur totum; puta, semissem, trientem, quadrantem, sextantem &c., prout fractionis denominator est 2, 3, 4, 6; numerator verò, quia harum partium numerum designat, quot ex toto accipiantur; puta, $\frac{2}{3}$ duos trientes, $\frac{3}{4}$ tres quadrantes &c.

Fractionum notatio.

Denominator.
Numerator.

Fractiones autem propriæ quidpiam significant unitate minus, atque adeo numerator denominatore minor semper erit; si enim æqualis fuerit, uti $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ &c., ipsamet unitas præcisè indicabitur; nam duo semisses, tres trientes &c. integrum adæquant; sin numerator major esset denominatore, indicaret plures totius partes assumendas, quàm inibi omnino contineantur: ita $\frac{6}{3}$ tantundem valent atque 2; $\frac{8}{3}$ octo trientes tantundem valent atque $2\frac{2}{3}$ &c.

Fractiones propriæ integro minor.

Fractiones improprie.

Ve-

Fractionum
universalior
origo, quæ
quantitati-
bus irratio-
nalibus e-
tiā conve-
niat.

Verum universalior adhuc fractionum ori-
go ex divisione repetenda est, uti innuimus
n. 12. ; nec aliud sunt fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$,
quàm totidem quotientes numerorum 2, 3, 4
per numerum 3 divisorum. Sicut ex imper-
fecta, & impossibili radicum extractione ori-
untur numeri surdi $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, uti po-
stea dicetur, ita ex imperfecta, sive etiam im-
possibili divisione oriuntur numeri fracti $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$,
 $\frac{4}{3}$. Fractio itaque est divisionis indicium, ac
designat quotientem numeratoris per denomi-
natorem divisi.

Fractionum
cognominu
additio.

Hæc satis ad originem, notionemque fra-
ctionum rite concipiendam; nam uberior fra-
ctionum theoria seorsum mox erit tradenda.
Itaque, ne a Newtoniana methodo recedamus,
si fractiones invicem addendæ sint cognomines;
idest, eundem habeant denominatorem, nulla
difficultate res absolvitur. *Substitutâ* nempe *pro*
numeratoribus expositis, numeratorum illorum sum-
mâ, ac retento communi, qui prius erat, deno-
minatore, habetur summa fractionum exposita-
rum. Demonstratio eadem planè, quæ in in-
tegris. Sic, si addendæ sint fractiones $\frac{2}{3}$ &
 $\frac{3}{3}$, prodibit summa $\frac{5}{3}$; quippe numeri 2, & 3
simul additi constituunt 5, quæcunque res illæ
sint, quæ numerantur, puta, sive integræ,
sive partes; & qua ratione 2, & 3 homines
sunt 5 homines, eadem planè ratione 2, & 3
semisses sunt 5 semisses, 2, & 3 sextantes
sunt 5 sextantes. Idem præstabis in additione
spe-

$$\text{speciosa } \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d} \text{ \&c.}$$

Si verò fractiones invicem addendæ non
sint cognomines, adhibenda prius est præpara-
tio; qua ad eundem denominatorem reducan-
tur, quàm additio instituitur. De hac redu-
ctione dicetur infra Cap. III.

Fractionum
non cognom-
inum.

21. **N**egativæ quantitates eodem modo ad-
duntur ac affirmativæ. Sic -2 &
 -3 faciunt -5 ; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt
 $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt
 $-(a+b)\sqrt{ax}$. Ubi verò negativa quantitas
affirmativæ adjicienda est, oportet affirmativam
negativâ diminueri. Sic 3 & -2 faciunt 1 ;
 $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ &
 $b\sqrt{ac}$ faciunt $b-a\sqrt{ac}$. Et nota, quod, ubi
negativa quantitas excedit affirmativam, aggre-
gatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt
 -1 ; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$; ac 2
 $\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

Demonstravimus n. 5. quantitates, quæ
dicuntur negativæ, non minùs reales esse,
quàm quæ vocantur positivæ; sed omne dis-
crimen inter eas positum esse, quod quantita-
tes negativæ accipiendæ sint sensu contrario
illi,

illi, quo positivas quantitates interpretamur; nam & in Geometria, ubi quantitates per longitudes linearum designantur, si linea versùs plagam aliquam ducta habeatur tanquam positiva, erit negativa, quæ versùs plagam oppositam ducitur; & in Arithmetica, sicuti numeri, qui a zero progrediuntur, dicuntur positivi, ita dicendi sunt negativi, qui vicissim a zero regrediuntur. Quare, cum iste numerorum a zero regressus omnino opponatur progressui, manifestum est, numeros negativos additos numeris positivis, eorum valorem minuere debere, vel numeros positivos per negativorum additionem posse in nihilum redigi, si negativi æquantur positivis; quin etiam in negativos abire, si vicissim negativi majores fuerint positivis.

22. **I**N additione aut plurium, aut magis compositarum quantitarum convenit observare formam operationis supra in additione numerorum expositam. Quemadmodum, si $17ax - 14a + 3$, & $4a + 2 - 8ax$, & $7a - 9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente ita scilicet, ut termini maximè affines stent in iisdem columnis; nempe numeri 3, & 2 in una columna; species $-14a$, & $4a$, & $7a$ in alia columna; atque species $17ax$, & $-8ax$, & $-9ax$ in tertia; dein terminos cujusque columnæ singillatim addo, dicendo: 2 & 3 faciunt 5, quod subscribo; dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$, & insuper $-14a$ facit $-3a$, quod

ite-

iterum subscribo; denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$, & insuper $17ax$ facit 0; adeoque prodit summa $-3a + 5$.

$$\begin{array}{r} 17ax - 14a + 3 \\ - 8ax + 4a + 2 \\ - 9ax + 7a \\ \hline * - 3a + 5 \end{array}$$

Eadem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{r} 12x + 7a \\ 7x + 9a \\ \hline 19x + 16a \end{array} \quad \begin{array}{r} 11bc - 7\sqrt{ac} \\ 15bc + 2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc - 5\sqrt{ac} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{4ax}{b} + 6\sqrt{3} + \frac{1}{5} \\ + \frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{2}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + \frac{3}{5} \end{array} \quad \begin{array}{r} -6xx + \frac{3}{7}x \\ 5x^3 + \frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3 - 6xx + \frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aay + 2a^3 - \frac{a^4}{2y} \\ - 2ayy - 4aay + a^3 \\ y^3 + 2ayy - \frac{1}{2}aay \\ \hline y^3 * - 3\frac{1}{2}aay + 3a^3 - \frac{a^4}{2y} \\ 5x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5x^4 + 2ax^3 \\
 - 3x^4 - 2ax^3 + 8\frac{1}{4}a^3 \vee \overline{aa + xx} \\
 - 2x^4 + 5bx^3 - 20a^3 \vee \overline{aa - xx} \\
 - 4bx^3 - 7\frac{1}{4}a^3 \vee \overline{aa + xx} \\
 \hline
 * + bx^3 + a^3 \vee \overline{aa + xx} \\
 - 20a^3 \vee \overline{aa - xx}
 \end{array}$$

In hisce exemplis compositorum quantitatuum animadvertis, opinor, additionem algebraicam hisce regulis contineri.

I. Si quantitates eadem littera notatae eodem signo afficiantur, numeri iis praefixi adduntur, ut in Arithmetica communi.

II. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem, & residuo praefigitur signum majoris.

III. Quantitates diversis litteris notatae junguntur signo +.

DE SUBDUCTIONE.

23. **N**umerorum non nimis compositorum inventio etiam differentiae per se patet. Quemaadmodum, quod 9 de 17 relinquat 8. At in magis compositis subductio fieri solet subscribendo numerum ablativum, & singillatim auferendo figuras inferiores de superioribus. Sic ad auferendum 63543 de 782579, subscripto 63543, dic, 3 de 9 relinquit 6, quod scribe infra; dein

4 de 7 relinquit 3, quod pariter scribe infra; tum 5 de 5 relinquit 0, quod itidem subscribe; postea 3 de 2 auferendum est: sed, cum 3 sit major, figura 1 a proxima figura 8 mutuo sumi debet, quae una cum 2 faciat 12, a quo auferri potest 3, & restat 9, quod insuper subscribe: ad haec, cum praeter 6 etiam 1 de 8 auferendum sit, adde 1 ad 6; & summa 7 de 8 relinquet 1, quod etiam subscribe; denique, cum in inferiori numero nihil restet auferendum de superiori 7, subscribe etiam 7; & sic

$$\begin{array}{r}
 782579 \\
 63543 \\
 \hline
 719036
 \end{array}$$

Quod additio componit, id subductio dissolvit. Docet ergo subductio minorem numerum a majori subtrahere, & residuum exhibere. Numerum illum, a quo alter auferendus est, numerum *Minuendum* vocant; auferendum vero *Minutorem*; tertium, qui quaeritur, *Residuum*.

Subductionis praxis satis a Newtono indicatur. Quoties autem contingit, notam aliquam numeri subducendi majorem esse nota sibi supraposita, Arithmeticae practicae magistri duplicem modum docent, quo fieri possit subtractio. Quamvis autem uterque eodem recidat, praestat tamen in gratiam Tyronum utrumque separatim & exponere, & demonstrare.

SI nota aliqua inferior sit major superiore, ad superiorem mente adjicies decem; tum verò proxima ad sinistram nota significativa superioris numeri æstimanda est minor unitate, quàm revera sit; &, si intermediæ essent ciphre una, vel plures, omnes illæ ad notam significativam usque æstimandæ erunt tantumquam 9.

EXEMPLUM, ET DEMONSTRATIO.

Quia 8 subtrahinequit ex 4, ad 4 adjicio 10 mutuata a sequente numero, qui est tria millia; est autem evidens, cum a tribus millibus subduco 10, remanere duo millia nonaginta nonaginta, idest, 2990: constat itaque, cur in superiori numero nota 3 vertatur in 2, & ciphre 00 in 99.

Finge rursus iisdem notis 8, & 4 duas alias adjungi, tunc sanè 8 valeret 800, & 4 valeret 400; ac proinde, ut 800 auferri possint ex 400, adjicienda sunt non decem, sed mille, ut sic 800 ex 1400 subducantur. At, si paulo accuratiùs operationem consideres, & notarum valorem, qui in residuorum scriptione semper servatur, intelliges omnia eddem semper recidere, five 8 auferas ex 14, five 800 ex 1400, cum residuum 6 eo loco positum va-

Minuendus	3004
Minutor	2578
Residuum	426

leat 600, quantum nempe super-	300496
esset, si 800 ex 1400 subduceren-	257841
tur.	42655

PRAXIS MODI SECUNDI.

HÆc praxis in eo tantum differt a præcedente, quòd, quando nota inferior auferri nequit a superiore; ac proinde illi adjiciuntur 10, nulla in superioribus notis sequentibus mutatione facta, sequens inferior nota augeatur unitate, aut certè, si nulla nota significativa sequatur, in loco sequenti unitas reponatur.

EXEMPLUM, ET DEMONSTRATIO.

Numerus 6 subtractus ex 8 relinquit 2; at, quia 7 ex 6 subtrahi nequit, adjicio 10, & hinc 7 ex 16 subtractus relinquit 9; quia verò adjeci 10, sequens nota inferior 5 augenda est unitate, & sic 5 fit 6. Rursum, quia 6 ex 0 auferri nequit, aufero 6 ex 10, & residuum est 4; quia verò rursus adjeci 10, repono sequenti loco, qui vacat, unitatem, quæ ablata ex 8 relinquit 7: residuum ergo quæsitum est 7492.

Minuendus	8068
Minutor	576
Differentia	7492

Demonstratio ab eo axioma derivatur, quòd, si binæ quantitates inæquales æqualibus ambæ augeantur, manebit eadem differentia,

L. I.

D

quæ

quæ prius. Hoc si proposito exemplo applicetur, operationis ratio continuè appareat; nam superiori notæ 6 adjicere 10, sic ut fiat 16, nihil est aliud, quàm sequenti post illam loco, qui hic tertius est, apponere unitatem. Quare, cum etiam loco notam inferiorem 7 sequenti, qui & ipse tertius hic est, apponatur unitas, manifestum est, utrumque numerum æqualiter augeri, idemque manere residuum. Quod erat &c.

24. **C**Æterum omnino cavendum est, ut figuræ numeri ablativi subscribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas &c.: sicut in additione dictum est. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non dispones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix} 547 \\ 0'63 \end{smallmatrix}$; sed sic $\begin{smallmatrix} 547 \\ 0'63 \end{smallmatrix}$, ita nempe, ut circulus, qui locum unitatum in decimali occupat, subjiciatur unitatibus alterius numeri; tum, circulis in locis vacuis superioris numeri subintellectis, dic 3 de 0 auferendum esse, sed, cum nequeat, debet 1 de loco anteriori mutud sumi, ut 0 evadat 10, a quo 3 auferri potest, & dabit 7, quod infra scribe; dein illud 1, quod mutud sumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de superiore 0 auferendum est; sed, cum nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori sumi, ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod similiter infra scribendum est; tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod iidem subscribe; denique figuras etiam

54;

54, siquidem de illis nihil amplius auferendum restat, subscribe, & habebis residuum 546'37.

$$\begin{array}{r} 547 \\ 0'63 \\ \hline 546'37 \end{array}$$

Exercitationis gratia plura tum in integris, tum in decimalibus numeris exempla subjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	282,96

Si quando subductio instituenda est in quantitatibus diversarum specierum, seu plurium, ut loquuntur, denominationum, eadem est processus ratio, quæ prius. Illud tantum curandum erit, ut, quoties ex classe, seu serie superiori, majoris scilicet denominationis mutuanda est unitas, pro illa in serie inferiori, five denominationis proximè minoris tot numerentur unitates, quot serierum ad invicem ratio postulat. Sic in subductione monetæ nostratis pro 1 libra substituendi erunt 20 solidi, pro 1 solido 12 denarii. In fractionibus astronomicis pro 1 signo reponendi erunt 30 gradus, pro 1 gradu 60 minuta prima, pro 1 minuto primo 60 secunda &c. In mensuris pro 1 exapeda sex pedes erunt numerandi, pro 1 pede 12 pollices, pro 1 pollice 12 lineæ, pro 1 linea 12 puncta; atque ita porro de reliquis, ut videre est in adjectis exemplis.

Subductio
diversarum
specierum.

52 Lib.	S.	D.	Sig.	Gr.			
4.	3.	5	8.	15.	3.	10	
2.	17.	6	3.	5.	18.	11	
1.	5	11	5.	9.	44.	59	

Exapedæ	Pedes	Pollices	Lineæ
470	2	9	8
137	4	10	11
332	3	10	9

Exapedæ	Pedes	Pollices	Lineæ
6000	0	0	0
4387	4	10	11
1612	1	1	1

In hoc postremo exemplo, si numerus superior neque pedes, neque pollices, neque lineas contineret, mutuanda esset unitas a columna exapedarum, idest sex pedes, quorum quinque apponendi columnæ pedum, & pes reliquus ita dividendus, ut 11 pollices substituantur columnæ pollicum, & 12 lineæ repellantur in columna linearum; eademque partitio ad alias species erit traducenda.

Si quantitas ablata, & residua simul additæ constituent quantitatem primò propositam, indicium est operationem rite peractam; sin secus, erratum est; nam ablatum, & residuum simul æquantur integro; idest, Totum suis partibus simul sumptis.

Si

53
25. **S**I quando major numerus de minori auferendus est, oportet minorem de majore auferre, & residuo præfigere negativum signum. Veluti, si auferendum sit 1673 de 1541, e contra aufero 1541 de 1673, & residuo 132 præfigo signum —.

Quamvis Arithmeticae practicæ magistri in omni subductione præcipiant, quantitatem subducendam minorem esse debere, saltem non majorem quantitate illa, ex qua subductio fieri debet, non raro tamen apud Analytistas, qui quantitates negativas ad calculum revocant, subductio majoris ex minore præstari jubetur.

26. **I**N terminis algebraicis subductio fit connectendo quantitates cum signis omnibus quantitatis subducendæ mutatis, & insuper uniendo, quæ possunt uniri, perinde ut in additione factum est. Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a - 7a$, sive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a + 7a$, sive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a - 7a$, sive $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a + 7a$, sive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ de $-\frac{17a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{aa - bx}{c}$.
D 3 lin.

linquit $\frac{bx - aa}{c}$; $a - b$ de $2a + b$ relinquit $2a + b - a + b$, sive $a + 2b$; $3az - zz + ac$ de $3az$ relinquit $3az - 3az + zz - ac$, sive $zz - ac$; $\frac{2aa - ab}{c}$ de $\frac{aa + ab}{c}$ relinquit $\frac{aa + ab - 2aa + ab}{c}$, sive $\frac{-aa + 2ab}{c}$; &

$a - x \vee ax$ de $a + x \vee ax$ relinquit $a + x - a + x \vee ax$, sive $2x \vee ax$; & sic in aliis.

Cæterum, ubi quantitates pluribus terminis constant, operatio perinde ac in numeris institui potest. Id quod in sequentibus exemplis videre est.

$$\begin{array}{r} 12x + 7a \\ 7x + 9a \\ \hline 5x - 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15bc + 2 \vee ac \\ - 11bc + 7 \vee ac \\ \hline 26bc - 5 \vee ac \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + \frac{5}{7}x \\ 6xx - \frac{3}{7}x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{11ax}{b} - 7 \vee 3 + \frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b} - 6 \vee 3 - \frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b} - \vee 3 + \frac{3}{5} \end{array}$$

$$5x^3 - 6xx + \frac{8}{7}x$$

Omnis algebraica subductio duabus hisce simplicissimis legibus continetur. I. Signa quantitatis subtrahendæ mutantur in contraria; idest, + mutetur in -, & vice versa - mutetur in +; quo facto, II. Quæ se mutuo destruunt, quantitates deleantur, & prodibit quantitatum differentia.

Quam-

Regula
subductio-
nis alge-
braicæ.

Quamvis autem facillè intelligatur, cur in subtractione signum + sive subintellectum, sive expressum mutetur in -, cum in hoc ipso consistat subtractio, tamen plerisque mirum, & præter expectationem accidere solet, - in subtractione mutari in +. At, qui rem sedulò perpendat, statim intelliget, quodd, sicuti positivum tollere idem est, atque defectum ejusdem substituere, ita tollere defectum tantundem supplere; & utrobique subungere subducendum, mutatis signis.

Constat præterea per hanc legem restitui in residuo, quod plus justo fuerat subtractum; nam, cum ex $a + c$ juberis subtrahere $b - d$, statim illud tibi occurrit, non b integrum esse subtrahendum; sed b multatum quantitate d . At, quia ex regulis subtractionis quantitati b præfigis signum -, hoc ipso totum b subtrahis; adeoque subtrahis etiam d partem ipsius b non subtrahendam. Itaque, ut quantitas d , quæ subtrahenda non fuerat, restituatur, regula signorum jubet, ut scribatur $+d$; atque ita subtractum erit $b - d$, si scribas $-b + d$. Clariùs res patet in numeris.

Sit $a = 8$; $c = 4$; $b = 6$; $d = 2$:

erit

$$a + c = 8 + 4 = 12$$

$$b - d = 6 - 2 = 4:$$

hinc $a + c - b + d = 8 + 4 - 6 + 2 = 8$.

Si fractiones sint cognomines; hoc est, Fractionum eundem habeant denominatorem, nulla difficultate subductio absoluitur; substituta nempe Cognominū subductio. pro numeratoribus expositis illorum differen-

D 4

tiā,

tiā, retento communi, qui prius erat, denominatore, habetur differentia fractionum. Ita, si ex $\frac{5}{6}$ auferantur $\frac{3}{6}$, prodibit differentia $\frac{5-3}{6}$

$=\frac{2}{6}$; quippe universaliter verum est $5-3=2$, sive res numeratæ integræ sint, sive partes, idest, sextantes; idemque faciendum in fractionum subductione algebraica.

DE MULTIPLICATIONE.

27. **N**umeri, qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiscendi sunt; veluti quoddam 5 in 7 facit 35, quoddamque 8 in 9 facit 72 &c.; deinde majorum numerorum multiplicatio ad bonum exemplorum normam instituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet, subscribe 4, ut vides; dein dic: 4 in 5 facit 20, cujus posteriorem figuram 0 scribe infra 4, priorem vero 2 reserva in proximam operationem; dic itaque præterea: 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2, & fit 38, cujus posteriorem figuram 8, ut ante, subscribe, & priorem 3 reserva; denique dic: 4 in 7 facit 28, cui adde prædictum 3, & fit 31; eoque pariter subscripto, habebitur 3180 numerus, qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

$$\begin{array}{r} 795 \\ 4 \\ \hline 3180 \end{array}$$

Tabellam solent huic rei accommodatam compingere in gratiam Tyronum, unde singulas

gulas simplicium numerorum multiplicationes velut ex promptuario petere possint.

Tabella multiplicationis, & divisionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Itaque, si quæzatur factum ex ductu 8 in 7, quæzatur in fronte tabellæ 8, & ad latus 7, vel contra, numerus hic in fronte, ille ad latus, & in communi serierum concursu habebitur $56=8 \times 7$; similiter in aliis quibuscunque.

Ubi autem de simplicium numerorum multiplicatione constat, non erit difficilis ad compositorum multiplicationem progressus, quippe quæ tota ex simplicium multiplicatione sæpius iterata dependeat.

28. **P**orro, si 9043 multiplicandus est per 2305, scribe alterutrum 2305 infra alterum 9043,

9043, ut ante; & multiplica superiorem 9043
 primò per 5 pro more ostenso, & emerget 45215;
 dein per 0, & emerget 0000; tertio per 3, &
 emerget 27129; denique per 2, &
 emerget 18086; hosque sic emergen- 9043
 tes numeros in serie descendente ita 2305
 scribe, ut cujusque inferioris ultima 45215
 figura sit uno loco propior sinistra, 0000
 quàm ultima superioris: tandem hos 27129
 omnes adde, & orietur 20844115, 18086
 numerus, qui fit multiplicando totum 20844115
 9043 per totum 2305.

De ciph-
 ris multipli-
 catori inter-
 missis.

Cum autem in superiore exemplo illud
 solum præstent interpositæ ciphRARUM series,
 ut reliquæ debitas suas sedes occupent, possunt
 quidem illæ non incommode penitus omitti,
 modò interim caveatur, ut reliquæ series signi-
 ficativæ easdem sedes retineant, quas, si adef-
 sent ciphRæ, occuparent.

Ut autem suus cuique locus rite assigne-
 tur, curandum est, ut hæc observetur regula;
 nempe ut cujuslibet particularis multipli ultima
 figura eodem gradu collocetur cum suo respectivè
 multiplicatore, reliquis proximos continuè lo-
 cos occupantibus. Atque hoc si observetur,
 ciphRARUM series quotlibet, si quando multi-
 plicatori ciphRæ immisceantur, penitus omitti
 possunt.

De ciph-
 ris finalibus.

Denique, si factorum alter, vel uterque
 ciphRIS terminetur, sepositis illis ciphRIS fina-
 libus peragatur tota multiplicatio inter notas
 signi-

significantes solas, & numero ita 12000
 producto tot præponantur ciphRæ, 400
 quot erant illæ omnes sepositæ, uti 48000000

29. **D** Ecimales numeri per integros, vel per
 alios decimales perinde multiplicantur,
 ut vides in his exemplis.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

Sed nota, quod in prodeunte numero, tot
 semper figuræ ad dextram pro decimalibus ab-
 scindi debent, quot sunt figuræ decimales in utro-
 que numero multiplicante; & si fortè non sint tot
 figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circu-
 lis adimplendi sunt, ut hic fit in exemplo tertio.

Demonstratio operationis pendet ex ipsa
 integrorum, & decimalium institutione. Elto
 numerus 365,25 ducendus in 3,5: postquam,
 quasi essent planè integri, invenerim produ-
 ctum 1278375, tandem, quia in factoribus
 video tres locos partium decimalium, duos
 nempe in multiplicando, & unum in mul-
 tiplicatore, tres ultimas figuras producti ab-
 scindo, & separante, vel commate, ut par-
 tes decimales; adeoque habeo 1278,375 =
 365,

Partium
 decimalium
 multiplicatio.

$365,25 \times 3,5$: atque idem in aliis partium decimalium multiplicationibus observandum erit.

Demonstratio.

Ratio hujus operationis hæc est : sicuti numerus quilibet adjectione ciphre decuplo augetur, promota nempe qualibet figura in locum proximè superiorem, ut quæ prius unitates significabat, ea jam significet decades, & sic de reliquis, ita figuræ finalis abscissione linea separante, vel commate, numerus decuplo minuitur, detrusa nempe figura qualibet in locum proximè inferiorem; puta, si numero 35 adjiciatur ciphra, fiet 350 decuplo major; sin ab eodem 35 abscindatur figura ultima, erit 3,5 decuplo minor: atque ita porro dicendum, ubi duæ aut tres aut plures adjiciuntur ciphre, aut totidem abscinduntur loci decimales; nempe numerus centuplo, millecuplo &c. adjectione augetur, vel ablatione minuitur.

His animadversis, in exemplo proposito, cum $365,25$ sit centuplo minor, quàm 36525 , erit etiam $365,25 \times 35$ centuplo minor, quàm 36525×35 . Præterea, cum etiam 3,5 sit decuplo minor, quàm 35, erit quoque

$365,25 \times 3,5$ decuplo minor, quàm $365,25 \times 35$; adeoque decies centuplo, hoc est, millecuplo minor, quàm 36525×35 . Cum igitur sit $1278375 = 36525 \times 35$, abscindendæ sunt linea separante tres ultimæ figuræ, ut numerus fiat millecuplo minor, nempe $1278,375 = 365,25 \times 3,5$, adeoque figura 8, quæ prius signi-

significabat tot millia, jam significat non nisi totidem unitates; & sic de reliquis. Quod erat &c.

30. *S* Implices termini algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros, & species in species; ac statuendo factum affirmativum, si ambo factores sint affirmativi, aut ambo negativi, & negativum, si secus.

Sic $2a$ in $3b$, vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$, vel $6ba$; nihil enim refert, quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$, vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$; & sic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$, sive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$; atque ita 3 in -4 facit -12 , & -3 in -4 facit 12 .

In multiplicatione simplicium terminorum sequentes Regulæ erunt observandæ.

I. Duas aut plures litteras invicem multiplicaturus scribes illas conjunctim sine signis additionis, aut multiplicationis, & designabis productum: ita multiplicaturus ab per ac scribes abc .

Regulæ multiplicationis algebraicæ.

II. Si litteris accedant numeri coefficientes, hos invicem multiplicabis, & litteras, ut in regula superiøre, conjunctim scribes, & designabis productum: ita multiplicaturus $2c$ per $3dd$, multiplicatis invicem coefficientibus, litterisque conjunctis scribes $6cdd$.

III.

III. Si quantitatibus similibus accedant exponentes, eas multiplicaturus, exponentem exponenti addes, & supra quantitatem notabis exponentium summam: ita multiplicaturus a^2 per a^3 scribes a^5 .

IV. Si quantitas positiva per positivam multiplicatur, quantitas prodit positiva: si negativa per negativam, quantitas prodit positiva; at, si quantitas positiva per negativam, vel negativa per positivam multiplicatur, quantitas prodit negativa. Hæc regula breviter sic exponitur: $+$ per $+$ facit $+$; $-$ per $-$ facit $+$; $+$ per $-$ facit $-$. Paucis: in multiplicatione signa eadem faciunt $+$, diversa faciunt $-$.

SCHOLIUM.

Cur $+$ in $+$ multiplicatum efficiat $+$, statim apparet; sed non æquè obvium videri solet Tyronibus, cur $+$ in $-$, vel $-$ in $+$ faciat $-$; & denique cur $-$ in $-$ faciat $+$. Utrumque hoc paradoxum, & a priori, ut ajunt, ex ipsa multiplicationis natura, & a posteriori exemplis adhibitis declarandum est.

Itaque multiplicatione supponitur quantitas multiplicanda toties poni, quoties multiplicator indicat, ut dictum est n. 7.; adeoque, qui quantitatem quamlibet, sive positivam, sive negativam multiplicat per $+$ 3, ille eandem quantitatem signis non mutatis ter

po-

ponit: qui per $+$ 2, bis ponit: qui per $+$ 1, semel tantum; qui verò per 0 multiplicat, ne semel quidem, sed nullies ponit; adeoque quantitas quælibet per 0 multiplicata evanescit. Qui autem per $-$ 1, $-$ 2, $-$ 3 &c. multiplicat, tot vicibus, inquit Wallisius, paucius, quàm nullies ponit, cum $-$ 1, $-$ 2, $-$ 3 sint minus nihilo; idest, revera toties tollit, uti diximus n. 5., & 21. de signis $+$, & $-$ contrario sensu exponendis. Qui verò tollit, ille tantundem ponit mutato signo, ut ex reg. subductionis. Quamobrem, qui multiplicat per 1, 2, 3 &c., vel alium quemvis multiplicatorem affirmativum, is quantitatem multiplicandam toties ponit servato signo; qui verò multiplicat per $-$ 1, $-$ 2, $-$ 3 &c., aut alium quemvis multiplicatorem negativum, ille quantitatem multiplicandam toties vel tollit, vel, quod idem est, sub contrario signo ponit: quod erat ostendendum; adeoque $A \times 2 = 2A$; $A \times -2 = -2A$; $-A \times 2 = -2A$; $-A \times -2 = +2A$; nempe $-A$ bis tollitur.

Hæc eadem signorum lex a posteriori, ut ajunt, declarari potest. Incipio a primo, in quo docemur signa dissimilia exhibere productum negativum. Itaque multiplicandum occurrat $a-b$ per d : non potest a multiplicari per d , quin productum ad sit majus justo quantitate bd ; nam a majus est, quàm $a-b$ quantitate b : ergo, dum multiplicas a per d , multiplicas etiam b involutum in a per eundem d :
ergo

Regula signorum.

Demonstratio.

ergo productum ad majus est producto, quod oriri debet ex multiplicatione $a - b$ per d , majus, inquam, tota quantitate bd . Quare, ut hæc quantitas bd , quæ redundat, subtrahatur, multiplicandum erit b per d , & productum subtrahendum ex ad , ut habeatur $ad - bd$ juxta regulam signorum.

In numeris res patet: multiplicare oportet $5 - 2$ per 6 : cum incipis multiplicare 5 per 6 , & scribis 30 , exhibes productum majus justo; & excessus est 12 ; cum enim multiplicandum esset non totum 5 per 6 , sed 5 multiplicatum binario, reipsa multiplicasti totum 5 per 6 , adeoque etiam quantitatem illam 2 , quæ fuisset subtrahenda ex 5 . Superest ergo, ut eam ipsam quantitatem 2 ducas iterum in 6 , eamque ex primo producto 30 subtrahas, & scribas juxta regulam signorum $5 - 2 \times 6 = 30 - 12 = 18$. Vides ergo perinde esse, siue quantitatem -2 subtrahas ante multiplicationem, siue etiam illam multiplices; sed deinde illius productum per multiplicatorem 6 subtrahas ex summa justo majore.

Quod ad secundum attinet, cur nempe $-$ in $-$ faciat $+$, eadem est ratio proportionem servata. Nam in multiplicationis producto ex quantitibus complexis, partim negativis, partim positivis plus subtrahitur, quam oporteat; adeoque excessus ille subtractionis restituendus est præfixo signo $+$ quantitibus negativis invicem multiplicatis. Ostendo idipsum in numeris, ubi res est manifestior: idem autem intel-

telliges in litteris, quæ sunt symbola numerorum. Sit multiplicandus $10 - 4$ per $10 - 4$: quia $10 - 4 = 6$, vides illico perinde id esse ac $6 \times 6 = 36$; sed, cum incipis multiplicare 10 in 10 , habes factum $= 100$, quod justo majus est quantitate 64 : rursum ergo multiplicans 10 per -4 , habes factum -40 ; tum iterum -4 in 10 , & aliud emergit factum -40 , quæ simul sumpta conficiunt -80 . Quare, cum ex 100 facto primo subtrahendum esset tantum 64 , hæc quantitas negativa -80 justo major est iterum excessu 16 .

Hac de causa multiplicando -4 per -4 , factum erit $+16$: hinc reducendo terminos, habes factum $100 - 40 - 40 + 16 = 36$.

31. **F**ractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores, ac denominatores in denominatores. Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2 \frac{a}{b}$ in $3 \frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, seu $6 \frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^2}{8b^4}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; & $\frac{a}{b} \times$ in $\frac{c}{d} \times x$ facit $\frac{ac}{bd} x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$, ut patet, si 3 reducaturs ad formam fractionis $\frac{3}{1}$, adhibendo unitatem pro denominatore; & sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota,

L. I.

E

quod

quod $\frac{ab}{c}$, & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$,
 $\frac{a}{c}bx$; nec non $\frac{a+b\sqrt{cx}}{a}$, & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$;
 & sic in aliis.

Fractionum theoria infra demonstrabitur.

32. **Q**uantitates radicales ejusdem denominationis, hoc est, si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ &c., multiplicantur ducendo terminos in se invicem sub eodem signo radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$; & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$; & $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit $\sqrt[3]{35aay'z}$; & $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$, hoc est, $\frac{a^2ab}{c}$; & $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$, hoc est, $6a^2abz$;
 & $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^2}{\sqrt{aacc}}$, hoc est, $\frac{-6x^2}{ac}$;
 & $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10cc}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70acc}$.

Demonstratio operationis deducitur ab hoc generali principio: si radices ejusdem generis in se invicem ductæ numerum producant, hic erit radix producti multiplicatione potestatum radicum ipsarum. Estoque quadratum aa , cujus radix a , & quadratum bb , cujus radix b : radices a , & b in se invicem ductæ producant ab radicem

dicem facti aa & bb multiplicatione potestatum radicum ipsarum. Sit cubus a^3 , cujus radix cubica a , & cubus c^3 , cujus radix c : exhibeatur hinc factum a^3c^3 multiplicatione potestatum; inde factum ac multiplicatione radicum: hoc factum erit radix cubica ipsius a^3c^3 ; atque ita de reliquis. In numeris sit quadratum 4, cujus radix 2, & quadratum 9, cujus radix 3: duc 4 in 9, & radicem 2 in 3: habebis hinc 36, inde 6, qui numerus est radix quadratica producti 36 multiplicatione potestatum.

Hinc habemus methodum multiplicandi radices, licet cognoscamus tantum earum potestates; nam multiplicando potestates generabitur potestas radices productæ ex multiplicatione radicum. Quamobrem in multiplicatione radicalium hæc esto regula: quantitates sub signis existentes inter se mutuo multiplicentur, productoque idem radicale signum præfigatur. Sic $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$ &c.

Hæc satis sit cursim indicasse; nam de calculo radicalium suus erit proprius agendi locus Cap. V.

33. **Q**uantitates pluribus partibus constantes multiplicantur ducendo singulas unius partes in singulas alterius, perinde ut in multiplicatione numerorum ostensum est. Sic $c - x$ in a facit $ac - ax$; & $aa + 2ac - bc$ in $a - b$ facit $a^3 + 2a^2ac - aab - 3bac + bbc$. Nam $aa + 2ac - bc$ in $-b$ facit $-aab - 2acb + bbc$, & in a facit $a^3 + 2aac - abc$, quorum

Multiplicatio radicalium ejusdem denominationis.

rum summa est $a^3 + 2aac - aab - 3abc + b$
 bc . Hujus multiplicationis specimen una cum
 aliis consimilibus exemplis subiectum habes.

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline -aab - 2abc + bbc \\ a^3 + 2aac - abc \\ \hline a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} yy + 2ay - \frac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline ayy + 2a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 * -3\frac{1}{2}aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2ax}{c} \vee \frac{a^3}{c} \\ 3a + \vee \frac{abb}{c} \\ \hline \frac{2ax}{c} \vee \frac{abb}{c} - \frac{aab}{c} \\ \frac{6aax}{c} - 3a \vee \frac{a^3}{c} \\ \hline \frac{6aax}{c} - 3a \vee \frac{a^3}{c} + \frac{2ax}{c} \vee \frac{abb}{c} - \frac{aab}{c} \end{array}$$

$$a+b$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+ab+bb \end{array} \quad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa * -bb \end{array}$$

APPENDIX.

Habet hoc Analysis præ cæteris singulare,
 ut theoremata, ac problemata, quæ lon-
 ga circuitione ope Geometriæ aliquando affe-
 quimur, ipsa facillimè perficiat subsidio æqua-
 tionum. Ut igitur hujus artis analyticæ speci-
 men quoddam rude nunc habeatur, & multi-
 plicationis algebraicæ acuatur exercitatio, bre-
 viter exponam demonstrationem totius ferè Ele-
 menti secundi Euclidis (cujus magnus usus est
 in operationibus analyticis) per simplicem ferè
 terminorum multiplicationem, & ex solo pa-
 rallelogrammi rectanguli calculo, uti dictum
 est n. 8.

AXIOMA.

SI æqualia multiplicentur per æqualia, aut
 per communem multiplicatorem, manet
 æqualitas. Specimen
calculi li-
teralis.

THEOREMA I.

SI fuerint duæ rectæ A , & B , quarum al-
 tera B fecetur in quotcunque partes, pu-
 ta,

ta, M, N, O , rectangulum duabus illis rectis comprehensum æquale est iis rectangulis, quæ sub insecta A , & singulis sectæ partibus M, N, O comprehenduntur.

Nam, si $B = M + N + O$, ergo per Ax. $AB = AM + AN + AO$: quod per multiplicationis calculo patet.

THEOREMA II.

Si recta linea A secetur utcumque in C , & D , duo rectangula sub tota A , & partibus C , & D comprehensa æquantur totius quadrato AA .

Hoc est, si $A = C + D$, ergo multiplicando utrumque membrum æquationis per eundem multiplicatorem A , erit per Ax. $AA = AC + AD$. Quod erat &c.

THEOREMA III.

Si recta A secetur utcumque in C , & D , rectangulum sub tota A , & uno segmentorum C comprehensum, idest, AC æquatur rectangulo CD segmentis comprehenso unà cum prædicti segmenti quadrato CC .

Hoc est, si $A = C + D$, multiplicando utrinque per C , erit per Ax. $AC = CC + CD$. Quod erat &c.

THEO.

THEOREMA IV.

Si recta A secetur utcumque in C , & D , erit quadratum totius æquale quadratis segmentorum unà cum rectangulo segmentis comprehenso bis sumpto.

Hoc est, si $A = C + D$, multiplicando per æqualia

$$\begin{array}{r} A = C + D \\ AA = CC + CD \\ \quad + CD + DD \\ \hline AA = CC + 2CD + DD \end{array}$$

THEOREMA V.

Si recta secetur in segmenta æqualia, & inæqualia, erit rectangulum sub inæqualibus partibus contentum unà cum quadrato differentię partis inæqualis ab æquali æquale quadrato dimidię.

Sint partes æquales a , & a : differentia inter partem æqualem, & inæqualem vocetur b : erit ergo inæqualium partium major $a + b$, minor $a - b$; & consequenter $a + b \times a - b = aa - bb$. Adde utrinque bb : erit $a + b \times a - b + bb = aa$. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Hinc quadratum dimidię minus quadrato intermedię, idest, differentię æquatur rectan-

E 4

rectangulo sub inæqualibus partibus contento; nam, si a postrema æquatione subtrahas utrinque quadratum differentię bb , erit $\overline{a+b} \times \overline{a-b} = aa - bb$. Quod erat &c.

COROLLARIUM II.

Quia $\overline{a+b}^2 = aa + 2ab + bb$, & $\overline{a-b}^2 = aa - 2ab + bb$ erit summa $= 2aa + 2bb$; idest, summa quadratorum partium inæqualium æqualis est duplo quadrato partis dimidię, & duplo quadrato differentię partis æqualis ab inæquali.

THEOREMA VI.

SI recta linea sit bifariam secta in a , & a , eique recta quædam adjiciatur c , erit rectangulum sub tota composita $2a+c$, & adjecta c contentum unâ cum quadrato dimidię aa æquale quadrato $a+c$ compositę ex dimidia, & adjecta.

Hoc est, $2\overline{a+c} \times c = 2ac + cc$ rectangulum sub tota composita, & adjecta; sed $\overline{a+c} = aa + 2ac + cc$: ergo differentia illius rectanguli ab hoc quadrato est aa ; itaque rectangulum sub tota composita, & adjecta $+aa = \overline{a+c}^2$ compositę ex dimidia, & adjecta.

THEO.

THEOREMA VII.

SI recta fuerit utcumque secta in duas partes a , & c , erunt quadrata totius $\overline{a+c}^2$, & segmenti alterutrius aa æqualia bis rectangulo contento sub tota $a+c$, & segmento dicto a unâ cum quadrato segmenti alterius cc .

Hoc est, quadratum totius $= aa + 2ac + cc$; quodd si addas aa , erit $2aa + 2ac + cc = 2a \times \overline{a+c} + cc$. Quod erat &c.

THEOREMA VIII.

SI recta z secetur utcumque in duas partes a , & c , rectangulum quater comprehensum a tota, & uno ex segmentis, puta $4az$ unâ cum quadrato reliqui segmenti cc æquatur quadrato compositę a tota $a+c$, & prædicto segmento a , idest, æquatur $\overline{2a+c}^2$.

Multiplicetur utrinque $z = a+c$
 $4az = 4aa + 4ac$
 Adde utrinque cc cc
 $4az + cc = 4aa + 4ac + cc$
 $= \overline{2a+c}^2$. Quod erat &c.

THEOREMA IX.

DEmonstratum est Corollario II. Theorematis V.

THEO.

THEOREMA X.

SI recta $2e$ secetur bifariam, eique recta quadam x in directum adjiciatur, quadratum compositæ ex tota, & adjecta $2e + x$, & quadratum adjectæ xx simul sumpta sunt dupla quadratorum dimidiæ ee , & compositæ ex dimidia, & adjecta, $e + x$.

Hoc est, $2e + x + x^2 = 4ee + 4ex + 2xx$ dupla quadratorum $2ee + 2ex + xx$. Quod erat &c.

Reliquæ, quæ supersunt, propositiones quatuor Elementi secundi litterali calculo pariter demonstrari possunt, sed assumptis in auxilium aliis principiis geometricis, a quibus in præsens abstinéo. Satis sit præsentī nostro instituto specimen in paucis exhibuisse.

DE DIVISIONE.

34. **D**ivisio in numeris instituitur, querendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratū, si opus est, quamdiu divisor auferri potest.

Sic ad dividendum 63 per 7, quære, quoties 7 continetur in 63, & emergent 9 pro quoto præcisè; adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige divisorem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris dividendi, proximè majoribus divisore, nempe in

37,

37, dic, quoties 7 continetur in 37? Resp. 5; tum scripto 5 in quoto, aufer 5×7 , seu 35 de 37, & restabit 2, cui adnecte ultimam figuram dividendi, nempe 1, & fit 21 reliqua pars dividendi, in qua proximum opus instituendum est. Dic itaque, ut 7) 371 (53 ante, quoties 7 continetur in 21? Resp. 3; quare scripto 3 in quoto, aufer 3×7 , seu 21 de 21, & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè, qui oritur ex divisione 371 per 7.

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47, dic, quoties 23 continetur in 47? Resp. 2; scribe ergo 2 in quoto, & de 47 subduc 2×23 , seu 46, restatque 1, cui subjunge proximum numerum dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque, quoties 23 continetur in 19? Resp. 0; quare scribe 0 in quoto; & de 19 subduc 0×23 , seu 0, & restat 19, cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò, quoties 23 continetur in 198 (id quod ex initialibus numeris 2, & 19 conjici potest, animadvertendo, quoties 2 continetur in 19)? Resp. 8; quare scribe 8 in quoto; & de 198 subduc 8×23 , seu 184, restabitque 14 adhuc dividendus per 23; adeoque quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quid si hujusmodi fractio minùs placeat, possis divisionem in fractionibus decimalibus ultra ad libitum prosequi, semper adnectendo

Etendo circulum numero residuo. Sic residuo 14 adnecte 0, fitque 140; tum dic, quoties 23 sit in 140? Resp. 6; scribe ergo 6 in quoto; & de 140 subduc 6×23 seu 138, & restabit 2, cui adnecte 0, ut ante; & sic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem quotus 208, 6086 &c.

$$\begin{array}{r}
 23) 4798 \text{ (208,6086 \&c.)} \\
 \underline{46} \\
 19 \\
 \underline{00} \\
 198 \\
 \underline{184} \\
 140 \\
 \underline{138} \\
 20 \\
 \underline{00} \\
 200 \\
 \underline{184} \\
 160
 \end{array}$$

Quid sit divisio, expositum est n. 11.

Demonstratio ex ipsa operationis serie liquet; nam, si modò exempli primi, aut secundi vestigia relegas, inuenies numerum inventum, idest, quotum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est, in singulis ejus partibus, atque adeo in toto dividendo contineatur. Itaque quotus unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem; ac proinde est quæsitus quotus ex def. n. 11. Quod erat &c.

SCHO-

SCHOLION I.

SI divisor sit simplex, unicà figurà notatus, & dividendus pariter sit divisoris decuplo minor, quotus inuenietur in ea, quam supra exhibui, multiplicationis, & divisionis tabellà. Nam invento in tabellæ summitate divisore, in eadem columna quæraturnumerus dividendus, vel saltem numerus, qui illic occurrit, dividendo proximè minor, & habebitur ad latus numerus in quotiente ponendus.

SCHOLION II.

SI divisor compositus sit, & pluribus notis constet, quò commodiùs Tyrones assequantur, quoties ille contineatur in notis dividendi, per partes erit procedendum; puta, si quæraturnumerus, quoties 32 reperiatur in 129, per partes inquiri, quoties 3 contineatur in 12: inuenio 4, ac pariter reliquam notam 2 divisoris quater contineri in reliqua 9 dividendi; ac proinde in quotiente scribo 4; atque ita de reliquis.

35. AD eundem modum fractio decimalis $3,5218$ per fractionem decimalem $46,1$ dividitur, & prodit $0,07639$ &c. Ubi nota, quòd in quoto tot figuræ pro decimalibus abscin-

abscindendæ sunt, quot sunt in ultimo dividuo plures, quàm in divisore: ut in hoc exemplo quinque, quia sex sunt in ultimo dividuo 0,004370, & una in divisore 46,1.

$$\begin{array}{r}
 46,1 \overline{) 3,5218} \quad (0,07639 \\
 \underline{322,7} \\
 2948 \\
 \underline{2766} \\
 1820 \\
 \underline{1383} \\
 4370
 \end{array}$$

Si partes decimales numeris integris annexæ sint, sive in dividendo, sive in divisore, sive in utroque, eadem omnino methodus observanda est, ac si essent numeri planè integri, modò illud tantùm curetur, ut operatione peracta tot sint partium decimalium loci in numero dividendo, quot in divisore simul atque quotiente; atque adeò *in quoto tot figuræ pro decimalibus abscindendæ sunt, quot sunt in ultimo dividuo plures, quàm in divisore.*

Divisio decimalium.

I. Si partium decimalium loci totidem sint in dividendo, quot in divisore, erit in quotiente nullus, ut 9,78) 66396,42 (6789.

II. Si nullus sit in divisore, tot erunt in quotiente, quot in dividendo, ut 978) 66396,42 (67,89.

III. Si pauciores in divisore, quàm in dividendo, tot erunt in quotiente, quot desiderantur in divisore.

IV. Si plures fuerint in divisore 0,56, quàm in dividendo 2,3, aliquot ciphris dividendo adjectis, uti 2,3000, loci decimales,

les, qui desunt, suppleantur, donec subductio fieri possit, & obtinebitur quotus 4, 10.

V. Si post peractam aliquam divisionem, ut supra in secundo exemplo, superfuerit aliquod residuum, licebit, additis dividendo post lineam separantem, quot opus est, ciphris, divisionem ulterius continuare: unde pro fractionibus ordinariis provenient partes decimales in quotiente.

Demonstratio harum operationum in partibus decimalibus per se patet, si modò, ut diximus de multiplicatione, advertatur lineæ separantis retractionem, aut promotionem singulis gradibus numerum decuplo vel diminuisse, vel augere.

APPENDIX.

36. **M**ultiplicatio, & divisio quantitatum ex pluribus speciebus, seu denominationibus aggregatarum non nisi hoc loco tradi poterat, quippe operatio una alteri intermixta est.

Incipienda est operatio ab infima, seu minima specie, & sic ad majores progrediendum, transmissio semper in superiores, quantum opus est.

Exemplo sit: Lib. Sol. Den.

$$\begin{array}{r}
 14 \cdot 10 \cdot 8 \\
 \underline{ 7} \\
 101 \cdot 14 \cdot 8
 \end{array}$$

nempe denarii $8 \times 7 = 56$; cum autem 12 denarii

Multiplicatio quantitatis plurimum denominationum.

denarii = 1 sol., erunt 56 den. = 4 sol. + 8 den.; ideoque subscriptis 8, reservo 4 sol. reliquis solidis mox annumerandos; tum solidi $10 \times 7 = 70$, quibus additis 4 huc transmissis fiunt 74; sunt autem 20 sol. = 1 lib.: ergo 74 sol. = 3 lib. + 14 sol.: ergo subscriptis 14 sol. reservo tres libras mox reliquis adjungendas: denique $14 \times 7 = 98$, quibus additis 3 fiunt 101 lib., quibus subscriptis exhibetur productum.

Reductio
plurium spe-
cierum ad
unam.

Si autem vel multiplicator sit numerus grandior, vel etiam ex pluribus denominationibus constet, expedit plerumque; aut etiam aliquando prope necessarium erit, quantitates illas plurium denominationum ad quantitates unius denominationis reducere; & tum demum multiplicationem perficere, qua peracta pristinæ, si opus erit, denominationes ope divisionis restitues.

Exemplo sit: solvere oporteat singulis 283 operariis 28 lib. 13 sol. 9 den.: quæritur quantum omnibus debebitur. Priusquam multiplicationem aggrediar, expedit totam monetæ propositæ summam ad unam denariorum denominationem reducere, quod ipsum multiplicatione peragitur hoc modo: lib. 28×20 sol. = 560 sol., quibus adjungendi 13 sol.; adeoque lib. $28 + 13$ sol. = 573 sol. $\times 12$ den. = 6876, quibus adde den. 9., habebis 28 lib. 13 sol. 9 den. = 6885 den. Multiplico 6885 per multiplicatorem propositum 283, & producuntur denarii 1948455.

De-

Denique, si velim intelligere, quot libraræ, & solidi in hoc denariorum numero continentur, restituentur illæ denominationes dividendo; nempe denariorum numerum 1948455 divido per 12, & prodeunt solidi 162371. 3 den.: solidorum numerum 162371 divido per 20, & prodeunt lib. 8118. 11 sol.; adeoque summa denariorum $1948455 = 8118$ lib. 11. sol. 3. den. summa quæsitæ.

Reductio.

Eadem ferè præstanda sunt de divisione, nisi quoddam hic potius a denominatione, seu specie suprema incipiendum est, & quod illic superest, ad proximè inferiorem reducendum.

Divisio
quantitatis
plurium de-
nominatio-
num.

Exemplo sit: Defuncti facultates 183 lib. 10 sol. 9. den. inter quatuor ipsius liberos sint æqualiter partiendæ: quæritur quantum cuique cedet?

I. Dividantur lib. 183 per 4, & habeantur quotus 45 cum residuis 3 libris.

II. Pro 3 lib. substituantur 60 solidi, & adjunctis 10 solidis in quæstione expositis habentur 70 sol., qui per 4 divisi quotum præbent 17 sol., & supersunt $2 = 24$ den., quibus si adjungantur 9, erunt 33, qui per 4 divisi quotum exhibent 8, cui propter 1 residuum, cum jam ad infimam speciem perventum sit, adjungo fractionem $\frac{1}{4}$; adeoque quotiens perfectus ex omnibus compositus est 45 lib. 17 sol. $8\frac{1}{4}$ den.

Possent etiam operatio institui more superius tradito, reducto primum tam dividendo, quam divisore ad unam denominationem.

L. I.

F

SCHO-

SCHOLIUM.

Multiplicationis per
divisionem
probatio.

Non instituuntur hæ probationes tanquam demonstrationes certitudinis regularum, juxta quas proceditur; nam de illis satis constat ex principiis, quibus innituntur; sed ad explorandum num quis error subrepperit. Et, quamquam posset etiam examen institui repetendo ipsam operationem, & ad regulam ubique exigendo, tamen illud felicius, monet Wallisius, ut plurimum instituitur, operationis formâ mutata; quippe hoc pacto minus est periculi in eundem errorem iterum incidendi.

Sicut additio per subtractionem, sic multiplicatio per divisionem examinari solet; quod enim multiplicatione conficitur, id divisione dissolvitur. Productum itaque dividatur per unum ex factoribus: si pro quoto proveniat factor alter, multiplicatio sine errore peracta est.

Divisionis
examen per
multiplicationem.

Rursum quotiens in divisorem ducatur: si productum æquale sit dividendo, rectè instituta fuit divisio; nam quod dividendo fuerat dissolutum, multiplicando iterum restituitur.

37. **I**N terminis algebraicis divisio fit resolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab divis. per a dat b pro quoto; $6ab$ divis. per $2a$ dat $3b$, & divis. per $-2a$ dat $-3b$; $-6ab$ divis. per $2a$ dat $-3b$, & divis. per $-2a$ dat $3b$; $16abc^3$ divis. per $2ac$ dat $8bcc$; $-84a^3x^4$ divis. per $-12a^2xx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ divis. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$; $\frac{ac}{bd}$ divis. per $\frac{a}{b}$ dat

$\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$; $\frac{-21accy^2}{8b^2}$ divis. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$; $\frac{6}{5}$ divis. per 3 dat $\frac{2}{5}$; & vicissim $\frac{6}{5}$ divis. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$, seu 3 ; $\frac{30a^3z}{cc}$ divis. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$, & vicissim divis. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ divis. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$; $\sqrt{abcd}$ divis. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$; $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$, seu a ; $\sqrt{35aay^2z}$ divis. per $\sqrt{5ayy}$ dat $\sqrt{7ayz}$; $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ divis. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$; $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ divis. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $a+b$ $\sqrt{ax}$ divis. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & vicissim divis. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$; & $\frac{a}{a+b}$ $\sqrt{ax}$ divis. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$, vel divis. per a dat $\frac{1}{a+b}$ $\sqrt{ax}$, sive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$, & vicissim divis. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a . Cæterum in hujusmodi resolutionibus omnino cavendum est, ut quantitates sint ejusdem ordinis, quæ ad invicem applicantur; nempe ut numeri applicantur ad numeros, species ad species, radicales ad radicales, numeratores fractionum ad numeratores, ac denominatores ad denominatores, nec non in numeratoribus, denominatoribus, & radicalibus quantitates cu-

jusque generis ad quantitates homogeneas.

Quod si quantitas dividenda nequeat sic per divisorem resolvi, sufficit, ubi ambæ quantitates sunt integræ, subscribere divisorem cum lineola interjecta. Sic ad dividendum ab per c scribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $a+b$ per c scribitur

$\frac{a+b}{c}$, vel $\frac{a+b}{c}$ per c scribitur

divis. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$, sive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$;

& $aa+ab$ per $aa-2xx$ divis. per $a-b$ $\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b} \sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$; & 12 $\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi verò fractæ sunt illæ quantitates, duc numeratorem dividendæ quantitatis in denominatorem divisoris, ac denominatorem in numeratorem, & factus prior erit numerator, ac posterior denominator quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$

scribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato scilicet a per d , & b

per c . Parique ratione $\frac{3}{7}$ divis. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$; &

$\frac{3a}{4c} \sqrt{ax}$ divis. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc} \sqrt{ax}$, divis.

autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$; &

ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ divis. per c (sive per $\frac{c}{1}$)

dat

dat $\frac{ad}{bc}$; & c (sive $\frac{c}{1}$) divis. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$; &

$\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$; & 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$;

& $\frac{a+b}{c} \sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac} \sqrt{cx}$; &

$a+b \sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a} \sqrt{cx}$; & 2

$\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{axx}{ccd}}$, div. au-

tem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$; & $\frac{1}{5} \sqrt{\frac{7}{11}}$ divis.

per $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5} \sqrt{\frac{49}{33}}$; & sic in aliis.

I. Si in dividendo factorum unus exprimat, qui sit divisor ipse, ex dividendo divisor ille deletur, & habetur quotus. Sic ab divisus per a dat b pro quotu; nam in omni divisione quæritur pro quotiente nova quantitas, quæ multiplicata in divisorem restituat dividendum; atqui multiplicato quotu b per divisorem a restituitur dividendus ab : itaque quantitas b est quotus quæsitus.

Divisio algebraica.

II. Si numeri tanquam coefficientes præfixi sint quantitatibus algebraicis, numeri per numeros, & litteræ per litteras dividuntur, & quotu litterali suis præfigitur quotus numericus. Sic $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$.

III. In divisione signa similia + & +, vel - & - faciunt +; dissimilia verò + & - faciunt -: hoc est, si quantitates tum di-

Leges signorum.

F 3

vifo-

visoris, tum dividendi ambæ sint positivæ, vel ambæ negativæ, quotus est positivus; sin autem altera positiva sit, altera negativa, quotus est negativus. Sic $6ab$ div. per $-2a$ dat $-3b$; & $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & $-6ab$ div. per $-2a$ dat $+3b$. Quod brevissimè sic demonstratur: in omni divisione, ut dictum est n. II., quæritur quotiens, qui per divisorem multiplicatus producat quantitatem dividendam; & propterea, ubi quantitatis dividendæ signum est $+$ affirmativum, signum quotientis idem erit atque divisoris; sin quantitatis dividendæ signum sit $-$ negativum, signum quotientis erit signo divisoris contrarium; cum enim divisoris in quotientem ducti productum æquale esse debeat quantitati dividendæ, non potest illud affirmativum esse, nisi factores signa habeant similia, nec negativum, nisi dissimilia, ut constat ex dictis de multiplicatione. Quod erat &c.

IV. Si dividere oporteat quantitatem complexam per incomplexam, deleatur successivè in omnibus partibus dividendi littera divisoris, si fieri possit, & habebitur pro quotientè quantitas complexa totidem partium, quot erant in dividendo, observatà ubique regulà signorum traditâ. Dividatur $aa - a'bc + a'c$ per divisorem $+aa$, vel $-aa$: quotiens erit $1 - abc + aac$, vel $-1 + abc - aac$; si verò in termino aliquo dividendi non reperiatur divisoris littera, quotus designabitur ad instar fractionis, ut alibi dictum est.

V. At

V. At si divisor, & dividendus plures contineant terminos, divisio ferè instituitur, ut in numeris, & his legibus operatio continetur. I. Sume ex divisore composito terminum primum, vel illum, quem magis idoneum judicabis ad divisionem peragendam. Hic erit unus divisor adhibendus in singulis operationibus, quo divide primum pariter dividendi membrum, neglectis reliquis, & quotum inventum notabis præfixo signo $+$, vel $-$, uti postulat regula signorum. II. Quotientem multiplica per divisorem, productumque subtrahere a toto dividendo, & facta terminorum reductione, notatoque residuo totius dividendi, absoluta erit prima pars hujus operationis. Circa hoc residuum simillima prorsus operatio, divisor idem, eademque methodus usurpanda in quoto inveniendò, subtractione faciendâ, & reductione terminorum; ac tandiu repetenda est eadem operatio circa residuum quodlibet, quandiu quantitas complexa dividenda vel sit penitus a divisore exhausta, vel relinquatur residuum, quod resolveri non possit; adeoque instar fractionis in quoto scribendum.

VI. Ut autem divisio algebraica ad eam formam, qua in divisione numerorum uti mos est, revocari commodè possit, monet Newton, terminos tum dividendæ quantitatis, tum divisoris juxta dimensiones litteræ alicujus, quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendos esse, ita nempe ut illi primum locum occupent, in quibus littera ista

F 4

est

Terminorum dispositio.

est plurium dimensionum, iique secundum, in quibus dimensiones ejus ad maximam proximæ sunt; & sic deinceps usque ad terminos, qui per hanc litteram non multiplicantur; adeoque ultimum locum occupabunt, uti factum est in superioribus exemplis.

VII. Observat præterea liberum esse tum a dextra, tum a sinistra divisionem inchoare, quandoquidem in hac mutatione, secus ac contingit in numeris, nullus ex diversa sede valor accedit signis, aut decedit; ac proinde liberum esse ex divisore composito sumere, quam libuerit, litteram ad dividendum, quæ tamen semel assumpta semper adhibetur, nec mutari potest.

VIII. Miraberis interdum, in quibusdam divisionibus, puta, $a^3 - b^3$ per $a - b$, prodire quotum $aa + 2ab + bb$ pluribus terminis compositum, quàm sit dividendus $a^3 - b^3$, quamvis potestas quoti sit uno gradu depresso. Hic casus non infrequens est in divisione: itaque ex multiplicationis, divisionisque notione repetenda est ratio. Omnis quantitas dividenda considerari potest instar producti ex divisore in quotientem; in hac autem multiplicatione quantitatis complexæ per aliam sæpe accidit, ut habeantur producta similia, quæ contrarietate signorum se se elidunt, & evanescunt: hinc summa totalis productorum non evanescentium reducitur ad pauciores terminos; cum verò divisio retexat id omne, quod multiplicatio composuerat, debet rursus in quotiente restituere termi-

terminos omnes, qui multiplicati in divisorem evanuerant propter contrarietatem signorum.

De reductione fractionum ad communem denominatorem.

38. **F**ractiones ad communem denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d , & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b , & evadent $\frac{ad}{bd}$, & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator bd . Atque ita a , & $\frac{ab}{c}$, sive $\frac{a}{1}$, & $\frac{ab}{c}$, evadunt $\frac{ac}{c}$, & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alterne per quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$, & $\frac{a^3}{bd}$ ad hasce $\frac{a^3 d}{bcd}$, & $\frac{a^3 c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alterne per quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b .

Hæc autem reductio præcipue usui est in additione, & subtractione fractionum, quæ, si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt, antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per

redu-

reductionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad+bc}{bd}$; & $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$; & $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d - a^3c}{bcd}$, vel $\frac{d-c}{bcd} a^3$; & $\frac{c^2+x^2}{cc-xx} - cc-xx$ evadit $\frac{2x^2}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$, sive $\frac{14+15}{21}$, hoc est, $\frac{29}{21}$; & $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$, sive $\frac{13}{12}$; & $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$, sive $\frac{4}{12}$, hoc est, $\frac{1}{3}$; & $3\frac{4}{7}$, sive $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$, evadit $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$, sive $\frac{25}{7}$; & $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones, ubi plures sunt, gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{a-x}$, ab $\frac{aa}{x}$ aufer a, & restabit $\frac{aa-ax}{x}$: huic adde $\frac{2xx}{3a}$, & prodibit $\frac{3a^2 - 3aax + 2x^2}{3ax}$; unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$, & restabit $\frac{3a^2 - 6a^2x + 2ax^2 - 2x^2}{3aax - 3axx}$. Atque ita, si habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum est, nempe $\frac{25}{7}$; dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$, & restabit $\frac{61}{21}$.

CA-

CAPUT TERTIUM.

De Algorithmo fractionum.

IN omni, quæ vel per numeros, vel per species instituitur, supputandi ratione, fractiones ita sese calculo ingerunt, ut illas variis subinde modis, & reductionibus versare oporteat: quæ res Tyronibus præsertim non exercitatis solet esse molestissima. Hæc me causa impulit, ut quæ a Newtono alibi sparsum indicantur potius, quàm demonstrantur circa fractionum operationes, eadem a primis principiis hoc loco ponerem, & explanarem, quò facilius fractionum theoriam, qui velit, intelligat, eamque exercitatione assequatur. Quare, posteaquam hæc rite Tyrones perceperint, poterunt rursus ad fractionum exempla Newtoniana digredi, atque eadem inoffenso pede percurrere, selecta illa quidem, & quæ in singulis operationibus additionis, multiplicationis &c. casus ferè omnes complectuntur.

SYNOPSIS.

FRACTI ab integris re non differunt. Fractiones sunt totidem quotientes numeratoris per denominatorem divisi. Fractionum etiam irrationalium explicatio universalior: hinc rationum, & fractionum affinitas. Valor fractionum quomodo æstimandus. Reductio fractionum vel ad datum, vel ad communem denominatorem.

nominatorem etiam minimum. Inventio divisorum. Inventio minimorum datis numeris proportionalium. De calculo fractionum tum numerico, tum litterali. Numeratoris multiplicatio multiplicat, divisio dividit fractionem: denominatoris multiplicatio dividit, divisio multiplicat fractionem. De fractionibus fractionum reducendis. Reductio sexagesimalium ad partes decimales, vel ad fractiones communes. Decimalium usus, quàm sexagesimalium expeditior.

DEFINITIONES.

39. **E**X definitione tradita n. 20. illud consequitur, quod ad fractorum naturam penitus intelligendam maximè conducit, fractos ab integris numeris quò ad rem non differre. Ea sola differentia est, inquit P. Tacquet lib. 11. Arithm., quòd fracti designent res, quæ sint partes rerum ab integris numeris designatarum; ac proinde quòd unitates fracti numeri sint relativæ; integri verò numeri unitates sint absolutæ. Hæc a Tyronibus animadverti multum interest; ideo enim præcipuè illis fractorum numerorum tractatio difficilis, & obscura videri solet, quia prius ad operationes fractorum, regulæque progrediuntur, quàm illorum naturam bene perspexerint.

Fractionum
definitio u-
niversalior.

Verum universalior fractionum origo, quod n. 10. jam innuimus, ex divisione adhuc est repetenda; neque fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$ quidquam

quam aliud sunt, quàm totidem quotientes numerorum 2, 3, 4 per numerum 3 divisorum, quemadmodum nuper, cum divisio traderetur, est dictum. Sicut ex imperfecta, five etiam impossibili subtractione, ut Wallisus acutè notat cap. 41. Arithm., oriuntur numeri negativi $1 - 2$, $2 - 3$ &c., ita ex imperfecta, five etiam impossibili divisione oriuntur numeri fracti $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$ &c., sicut etiam ex imperfecta, impossibilique radicum extractione oriuntur numeri surdi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ut post dicetur. Fractio itaque est divisionis indicium, ac designat quotientem numeratoris per denominatorem divisi. In terminis algebraicis, quia quantitas $2ax$ dividi nequit per 6, fit quotiens hujus divisionis $\frac{2ax}{6}$.

Fractiones
designant
divisionum
quotientes.

40. **D**Enique Wallisio, cæterisque Analyttis multò universalius provehere adhuc placuit notionem fractionum. Cum enim, inquit ille loco cit., arithmeticae fractiones æmulentur continui geometricas divisiones, quæ non semper sunt in partes racionales, sed sæpe numero irrationales, ut huic incommodo occurratur, tertius adhuc fractiones explicandi modus prioribus universalior tradi potest. Cum enim fractio, puta, $\frac{2}{3}$ indicet unius integri in tres partes æquales secti partes duas, manifestum est, hac fractione indicari eam integri partem, quæ ad integrum illud eandem habeat rationem, quam 2 ad 3. Dico itaque *fractio-*
ne

Fractionum
explicatio
tertia, quæ
irrationali-
bus etiam
conveniat.

ne eam indicari unius alicujus integri, vel datæ quantitatis partem, quæ ad totum habeat illam rationem, quam habet fractionis numerator ad denominatorem; ex. g. si dicamus circuli radium esse $\frac{1}{2}$ diametri, tantundem est, ac si diceremus, circuli radium esse eam diametri partem, quæ ad totam habeat rationem 1 ad 2. Pariter, cum latus quadrati esse dicimus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ diagonii, perinde est, ac si diceremus, latus quadrati tantum esse, ut ad illius diagonium rationem habeat 1 ad $\sqrt{2}$. Similiter quadrati ambitum esse $\frac{4}{\sqrt{2}}$ diagonii, perinde est, atque ambitum quadrati tantum esse, ut ad ipsius diagonium rationem habeat 4 ad $\sqrt{2}$. Quo pacto satis commodè exponuntur fractiones illæ irrationales, licet neque juxta def. primam n. 20, neque etiam juxta secundam commodè dici possit vel 1, vel 4 diagonia in $\sqrt{2}$ partes æquales dividi, quò earum una assumatur. Atque eodem modo, sumptis duobus vel numeris, vel lineis, vel aliis quibuscvis quantitatibus invicem homogeneis a , b , fractio $\frac{a}{b}$, vel $\frac{a}{b} d$ designat, quòd ad unum integrum, vel datam aliquam quantitatem d , eam rationem habeat, quam habet a ad b , sive ea sit ratio rationalis, sive, ut vocant, irrationalis. Hæc, quæ longiore fortasse circuitu ad fractorum naturam penitus explorandam altius deprompta videri possent, mirificè

con-

conferunt ad facilitatem, brevitatemque theorematum, quæ a præmissis definitionibus tanquam Corollaria sponte fluunt.

COROLLARIUM I.

41. **H**inc patet rationum, fractionum, quotientum sive identitas, sive affinitas maxima, ut clariùs etiam constabit, ubi de natura proportionis agendum erit, cum omnino perinde sit, sive dicamus $\frac{3}{4}$ indicare unius integri tres quadrantes juxta primam fractionis notionem; sive trium integrorum quadrantem unum, aut numeri 3 per 4 divisi quotientem, quæ est definitio secunda; sive denique rationem 3 ad 4, aut eam integri portionem, quæ ad totum eam rationem habeat, qui est tertius explicandi modus. Quare unà, eademque operà tum fractionem, tum divisionis quotientem, tum rationem, vel saltem rationis denominatorem designavimus.

Fractionum, & rationum affinitas.

COROLLARIUM II.

Si numerator est æqualis denominatori, fractio $\frac{1}{1}$ æquivaleret integro, seu unitati: Si minor, fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro: Si major, fractio $\frac{5}{4}$ integro, seu unitate major est.

Fractiones propriæ integro minores.

SCHOLIUM I.

Fractiones integro æquales, vel eodem majores dicuntur vulgò fractiones improprie.

SCHO-

SCHOLIUM II.

Quilibet numerus, aut quantitas quælibet algebraica in formam fractionis exprimi potest, subscribendo ei pro denominatore unitatem; nam divisio per 1 neutiquam immutat divisi quantitatem: sic $3 = \frac{3}{1}$; $ab = \frac{ab}{1}$.

COROLLARIUM III.

Fractiones, in quibus ratio numeratoris ad denominatorem est eadem, sunt inter se æquales, & e converso. Hinc eadem quoad valorem fractio plurimis potest, & quidem infinitis modis designari; nam $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$ &c., quia eadem in singulis numeratoris ad denominatorem ratio, quæ est 1 ad 2. Quod quidem non de numeris tantum, sed de quibusvis etiam quantitatibus homogeneis, quæ symbolis designantur, intelligi velim.

COROLLARIUM IV.

Valor fractionum.
Quomodo
augeatur,
aut minuat.

ITaque valor fractionum non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, sed ex proportionem eorundem æstimandus est.

COROLLARIUM V.

Hinc fractio illa major est altera, cum numerator ad denominatorem habet majorem

jorem rationem, quàm alterius numerator ad denominatorem suum; sic $\frac{8}{16} > \frac{2}{6}$.

COROLLARIUM VI.

SI datæ fractionis tam numerator, quàm denominator per eandem quantitatem vel multiplicentur, vel dividantur, fractionis valor non mutabitur; erit enim adhuc eadem ratio numeratoris ad denominatorem: sic $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$
 $= \frac{acd}{bcd}$ &c.

SCHOLIUM.

NOtandum ad fractiones pertinere numeros illos, qui a nonnullis vocantur denominati, quibus reipsa non aliud indicatur, nisi certus numerus talium quarundam partium, quibus jam certum nomen impositum est; ut cum scribuntur libræ, solidi, ac denarii: ubi solidus nihil aliud est, nisi una pars vigesima libræ, & denominator ejusmodi, quamvis non scribatur, ubique subintelligitur ex cognita ratione solidi ad libram. Similiter denarius nil aliud est, nisi $\frac{1}{12}$ solidi; atque id genus alia plurima in monetis, ponderibus, & mensuris passim occurrunt.

De fractionum reductionibus.

42. **C**um eadem quoad valorem fractio plurimis modis designari possit, ut dictum est Coroll. III., expedit nonnunquam ex una in aliam formam fractiones transmutare, variasque illarum reductiones instituire, quarum præcipuas hinc complector.

PROBLEMA I.

Fractionem impropiam ad integrum, vel ad integrum cum fracto reducere.

Reductio
fractionis
ad integrū.

Dividatur numerator per denominatorem: quotiens dabit quæsitum. Reducenda sit fractio $\frac{27}{9}$: diviso 27 per 9 prodit $3 = \frac{27}{9}$: sic $\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$; & $\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$.

Similiter in speciosa fractio $\frac{abc}{c} = ab$; & $\frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a}$ &c. Demonstratio consequitur ex def. fractionis, quæ cum non sit nisi divisionis imperfectæ indicium, divisio illa actu præstita idipsum efficit, quod fractio indicabat faciendum.

SCHOLIUM.

Notandum hac ratione solidos in libras, & uncias pariter in libras, digitosque in pedes reduci &c.

PRO-

PROBLEMA II.

Numerum integrum quemlibet, vel integrum cum fracto in fractionem datæ denominationis convertere.

Integer propositus per datum denominatorem multiplicetur, & producto ut numeratori subscribatur datus denominator. Sic $2 = \frac{6}{3}$, &

Ad datum
denomina-
torem.

$3 = \frac{12}{4}$, quia nempe $2 \times 3 = 6$, & $3 \times 4 = 12$.

Similiter $1\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$; $6\frac{1}{3} = \frac{18}{3} + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$ &c.

In speciosa $a = \frac{ab}{b}$; & $3a + \frac{b}{c} = \frac{3ac + b}{c}$.

Hæc reductio non raro usui est, præsertim in addendis, subducendis, & comparandis hisce numeris, vel symbolis fractionibus immixtis. Sicut e contra fractionis impropiæ ad numerum integrum, mixtumque reductio ad earundem æstimationem facilius, & clariùs mente assequendam conducit.

Notandum hac ratione libras in solidos, perticas in pedes resolvi &c.

PROBLEMA III.

Fractiones non cognomines ad alias invicem cognomines, & datis æquales reducere.

Sint duæ fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ad eundem denominatorem reducendæ. Fractionis primæ $\frac{2}{3}$ numerator, tum denominator ducantur

Ad commu-
nem deno-
minatorem.

G 2

in

in denominatorem secundæ: fiet $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ per Coroll. VI. Similiter alterius fractionis tum numerator, tum denominator multiplicentur per denominatorem primæ: fiet $\frac{2}{15} = \frac{2}{15}$ per idem Coroll., eritque jam ex constructione idem utriusque denominator; cum enim utrobique fractionis uterque terminus per communem multiplicatorem multiplicetur, terminorum ad invicem ratio non mutatur per Coroll. VI.

Similiter in speciosa reducendæ sint $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$:

erunt reductæ $\frac{ad}{bd}, \frac{cb}{bd}$ &c.

Atque eadem methodo utendum est, si plures quotcunque fractiones occurrant ad communem denominatorem reducendæ; nempe singularum tum numeratorem, tum denominatorem in reliquarum omnium denominatores continuè multiplicando: sic $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ reducuntur ad $\frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{12}{30}$; nam $1 \times 3 \times 5 = 15$, & $2 \times 3 \times 5 = 30$; adeoque $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$; atque ita porro de reliquis.

Pariter in symbolis $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ reducuntur ad hæc $\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}$, quæ tum datis sunt singillatim æquales ex Coroll. VI., & invicem cognomines.

SCHO-

SCHOLION.

43. **O**pportunè monet Wallisius cap. 42. Arith., minorem nonnunquam denominatorem communem assumi posse, quàm qui hoc pacto ex datorum denominatorum omnium continuo ductu emergit; nempe quoties denominatores dati non sunt inter se primi, hoc est, in eadem ratione minimi, sed communem aliquem divisorem admittunt. Sic fractiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, quæ reduci possunt non modò ad communem denominatorem $8 = 2 \times 4$; atque adeo ad $\frac{4}{8}, \frac{2}{8}$; sed etiam ad minorem 4, puta, $\frac{2}{4}, \frac{1}{4}$; cujus rei causa est, quòd denominatores dati 2, 4 non sunt numeri inter se primi, sive in eadem ratione minimi; sed uterque per communem divisorem 2 præcisè dividi potest. Sic fractiones duæ $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$ reduci possunt non modò ad $\frac{21}{36}, \frac{12}{36}$; sed etiam ad $\frac{7}{12}, \frac{4}{12}$, quia tum 12, tum 3 communem admittunt divisorem 3.

Pariter in symbolis $\frac{a}{bc}, \frac{e}{c}$ reducuntur non modò ad $\frac{ac}{bcc}, \frac{ebc}{bcc}$; sed etiam ad $\frac{a}{bc}, \frac{eb}{bc}$, quia nempe tum bc , tum c communem admittunt divisorem c .

Huc respicit Newtoniana regula: *ubi verò denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per quotientes*; hoc est, datorum fractionum denominatores per maxi-

Ad communem denominatorem minimum.

G 3

mum

num communem divisorem dividantur, & per alternos quotientes multiplicentur utriusque uterque terminus, & prodibunt termini fractionum cognominum datis æqualium, quæ non modò ad communem aliquem denominatorem, sed ad communem denominatorem minimum reductæ sint.

EXEMPL. Si fractionum $\frac{1}{6}$, & $\frac{3}{4}$ denominatores 6, 4 per communem maximum divisorem 2 dividantur, prodibunt quotientes 3, 2: si autem per posteriorem 2 multiplicentur fractionis prioris uterque terminus, prodibit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Pariter, si per quotientem priorem 3 multiplicentur posterioris fractionis terminus uterque, prodibit fractio $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; adeoque pro datis $\frac{1}{6}$, & $\frac{3}{4}$ habentur æquales minimæ cognomines $\frac{2}{12}$, & $\frac{3}{12}$: eodem modo pro $\frac{7}{12}$, & $\frac{1}{3}$ habentur minimæ cognomines istis æquales $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{12}$; & sic de reliquis.

In symbolis eodem modo operaberis: sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$, & $\frac{a^3}{bd}$ ad hæc $\frac{a^3d}{bcd}$, & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per quotientes c , & d ortos ex divisione denominatorum per communem divisorem b .

Sed neque hoc semper fit, inquit Wallis; sunt enim non rarò denominatores dati inter se primi, neque etiam tanti est, ut minimum semper denominatorem communem prima vice investigemus; sed potius, si opus sit, fractionum tandem summa, vel differentia ad minimos terminos reducatur; uti deinceps præstabimus Probl. IV.

LEM.

LEMMA I.

Duorum aut plurium numerorum maximum communem divisorem invenire.

44. **S**int primò duo tantum numeri: major per minorem dividatur, & nulla quotientis habita ratione, per residuum, si quod fuerit, dividatur, qui fuit divisor; & sic deinceps, quò ad usque divisio aliqua contingat, ex qua nullum sit residuum. Primus ejusmodi divisor, per quem divisio fiet sine reliquo, erit maximus communis divisor quæsitus. Quòd si in eo processu nunquam sistatur, nisi ubi ad unitatem ventum fuerit, erunt propositi numeri inter se primi. Constat ex 1. septimi elem.

Inventio
divisoris.

EXEMPL. Propositi sint numeri 75, 30: diviso 75 per 30 supersunt 15: diviso 30 per hoc residuum, nihil superest: est igitur 15 maxima mensura communis, seu maximus divisor.

Si tres fuerint numeri, inveniatur prius duorum quorumlibet ex illis maximus communis divisor; tum hujus inventi divisoris, & reliqui ex propositis numeris inveniatur rursus maximus communis divisor: hic erit maximus communis divisor trium propositorum numerorum, ut constat ex 3. septimi elem.; eodemque modo inveniatur maximus communis divisor, si plures adhuc sint numeri. Hæc au-

G 4

tem

tem omnia intelligenda sunt de numeris integris, & divisoribus pariter integris.

In speciosa, si quantitates propositæ sint incomplexæ, maximus divisor primo intuituprehenditur ex litteris, quæ omnibus quantitatibus propositis communes sunt: sic abc , & $abde$ maximus communis divisor est ab .

Ubi autem propositæ quantitates complexæ sunt, dicemus alibi, ubi de inventionedivisorum.

SCHOLI ON.

IN lineis communis maxima mensura invenitur per mutuam earundem a se invicem subtractionem, ut constat ex 2. septimi elem.: in numeris autem brevitatis gratiã divisio subtractioni substituitur.

LEMMA II.

*Duobus aut pluribus datis numeris minimos
ipsis proportionales invenire.*

INveniatur per Lemma præced. propositorum numerorum maximus communis divisor; tum per eum singuli dividantur: quotientes erunt numeri proportionales quæsit; intellige in numeris integris. Constat ex Coroll. VI., & ex 35 septimi Elem.

EXEMPL. Dati sint numeri 15, 35, 60: quærat maxima communis mensura: invenietur

Inventio
minimerũ
proportio-
nalem.

nietur numerus 5, per quem diviso 15 pro-
dit 3; diviso 35 prodit 7; diviso 60 prodit 12:
quare 3, 7, 12 sunt minimi quæsit. Quod si
nulla alia communis mensura inveniatur præ-
ter unitatem, tum ipsi propositi numeri erunt
omnium in eadem proportionem minimi.

Idem proportionaliter locum habet in spe-
ciosa, modò nota sit methodus inveniendi ma-
ximum communem divisorem quantitatũ sim-
plicium, & complexarum.

PROBLEMA IV.

*Datam fractionem ad minimos terminos
reducere; hoc est, datæ fractioni
aliã æqualem exhibere in
minimis terminis.*

45. **D**atæ fractionis $\frac{a}{b}$ numeratori a , & de-
nominatori b inveniantur per Lemma II. mini-
mi proportionales, ex quibus fiat fractio $\frac{c}{d}$:
dico factum; cum enim ex constructione c sit
ad d , ut a ad b , erit per def. 6. $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; cum-
que c , & d sint ex constructione omnium sibi
proportionalium minimi, erit fractio $\frac{c}{d}$ in mi-
nimis terminis.

Reductio
ad minimos
terminos.

EXEMPL. Sit data fractio $\frac{18}{81}$: quæro mini-
mos in ratione 18 ad 81, & invenio 2 ad 9:
quare $\frac{2}{9} = \frac{18}{81}$.

SCHO-

SCHOLIION I.

Numeri, qui fractionem exprimunt, quò majores sunt, ed etiam majorem difficultatem afferunt in cognoscenda ratione numeratoris ad denominatorem; cum enim scribitur, puta, $\frac{3}{4}$, statim constat fractionem hanc valere tres quadrantibus unius integri. At verò, si eadem fractio majoribus numeris exprimatur, $\frac{72}{96}$, sive $\frac{216}{288}$, non ita facilè decerni potest valor fractionis, nisi rursus ad minores, aut etiam minimos terminos revocetur.

SCHOLIION II.

Eadem methodo fractiones analyticae ad simpliciorum expressionem revocantur, invento communi divisore. Ita $\frac{a^3 b b}{a c} = \frac{a a b b}{c}$;

$$\& \frac{a b^3}{a b c} = \frac{b b}{c} \& c.$$

PROBLEMA V.

Duas pluresve fractiones ejusdem nominis ad minimos terminos ita reducere, ut cognomines maneant.

Inveniatur per Lemma I. denominatoris communis, & numeratorum maxima communis mensura: hæc singularum fractionum tum nume-

numeratorem, tum denominatorem dividens dabit fractiones quæsitæ; quòd enim fractionis valor non mutetur, constat ex Coroll. VI.: quòd maneant cognomines, constat ex constructione: quòd sint in minimis terminis, prout exigitur, constat ex Lemmate II.

EXEMPL. Datæ sint fractiones $\frac{6}{48}$, $\frac{18}{48}$, $\frac{30}{48}$: quæro maximam mensuram ipsorum 6, 18, 30, & 48, & invenio 6, per quem dividendo, ut præscribitur, prodeunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ fractiones quæsitæ.

PROBLEMA VI.

Fractorum, & mixtorum additio.

46. I. **S**i fracti addendi sint ejusdem denominationis, fiat summa numeratorum, retento communi, qui prius erat, denominatore. Sic, si addendæ sint fractiones $\frac{2}{6}$, & $\frac{3}{6}$, prodibit summa $\frac{5}{6}$: ratio evidens est; quippe numeri 2, & 3 simul additi constituunt 5, quæcunque res illæ sint, quæ numerantur, sive integræ, sive partes; nam perinde 2, & 3 semisses conficiunt 5 semisses; 2, & 3 sextantes 5 sextantes; & sic de reliquis.

II. Si fracti diversos habent denominatores, ad eundem reducendi sunt per Probl. III., antequam addantur; atque ita $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$, sive $\frac{29}{21}$: sic etiam $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad + bc}{bd}$.

III.

III. Si numero integro sit fractio addenda, vel integro in directum adjiciatur, vel integro ad fractionem ejusdem denominationis reducto per Probl. II. fiat additio, ut supra. Itaque, si numero 3 addenda sit fractio $\frac{2}{5}$, potest quidem id fieri non mutatis terminis: sic $3 + \frac{2}{5}$, vel etiam $3\frac{2}{5}$; sed etiam, quod nonnunquam fieri convenit, reducto integro ad fractionem impropriad ejusdem denominationis: sic $\frac{3}{1} = 3$ per Schol. II. Coroll. II.; adeoque $\frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.

IV. Si mixti mixtis addendi sint, (mixtos autem voco integros cum fractis adherentibus) fiat seorsim summa fractorum, & seorsim summa integrorum: summa ex fractorum additione collecta ad integrum reducatur per Probl. I.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r} 10 \frac{2}{5} \\ 9 \frac{4}{5} \\ 14 \frac{3}{5} \\ \hline \text{Summa } 34 \frac{4}{5} \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} 15 \frac{5}{6} = 15 \frac{300}{360} \\ 18 \frac{3}{4} = 18 \frac{270}{360} \\ 12 \frac{2}{3} = 12 \frac{240}{360} \\ 20 \frac{4}{5} = 20 \frac{288}{360} \\ \hline \text{Summa } 68 \frac{1}{20} \end{array}$$

nempe in secundo exemplo fractiones non cognomines revocentur ad eundem denominatorem 360 per Probl. III. Fiat omnium numeratorem

torum summa 1098: hæc dividatur per communem denominatorem 360: quotiens dabit 3 integris addenda per Probl. I., & præterea fractionem $\frac{18}{360}$: hæc per Probl. IV. revocetur

ad minimos terminos: erit $\frac{1}{20} = \frac{18}{360}$.

Fractiones analyticae eodem modo adduntur, observata lege signorum +, & -: sic $\frac{11ax}{b}$, & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $+\frac{7ax}{b}$; & $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$; & $\frac{a^2}{bc} - \frac{a^2}{bd}$ evadit multiplicando alternè per quotientes $\frac{a^2d-a^2c}{bcd}$, ut dictum est Schol. Probl. III.

PROBLEMA VII.

Fractorum, & mixtorum subductio.

47. I. SI fractus a fracto subducendus sit, reducantur ambo ad eandem denominationem, nisi jam sint cognomines; tum numerator a numeratore subducatur, servato denominatore. Atque ita $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ evadit $\frac{44}{24} - \frac{18}{24} = \frac{22}{12} - \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$: pariter $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ per Probl. IV.

II. Si a numero, vel quantitate integra sub-

subtrahenda sit fractio, reducatur per Probl. II. quantitas integra ad fractionem ejusdem nominis; tum fiat subtractio, ut in primo casu.

Sic $3 - \frac{4}{7} = \frac{21}{7} - \frac{4}{7} = \frac{17}{7} = 2 \frac{3}{7}$; atque etiam

$$a - \frac{bb}{c} = \frac{ac - bb}{c}.$$

III. Si ex fractione aliqua subtrahenda sit quantitas integra, eodem modo operaberis: ita

$$\frac{bb}{c} - a = \frac{bb - ac}{c}.$$

IV. Si fractus subducendus sit a mixto, vel mixtus a mixto, reducantur ad fractionem cognominem; tum fiat subductio, ut in primo casu.

SCHOLION.

IN subtractione mixtorum, siquando contingat, ut numerator fractionis subtrahendæ major sit numeratore fractionis alterius, solent Arithmetici, ut fractio subtrahi possit, assumere unam unitatem ex integro, quæ in fractionem subtrahendæ cognominem convertitur: hinc unitate illa minuendus est integer, ex quo abducta fuit. Oporteat ex 3 auferre $\frac{2}{5}$; pro tribus integris substituatur vel $\frac{15}{5}$, vel etiam, juxta praxim, quam passim usurpant Arithmetici, fiat $3 = 2 \frac{5}{5}$, & facta subductione erit

$$3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} = 2 \frac{3}{5}; \text{ vel etiam } 3 - \frac{2}{5} = 2 + \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = 2 \frac{3}{5}.$$

Sic

Sic in sequenti exemplo, quia numerator

7 a numeratore 5 subtrahi non potest, assumatur ex integro 25 unitas una, quæ in fractionem cognominem convertatur, nempe $\frac{2}{9}$: fiat

$$\begin{array}{r} 25 \frac{5}{9} \\ 14 \frac{7}{9} \\ \hline 10 \frac{7}{9} \end{array}$$

$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{14}{9} - \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$; tum subtra-

hatur 14 ex 24.

Si fractiones adjectæ integris non sint cognomines, reducantur ad communem denominatorem $\frac{20}{32}$, &

$$\begin{array}{r} 36 \frac{5}{8} \\ 17 \frac{3}{4} \\ \hline 18 \frac{28}{32}, \text{ seu } 18 \frac{7}{8} \end{array}$$

PROBLEMA VIII.

Fractionum multiplicatio.

48. **S**I numerus fractus per integrum multiplicandus sit, nihil hic difficultatis inest; quippe id sola numeratoris multiplicatione peragitur. Sic $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$; nam bis duo sunt quatuor, quæcunque demum ea sint, quæ numerantur, sive integra, sive partes.

Si fractio per fractionem sit multiplicanda, ducatur numerator unius in numeratorem, & de-

& denominator unius in denominatorem alterius, & priori producto subscribatur posterius.

Sic $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; atque ita $\frac{ab}{c} \times \frac{bd}{m} = \frac{ab^2d}{cm}$.

Demonstratio in secundo casu elicitur ex ipsa operationis serie, quæ nonnisi duabus operationibus distinctis absolvitur; nempe, postquam per dati multiplicatoris numeratorem tanquam per numerum integrum fuerit multiplicata fractio, quantitas inde prodians iusto major rursus per dati multiplicatoris denominatorem contraria operatione afficienda est, ut habeatur verum productum quæsitum; quippe hæc posterior operatio quasi corrigit priorem, quæ numeratorem fractionis, tanquam si esset numerus integer, assumpserat.

Sic, si multiplicetur $\frac{2}{3}$ in 2, prodibit $\frac{4}{3}$; at, si in $\frac{2}{3}$, nempe prioris multiplicatoris trientem, prodibit $\frac{4}{9}$, nempe prioris producti triens; ratio satis patet; nam qui multiplicat per 2, quærit duplum; at qui multiplicat per $\frac{2}{3}$, quærit dupli trientem; adeoque quod ex duplicatione prodit, est trifecandum, ut habeatur dupli triens: sic $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

PROBLEMA IX.

Fractionum divisio.

49. **S**I fractio per fractionem sit dividenda, numerator dividendi multiplicatus per deno-

denominatorem divisoris dabit numeratorem: denominator dividendi multiplicatus per numeratorem divisoris dabit denominatorem. Sit dividenda $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$: quotiens erit $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$. Regula hæc pro divisione ad memoriam juvandam commodius sic proponitur: divisor invertatur, numeratore in denominatorem mutato, & vicissim denominatore in numeratorem; tum per divisorem sic inversum multiplicetur dividendus juxta regulam Probl. VIII.: qui inde oritur, erit quotiens quæsitus. Operatio eadem est, ut conferenti patet.

COROLLARIUM I.

CUM omnis numerus integer scribi possit ad modum fracti subscribendo unitatem pro denominatore, ut per se constat, atque hac ratione subeat leges numerorum fractorum, hinc fracti per integrum, & integri per fractum divisio peragetur, ut in primo casu, si integer prius scribatur modo dicto tanquam fractus; atque ita, si 6 dividendus sit per $\frac{2}{3}$, scribatur instar fractionis $\frac{6}{1}$; eamque dividendo per $\frac{2}{3}$ prodibit quotiens $\frac{18}{2} = 9$.

COROLLARIUM II.

EX quo patet ad dividendam quantitatem integram 6 per fractionem $\frac{2}{3}$ sufficere, si multiplicetur quantitas integra per denominatorem fractionis, & producto numerator sub-

L. I.

H

scribatur,

scribatur, & fiat $\frac{18}{2}$ quotiens quæsitus. Ita ad dividendam quantitatem integram a per fractionem $\frac{m}{n}$, scribo $\frac{a^2 c}{m n}$ pro quotiente. Similiter ad dividendam fractionem per numerum, aut quantitatem integram sufficit, si multiplicetur denominator fractionis per ipsam quantitatem integram, & productum numeratori subscribatur; nam, si fractio $\frac{3}{4}$ dividenda sit per 2, perinde erit dividere per $\frac{2}{1}$, vel denominatorem fractionis multiplicare per divisorem 2: utrovis modo prodit quotiens $\frac{3}{8}$. Sic $\frac{a}{b}$ si dividatur per m , quotiens erit $\frac{a}{b m}$.

Demonstratio hujus regulæ eruenda pariter est ex ipsamet operationis serie, quæ duas operationes complectitur, quarum posterior priorem corrigit. Sit itaque, ut in primo exemplo, dividenda fractio $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$: statim intelligis $\frac{2}{3}$ dividi oportere non per integrum 4, sed per 4 divisum per 5, hoc est, per quintam partem numeri 4, sive per divisorem quintuplo minorem, quam 4. Cum ergo, ut jubet regula, multiplicas denominatorem fractionis dividendæ $\frac{2}{3}$ per 4, reipsa dividis per divisorem quintuplo majorem justo; atque adeo quæ inde prodit fractio $\frac{2}{12}$, est quotus quintuplo minor justo: ut ergo defectus iste corrigatur contraria operatione, fractio $\frac{2}{12}$ debet quinquies sumi, idest, multiplicari per 5 denominatorem fractionis $\frac{4}{5}$, per quam fit divisio, eritque propterea fractio $\frac{10}{12}$ justus quotus quæsitus.

SCHO-

SCHOLIUM I.

50. **P**Raxis tradita facilis est, & universalis; ut autem Tyrones discant numeros fractos quomodolibet versare, prout opus fuerit, juvat addere sequentes observationes.

I. Si fractus per integrum sit multiplicandus, pro multiplicatione numeratoris substitui poterit denominatoris divisio, intacto numeratore, quoties id commodè fieri potest; quippe idem omnino fit, quoad fractionis valorem, sive multiplicetur numerator, sive denominator dividatur. Multiplicare oporteat fractionem $\frac{3}{4}$ per 2: perinde est, sive duplicetur numerator, ut fiat $\frac{6}{4}$, sive denominator bifecetur, ut fiat $\frac{3}{2}$; eadem enim utrobique prodit fractionis quantitas $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, quia eadem est utrobique numeratoris ad denominatorem ratio, 6:4::3:2: hinc per Coroll. VI. idem valor fractionis: sic $\frac{4}{6} \times 3 = \frac{12}{6} = \frac{4}{2} = 2$.

Divisio
multiplicat
fractionem.

II. Si fractus per integrum sit dividendus, utrovis modo obtineri poterit fractionis divisio, vel dividendo numeratorem per divisorem datum, intacto denominatore, vel per eundem divisorem multiplicando denominatorem, intacto numeratore. Sit dividenda fractio $\frac{4}{5}$ per 2: quotiens erit $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$; quod enim major est denominator, eò minores supponuntur ejusdem integri partes; atque adeo, manente eodem numeratore, minuitur fractio.

Multipli-
catio dividit
fractionem.

III. Atque hinc statim constat, quod ap-
prime

H 2

prime notandum est, idem omnino fieri, five multiplicemus per $\frac{c}{d}$, five dividamus per $\frac{d}{c}$; quippe eadem utrobique prodibit quantitas; item five multiplicemus per $\frac{1}{2}$, five dividamus per 2, vel $\frac{2}{1}$; quippe utrobique quæritur data quantitatē semissis; pariter five per $\frac{2}{3}$ multiplicemus, five per $\frac{3}{2}$ dividamus; atque ita porro de reliquis, sit licet quantitas dividenda, aut multiplicanda vel integrum quid, vel fractum: quod appositis exemplis constabit.

$$\frac{4}{5} \text{ div. per } 2 \text{ dat quotum } \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$4 \text{ div. per } \frac{3}{2} \text{ dat quotum } \frac{8}{3} = 4 \times \frac{2}{3}$$

$$\text{vel } \frac{4}{1} \text{ div. per } \frac{3}{2} \text{ dat quotum } \frac{8}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{3}$$

$$9 \text{ div. per } \frac{3}{2} \text{ dat quotum } \frac{18}{3} = \frac{6}{1} = 6 = 9 \times \frac{2}{3}$$

$$\text{vel } \frac{9}{1} \text{ div. per } \frac{3}{2} \text{ dat quotum } \frac{18}{3} = 6 = \frac{9}{1} \times \frac{2}{3}$$

Habes hinc brevem synopsis multiplicationis, & divisionis in fractionibus. Numeratoris multiplicatio multiplicat, divisio dividit fractionem: denominatoris multiplicatio dividit, divisio multiplicat fractionem.

Quia verò numerus quilibet per quemlibet multiplicari potest commodè, at non ita per quemlibet dividi, ut nempe nullum sit residuum, utraque proinde operatio, multiplicatio, & divisio fractionis per solam multiplicationem

tionem institui solet, illic quidem numeratoris, hic denominatoris.

SCHOLION II.

51. **U**T autem casus reliquos multiplicationis, & divisionis complectar, adjicio sequentia exempla.

I. Multiplicandus sit mixtus *A* per integrum *B*. Multiplico per *B* integrum 16, fit 112: multiplico per eundem *B* fractionem $\frac{4}{5}$, fit $\frac{28}{5}$, hoc est, facta reductione 5, & $\frac{3}{5}$; tum summā initā habeo *C* totale productum.

$$\begin{array}{r} A \quad 16 \frac{4}{5} \\ B \quad 7 \\ \hline 112 \\ \quad 5 \frac{3}{5} \\ \hline C \quad 117 \frac{3}{5} \end{array}$$

II. Multiplicandus sit mixtus *D* per fractionem *C*. Multiplico per eundem fractionem *C* integrum 14, fit $8 \frac{2}{5}$; postea multiplico per *C* fractionem $\frac{2}{7}$, fitque *E*; ut autem fractio $\frac{2}{7}$ addi possit fractioni jam inventæ *E*, hanc revoco ad eundem denominatorem 35, fitque $\frac{10}{35}$; tum summā initā habeo *G* productum quæsitum, & fractione $\frac{20}{35}$ ad minimos terminos reducta habeo $8 \frac{4}{7}$.

$$\begin{array}{r} D \quad 14 \frac{2}{5} \\ C \quad \frac{2}{7} \\ \hline 8 \frac{14}{35} \\ \quad 8 \frac{10}{35} \\ \hline E \quad \frac{6}{35} \\ \hline G \quad 8 \frac{20}{35} = 8 \frac{4}{7} \end{array}$$

Aliter

Aliter sic: mixtum D contraho in unum fractum, sitque E : hunc multiplico per C , & fit F , hoc est, facta reductione fit G ; & fractione ad minimos terminos reducta evadit H productus quæsitus.

$$D \ 14 \frac{2}{7} = E \ \frac{100}{7}$$

$$C \ \frac{3}{5}$$

$$F \ \frac{300}{35}$$

$$G \ 8 \frac{20}{35}$$

$$H \ 8 \frac{4}{7}$$

III. Dividendus sit mixtus A per integrum B . Divido integrum 27 per B : prodit quotientiens 4, quem scribo; relinquitur autem mixtus 3, & $\frac{3}{5}$, quem in unum fractum converto, & fit $\frac{18}{5}$: $A \ 27 \frac{3}{5} \ B \ 6$ hunc divido per B , & fit $\frac{3}{5}$, quem quotienti 4 adjicio, & prodit mixtus F quotientiens quæsitus.

$$F \ 4 \frac{3}{5}$$

IV. Dividendus sit mixtus per mixtum. Uterque in unum fractum convertatur; tum fiat divisio, ut Probl. IX., & reductio, si opus sit.

De fractis fractionum.

52. **N**onnunquam fractionem aliquam ulterius frangi, ac dividi contingit, cujus tanquam integri partes, fractionum fractiones dici solent; puta, trientis semis, vel beffis dodrans &c., quas sic notare solent: $\frac{1}{2} \frac{1}{3}$; $\frac{3}{4} \frac{2}{3}$ &c., vel sic: $\frac{1}{2} \text{ ex } \frac{1}{3}$; $\frac{3}{4} \text{ ex } \frac{2}{3}$.

LEM.

LEMMA.

Fractio fractionis nihil est aliud, quàm fractio ex duabus invicem multiplicatis composita.

Nam, uti $\frac{1}{2} a$, vel $\frac{1}{2} \times a$ est semissis quantitatis a ; & $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2} \times 1$ semissis unius integri; $\frac{1}{2} \times 2$ semissis duorum; $\frac{1}{2} \times 3$ semissis trium, ita $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ est semissis trientis; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ dodrans beffis, sive tres quartæ duarum tertiarum &c.

PROBLEMA X.

Reductio fractionum compositarum ad simplices.

Sola multiplicatione id peragitur, ut constat ex Lemm. Itaque ductis invicem $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$, erit $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$: sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ &c. Similiter, si pluries adhuc componantur, puta, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ &c. Eodem planè modo reducenda est hujusmodi fractio $\frac{4 \frac{4}{5}}{12}$, idest, $4 \frac{4}{5} \times \frac{1}{12}$, sive $\frac{24}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Quod etiam sic tradi posset: ductis tum numeratore $4 \frac{4}{5}$, tum denominatore 12 in communem multiplicatorem 5, prodibit $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$. Demonstratio pendet ex Coroll. I., & VI.

Nec dissimilis erit reductio fractionis, cujus

H 4

jus

jus denominatori adjungatur fractio, puta,
 $\frac{3}{12\frac{1}{2}} = \frac{6}{25}$; ductis nempe tum numeratore,
 tum denominatore in communem multiplicato-

rem 2, non immutabitur valor fractionis.
 Sic $\frac{4\frac{2}{3}}{12\frac{1}{2}} = \frac{48}{125}$, ductis nempe tum numera-

tore, tum denominatore in $10 = 5 \times 2$.
 Eadem methodo utendum erit in fractio-

nibus etiam adhuc ulterius fractis, sive in nu-

meratore, sive in denominatore, sive etiam in

utroque.

PROBLEMA XI.

Reductio fractionis ad denominatorem datum.

53. **H**Æc reductio maximi est usus in Arith-
 metica, ut valor fractionis ad partes
 nobis notiores, & magis usitatas revocetur;
 contingit enim sæpenumero in calculo peragen-
 do, ut fractiones prodeant, quæ exhibeant
 aliquod totum divisum in particulas, in quas
 non solet dividi; ex. g. fit fractio $\frac{2}{3}$ unius soli-
 di, & scire velim, quot ea fractio valeat num-
 mos denarios, sive partes duodecimas, in quas
 moris est solidum parti: reducenda erit data
 fractio $\frac{2}{3}$ ad aliam æqualem, quæ denomina-
 torem habeat 12; adeoque per regulam, quam
 mox exponam, invenio $\frac{8}{12}$ solidi, seu duo trien-
 tes tantundem valere atque $\frac{8}{12}$, octo duodeci-
 mas, hoc est, octo denarios.

Ita-

Itaque ad datum denominatorem reduci-
 tur data fractio, si novus assumatur numera-
 tor, qui ad datum denominatorem habeat eam
 rationem, quam habet fractionis datæ nume-
 rator ad denominatorem suum. Demonstratio
 regulæ manifesta est, quoniam, dum servatur
 eadem numeratoris ad denominatorem ratio,
 eadem manet fractionis quantitas. Estto fra-
 ctio $\frac{1}{2}$ reducenda ad aliam æqualem, quæ
 denominatorem habeat 10: quærendus est
 numerator, qui sit ad 10, ut est 1 ad 2,
 sive ad quem habeat eam rationem 10, quam
 habet 2 ad 1, quod per auream regulam
 trium peragitur, si secundus multiplicetur per
 tertium, & productus dividatur per primum,
 ut alibi fufius explicabitur; puta, $2:1::10:$
 $q = \frac{10}{2} = 5$; adeoque $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Pariter, si ad
 eundem denominatorem 10 reducere velim
 fractionem $\frac{4}{5}$, fiat $5:4::10:8$; adeoque $\frac{8}{10}$
 $= \frac{4}{5}$.

In praxi satis est, si datæ fractionis nu-
 merator multiplicetur per datum denomina-
 torem, & productus dividatur per datæ fractio-
 nis denominatorem: quotiens erit novus nu-
 merator quæsitus. Sit data fractio $\frac{3}{7}$, denomi-
 nator datus 35: ex 3 in 35 fiet 105, quo di-
 viso per 7 prodit 15: quare $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$. Pariter
 sit fractio $\frac{2}{3}$ solidi, denominator datus 12: ex
 2 in 12 fit 24, quo diviso per 3 prodit 8:
 hinc $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

SCHO-

SCHOLIUM I.

54. **F**Ractio data non ita semper reduci potest ad datum denominatorem, quin pro quæsito numeratore emergat nonnunquam vel fractio, vel numerus mixtus; adeoque non poterit fractione simplici, quæ datum habeat denominatorem, data fractio designari, sed fractione composita opus erit. Esto fractio $\frac{2}{5}$ ad partes duodecimas, idest, ad denominatorem 12 reducenda: inuenies $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$, hoc est, 4 duodecimas, atque insuper $\frac{4}{5}$ unius duodecimæ.

Fractio invento numeratori adhærens in hisce casibus poterit in aliam noti denominatoris fractionem pro subiecta materia usitatam converti.

EXEMPL. Dentur gradus $5\frac{2}{7}$: quoniam graduum divisio usitata est in 60, quæ dicuntur minuta prima, & horum rursus in 60, quæ dicuntur minuta secunda, & sic deinceps, si velim fractionem $\frac{2}{7}$ dato numero adhærentem in minuta convertere, duco 2 in 60, & fit 120, quo diviso per 7 prodit $\frac{17\frac{1}{7}}{60}$: quare habeo pro unius gradus duabus septimis minuta 17; sed præterea superest $\frac{1}{7}$ unius minuti: hæc fractio numeratori adhærens vel negligetur tanquam nullius momenti, ubi minore accuratio-
ne sit opus; vel ipsa converti poterit in minuta secunda, dividendo 60 per 7, unde habetur

betur quotiens 8 & $\frac{4}{7}$; atque hæc fractio $\frac{4}{7}$ converti ulterius poterit in minuta tertia &c.

Oporteat fractionem $\frac{4}{7}$ unius exapedæ reducere ad denominatorem datum 6, ut decerni possit ejusdem valor in pedibus. Ducatur 4 in 6, & productum 24 dividatur per 7: quotiens $3\frac{3}{7}$ erit fractionis quæsitæ numerator, cui subscribendus datus denominator, nempe $\frac{3\frac{3}{7}}{6}$, idest, tres sextæ unius exapedæ, seu tres pedes, & præterea tres septimæ unius sextæ, sive tres septimæ unius pedis.

Cum autem nota sit divisio pedis in duodecim pollices, fractio adhærens $\frac{3}{7}$ unius pedis reducetur ad fractionem dati denominatoris 12; si nempe numerator 3 multiplicetur per 12, & productus 36 dividatur per 7, quotiens inventus $5\frac{1}{7}$ erit numerator fractionis quæsitæ, idest, $\frac{5\frac{1}{7}}{12}$, seu quinque pollices, & $\frac{1}{7}$ unius pollicis.

Eadem methodo fractio adhærens $\frac{1}{7}$ pollicis reducetur ad lineas, & obtinebitur $\frac{1\frac{5}{7}}{12}$, idest, una duodecima pollicis, sive una linea, & præterea $\frac{5}{7}$ unius lineæ: hinc proposita fractio $\frac{4}{7}$ unius exapedæ valet 3 pedes, 5 pollices, 1 lineam, & $\frac{5}{7}$ unius lineæ, quæ postrema fractio tunc negligi poterit, ubi geometrica accuratio non postulatur.

SCHOLIUM II.

55. **E**X omnibus fractionum reductionibus duæ præ reliquis usitatæ sunt; nempe reductio ad partes sexagenarias, & ad partes decimales, & vice versa. Illa veteribus admodum familiaris erat, & frequens: hæc maxime recentioribus, cum sexagenaria illa progressio perplexa nimium sit, variasque reductiones postulet. De utrisque autem seorsum dicendum.

Reductio fractionis cujuslibet in partes decimales.

I. Numeratori fractionis datæ, interjecto puncto, vel lineolâ, ut moris est, adjiciantur quotlibet ciphre, quæ gradus infra unitatem descendentes in subdecupla ratione designent; hæc ciphrearum additio est ipsissima multiplicatio, quam jubet Problema, numeratoris in datum quemcunque decimalium fractionum denominatorem 10, 100, 1000 &c.

II. Numerator per denominatorem dividatur: quotiens erit proposita fractio reducta ad partes decimales.

$$\begin{aligned} \text{Sic } \frac{4}{5} &= \frac{4^0}{5} = 0,8 \text{ reducta ad decimas;} \\ \frac{3}{8} &= \frac{3,000}{8} = 0,375 \text{ reducta ad millesimas;} \\ \frac{5}{9} &= \frac{5,00000}{9} = 0,55555 \text{ ad centum millesimas;} \end{aligned}$$

atque

atque ita de reliquis, ut divisione patebit.

Si autem, quod non raro contingit, hujusmodi occurrat fractio, quæ vel non omnino, vel non nisi longiore operatione accurate possit partibus decimalibus exprimi, possumus operationem, quousque libet, instituere, donec quod superfit tam sit exiguum, ut tuto negligi possit. Sic $\frac{1}{3} = 0,3333$ &c.; $\frac{2}{3} = 0,6666$

$$\text{&c.}; \frac{1}{6} = 0,1666 \text{ &c.}; \frac{5}{6} = 0,8333 \text{ &c.}; \frac{10}{11}$$

$$= 0,909090 \text{ &c.}; \frac{5}{11} = 0,454545 \text{ &c.}; \frac{3}{7}$$

$$= 0,428571428 \text{ &c.}; \text{in quibus omnibus, aliisque similibus observare licet eorundem numerorum recursum, quousque libet, continuandum. Similiter } \frac{3}{32} = 0,09375; \frac{23}{64} = 0,359375;$$

in quibus, aliisque similibus exhauritur quidem, sed serò, data fractio partibus decimalibus, ut dividendo patebit.

In his, inquam, aliisque ejusmodi casibus, ubi partes decimales vel in longum nimis, vel in infinitum excurrunt, monet Wallisius cap. 44. Arith. sufficere vero proximum pro vero accipere; adeoque operatione, quousque libet, continuata, quod superest, negligere; puta, pro $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, \frac{3}{32}$ &c. sumatur 0,3333; 0,8333; 0,90909; 0,0937; vel etiam 0,33; 0,833; 0,909; 0,094; vel fortè 0,33; 0,83; 0,91; 0,09, prout major, minorve accuratio requiratur.

SCHO-

SCHOLIUM III.

*Reductio decimalium fractionum
ad denominatorem datum.*

EAdem methodo utendum, qua in reliquis fractionibus. Esto fractio decimalis $0,55556$ unius exapedæ: quæritur quid hæc fractio, quæ certè minor est unâ exapedâ, valeat in minoribus mensuris pedum, pollicum, & linearum. Consideretur hæc quantitas decimalis ad instar fractionis $\frac{55556}{100000}$: multiplicetur numerator per datum denominatorem 6; & productum $3,33336$ dividatur per denominatorem 100000, quæ divisio expeditè in praxi conficitur: si totidem notæ in dividendo dextrorsum separentur, quot ciphre in divisore, quotiens erit 3; adeoque $\frac{3}{10}$ unius exapedæ, idest, 3 pedes + $0,33336$, quæ fractio continet partes decimales unius pedis.

Hæc etiam reducetur ad pollices, idest, ad denominatorem datum 12, & habebitur $\frac{4}{12}$ unius pedis + $0,00032$ unius duodecimæ pedis, seu pollicis.

Denique hæc etiam postrema fractio reducetur ad lineas; adeoque multiplicando $0,00032$ per 12 habeo productum $0,00384$, in quo, cum nulla sit quantitas integra, fractio decimalis $0,00032$ non valet integram lineam, sed solum totidem partes decimales lineæ, quot

expri-

exprimuntur a numero decimali $0,00384$. Quare fractio decimalis proposita $0,55556$, quæ continet partes decimales unius exapedæ, reducta ad usitatas mensuras valet 3 pedes, 4 pollices, & $0,00384$ unius lineæ, quæ in praxi negligitur.

Fractiones decimales, ubi opus est, eodem planè modo ad alias etiam reducuntur, quo reliquæ fractiones; Sic $0,5$, hoc est, $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$, dividendo tum numeratorem, tum denominatorem per maximum communem divisorem 5. Ita $0,09375 = \frac{9375}{100000} = \frac{3}{32}$, nempe dividendo per maximam communem mensuram 3125; & sic in reliquis.

Si autem ea reperiatur mensura, quæ non quidem accuratè, at saltem quàm proximè utrumque terminum metiatur, poterit illius ope assumi fractio ordinaria, quæ, licet non accuratè, quàm proximè tamen æquabitur datæ decimali, adeoque pro hac assumi possit; præsertim, ut notat Wallisius, si supponatur fractio illa decimalis (quod non rarò fit, præcipuè in tabulis astronomicis, trigonometricis &c.) non præcisè geometricam veritatem, sed vero proximum designare. Sic pro $0,3333$, hoc est, $\frac{3333}{10000}$ assumi poterit tanquam æqualis $\frac{1}{3}$, cum tamen hæc aliquantò major sit, quippe æqualis huic $\frac{3333}{9999}$, sed tantillò, ut ea differentia tutò negligi possit.

Redu-

Reductio fractionis cujuslibet ad partes sexagesimales jam supra exposita est; ducto enim numeratore in 60, per denominatorem fiat divisio, & quotiens indicabit minuta prima; residuum autem divisionis, si quod sit, in 60 ductum, & per denominatorem fractionis datæ divisum exhibebit in quotiente minuta secunda; & sic deinceps, uti de decimalibus modò dictum est.

Reductio
sexagesima-
lium ad fra-
ctiones or-
dinarias.

Partes autem sexagesimales ad fractiones ordinarias reducuntur, si reductis omnibus ad scrupulorum ultimam denominationem, eorumque numero pro numeratore sumpto, congruus scribatur denominator; nempe numerus ille, qui ostendit, quot istius ordinis scrupuli in uno integro continentur. Sic $12 \cdot 30$ reducuntur ad fractionem ordinariam $\frac{5}{24}$ hoc modo:

$$\begin{array}{r} \overset{\text{I}}{\times} \overset{\text{I}}{60} \\ \hline \overset{\text{II}}{720} \\ \overset{\text{II}}{+} \overset{\text{II}}{30} \\ \hline \overset{\text{II}}{750} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{\text{I}}{\times} \overset{\text{I}}{60} \\ \hline \overset{\text{I}}{60} \\ \overset{\text{I}}{\times} \overset{\text{I}}{60} \\ \hline \overset{\text{I}}{3600} \end{array}$$

$$\frac{750}{3600} = \frac{75}{360} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$$

Cum enim singula minuta prima contineant 60 secunda, 12 prima continebunt 720 secunda, quibus additis aliis secundis 30, erit secundorum numerus 750. At verò in uno inte-

integro continentur minuta prima 60, adeoque minuta secunda 3600: sunt ergo illa ad unum integrum, ut 750 ad 3600, hoc est, reductione facta ad minimos terminos, ut 5 ad 24; adeoque $12 \cdot 30 = \frac{750}{3600} = \frac{5}{24}$.

CAPUT QUARTUM.

De compositione, & resolutione potestatum.

EX compositione, seu genesi potestatum derivanda est earum analysis, seu resolutio compositioni conformis. Nam analysis datæ potestatis est ipsius resolutio in suam radicem, videlicet inventio magnitudinis, ex qua aliquoties in seipsam ducta potestas data efficiatur, quæ compositio dicitur. Sic inventio quantitatis $a+b$, ex qua semel per seipsam multiplicata fit quadratum $aa+2ab+bb$, dicitur analysis, resolutio, & extractio radicis quadratæ ex ipsa quantitate $aa+2ab+bb$. Singularum itaque potestatum compositionem, & resolutionem hoc capite diligenter completar, & evolvam.

De compositione, & resolutione litterali, aut numerica potestatis quadraticæ.

SYNOPSIS.

Potestates analyticæ nomina quidem mutantur ab extensione geometrica, sed

L. I.

I

multò

multo universalius a progressionē geometricā continuē proportionalium ab unitate. Quibus elementis componatur quadratum binomiæ, aut polynomiæ radicis numericæ, aut litteralis: hinc ejusdem resolutio in suam radicem. Ori- go radicum, quas surdas vocant. Approxima- tio radicum in infinitum ope decimalium. Li- mites, intra quos radix vera irrationalis possit consistere. Analysis regulæ arithmeticæ con- formis compositioni quadrati numerici. Extra- ctio radicis quadratæ ex quantitatibus numeri- cis, & litteralibus, simplicibus, & compositis. Compositio cubi litteralis, & numerici ex ra- dice binomia, aut polynomia, & ejusdem re- solutio in suam radicem. Quo ordine lateant elementa singula in cubo numerico. Formulæ reliquarum potestatum a radice binomia geni- tarum; & quomodo per has formulas diriga- mur ad generale artificium extrahendæ radicis cujusvis generis. Extractio magis compendia- ria radicum a potestatibus, quarum indices non sunt numeri primi.

DEFINITIONES.

I.

56. **L**atus, Quadratum, Cubus, cæteræque potestates, seu, ut loquuntur alii, di- gnitates, nomina sua mutuuntur ab extensio- nibus geometricis locum respicientibus. Linea, seu latus dimensionem habet unicam, quadra- tum duas, cubus tres, longitudinem, latitu- dinem,

Nomina
potestatum
ab exten-
sione geo-
metrica.

dinem, & profunditatem, ultra quas extensio localis protendi non potest.

II.

Sed Algebra natura magis abstracta est, neque ad locales extensiones adstricta, quem- admodum Geometria. Potestates itaque al- gebraicæ non aliud sunt, quàm series, seu pro- gressio geometrica continuē proportionalium ab 1 inchoatorum. Itaque, si quantitas data se- ipsam multiplicet, productumque iterum mul- tiplicet, & ex ea multiplicatione ortum mul- tiplicet, & sic deinceps, orietur series potesta- tum continuē proportionalium in ea ratione, quæ est unitatis ad primam quantitatem, seu numerum: quod ex ipsa definitione multipli- cationis ostenditur, atque ex 16, & 17. sexti elem.

Notio
potestatum
universalior
progressio-
ne geome-
trica.

1°. a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

Hujus quidem progressionis si ponatur 1 terminus primus, terminus secundus erit ra- dix, seu latus, unde determinatur communis ratio progressionis, seu communis multiplica- tor. Quadratum verò, cubus, biquadratum, & quæ sequuntur, potestates, sunt ejusdem progressionis termini, tertius, quartus, quin- tus &c. Quoniam verò primus terminus 1 nul- lam in se continet radicis dimensionem, radix unam, quadratum duas, & sic deinceps, his accommodari solent exponentes in progressionē arithmetica ab 0 inchoati, quorum munus est

Exponen-
tes potesta-
tum.

1 2

expo-

exponere, quot in quaque potestate sint radicis dimensiones. Radix autem dicitur potestas prima, quadratum potestas secunda, cubus potestas tertia; & sic in infinitum.

S C H O L I O N.

UNa, eademque quantitas esse potest potestas superior, simulque inferior, si diversis terminis comparetur. Sic a^6 est potestas sexta termini a , tertia termini aa , secunda verò termini aaa .

I I I.

Itaque, ut ad rem propius accedam, sicuti numerus quadratus vocatur ille, qui oritur ex dato numero ducto in se ipsum, vel ex duorum æqualium numerorum multiplicatione, cujusmodi est 16 ex 4×4 , ita radix quadrata dati numeri est numerus 4, ex quo per se ipsum multiplicato datus ipse numerus efficitur. Similiter, sicuti numerus cubicus is est, qui fit ex numero quadrato multiplicato per suam radicem, $4 \times 16 = 64$, seu ex trium numerorum æqualium multiplicatione, $4 \times 4 \times 4 = 64$, ita radix cubica dati numeri est numerus ipse 4; atque ita porro de reliquis potestatibus.

I V.

Quoniam verò pro extrahenda radice quadrata, aut cubica ex quantitate numerica opus est, ut omnium notarum simplicium numeri qua-

quadrati, & cubici cognoscantur, eos omnes in hoc laterculo subjiciendos censeo.

Radices	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadrati	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Cubi	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

V.

Præterea, cum in majorum numerorum radicibus exquirendis opus sit id per partes exequi, prout in divisione fieri solet, idcirco radix consideranda erit modò ex binis notis constans $a + b = 20 + 3$, quam binomium vocant, modò ex tribus, quam trinomium &c., & ex quibus partibus potestas quælibet componatur sive numerica, sive litteralis, diligenter declarandum. Sit itaque

T H E O R E M A I.

57. **Q**uadratum binomii $a + b$ componitur ex quadratis partium, & duplo ejus, quod fit ex mutua earum partium multiplicatione. Compositio quadrati ex radice binomia.

Demonstratur ex ipso opere multiplicationis, cujus paradigma appono.

$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ + ab + bb \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 + 3 \\ 20 + 3 \\ \hline 400 + 60 \\ + 60 + 9 \\ \hline 400 + 120 + 9 \end{array}$
--	--

I 3

Co-

COROLLARIUM I.

Hoc posito theoremate facillima erit compositio quadrati cujuslibet quantitatis trinomiæ, quadrinomiæ, & polynomiæ, ex iisdem nimirum elementis, quibus quadratum binomii componitur.

Vel trinomiæ, & multigomiæ.

Sit proposita quantitas trinomia $a + b + c$.
 I. Considerentur duæ priores instar unius quantitatis $a + b$, & fiat quadratum ex istis duabus $aa + 2ab + bb$, quod erit quadratum primæ partis. II. Sumatur duplum ejus, quod producitur multiplicando primam partem $a + b$ per tertiam c , quod erit $2ac + 2bc$. III. Fiat denique quadratum c^2 ex parte tertia c ; atque hac ratione additis in unum omnibus istis quantitativibus fiet quadratum quantitatis propositæ, $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + c^2$.

Simili methodo, si quæratu compositio quadrinomi $a + b + c + d$, fiat I. quadratum ex primis tribus terminis $a + b + c$ tanquam unico consideratis. II. Sumatur duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione earundem partium $a + b + c$ in quartam d . III. Fiat denique quadratum ex parte quarta d ; & additis in unum omnibus, erit quadratum quantitatis propositæ, $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc + 2ad + 2bd + 2cd + dd$.

SCHO-

SCHOLIUM.

IN compositione quadratæ potestatis, cum partes radicales $a + b$, vel $a - b$ interdum signo — afficiantur, illud proinde notandum est, quadrata ipsarum partium semper quidem afficienda esse signo +, quomodocumque partes illæ sint affectæ. At verò producta reliqua tunc quidem afficienda sunt signo +, cum ambæ partes, ex quarum multiplicatione oriuntur, eodem signo sunt affectæ.

COROLLARIUM II.

Eadem compositio observanda est in fractionibus ad secundam potestatem elevatis. Sic fractionis $\frac{a+b}{d}$ quadratum erit $\frac{aa + 2ab + bb}{dd}$.

COROLLARIUM III.

EX proximè superiori tabella constat inductione I. Numerum quadratum una, vel duabus notis numericis constantem habere radicem unius notæ; nam numerus quadratus maximæ notæ 9 continet duas tantum notas. II. Numerum quadratum, qui tres vel quatuor notas, continet, habere radicem duarum notarum. III. Numerum quadratum, qui aut quinque vel sex notas comprehendit, habere radicem trium; & sic deinceps.

I 4

Co-

COROLLARIUM IV.

Resolutio quadrati numerici.

IN quadrato algebraico hæc & rectangulorum, & quadratorum suarum partium compositio incurrit in oculos, quippe quæ in calculo litterali suis quæque notata sunt signis, & litteris. At verò in quadrato numerico mirantur Tyrones easdem partes latere: quod illis accuratè est patefaciendum, ut intelligant utrumque iisdem elementis constare, & iisdem legibus resolvendum.

EXEMPLUM I.

58. **E**Sto numerus 36 attollendus ad potestatem quadraticam: multiplicetur ergo in seipsum, ut moris est, sed ita ut in singulorum productorum notatione singulæ pariter decades, centenæ &c. suis sedibus distinctè scribantur, ut in apposito exemplo factum vides. Itaque $6 \times 6 = 36$: scribo 6 in sede monadum, & promoveo 3 ad sedem decadam. Rursum $6 \times 3 = 18$: scribo 8 decades in propria sede, & promoveo 1 ad sedem centenarum. Pariter $3 \times 6 = 18$: scribo 8 in eadem sede decadam, & promoveo 1 ad locum altiore centenarum. Denique $3 \times 3 = 9$, quem scribo in ultima sede, subductaque omnium summà reperietur 1296 quadratum numeri 36.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 36 \\ 18 \\ 18 \\ 9 \\ \hline 1296 \end{array}$$

Co-

COROLLARIUM V.

Quadratum ergo radices binomiæ numericæ iisdem elementis constat, nimirum quadrato primæ partis, duplo rectangulo primæ in secundam, & quadrato secundæ.

COROLLARIUM VI.

Quod si nosse velis, quem locum quodlibet ex hisce elementis obtineat in producto totali, idest, in numero quadrato 1296, post binas quasque notas, a dextris sumpto initio, comma, aut punctum interpone 12.96. Deprehendes I. quadratum 9 figuræ 3 radices 36 reperiri sinistrorsum in ultimo membro 12. II. Duplum secundæ notæ 3 in primam 6 partim in ultimo membro 12 ad lævam, partim in prima figura sequentis membri ad dexteram, ita ut hujus dupli rectanguli 2×18 nihil ad primam notam 6 membri primi 96 pertineat: cujus rei habenda est ratio diligenter. III. Quadratum 36 contineri in primo membro 96.

EXEMPLUM II.

59. **E**Sto numerus radices trinomiæ 234 attollendus ad potestatem quadraticam: scribantur, ut ante, producta singula, & horum notæ suis quæque sedibus, ut factum vides in

in appposito schemmate. Examinentur producta singula a læva sumpto initio.

Invenio I. in ultimo membro 5 quadratum 4 ultimæ notæ 2 radicis 234.

II. Partim in ultimo, partim in prima nota antepenultimi membri invenio 6, & 6, hoc est 12, duplum rectangulum primæ notæ radicis in secundam.

III. In secundo pariter membro invenio 8, & 8 duplum rectangulum primæ notæ radicis in tertiam, & quadratum secundæ.

IV. Duplum verò rectangulum secundæ notæ radicis in tertiam, 12, & 12 partim in secundo membro, partim in primo ad dexteram continetur.

V. Denique quadratum tertię in primo ad dexteram membro.

COROLLARIUM VII.

Hinc sequitur quadratum numericum radicis trinomiæ continere I. Quadratum primæ partis. II. Duplum rectangulum primæ per secundam. III. Quadratum secundæ. IV. Duplum rectangulum duarum primarum per tertiam. V. Quadratum tertię.

His animadversis, quadratæ radicis extrahendæ regulam arithmetica propono ab eodem Newtono depromptam; seriem autem fin-

2	3	4
2	3	4
1	2	
8	1	2
9	6	
6	8	
4	6	
5	4	7
		56

gularum operationum ex præjactis fundamentis paulo infra accuratè demonstrabo.

De extractione radicum.

60. **C**um numeri alicujus radix quadratica extrahi debet, is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus est; dein figura in quoto, seu radice scribenda, cujus quadratum figuræ, vel figuris ante primum punctum aut æquale sit, aut proximè minus; & ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ singillatim inveniuntur, dividendo residuum per duplum radicis eatenus extractæ, & singulis vicibus auferendo e residuo illo factum a figura novissimè prodeunte, & decuplo prædicti divisoris figuræ illà aucti.

Resolutio
quadrati in
suam radi-
cem.

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9.98.56; dein quære numerum, cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3, scribeque in quoto; & de 9 ablato quadrato 3×3 , seu 9, restabit 0, cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98, pro sequente opere; tum neglectà ultimà figurà 8, dic, quoties duplum 3, seu 6, continetur in priori 9? Resp. 1: quare scripto 1 in quoto, aufer factum 1×61 , seu 61, de 98; restabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus, in quo opus denovo institui debet. Quare, & hujus ultimà figurà 6 neglectà, dic, quoties duplum 31, seu 62, continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris

figuris 6 & 37 conjici potest, animadvertendo, quoties 6 continetur in 37?

Resp. 6; & scripto 6 in quoto, aufer factum 6×626 , seu 3756, & restabit nihil: unde constat opus peractum esse, procedente radice 316.

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 98 \cdot 56 \quad (316 \\ 9 \\ \hline 098 \\ 61 \\ \hline 3756 \\ 3756 \\ \hline 0 \end{array}$$

Atque ita, si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione, quaere numerum, cujus quadratum (siquidem id nequeat æquari) sit proximè minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4; nam 5×5 , sive 25, major est, quàm 22; & 4×4 , sive 16, minor. Quare 4 erit prima figura radice; & hac itaque in quoto scripta, de 22 aufer quadratum 4×4 , seu 16, residuoque 6 adjuuge desuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus divisione per duplum 4 elicienda est secunda figura radice; nempe, neglecta ultima figurà 7, dic, quoties 8 continetur in 61? Resp. 7: quare scribe 7 in quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87, seu 609, & restabit 8, cui adjuuge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus divisione per duplum 47, seu 94, elicienda est tertia figura; utpote dic, quoties 94 continetur in 88? Resp. 0: quare scribe 0 in quoto, adjuungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791, cujus

cujus divisione per duplum 470, seu 940, elicienda est ultima figura; nempe dic, quoties 940 continetur in 8879? Resp. 9: quare scribe 9 in quoto, & radicem habebis 4709.

$$\begin{array}{r} 22 \cdot 17 \cdot 87 \cdot 91 (4709, 43637 \&c. \\ 16 \\ \hline 617 \\ 609 \\ \hline 88791 \\ 84681 \\ \hline 4110.00 \\ 376736 \\ \hline 3426400 \\ 2825649 \\ \hline 60075100 \\ 56513196 \\ \hline 356190400 \\ 282566169 \\ \hline 73624231 \end{array}$$

Approximatio radicum ope Decimalium.

CÆterum, cum factus 9×9409 , seu 84681, ablatius de 88791 relinquat 4110, id indicio est numerum 4709 non esse radicem numeri 22178791 præcisè, sed eà paulo minorem existere; & in hoc casu, aliisque similibus, si veram radicem magis appropinquare placeat, proseguenda est operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad residuum circulos duos in singulis operationibus. Sic residuum 4110 adnexis circulis evadit 411000, cujus divisione per duplum 4709, seu 9418, elicietur figura prima decimalis, nimirum

rum 4; dein scripto 4 in quoto, aufer 4×94184 , seu 376736, de 411000, & restabit 34264; atque ita annexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari potest, prodeunte tandem radice 4709,43637 &c.

Ubi verò radix ad medietatem, aut ultra extracta est, ceteræ figuræ per divisionem solam obtineri possunt. Ut in hoc exemplo, si radicem ad usque novem figuras extrahere animus esset, postquam quinque priores 4709,4 extractæ sunt, quatuor posteriores 3637 elici possent, dividendo residuum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum, si radix ex 32976 ad usque quinque figuras extrahi debet; postquam figuræ punctis notantur, scribe 1 in quoto, utpote cujus quadratum 1×1 , seu 1, maximum est, quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur; ac de 3 ablato quadrato illo 1, restabit 2; dein huic 2 annexis proximis figuris 29, quære, quoties duplum 1, seu 2, continetur in 22, & invenies quidem plusquam 10; sed nunquam licet divisorem vel decies sumere, immo neque novies in hoc casu, quia factus 9×29 , sive 261, major est, quam 229, unde deberet auferri: quare pone tantum 8; & perinde scripto 8 in quoto, & ablato 8×28 , sive 224, restabit 5; huic insuper annexis figuris 76, quære, quoties duplum 18, seu 36, con-

32976 (181,59

1
229
224
576
361

362) 215 (59

tinetur

tinetur in 57, & invenies 1, adeoque scribe 1 in quoto; ac de 576 ablato 1×361 , seu 361, restabit 215; denique ad ceteras figuras elicendas divide hunc 215 per duplum 181, seu 362, & exhibunt figuræ 59, quibus etiam scriptis in quoto, habebitur radix 181,59.

Eadem methodo radices etiam e decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix est 18,159; & ex 3,2976 radix est 1,8159; & ex 0,032976 radix est 0,18159; & sic præterea. Sed ex 3297,6 radix est 57,4247; & ex 32,976 radix est 5,74247; atque ita ex 9,9856 radix est 3,16. Sed ex 0,99856 radix est 0,999279, &c., quemadmodum e subjectis diagrammatis constare potest.

3297,6 (57,4237, &c.

25

797

749

4860

4576

1148) 284 (247

0,99856 (0,999279, &c.

81

1885

1701

18460

17901

1998) 559 (279

61. **Q**Uamvis hæc methodus approximationis radicum, qua usi fuimus in superioribus exemplis, explorata esse debeat cujusvis mediocriter jam versato in decimalium principiis, tamen, ne quid obscuritatis forte resideat, totius operationis scopum, demonstrationemque paucis expono.

Si

Si in extractione radicis quadratæ, cubicæ, vel alterius cujuscunque post subtractionem ultimam aliquid superfit, indicio id erit, & quidem certissimo, numerum, cujus radix quærebatur, non esse quadratum, aut cubum, aut aliam potestatem; ac proinde ejus radicem veram exactè exprimi non posse neque per ullum integrum numerum, ut patet, neque per ullum fractum numerum, aut mixtum ex integro, & fracto, qui in se quadraticè, vel cubicè producat datum numerum. Ratio est, quia fractiones simplices, vel mixtæ in se ipsas ductæ nunquam possunt numerum integrum gignere; nam, ut aliàs monuimus, fractio quævis in seipsam ducta productum exhibet, quod minus est fractione multiplicata.

Poterunt nihilominus radices exhiberi, quæ ad veram impossibilem, quæ surda, seu irrationalis ab Arithmetice appellari solet, accedant propius, & propius in infinitum; hoc est, quæ ab impossibili vera differant quantitate minori quacunque data; ac proinde, quæ per seipsas multiplicatæ quadraticè, vel cubicè, vel aliter pro gradu dato, producant quadratos, vel cubos &c. differentes a dato numero quantitate quacunque minori data, hoc est, minus unâ decimâ, unâ centesimâ, unâ millesimâ; atque ita porro: quæ operatio vocatur Approximatio radicum.

THEO.

THEOREMA.

62. **S**I duorum numerorum, qui unitate differunt, x , & $x+1$ fiant quadrata, minus a majore deficiet duplo suæ radicis plus unitate.

Demonst. ex genesi utriusque potestatis.

COROLLARIUM.

SI post extractam radicem a dato numero aliquid superfit, valor hujus residui minor erit duplo radicis inventæ plus unitate. Ratio est, quia, si hoc residuum æquale esset duplo radicis inventæ plus unitate, radix unitate augeretur, & nihil porro residui haberet. Extrahatur radix quadrata a numero 45: invenietur 6 cum residuo 9: hoc residuum minus valere debet $2 \times 6 + 1 = 13$; nam quadratum 36 junctum huic residuo 13 efficeret 49, cujus radix 7 superaret unitate inventam radicem 6: ergo quod extracta radice superest, necessariò minus valere debet unitate ejusdem radicis.

His animadversis, oporteat radicem quadratam per approximationem extrahere a numero 67, qui non est perfectè quadratus.

Quærat I. radix, cujus defectus a vera minor sit decima parte ipsius. Adjiciantur duæ ciphre proposito numero 67,00, quod perinde est,

L. I.

K

est,

est, ac 67×100 , ut fiat fractio $\frac{6700}{100} = 67$, quemadmodum ex decimalium principiis jam constat. Itaque, cum radix quadrata hujus denominatoris sit 10, perspicuum est radicem numeri 6700 fore numeratorem decimarum; & proinde $\frac{81}{10} = 8\frac{1}{10}$ radicem approximata numeri 67; ejusque defectus a vera minor erit decima parte ejusdem; nam residuum 139 non adæquat valorem unitatis numeri 81, uti constat ex Coroll.

II. Quæraturs radix, cujus defectus minor sit centesima parte ipsius. Addantur proposito numero 67 duo ciphrearum binarii, nimirum $67,0000 = \frac{67 \times 10000}{10000} = 67$: cum radix denominatoris sit 100, consequens est radicem numeri 670000 fore numeratorem centesimarum: erit ergo quæsitæ radix $\frac{818}{100} = 8\frac{18}{100}$, quæ a vera impossibili deficiet defectu minore unius centesimæ; nam residui 876 valor non adæquat valorem unitatis radicis 818.

III. Quod si ulterius approximare velis, quærâsq; radicem, cujus defectus a vera impossibili minor sit unâ millesimâ, addantur numero 67 tres ciphrearum binarii; hoc est, fiat fractio $\frac{67,000000}{1000000} = 67$; quia verò denominatoris radix est 1000, radix numeratoris designabit millesimas: ergo $\frac{8185}{1000} = 8\frac{185}{1000}$ radix
erit

erit adhuc proximior numeri 67, cujus defectus a vera minor erit millesimâ ipsius; nam residuum 5775 minus est valore unitatis radicis 8185.

Quod si pluribus semper ac pluribus ciphrearum binariis adjectis continuetur extractio, appropinquabitur ad radicem veram propius in infinitum, sic ut differentia fiat quacunque data minor, nunquam tamen ad æqualitatem pervenietur; comparentur enim inter se tres diversæ radices inventæ $8\frac{1}{10}$, $8\frac{18}{100}$,

$8\frac{185}{1000}$: constabit primam minorem esse secundâ, & hanc minorem tertiâ; ac proinde radicem hanc ea ratione, qua adjiciuntur ciphrearum binarii, magis magisque in infinitum augeri, quin nunquam defectus a vera exhauriri possit.

SCHOLIUM.

Eodem modo operaberis, si ab integro numero 67 extrahatur radix, quam potest, maxima, & residuo adnectantur duæ ciphre, vel quatuor, vel sex in singulis operationibus, & continuetur extractio radicis.

COROLLARIUM I.

EX his patet, quid præstandum sit in fractionibus vulgaribus; adjiciendæ videlicet ciphre,

phræ, ut supra, tam numeratori, quam denominatori, si in utroque aliquid superfuit, aut alterutri tantum, si aliquid superfuit tantum in alterutro.

COROLLARIUM II.

Limites
radicum ir-
rationaliū.

HAc methodo invenies alios, atque alios limites, intra quos radix vera consistit. Sic $\sqrt{2}$ invenietur radix 1.4142 &c., quæ ad veram magis magisque accedit. Jam verò $\sqrt{2}$ invenietur major quàm 1, sed minor quàm 2: item major quàm $1\frac{4}{10}$, sed minor quàm $1\frac{5}{10}$, iterumque major quàm $1\frac{41}{100}$, sed minor quàm $1\frac{42}{100}$; & sic porro quousque libet.

COROLLARIUM III.

EAmdem methodum transferes ad quasvis radices surdas extrahendas cubicas, quadrato-cubicas, aliasque; nimirum, si post operationem in integris peractam, quam infra demonstramus, supersit aliquod residuum, possumus decimalium ope approximando ita procedere, ut unitatis parte decima, centesima, millesima &c. non erretur. Quod fiet, subjunctis infra unitatis locum, quot opus videbitur, ciphris, puta, binatim pro radice quadratica, ternatim pro cubica; & sic deinceps
pro

pro cæteris, continuata operatione, ut in integris; indeque habebitur quæsitæ radix in partibus decimalibus, adhærentibus integris, quantum libet approximando.

DEMONSTRATIO

Regulæ arithmeticæ in extrahenda radice quadrata.

63. **R**esumatur exemplum primum a Newtono propositum, in quo ex numero 99856 extracta est radix 316.

I. *In locis alternis incipiendo ab unitate punctis notandus est.*

Ratio evidens est ex potestatum constitutione jam tradita; nam posita radice, ut illic, 316, quoniam figura 3 in radice post se habet duo loca, ejus quadratum habebit post se loca quatuor; nempe, quotcunque post se habeat radicis figura quævis ciphra, seu loca, bis totidem post se habebit ejusdem quadratum, & ter totidem cubus, & quater totidem biquadratum; & sic deinceps. Hinc, quot sunt in quaque potestate hujusmodi membra sic punctis distincta, totidem futuræ sunt in quæsitæ radice figuræ.

Analysis
compositio-
ni confor-
mis.

II. *Dein figura in quoto, seu radice scribenda, cujus quadratum figuræ, vel figuris ante primum punctum aut æquale sit, aut proxime minus.*

Cum binomii quadrati constitutio superius tradita

tradita sit $aa + 2ab + bb$, primum ipsius membrum 9 ad lævam perpendo: sive illud sit, ut hic, unius figuræ, sive duarum figurarum, perinde est; & quia in hoc membro latet quadratum aa ultimæ ad lævam notæ radicis 316, idcirco elicitur ex hoc membro radix quadrata, quàm potest, maxima, & ablato eo quadrato residuum scribitur 098. Præterea, cum in hoc ultimo ad sinistram membro contineatur quadratus solus notæ ad sinistram primæ ejusdem radicis, in reliquis verò membris præter quadrata partium radicalium contineantur etiam numeri rectanguli $2ab$, idcirco hæc operatio soli huic membro convenit.

III. Et ablato illo quadrato cæteræ figuræ radicis singillatim inveniuntur, dividendo residuum per duplum radicis eatenus extractæ.

Itaque cum in membro sequente 098, cum residuo prioris, si quod fuerit, contineatur duplum rectangulum ex nota 3 radicis jam cognita in alteram adhuc incognitam unâ cum quadrato ejusdem, ut patet ex n. 58, & 59, manifestum est hanc radicis notam ex eodem membro esse eliciendam per divisionem, quæ sola resolvit, quod multiplicatio composuit. Atque hæc causa est, cur ad constituendum divisorem 6 radix 3 eatenus acquisita duplicetur: quod ex analytica quadrati compositione evidentius constabit $aa + 2ab + bb$. Per hunc autem divisorem $2a = 6$ dividitur non totum membrum $2ab + bb$, idest, 98; sed neglectâ semper ultimâ figurâ dividitur tantum 9 ea de causa,

causa, quæ exposita est n. 58, & 59: nam secundum membrum 98 continet duplum primæ notæ radicis inventæ in incognitam, & quadratum incognitæ; ut autem innotescat nota incognita b , solus planus $2ab$ dividendus est per $2a$, cum ad ejusdem inventionem nihil faciat bb , utpote totus incognitus: nihil autem ejusdem plani pertinet ad ultimam figuram 8, uti constat ex compositione numerica quadrati n. 58, & 59.

IV. Et singulis vicibus auferendo e residuo illo factum a figura novissimè prodeunte, & decuplo prædicti divisoris figurâ illâ aucti.

Hoc est, divisoni $2a = 6$ appone notam radicalem inventam $1 = b$, ut fiat $2a + b = 61$ decuplum divisoris aucti figurâ 1, quod si per ipsam radicalem notam $1 = b$ multiplicas, orietur productum $2ab + bb = 61 \times 1$, nempe duplum rectangulum primæ notæ per secundam, & quadratum secundæ, quæ duo in secundo membro continentur: hoc factum $2ab + bb = 61$ aufer ex membro 98: restabit 37: huic adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756.

Quæres, cur hæc operatio in aliis deinceps membris semper eadem sit repetenda; ac proinde cæteræ radicis figuræ inveniuntur dividendo residuum per duplum radicis eatenus extractæ, & singulis vicibus auferendo &c. Ratio pendet ex compositione quadrati radicis binomiæ, trinomiæ &c.; nam, quemadmodum in membro antecedente 98 latet $2ab + bb$, hoc est, duplum rectangulum ex nota prima

radicali a in secundam b unà cum quadrato ipsius b , ita in sequenti novo membro 3756 composito ex tertio membro 56, & residuo prioris 37 latet $2ac + 2bc + cc$, hoc est, retangulum bis ex $a + b$ radice eatenus acquisita ducta in c , & quadratum ipsius c ; & sic deinceps in reliquis membris, si quæ essent plura.

Extractio radices quadratæ ex quantitibus algebraicis simplicibus, & complexis.

64. **E** Simplicibus quantitibus algebraicis extractio radicum ex ipsa notatione patet. Quemadmodum, quod $\sqrt{aa}$ sit a , & quod $\sqrt{aacc}$ sit ac , & quod $\sqrt{9aacc}$ sit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ sit $7aax$; atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$, seu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$, sit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ sit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ sit $\frac{3az}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{4}{9}}$ sit $\frac{2}{3}$, & quod $\sqrt{\frac{8b^6}{27a^3}}$ sit $\frac{2bb}{3a}$; & quod $\sqrt{aabb}$ sit $\sqrt{ab}$. Quin etiam quod $b\sqrt{aacc}$, seu b in $\sqrt{aacc}$, valeat b in ac , sive abc ; & quod $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$, sive $\frac{9acz}{5b}$; & quod $\frac{a+3x}{c}$ $\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$, sive $\frac{2abxx}{9} + \frac{6bx^3}{ac}$.

Hæc

Hæc, inquam, patent, siquidem propositas quantitates e radicibus in se ductis produci (ut aa ex a in a , $aacc$ ex ac in ac , $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$ &c.) prima fronte constare potest.

Ubi verò quantitates pluribus terminis constant, opus perinde ac in numeris absolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa + 2ab + bb$, imprimis radicem primi termini aa , nempe a scribe in quoto; & ablato ejus quadrato $a \times a$, restabit $2ab + bb$ pro elicienda reliqua parte radices. Dic itaque, quoties duplum quoti, seu $2a$, continetur in primo residui termino $2ab$? Resp. b ; adeoque scribe b in quoto; $aa + 2ab + bb$ $(a + b)$ & ablato facto b in aa

$$\begin{array}{r} \frac{0}{2a + b, \text{ seu } 2ab + bb,} \\ \underline{ 2ab + bb} \\ 0 \end{array}$$

restabit nihil; quod indicat opus peractum esse, prodeunte radice $a + b$.

Et sic ad extrahendam radicem ex $a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$, imprimis pone in quoto radicem primi termini a^4 , nempe a ; & ablato ejus quadrato $aa \times aa$, seu a^4 , restabit $6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic itaque, quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Resp. $3ab$. Quare scribe $3ab$ in quoto; & ablato facto $3ab$ in $2aa + 3ab$, seu $6a^3b + 9aabb$, restabit etiamnum $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro opere proseguendo; adeoque dic iterum, quoties duplum quoti, nempe $2aa + 6ab$

con-

continetur in $-4aabb - 12ab^2$, siue, quod perinde est, dic, quoties duplum primi termini quoti, seu $2aa$; continetur in primo residui termino $-4aabb$? Resp. $-2bb$; & proinde scripto $-2bb$ in quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa + 6ab - 2bb$, seu $-4aabb - 12ab^2 + 4b^3$, restabit nihil: unde constat radicem esse $aa + 3ab - 2bb$.

Atque ita quantitatis $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ radix est $x - \frac{1}{2}a$; & quantitatis $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ radix $yy + 2y - 2$; & quantitatis $16a^4 - 24a^2xx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ radix $3xx - 4aa + 2bb$, ut e subiectis diagrammatis constare potest.

$$\begin{array}{r} a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^2 + 4b^4 \\ \underline{aa + 3ab - 2bb} \\ a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6a^3b + 9aabb \\ \underline{0 - 4aabb} \\ -4aabb - 12ab^2 + 4b^4 \\ \underline{0 \quad 0 \quad 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} xx - ax + \frac{1}{4}aa \\ \underline{xx} \\ 0 \end{array} \quad (x - \frac{1}{2}a)$$

$$\begin{array}{r} -ax + \frac{1}{4}aa \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

9x³

$$\begin{array}{r} 9x^4 - 24aa \quad + 16a^4 \\ + 12bb \quad xx - 16aabb \quad (3xx - 4aa) \\ + 4b^4 \quad + 2bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9x^4 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -24aa \quad + 16a^4 \\ + 12bb \quad xx - 16aabb \\ + 4b^4 \\ \underline{0 \quad 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y^4 + 4y^3 \quad * \quad -8y + 4(yy + 2y - 2) \\ \underline{y^4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4y^3 + 4yy \\ \underline{0 - 4yy} \\ -4yy - 8y + 4 \\ \underline{0 \quad 0 \quad 0} \end{array}$$

De compositione potestatum altiorum graduum.

THEOREMA I.

65. **C**ubus binomialis radices componitur ex cubis partium, & triplo quadrato primæ partis in secundam, & triplo quadrato secundæ partis in primam.

Res est manifesta ex ipso multiplicationis typo; nam $\overline{a+b} \times \overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$.

CO-

COROLLARIUM I.

Compositio
cubi.

Cubus trinomix, quadrinomix, & multinomix radices ex eodem theoremate derivatur, & iisdem elementis componitur. Sit quantitas $a + b + c$, quam oporteat ad potestatem cubicam attollere. Fiat I. cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ex duabus primis partibus $a + b$, quæ ita debent considerari, perinde ac si essent una indivisa magnitudo. II. Sumatur triplum ejus, quod oritur multiplicando quadratum duarum primarum partium in tertiam. III. Sumatur rursus triplum ejus, quod fit multiplicando quadratum partis tertiæ in duas priores. IV. Denique fiat cubus ex parte tertiâ. Omnium summa erit cubus quantitatis propositæ, nimirum $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. Eodem modo operaberis, si quantitas data ex multo pluribus partibus constaret.

SCHOLION.

Cum partes datæ radices interdum signo — afficiantur, illud proinde notandum, cubos ipsarum partium afficiendos semper esse eodem signo, quo ipsæ partes afficiuntur. Producta verò illa, quæ oriuntur multiplicando quadratum unius partis in aliam, tunc demum afficienda esse signo —, cum hæc alia pars signo — afficitur; & denique producta illa, quæ

ex

ex trium partium multiplicatione gignuntur, tunc afficienda esse signo —, cum earum partium vel unaquæque, vel una tantummodo afficitur signo —: qua ratione cubus ex $a - b - c$ erit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$: quod ex regulis signorum abundè colligitur.

COROLLARIUM II.

Inductione etiam constat numerum cubicum unâ, duabus, vel tribus notis compositum habere radicem unius notæ; duarum, qui quatuor, quinque, aut sex notas continet; trium, qui septem, octo, vel novem notas complectitur; & sic deinceps. Hinc mox constabit, qua de causa in extractione radices cubicæ datus numerus post ternas quasque notas initio dextrorsum factò dividatur in membra, excepto ultimo ad sinistram, quod duas, vel unicam dumtaxat notam continere potest. Eandem regulam divisionis membrorum in radices potestatum altiorum eliciendis a quovis numero assequi poteris ex tabula potestatum notarum simplicium.

COROLLARIUM III.

Eadem compositio in cubis numericis observanda est, si modò, quæ latent, elementa singula distinctè, & suis quæque sedibus educantur.

Sit

Sit componenda potestas cubica dati numeri 23. Fiat I. ipsius quadratum, quod de more hæc quatuor producta partialia continebit. II. Hæc singillatim multiplicentur rursum per 23; & hinc octo alia producta gignentur, quorum quodlibet sua sede collocandum est, ut vides in adjecto schemate.

Consideremus jam elementa singula hujus cubi.

I. Primus, qui ad lævam occurrat, numerus 8 est cubus primæ notæ 2 radicis 23.

II. Hæc tria producta 12, 12, 12 exhibent triplum quadratum primæ figuræ in secundam.

III. Hæc pariter tria producta 18, 18, 18 designant triplum quadratum secundæ figuræ in primam.

IV. Ultimum factum 27 est cubus secundæ notæ radicis 23: cubus ergo radicis binomiæ numericæ iisdem elementis constat.

COROLLARIUM IV.

Quæ autem in totali producto 12167 latent elementa potestatis cubicæ; si nimirum datus numerus in membra separetur, ac tertia quæque figura incipiendo a sede unitatis notetur punctis, exceptâ ultimâ, quæ duabus, vel etiam unâ dumtaxat constare potest 12.167, quot

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 23 \\
 \hline
 9 \\
 6 \\
 6 \\
 \hline
 4 \\
 23 \\
 \hline
 27 \\
 18 \\
 18 \\
 12 \\
 18 \\
 12 \\
 12 \\
 8 \\
 \hline
 12167
 \end{array}$$

quot erunt membra, tot erunt notæ in radice cubica 23 ex Coroll. II., & III.

Quamobrem I. in membro ultimo 12 latet cubus 8 notæ ultimæ 2 radicis 23.

II. In sequenti membro unâ cum residuo latet rectangulum ter genitum ex quadrato primæ notæ in secundam, & rectangulum ter genitum ex quadrato secundæ in primam, & cubus secundæ; sed animadvertas velim, primum rectangulum latere in residuo primi membri proximâ numeri resolvendi figurâ aucti.

COROLLARIUM V.

Similiter fiet in compositione numerica aliarum potestatum pro cuiusque natura. Hæc tamen non ita intelligenda sunt, quasi verò, cum tota radix sit ab initio cognita, non posset potestas quævis continuâ radicis multiplicatione secundum receptas multiplicandi methodos procreari, si nihil ultra intenderetur; sed singula membra componentia hic distinctè proponuntur, ut hinc dirigamur, ubi Analysis instituenda est, quibus passibus datæ potestatis quæsitæ radix sit per partes exquirenda.

THEOREMA II.

66. **Q**uarta potestas radicis binomiæ $a + b$ componitur ex hisce elementis. I. Ex quadrato-quadrato primæ partis a^4 . II. Ex quadruplo cubi primæ partis in secundam

dam $4a^3b$. III. Ex sextuplo quadrati primæ partis in quadratum secundæ $6a^2b^2$. IV. Ex quadruplo cubi secundæ partis in primam $4ab^3$. V. Ex quadrato-quadrato secundæ partis b^4 . Aggregatum ex his omnibus elementis $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ erit quarta potestas radicis binomiæ $a + b$.

SCHOLIION.

OMnia elementa quadrato-quadrata affecta sunt signo positivo $+$; fiunt enim ex ductu quadrati in se ipsum, quod eodem signo semper afficitur.

COROLLARIUM I.

Hujus etiam theorematis ope facile erit quamcunque radicem ex pluribus, quàm duabus compositam, ad potestatem quartam attollere, si nimirum primæ partes instar unius considerentur; ac proinde radix trinomia, aut multinomia ad binomiam revocetur.

COROLLARIUM II.

Eodem artificio multiplicationis litteralis obtinebis formulas reliquas potestatum a radice binomia genitarum. Ex genesi cujuslibet potestatis derivabitur regula arithmetica extrahendæ suæ radicis.

$$a + b$$

$$\begin{aligned} a + b \\ a^2 + 2ab + b^2 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \end{aligned}$$

Nimirum radix $a + b$ in se ducta gignit quadratum: hoc in radicem efficit cubum: cubus in radicem facit quadrato-quadratum; & sic deinceps potestate quavis in radicem ducta gignitur proximè altior. Quot habeat unaquæque potestas dimensiones, indicant numeri singulis suffixi, qui ea de causa exponentes appellantur. Reliquum est, ut, qua ratione per has formulas cujusvis generis radicum extractiones dirigantur, exponam Newtoni verbis.

Formula
potestatum.

Artificium generale extrahendæ radicis
cujusvis generis.

67. I. **E**xtractionem radicis cubicæ, & aliarum omnium regula generali comprehendam, praxi potius intellectu facili, quàm expeditæ consulens, ne moram in eo, quod raro usu veniet, discantibus inferam.

Nimirum tertia quæque figura, incipiendò ab unitate, primò punctis notanda est, si radix sit cubica, aut unaquæque quinta, si sit quadrato-cubica &c.

Hoc est, numerus datus, ex quo radix
L. I. L extra-

extrahenda est, a dextra in sinistram divida-
tur in membra tot notis constantia, quot in-
dicatur ab exponente potestatis radicem extra-
hendā denominantis, præter membrum ulti-
mum, quod constare potest paucioribus; tot
enim radix quæsitā est habitura notas, quot
membra habebit potestas numerica. Quoniam
igitur cubus tres, quadrato-cubus quinque ha-
bet dimensiones, in hoc post quinas, in illo
post ternas quasque notas comma, aut punctum
interponitur. Quodd si numerus datus minor
sit, quā ut sic in membra dividi possit, quid-
tum factū opus sit, & quomodo radix quæsitā
ex eo elicienda per approximationem, dictum
est n. 61.

II. *Dein figura in quoto scribenda, cujus
maxima potestas, (hoc est, cubica, si radix sit
cubica, aut quadrato-cubica, si radix sit qua-
drato-cubica) aut æquetur figuræ, vel figuris
ante primum punctum, aut proximè minor sit.*

Quoniam, uti ostensum est in compositio-
ne cujuslibet potestatis numericæ, aut littera-
lis, in postremo membro continetur radicis
quæsitæ potestas, præsidio tabellæ potestatum
simplicium numerorum 2, 3, 4 &c., quam
in eum finem oportebit conficere, elicienda
ex eo erit quæsitā radix, quam poterit, ma-
xima, ejusque potestas ex eodem membro sub-
trahenda, residuo, si quod sit, infra lineam
notato. In reliquis verò membris, cum præ-
ter

ter potestates segmentorum radicis contineantur
præterea facta quædam, quæ a formula gene-
rali exhibentur, idcirco hæc operatio soli po-
stremo membro convenit.

III. *Et ablata illa potestate figura proxima
elicietur, dividendo residuum proximā numeri re-
solvendi figura auctum per potestatem quoti pe-
ne-maximā ductam in indicem maximæ potesta-
tis, hoc est, per triplum quadratum quoti, si
radix sit cubica, aut per quintuplum quadra-
to-quadratum, si radix sit quadrato cubica &c.*

Reliquæ radicis figuræ artificio inter se
uno quidem, sed a priori penitus diverso repe-
riuntur. Illius rationi aperiendæ plurimum
conducet compositionem tum litteralem, tum
numericam, puta, cubi binomiæ radicis $a + b$
 $= 20 + 3$ ante oculos sibi proponere: $a^3 + 3a$
 $ab + 3abb + b^3$, vel 12, 167. Itaque in ope-
rationibus singulis, quæ consequuntur, duæ
sunt partes præcipuæ. I. Inventio divisoris,
per quem nova radicalis nota debet innotescere.
II. Qua ratione subductio facienda sit.
Utrumque formulæ potestatum exhibent. Por-
rò inventionem divisoris docent elementa ipsa,
quibus componuntur potestates, puta, in cubo
elementum $3aab$. Nam I. Radix eatenus ac-
quisita elevetur ad potestatem uno gradu mi-
norem illā, quam membrum, ex quo extracta
est, ostendit; nimirum ad quadratum aa , si
extracta sit radix cubica &c. II. Hæc potestas
L 2 quoti

quoti pene-maxima, idest, uno gradu minor, multiplicetur in indicem maximæ potestatis; ac proinde 3aa erit primus divisor in cubo. III. Per hoc productum 3aa tali coefficiente affectum dividantur ea omnia elementa 3aab datæ potestatis, in quibus divisorem ipsum inesse conspicimus, si potestas litteralis sit, vel dividatur residuum proximè numeri resolvendi figuræ auctum, in quo latet triplum quadrati figuræ primæ in secundam, si potestas numerica sit; tum quotus inventus adjiciatur primæ figuræ radicis inventæ signis $\pm$, quæ ex ipso opere divisionis singulis conveniunt.

IV. Rursusque a numero resolvendo ablata maxima quoti potestate figura tertia invenietur, dividendo residuum illud proximè numeri resolvendi figuræ auctum per potestatem quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis; & sic in infinitum.

EXEMPLUM I.

Sic ad extrahendâ radicem cubicâ ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13'312.053 notandus est; deinde in quoto scribenda est illa figura 2, cujus cubus 8, siquidem æquari nequeat, proximè minor sit figuris 13 antecedentibus primum punctum; & ablato illo cubo restabit 5, quod proximè numeri resolvendi figuræ 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 divisum, quærendo nempe, quoties 3×4 , seu

seu 12, continetur in 53, dat 4 pro secunda figura quoti; sed, cum quoti 24 prodiret cubus 13824 major, quàm qui auferri posset de figuris 13312 antecedentibus secundum punctum, scribi debet tantum 3 in quoto. Tum quotus 23 in charta aliqua seorsim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145, quod proximè resolvendi numeri figuræ 0 auctum, & per triplum quadratum quoti 23 divisum, quærendo nempe, quoties 3×529 , seu 1587, continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura quoti. Tum quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169, quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053; & hic de resolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæsitam esse 237.

EXEMPLUM II.

68. **A**tque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364'30820, punctum ponitur ad quintam figuram; & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proximè minor est figuris 364 antecedentibus punctum istud, scribitur in quoto; dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, restat

L 3

121

121, quod proxima resolvendi numeri figura 3 auctum, & per quinquies quadrato-quadratum quoti divisum, querendo nempe, quoties 5×81 , seu 405, continetur in 1213, dat 2 pro secunda figura. Quotus ille 32 in se ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576; & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432, qui a numero resolvendo ablati relinquit 2876388. Itaque 32 est integra pars radicis, sed non justa radix; & proinde, si opus in decimalibus numeris prosequi animus est, residuum circulo auctum dividit debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum quoti, querendo, quoties 5×1048576 , seu 5242880, continetur in 28763880, & prodibit tertia figura, sive prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum quoti 32,5 de numero resolvendo; ac dividendo residuum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui potest quarta figura; & sic in infinitum.

EXEMPLUM III.

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio est hujusmodi. Extrahere radicem cubicam primi termini a^3 , nempe a , & pone in quoto; tum ablato ejus cubo a^3 , dic, quoties triplum quadratum ejus, seu

$$\begin{array}{r} 36430820 \quad (32,5 \\ 243 \\ 405) \quad 1213 \quad (2 \\ 33554432 \\ 5242880) \quad 2876388,0 \quad (5 \end{array}$$

3 a a, continetur in proximo residui termino 3 a a b? & prodit b. Quare scribe etiam b in quoto; & cubo quoti $a + b$ ablato, restabit nihil. Radix itaque est $a + b$.

$$\begin{array}{r} a^3 + 3aab + 3abb + b^3 (a + b \\ a^3 \\ 3aa) \quad 0 + 3aab(b \\ a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Eodem modo radix cubica, si extrahatur ex $z^6 + 6z^5 = 40z^3 + 96z - 64$, prodit $z z + 2 z - 4$; atque ita in altioribus radicibus.

COROLLARIUM I.

Simili methodo utendum erit in extrahendis radicibus aliarum potestatum, membris, divisoribus, subductionibus sic ordinatis, ut cujusque potestatis compositio postulat.

COROLLARIUM II.

Si quoti alicujus numerici prodiret potestas major, quam quæ auferri posset, ut in primo exemplo, quotus imminuitur unitate.

COROLLARIUM III.

IN extrahenda autem radice quavis, postquam, ut in exemplo II., ad unitatum sedem perventum est in quotiente, si quod adhuc residuum est, continuanda erit operatio in locis partium decimalium, ubi major accuratio requiratur.

COROLLARIUM IV.

EX fractis communibus radix quæcunque præceptione unica absolvitur. Ex numérateur, & denominatore fractionis datæ extrahantur radices, quales requiruntur: fractio ex his composita erit radix fractionis datæ.

COROLLARIUM V.

EX fractis decimalibus radix quæcunque extrahitur, si ex numero dato, puta, ^{I II III}97336, tanquam purè integro extrahatur quæsitæ radix cubica 46; tum maximum signum decimale dati numeri dividatur per exponentem radicis, hoc est, per 3: quotiens dabit signum quo afficienda est nota prima radicis inventæ; & sic radix cubica erit $46\frac{46}{10}$.

Si maximum signum dati numeri ^{I II III IV}97336 per exponentem 3 radicis cubicæ dividi non possit, adjice tot ciphras decimales ^{I II III IV V VI}9733600, ut

ut possit, & operaberis ut supra, & invenies

^{I II}213.

Omnia constant ex decimalium doctrina jam exposita.

De extractione radicum, quarum indices non sunt numeri primi.

69. **C**UM radix quadrato-quadratica extrahenda est, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eod quod $\sqrt[4]{}$ valeat $\sqrt[2]{\sqrt[2]{}}$; & cum radix cubo-cubica extrahenda est, oportet extrahere radicem cubicam, & ejus radicis radicem quadraticam, eod quod $\sqrt[6]{}$ valeat $\sqrt[3]{\sqrt[2]{}}$: unde aliqui radices hæc non cubo-cubicas, sed quadrato-cubicas dixere; & idem in aliis radicibus, quarum indices non sunt numeri primi, observandum est.

Quamvis methodus jam tradita ad omnes potestates se extendat, tamen, ubi earum indices non sunt numeri primi, quos sola unitas metiatur, multò facilius absolvitur extractione radicis quadraticæ, aut cubicæ, aut utriusque sæpius repetita.

Itaque I. si potestas radicis quæsitæ sit numerus quadratus tantum $\sqrt[4]{} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{}}$, vel $\sqrt[8]{} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{}}}}$, toties extrahe radicem quadraticam, quoties potestatis exponent, ejusque dimidium, & sic deinceps potest bisecari.

II. Si potestas radicis extrahendæ est cubus

bus tantum $\sqrt[27]{} = \sqrt[3]{ \times \times }$, toties extrahenda est radix cubica, quoties exponens, & ejus tertia pars, & tertia tertiæ, & sic deinceps potest trisecari.

III. Si est quadratus simul, & cubus, uti $\sqrt[6]{} = \sqrt[2]{ \times }$, vel $\sqrt[18]{} = \sqrt[3]{ \times \times }$, extrahe radicem quadratam, quoties potestatis exponens, ejusque dimidium &c. potest bisecari; & toties cubicam, quoties residuum, & residui pars tertia, & sic deinceps potest trisecari.

APPENDIX.

70. **I**llud interdum contingit, ut termini quantitatis complexæ, ex qua radix imperata extrahenda est, habeant coefficientes numericos. In hoc casu, cum transpositio terminorum valorem non immutet, terminus ille primo loco seligendus erit, ex quo multò commodior, quàm in reliquis terminis appareat radicis quæsitæ extractio; dein reliqua peragantur ut prius.

EXEMPLUM I.

Quantitatis $169bb + 286bd + 78bc + 121dd + 66dc + 9cc$ quæratu radix quadratica. Statim occurrunt tres termini $169bb$, $121dd$, $9cc$, quorum singuli continent quadratum perfectum; ac proinde primo loco assumi quilibet ex illis posset. At de industria seligo $9cc$ pro primo termino, a quo multò

multò facilius, quàm in reliquis, extraho radicem $3c$; tum per duplum hujus radicis, nempe bc dividantur omnes illi termini, idest, $78bc + 66dc$, in quibus eadem radix includitur: quotus erit $11d + 13b$, qui additus primæ parti radicis $3c$ conflabit radicem quæsitam, cujus quadratum subductum ex quantitate proposita nihil relinquit.

EXEMPLUM II.

Sit extrahenda radix cubica ex quantitate $216a^3 + 324a^2d + 216aac + 162add + 216adc + 72acc + 27d^3 + 54ddc + 36dcc + 8c^3$. In hac complexa magnitudine reperio tres terminos, quorum quilibet pro primo assumi æquè posset $216a^3$, $27d^3$, & $8c^3$. At, quia extractio radicis cubicæ ex termino $8c^3$ multò commodior mihi videtur, quàm ex aliis duobus terminis, assumo pro primo termino $8c^3$, a quo elicio radicem cubicam $2c$ pro primo termino radicis quæsitæ; tum per hujus quadrati $4cc$ triplum $12cc$ divido terminos omnes, in quibus quadratum illud cc reperitur: quotus inventus $3d + 6a$ additus primæ parti radicis dat pro summa $2c + 3d + 6a$, cujus cubus subtractus a quantitate proposita nihil relinquit.

COROLLARIUM.

Cæterum, si potestatis cujuslibet compositionem perspectam habeas, experiundo discies solam litteralem expressionem partes radicis

172
dicis exhibere, ex quibus gignitur data potestas; uti perspicuum fiet ex superioribus exemplis.

CAPUT QUINTUM.

De Reductione Radicalium.

Quas hoc loco tradit Newtonus Regulas, ac formulas generales reductionis radicalium, obscuriores Tyronibus fore perspicio, nisi prius, ex quibus notionibus, ac principiis deriventur singulæ, planius faciam.

SYNOPSIS.

Quantitates incommensurabiles non in se ipsis, quod fieri minimè potest, sed per earum potestates indicantur. Instar rationalium capaces sunt operationum arithmeticarum, Methodus multiplicandi, aut dividendi radices, licet cognoscantur tantum earum potestates. Quantitates rationales more irrationalium expressæ: hinc reductio radicalium ad simpliciorum expressionem, & ad minimos terminos. Quomodo dignoscatur, an radicales sint communicantes. Radicales diversi nominis ad idem reductæ. Regula decernendi, utra duarum incommensurabilium major sit. Ex his principiis eadem circa radicales traduntur operationes addendi, subtrahendi, multiplicandi, extrahendique radices, quæ circa quantitates

173
titates rationales. Mutua divisione, vel multiplicatione radicales interdum in rationales transformantur.

DEFINITIONES.

I.

71. **S**i numerus, cujus proponitur extrahenda radix, non sit potestas perfecta, diximus non posse in hoc casu radicem exactam exhiberi numeris absolutis, sive integris, sive fractis, decimalibus, aliisque. Quare præfixa notâ radicalitatis id quasi factum innuitur, quod in numeris accuratè fieri non potest, puta, $\sqrt{2}$, vel $\sqrt[3]{3}$: quæ quidem suppositiæ radices sic designatæ dici solent radices surdæ, quod audiri, numerisque exprimi non possunt.

Radices
surdæ per
earum po-
testates de-
signatæ.

II.

Hæ radices surdæ, quamvis non possint veris numeris exponi, sunt tamen capaces operationum arithmeticarum, puta, Additionis, Subductionis, Multiplicationis, Divisionis &c., quarum operationum cum in Algebra praxi frequens sit usus, quomodo illæ sint peragendæ, mox exponendum erit. Etiam in quantitatibus litteralibus occurrunt radices surdæ, nimirum $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$ &c.

Capaces
operationū
arithmeti-
carum.

III.

Signa radicalia præfixos habent exponentes illius potentiae, cujus radicem designant. Ubi nullus est exponens, uti $\sqrt{a}$, pro radice secundæ

secundæ potentiæ accipitur; at $\sqrt[3]{a}$ significat tertiam radicem, seu cubicam ejusdem quantitatis a &c.

IV.

Quantitates radicales dicuntur simplices, quotiescunque unicum habent terminum, eumque affectum signo radicali, ut $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{abc}$ &c.: dicuntur compositæ, cum duos, aut plures terminos habent affectos signo radicali, ut $\sqrt{a + b}$, vel $\sqrt{a - b + c}$.

V.

Si radicale signum præcedat numerus, aut quantitas litteralis, ut $2\sqrt{3}$, $c\sqrt{b}$ &c., dicitur extra signum: cum quantitas nulla præcedit, ut $\sqrt{a}$, ibi semper intelligitur unitas, ut $1\sqrt{a}$, $1\sqrt{b}$ &c. Quantitates ergo aliæ dicuntur collocatæ extra signum radicale, aliæ sub signo radicali.

VI.

Quantitates radicales, aliæ dicuntur reales, aliæ imaginariæ, vel repugnantes. Reales sunt illæ, quæ, licet numeris exprimi nequeant, lineis tamen designari possunt. Hujusmodi est radix quadrata numeri 8, si ad radicem quadratam numeri 4 referatur, quandoquidem radix illa potest lineâ designari, cum unicuique constet quadratum unius lineæ posse esse duplum alterius, quamvis in numeris id haudquaquam contingat.

VII.

Quantitates radicales imaginariæ sunt illæ, quæ neque lineis, neque numeris possunt exprimi.

exprimi. Talis est radix quadrata magnitudinis $-a$; repugnat enim quantitas, quæ ducta in seipsam producat quantitatem $-a$, quippe quæ neque positiva esse potest, neque negativa.

VIII.

Ut quantitas quæcunque irrationalis, $\sqrt[3]{ab}$, vel $\sqrt[3]{ab}$ elevetur ad potestatem indicatam ab exponente signi radicalis, satis est delere signum radicale, & illa ipsa invariata quantitas ab erit potestas quæsitæ.

IX.

Quantitas complexa posita sub signo radicali scribitur superinductâ desuper lineolâ, quæ terminos omnes comprehendat, sic: $\sqrt[3]{aa + ab + bb}$.

X.

Si radicale signum quodcunque comprehendat sub se aliam quantitatem radicalem, ut $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, vel $\sqrt{a - b\sqrt{c}}$, radix universalis dicitur; & denominatur a signo, quod totam illam quantitatem lineâ superinductâ comprehendit: sic $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ dicitur radix universalis cubica.

XI.

Quantitates radicales $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[2]{de}$ vocantur ejusdem nominis, cum in illis omnibus idem est exponens signi radicalis; diversi nominis verò $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[3]{de}$, cum earum exponentes sunt diversi.

PRINCIPIUM I.

72. **S**I duæ potestates ejusdem gradus inter se multiplicentur, aut dividantur, hinc factum, inde quotus emergens erit potestas ejusdem gradus illius magnitudinis, quæ ex illarum radicibus inter se multiplicatis, aut divisis confurgit.

Res patet inductione; nimirum 4 multiplicatus per 9 (qui sunt numeri quadrati radicem 2, & 3) efficit 36 quadratum numeri $6 = 2 \times 3$. Similiter 8 divisus per 27 (qui sunt cubi radicem 2, & 3) facit $\frac{2}{3}$ cubum radicis $\frac{2}{3}$; & universaliter $aa \times ee = aae$, cujus radix quadratica est ae ; atque in aliis pariter.

COROLLARIUM I.

Multipli-
catio, & di-
visio radica-
lium.

SI furda radix per aliam ejusdem generis radicem surdam multiplicetur, aut dividatur, prodibit radix similis, cujus potestas fit ex earum potestatibus sic multiplicatis, aut divisis, puta, $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Quippe, si 2×3 (qui sunt quadrati radicem $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) faciunt 6 quadratum ipsius $\sqrt{6}$, etiam $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ (quæ sunt ipsorum quadratorum 2, & 3 radices) faciunt $\sqrt{6}$, hoc est, radicem ipsius 6 quadrati; pariterque $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; & univer-

saliter

saliter $\sqrt{a} \times \sqrt{e} = \sqrt{ae}$; & $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{a}{e}}$.

COROLLARIUM II.

HAbes hinc methodum multiplicandi radices, licet cognoscas tantum earum potestates; nam multiplicando potestates generabitur potestas radicis productæ ex multiplicatione radicem.

COROLLARIUM III.

Hinc radicem surdam quadrare, aut cubare, & similiter de aliis potestatibus, est potestatem ipsam quadrare, aut cubare, retenta eadem radicalitatis notâ; puta, quadratum radicis $\sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$; & cubus $\sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{27}$; vel etiam, cum fieri potest, bisecando, aut trisecando exponentem radicalitatis, ut quadratum $\sqrt{3} = \sqrt[4]{3}$. Quod si imperata potestas parem habeat denominationem cum radice surda, deletur signum radicale, ut quadratum $\sqrt{3} = 3$, & cubus $\sqrt[3]{3} = 3$.

COROLLARIUM IV.

Contra verò surdæ radicis radicem quadraticam, cubicam, aliamve extrahere est radicis exponentem duplicare, triplicare, &

L. I. M prout

prout imperatum est, multiplicare. Sic ipsius $\sqrt[6]{2}$, vel $\sqrt[3]{3}$ radix quadratica est $\sqrt[4]{2}$, vel $\sqrt[3]{3}$. Aut, ubi fieri id potest, ex ipsa potestate, cui præfigitur radicalitatis nota, radicem imperatam extrahere, retentâ, quæ prius erat, radicis notâ. Sic ipsius $\sqrt[3]{9}$ radix quadratica est $\sqrt[3]{3}$; nam ipsius $\sqrt[3]{3}$ quadratum $= \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9}$: erit ergo hujus quadratica radix $\sqrt[3]{3}$.

PRINCIPIUM II.

73. **Q**uantitas rationalis quæcunque exprimi potest ad instar radicalis, si elevetur ad potestatem designatam ab exponente signi radicalis, eique præfigatur idem signum radicale.

Ut quantitas a reducatur sub signo radicali $\sqrt[4]{}$, multiplicetur $a \times a \times a \times a$; & facto a^4 præfigatur signum radicale potestatis quartæ $\sqrt[4]{a^4} = a$. Sit reducenda quantitas complexa $a + b$ ad signum radicale $\sqrt[3]{}$: fiat cubus ejusdem $a + b$; nam $\sqrt[3]{a^3 + 3aab + 3abb + b^3} = a + b$.

Co-

COROLLARIUM I.

Hinc quantitates, quæ sunt extra signum radicale, sive sint numericæ, sive literales, pariter sub eodem signo radicali reponi possunt, si elevatae ad potestatem designatam ab exponente signi radicalis multiplicentur per quantitates sub signo existentes. Sic $a \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{aab}$; & $2 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{12}$; $3 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$; $c \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{c^3a}$.

COROLLARIUM II.

Vicissim ex quantitibus sub signo existentibus poterunt nonnullæ extra signum radicale collocari, si ex iis extrahi possit radix a signo radicali denominata. Sic $\sqrt[3]{8} = 2$; & $\sqrt[4]{a^4b^4} = ab$.

Si verò quantitas, quæ est sub signo radicali, non sit perfecta potestas ejusdem gradus, quem designat exponens signi radicalis, sed contineat potestatem perfectam ejusdem gradus multiplicatam per aliam quantitatem, quemadmodum $\sqrt[3]{ac^3}$, reductio in hunc modum obtinebitur. Dividatur quantitas sub signo existens $\sqrt[3]{ac^3}$ per potestatem ejusdem gradus c^3 , seu ejusdem exponentis, quem præfert signum radicale; & relicto quoto a sub signo $\sqrt[3]{a}$, radix

M 2

dix potestatis c^3 , per quam facta fuit divisio, ponatur extra signum scribendo $c \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{ac^3}$. Simili ratione, quia in $\sqrt[3]{4ac^3}$ radix quadrata a signo radicali denominata elici potest non modò ex c , verùm etiam ex 4, scribo $2c \sqrt[3]{a}$

$= \sqrt[3]{4ac^3}$. Pariter, quia in $\sqrt[3]{27ac^3}$ extrahi potest radix cubica non solum ex c^3 , verùm etiam ex 27, scribo $3c \sqrt[3]{a}$. Demum, quia in $\sqrt[3]{54}$ numerus 54 oritur multiplicando 27 per 2, & ex 27 extrahi potest radix cubica, idcirco collocabitur numerus 27 extra signum scribendo $3 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$.

COROLLARIUM III.

EX dictis consequitur jam regula generalis reducendi radicales ad simpliciores expressionem, si modò extra signum radicale collocentur omnes illæ quantitates, ex quibus elici potest radix a signo denominata: quod facile obtinetur, si quantitates radicales dividantur per maximam potestatem a signo radicali denominatam, quæ in iis continetur. Sit

$\sqrt[3]{aac + aab}$: divide per a^2 , & quoto $c + b$ relicto sub signo radicali pone extra signum radicem potestatis dividendis, nempe a : radicalis proposita ad simpliciores expressionem reducta erit $a \sqrt[3]{c + b} = \sqrt[3]{aac + aab}$.

Habes ergo & explicatam, & demonstratam

tam reductionem radicalium ad minimos terminos, quam sic brevissimè Newtonus completitur.

De Reductione Radicalium ad minimos terminos.

74. **R**adicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem divisoris alicujus.

Sic $\sqrt[3]{aabc}$ extrahendo radicem divisoris a fit $a \sqrt[3]{bc}$; $\sqrt[3]{48}$ extrahendo radicem divisoris 16 fit $4 \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{48abc}$ extrahendo radicem divisoris 16 aa fit $4a \sqrt[3]{3bc}$; $\sqrt[3]{a^3b - 4aabb + 4ab^3}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aa - 4ab + 4bb}{cc}$ fit $\frac{a - 2b}{c} \sqrt[3]{ab}$; $\sqrt[3]{\frac{aa^3mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{a^3mm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz} \sqrt[3]{\frac{00 + 4mp}{p^2}}$; $\sqrt[3]{6 \sqrt[3]{\frac{25}{9}}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{25}{9}$ fit $\frac{30}{7} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, sive $\frac{30}{7} \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$, radicemque denominatoris adhuc extrahendo fit $\frac{15}{7} \sqrt[3]{6}$. Et sic $a \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, sive $a \sqrt[3]{\frac{ab}{aa}}$, extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt[3]{ab}$; $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4}$ extrahendo radicem cubicam divisoris $8a^3$ fit $2a \sqrt[3]{b + 2a}$. Haud secus $\sqrt[4]{a^4x}$ extrahendo radicem quadraticam divisoris aa fit $\sqrt[4]{a}$ in $\sqrt[4]{a^4x}$, vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam divisoris

visoris a^4 fit $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. Atque ita $\sqrt[6]{a^4 x^2} : a^4 x^2$ convertitur in $a \sqrt[6]{a x^2}$, vel in $a x \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, vel in $\sqrt[6]{a x^4}$ $x \times \sqrt[6]{a x^4} : a a x$.

Cæterum hæc reductio non tantum concinnandis radicalibus inservit, sed & earum additioni, & subductioni, si modò ex parte radicali conveniant, ubi ad formam simplicissimam reducuntur; tunc enim uniri possunt, quod aliter non fit.

Sic $\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt[4]{3} + 5\sqrt[4]{3}$, hoc est, $9\sqrt[4]{3}$; & $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{\frac{15}{3}}$ per reductionem evadit $4\sqrt[4]{3} - \frac{4}{9}\sqrt[4]{3}$, hoc est, $\frac{32}{9}\sqrt[4]{3}$; & sic $\sqrt[4]{\frac{4ab^3}{cc}} + \sqrt[4]{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$

extrahendo quicquid est rationale evadit $\frac{2b}{c}\sqrt[4]{a}$

$b + \frac{a-2b}{c}\sqrt[4]{ab}$, hoc est, $\frac{a}{c}\sqrt[4]{ab}$; & $\sqrt[4]{\frac{8a^3b + 16a^4 - \sqrt[4]{b^3 + 2ab^3}}{b + 2a - b\sqrt[4]{b + 2a}}}$ evadit $2a\sqrt[4]{3}$:

$\frac{b + 2a - b\sqrt[4]{b + 2a}}{b + 2a}$, hoc est, $\frac{2a - b\sqrt[4]{b + 2a}}{b + 2a}$.

COROLLARIUM.

EX hac radicalium reductione ad minimos terminos dignoscitur, an duæ radicales ejusdem gradus sint inter se commensurabiles, aut communicantes; si nempe contingat, ut reductæ ad simpliciorum expressionem sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant,

quant, erunt inter se, ut quantitates rationales signis præfixæ: qua ratione $2\sqrt[4]{3} : 4\sqrt[4]{3} :: 2 : 4 :: 1 : 2$; pariter $2a\sqrt[4]{b} : 2c\sqrt[4]{b} :: 2a : 2c :: a : c$.

SCHOLIUM.

Quæres quomodo in reducendis radicalibus præsertim numericis innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potestatem aliquam requisitam sit divisibilis nec ne; & quænam sit potestas hujusmodi. Respondeo quantitatem radicalem resolvendam in divisores, inter quos locum obtineant necesse est omnes potestates a prima usque ad requisitam.

Quæritur an $\sqrt[4]{368}$ sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus: resolvendo numerum 368 in suos divisores, reperiens

2	184
4	92
8	46
16	23

Divisores.

tentando nempe divisionem per numeros minores, & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 potestatem primi gradus, 4 secundæ, 8 tertiæ, 16 quarti gradus. Itaque 16 est divisor quæsitus, & consequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$. Cæterum de inventionem hujusmodi

M 4

di

di divisorum in quantitibus magis compositis alibi accuratius agendum erit.

PRINCIPIUM III.

75. **U**T radices surdæ simplices inter se possint addi, multiplicari, & dividi, necesse est illas, si diversæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere, cujus reductionis hæc esto regula generalis.

I. Elevetur quantitas sub cujusque signo radicali existens ad potestatem a signo alterius denominatam.

Reductio
Radicalium
ad eandem
denominatio-
nem.

II. Proprius cujusque signi radicalis index multiplicetur per indicem alterius, & factum erit exponens communis.

Sint reducendæ ad eandem denominationem radices surdæ $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[3]{b}$. Elevetur quantitas a ad potestatem cubicam a^3 a signo alterius denominatam, & quantitas b ad quadraticam denominatam a signo pariter alterius; tum index 2 primæ radices ducatur in 3 indicem alterius: radix prima $\sqrt[2]{a}$ abibit in $\sqrt[6]{a^3}$, & radix secunda $\sqrt[3]{b}$ vertetur in $\sqrt[6]{bb}$, utraque ejusdem denominationis.

Hæc regula usui erit potissimum, ubi exponentes signorum radicalium sunt numeri primi. At verò quando exponentes duarum, aut plurium radicalium sunt numeri compositi, multò expeditior est regula, quam ex Newtono

no subdam; nimirum, quæratu minimus numerus, quem indices radicalium metiantur absque residuo: hic erit communis index, seu exponens, ad quem reducendæ erunt radicales propositæ.

Sint reducendæ $\sqrt[4]{a}$, & $\sqrt[6]{b}$; 12 est minimus numerus, quem exactè metiuntur indices 4, & 6: itaque radicalis utraque reducenda est ad $\sqrt[12]{}$; quare $\sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^3}$
 $\sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{bb}$

Eadem methodo tres surdæ radices $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ diversorum nominum ad idem nomen reducentur $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{625}$, & $\sqrt[12]{343}$.

Patet ergo sensus Newtonianæ regulæ, quam subjicio.

De Reductione Radicalium ad eandem denominationem.

76. **C**um in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio, vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale, cujus index est minimus numerus, quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas quantitates toties dempta una vice in se ducendo, quoties index ille jam major evaserit.

Sic enim $\sqrt[3]{ax}$ in $\sqrt[6]{a^2ax}$ evadit $\sqrt[6]{a^3}$
 x^3 in $\sqrt[6]{a^4xx}$, hoc est, $\sqrt[6]{a^4x^3}$; & $\sqrt[4]{a}$ in $\sqrt[12]{a^3x}$

$\sqrt[4]{ax}$ evadit $\sqrt[4]{aa}$ in $\sqrt[4]{ax}$, hoc est, $\sqrt[4]{a^4x}$; & $\sqrt[6]{6}$ in $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$ evadit $\sqrt[6]{36}$ in $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$, hoc est, $\sqrt[6]{30}$. Eadem ratione $a\sqrt[4]{bc}$ evadit $\sqrt[4]{aa}$ in $\sqrt[4]{bc}$, hoc est, $\sqrt[4]{aabc}$; & $4a\sqrt[4]{3bc}$ evadit $\sqrt[4]{16aa}$ in $\sqrt[4]{3bc}$, hoc est, $\sqrt[4]{48aabc}$; & $2a\sqrt[3]{b+2a}$ evadit $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$.
 Atque ita $\frac{\sqrt[4]{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt[4]{ac}}{\sqrt[4]{bb}}$, sive $\sqrt[4]{\frac{ac}{bb}}$; & $\frac{6abb}{\sqrt[4]{18ab}}$ fit $\frac{\sqrt[4]{36aab^4}}{\sqrt[4]{18ab}}$, sive $\sqrt[4]{2ab}$; & sic in aliis.

COROLLARIUM I.

FRactiones incommensurabiles reducuntur ad communem denominationem iisdem legibus. Sic $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, & $\sqrt[2]{\frac{2}{3}}$ abeunt in $\sqrt[6]{\frac{9}{16}}$, & $\sqrt[6]{\frac{8}{27}}$; atque ita de reliquis.

COROLLARIUM II.

UT decernatur, utra duarum radicalium major sit, reducenda est utraque ad communem exponentem.

Sint $\sqrt[4]{5}$, & $\sqrt[6]{11}$: quæritur utra duarum major sit. Minimus numerus, quem exponentes 4, & 6 exactè metiuntur, est 12: hic erit exponens communis; & proinde $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$; & $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$: patet autem $\sqrt[12]{125}$ excedere radicalem $\sqrt[12]{121}$.

Jactis

Jactis hisce principiis facillima jam erit resolutio sequentium problematum.

PROBLEMA I.

Radicales simplices, & complexas addere, aut unam ab altera subtrahere.

77. Radicales addendæ, aut subtrahendæ reducantur, si fieri possit, ad simpliciorum expressionem per Princip. II., ejusque Coroll. Præterea, si fuerint diversæ denominationis, revocentur ad eandem per Princip. III. Hac adhibita præparatione, si deprehendas easdem esse invicem communicantes, quantitatum rationalium extra signum summa, vel differentia præfigatur quantitati radicali, veluti illius coefficientis: si communicantes non fuerint, fiat earum collectio, vel subductio ope signi +, vel -, perinde ac si essent rationales.

Sic $\sqrt{50} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ Additio & subtractio.
 $= 8\sqrt{2}$; $\sqrt{50} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$.

Et $\sqrt[2]{20} + \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[2]{5} + 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{125} + 2\sqrt[6]{9}$
 $\sqrt[2]{20} - \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[2]{5} - 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{125} - 2\sqrt[6]{9}$.

Et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ summa; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ differentia.

Et $\sqrt{ac^2} + \sqrt{ab^2} = c\sqrt{a} + b\sqrt{a} = \sqrt{c^2a + b^2a}$.
 Sint

Sint addendæ, vel subtrahendæ radicales
 $\frac{am}{pz} \sqrt{oo+4mp}$, & $\frac{z}{a} \sqrt{oo+4mp}$: summa
 erit $\frac{aam+pz^2}{apz} \sqrt{oo+4mp}$; & differentia
 $\frac{aam-pz^2}{apz} \sqrt{oo+4mp}$, vel $\frac{pz^2-aam}{apz}$
 $\sqrt{oo+4mp}$.

COROLLARIUM.

Quantitates radicales compositæ adduntur,
 vel subtrahuntur iisdem planè legibus,
 quibus quantitates rationales.

Additio.

Subtractio.

$$\begin{array}{rcl} a+2\sqrt{ab}+3\sqrt{ac} & a+2\sqrt{ab}+3\sqrt{ac} \\ b-\sqrt{ab}+5\sqrt{ac} & b-\sqrt{ab}+5\sqrt{ac} \\ \hline a+b+\sqrt{ab}+8\sqrt{ac} & a-b+3\sqrt{ab}-2\sqrt{ac} \end{array}$$

PROBLEMA II.

Quantitates radicales inter se multiplicare.

78. I. **R**adicales ejusdem nominis sub signis
 existentes inter se mutuò multipli-
 centur, productoque idem radicale signum præ-
 figatur: $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$; & $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10}$
 $= \sqrt[3]{40}$.

II.

II. Si fuerint diversi nominis, revocen-
 tur ad idem per Princip. III. Sic $\sqrt{ax} \times \sqrt{aax}$

$$= \sqrt{a^3 x^3} = \sqrt{a^2 x^2} = \sqrt{a^2 x^2}.$$

III. Si suos habeant coefficientes rationa-
 les, necesse est eos quoque inter se mutuò mul-
 tiplicare: $2\sqrt{a} \times 3\sqrt{b} = 6\sqrt{ab}$.

IV. Si fractiones sint radicales, producto
 idem radicale signum præfigatur.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{12}{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$\sqrt{\frac{27}{5}} \times \sqrt{5} = \sqrt{27}$$

$$\sqrt[6]{5} \times \sqrt[6]{\frac{1}{20}} = \sqrt[6]{\frac{5}{20}} = \sqrt[6]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Multipli-
 catio.

$$\frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{5}} \times \frac{5}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{15}{36} \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{5}{12} \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{10}{12}$$

$$\sqrt{\frac{1}{15}} = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{1}{15}}.$$

V. Quantitates irrationales per se mutuò
 multiplicatæ producunt interdum quantitatem
 rationalem, ex qua elici potest radix, quam
 radicale signum ostendit.

$$2\sqrt{ab^2} \times 4\sqrt{a} = 8\sqrt{a^2 b^2} = 8ab$$

$$2\sqrt[3]{a^2} \times 3\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a^3} = 6a$$

$$3\sqrt{\frac{5}{a}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{a}} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{a} = \frac{15}{2a}$$

$$3\sqrt{\frac{1}{a}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{aa}} = \frac{3}{2a}$$

VI. Si quantitates radicales sint commu-
 nicantes, multiplicentur primò inter se quan-
 titates

titates extra signum; tum earum productum multiplicetur per quantitatem sub signo existentem; & factum prodit rationale.

$$3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$$

$$\sqrt{x^2 + x^2 a^2} \times \sqrt{x^2 a^2 + a^4} = x \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\times a \sqrt{x^2 + a^2} = ax^2 + a^3 x$$

VII. Si radicalis $\sqrt{a+b}$ multiplicanda sit per rationalem $c+d$, vel ita exprimi productum poterit $c+d\sqrt{a+b}$; vel reducatur rationalis $c+d$ ad idem signum radicale, eam elevando ad potestatem ejusdem gradus, ita ut fiat $\sqrt{c^2 + 2cd + d^2}$; atque ex earum multiplicatione producto præfigatur idem radicale signum.

VIII. Si radicales compositas per alias simplices, vel pariter compositas multiplicare oporteat, ducantur singuli termini unius in singulos alterius juxta regulas radicalium simplicium observata lege signorum +, & -.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{5} + \sqrt{3} & & 3 + 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} & & 5 - 3\sqrt{5} \\ \hline 5 + \sqrt{15} & & 15 + 10\sqrt{5} \\ -\sqrt{15} - 3 & & -9\sqrt{5} - 30 \\ \hline 5 - 3 = 2 & & 15 + \sqrt{5} - 30 = \sqrt{5} - 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a + \sqrt{a+x} \\ b - \sqrt{a+x} \\ \hline 2ab + b\sqrt{a+x} \\ -2a\sqrt{a+x} - a + x \\ \hline 2ab + b\sqrt{a+x} - 2a\sqrt{a+x} - a + x \end{array}$$

Demonstratio deducitur ex primo principio hujus capitis.

SCHOLIUM I.

Quamvis in multiplicatione radicalium opus non sit eas ad simplices suas expressiones revocare, tamen non raro id proderit, ut facilius cognosci possit, quæ producta partialia multiplicatione peracta sint simul conjungenda, aut a se mutuo subtrahenda. Ita, si multiplicare oporteat $\sqrt{72} - \sqrt{45}$ per $\sqrt{60} - \sqrt{24}$, productum erit $\sqrt{4320} - \sqrt{2700} - \sqrt{1728} + \sqrt{1080}$, in quo non ita facile apparet, num partes ejus inter se mutuo contrahi possint; sed reductis ad simplices suas expressiones singulis utriusque quantitatis partibus, quia $\sqrt{72} - \sqrt{45} = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$, $\sqrt{60} - \sqrt{24} = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{6}$; idcirco erit productum ipsarum $12\sqrt{30} - 6\sqrt{75} - 12\sqrt{12} + 6\sqrt{30}$, in quo statim apparet $12\sqrt{30} + 6\sqrt{30} = 18\sqrt{30}$; & præterea ultro etiam constat $-6\sqrt{75} - 12\sqrt{12}$ contrahi quoque posse inter se, si ulterius reductæ

192
ductæ mutantur in $-30\sqrt{3}$ & $-24\sqrt{3}$,
adeoque ambæ simul $-54\sqrt{3}$.

SCHOLIUM II.

HÆc reductio usui etiam esse potest in multiplicatione radicalium, ut facilius discerni possit, quæ producta oriuntur rationalia, quæve irrationalia. Ita multiplicando $\sqrt{180}$ per $\sqrt{125}$ non aliter cognosci potest, num productum inde ortum $\sqrt{22500}$ sit rationale nec ne, quàm extrahendo radicem quadraticam ex 22500; sed reductis radicalibus ad simpliciores suos terminos, quia una fit $6\sqrt{5}$, & altera $5\sqrt{5}$, atque adeo commensurabiles sunt, clarè liquet productum, quod ex earum multiplicatione oritur, rationale esse, cum sit 150.

PROBLEMA III.

Radicales simpliciores, & complexas dividere.

79. I. **R**adicales ejusdem nominis sub signis existentes per se mutuò dividantur, & quotienti idem radicale signum præfigatur observata ubique lege signorum +, & -; studio autem brevitatis in exemplis referendis signum divisionis: usurpabo.

$$\sqrt{2}:\sqrt{2}=1; \sqrt{5}:\sqrt{5}=1; \sqrt{b^2}:-\sqrt{bc}$$

$$=-\sqrt{\frac{b}{c}}; -\sqrt{a}:-\sqrt{b}=+\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

II.

193
II. Si fuerint diversi nominis, revocentur ad idem, ut supra.

III. Si quantitates radicales habeant suos coefficientes sive numericos, sive litterales, dividantur seorsum quantitates extra signum, & seorsum, quæ sub signo existunt $6\sqrt{ab}:2$

$$\sqrt{a}=3\sqrt{b}; 8\sqrt{3}:4\sqrt{2}=2\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{6}:2$$

$$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt{2}; 5\sqrt{2}:3\sqrt{2}=\frac{5}{3}; \frac{1}{2}:\frac{3}{4}\sqrt{2}=\frac{4}{6}$$

Divisio.

$$\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}; \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}:\frac{5}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{27}{20}\sqrt{\frac{6}{10}}=\frac{27}{20}$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}}$$

IV. Si divisio peragi non possit, notabitur quotus ad instar fractionis. $\sqrt{7}:\sqrt{5}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}= \sqrt{\frac{7}{5}}$.

V. Si dividere oporteat quantitatem radicalem per rationalem, vel vice versa, quantitas rationalis elevetur ad potestatem denominatam a signo quantitatis radicalis, & ipsa potestas sub signo collocetur, ut ad instar radicalis tractari possit. $\sqrt{ab^2}:b=\sqrt{ab^2}:\sqrt{b^2}$

$$=\sqrt{a}; a:\sqrt{b}=\sqrt{aa}:\sqrt{b}=\sqrt{\frac{aa}{b}}.$$

VI. Si divisor, & dividendus sint communicantes, satis est dividere quantitates rationales extra signum. $6\sqrt{3}:3\sqrt{3}=2$;

$$a\sqrt{a+b}:b\sqrt{a+b}=\frac{a}{b}.$$

VII. Quantitates radicales compositæ iisdem

L. I.

N

dem

dem legibus per se mutuò dividuntur; nimirum reducantur ad eandem denominationem, si diversi nominis fuerint, tum dividantur uti rationales complexæ, & singulis quotis radicale signum præfigatur.

$$\begin{array}{l} \text{Divid. } \sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27} \\ \text{Divisor } \sqrt{3} \\ \text{Quotus } \sqrt{5} + \sqrt{7} - 3 \\ \text{Divid. } 8 + 4\sqrt{1} \\ \text{Divisor } 2 + \sqrt{1} \\ \text{Quotus } 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Div. } \sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}; \\ \text{Divis. } \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ \text{Quot. } \sqrt{c} - \sqrt{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Divid. } aabb - aab \\ \text{Divis. } ab + a\sqrt{b} \\ \text{Quotus } a\sqrt{b} - aab \\ \text{Quotus } a\sqrt{b} + aab \end{array}$$

SCHOLIUM I.

Quotus, qui oritur ex mutua quantitatuum radicalium divisione, non semper est quantitas alia radicalis, sed interdum est quantitas commensurabilis; si nempe quantitates sub signis existentes per se mutuò divisæ producant quotientem, ex quo elici possit radix, quam radicale signum ostendit: $6\sqrt{18} : 2\sqrt{2} = 3\sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$; $8\sqrt{ab} : 2\sqrt{a} = 4b$.

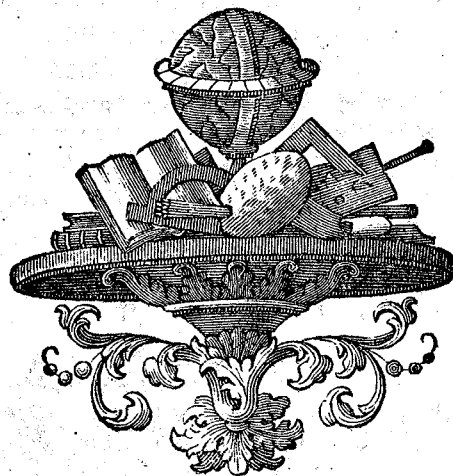
SCHO-

SCHOLIUM II.

Si ex denominatore tantum, vel ex solo numeratore extrahi possit radix, utique extrahitur, sed alteri signum radicale præfigitur:

$$\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{xx}{b}} = \frac{x}{\sqrt{b}}.$$

Harum omnium operationum demonstratio repetenda est ex Principio I. hujus Cap.





PARS SECUNDA.

DE REGULIS ARITHMETICÆ.

80. **H**Actenus jacta sunt necessaria Arithmetices, & calculi litteralis fundamenta: sequuntur jam variæ Regulæ non solum Analystis, verum etiam mercatoribus, immo verò & cuilibet privato homini in commerciis, conventisque mutuis maximè utiles. Primo autem loco se se offert regula illa, quæ ob insignem, quem in tota Mathesi usum obtinet, aurea dici solet, cujus quatuor sunt partes; nimirum regula proportionum directæ simplex, eversa simplex, directæ composita, eversa composita. Singularum præcepta, & praxim hac secunda parte explicare aggredior.

CAPUT PRIMUM.

SYNOPSIS.

Regula trium, ut vocant, seu proportionum directæ generali lemmate demonstratur. Qua certa lege ordinatio trium datorum numerorum sit instituenda. Terminorum diversæ denominationis reductio ad eandem denominationem, & specierum pariter reductio

N 3

modò

198
modò ad minimam sui ordinis speciem, modò ad maiorem. Terminorum etiam interdum præparatio per divisionem, aut per multiplicationem. Variæ praxes regulæ directæ trium. Cautio ne tanquam proportionalia habeantur, quæ verè proportionalia non sunt: quod exemplis luculenter ostenditur. Qua ratione non rarò analogiæ instituantur etiam inter quantitates heterogeneas; & quomodo inter easdem multiplicatio, aut divisio haberi possit. Examen regulæ trium.

Regula proportionum directæ simplex.

DEFINITIO.

Methodus itaque, qua ex tribus numeris datis eruitur quartus proportionalis incognitus, ab aliis regula proportionum dicitur, ab aliis ob tres numeros datos regula trium. Cum autem quæritur quartus numerus, ad quem ita sit tertius, ut primus est ad secundum, tunc regula dicitur directæ.

LEMMA.

81. **S**i quatuor termini fuerint proportionales $a:b::c:x$, factum ab extremis æquatur facto a mediis.

Dem.: nam, si $a:b::c:x$, erit $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, uti uberius patebit ex definit. rationum æqualium

199
lium Lib. II. Parte III.; & utrinque fractiones æquales multiplicando per b , & x , fiet $ax = bc$. Quod erat &c.

COROLLARIUM.

Hinc, si æqualia $ax = bc$ utrinque dividantur per a , prodibit $x = \frac{bc}{a}$.

PROBLEMA I.

Terminorum quatuor proportionalium $a:b::c:x$ datis tribus a, b, c , quartum incognitum x invenire.

Resolutio problematis pendet ex Lemm., ejusque Coroll.; si enim tertius per secundum multiplicetur, & productum dividatur per primum, quotiens exhibet quartum proportionalem quæsitum $\frac{bc}{a} = x$.

EXEMPLUM I.

Duo Operarii uno die faciunt decem jugera: operarii 12 eodem die quot conficiunt? Vides regulam trium directam in hac quæstione utendum. Dispositis itaque terminis $2:10::12:60$, invenies 60 jugera pro quarto termino proportionali, qui quærebatur.

EXEMPLUM II.

Duo gradus maximi terræ circuli continent milliaria Belgica unius horæ 48: igitur gradus 360, hoc est, circumferentia tota quot continet milliaria? Ut primus numerus est ad secundum, ita tertius ad quartum, qui quæritur. Quare ordinatis terminis, & facta operatione inuenies 8640 quartum proportionalem, qui quærebatur.

SCHOLION.

82. **Q**uia verò frequenter quæstiones per regulam trium solvendæ præpostero ordine proponuntur, interdum etiam diversæ monetæ, mensuræ, vel pondera in uno numero reperiuntur, aliæque difficultates non raro occurrunt, ut faciliè hærere, atque impediri possit is, qui parum in rebus arithmeticis est versatus, idcirco sequentes observationes adjicio.

OBSERVATIO I.

Tres dati numeri hac lege ordinandi sunt, ut ille, qui quæstionem habet annexam, (semper enim unus illorum quæstionem secum affert) tertio statuatur loco; reliquorum autem ille, qui de eadem est re, hoc est, qui tertio similis est, primum occupet locum; mediam denique sedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, similis esse debet.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Quanti constat una libra ferici, si 60 libræ emptæ sunt aureis 20? In hac quæstione præpostere positi sunt numeri; nam 1 libra, cujus primo loco mentio facta est, quæstionem habet annexam, ac proinde tertium occupare debet locum; primum verò numerus 60 librarum. Itaque sic erunt termini disponendi:

$$60:20::1:\frac{20}{60}=\frac{1}{3} \text{ unius aurei.}$$

EXEMPLUM IV.

Si Sol horis 24 peragat gradus 360, quot horis peragit gradus 30? Cum Sol eadem æquabili celeritate transigat spatia temporibus proportionalia, sic erit instituendus analogismus: ut gradus 360 ad gradus 30, ita tempus horarum 24 ad tempus quæsitum, nempe horarum 2, ut ex operatione constabit.

EXEMPLUM V.

Si cui libeat altitudinem Turris. in plano erectæ per umbram æstimare, faciliè per regulam trium id assequi poterit. Erigatur in eodem plano, vel saltem parallelo baculus notæ longitudinis, puta, pedum 6, projiciens splendente sole umbram, cujus mensura sit pedum 2: eodem tempore mensuretur turris umbra,

umbra, quæ sit pedum 20, & quæratnr, quanta sit turris altitudo? Quoniam itaque in simili situ umbræ sunt altitudinibus proportionales, erit $2:6::20:x$; & facta operatione invenitur $\frac{120}{2} = x = 60$ ped. altitudo turris.

OBSERVATIO II.

83. **S**I verò contingat homologos terminos in quæstione propositos non ejusdem, ut loquuntur, denominationis esse, reducendi prius erunt termini ad eandem denominationem, quàm procedat hujusce regulæ praxis.

Terminorum per reductionem præparatio.

EXEMPLUM VI.

SI tres uncix alicujus mercis valeant quindecim solidos, quanti valebunt ejusdem libræ quatuor? Cum hic quatuor supponantur termini proportionales, quorum duo pondus respiciunt, reliqui duo valorem; qui autem pondus respiciunt, non eandem fortiantur denominationem, reducendi sunt hi duo termini ad eandem denominationem, priusquam instituatnr hujus regulæ praxis; adeoque vel pro 3 uncis substituendum erit $\frac{1}{4}$ libræ, ita ut quæstio sic instituatnr: ut $\frac{1}{4}$ libræ ad 4 libras, sic 15 solidi ad valorem quæsitum; vel pro 4 libris substituendo 48 uncias, sic quæstio instituetur: ut 3 uncix ad 48 uncias, sic 15 solidi ad valorem quæsitum. Utrovis modo prodibit

bit valor quæsitus 240 solidorum, hoc est, 12 librarum.

EXEMPLUM VII.

SI libræ 10 $\frac{2}{3}$, & uncix 7 $\frac{1}{2}$ Cerae constant aureis 2, & juliis 6; quantum cerae emetur affibus 90?

Reductio diversarum specierum ad minimam sui ordinis.

In hoc exemplo valor Romanæ monetæ usurpatur, in qua quatuor minimi nummi, seu quatrini conficiunt unum assem, quem bajochum vocant, & 10 asses unum julium, & 10 julii unum aureum nummum. Itaque tres termini sic erunt ordinandi.

Aur. Jul.	Lib. Unc.	Asses	Unc.
2 6	10 $\frac{2}{3}$ 7 $\frac{1}{2}$	90?	45 $\frac{207}{260}$

Quia verò in terminis homologis, primo, ac tertio diversæ monetæ continentur, reducendæ erunt omnes ad minimam monetam ibi expressam, ut ad asses, eruntque in primo numero asses 260. Rursus, quia in secundo numero reperiuntur diversa pondera, reducenda erunt ad minimam ibi expressa, ut ad uncias, quarum 12 efficiunt unam libram, eruntque in 10 $\frac{2}{3}$ libris uncix 124 $\frac{4}{5}$, quibus si addantur uncix 7 $\frac{1}{2}$, fient uncix 132 $\frac{3}{10}$. Quo pacto autem fractiones vel solæ, vel unæ cum integris multiplicari inter se debeant, aut dividi, paulo ante docuimus. Itaque sic stabit exemplum reductum.

As.	Unc.	As.	Unc.
260	132 $\frac{3}{10}$	90?	45 $\frac{207}{260}$

Illud

Illud verò hoc loco annotandum est, fractionem ex multiplicatione medii numeri per tertium productam, licet ejus numerator sit denominatore major, non debere redigi ad integra, donec divisio sit absoluta, ne operatio impediatur. Unde, quia multiplicatio medii numeri per tertium facit $\frac{119070}{10}$, dividenda erit hæc fractio, antequam ad integra reducat, per primum numerum: quæ divisio dabit hanc fractionem $\frac{119070}{2600}$, continentem uncias $45\frac{207}{260}$.

OBSERVATIO III.

84. **P**eracta operatione, semper reducenda est quarti numeri species ad majorem, si fieri possit, hoc est, pondera, mensuræve ad majora pondera, vel mensuras, ut uncia ad libras, palmi ad pedes, vel pedes ad passus, passus autem ad milliaria; & sic de reliquis mensuris, ut constat ex Probl. XI. n. 53.

Reductio
quarti nu-
meri ad ma-
jorem spe-
ciem.

EXEMPLUM VIII.

Quidam conficit 7 diebus milliaria 210: quæro jam, quot diebus milliaria 1600 conficiet, si quotidie iter faciat, & cursum nec remittat, nec intendat?

Milliar.	Dies	Milliar.	Dies
210	7	1600?	$53\frac{70}{210}$
			Fractio

Fractio hæc $\frac{70}{210}$ in quarto numero, si numerator per 24 multiplicetur, productusque numerus per denominatorem dividatur, redigetur ad horas 8, uti fusè docuimus Probl. XI. n. 53.

EXEMPLUM IX.

Quanti constabunt $\frac{7}{8}$ unius ulnæ Panni, si $\frac{3}{4}$ unius aurei quispiam emerit $\frac{1}{3}$ unius ulnæ?

Ulnæ	Aur.	Ulnæ	Aur.
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$1\frac{31}{32}$

Multiplicatio medii numeri per tertium fractionem efficit $\frac{21}{32}$, qua divisa per primum numerum, invenietur hæc fractio $\frac{63}{32}$ unius aurei, quæ facit aureum $1\frac{31}{32}$. Hæc pariter fractio $\frac{31}{32}$ unius aurei reducta ad species Romanæ monetæ, idest, ad julios, bajochos, & quatrinos, dabit jul. 9, bajoch. 6, quatr. $3\frac{1}{2}$.

OBSERVATIO IV.

85. **P**ossunt interdum duo numeri ex datis tribus, ut primus, & secundus, vel primus, & tertius, ad minores redigi, ut facilius

Termino-
rum prepa-
ratio per di-
visionem.

cilior reddatur operatio. Quod quidem fiet, si tam primus, quam secundus, vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam utriusque mensuram notam, sive ea maxima sit, sive non maxima, dividatur, ubi id fieri posse perspicitur, & loco illorum quotientes statuuntur.

EXEMPLUM X.

DAta sit proportio $6:9::8:x=\frac{72}{3}=12$.
Si primum, & secundum terminum per 3 dividamus, eorumque loco quotientes substituantur, habebitur proportio $2:3::8:x=\frac{24}{2}=12$.

Sin primum, & tertium dividamus per 2, prodibit $3:9::4:x=\frac{36}{3}=12$.

Si denique primum, & secundum dividamus rursus per 3, prodibit $1:3::4:\frac{12}{3}=12$ eodem ubique successu.

Similiter in speciebus, si exponatur analogismus
 $abc:ade::bef:Q=\frac{ade \times bef}{abc}=\frac{deef}{c}$,
 substitue
 $bc:de::bef:Q=\frac{de \times bef}{bc}=\frac{deef}{c}$,
 vel etiam
 $ac:ade::ef:Q=\frac{ade \times ef}{ac}=\frac{deef}{e}$,
 vel denique
 $c:de::ef:Q=\frac{deef}{c}$.

SCHO-

SCHOLION.

Hæc terminorum præparatio usui erit, ut in regula trium perficienda multiplicationis, vel divisionis labor quandoque vitetur, si talis divisor eligi possit, ut quotus ex divisione alicujus termini, ac potissimum primi proveniens, sit unitas, ut in adducto exemplo.

OBSERVATIO V.

86. **A**liquando multiplicatione fiet accommodata terminorum præparatio; si nempe vel primus, & secundus, vel primus, & tertius eodem communi multiplicatore multiplicentur, quo pacto fractionum molestia facile evitatur.

Terminorum
præparatio
per multi-
plicationem.

EXEMPLUM.

Exponatur analogismus $\frac{3}{2}:4::3:x$: commodè substitui poterit vel duplum primi, & secundi $5:8::3:x$, vel duplum primi, & tertii $5:4::6:x$.

Harum præparationum fundamentum est, quoddam multiplo ad æquè multipla eadem est ratio, atque simplorum ad simpla; puta,

$$3 \times 2:4 \times 2::3:4;$$

$$\frac{3}{2}:\frac{4}{2}::3:4.$$

OB-

OBSERVATIO VI.

Variæ præ-
ces.

87. **I**N regula trium perinde est, siue multiplicationem, siue divisionem prius instituiamus; siue enim terminorum secundi, tertiique invicem ductorum productum per primum dividamus; siue mediorum, secundi, & tertii, utrovis per primum diviso, quotientem in reliquum ducamus, perinde omnino est; idem enim utcumque prodibit terminus quartus. Nam, si $a:b::c:d$, erit omnino $\frac{bc}{a} = \frac{b}{a} \times c = \frac{c}{a} \times b$; vel in numeris $3:9::6:18$, erit $\frac{9 \times 6}{3} = \frac{9}{3} \times 6 = \frac{6}{3} \times 9 = 18$. Hinc pro re nata eo ordine instituantur operationes, uti commodiori calculo videbitur magis accommodatum.

In tradenda regula multiplicatio præferatur, qua fractionum incommodum melius evitetur. Nam in hac analogia $2:5::8:x$, si prius secundum per primum dividam, prodibit quotus $2\frac{1}{2}$ per 8 multiplicandus; si verò mediorum productum 40 dividam per primum, multò facilius sine fractionis incommodo obtinebitur quartus proportionalis; nam tum $8 \times 2\frac{1}{2} = 20$, tum $\frac{40}{2} = 20 = x$.

OB-

OBSERVATIO VII.

88. **O**pportunè monet Wallisius, hanc, quam præ manibus habemus, regulam non nisi de quantitibus verè proportionalibus procedere; docet enim, *datæ quantitati aliam in data ratione ponere*. Cautio de non proportionalibus. Cavendum itaque, nequando fraudi sit, indeque error suboritur, quòd ea tanquam proportionalia habeantur, quæ verè proportionalia non sunt: in quem errorem videntur impegisse scriptores quidam in referendis hujus regulæ exemplis depromptis a rebus physicis, quæ hanc terminorum proportionalitatem minimè patiebantur.

EXEMPLUM I.

SI pondus gravitate sua motum duobus temporis minutis 20 pedes descendat; & quæ-ratur, quot pedes conficiet minutis 10, ex præscripto hujus regulæ prodibit quartus 100, qui tamen quæsito non satisfacit, quia grave descendens non æquabili procedit motu, sed motu æquabiliter accelerato; atque adeo termini eandem ubique rationem non retinent.

EXEMPLUM II.

Sit vas aquà repletum, atque per exiguum in fundo foramen ponamus intra 2 minuta effluere 3 congios; inveniri autem debeat,

L. I.

O

quanto

quanto tempore 100 congii effluant. Tres in hoc casu dantur numeri: quartus inveniendus. Enim vero vel ipsa experientia docet aquam sub initium celerius, postea tardius effluere; adeoque quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Hac de causa Clavius in hoc referendo Exemplo, ut locum habeat regula proportionum, supponit aquam eadem semper celeritate effluere.

Constat itaque hac regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportionem constiterit.

SCHOLION I.

Dubitatio
de quanti-
tibus he-
terogeneis.

89. **A** Cutè hoc loco dubium movet, quod egregie dissolvit circa usum regulæ proportionum, idem Wallisius; nempe, cum certum sit analogias non raro institui inter quantitates heterogeneas, puta, ut linea ad lineam, sic pondus ad pondus, qui fieri possit, ut una in alteram multiplicetur, aut per eam dividatur? Quale enim factum illud erit, aut qualis quotiens?

Docet itaque in hac analogia non tam comparari lineam ad pondus, quæ quidem planè heterogenea sunt, nec invicem comparanda, sed rationem duarum inter se linearum ad rationem duorum invicem ponderum. Quæ quidem rationes invicem homogeneæ sunt, puta, dupla, tripla, sesquialtera, sumpta denominatione a quotiente antecedentis quantitatis per

per consequentem divisæ. Est autem quotiens ille, ut superius traditum est, vel numerus, vel saltem in genere numeroso aliquid, ipsisque numeris homogeneum, nempe numerus fractus, aut surdus, aut tale quid. Cum itaque nihil hic spectetur aliud, quam ratio, sive etiam quotiens, licebit pro datis quantitibus numeros in eadem ratione constitutos substituere; atque adeo quantitates illas, numerorum ad instar tractare, & versare multiplicando, ac dividendo.

SCHOLION II.

EX Lemmate facile colligitur, qua ratione regula trium possit examinari; nam, si idem procreetur numerus ex primo numero in quartum inventum, qui ex secundo in tertium, dubitandum non est, quin rectè inventus sit quartus numerus proportionalis; si verò non idem numerus gignatur, repetenda erit operatio. Probatio
regulæ triū.

CAPUT SECUNDUM.

SYNOPSIS.

CRiterium proportionis directæ, & reciprocæ ex natura quæstionis repetendum. Omnis proportio reciproca in directam peræque converti potest. In proportionem directam spectatur æqualitas quotorum primi per secundum,

dum, & tertii per quartum; in reciproca vero æqualitas rectangulorum primi in secundum, & tertii in quartum: hinc regula trium inversa ex eodem Lemmate demonstratur. Utriusque proportionis exempla, & quæstiunculæ afferuntur complures, ut assuescant Tyrones ex natura problematis dijudicare, utra proportio in quæstione contineatur, directa ne, an reciproca. Exponitur etiam aliud proportionis reciproce indicium, quod exemplis confirmatur.

De aurea Regula reciproca.

DEFINITIO.

90. **A**urea quæ dicitur regula inversa, sive reciproca docet datis tribus quantitibus quartam reciproce proportionalem invenire. Dicuntur autem reciproce proportionalia, quando rationum comparatarum altera est alterius inversa.

Quomodo a directa differat regula inversa, hoc velut criterio assequuntur Tyrones. Quoniam in regula directa, uti prædiximus, eadem proportio esse debet inter primum numerum, & secundum, quæ inter tertium, & quartum, sit, ut permutando eadem proportio sit inter primum, & tertium, quæ inter secundum, & quartum. Hac enim ratione semper consideranda est quatuor terminorum proportio in regula trium, quæ jubet, ut e tribus numeris

numeris datis duo homogenei primo, & tertio loco disponantur, reliquus, qui homogeneus est quarto incognito, in medio consistat; atque adeo in comparandis homogeneis terminis, si primus sit ad tertium, uti secundus ad quartum incognitum, hoc est, si, quando primus major, vel minor tertio, tantò secundus sit major, vel minor quarto incognito, quæ tum solvenda quæstioni adhibebitur, regula proportionum directa appellabitur: id quod in exemplis hæcenus adductis perspicuum esse potest.

Criterion
proportio-
nis reci-
proce.

Solet autem sæpenumero accidere, ut ex natura quæstionis propositæ quantò primus est major minorve tertio homogeneo, tantò quartus incognitus debeat esse major minorve secundo sibi pariter homogeneo, hoc est, ut primus ad tertium, ita quartus incognitus ad secundum. Itaque, si dentur numeri ita dispositi 4. 18. 6. 12, erunt reciproce proportionales, quia primus est ad tertium reciproce, ut secundus ad quartum; nam $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, & $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$: est autem evidens rationem $\frac{2}{3}$ inversam esse alterius $\frac{3}{2}$; atque in aliis similiter.

91. **E**st etiam sedulò observandum, proportionem omnem reciprocam in directam conversum iri; si qui in reciproca est terminus tertius, statuatur in directa primus; nempe, cum primus terminus sit ad tertium, uti quartus incognitus ad secundum, erit invertendo uti tertius ad primum, ita secundus ad quartum incognitum, qua terminorum dispositio-

Proportio
reciproca in
directa mu-
tatur.

ne proportio reciproca ad directam revocabitur, ut in hoc exemplo.

In proportione reciproca 9. 20. 3. 60

In proportione directa 3. 20. 9. 60

sive 3. 9. 20. 60.

Præterea id etiam diligenter animadvertas velim, in ea, quam proportio reciproca postulat, terminorum dispositione, primum, & secundum terminum esse medios, tertium, & quartum extremos esse proportionis directæ.

COROLLARIUM I.

Hinc datis quatuor terminis reciproce proportionalibus a, d, b, x , rectangulum, sive factum a primo in secundum ducto æquabitur rectangulo, sive facto a tertio in quartum, hoc est, $ad = bx$; & dividendo utrinque per b , invenietur quartus reciproce proportionalis $\frac{ad}{b} = x$.

COROLLARIUM II.

Habes etiam, quomodo a directâ differat proportio reciproca. Illic spectatur æqualitas rationum, vel quotorum: hic æqualitas rectangulorum, sive factorum; cum enim in directâ proportionem terminus primus sit ad secundum, uti tertius ad quartum quæsitum, quotus termini primi per secundum divisi æquatur quotu tertii per quartum divisi; (quod est æqualium

Utriusque
proportio-
nis aliud
discrimen.

æqualium rationum simplicissimum criterium) in proportionem verò inversâ factum sub primo & secundo æquale est facto sub tertio & quarto.

PROBLEMA I.

Datis tribus quantitatibus quartam reciproce proportionalem invenire.

Resolutio problematis, & huiusce regulæ praxis continetur in Coroll. I.; nam, si trium terminorum, quod sit ex primo in secundum ducto, dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.

SCHOLION.

92. **I**N definienda regula reciproca docuimus, quo velut criterio ex natura problematis distinguere oporteat quæstiones per hanc solvendas, ab iis, quæ solvendæ sunt per directam: quod brevissimè Wallisius sic exponit. Si ex natura quæstionis, quod major sit tertius terminus, eò major requiratur quartus, regulæ directæ opus est; sin quod major tertius, eò minor requiratur quartus, sive quod minor tertius, eò major quartus, inversæ regulæ opus erit. Quia verò experimento didici, proposita quavis quæstione per regulam trium solvenda, Tyrones hæere solitos, utra regula, everfane, an directâ sit adhibenda, hinc, ut exercitatione similium problematum assuescant ex natura quæstionis statim cognoscere proportio-

nis genus dirimendæ quæstioni accommodatum, exempla plurima afferam in medium, & in singulis planum faciam, qua via, & ratione idipsum scrutari oporteat.

EXEMPLUM I.

SI quis 12 horis conficiat milliaria 20, idem horis 6 quot conficiet?

Regula directa.

Quoniam hic manifestum est longiori tempore plura conficienda milliaria, quod major est terminus tertius, numerus horarum, eod major erit & quartus, numerus milliarii quæsitus; vel, quod eodem recidit, uti se habet primus 12 ad tertium sibi homogeneum 6, ita secundus 20 ad quartum incognitum; propterea per auream regulam directam invenietur terminus quartus $= \frac{20 \times 6}{12} = \frac{120}{12} = 10$.

EXEMPLUM II.

OPus a viris 12, diebus 20 perficiendum, si aggrediantur viri 6, quot illi diebus hoc perficient?

Regula inversa.

Liquet ex natura quæstionis pauciores viros nonnisi pluribus diebus idem opus confecturos; adeoque, quo minor est terminus tertius, virorum numerus, eod major futurus sit quartus terminus, numerus dierum requisitus; vel, quod major est terminus primus tertio, eod major erit quartus secundo. Per regulam itaque

que inversam quærendus est terminus quartus, multiplicando primum in secundum, productumque dividendo per tertium, & quotiens erit quæsitus $= \frac{12 \times 20}{6} = \frac{240}{6} = 40$.

EXEMPLUM III.

SI tapeti lato pedes 9 obducendus sit pannus vilior, qui totum tegat latus pedes 3, quæritur quot pedes longus esse debeat, ut negotio sufficiat?

Hic etiam ex natura quæstionis manifestum est, quod minorem habeat latitudinem pannus hic, eod majorem requiri longitudinem, qua latitudinis defectus suppleatur. Per regulam inversam reperietur longitudo quæsitæ $= \frac{9 \times 20}{3} = \frac{180}{3} = 60$.

SCHOLIUM.

QUæ autem de terminis rite ordinandis, quoties quæstio præpostero ordine proponitur, aliisque operationibus compendiariis in regula directa præcepimus, eadem in regula eversa, proportionem servata, locum habent, & identidem in referendis exemplis annotabimus.

EXEM-

EXEMPLUM IV.

93. **P**Annum 9 ulnarum, cujus latitudo est 3 palmorum, emit quis, ut sibi vestem conficiat: quot ergo ulnæ alterius panni, cujus latitudo est 2 palmorum, requiruntur ad eandem vestem, vel similem conficiendam?

Quoniam quæstio est de panno latitudinem habente 2 palmorum, termini erunt ordinandi ea lege, quam præscripsimus in regula trium directa, hoc pacto.

Palmi latitudo	Ulnæ	Palmi latitudo	Ulnæ
3	9	2?	$13\frac{1}{2}$

Hic manifestè vides, quò angustior est pannus secundus, eò plures ulnas esse necessarias. Quamobrem, quò minor est tertius, eò major futurus est quartus; vel quantò primus terminus major est tertio homogeneo, tantò quartus incognitus major debet esse secundo. Hinc fit, ut primus per secundum sit multiplicandus, numerusque productus per tertium dividendus, quia, ut hæc proportio reciproca ad directam revocetur, tertius numerus primum locum obtinere deberet in regula proportionum directa, ut dictum est, atque hic apparet.

Palmi latitudo	Palmi latitudo	Ulnæ	Ulnæ
2	3	9?	$13\frac{1}{2}$

SCHO-

SCHOLIION.

94. **V**erissimè docet Wolfius cap. 6. elem. Arith., peculiari regula trium inversa opus non esse, si numeri dati, prout proportio exigit, semper ordinentur. Verùm, cum jam invaluerit usu, ut in ordinandis terminis proportio reciproca retineatur, eaque ad directam non revocetur, consuetudini serviendum. Cum autem maximè interfit, ut Tyrones utrique methodo assuescant, utriusque calculi typum in referendis exemplis apponemus.

EXEMPLUM V.

Si 125 Milites operi extruendo 6 menses impendunt, quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 absolvatur?

Quò minore temporis intervallo opus extruitur, eò major militum numerus requiritur. Habes typum proportionis reciprocae.

Menses	Milites	Menses	Milites
6	125	2?	375

Quantò primus est major tertio termino, tantò quartus incognitus major debet esse secundo. Quare, si juxta regulam proportionis reciprocae productus ex primo in secundum dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.

Est autem evidens, quòd sit, ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus

rus

rus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem extruunt. Itaque sic revocabitur ad proportionem directam.

Menses	Menses	Milites	Milites
2	6	125?	375

EXEMPLUM VI.

95. **S**i ager longus perticas 40, latus 4 contineat jugerum terræ, quæritur quàm latus esse debeat, qui nonnisi 20 perticas longus est, ut eadem terræ quantitas habeatur?

Perspicuum hîc est, cum utrobique æqualis terræ quantitas spectetur, quæ ex latitudine, & longitudine comparatis emergit, quò in altero longitudo major sit, eò minor sit latitudo necesse est, & vice versa, ut alterius defectum alterius excessus compleat. Quare, ut prioris longitudo 40 ad latitudinem suam 4, ita posterioris longitudo 20 reciprocè ad latitudinem quæsitam.

Vel, si terminos proportionis reciprocæ ad normam proportionis directæ reducere velis, fiat, ut longitudo secundi ad longitudinem primi, sic primi latitudo ad latitudinem secundi. In utroque quartus, qui quæritur, sive reciprocè, sive directè proportionalis, erit $\frac{40 \times 4}{20} = 8$. In proportionem reciprocam terminus tertius est divisor, in directâ primus. Utrobique idem factum, idem divisor, idemque quotiens, qui dat quartum quæsitum.

EXEM-

EXEMPLUM VII.

96. **Q**uando mensura tritici emitur 6 nummis argenteis, panis uno solido emptus juxta civitatis legem pondus habet 10 unciarum. Jam, si eadem mensura tritici ematur 4 aureis, vel 8 aureis, quantum esse debet ejusdem panis pondus?

In proportionem reciprocam sic erunt termini ordinandi.

Nummi	Unciæ	Nummi	Unciæ
6.	10.	4?	15.
6.	10.	8?	7½

Ratio dicat, quò vilius est triticum, eò majus pondus habiturum panem, & quò carius, eò minus. Quamobrem, quanto primus est major, minorve tertio, tanto quartus incognitus debet esse major, minorve secundo: hinc regula proportionum eversa utendum.

Quartus itaque erit in primo casu $\frac{10 \times 6}{4}$: in

secundo casu $\frac{6 \times 10}{8}$; vel juxta regulam proportionis directæ ita collocandi essent numeri.

$$4 : 6 :: 10 : 15$$

$$8 : 6 :: 10 : 7\frac{1}{2}$$

EXEMPLUM VIII.

Ad construendum murum adhibitæ fuerunt petreæ 6352, quarum longitudo erat 3 pedum,

pedum, & 6 pollicum. Quot ergo requiruntur ad murum ejusdem magnitudinis construendum, si longitudinem habeant tantum 2 pedum, & 4 pollicum?

Termini quæstionis ita erunt ordinandi: si longitudo 3 pedum, & 6 pollicum postulat, ut impendantur 6352 petrae, longitudo minor 2 pedum, & 4 pollicum quot requirit? Hic statim incurrit in oculos, quod terminus primus major est tertio, ed quartum incognitum majorem futurum secundo, atque adeo proportionem esse reciprocam. Quare facta reductione primi, & tertii termini ad pollices, invenies quartum reciproce proportionalem esse 9528.

EXEMPLUM IX.

97. **Q**uidam accepit mutuum a Mercatore 4000 aureos ad annos 3, quos cum ei restitueret, nullum censum accipere mercator voluit, sed tantum petiit, ut sibi vicissim pecuniam mutuum daret: dedit ergo mercatori mutuum 7480 aureos. Quandiu igitur hic pecuniam istam retinere debet, ut adæquet beneficium præstitum per 4000 aureos, quos illi commodaverat?

In hac quæstione, quia numerus 7480 secum habet annexam quæstionem, collocandi erunt numeri hoc ordine.

Aurei. Anni. Aurei. Anni. Dies. Horæ.
4000. 3. 7480? 1. 220. $13\frac{80}{187}$

Ex natura quæstionis perspicuum est, majorem

jorem censum æquali tempore deberi aureis 7480, quam aureis 4000, atque adeo minori tempore opus esse, quam 3 annorum, ut idem census, qui debetur aureis 4000, lucrifiat ex aureis 7480. Habes hinc normam, qua proportionem reciprocam assequaris; nam, quod major est tertius terminus, ed minor erit quartus quæsitus; vel, quod terminus primus minor est tertio, ed minor erit quartus incognitus secundo.

Qui autem in proportionem reciproca est terminus tertius, statuatur in directa primus

7480. 4000. 3? 1. 220. $13\frac{80}{187}$

SCHOLION.

98. **P**restet lib. II. elem. math., & P. Taquet lib. 4. Arith. cap. I. non ex ipsa quæstione dijudicandum relinquunt, utrum proportio directa sit, an eversa, sive reciproca, ut Arithmetici passim, sed aliud hujusce rei indicium certum afferre se posse putant, hoc pacto. Si duo termini homogenei, hoc est, de eadem re, aliam rem quampiam unicam, & a quatuor terminis quæstionis diversam communiter respiciant, circa quam lato saltem modo aliquid agant, ad quod duo reliqui termini se habeant per modum circumstantiæ, eversa, sive reciproca proportio erit.

Indicium
proportionis
reciproce.

EXEM-

EXEMPLUM X.

Operarii 153600 annis 7 Templum Hierusalem construxerunt: quæritur jam, quot annorum spatio operarii 33600 construere idem potuissent?

Quò minor est tertius terminus, numerus operariorum, eò major futurus erit quartus incognitus, numerus annorum: quod est primum eversæ regulæ indicium.

Præterea res a quatuor terminis quæstionis diversa, circa quam duo termini homogenei, primus, & tertius, nempe operarii aliquid agunt, est Templum: quod est alterum regulæ eversæ indicium. Invenies numerum quæsitum annorum esse 32.

EXEMPLUM XI.

Obsessus quidam Exercitus 8500 militum victum habet ad 11 menses; verum spes nulla est solvendæ obsidionis, vel futuri auxilii, nisi post 25 menses. Quot ergo milites retinendi sunt, ut reliquis victus sufficiat ad 25 menses?

Quò major est terminus tertius, numerus mensium 25, eò minor erit quartus quæsitus. Itaque eversâ regulâ utendum.

Vel, cum res, circa quam duo termini homogenei, secundus, & quartus aliquid agunt, sit annona obsidionis tempore consumenda a militibus,

militibus, hoc erit certissimum indicium proportionis reciprocæ. Invenies retinendos esse milites 3740; his enim victus sufficiet ad 25 menses, dimittendique propterea erunt milites reliqui 4760.

EXEMPLUM XII.

Fortalitium habet annonam, qua ali possent 536 milites spatio unius anni, hoc est, dierum 365. Quæritur, quot diebus ali possent eadem annonâ milites 1124? Invenies dies 174, & $\frac{64}{1124}$, sive $\frac{16}{281}$ unius diei.

EXEMPLUM XIII.

Mercator quidam habet quamdam pecuniæ summam, qua potest expendere diebus singulis libras 50 spatio 15 mensium. Quærit jam, quantum expendere posset in singulos dies eadem summâ spatio 3 annorum, & 2 mensium? Invenies libras 19: solidos 14: denarios

8, & $\frac{32}{38}$ seu $\frac{16}{19}$ unius denarii.

CAPUT TERTIUM.

SYNOPSIS.

A Nalogiæ compositæ directæ resolutio in plures simplices, aut ejusdem reductio ad tres simplices terminos, quin quæstio immutetur. In analogia composita quomodo ordinandi sint termini quinque, vel plures. Variæ observationes. Analogiæ compositæ demonstratio per Analysim. Quo casu analogia composita necessariò resolvenda sit in plures simplices. Ex Newtoni sexdecim arithmetici problematis duo seligi incipiunt in specimen artificii analytici; nimirum quomodo determinatæ quæstionis resolutio, si litteris exprimitur, sit ad instar canonis, seu formulæ generalis, cujus ope casus particulares prope infiniti expediri possint, & hinc regulæ in Arithmetica facile comparari.

De aurea Regula composita directâ.

DEFINITIO.

99. **R** egula, quæ dicitur aurea composita, ex duabus, vel pluribus analogiis constat. Solet autem nonnunquam accidere, ut plures, quàm tres, numeri proponantur noti, ita tamen ut sint semper tres principales, alii autem illis adjuncti minùs principales deno-

denotantes tempus, vel lucrum, vel damnum, aliamve circumstantiam. Quod, ubi contigerit, regula trium composita dicitur, quæ jubet, vel regulæ simplicis operationem aliquoties repetendam, vel quemlibet terminum principalem per sibi adjunctos multiplicandum, ut fiant tres tantum termini noti, per quos quartus ignotus eliciatur. Hujus autem regulæ compositæ processus iisdem nititur principiis, atque simplicis, ut non sit opus longa præparatione, sed exemplis aliquot, & observationibus operandi methodum exhibere.

PROBLEMA I.

Analogiam compositam directam in duas pluresve simplices resolvere.

100. **E** Sto hoc exemplum: si 4 Convictores in 3 mensibus expendant 20 libras, quot libras expendant convictores 6 in mensibus 12, sive anno integro?

Manifestum est in hac quæstione duplicem analogiam reperiri; comparantur enim tum personæ personis, tum tempus temporis, ut ex utrisque collatis reperiatur ratio expensarum.

Seponamus paulisper in hac analogia composita, diversorum in quæstione temporum considerationem, vel, quod perinde est, fingamus utrobique identitatem temporis, hoc est, mensium 3: quo fit, ut duo termini denotantes tempora diversa evanescant.

P 2

Re-

Resoluta itaque hac analogia composita in duas simplices, dicimus primò: si 4 convictores expendant 20 libras, quot libras expendent 6 convictores eodem tempore? Et operatione peracta invenies 30 libras a 6 convictoribus expendendas eodem tempore, quo convictores 4 expendunt libras 20, hoc est, ex hypotesi in tribus mensibus.

$$4:20::6:x = \frac{20 \times 6}{4} = 30$$

Deinde resumpta jam temporis consideratione, dicimus secundò: si sex illi convictores expendant, ut jam inventum est, in 3 mensibus libras 30, quot libras iidem expendent in mensibus 12? Hic rursus duo termini identici sunt, adeoque evanescent, & tres reliqui sic erunt ordinandi.

$$3:30::12:x = \frac{12 \times 30}{3} = 120$$

Ubi vides terminum quartum $x = 30$ priori analogia inventum fieri in secunda analogia secundum, ut tandem eliciatur terminus 2 ultimò quærendus 120.

Exposita itaque analogia composita resolvitur in has binas simplices.

<i>Composita</i>	<i>Simplices</i>
$4:20::6$	$4:20::6:x$
: 2	
$3 \quad 12$	$3:x::12:2$

Aliter.

Aliter.

Idem autem omnino tandem prodiret, si prius temporis, deinde personarum collatio institueretur. Puta, primò, si quatuor convictores expendant mensibus 3 libras 20, iidem mensibus 12 expendent quot libras? Invenies $x = 80$.

Deinde, si in 12 mensibus 4 Academici expendant, ut jam ex priori quæsito liquet, 80 libras, quot libras eodem tempore expendent 6? Invenies 120.

Habes typum hujus resolutionis in duas simplices.

<i>Composita</i>	<i>Simplices</i>
$4:20::6$	$3:20::12:x = 80$
: 2	

Totius processus ratio patet, cum non aliud sit, quam operatio simplex bis peracta; nec nova indiget demonstratione.

SCHOLIUM.

Quamvis hæc resolutio analogiæ compositæ in binas simplices, aut etiam plures, originem aperiat, unde variæ operandi praxes sint exortæ, ut infra dicemus, tamen in operando ille per iteratas solutiones simplices circuitus, & nimium operosus est, & inutilis, quando solutionem longè expeditiorem, ac brevioram jam tradimus.

PROBLEMA II.

Terminos quinque, vel septem, vel novem analogiæ compositæ ad tres simplices reducere.

101. **Q**uod antea binis aureæ regulæ simplicis operationibus jam peractum est, potest idipsum una operatione composita peragi, cujus generale artificium est huiusmodi. Numeri, qui exprimunt res principales, multiplicentur per adjunctos comites denotantes earum rerum tempus, lucrum, damnum, aliamve circumstantiam: hæc producta statuuntur pro primo, & tertio termino analogiæ compositæ; terminus autem alter quæsitio homologus pro secundo.

In exemplo prius exposito: si 4 viri 3 mensibus expendant libras 20, 6 viri 12 mensibus quot libras expendent? Pro termino primo analogiæ compositæ sumatur $12 = 4 \times 3$: pro tertio termino accipiatur $72 = 6 \times 12$: pro secundo autem numerus 20 quæsitio homologus; adeoque totius processus ratio sic constabit.

$$4:20:: 6 \\ \times 3 \quad \times 12:z$$

$$12:20:: 72:z = \frac{20 \times 72}{12} = 120$$

Similiter in symbolis: si personæ P , tempore T expendant libras L , personæ p tempore t expendent quot? Dico fore, ut PT ad L ,

Reductio
analogiæ
compositæ ad
simplicem.

L , sic pt ad z numerum quæsitum $= \frac{pt \times L}{PT}$.

Demonstratio per Analyfim facillè conficitur; cum enim, ut supra ostensum est, analogiæ composita resolvatur in binas simplices,

Composita

$$P:L::p$$

$$T:t::z$$

Simplices

$$P:L::p:x$$

$$T:x::t:z$$

erit I. $x = \frac{pL}{P}$: II. $z = \frac{tx}{T}$. Quare, si loco x in secunda æquatione substituatur ejusdem valor inventus in prima æquatione, erit $z = \frac{t \times pL}{PT}$; adeoque resolvendo hanc æquationem $z = \frac{tpL}{PT}$ in analogiam, habebitur $PT:pt::L:z$. Quod erat &c.

Aliter.

102. **Q**uamvis methodus analytica demonstrandi sit multò universalior, omnesque casus unicà formulà completatur, tamen ad Tyronum captum accommodatior erit fortasse hæc demonstrandi ratio, quæ ex natura cujuslibet quæstionis facillè elicitur. Cum enim plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum, quæstio non immutatur; nam Convictores 4 intra menses 3 perinde expendunt, ac convictores 4×3 intra mensem 1: similiter convictores 6 intra

P 4

mensēs

menes 12 perinde expendant, ac convictores 6×12 intra mensem 1. Hinc quæstio secundo loco proposita est ipsissima prima quæstio; atque adeo numerus quæsitus 120 utrique satisfacit. Eodem ratiocinio utere in reliquis, quas subdo, quæstionibus.

S C H O L I O N.

QUæ interdum observanda sint inter operandum, quò faciliùs assequantur Tyrones, exemplis ipsis opportunè interferam; & quamvis resolutio regulæ compositæ in plures simplices operosior sit, tamen quia plerumque usui est, & præterea viam demonstrandi aperit, non erit abs re Tyrones in utraque methodo exercere. De recta itaque terminorum collocatione fit

O B S E R V A T I O I.

103. **I**Nter terminos datos regulæ compositæ, cum tres semper præcipui sint, ordo terminorum erit hujusmodi, ut tertio loco collocetur principalis ille, qui habet annexam quæstionem, cum suo comite: primo loco principalis alter de eadem re, cum suo pariter termino comite; qui verò solitarius est, & homogeneus quæsito, secundo loco consistet.

Termino-
rum dispo-
sicio.

QUÆ.

Q U Æ S T I O I.

PRO 200 libris quarundam mercium advectis per 100 milliaria solvendi sunt 4 aurei: quantum ergo solvendum est pro 300 libris advectis per 400 milliaria? Ita collocabuntur numeri.

Libræ	Milliar.	Aurei	Libræ	Milliar.
200	100	4	300	400?

Cum autem perinde sit advehere 200 libras per 100 milliaria, atque 20000 libras per 1 milliare; quod similiter valet pro tertio termino, hinc ad normam secundi problematis multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertii loci inter se, conficiuntur tres numeri regulæ trium simplicis, hoc pacto.

Aurei	Aurei
20000 : 4 ::	120000 : 24

Aliter.

Si eadem hæc quæstio solvenda sit per regulam trium bis repetitam, in prima analogia comparandæ erunt libræ libris, supposita æqualitate milliarium 100.

Lib.	Aur.	Lib.	Aur.
200	4	300?	6.

In secunda analogia milliaria milliariis comparanda, supposita æqualitate librarum mercium 300.

Mill.	Aurei	Mill.	Aurei
100	6	400?	24.

QUÆ.

QUÆSTIO II.

Quatuor Personæ consumunt modium tritici 30 libris emptum in 5 hebdomadis: quantus ergo est singularum sumptus in uno die? Ita numeri ordinandi erunt.

Perf.	Hebd.	Lib.	Perf.	Dies
4	5	30	1	1?

Reductis autem hebdomadis ad dies, ut primus numerus, ac tertius similes sint, erit

Perf.	Dies	Lib.	Perf.	Dies
4	35	30	1	1.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertii inter se, disponentur tres numeri ad simplicem regulam trium, hoc modo.

$$140 : 30 :: 1? \frac{30}{140} = \frac{3}{14}$$

quam fractionem reduces ad solidos, & denarios, uti docuimus.

Aliter.

Per regulam trium bis repetitam ita solvetur eadem quæstio, comparando personas personis, & tempus. tempori.

Perf. Lib. Perf. Lib.

$$4 \quad 30 \quad 1? \quad \frac{30}{4} = 7 \frac{2}{4} = 7 \frac{1}{2};$$

Dies Lib. Dies Lib.

$$35 \quad 7 \frac{1}{2} \quad 1? \quad \frac{7 \frac{1}{2}}{35} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

QUÆ-

QUÆSTIO III.

Si 10 aurei in 3 mensibus lucrantur 4 aureos, quantum lucrabuntur aurei 100 in 150 mensibus?

Si tempus quodlibet per suam pecuniam multiplicetur, per simplicem regulam trium invenies aureos 2000.

OBSERVATIO II.

104. **U**Su interdum venit, ut analogia composita ope multiplicationis ad simplicem revocari non possit: quo casu necessaria erit ejusdem resolutio in binas pluresve, si quando opus erit, analogias simplices.

QUÆSTIO IV.

Mercator in 3 mensibus 10 aureis lucratus est 4 aureos: quanto ergo tempore 100 aureis lucrabitur 2000 aureorum?

Hæc quæstio est conversa præcedentis, neque per multiplicationem redigi potest ad simplicem regulam trium, propterea quod tempus, in quo 100 aurei lucrari debent 2000 aureos, ignotum est; atque adeo per 100 aureos multiplicari non potest. Adhibenda ergo erit regula trium bis hoc modo.

Aurei	Aur. lucr.	Aurei	Aur. lucr.
10	4	100?	40.
			Atque

Atque ita 100 aurei lucrabuntur 40 aureos in 3 mensibus, in quibus 10 aurei lucrati sunt 4. Quare, ut sciatur, quanto tempore 100 aurei lucraturi sunt 2000, instituetur secundo regula trium hoc modo.

Aurei	Menses	Aurei	Menses
40	3	2000?	150.

Itaque si 10 aurei in 3 mensibus lucrantur 4 aureos, 100 aurei lucrabuntur 2000 in 150 mensibus.

SCHOLIION.

HÆc eadem quæstio ope Lemmatis, ejusque Coroll., sine ulla resolutione in duas analogias simplices, dirimi poterit per Analysim, de qua alibi, cujus fructum Tyrones expedit, ut antea, licet intempestivè delibent. Itaque more analytico tempus incognitum vocetur x : ordinentur termini regulæ compositæ, ut moris est.

Aureis	Mens.	Luc.	Aureis	Mens.	Lucr.
10	3	4	100	x	2000

hoc est, multiplicando aureos in tempus, erit

$$30 : 4 :: 100x : 2000$$

Per Lemma factum extremorum 60000 = 400 x facto mediorum. Dividatur hæc æquatio utrinque per 400: erit $\frac{60000}{400} = x$ tempori incognito, quod proinde erit mensium 150.

OB-

OBSERVATIO III.

105. **I**N omni analogia duo termini evanescunt, quando primo, & tertio loco iidem semper recurrunt.

QUÆSTIO V.

SI 100 aurei in 8 mensibus lucrantur 20 aureos, quanto tempore iidem 100 aurei lucrabuntur 3000 aureos? Dispositio terminorum ita se habet.

$$20 : 8 :: 3000 : 1200$$

QUÆSTIO VI.

SI 300 aurei in 7 mensibus lucrantur 45 aureos, quid lucrabuntur 1780 aurei in eisdem 7 mensibus?

$$300 : 45 :: 1780 : 267$$

QUÆSTIO VII.

SI 10 equis quotidie dentur 7 mensuræ avenæ, quot mensuræ juxta eandem distributionem convenient 100 equis ad 20 dies?

Equi	Dies	Mensuræ	Equi	Dies	Mensuræ
10	1	7	100	20	1400.

OB-

OBSERVATIO IV.

106. **N**on raro opus est facili, & obvio discursu, ut ex natura quæstionis eliciantur termini, qui in regula, sive simplici, sive composita ordinandi sunt.

QUÆSTIO VIII.

Mercator quidam emit 300 libras cuiusdam mercis aureis 60; scire autem cupit, quantum pro 100 aureis lucraturus sit, si easdem 300 libras vendat 64 aureis?

Vel quantum pro 100 aureis perditurus sit, si 300 illas libras vendat 57 aureis?

In hac quæstione manifestum est mercatorem pro 60 aureis esse lucraturum 4 aureos, vel perditurum 3 aureos, ut patet, si minus pretium a majori subducatur. Dic ergo: si 60 aurei lucrantur 4 aureos, vel perdunt 3, quantum lucrabuntur, vel perdent 100 aurei? Invenies pro 100 aureis in primo casu lucrum aureorum $6\frac{2}{3}$; in secundo casu damnum aureorum 5.

QUÆSTIO IX.

Quærit Mercator, quanti emendæ sint librarum 100 alicujus mercis, ut eadem postea venditæ 64 aureis lucrum dent aureorum $6\frac{2}{3}$ pro 100?

In

In hac quæstione, quæ est conversa præcedentis, perspicuum est, eum, qui aureos $6\frac{2}{3}$ lucrari vult pro 100 aureis, augere velle 100, ut fiant 106 $\frac{2}{3}$. Dic ergo: si aurei 106 $\frac{2}{3}$, qui continent & pretium 100 aureorum, & lucrum $6\frac{2}{3}$ aur., proveniunt ex 100 aureis, ex quo proveniunt 64 aurei, qui continent & pretium ignotum 100 librarum, & lucrum simul ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$ pro 100?
 Pret., & Lucr. Aur. Pret., & Lucr. Aur.
 106 $\frac{2}{3}$ 100 64 60.
 Emendæ ergo sunt 100 libræ aureis 60; nam dividitæ postea 64 aureis dant lucrum 4 aureorum, aut pro 100 dabunt lucrum $6\frac{2}{3}$ aur.

OBSERVATIO V.

107. **I**n regula trium probationis genus est etiam regressus demonstrativus, quo fit ut vel ex quarto invento eliciatur primus, vel alia ratione termini proportionales versentur, uti exemplis constabit.

QUÆSTIO X.

Emptæ fuerunt merces quædam, quæ si vendantur 200 aureis, perduntur 10 aurei pro 100: quanti ergo constiterunt merces illæ? Hic etiam clarum est, eum, qui perdit 10 pro 100, facere 90 ex 100. Dic ergo: si

90

90 aurei proveniunt ex 100 aureis, ex quo
provenient aurei 200?

Aur. Aur. Aur. Aur.

90 100 200? $222\frac{2}{9}$

Quod ut probes, inverte analogiam, &
dic: si ex $222\frac{2}{9}$ aureis fiunt 200 aurei, quid
fiet ex 100 aureis? Invenies 90 aureos, ac
proinde damnum fieri 10 aureorum pro 100.

Rursum, cum merces illæ emptæ fuerint
aureis $222\frac{2}{9}$, vendantur autem 200 aureis,
liquidò constat damnum fieri $22\frac{2}{9}$ aureorum.
Itaque sic etiam institui poterit probatio: si
pro $222\frac{2}{9}$ aureis amitto $22\frac{2}{9}$, pro aureis 100
quid amittam? Invenies damnum 10 aureorum.

Q U Æ S T I O X I.

Qui singulas libras mercis alicujus vendit
20 solidis, lucratur 30 pro 100: quan-
tum ergo lucrabitur, si vendat majori pretio,
nempe 24 solidis?

Hic primum investigare oportet, quanti
constat una libra, ut vendita 20 solidis det
lucrum 30 pro 100, ut in Quæst. IX. docui-
mus, hoc modo. Si 130, pretium nimirum
100, & lucrum 30 proveniunt ex 100, ut
pretio, ex quo proveniunt 20 solidi, qui con-
tinent & pretium unius libræ ignotum, & lu-
crum simul ignotum etiam, quod reddat 30
pro 100? Invenies $15\frac{1}{3}$.

Jam verò invento pretio unius libræ $15\frac{1}{3}$
solidorum, perspicuum est, si una libra venda-
tur

tur 24 solidis, lucriferi solidos $8\frac{8}{13}$. Quare
ex 100 solidis lucrificent 56 solidi, ut hic vides.

$$15\frac{1}{3} \quad 8\frac{8}{13} \quad 100? \quad 56.$$

Q U Æ S T I O X I I.

Qui 100 libras mercis alicujus vendit 10
aureis, perdit 10 pro 100: quantum er-
go pro 100 perdet, si eas vendat minori ad-
huc pretio, nempe 8 aureis?

Hic etiam investigare oportet, quanti
constent 100 illæ libræ, ut venditæ 10 aureis
damnum inferant 10 aureorum pro 100, ut in
Quæst. X. docuimus, hoc modo. Si 90 fiunt
ex 100, (qui enim perdit 10 pro 100, facit
90 ex 100) ex quo numero fient 10? Invenies
 $11\frac{1}{9}$: emptæ ergo sunt illæ 100 libræ aureis
 $11\frac{1}{9}$.

Invento autem pretio 100 illarum libra-
rum $11\frac{1}{9}$ aureorum, manifestum est, si eadem
100 libræ vendantur 8 aureis, ex $11\frac{1}{9}$ aureis
amitti aureos $3\frac{1}{9}$. Quamobrem pro 100 per-
dentur aurei 28, ut hic vides.

$$11\frac{1}{9} \quad 3\frac{1}{9} \quad 100? \quad 28.$$

O B S E R V A T I O V I.

108. **S**i detur analogia etiam adhuc magis
composita, puta, septem, aut plu-
rium terminorum, revocabitur ad tres termi-
nos

L. I.

Q

nos

nos eadem methodo, qua usi sumus in Probl. II. In exemplo autem mox afferendo, vice numerorum utar symbolis, ut resolutio analogiæ, & operationis demonstratio multò commodius exhibeatur.

QUÆSTIO XIII.

SI trabis lignæ, cujus longitudo pedum $4 = A$, latitudo pedum $3 = B$, altitudo pedum $2 = C$, pondus sit librarum $240 = D$, trabs alia longa pedes $10 = a$, lata pedes $4 = b$, alta pedem $1 = c$, quanti erit ponderis, puta, librarum y ?

Dico, ut $A \times B \times C$ ad D , sic $a \times b \times c$ ad $y = \frac{a b c}{A B C} \times D$; hoc est, $\frac{10 \times 4 \times 1}{4 \times 3 \times 2} = \frac{49}{24} \times 240 = 490$.

Demonstratio patet resolutà analogià composità in tres simplices

$$\begin{array}{lll} A:D::a & A:D::a:x & 4:240::10:600 \\ B & b & B:x::b:z & 3:600::4:800 \\ C & c:y & C:z::c:y & 2:800::1:400 \end{array}$$

Nam I. $x = \frac{a}{A} D$; adeoque II. $z = \frac{b}{B} x$; substitutoque valore ejusdem x invento in prima æquatione, erit $z = \frac{a b}{A B} D$; & III. $y = \frac{c}{C} z$; & substituendo rursus valorem inventum ejusdem z , erit $y = \frac{a b c}{A B C} D$; & resolvendo hanc æ-

quationem

quationem in analogiam, erit, ut ABC ad D , sic abc ad y . Quod erat &c.

Tyronibus, qui Analyfi adhuc affueti non sunt, demonstratio multò accommodatior erit, si in qualibet analogia utcunque composita attentè considerent, quæstionem non immutari, cum plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum.

QUÆSTIO XIV.

IN aggere militari construendo, cujus longitudo erat 500 exapedarum, latitudo 2 exapedarum, & altitudo 6 pedum, impensi fuere dies 8: quanto tempore opus erit, ut alius similis construatur longus 900 exapedas, latus 2 exapedas, & 3 pedes, altus 10 pedes, si idem operarum numerus adhibeatur?

Habes typum reductionis ad tres terminos.

Longit.	Latit.	Altit.	Dies	Longit.	Latitudo	Altit.
500 ex.	2 ex.	6 p.	8	900 ex.	2 ex.	3 p. 10 p.
$\times 2$				$\times 2$	exap.	3 ped.
1000	exap.	quadrata		1800		
$\times 1$				450		
1000	exap.	cubica		2250		
				$\times 1$	exap.	4 ped.
				2250		
				750	pro 2 ped.	
				750		
				3750	exap.	cubica

Q 2

Hæc

Hæc quæſito 7 terminos comprehendit, quæ per multiplicationem ad tres reducitur hoc pacto.

$$1000:8::3750:30$$

OBSERVATIO VII.

109. **I**N iis, quæ hætenus protulimus, exemplis duo termini, quæſitus nempe, & homologus in quæſtione datus nullis inter ſe diverſis conditionibus fuerunt adhuc affecti; hoc eſt, ſi pro termino incognito quærebantur libræ, vel exapedæ &c., homogæneus in quæſtione datus libras pariter, vel exapedas &c. præciſe continebat, quin ulla conditio adjiceretur, quæ differentiam inter hoſce terminos inveheret. Hinc ea facilitas, & praxis exorta eſt regulam compoſitam reducendi ad ſimplicem per ſolam multiplicationem, quin quæſtio immutaretur.

Quodd ſi contingeret, ut terminus quæſitus annexam haberet conditionem aliquam peculiarem, quæ non adhæreret termino homologo in quæſtione dato, in hoc caſu regula compoſita neceſſariò in duas ſimplices eſt reſolvenda, uti conſtabit exemplis, quæ ſubjicio.

QUÆSTIO XV.

Pavimentum cujuſdam Plateæ latum 37 exapedas, & 3 pedes, longum 41 exap., & 4 pedes, conſtratum eſt 60000 petris, quarum latitudo erat 9 pollicum, & longitudo 1 pedis,

pedis, & 3 pollicum; jam verò alterius plateæ pavementum latum 40 exap., & 3 pedes, longum 50 exap., 2 pedes, 8 pollices, quot petras requireret, quarum latitudo ſit 1 pedis, & longitudo 1 pedis, 4 pollicum.

Hæc quæſtio 10 terminos comprehendit, quorum duo, cum ſint conditiones annexæ termino, qui quæritur, admitti non poſſunt in operatione hujus regulæ. Quare hæc duæ conditiones tantisper ſeponendæ ſunt, uti & illæ, quæ adhærent termino homologo in quæſtione dato, id eſt, termino 60000.

Hiſ poſitis quæſtio ad 5 terminos reducitur, quæ ita poteſt enunciari.

Pavimentum latum 37 exap., 3 ped., & longum 41 exap., & 4 ped., conſtratum eſt 60000 petris: pavementum aliud latum 40 exap., 3 pedes, & longum 50 exapedas, 2 pedes, 8 pollices, quot hujusmodi ſimiles petras requireret?

Revocentur 5 termini ad tres per multiplicationem, uti docuimus. Dic itaque: ſi pro 1562 exapedis quadratis, & 3 ped. quad. opus eſt 60000 petris, pro 2043 exap. quad. quo numero opus erit? Invenies $7845\frac{1}{3}$ numerum petrarum, quas pro ſecunda platea impendi oporteret, ſi hæc eſſent ejuſdem magnitudinis, ac illæ, quæ in prima adhibitæ fuerunt.

Verùm, cum dimensiones earundem ſint planè diſſimiles, terminus incognitus per ſecundam analogiam hoc pacto eliciendus eſt.

Si latitudo 9 poll., & longitudo 1 ped., 3 poll., quæ sunt dimensiones petrarum primæ plateæ, & quas supposueram eadem planè esse in secunda platea, postulant $7845\frac{1}{2}$, latitudo 1 pedis, & longitudo 1 ped., 4 poll., quæ sunt veræ dimensiones pro secunda platea, quantum postularent?

Reductis 5 terminis ad 3 ita instituenda erit altera analogia. Si 135 pollices quadrati postulant $7845\frac{1}{2}$ pro secunda platea, quantum 192 pollices quadrati pro eadem requirerent? In hac analogia animadverto, quò minor est primus terminus tertio, eò minorem futurum secundo quartum incognitum, adeoque regulà inversà utendum. Invenies itaque 55161.

SCHOLION.

110. **A**D Analysis fructum uberrimum, artemque inveniendi maximè conducit, ut Tyrones jam nunc intelligant determinatæ quæstionis resolutionem terminis analyticis comprehensam esse ad instar cænonis, seu formulæ generalis, cujus ope casus peculiare prope infinitos expedire, & hinc regulas in Arithmetica, & theorematata in Geometria sibi facillè comparare possint, quod deinceps, prout feret occasio, annotabimus. Itaque placet ex Newtoni sexdecim arithmetice problematis duo hoc loco feligere, nempe sextum in ordine, & undecimum, quippe quæ ex præactis jam solius calculi litteralis, & Arith-

Arithmetice institutionibus solvuntur. Sic & Arithmetice regulas, & fontes, unde illæ sint derivatæ, una eademque operâ aperiemus.

QUÆSTIO XVI.

DAta Agentis alicujus potestate invenire, quot ejusmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Si ea agentis potestas, qua effectum c producere potest in tempore d, & erit, ut tempus d ad tempus b, ita effectus c, quem agens iste producere potest in tempore d, ad effectum, quem potest producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$; deinde, ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iste unicus ad omnes agentes; adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

EXEMPL. Si Scriba in 8 diebus 15 folia describere potest, quot ejusmodi scribæ requiruntur ad describendum 405 folia in 9 diebus? Resp. 24; nam, si substituatur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a, & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evaderet $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$: hoc est, $\frac{3240}{135}$, sive 24.

QUÆSTIO XVII.

SI Boves a depascent pratum b in tempore c; & boves d depascent pratum æque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: quæritur,

vitur, quot boves depascent pratum simile g in tempore h?

Si boves a in tempore c depascent pratum b; tum per analogiam boves $\frac{e}{b}$ a in eodem tempo-

re c, vel boves $\frac{ec}{bf}$ a in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}$ a in tempore h depascent pratum e: puta, si gramen post tempus c non cresceret; sed cum propter graminis incrementum boves d in tempore f depascent solummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus f—c tantum erit, quantum per se sufficit pascendis bobus d— $\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc est, quantum suf-

ficit pascendis bobus $\frac{df}{h} - \frac{eca}{bh}$ per tempus h. Et in tempore h—c per analogiam tantum erit incrementum, quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{h-c}{f-c}$ in $\frac{df}{h} - \frac{eca}{bh}$, sive $\frac{bdfh - ecah - bdcf + aecc}{bfh - bch}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$,

et prodibit $\frac{bdfh - ecah - bdcf + ecfa}{bfh - bch}$ numerus bobum, quibus pascendis sufficit pratum e per tempus h; adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ per

idem tempus h pascendis sufficiet.

EXEMPL. Si 12 boves depascent $3\frac{1}{2}$ jugera prati in 4 septimanis; et 21 boves depascent

10 jugera consimilis prati in 9 septimanis: quæritur, quot boves depascent 24 jugera in 18 septimanis? Resp. 36. Iste enim numerus invenietur substituendo in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$

numeros 12, $3\frac{1}{2}$, 4, 21, 10, 9, 24, et 18 pro litteris a, b, c, d, e, f, g, et h respectivè. Sed solutio forte haud minus expedita erit si e primis principiis ad formam solutionis præcedentis litteralis eruatur. Utpote, si 12 boves in 4 septimanis depascent $3\frac{1}{2}$ jugera; tum per analogiam 36 boves in 4 septimanis, vel 16 boves in 9 septimanis, vel 8 boves in 18 septimanis depascent 10 jugera: puta, si gramen non cresceret; sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis depascent solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanas incrementum tantum erit, quantum per se sufficit excessui bobum 21 supra 16, hoc est, 5 bobus per 9 septimanas, vel, quod perinde est, $\frac{5}{2}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit, quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept.: 14 sept.: $\frac{5}{2}$ boves: 7 boves. Quare 8 bobus, quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas, adde hosce 7 boves, quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, et summa erit 15 boves. Ac denique, si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant; tum per analogiam 24 jugera per idem tempus sufficiant 36 bobus.

Methodum ingeniosissimam, qua usus est Newtonus in resolutione hujus problematis, paulo latius exponam.

Si statum quæstionis rite perpendas, illud statim occurret, eo tempore, quo boves prata depascunt, gramen uniformiter crescere. Hoc autem incrementum confert ad majorem bovum numerum alendum eodem tempore; ac proinde primò determinari debet, quot alendis bobus incrementum graminis tanto tempore præcisè sufficiat.

Ut autem hanc determinationem obtineas, finge tempore f , & tempore b gramen non crescere, excepto primo tempore c ; & in hac suppositione inquire per analogiam, quot boves depascant pratum e , tribus datis temporibus c , f , b , hoc pacto.

Si boves a tempore c depascunt b , ergo
boves $\frac{ea}{b}$ tempore c depascunt e ,
boves $\frac{eca}{bf}$ tempore f depascunt e ,
boves $\frac{eca}{bh}$ tempore b depascunt e .

In hac triplici analogia, ut vides, involvitur tantum incrementum graminis debitum primo tempori c ; nam supponitur post tempus c gramen non crescere.

Supponebatur autem in problemate, propter graminis incrementum, quoddam boves d multò majores, quam boves $\frac{eca}{bf}$, eodem tempore
f de-

f depascere solummodo idem pratum e : ergo excessus iste bovum, quibus alendis sufficit pratum e tempore f , tribuendus erit novo graminis incremento per tempus $f - c$; nam incrementum debitum primo tempori c involvitur in analogia ex hypothesi: ergo incrementum illud in prato e per tempus $f - c$ tantum erit, quantum per se sufficit pascendis bobus $d - \frac{eca}{bf}$ per tempus f .

Quære rursum, quibus bobus alendis tempore b sufficiat præcisè hoc idem incrementum per tempus $f - c$? Hic regula trium inversa instituenda est, nimirum

$$f : d - \frac{eca}{bf} :: b : \frac{fd}{b} - \frac{eca}{bh}$$

Habes ergo incrementum graminis in prato e per tempus $f - c$ sufficere

alendis bobus $d - \frac{eca}{bf}$ per tempus f ,

alendis bobus $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bh}$ per tempus b .

Quære jam totum incrementum graminis in prato e factum tertio tempore b , dempto tempore c , nempe per tempus $b - c$, & quibus bobus alendis hoc sufficiat, quove tempore? At, cum jam notum sit, incrementum per tempus $f - c$ sufficere alendis bobus $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bh}$ per tempus b , facilè per regulam trium elicietur, quot alendis sufficiat per idem tempus b incrementum proportionale, quod exhibetur
per

per aliud tempus $b-c$, hoc pacto:

$f-c:b-c::\frac{df}{b}-\frac{eca}{bh}:\frac{b-c}{f-c}$ in $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bh}$, (perinde enim est medium multiplicare in ternum, & productum dividere primo, ac sit medium dividere primo, & quotientem multiplicare in ternum) five $\frac{bdfh-ecah-bdcf+aecc}{bfh-bch}$.

Habes hic numerum bovum, quibus alendis in prato e per tempus b sufficit incrementum graminis designatum per tempus $b-c$.

Habebas antea boves $\frac{aec}{bh}$, quos idem pratum e sine incremento graminis pascere poterat per idem tempus b . Incrementum illud adice bobus $\frac{aec}{bh}$, ut elicias numerum bovum, quibus pascendis sufficit pratum e per totum tempus b , id est, $\frac{aec}{bh} + \frac{bdfh-ecah-bdcf+aecc}{bfh-bch}$;

revocentur fractiones ad eundem denominatorem $\frac{abcefb-abceeh+bbdfhh-bbcdff+abceeh}{bbhhf-bbchh}$;

five $\frac{abcefb+bbdfhh-abceeh-bbcdff}{bbhhf-bbchh}$;

divide per bb , erit $\frac{acef+bdfh-aceh-bcdf}{bhf-bhc}$

numerus bovum, quibus pascendis sufficit pratum e per tempus b .

Quare ultimo, quot boves depascent pratum g tempore b ? Vides hic etiam quaestionem traduci ad idem tempus; adeoque per analogiam pratum

pratum e alit $\frac{acef+bdfh-aceh-bcdf}{bhf-bhc}$ bo-

ves tempore b ,

pratum g alit $\frac{acefg+bdfhg-acehg-bcdfg}{bbfe-bbce}$

boves tempore b .

CAPUT QUARTUM.

SYNOPSIS.

A Nalogia composita reciproca resolutio in duas pluresve simplices, vel ejusdem reductio ad simplicem trium terminorum: hinc per Analysim regula generalis. Triplici indicio analogiam compositam reciprocam a composita directa distinguere. Interdum resolutio compositae reciprocae necessaria est.

De Regula Composita reciproca.

IN ultima Cap. superioris quaestione vidimus fieri interdum posse, ut analogiarum componentium altera directa sit, altera reciproca: quod assequimur indicio jam tradito ex natura quaestionis, resolvendo compositam in duas simplices. Sit itaque

PROBLEMA I.

Analogiam compositam reciprocam in duas pluresve simplices resolvere, & hinc per Analysim regulam generalem conficere.

III. **E**Sto hoc exemplum: si Militibus $3 = A$ sufficiant libræ panis $36 = B$ in dies $6 = C$, militibus $9 = a$ libræ $180 = b$ in quot dies sufficiant?

Resolutio. Est quidem hic analogiarum altera directa; nempe, si libræ $36 = B$ sufficiant in dies $6 = C$, libræ $180 = a$ in quot dies sufficiant? puta, $x = 30$.

At altera est reciproca; nempe, si militibus $3 = A$ sufficiant in dies $x = 30$, militibus $9 = a$ in quot dies sufficiant? certe nonnisi in dies pauciores propter plures milites, nempe in dies $z = 10$; adeoque illic regula directa est adhibenda, hic reciproca.

Habes typum totius resolutionis.

Analogia composita

$$36:6::180$$

$$3. \quad 9.z$$

Simplex directa

$$36:6::180:x = \frac{6}{36} \times 180 = 30$$

Simplex eversa

$$3.x:9.z = \frac{3x}{9} = \frac{90}{9} = 10$$

$$B:C::b$$

$$A \quad a:x$$

$$B:C::b:x$$

$$A.x:a.z$$

Ex

Ex prima analogia directa habeo $x = \frac{Cb}{B}$.

Ex secunda analogia reciproca habeo $z = \frac{Ax}{a}$; & substituendo valorem inventum incognitæ x , erit $z = \frac{Ab}{aB} \times C$.

COROLLARIUM I.

II. **I**N hac ultima æquatione $z = \frac{Ab}{aB} \times C$

animadvertendum est ad singulas litterarum species, quæ datis quantitibus respondent in quæstione analogiæ compositæ indirectæ. Videlicet A , & a sunt duo termini principales: B , & b sunt vel circumstantiæ, vel comites termini adjuncti: C est terminus medius, & homologus quæsito. Itaque postrema æquatio, ad quam per resolutionem devenimus, erit ad instar canonis, seu formulæ generalis, quæ sic habet.

Formula.

In quavis analogia composita indirecta primus terminus principalis A ducatur in comitem b alterius, & fiat Ab : secundus terminus principalis B ducatur in comitem primi a , & fiat aB : productum secundum dividat primum: quotus, qui prodit, $\frac{Ab}{aB}$ multiplicetur in terminum medium, & quæsito homogeneum: obtinebitur quantitas incognita $z = \frac{Ab}{aB} \times C$. Quod erat &c.

Co-

COROLLARIUM II.

QUotcunque fuerint analogiæ componentes, eadem formula universalis erit usui, eademque methodo demonstrabitur resolvendo compositam in plures simplices; nimirum, si proposita quæstio sit terminorum octo vel plurium, res una principalis multiplicanda est per omnes terminos comites alterius, & hæc vicissim per omnes comites illius.

COROLLARIUM III.

113. **E**X Lemm., ejusque Coroll. facillimam etiam habes methodum reducendi ad simplicem regulam directam trium analogiam quamlibet compositam indirectam. Sit rursus ultima æquatio $z = \frac{Ab}{aB} \times C$: hæc resolvatur

in analogiam: erit $aB : Ab :: C : z = \frac{Ab}{aB} \times C$.

Hinc canon, seu formula generalis.

Regula generalis. In omni analogia utcunque composita indirecta terminus principalis secundus a multiplicetur in comitem B , vel comites alterius, & statuatur primo loco: terminus principalis primus A ducatur in comitem b , vel comites alterius, & statuatur secundo loco: tertio loco consistet C homologus quæsito, & per simplicem directam regulam trium invenietur incognita z .

SCHOLION.

SCHOLION.

Apposui de industria has generales formulas analyticas, ut jam assequi inciperent Tyrones, quantum vulgari Arithmetica præstet Algebra, ac quàm verè in primo limine dictum sit a Newtono, *utramque iisdem inniti fundamentis, & ad eandem metam collimare, arithmetica quidem definite, & particulariter, algebraicam autem indefinite, & universaliter, ita ut enunciata ferè omnia, quæ in hac computatione habentur, & præsertim conclusiones, theoremata dici possint.*

PROBLEMA II.

Regulam proportionum compositam reciprocam a directa distinguere.

114. **N**on una omnibus Arithmeticae Scriptoris norma est, ac veluti criterium dijudicandi in regula proportionum composita, utrum quæstio directe solvenda sit, an eversa. Quamobrem, ut Tyrones discant quamlibet viam arripere, ac normam sequi, prout e re nata commodior visa fuerit, exponam varias scriptorum praxes; quidve in quavis probandum, aut improbandum sit, appositis exemplis planum faciam.

L. I.

R

PRA-

P R A X I S I.

Criterion
primum.

Quemadmodum quæstiones ad regulam proportionum compositam directam per simplicem directam bis aut pluries institutam solvi posse diximus, ita quæstiones ad regulam compositam everfam, seu reciprocam per simplicem everfam unam, & simplicem directam alteram solvi oportere plerique docent; nam per hanc analysim statim assequimur ex indicio jam tradito ex duabus analogiis, utra directa sit, an reciproca.

Q U Æ S T I O I.

SI 12 Messores demetant 20 jugera in 9 diebus, quanto tempore 30 messores demetent 45 jugera?

Analogiam compositam resolve in duplicem: invenies primo loco everfam, cum 30 messores minori tempore indigeant ad demetenda 20 jugera, quam 12 messores.

Messores Dies Messores Dies

12 9 30? $3\frac{3}{5}$.

Itaque diebus $3\frac{3}{5}$ demetent 30 messores 20 jugera. Quare ita rursus directa altera proportio erit inquirenda.

Jugera Dies Jugera Dies

20 $3\frac{3}{5}$ 45? $8\frac{3}{30}$.

PRA-

P R A X I S II.

115. **V**idetur aliis planè inutilis ad praxim iste per duplicatam solutionem simplicem circuitus; ac proinde normam expeditiorem longè, ac breviorē proponunt.

Termini quæstionis propositæ quinque aut septem, aut etiam plures reducantur ad tres, uti docuimus; tum ex indicio jam tradito in regula simplici decernatur, utrum proportio, quæ quæritur, directa sit, an reciproca.

Criterion
secundum.

Q U Æ S T I O II.

Præfidiariis militibus 600 in arce obsessa spatio 4 mensium distribui possunt 15 unciae panis; at, cum metuendum sit, ne obsidio diutius protrahatur, quæritur, si numerus militum imminuatur ad 500, quantum cuique distribui poterit diebus singulis spatio 6 mensium?

Multiplicatis inter se duobus primis terminis, & duobus ultimis, reductaque quæstione ad simplicem hanc regulam trium, milites 2400 habent quotidie panis uncias 15: milites 3000 quantum habituri sunt? Analogiam hanc simplicem indirectam esse, sive reciprocam nemo non videt; nam, quod major est numerus militum, eò minor erit numerus unciarum, quæ eodem tempore viritim in dies distribui possunt. Invenies itaque 12 uncias; est enim $3000:2400::15:12$.

R 2

QUÆ-

Q U Æ S T I O III.

AD murum construendum adhibiti fuerunt lateres 6400, quorum longitudo erat 6 pollicum, latitudo 3, & altitudo 2: quo laterum numero opus erit ad similem murum ædificandum, si eorum longitudo sit 9 pollicum, latitudo 5, & altitudo 3?

Factum ex tribus primis terminis $6 \times 3 \times 2 = 36$ exhibet soliditatem laterum primi muri: pariter factum ex tribus ultimis terminis $9 \times 5 \times 3 = 135$ dat soliditatem laterum secundi muri; reductaque quæstione 7 terminorum ad simplicem hanc regulam trium, si laterum soliditas 36 postulat 6400, soliditas laterum 135 quem numerum requireret? Jam ipse per te assequeris ex natura quæstionis proportionem reciprocam in hisce terminis contineri; nam, quod major est soliditas laterum, eod minor futurus est numerus laterum, qui quæritur. Invenies ergo $1706\frac{2}{3}$; est enim $6400:1706\frac{2}{3}::135:36$.

P R A X I S III.

116. **H**Æo tamen praxis non est universalis; nam, ut jam vidimus, in duobus ultimis regulæ directæ compositæ exemplis, id genus quæstiones interdum incidunt, in quibus non solum terminorum quorundam comparatio regulam directam postulat, & comparatio

Resolutio
interdū necessaria.

ratio aliorum indirectam, verum etiam, si omnes termini per multiplicationem ad tres reducerentur, decerni minimè posset, quid horum productum re ipsa indicaret. In hoc casu docent breviorē viam eam esse, ut ducantur inter se termini, qui multiplicari possunt, & productum determinatum exhibent; tum per simplicem regulam trium bis institutam quæsitā quantitas obtineatur, uti hoc exemplo declarabimus.

Q U Æ S T I O IV.

Operarii 25 laborantes 9 horas per diem conficiunt 36 exapedas operis diebus 8: quot dies impenderent 15 operarii laborantes 8 horas per diem, ut exapedas $28\frac{4}{5}$ absolverent?

Comparatio operariorum postulat regulam indirectam, seu reciprocā; quippe, quod minor est numerus hominum, eod major erit dierum numerus quæsitus, qui operi debet impendi.

Sed comparatio exapedarum postulat directam regulam; quippe, quod minor est illarum numerus, eod minor erit dierum numerus quæsitus.

Ex alia parte hæc quæstio 7 terminorum non potest sine absurdo ad tres reduci; nam, quamvis multiplicari possint homines per horas respectivas laboris, cum perinde sit dicere: 25 homines 9 horis per diem, ac dicere: 9

R 3

vicibus

vicibus 25 homines 1 hora per diem, tamen non possum similiter homines per exapedas multiplicare; neque enim idem est dicere: 25 conficiunt 36 exapedas, ac dicere 36 vicibus 25 homines, seu 36×25 conficiunt 1 exapedam.

Itaque multiplicatis utrinque hominibus per horas, ac supponendo utrosque circa eadem 36 exapedas versari, instituo regulam primam trium indirectam hoc modo: si 225 homines impendunt dies 8, homines 120 quantum impenderent? Invenio dies 15; tum rursum aliam directam regulam instauro: si pro exapedis 36 requiruntur dies 15, pro $28\frac{1}{2}$ quot diebus opus erit? Invenies dies 12, quos impendent homines 15 ad conficiendum opus exapedarum $28\frac{1}{2}$ laborantes per diem horas 8.

PRAXIS IV.

117. **P**roposita quavis quaestione, ut rite dici-
dicari possit, utrum directam pro-
portionem, an eversam contineant quaestionis
termini, criterium hoc proponitur a P. Tacquet,
aliisque. *Si tam in primo membro, quam ter-
tio unus terminus respectu alterius se habeat per
modum circumstantiae, medii &c., scito quaestio-
nem directe solvendam; si vero in membro pri-
mo, & tertio unus terminus respectu alterius
quidpiam agat, exerceatque, certus esto propor-
tionem eversam in quaestione contineri, ac pro-
inde solvendam esse eversa.*

Criterium
tertium.

QUÆ.

QUÆSTIO V.

Mercatores 8 aureis 1000 lucrantur aureos
700: mercatores 10 aureis 4000 quot
lucratur aureos?

Ex indicio jam tradito quaestionem propo-
sitam invenio directam esse. Itaque 5 terminis
reductis ad 3, per simplicem regulam trium
elicietur numerus incognitus aureorum 3500.

Eodem modo operaberis, si utrique ter-
mino principali circumstantiam aliam temporis
adjungas.

QUÆSTIO VI.

Homines 10 = a expendunt aureos 4 = b
diebus 3 = c : homines 100 = d aureos
2000 = e quot diebus expendent?

Cum uterque terminus principalis a , & d cir-
ca comites adjunctos b , & e aliquid agant, exer-
ceantque, homines nimirum expendant aureos,
scito proportionem reciprocam in quaestione con-
tineri. Itaque ex Probl. I., ejusque Corollario

$$\text{quaesita quantitas erit} = \frac{ace}{bd} = \frac{10 \times 3 \times 2000}{4 \times 100} \\ = \frac{60000}{400} = 150.$$

R 4

QUÆ.

Q U Æ S T I O VII.

Scriptores $4 = a$ scribunt paginas $250 = b$ versuum $20 = m$ diebus $8 = c$: scriptores $6 = d$ paginas $350 = e$ versuum $25 = n$ quot diebus scribent?

Ex indicio jam tradito liquet, in quæstione proportionem reciprocā contineri. Quare ex formula generali Probl. I., ejusque Coroll.

quæsitā quantitas erit $= \frac{ac en}{db m}$.

C A P U T Q U I N T U M.

S Y N O P S I S.

Quo fundamento nitatur Regula Societatum: hinc ejusdem demonstratio, & praxis: quo loco breviter indicatur regulas omnes arithmeticas per Analysim primò inventas fuisse. Observationes variæ.

De Regula Societatum.

D E F I N I T I O.

118. **S**equitur Regula Societatum, quæ docet numerum in partes dividere datis numeris proportionales. Nomen sortita est a societatibus mercatoriis, in quibus usum habet permagnum. Ab iisdem proportionum fontibus

tibus hæc etiam profluxit, ac præsertim ex noto theoremate, quod demonstrabimus P. III. Lib. II. Si fuerint quocunque rationes similes $a.b::c.d::e.f$, summa omnium antecedentium $a+c+e$ ad summam omnium consequentium $b+d+f$ est, ut unius rationis antecedens e ad suum consequens f . Quæ verò ratione hujus regulæ praxis ab hoc theoremate derivata sit, hoc exemplo demonstrare aggredior.

Fundamentum Regula Societatis.

Q U Æ S T I O I.

Tres Mercatores in societatem contulerunt summam librarum 45: portio primi $10 = a$: secundi $15 = b$: tertii $20 = c$; & lucrati sunt 135 lib. Quæritur lucrum uniuscujusque?

Summa totalis $45 = s$: lucrum totale 135 $= t$: lucrum primi $= x$: secundi $= y$: tertii $= z$. Ut autem lucri partitio æqua sit, necesse est, ut portio primi sit ad suum lucrum, uti portio secundi ad suum lucrum, & portio tertii pariter ad suum lucrum. Tres itaque habemus rationes æquales $a.x::b.y::c.z$; atque harum trium rationum summa antecedentium $a+b+c=s$, & summa consequentium $x+y+z=t$: ergo per Theor., ut summa antecedentium ad summam consequentium, ita antecedens quodlibet ad suum consequens: hinc

$$s.t::a.x=\frac{at}{s}=30$$

$$s.t::b.y=\frac{bt}{s}=45$$

$$s.t::c.z=\frac{ct}{s}=60$$

COROLLARIUM.

Ordinatio
æquationum.

Regula.

119. **I**N hac generali resolutione velut in typo constare cuivis potest, quo artificio exercenda sit hujus regulæ praxis; nimirum in hujusmodi quæstionibus, datorum numerorum summa primum locum teneat: secundum numerus distribuendus: tertium singuli datorum. Exerceatur deinde toties regula trium, quot sunt dati: numeri inventi satisficient quæstioni.

SCHOLION I.

Regulæ
arithmetice
per Analy-
sim inven-
tæ.

Probè observari velim, inquit Jacobus Bernoullius tom. 1. solut. terg. probl., Arithmetica numerosam non ita ab Algebra independentem esse, ut regulas suas suismet debeat principiis, aut eas ex alio, quàm ex Algebra fundo hauserit; ipsæ enim pleræque vulgaris Arithmeticæ regulæ, ut sunt regulæ falsi, virginum, alligationis, societatis, immo ipsa regula trium, Algebrae subsidio aut primitus inventæ sunt, aut, si ignorentur, vel oblivioni tradantur, saltem inveniri denuo, & demonstrari possunt, omnesque æquationes algebrai-
cæ,

æ, quæ numero sunt infinitæ; nil aliud præstant, quàm totidem novas suppeditare regulas, quibus Arithmetica numerosa quodammodo in immensum ditari possit.

SCHOLION II.

Examen porro hujus regulæ erit, si lucra omnia in unam summam collecta efficiant lucrum totale: quod etiam reliquis casibus accommodabis.

QUÆSTIO II.

TRes emere volunt 4000 libras mercis cujusdam, quæ æstimatur 500 aureis; primus tamen vult 1300 libras, secundus 1460, tertius denique reliquas libras 1240: quantum ergo solvet quilibet?

Dic: si 4000 libræ valent 500 aur., quid valent 1300, quid 1460, & quid 1240 libræ, quas singuli capere volunt? Invenies primum solvere aureos $162\frac{1}{2}$, secundum $182\frac{1}{2}$, & tertium 155.

I.

120. **S**I numeris datis temporum diversitas sit adjuncta, prius in suum singuli tempus ducantur, quàm ad unam summam redigantur; nam hac multiplicatione valorem datorum non immutari docuimus in regula trium composita.

QUÆ.

QUÆSTIO III.

TRes Mercatores lucrati sunt aureos 9000: primus contulit aureos 100 per menses 15: secundus 140 per menses 10: tertius 300 per menses 7: quantum singulis debetur?

Aurei a singulis collati ducantur in tempora, & numeri producti 1500, 1400, 2100 in unam colligantur summam 5000; quæstio deinde sic ordinabitur.

Sum. dat.	Lucr. com.	Dati	Quæsti
5000	9000	1500	2700
		1400	2520
		2100	3780

II.

121. **H**Æc eadem praxis observatur in partitione damni communis; in omni enim societate quilibet ferre debet damnum secundum proportionem fortis.

QUÆSTIO IV.

TRes Mercatores in societatem merces contulerunt. Primi merces constiterunt aureis 300, secundi 500, tertii 180: damnum, quod in negotiatione passi sunt, fuit aureorum 400: quantum ergo quisque damnum feret pro rata suarum mercium portione?

Colligantur in unam summam aurei omnium,

nium, & numerus collectus 980 in primo loco regulæ trium collocetur, damnum verò commune in secundo, & pecuniæ singulorum in tertio. Per regulam trium sæpius repetitam inuenies jacturam primi esse aur. 122 $\frac{440}{980}$, secundi 204 $\frac{80}{980}$, tertii 73 $\frac{460}{980}$.

III.

122. **S**icut ex sortibus deducimus lucra, ita nonnunquam ex lucris fortes concludimus.

QUÆSTIO V.

TRes Societate inita lucrati sunt 1000 aureos: primus posuit 300 aur. per 10 menses: secundus attulit 700 aureos; tertius verò 800 aureos. Accepit autem primus ex lucro aureos 500, secundus 300, tertius 200: quanto ergo tempore fuerunt duorum posteriorum pecuniæ in negotiatione?

Multiplicetur pecunia primi in suum tempus; atque ex hoc productio 3000 proveniet lucrum primi. Ut igitur sciamus, ex quibusnam productis lucra posteriorum duorum proveniant, dicemus. Si 500 aurei, quod est lucrum primi, proveniunt ex 3000, ex quo provenient 300, & 200 aurei, quæ sunt lucra posteriorum? Inuenies secundi tempus per suam pecuniam

pecuniam multiplicatum facere 1800, tertii verò 1200. Quare, si 1800 dividamus per 700, hoc est, per pecuniam secundi, invenimus menses $2\frac{4}{7}$, quibus a secundo expositi sunt ad lucrum 700 aurei. Item, si 1200 partiamur per 800, idest, per pecuniam tertii, reperiemus menses $\frac{1}{12}$ pro tertio.

QUÆSTIO VI.

TRes inito consortio contulerunt in communem negotiationem 1520 aureos, lucratiq; sunt aureos 190, quos habita ratione pecuniæ cujusque, ita partiti sunt, ut primus haberet 120, secundus 40, tertius 30: quid ergo quisque in societatem contulerit?

Invenies primum attulisse 960, secundum 320, tertium 240.

QUÆSTIO VII.

TRes inita sodalitate in negotiationem contulerunt 1520 aureos, quibus lucrati sunt 190 aureos. Primus facta distributione recepit 1080 aureos conflatos ex sua pecunia, quam posuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter secundus accepit 360 aur., & tertius 270. Quantum ergo quisque posuit, & quantum lucratus est?

Fiat summa ex pecunia, quam omnes posuerunt, & lucro communi, quæ est 1710.

Dic:

Dic: si 1710 pecunia omnium, & lucrum provenit ex 1520 pecuniâ omnium, ex quo proveniunt 1080, qui numerus continet & pecuniam primi, & lucrum: ex quo orientur 360, quæ continent & pecuniam, & lucrum secundi; & ex quo numerus 270 producetur continens & pecuniam, & lucrum tertii? Invenies primum posuisse pecuniam 960, secundum 320, tertium 240; ablata autem pecuniâ cujusque ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum solum. Ita deprehendes lucrum primi esse aur. 120, secundi 40, & tertii 30.

IV.

123. **I**nterdum in quæstionibus exprimuntur proportionales lucrorum, atque adeo pecuniarum, ex quibus lucra proveniunt; sunt enim lucra pecuniis expositis proportionalia.

QUÆSTIO VIII.

Quatuor simul lucrati sunt 340 aureos, quos habita ratione pecuniarum collatarum partiti sunt inter se ea lege, ut, quoties secundus habuit 5, toties tertius habuerit 9; quoties autem tertius habuerit 7, toties quartus habuerit 11; quoties denique quartus habuit 9, toties primus habuerit 13; primus autem contulit 286 aureos. Quid ergo alii tres

tres exposuerunt, & quid singuli ex lucro reportarunt?

Quoniam igitur primus toties habiturus est 13, quoties quartus 9, cum lucra sint pecuniis expositis proportionalia, erit proportio pecuniarum expositarum eadem, quæ 13 ad 9. Dic ergo: si 13 dant 286 aur., quos primus posuit; quid dabunt 9? Invenies 198 pro collatione quarti. Similiter dic: si 11 dant 198, quid 7? Reperies collationem tertii 126 aureos. Dic denique: si 9 dant 126, quid 5? Invenies collationem secundi 70 aureos. Habitis autem pecuniis, quas singuli contulerunt, inveniemus lucra eorum, sicuti in aliis societatibus.

QUÆSTIO IX.

TRes partiri inter se volunt 760 aur. ea conditione, ut, quoties primus habuit 10, toties secundus habeat 7, & tertius 2: quantum ergo singuli accepturi sunt?

Junge simul 10, 7, & 2, ut habeas 19; deinde dic: si 19 dant 760, quid dabunt 10, 7, & 2? Invenies primum habiturum 400, secundum 280, tertium 80.

QUÆ-

QUÆSTIO X.

Quatuor artifices ad opus quoddam faciendum adhibiti fuerunt. Primus impendit 18 dies, secundus dies 6, tertius 4, quartus 12. Stipendium cuilibet tribui solitum in singulos dies erat, primi librarum 6, secundi lib. 3, tertii lib. 2, quarti lib. 8; confecti tamen operis æstimatio fuit lib. 700. Quæritur quantum ex hoc valore cuique artifice tribuendum sit, habita ratione temporis singulorum, & consueti stipendii?

Multiplicentur dies in consuetum stipendium uniuscujusque, & eliciatur, quantum quisque lucratus fuisset, nempe libras 108, 18, 8, 96, si operis æstimatio ad proportionem, & normam ordinarii pretii esset unice exigenda. At, cum valor ejusdem operis ascendat ad 700 lib., dic: si summæ 230 librarum, quas simul lucrati fuissent quatuor artifices juxta consuetum stipendium, respondent 700 lib. respectu operis, 108 libris, quas primus lucratus fuisset pro pretio ordinario, quid responderet? Atque ita porro de reliquis tribus erit inquirendum, ut hic factum vides.

L. I.

S

230

230	700	lib.	108?	328.l.	13.f.	10.d.	$\frac{220}{230}$
			18?	54.	15.	7.	$\frac{190}{230}$
			8?	24.	6.	11.	$\frac{110}{230}$
			96?	292.	3.	5.	$\frac{170}{230}$
				700.			

V.

124. **I**N hoc genere compositarum quæstionum, in quibus opus est, ut plures termini ad pauciores reducantur, illud imprimis diligenter est providendum, priusquam inter se multiplicentur, an hæc reductio fieri possit, quin quæstio mutetur: ex. g. dum fortem mercatoris librarum 500 expositam negotiationi 3 mensibus multiplico in tempus, statim intelligo eundem fructum parere lib. 500 expositas 3 mensibus, atque ter vices 500 uno mense. At verò, si termini, quos quæstio comprehendit, ejusmodi essent, ut hanc reductionem per multiplicationem minimè paterentur, sicut alias monui, illa ad reductionem tentanda via est, quam cujusque ingenium pro re nata suggeret.

QUÆ-

QUÆSTIO XI.

Operarius quidam non conficit nisi exapedas 6 certi cujusdam operis diebus 3: secundus 12 exap. absolvit diebus 4: tertius 20 exap. diebus 5. Si tres simul omnes adhibeantur eodem tempore, conficient exap. 135 diebus 15. Quæritur quota sit pars, quam quilibet habere debet in hoc opere, habita ratione stipendii 12 librarum in singulas exapedas?

Ut hæc quæstio resolvatur, cavendum summopere est, ne opus, quod quilibet singulatim conficit, multiplicetur in numerum dierum, quos impendit; nam 6 exapedæ, quas primus absolvit 3 diebus, non perinde sonant, ac 3 vices 6, seu 18 exapedæ uno die; atque ita de reliquis. Alia itaque ineunda via est ad reductionem horum terminorum. Quamobrem examino primò, quid horum operariorum quilibet uno die conficiat, dividendo opus cujuslibet per numerum dierum, quos impendit. Quoti inventi 2, 3, 4 demonstrant, quot exapedæ uno die conficiantur ab unoquoque. Collectis hisce quotis in unam summam 9, invenio tres operarios eodem tempore laborantes conficere 9 exapedas uno die. Et fanè: si 9 exap. ducantur in 15 dies, prodeunt 135 exap., uti quæstio proposita postulabat.

Ut autem assequar, quantum cuique adscribendum sit ex hisce 135 exapedis, ita instituenda

stituenda est regula trium. Si ex 9 exapedis primus absolvit 2, ex 135 quot conficiet? Atque ita de reliquis. Invenies pro singulis quæsitum numerum exapedarum 30, 45, 60, quas perinde invenissem, si quotos inventos 2, 3, 4 multiplicassem in 15 numerum dierum; stipendium autem cujuslibet habebitur multiplicando 30, 45, 60 per 12.

Die 11. Novembris 1752.

I M P R I M A T U R.

F. Jo. Baptista Wabemans O. P. S. T. Magister Commissarius S. Officii Mediolani.

J. A. Vismara Pœnit. Major pro Eminentiss. & Reverendiss. D. D. Card. Archiepiscopo.

Vidit Julius Cæsar Bersanus pro Excellentiss. Senatu.