quale la forza centripeta si assume proporzionale alla distanza dal cerstro, onde sia m=1, e la formola generale $2ab^{m-2n+1}s^{2n}=2a3^{m+1}=un$

si tramuti nella particolare $2ab^{2}$ $2u s^{2n}$ $2as^{2}$ $2as^{2}$ 2as

trova nulla la velocità, e messa 5 = b, e qualora nel centro diventa S = 0. Fatta 2n = 1, si scopre l'equazione $2as - 2as^2 = u^2$, simi-

lissima a quella, che ci si è affacciata nella antecedente supposizione della gravità costante, posta ivi però la grandezza 211 == 2 y e mentre la sublimità b nell'uno, e nell'altro caso faccia figura d'unità. Cosa curiosa si è, che presa la gravità o costante, o pure variabile in ragione delle lontananze dal centro, se nella prima supposizione la resistenza si espone per u^2 . $\frac{1}{s}$, e nella seconda per $\frac{u^2}{2}$. $\frac{1}{s}$, la scala delle celerità

può essere la medesima. Ora altronde io so, che non variata punto la densità del mezzo = 1, la resistenza dipendente dall'inerzia della ma-

teria, se ne'sluidi elastici s' espone per u2, in quelli, che sono privi d'classicità, debbe esprimersi per u2.

Ho soddisfatto al Problema proposto, calcando le vestigia impresse da Geometri di prima linea: ma per dir if vero si racchiude nel progresso dell'analisi una tacita supposizione, e consiste nel singere, che il mezzo fluido resistente al moto del solido sia affatto spogliato di gravità, e che tutto l'intoppo derivi folamente dalla denfità, e dall'inerzia. Mentre non si ammetta in Natura la materia sottile del Cartesio, egli è manifesto, che l'ipotesi mal si accorda colla Fisica. Dove poi ci guidi la correzione di sì fatta licenza, io per ora non prendo la briga d'investigarlo.

SCHEDIASMA XXX. (*)

PROBLEMA.

Del moto dei pendoli a Cicloide, posta la resistenza del mezzo in ragione duplicata dell' attuale velocità.

Difcenda la ghianda del pendolo dal punto di quiete B (fig. 113.), e vada accelerandofi il moto per gli archi crefcenti BD della Cicloide: egli è certo, che s'io esporrò il peso assoluto della predetta ghianda, o per dir meglio (quand'effa è collocata in un fluido dotato di gravità) il suo peso specifico, e relativo per il doppio diametro del cerchio governatore della curva, la forza tangenziale follecitante il mobile in qualsivoglia punto, per esempio D, mi verra rappresentata dall'arco DC, che va a terminare nel punto infimo della Cicloide: dalla qual forza continuamente applicata dee sottrarsi quella della resistenza, che nella nostra ipotesi è proporzionale al quadrato della attuale velocità, e per il prodotto nue generalmente si espone. Quindi chiamati S gli spazi trascorsi come BD, ed a l'arco intiero CB, avremo Ia formula fondamentale (14) $ads - sds - nu^2 ds = udu$.

E qui prima di passar oltre non voglio lasciar d'avvertire, che mentre il pendolo dopo esser disceso per l'arco BC è obbligato a salire per l'arco BE, la nostra espressione differenziale, che serve per la discesa, non patisce alcuna alterazione nel caso della salita. La ghianda monta in virtù dell'impeto impresso, e vi si oppone tanto la sollecitazione della gravità, quanto la refistenza del mezzo. La prima in qualunque punto E è uguale all'arco CE, e si esprime per s-a, e la seconda per nu2; dunque moltiplicando ambo queste quantità per l'elemento crescente dello spazio + ds, e poscia uguagliandole al momento decrescente della velocità - udu, troveremo sds - ads - nueds = -udu,

o fia ads - sds - nu2ds - udu.

Per separar le variabili nella equazione (12) miste, e confuse, metto in opera i miei soliti artifizi. Prima d'ogni altra cosa faccio selog.

z, e differenziando, ds = dz, e dopo questa surrogazione preparo l'e-

quazione nella seguente maniera.

(2ª)

^(*) Con lettera in data de' 5. Marzo dell' anno 1732. comunicò il Conte Jacopo al Sig. Abate Suzzi la soluzione del presente Problema.

$$(2^{a}) \frac{dz}{z} = \frac{dz}{z} \frac{dz}{dz} = u^{2} \cdot \frac{du + ndz}{u}.$$

In fecondo luogo pongo $\frac{du}{u} = \frac{dp}{z}$, e fommando $\frac{du}{dz} = \frac{dp}{dz}$

e passando dalle grandezze logaritmiche alle comuni, $uz^p = p$. Sostituità nella equazione (2°) questi valori, nasce la

$$(3^{o}) \underbrace{adx - dx}_{z} lx = \underbrace{n^{2}dp}_{p} = \underbrace{pdp}_{z \geq n},$$

attesochè $u^2 = pp$, e moltiplicando tutti i termini per x^{20} , risulta la

$$(4^a) \ az^{2n-3} \ dz - z^{2n-3} \ dz | z = pdp$$

nella quale sono separate le incognite.

Per integrare l'ultima formola, si richiede un poco d'industria, e massimamente per iscansare l'imbarazzo delle quadrature, e ridurre la cosa a semplici logaritmi. Considero, che il primo termine azzo del de di terzo pdp ammettono una spedita integrazione: ma per quello appartiene al secondo — z zo dazz, questo da se solo non è agevolo mente sommabile; può però rendersi tale aggiungendoci un altro termine cioè a dire — z zo daz conciossache l'aggregato dei due anciente dei dire — z zo dei de conciossache l'aggregato dei due anciente su dei dire — z zo de la conciossache l'aggregato dei due anciente su dei de conciossache l'aggregato dei due anciente su dei de conciossache l'aggregato dei due anciente su de conciossache de co

mine, cioè a dire $-x^{2n-1}dz$; conciossiachè l'aggregato dei due ter-

mini —
$$x^{2n-2} dx dz = x^{2n-2} dz$$
 fi riduce all' integrale — $x^{2n} dz$.

Frattanto perchè non resti turbata l'egualità dell'espressione (4°) è d'uopo d'aggiungere, e di sottrarre nel primo membro la quantità $x^{2n-1}dx$ nel seguente modo.

272

$$(5^{\circ}) \ ax^{2n-1}dx \Rightarrow \underbrace{x^{2n-1}dx - x^{2n-2}dx | x}_{2n} = \underbrace{x^{2n-2}dx}_{2n} = pdp.$$

Facendosi poi strada alla integrazione, avrassi, non ommessa l'aggiunta della costante c, $\frac{2an+1}{4nn}\frac{\chi^{2n}-\chi^{2n}l\chi}{2n}=\frac{p^2}{\chi}+c$: ma $p^2=u^2\chi^{2p}$; dun-

que surrogato questo valore, ed istituita sa divisione di tutti i termini per za, e la moltiplicazione per 2n,

$$(6^a) \quad 2an = 1 \qquad -lx = 2nc = nu^2 = r$$

Ora abbiamo a fissare il valore della costante e. Nel principio del moto, vale a dire nel punto B, tanto la velocità u, quanto la resissenza r si trova uguale a nulla, come altresì lo spazio S, o sia il logaritmo z, e conseguentemente in questa supposizione z = t. Sostiguiti i valori già determinati nella equazione (6°), si scoprirà

cenuta nella espressione

$$\frac{(7^{2}) \ 2an + 1}{2n} - \frac{2an + 1}{2n} = l2 + r = S + r_{0}$$

e ponendo
$$I = I = y$$
, troveremo $\frac{2an + 1 \cdot y}{2n} = S \stackrel{\text{def}}{=} y$, la qual

equazione si convertirà facilmente nell'analogia 1: a = 1::7: 5=07:

Poteva io servirmi d'un'analist assai più ristretta, particolarmente dappoichè la soluzione più estesa, che prima mi è venuta alle mani, mi ha satto venire in cognizione del risultato, e così praticano spesse siate certi Autori per occultare in parte il metodo: ma io ho voluto guidare il Lettore per quella medesima strada, che da me è stata battuta, avanti ch'io sapessi a qual termine sosse essa pre condurmi. Per dir il vero la costruzione riuscirà semplicissima, purchè si osservi, che essendosi fatto lo spazio s=1.2, è di più s=1.2, s' io prenderò s=1.2

per abscisse gli spazi crescenti s, e per ordinate le variabili y, la curva locale indi nascente sarà una logaritmica, che avrà per suttangente costante una quantità = 1. Sia 1 = x = y, e perciò x = 1, ovve-

$$\frac{dz}{z} = ds = \frac{1}{2n} \cdot \frac{dx}{x}$$
; dunque $\frac{xds}{dx} = \frac{1}{2n}$, lo che ec

COSTRUZIONE.

Tutto il giro della coltruzione si ristringe in tirare due parallele indefinite GH, IK (Fig. 113, 114.) distanti per la normale GI, che sa figura d'unità, e può farsi uguale all'arco semi-cicloidale BC, da cui ci viene messa sotto gli occhi la gravità specifica della ghianda del pendolo oscillante in un mezzo grave, e resistente. Per il punto G segnato ad arbitrio passi la logaritmica Glmno, di cui sia assintoto la linea IK, e sotto toccante la retta esposta per 1: egli è manisesto,

che alle abscisse GL, GN espresse nella nostra analisi per l'indeterminata S risponderanno le ordinate Ll, Nu rappresentate per 2. Facciamci a vedere cosa dalla costruzione si ricavi.

1. Discenda il pendolo dal punto di quiete b, e dopo aver camminato per l'arco bC in discendendo, ascenda per l'arco Ce, e si sermi nel sito e: dimandasi il valore della resistenza in qualunque punto di mezzo per esempio d. Abbiasi sotto l'occhio l'analogia

1:
$$a + 1$$
:: y: $s + r$, e facciali $GQ = bC = a$, a cui si aggiunga

la QH uguale alla suttangente della logaritmica, e condotta la normale HK, e la diagonale GH, si prenda uguale all'arco ba l'abscissa GL, a cui risponda l'ordinata Ll, e per il punto l passi la retta T/R parallela alla KG incontrando l'asse prodotto nel punto R: io dico, che l'intercetta GR ci dinota la resistenza $r = nu^2$, per cui il sluido s'oppone alla ghianda nel punto segnato d.

2. E perchè la secante TR taglia sempre la curva in due punti, cioè a dire nel punto già determinato l, ed in un altro per cagion d'esempio n, si deduce, che la medesma resistenza GR corrisponde a due archi cicloidali diversi, il primo de quali si è bd, ed il secondo si trova, assumendo la curva bCc uguale all'abscissa GN.

3. Che se i due punti n, l s'andassero sempre più accostando, sino a farsi infinitamante prossimi; allora la secante TR, si convertirebbe nella toccante Um S parallela alla KG, e lasciata cadere dal contatto m l'applicata mM, al punto D (posto l'arco bD = all'abscissa GM) converrà la massima resistenza GS.

4. Si osservi in questo mentre, che la diagonale GK interseca là logaritmica ne' due punti G, 0; cosicchè condotta l'ordinata 00, e satto l'arco bCe uguale alla retta GO, nei due siti b, ed e si scopre nulla la resistenza; lo che non può intervenire, salvo che nei due punti

di quiete. Dunque cadendo la ghianda dal punto di riposo b, montera sino al punto e, e l'abscissa GO ci darà la misura dell'arco b Ce descritto dal pendolo parte nella discessa per bC, e parte nell'ascendimento per Ce.

5. La curva per tanto delle resistenze è una spezie d'ellissoide, che principiando dal punto G si va allontanando dall'asse, sino ad acquistare la massima ordinata uguale all'intercetta GS, indi si ripiega, e discende, congiungendosi di bel nuovo con l'asse nel punto O, e ci viene rappresentata dalla curva GXO.

SCOLIOI.

Che la curva delle resistenze abbia un massimo, ci vuole poca fatica ad iscoprirlo. Essendo la resistenza nel punto di quiete b=0, mentre la forza accelerante si esprime per l'arco bC, e crescendo la prima in ragione duplicata della velocità attuale, che il pendolo di passo in passo si va acquistando, nel tempo medesimo, che la seconda decresce continuamente, quanto più il mobile s'accosta al punto C; ci sarà necessariamente un sito per esemplo D, in cui la forza sollecitante sarà pari alla resistente.

Per tutto lo spazio bD la ghianda acquisterà sempre nuovi gradi di celerità; perchè quella porzione della gravità, che opera per le direzioni delle tangenti, supera la reazione del mezzo. Tutto all'opposto nei punti di mezzo fra D, e C il pendolo dee ritardarsi, essendo maggiore la sorza negativa, che sa contrasto, della positiva, che accelera. Quanto poi la velocità cala, altrettanto si minora colla legge assegnata la resistenza; dunque la massima velocità, e la massima opposizione sarà nel punto D, in cui le predette sorze operanti in senso contrario si suppongono eguali. Perciò la resistenza nel punto assegnato s'esprimerà per l'arco DC, con cui si missura parimente la sorza sollecitante, e lo spazio passato bD più la resistenza DC sarà uguale all'arco costante bC, che va a finire nel punto insimo della cicloide: le quali particolarità esponendosi in termini analitici ci danno s=r=a, ovvero a-s=r.

Quindi nella curva delle resistenze GXO, per avere la massima Mx, basterà condurre dal punto Q l'inclinata QX, che si pieghi verso l'asse QG con un angolo semiretto.

Frattanto essendo per le cose dette la resistenza SG più lo spazio percorso GM uguale all'arco bC = GQ = a, e stante la similitudine de triangoli SmM, VmP veriscandosi l'analogia SM = a : Mm = y :

$$VP = \frac{1}{2n}$$
: $Pm = 1 - y$, passeremo all'equazione $a - ay = \frac{y}{2}$, che

gidotta ci dà il valore di
$$Mm = y = \frac{2an}{2an-1}$$
, c di $Pm = x = \frac{1}{2an-1}$

Un' altra proprietà si osserva nella premessa legge di resistenza. Pongafi, che la massima velocità della ghianda corrisponda al punto D: io dico, che pervenuto il pendolo al punto più basso C conserverà in se stesso qualche grado di velocità; laonde dovrà necessariamente reciprocare, qualunque sia il valore della coefficiente n.

La nostra formula ci dà in qualunque punto dell'asse GO.

2an+1.7=s+r: ma nel punto M corrispondente alla massima resi-

stenza MX il valore dell'ordinata Mm si trova = 2an ; dunque fatta

la surrogazione, si scopre 2an+1. Mm=a=s+r. Osservando po-

scia, che la logaritmica Gmo tanto maggiormente si discosta dall'asse GO, quanto più crescono le abscisse; egli è certo, che nel punto Q corrispondente all'infimo C della cicloide, l'applicata QZ è più grande di Mm: perciò in tal caso la quantità 2an + 1. QZ è maggiore di a;

ed essendo nell'incontro medesimo l'abscissa GQ=a, ne siegue, che la grandezza 2an + 1 . QZ - a è positiva: la quale uguagliandosi alla re-

fistenza r=nu2, ci dimostra, che il quadrato u2 è una quantità affermativa, e che la ghianda conserva nel punto C una velocità finita, per cui il pendolo viene obbligato ad ascendere.

E da ciò si conchiuda, che messo il pendolo una volta in moto (supposta la legge di resistenza, che abbiam per le mani) continua egli a reciprocare senza mai fermarsi. Di fatto per quanto sia vicino al punto più basso C, quello per esempio D, da cui la ghianda comincia a discendere, arrivata ch'essa sia in C mantiene in se un qualche grado di celerità, dal quale sarà costretta a salire per una qualunque, sebbene talvolta minima porzione della curva Cf. E così tornando sempre a discendere, e a rimontare, non si ridurrà mai ad uno stato di persetta quiete. Ciò s'intenda detto in puro rigore di Geometria, e non già per quello appartiene alla Fisica, attese parecchie circostanze, dalle quali il Matematico suole prescindere.

Il Sig. Cav. Neyvton, e dopo lui il Sig. Ermanno anno dimostrato alla loro maniera, che l'area intiera della scala delle resistenze compresa dall'asse GO, e dalla curva GXO è uguale alla metà della differenza, che passa fra i quadrati degli archi bC, Ce, per il primo de' quali discende il pendolo, ed ascende per il secondo.

Anche questa verità può dedursi dalle nostre formule; conciossiachè abbiasi giusta la determinazione de citati Scrittori la semidisserenza de

predetti quadrati $as - s^2 = \int r ds$; ma stante la mia equazione fonda-

M one take ober damentale a + 1 . 7-s=r, e moltiplicando tutti i termini per l'e-

lemento
$$ds$$
, $a + \frac{1}{2n}$, $\gamma ds - sds = rds$, ed integrando, $a + \frac{1}{2n}$.

$$\int \gamma ds - \frac{s^2}{2} = \int rds = as - \frac{s^2}{2}; \text{ dunque } a + \frac{1}{2n} \int \gamma ds = as.$$

In questo mentre lo spazio logaritmico GmoO esposto per / yds an official and the second

fi fa effere uguale alla quantità
$$s - \frac{1}{2n}y$$
; dunque $a + \frac{1}{2n} \cdot s - \frac{1}{n}y$

= as, ed espurgata l'equazione,
$$a + \frac{1}{2n} y = s$$
: conclusione, che da

noi si trova col porre semplicemente nella nostra formula r = 0, e che ci fa vedere come da una verità all'altra si faccia passaggio.

S C O L I O IV.

Dalle cose dette possiamo inferire, che le oscillazioni più e meno estese ne nostri pendoli cicloidali non si compiono in tempi uguali, e che mal s'accoppia la legge delle resistenze in proporzione dei quadrati delle velocità con un esatto isocronismo. Per dimostrare questa verità, s'intenda la cicloide BCF (fig. 113., e 115.) distesa in una retta uguale GPH, e supponendo, che il pendolo si parta dal punto di Z z 2

quiete B, e descriva in una intiera oscillazione l'arco BCE, indi reciciprocando l'arco ECb, e di bel nuovo l'arco bCe, e così di mano in mano, prendansi le tre rette GI, IL, LN eguali a' predetti archi, e si concepiscano delineate le scale delle resistenze tali quali sono da noi state determinate, e che ci sieno rappresentate dalle curve GMI, IOL, LoN. Quindi passino per il punto P corrispondente all' altro C le due linee gPb, iPl, che si taglino in croce, e si pieghino verso l'asse GH con un angolo semiretto, e finalmente si compiano i triangoli rettangoli, come nello schema.

Egli è certo, che le impressioni acceleranti nella discesa, e ritaridanti nell' ascendimento comunicate alla ghianda dalla sua natural gravità, e che agiscono nella eurva BCF per le direzioni delle toccantizci vengono esposte di passo in passo per le ordinate dei triangoli PGg, PIK. A cagion d'esempio, dopo esser disceso il pendolo dall'arco Bbuguale all'abscissa GL, nel punto b si trova sollecitato dalla sorza tanzenziale espressa per LQ: ma avendosi da questa a sottrarre la resistenza dinotata per LT, ne siegue, che nel suddetto punto b sa forza accelerante purgata dalle resistenze, ci viene rappresentata dall'intercetta TQ. Messa dunque la LU TQ, se faremo passare per il punto V, ed altri in simil maniera determinati la curva surk, sarà essa la scala delle attuali sollecitazioni, per cui si regola il moto prima accelerato, e poi ritardato del pendolo.

L'andamento di questa curva è noto per le cose di sopra avvertite: conciossiachè nel punto G rispondente al punto B, l'ordinata Gg è uguale all'arco BC esprimente la gravità specifica intiera, che opera nel punto B senza intoppo di resistenza. Discende poscia la curva, accostandosi sempre più all'asse sino ad intersecarlo nel punto R, sito in cui la resistenza è massima, ed uguale alla forza tangenziale: indi si estende con un'altro ramo al di sotto, allontanandosi dall'asse, e terminando nel punto K, il quale corrisponde al punto I, o sia al punto E, dove tutto il moto si estingue. Tra li due limiti R, P analoghi agli altri due D, C la refistenza supera la forza, che agisce per la tangente, ed in conseguenza la velocità della ghianda si va minorando: ma fra gli altri due P, I, ovvero C, E ambo le predette forze cospirano a distruggere il moto acquistato, ed ogni applicata negativa alla curva per esempio NX in cambio d'essere uguale alla differenza tra le due mentovate azioni, trovasi formata dalla loro somma. Perciò essendo l'area Gg UR l'aggregato di tutte le impressioni acceleranti, e l'area RXKI quello di tutte le ritardanti, accederà, che le predette aree sieno fra loro uguali; richiedendosi un cumulo pari diforze morte tanto per generare, quanto per estinguere una data forza

Ma quando il pendolo reciprocando percorre l'arco ECb uguale alla retta IPL, fingasi descritta la curva iSl, che ci metta sotto gli occhi la scala di quegl'impussi, da'quali viene per tutto l'arco ECb la ghianda attualmente sollecitata, ed a questa curva le rissessioni già fatte

s'adattino. În altra occasione ho dimostrato (a), che le oscillazioni per gli archi BCE, ECb, bCe, ec. non ponno mai compiersi in tempi uguali, se le scale gRK, iSl, ec. delle sorze attualmente, e successivamente applicate al mobile non sono curve simili. E se così è, simili altresì esser debbono quelle delle resistenze GMI, IOL, ec. la ragione consiste in ciò, ch'essendo parimente simili i triangoli gGP, PIK, PLQ, ec., che sono le scale delle sorze tangenziali, non possono mai per via di addizione, o di sottrazione generarsi curve simili, se prima fra le generatrici non si conserva la somiglianza.

Posta per tanto la similitudine, siccome richiede l'ipotesi dell'isoeronismo, fra le curve GMI, IOL, ec., le loro aree saranno in ragione duplicata delle corde GI, IL, ovvero degli archi BCE, ECb: ma le predette aree si sono nello scolio precedente provate uguali alla metà delle differenze fra i quadrati degli archi BC, CE, ed EC, Cb; danque posti i predetti BC=a, CE=p, Cb=q, ci si presenterà la

seguente analogia $a+p^2:p+q^2::a^2-p^2:p^2-q^2$, dalla quale col mezzo d'una facile deduzione si ricava quest'altra a:p::q, e s'inferisce, che gli archi BC, CE, Cb, ec. costituiscono una continua progressione Geometrica.

Si perde dunque una quantità proporzionale di moto in un numero pari di vibrazioni, fieno effe o grandi, o picciole, che così richiedono gli archi decrefcenti in ferie geometrica: ma ciò ripugna alle esperienze Nevvtoniane, che si considerano in progresso. Perciò o le vibrazioni d'un pendolo a cicloide non sono isocrone nel pieno, o le ressistenze non seguitano la proporzione, che passa fra i quadrati delle velocità, o quello che mi tembra più ragionevole, niuna di queste due leggi esattamente si verifica.

SCOLIO V.

Il Sig. Cavalier Nevvton nei Corollari alla Propofizione 31. lib. 2. de' suoi Principi propone una regola generale, cioè che posta la resistenza r come qualsivoglia dignità u^m della velocità, gli archi successivamente descritti dal pendolo alzati alla medesima potestà sono proporzionali alle loro dissernze. Se questo canone almeno prossimamente non discorda dalla verità; ne siegue, che chiamati x, y, z i tre archi BCE, ECB, bCe percorsi dalla ghianda immediatamente l'uno dopo l'altro, avremo l'analogia x^m: y^m:: x—y:y—z, per mezzo della quale si scopre il valore del terzo arco z, supposti noti i due primi, indi colla stessa regola il valore del quarto, e così di mano in mano viene a formarsi la progressione degli archi decrescenti.

Ora io noto, che poste le resistenze in ragione duplicata delle velocità, ed i quadrati degli archi come le loro disferenze; quanto più piccieli sono gli eccessi d'un arco sopra dell'altro immediatamente prosimo, altrettanto la nostra serie s'accosta ad una armonica, e sarebbe esattamente tale, ogni qual volta le disferenze sossero minime, ed inassegnabili. Veggasi il lodato Sig. Nevyton alla Proposizione 5º del citato libro. Ci valeremo dunque di questa supposizione sissiamente giusta con tanta maggior considenza, quanto che andiamo in traccia del prossimo, e non dell'esatto.

Premesso ciò, bisogna farsi a sciogliere il seguente Problema. Sia il pendolo circolare BCI (fig. 116'), di cui s'è servito il mentovato Scrittore nelle sue osservazioni registrate allo Scolio generale della suddetta Proposizione 31., e partasi la ghianda dal punto di quiete B, descrivendo nella prima oscillazione Parco BCD computate le resistenze, indi nella seconda l'arco DCE, e l'arco ECF nella terza, e così di seguito, sinattantochè in un numero determinato di vibrazioni si percorra nell'ultimo ascendimento l'arco dato CH, ed il pendolo abbia perduta una data porzione del suo moto: si cerca qualmente abbiano ad esprimersi gli archi BCD, DCE, ec. per una continuata progressione armonica.

Se il pendolo si vibrasse nel vano, monterebbe sino al punto I, e l'arco BCI sarebbe doppio di BC: ma nel pieno non oltrepassa il punto D; dunque fatto l'arco BCI = 2a, s'esprimerà l'arco BCD per la quantità 2a, e gli archi susseguenti, che debbono cossituire una

nelle quali stando i numeratori costanti, crescono i denominatori in serie aritmetica. Ma perchè il numero delle oscillazioni = n si suppone noto, e conseguentemente anche il numero del termini componenti la progressione, ne segue, che l'ultimo arco GCH ci verrà esposto dalla frazione $\frac{2a}{1+nx}$, ed essendo l'arco CH = b, sarà altresì noto l'arco

GH, che per via di adequazione è doppio di CH; dunque ci si affaccerà l'equazione $\frac{2a}{1+nx} = 2b$, dalla quale si cava il valore di $x = \frac{a-b}{nb}$,

e posta a-b=c, sarà $x=\frac{c}{nb}$. La nostra serie armonica cammine-

rà per tanto nella seguente maniera.

Quando fi fa
$$n=m$$
, il termine $2a$ è precisamente $=2b$.

In questo mentre facciamci strada ad un altro Problema. Continui il pendolo le sue reciprocazioni, e finalmente giunga a descrivere l'arco KCL, il quale sia in data ragione all'arco BCI == 2a: si dimanda quante oscillazioni richiedonsi per ottenere, che la ghianda ven-

virtù di questa equazione si cerchi il valore del numero delle vibrazioni posto $= m = \frac{\overline{a-g} \cdot bn}{gc}$.

Ma perchè abbiamo a valerci degli sperimenti fatti colla sua solita accuratezza dal tante volte lodato Cavalier Nevvton, sa di mestieri dalle sormule antecedenti dedurre il seguente Teorema.

Si parta il pendolo dal punto di quiete E, e dopo parecchie oscillazioni nell'ultimo ascendimento descriva l'arco CF, di modo che posti gli archi CE, CD uguali, perda la quantità del moto espressa per la differenza FD, che all'arco CE, o CD abbia una data relazione. Similmente calando la ghianda dal punto di riposo K, e satto l'arco CL = CK, compiuto che sia un numero qualunque di vibrazioni, monti nell'ultima falita per l'arco CM, e perda la quantità del moto esposto per la differenza ML, con questa condizione però, che si serbi l'analogia DF : DC :: LM : LC; laonde per una parte, o per l'altra si perda una quantità proporzionale di moto giusta la frase Nevytoniana: io dico, che come l'arco DC all'arco LC, così reciprocamente il numero delle vibrazioni, per cui si perde la quantità del moto DF, al numero delle vibrazioni, per cui si perde la quantità del moto LM, perfistendo però nella supposizione, che gli archi decrefcenti costituiscano, come s'è detto di sopra, una progressione armonica.

In fatti assumendo, che il pendolo cominci il suo moto dal punto B, e si sappia per esperienza, ch' egli perde una data porzione di moto in un dato numero di vibrazioni, montando ultimamente per l'arco CD; posso determinare in quante oscillazioni giunge esso a descrivere prima l'arco EC, e poi l'arco CF. Presa per mano la nostra ultima formula

 $\frac{a-g}{g} \cdot \frac{bn}{c} = \infty$, in effa avremo a = all' arco BC, b = all' arco CD,

c = a - b = alla differenza ID, ed n = al numero noto delle vibrazioni, nelle quali fi perde il moto ID: ed oltre ciò la spezie g ci rappresenterà l'arco EC, ed m il numero cercato delle vibrazioni, compiuto il quale descrivesi dalla ghianda lo stesso arco EC.

Ora se noi chiameremo G l'arco CF, ci si presenterà la seconda

equazione, cioè $\frac{\overline{a-G}}{G} \cdot \frac{bn}{c} = M$, e fottratti l'uno dall'altro i membri

delle due equazioni, $\frac{a}{G} \cdot \frac{bn-bn-a}{c} \cdot \frac{bn}{g} = \frac{bn}{c} = M-m$, cioè

 $\overline{a-a}$. bn = M-m = x, esprimendosi per x il numero delle oscil-

lazioni, in cui il pendolo, che si parte dal punto di quiete E, arriva a descrivere l'arco CF, e perde la parte di moto espressa per DF.

Collo stesso giro di discorso, chiamando si l'arco KC, ed F l'arco CM, scopriremo, che il numero delle oscillazioni s, per cui si perde la porzione di moto ML, ci viene rappresentato dall'equazione

 $\frac{a-a}{b} = y$, e voltate le due equazioni in una proposizione, avrassi $\frac{a-a}{b} = y$, e voltate le due equazioni in una proposizione, avrassi

 $\frac{a-a:a-a::x:y:}{G}$ ma per l'ipotefi G:g::F:f; dunque fe fară

 $\mathbb{G}: g:: \mathbb{F}: f:: 1: p$, troveremo a-a: a-a: x: y, o fia

 $\frac{ap-a}{pG} : \frac{ap-a}{pF} :: x : y$, vale a dire i due numeri delle vibrazioni, in cui

si perde una quantità proporzionale di moto, in ragione reciproca degli archi EC: KC: lo che doveva dimostrarsi.

SCOLIO VI.

Posso presentemente paragonare quanto risulta dal calcolo con ciò, che mi dà l'esperienza, e vedere nel tempo medesimo sino a qual segno l'ipotesi assunta s'accorda colle operazioni della Natura.

Fra le molte offervazioni del Sig. Nevvton io ne scelgo due fatte nell'aria, siccome le più esatte, e le più compiute. Nella prima si

faceva uso d'un globo di legno, il cui diametro era di dita 6 7/8

misura di Londra, ed il peso d'oncie Romane 57 7/22, sospeso da un

tenue filo, in maniera che tra il punto di sospensione, ed il centro d'oscillazione del globo ci sosse l'intervallo di piedi diece, e mezzo. Lasciato cadere il pendolo da vari punti di quiete B, G, K, onde i primi archi di discesa BC, GC, KC sossero in ragion dupla, cioè di dita 64, 32, 16, 8, ec., si notava diligentemente il numero delle vibrazioni, nelle quali in qualunque caso si perdeva l'ottava, o la quarta parte del moto; così che per cagion d'esempio descrivendosi dal globo il primo arco BC = CI, giungesse esso a percorrere dopo un dato numero d'oscillazioni nell'ultimo ascendimento l'arco CD, e la disterenza DI sosse l'ottava, o la quarta parte dell'arco primiero BC.

Atteso che gli archi costituiscono una serie geometrica decrescente, il cui esponente è uguale al binario per le cose de me dimostrate nell'ipotesi, di cui si sa parola, i numeri delle vibrazioni dovrebbono altresi sormare una progressione crescente dello stesso genere, la quale però assai discorda dalla sperienza, come appare dall'annessa tavola.

Archi di prima discesa 64. 32. 16. 8. 4. 2.

Archi d'ultimo ascendimento = 56. 28. 14. 7. $3\frac{1}{2}$ $1\frac{3}{4}$.

Vibrazioni fecondo il calcolo — $9\frac{2}{3}$. $19\frac{1}{3} \cdot 38\frac{2}{3} \cdot 77\frac{1}{3} \cdot 154\frac{2}{3} \cdot 309\frac{1}{3}$.

Vibrazioni giusta l'esperienza — $9\frac{2}{3}$. $18\frac{1}{2}$. $35\frac{1}{2}$. 69. 121. 164.

Archi di prima discesa 64. 32. 16. 8. 4. 2.

Opere Ricc. Tom. III. A a a Ar-

Archi d'ultimo ascendimento = 48. 24. 12. 6. 3. $1\frac{1}{2}$.

Vibrazioni secondo il calcolo = $22\frac{2}{3}$. $45\frac{1}{3}$. $90\frac{2}{3}$. $181\frac{1}{3}$. $362\frac{2}{3}$. $725\frac{1}{3}$.

Vibrazioni giusta l'esperienza = $22\frac{2}{3}$. $41\frac{2}{3}$. $83\frac{1}{3}$. $162\frac{1}{2}$. 272. 374.

Nella seconda sperienza dal medesimo filo lungo piedi $10^{\frac{1}{2}}$ pendeva una palla di piombo di due dita di diametro, e di peso d'once Romane $26^{\frac{1}{4}}$. Eccone il risultato.

Archi di prima discesa 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1.

Detti d'ultimo ascendimento 56. 28. 14. 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. $\frac{7}{8}$ Vibrazioni secondo il calcolo 30. 60. 120. 240. 480. 960. 1920.

Dette giusta l'esperienza 30. 53. 90 $\frac{1}{2}$. 140. 193. 228. 226

Archi di prima discesa 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1.

Detti d'ultimo ascendimento 48. 24. 12. 6. 3. $1\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$.

Vibrazioni secondo il calcolo 70. 140. 280. 560. 1120. 2240. 4480.

Dette giusta l'esperienza 70. 121. 204. 318. 420. 518. 510.

SCOLIO VII.

Sopra gli addotti calcoli non sarà suori di proposito il fare alquante curiose annotazioni. Quando gli archi sono assai grandi, vanno essi decrescendo sensibilmente in una progressione armonica, e con tale

precisione, che nulla più. Nella prima esperienza quel pendolo, che percorre un arco di dita 64 nella sua prima discesa, si riduce a descrivere un' arco d'ultimo ascendimento di dita 56 in vibrazioni nº.

 $9\frac{2}{3}$: si dimanda in quante oscillazioni seguitando il nostro computo si ridurrà a salire per un arco di dita 48. La formula dello scolio quinto ci dà generalmente $\frac{a-g}{g}$. $\frac{bn}{g}$ = m, la quale limitata giusta i dati,

e la ragione, che passa fra le quantità a, b, g, c, rinviene al n: $2\frac{\tau}{3} = m$, o pure $9\frac{2}{3}$. $2\frac{\tau}{3} = 22\frac{5}{9} = m$, numero pochissimo diver-

fo dall'altro $22\frac{2}{3}$ fomministratori dallo sperimento.

Similmente se nella seconda tavola dell'antecedente scolio il pendolo del piombo si riduce dalle dita 64. alla 56. in oscillazioni nº. 30,

a norma del nostro canone moltiplicando il nº. 30. per $2\frac{1}{3}$ scopriremo,

che in 70. vibrazioni sarà obbligato a salire per un arco di dita 48. ma in tante appunto nè più nè meno è successo l'effetto per tessimonianza del Sig. Nevvtoni dunque negar non si può, che almeno nelle maggiori reciprocazioni dei pendoli abbia luogo la serie armonica.

Quanto più gli archi diventano piccioli, tanto più questa legge si discosta dall'esperienza, ed in progresso si allontana con tali eccessi, che il numero delle oscillazioni, che avrebbono ad impiegarsi, è qualche siata più che quadruplo di quelle, che in fatto si osservano. Ha dunque ragione lo Scrittore citato di asserire. Resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major, quam in ea ratione.

S C O L I O VIII.

Considerato l'andamento più da presso, e penetrando 'più addentro nella ricerca, mi metto sotto gli occhi le seguenti progressioni decrescenti

 2^4 . a, x, $\frac{x^2}{a}$ $\frac{5}{a^2}$ $\frac{x^3}{a^3}$ $\frac{5}{a^3}$ ferie geometrica

 3^a . a, x, ax, ax, ax ferie armonica $2a - x \quad 3a - 2x \quad 4a - 3x$

44. 4, 11, 11, 2.

 S^a , a, x, p, q, r.

Queste due ultime progressioni da me tali si assumono, che nella quarta sia come il quadrato del primo termine a quel del secondo, così la disserenza fra i due primi termini a quella, che passa fra il secondo, ed il terzo, e così successivamente, cioè come

 $a^2: x^2:: a - x: x - y$, e come $x^2: y^2:: x - y: y - u$, ec.

Nella quinta poi voglio, che i termini di mano in mano sieno in ragione triplicata delle loro disferenze, vale a dire come

 $a^3: x^3:: a-x: x-p$, e come $x^3: y^3:: x-p: p-q$, ec.

Le progressioni di simil genere tutte così si costruiscono. Sia $a^m: x^m:: a-x: x-y$; dunque $a^mx - a^my = ax^m - x^{m+1}$, ovvero $x - x^m + x^{m+1} = y$. Dati pertanto i due primi termini $a_0 x$, per $a^{m+1} = a^m + x^{m+1} = y$.

aver il terzo, si contino nella progressione geometrica tanti termini, ommesso il primo, quante unità sono contenute nell'esponente m = 1, indi sommati insieme il secondo e l'ultimo, dall'aggregato di essi si sotti il penultimo, ed il residuo sarà il terzo termine della nostra pro-

gressione. Per esempio sia m=2: prendo i tre termini $x=\frac{x^2+x^3}{a}$

gli estremi col segno affermativo, ed il medio col negativo, ed ho il valore della quantità ignota y. Chi volesse poi il quarto termine u, perverrebbe all'equazione $y - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^2} = u$, e così seguitando all'in-

finito.

In cercando il terzo termine della quinta serie, dispongo le quat-170 grandezze proporzionali x, $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3}{a^2}$, $\frac{x^4}{a^3}$, e scelta la prima, la per nultima, e l'ultima coi segui appropriati, dico essere $\frac{1}{a^2} = \frac{x^3}{a^3} = \frac{x^4}{a^3}$

Quello che sa presentemente a mio proposito si è, che nelle progressioni di sopra esposte, sissati i due primi termini a, x in ciascheduna di esse uguali, il terzo dell'aritmetica 2x - a sarà minore del terzo a nella geometrica, e questo altresì minore del terzo ax nell'aritmetica a nell'arit

monica, il quale resterà superato dal terzo $y = x - \frac{x^2 + x^3}{a}$ della

quarta serie, è finalmente il terzo $p = x - x^3 = x^4$ della quinta sarà

maggiore del terzo y della quarta. Ciò si verifica in tutti i termini, che compongono le colonne verticali delle predette progressioni, siccome ce ne può convincere il calcolo, senza che io mi prenda pensiero di dedure la dimostrazione, che ci condurrebbe troppo lontani dal no-

Premesse queste necessarie avvertenze, si può francamente conchiudere, che preso per primo l'arco BCI=a, per secondo l'arco BCD=S, il quale nella prima oscillazione dal pendolo si percorre, e per terzo l'arco immediatamente sussegnete DCE; questi tre archi mal vengono espressi da primi tre termini della serie quarta, e peggio da quei della quinta. La ragione si è, perchè se quando gli archi si assumono di picciola estensione, i termini, che compongono la terza progressione armonica, si discostano per lungo tratto dall'esperienza; tanto maggiormente si scosteranno que termini, che formano le due serie inseriori, i quali crescendo quantunque di poco sopra quelli della terza c'insegnano, che ci vorrebbe un maggior numero di vibrazioni, di quello che portano i calcoli da noi fatti, perchè la ghianda perdesse una data porzione di moto: e pure gli esperimenti ne richiedono uno assai minore, secome dalle tavole si rende manisesto.

E se così è, le resistenze dei mezzi sluidi, che sanno contrasto al moto dei pendoli, non istanno dentro i limiti tra il quadrato, ed il cubo delle attuali velocità, conforme dover intervenire nei corpi solidi, che per linea retta camminano, abbiam dimostrato, mentre però il sluido cacciato di luogo si trovi costituito in riposo. Bisogna dunque ricorrere a leggi, ed a limiti assatto disserenti, che colla scorta dell' esperienza si anderanno investigando.

Sul principio del moto negli archi grandi la resistenza sta in proporzione duplicata della velocità, ma presto si riduce a tale, che gli archi successivamente descritti costituiscono una serie armonica. In progres. gresso poi facendosi gli archi di mano in mano percorsi sempre più piccioli, si varia la progressione, disponendosi essi in certe serie ignote, che stanno di mezzo tra l'armonica, e la geometrica, allontanandosi nel profeguimento sempre più dalla prima, ed avvicinandosi alla seconda.

Merita la cosa, che si ponga in tutto il suo lume. Rimettiamoci a memoria, che se gli archi decrescenti fossero disposti in una continua progressione geometrica, accaderebbe, che il pendolo tanto nelle reciprocazioni grandi, quanto nelle picciole verrebbe a perdere una quantità proporzionale di moto dopo compiuto un numero pari di oscillazioni, A cagion d'esempio se per la seconda tavola il globo da un arco di dita 64. passa ad un altro di dita 56. in trenta vibrazioni; in altrettante precisamente farebbe transito da un arco di dita 32. a quello di dita 28, e da un arco di dita 16 a quello di dita 14, e così di seguito. Quali sieno in simili circostanze i numeri delle vibrazioni, che rispondono alla ragione armonica, e quelli, che ci vengono somministrati dall'esperienza, la tavola ce lo dimostra, ed il risultato apparirà dal seguente computo.

Vibrazioni secondo la

ragione	Gcometrica	esperienza	ragione armonica	esperienza
14.	30	30 - 23	60	60-7=53
24.	30	30 + 60 - 1		$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
34.	30	304-110	240 2	40-110=140.
4ª.	30	304163	480	180-287-193.
5 "	30	30=198		60-732=228.

Avuto riguardo per una parte agli eccessi, e per l'altra alle diflerenze, si scopre, che nel principio del moto, quanto le vibrazioni s'estendono per uno spazio più grande, l'esperienza s' accosta più da vicino alla ragione armonica: ma nel progresso, qualunque sia l'andamento, l'approssimazione si volta dalla parte della serie geometrica, e tanto se le avvicina, ch'egli è necessario, che prima con quest'ultima s: confonda, e poi se la lassi addietro, ogni qual volta potessero continuarii le osservazioni sino agli archi minimi, ed al senso della vista totalmente impercettibili.

Io ne ricavo la prova dal fatto: conciossiachè se l'arco KC è di due dita, per perdere l'ottava parte del moto ci vogliono 228. oscillazioni, e 518. per perdere la quarta parte. Pervenuto poi l'arco NC alla misura d'un solo dito, se gli archi di passo in passo decrescenti si disponessero a sormare una serie geometrica, quello espresso per l'unità

non potrebbe ridurfi a $\frac{7}{8}$, ovvero ad $\frac{1}{4}$, falvo che in tante vibrazioni

nè più nè meno, quante sono esposte da suddetti numeri 228, e 518: ma per tal effetto meno se ne impiegano, bastando secondo l'esperienza nel primo caso oscillazioni 226, e nel secondo 510; dunque gli archi successivamente descritti dal pendolo si fanno minori, messi a confronto con quelli, che si adattano alla progressione geometrica: e perciò si dee conchiudere, che si faccia passaggio ad altre progressioni incognite, che stanno di mezzo fra la geometrica, e l'aritmetica, e che discostandosi sempre più l'andamento dalla prima, si vada avvicinando alla seconda, alla quale non si può mai pervenire, attesi gli assurdi, che ne nascerebbono, se non in caso, che si percorra l'ultimo spazio fisicamente infinitesimo con una minima celerità, e la ghianda si riduca alla quiete, fosfrendo per questo impercettibile tratto una resistenza quasi inassegnabile, e prossimamente uniforme.

I due limiti pertanto delle resistenze vengono determinati per una parte negli archi grandi da un contrasto proporzionale al quadrato della velocità, e per l'altra in quell'arco minimo, ed ultimo, che sta di mezzo fra i confini del moto, e della quiete, da una opposizio-

ne, che si può prender per costante.

SCOLIO

Io non saprei dedurre altronde la causa sisica degli addotti senomeni, suorchè dai moti irregolari, e dai bilanciamenti, ai quali è sottoposto il fluido per occasione dell'iterate reciprocazioni del pendolo. Egli è necessario, che le minime particelle componenti il liquido si trovino perturbate, ed agitate con direzioni parte cospiranti, e parte contrarie, senz'aver mai l'opportunità di rimettersi in una persetta quiete . E ciò tanto più succede in fatto, quanto le oscillazioni sono più corte. Nelle più lunghe, ed estese percorrendosi archi grandi, e discendendo la ghianda per una curva assai inclinata, incontra obbliquamente gli strati del fluido disposti in diversi piani, ed il moto è misto di verticale, ed orizzontale: ma nelle piccole vibrazioni gli archi declinano pochissimo dalla linea retta, ed il pendolo andando, e ritornano do per brevissimi spazi comunica sempre nuovo impeto alla medesima materia, che si mantiene, per dir così, in un perpetuo siusso, e riflusso, facendosi tante riflessioni, quante sono le reciprocazioni.

Qual meraviglia è dunque, se la resistenza cresce, non già assolutamente considerata, ma relativamente alla celerità, che nella ghianda risiede? Ha notato il Sig. Nevvton, che fatto oscillare nell'acqua un pendolo, ogni qual volta il vaso, che conteneva il fluido, era troppo

angusto rispetto al diametro del globo oscillante, s'aumentava la residenza; perchè l'acqua messa in moto era obbligata a rissettersi nelle vicine pareti del vaso oltre il dovere ristretto, nè potea cedere dai lati liberamente.

Dove ho favellato delle resistenze, ho messo in considerazione i moti del mezzo, a traverso del quale il solido s'apre la strada, e ne ho cercate le leggi nei casi più semplici, o almeno i limiti, da cui vengono circoscritte. La ricerca ci può dar qualche lume nel presente incontro, ma non già tale, che se ne possa aver il preciso, a causa degli ondeggiamenti irregolari, e contrari, e delle velocità variabili al sluido comunicate. Una conclusione però si verifica, ed è che quando il sluido contrasta al moto del solido colla sua inerzia animata da qualche grado di celerità opposta, egli è necessario, che il corpo si riduca finalmente alla quiete.

Da tutte queste invessigazioni altro non si può conchiudere, se non che i pendoli a cicloide, i quali anno satto tanto onore al celebre Ughenio considerati nel vano, per averne egli prima d'ogni altro scoperte le mirabili proprietà, non sono di molto uso nel pieno, dovendosi secondo il comun consentimento de' più periti Artesici preserire i circolari di gran diametro, e che percorrano archi assa piccioli. La ragione consiste in ciò, che se fra le infinite curve ci è quella, cui convengono le oscillazioni isocrone, non ostante la resistenza del mezzo, e le stravaganti leggi, dalle quali è regolata le opposizione, una parte minima d'un cerchio per la teorica de raggi osculanti siscamente combacierà, e si consonderà colla curva medesima.

SCHEDIASMA XXXI. (*)

Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi sluidi ritardano il moto de' corpi solidi.

A Geometria, che ne' primi tempi nata da debolissimi principi, a guisa d'un Fiume reale ricevendo col progresso dei Secoli il tributo di nuove invenzioni, s'è andata di passo in passo ingrossando, finalmente solo a giorni nostri è giunta a metter soce nell'immenso Occano dell'infinito. Quando la quantità s'è cominciata a risolvere ne' suoi elementi infinitamente piccioli di vari gradi, e s'è scoperto il

metodo analitico di maneggiarli con egual franchezza, come se sosse ro grandezze finite, le Scienze Fisiche, e Matematiche sono comparse in pubblico sotto un altro aspettto; e si sono poste in tutto il loro lume tante sublimi verità, che pare aver noi, per così dire, alle mani il computo stesso della Natura.

La principale difficoltà consiste in sissare le vere leggi, di cui la sagacissima Natura nelle proprie operazioni si serve; mentre in tal ricerca sogliono frequentemente riuscir inutili i nuovi calcoli, e molti Autori di gran nome si sono contentati d'applicarli ad alcune ipotesi più verisimili, che vere, e certamente non dimostrate, oppure d'abbracciare in molti casi sotto una formula generale tutte le possibili ipotessi, per mostrare, se mai venisse a manisestarsi la vera d'averla in

qualche modo prevenuta.

S'io non prendo errore, uno degli usi migliori, che possa farsi del computo differenziale, ed integrale si è, che col suo mezzo restino convinte di falso parecchie leggi naturali, che dagli Scrittori si veggono adottate come infallibili; imperocchè una Ipotesi, che non sia vera, non può mai reggere a tutte le conseguenze, che da essa si deducono, altrimente come mai potrebbe rigettarsi, se a tutti i Fenomeni efattamente corrispondesse? So per esperienza quant'intoppi si frappongano a chi s'ingegna di battere questa strada. Accade talora, che ci sieno ignoti per la maggior parte i Fenomeni, e che le osservazioni sieno quasi impossibili a farsi con accuratezza; perchè il senso ci dà il proffimo, e non mai l'esatto. Succede bene spesso, che il metodo degl' infiniti sul più bello ci abbandoni, a causa della consusione delle incognite, e delle loro slussioni, e per ciò abbiamo la necessità di raggirarci per sentieri diversi, e soddissare a cento ardui Problemi, prima che si pervenga ad un effetto noto, e palpabile, che distrugga l'ipotefi assunta, e l'assurdo, da cui va accompagnata, chiaramente ci manifesti. Molte volte si viene a capo di ciò, che si cerca, per via di pazienza, o d'industria, ma non sarebbe già maraviglia, che si dovesse ancora la sua parte al caso, ed alla fortuna, che spesse fiate ha il suo ingegno.

Io mi sono proposto d'esaminare presentemente, se quelle leggi, con cui si pretende da' Matematici di primo grido, che i mezzi siudi s'oppongano al moto de' corpi solidi, sieno tutte vere, e tutte possano in varie circostanze aver luogo; o pure se per avventura sieno salse salssissime alcune d'esse, che vengono troppo coraggiosamente vantate

per certe, e per evidenti

Affine di farmi strada a ciò, ch'io sono per dire, è da sapersi, che l'incomparabile Galileo, il quale prima d'ogni altro, seoperte con ammirabile sagacità le leggi sondamentali del moto, ci ha per così dire, spalancate le porte della Natura, ha dovuto nelle sue dimostrazioni prescindere dalle resistenze, e silosofare su i moti accelerati, come se i gravi per lo vano verso il loro centro piombassero: non già perchè egli ignorasse, che da qualunque mezzo, quanto si voglia rae Opere Ricc. Tom. III.

Bbb

^(*) Questo Schediasma unitamente coll' Annotazione del Sig. Abate Conte Girolamo Lioni su impresso l'anno 1722, nel Tomo secondo de supplementi al Giornale del Letterati d'Italia. Il C. Jacopo per altro vi lavorava intorno l'anno 1717. Veggasi la seconda lettera dello Schediasma XXXVII. verso il fine.

ro, e cedente viene a poco a poco ritardata la velocità del mobile; ma perchè a' suoi tempi non avea satti tali progressi la Geometria, che col

suo ajuto si potessero ridurre a calcolo le resistenze.

Il dotto VVallis Inglese principiò a metter mano in questa astrusa materia, supponendo, che la resistenza del mezzo susse sempre in ragione della velocità, con cui il corpo solido attualmente cammina; non già per esser l'ipotesi o la più semplice, o la più vera, ma solo perchè ad essa poteva più facilmente adattare le proprietà delle sue geometriche progressioni. Qualche tempo dopo il famoso Cristiano Ughenio fattosi a specolare sopra lo stesso soggetto stabili una nuova regola, essere le resistenze in proporzione non semplice, ma duplicata delle velocità; canone, che sarebbe stato concordemente, e senza contraddizione ricevuto, se il celebre Isacco Nevvton con una riflessione più ingegnosa, che soda, combinate insieme le due mentovate leggi, non ne avesse architettata una terza. Considera egli nel fluido una doppia repugnanza ad essere penetrato, o diviso. Nasce l'una dalla massa, o sia dalla quantità della materia fluida, cui debbe il moto comunicarsi, ed è sempre proporzionale alla densità: nasce l'altra dalla difficoltà, che si prova nello staccare una particella del fluido dalle contigue, e s'appella tenacità. Resta il mobile ritardato dalla prima in proporzione duplicata della propria velocità, e dalla seconda, se si porge sede alla teorica del Sig. Nevvton, in proporzione semplice della velocità medefima; e siccome quella ha il suo luogo ne'mezzi dotati d'una persetta fluidità; così questa in certi mezzi tenaci, e viscosi, per i quali a lento passo il corpo duro si va avanzando. Perchè poi ogni liquore, oltre la massa, di cui è composto, e da cui la forza d'inerzia dipende, ha qualche grado in se stesso di viscosità, pare, che uniti insieme i due impedimenti, un terzo ne rifulti, per cui il fluido s'oppone al moto de'solidi, parte in ragione della velocità, e parte del suo quadrato, onde abbia a formarsi la somma di queste due quantità, per ben esprimere la forza negativa, cui si dà il nome di resistenza.

Messo da parte il canone Ugheniano, spero di sar toccar con mano essere gli altri due ad una chiara, e manisesta sperienza direttamente contrari. E' cosa maravigliosa, che avendo il lodato Sig. Nevvton, e dopo lui, per tacer di molti altri, li Sig. Varignon, ed Ermanno maneggiate per tutti i versi le formule, che dalle accennate leggi derivano, non sia mai loro venuto satto d' incontrare qualche conseguenza evidentemente fassa, ed alle operazioni della Natura ripugnante. Anch'io lungamente, e senza profitto per un labirinto di calcoli raggirato mi sono, e finalmente ho scoperto ciò, che andava cercando, con la soluzione del seguente Problema, che non è già de' più facili della Geometria.

PROBLEMA:

Determinare nella Cicloide il moto d'un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione della velocità.

11 tante volte lodato Sig. Isacco Nevvton, non avendo alle mani la chiave analitica per satisfare al quisito, si fece a scioglierlo per via di conghietture; e col fupporre falsamente, che la palla del pendolo partita dal punto di quiete R (fig.117.) discenda prima per l'arco maggiore RT, e poi monti in vigore dell'impeto concepito per l'arco minore TX, distesa la curva RTX in una retta uguale rex (fig.118.); indi prese come abscisse gli spazi crescenti rt, ry, rx, ed alzate a piombo le ordinate tu, 72, che ci rappresentino le velocità acquistate dal mobile dopo avere trascorsi i predetti spazi, si diede a credere, che la curva locale, e nascente ruzx fosse una spezie d'ellisse. All' incontro il Sig. Ermanno confessò ingenuamente, che " si resistentiæ sint ut ce-, leritates acquisitæ, nondum constat, qua ratione curva rax construi de-, beat, ne quidem concessis quadraturis figurarum curvilinearum ,, e perciò sospettò, che appartenesse piuttosto alla samiglia delle trascendenti. Ma perchè entrambi si sono per lungo tratto allontanati dal vero, il loro esemplo ci può servire di ammaestramento, quanto sia cosa pericolosa il porsi ad indovinare in Geometria.

Sia per tanto la cicloide QTU (fig.117.), in cui si vibri un pendolo lasciato cadere dal punto di quiete R, che in forza della sua natural gravità descriva l'arco RST, con questa condizione, che in ogni punto, per esempio S, la resistenza del mezzo sia in ragione della velocità acquistata. Pongo l'arco TS=y, la resistenza nel punto S=r, la quale essendo alla velocità in data proporzione potrà esporsi con l'equazione r=2bu: e perchè s' intende espressa per il doppio diametro del cerchio generatore della cicloide la gravità costante, con la quale discenderebbe a piombo il mobile per il dato sluido, qualunque ella si possa essere (mentre su questo punto mi riserbo di scoprire un grande inganno) la forza tangenziale nel sito S da essa derivata ci verrà rappresentata dall'arco ST, e conseguentemente avremo per i canoni noti l'equazione y-2bu. — dy=udu, ovvero (A) — ydy+2budy=udu.

Prima di tutto è d'uopo liberare la formula della consusione delle incognite, ed io potrei a tal essetto metter in uso la bella regola già pubblicata dal dottissimo Sig. Gabbriello Mansredi ne'nostri Giornali, e ch'essere familiare ai chiarissimi Signori Bernulli da vari Schediassimi inferiti negli Atti degli Eruditi di Lipsia bastantemente comprendo; per cui si sa succedere selicemente la separazione delle indeterminate nelle equazioni disserenziali del primo grado, ogni qual volta in tutti i termini dell'espressione gli esponenti delle quantità variabili finite montano alla stessa dimensione. Facciasi dunque u=yz, ed un=yyzz; quindi prese Bbb 2

le differenze, udu = yyzdz = zzydy, e sostituiti opportunamente nella no stra espressione (A) i valori della grandezza u, e della flussione udu. avrassi - ydy - 2bzydy = yyzdz - zzydy, cioè - ydy - 2bzydy - zzydy = $\eta z dz$, ed istituite le necessarie divisioni, $-\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{a - 2bz + zz}$. Che

se per avventura si desiderasse una formula più facile a maneggiarsi; pongafi b - x = z, onde fia bb - 2bx + xx = zz, -bdx + xdx = zdz, e finalmente a-2bz + zz = a-bb + xx; così che surrogati i valori, rifulti la nuova equazione differenziale $\frac{-dy}{y} = \frac{-bdx}{a-bb+xx} + \frac{xdx}{a-bb+xx}$

L'integrazione del primo, e del terzo termine sempre s'ottiene col mezzo dei logaritmi; ma quella del secondo può essere algebratica, se sarà a=bb, o pure trascendente, e dipendere dalla quadratura del cerchio, quando sia a maggiore di bb, ovvero da quella dell'iperbola in caso, che l'unità a sia minore del quadrato bb. Le curve dunque infinite, che soddisfanno alla quistione proposta, sono parte del genere delle analitiche, e parte delle meccaniche, secondo il diverso valore della quantità 2b, che paragonata con l'unità, fissa la proporzione costante tra la velocità, e la resistenza.

Fatte queste osservazioni, non sarebbe difficile passare alla costruzione : ma a me, cui non tanto cale della foluzione, quanto della fua eleganza, e semplicità, sia permesso il battere una strada diversa, e di adoprare una mia particolar maniera di sviluppare le incognite, per cui si stendono i confini del calcolo sommatorio, e con l'ajuto di cui in certi casi più ardui infinite separazioni s'ottengono, che stancherebbono per altro la pazienza di qualunque indefesso Analista, come penso di far vedere a miglior occasione.

Intanto richiamata a memoria la nostra equazione (A) -ydy-1-2bdy =udu, facciafi u=my-p (la lettera p dinota una quantità indeterminata assunta, ed m una costante da determinarsi nel progresso dell'operazione) sarà dunque uu=mmyy-2myp+pp, e prese le differenze, udu = mmydy - mydp - mpdy + pdp, e nella formula (A) fostituendo i valori trovati, di modo che svanisca la ignota u, avremo (B) -ydy 2bmydy - 2bpdy = mmydy - mydp - mpdy + pdp. Stabilisco la seguente equazione -ydy + 2bmjdy = mmydy, ovvero -1 + 2bm = mm, dalla quale si ricava m + 1 = 2b. Cancellati in questo mentre nell'espressione

(B) i termini, che si distruggono, resterà = 2bpdy = mydp - mpdy

pdp, cioè 2b-m. pdy-mydp =-pdp, e collocato in cambio di 2b il suo valore m + 1, (C) pdy - mmydp = -mpdp, ed integrando non ommessa

la costante,
$$g = \frac{y}{p^{mm}} = \frac{mp^{1-mn}}{mm-1}$$
 oppure (D) $gp^{mn} = y = \frac{mp}{mm-1}$

Per fissar poi il valore della costante g, si osservi, che nel punto R' principio della discesa, supponendosi la velocità nulla, l'arco TR=y diventa uguale ad una costante per esempio c, e nello stesso caso si raccoglie dall'equazione assunta u - my - p, che si sa p = mc. Se dunque nella formula (D) in vece di y, p si sostituiranno i valori c, mc, sarà $g = \frac{1}{e^{mm-1} \cdot m^{mm+2} - m^{mm}}$, il qual valore posto in cambio di g nell'

equazione (D), avremo (E)
$$\frac{mp}{mm-1} = \frac{p^{mm}}{c^{mm-1} \cdot m^{mm+2} - m^{mm}} = y$$
, 6

moltiplicando tutti i termini per m, e collocando in vece di my il suo valore u p cavato dall'espressione suffidiaria u=my-p, sarà

$$(F) \quad p \quad p^{mn} \qquad = u$$

$$mm - 1 \qquad c^{mm-1} \cdot m^{mm+1} - m^{mm-1}$$

Le due equazioni fondamentali (E) (F) serviranno come di base alla costruzione; ma prima sarà ben fatto il considerare alcune determinazioni, che mettono in chiaro la natura del Problema.

I. La quantità m non può mai essere negativa, e molto meno immaginaria; e ciò, perchè, stante l'equazione m + 1 = 2b, verrebbe

ad effere negativa, o immaginaria la grandezza 2b, la quale esprimendo, paragonata con l'unità, la proporzione della resistenza alla velocità, è d'uopo, che sia reale, e positiva; altrimenti la quistione sarebbe stata proposta sotto un ipotesi impossibile.

II. Sarà pertanto necessariamente affermativo l'esponente mm. Quindi nella formula (E) fatto l'omogeneo di comparazione y=x-z, con questa condizione, che si formino due parziali equazioni

$$\frac{mp}{mm-1} = x, e \frac{-p^{mm}}{c^{mm-1} \cdot m^{mm+2} - m^{mn}} = -x, \text{ la prima di esse}$$

farà al triangolo, e la seconda ad una delle infinite parabole, e non

mai delle infinite iperbole. Questa ristessione ha parimente luogo nella

formula (F) maneggiata con lo stesso metodo.

III. Ben è vero, che l'esponente mm può esser razionale, sordo, ed anche misto di quantità reali, ed immaginarie. Nel primo caso le parabole sono quasi sempre algebratiche, negli altri meccaniche, e per la loro costruzione bisogna ricorrere alla quadratura dell'iperbola, o del cerchio.

IV. La stessa perplessità s'incontra ne' coefficienti de' termini, che per il disserente valore della grandezza m compariscono o assermativi, o negativi. Se m=1, il primo termine nell'una, e nell'altra espressione (E) (F) diventa infinito, e dobbiamo servirci dei logaritmi. Supposto maggiore dell'unità, i primi termini nelle predette equazioni saranno assermativi, ed i secondi negativi, e le parabole descritte volteranno in tal caso all'asse la loro convessità. Ma preso m minore dell'unità, succederà tutto l'opposto: il primo termine in ambe le formule sarà negativo, e positivo il secondo, e le parabole concave verso l'asse.

V. Deefi avvertire, che la quantità m ha due valori differenti, purchè non sia eguale all'unità, nel qual caso i due valori si consondono in un solo. Negli altri casi, se un valore si trova minore dell'unità, l'altro è maggiore. Prendasi per mano l'equazione $m+\frac{1}{m}=2b$, e se

in vece di m collocherò l'altro valore $\frac{1}{m}$, non fi muterà l'equazione.

Quindi ad una fola supposizione satisfaranno due costruzioni. La Figura 119. servirà per l'ipotesi, in cui m supera l'unità, e la 120. per quella,

in cui resta superato.

La terza indeterminata p, che s'è introdotta a solo fine di liberar l'equazione (A) dalla confusione delle variabili, fa un altro giuoco, e ferve ad un altro utizio, cioè di fomministrarci una elegantissima co-Aruzione geometrica. Se s'avesse a costruire la curva cercata, col prendere per abscisse gli spazi passati, o da passarsi dal pendolo, e per ordinate le velocità acquistate in qualsivoglia punto de' suddetti spazi, egli è evidente, che con un nuovo calcolo analitico farebbe d'uopo rintrac. ciare l'indole, e le proprietà della curva descritta. Un fimile inconveniente per lo più ci si sa incontro nelle costruzioni di tutti quei luoghi, che montano ad un grado elevato, e che lineari, o più che folidi s'appellano; mentre la formula algebratica non ci presenta a prima vista, e senza il tedio d'una ulteriore ricerca la natura, e l'andamento della curva locale. Nel maneggiare, fecondo le occasioni, vari Problemi, mi fono venuti in mente certi particolari artifizi, che ad infiniti cati iclicemente ponno adattarfi, e che da me comunicati ad un mio stimatidimo Amico, ne ha fatto un ufo si grande, che ha superata la mia aspettazione. Uno di questi consiste nel prendere una terza variabile, she ferva d'affe comune a due curve note, con le ordinate delle quali, o con una determinata porzione d'asse le due incognite principali s'esprimano. Il caso, su cui versiamo, ce ne somministra l'esempio, e per mezzo delle intercette in due bilinei parabolici ci verrà fatto d'esprimere la relazione, con cui gli spazi rispondono alle velocità, e vedremo, per così dire, a nascere le abscisse, e le applicate d'infinite curve parte geometriche, e parte trascendenti.

COSTRUZIONE.

Con lo stesso vertice A, a (Fig. 119., c 120.) al medesimo asse AB, ab si descrivano le due parabole dello stesso esponente mm AHC, abc; AFD, afd. Il parametro della prima sia

t e quello della feconda I
$$c^{mm-1} \cdot m^{mm+2} - m^{mm},$$

$$c^{mm-1} \cdot m^{mm+1} - m^{mm-1}.$$

S'inclinino all'asse AB, ab dal vertice A, a le due rette AC, ac; AE, ae, e sia AB: BC; ab:be:: mm-1:m; AB: BE; ab: be:: mm-1:1.

La retta AC, ac tagli la sua parabola nel punto più lontano C, c, e la retta AE, ae incontri la propria nel punto più vicino F, s; onde si formino li due bilinei parabolici ANCO, anco; ALFK, alsk: egli è manisesto, che se dall'intercetta NO, no presa nel bilineo ANCO, anco verrà espresso l'arco ST della cicloide, l'intercetta LK, lk corrispondente nell'altro bilineo ALFK, alsk esprimerà la velocità del pendolo nel punto S.

COROLLARJ.

I. E' cosa mirabile, che le costruzioni della Figura 119., c 120.; sebbene pajono diverse, non sono in sostanza, che una costruzione medesima. Non ostante che le parabole dalla Figura 119. voltino il convesso verso l'asse, e quelle della 120. il concavo, stante il doppio valore della quantità m; contuttociò una sola è la soluzione. In satti s'io piglierò NO = 100, avrò LK = 1k. Il satto sta certamente così, e basti di averlo accennato, risparmiando per ora la dimostrazione. Considereremo pertanto semplicemente la costruzione della Figura 119., che con quella della 120. persettamente concorda.

II. Presa la ordinata IH = alla costante e vale a dire all'arco RT della cicloide, la velocità nel punto F, o sia nel punto R, principio della discesa, comparisce nulla, e ciò dipende dalla determinazione del-

la costante g.

III. La velocità cominciando dal nulla in F va a poco a poco cres scendo, sino a diventar massima nel punto K; e poi si va diminuendo; sinattantochè torna nulla nel vertice A, cioè a dire nel punto insimo della cicloide. Ivi giunto il mobile perde tutto il suo moto, e viene posto in istato di quiete.

IV. La massima intercetta nel bilineo AHCO si trova essere IH=c corrispondente al punto F della velocità nulla, e la massima velocità

mm - 3

LK resta determinata, quando AM = p = c. m mm = 1.

V. Quando l'intercetta LK è la maggiore fra tutté, onde viene ad esprimere la massima velocità, in tal caso l'altra intercetta ON, che dinota lo spazio da passarsi, o sia l'arco ST della cicloide, si trova precisamente uguale alla resistenza del mezzo; così che ON = 2bu = r. La dimostrazione si deduce finalmente dalle nostre formula

VI. Discenda il pendolo dal punto di quiete Q, e scorra lo spazio QT; indi dal punto di quiete R, e scorra lo spazio RT: dico, che in camminare per i predetti spazi v' impiegherà tempi uguali, e la cicloide sarà isocrona anche nella nostra ipotesi. Mutata semplicemente la grandezza della costante c, si descriveranno due nuovi bilinei parabolici maggiori, o minori delli delineati nella Figura 119, e 120, ma però simili. Ora prese due sigure simili, in cui dalle abscisse s'essprimano gli spazi passati, e dalle ordinate le velocità corrispondenti, è agevole a provarsi, che combinando insieme i due moti, dopo avere trascorsi spazi proporzionali, i tempi si troveranno eguali. Questa verità si trova dimostrata dal Sig. Nevvton per altra strada.

VII. Resterebbero da considerarsi alcune altre particolarità, che stando serma la nostra ipotesi delle resistenze, appartengono al moto del pendolo nella cicloide: come se il grave principiasse a discendere dal punto Q con un grado di velocità impressa da sorza estrinseca; oppure che stando in riposo nel punto insimo T, venisse violentemente spinto in alto, ed obbligato a descrivere l'arco TXU. Con alterare opportunamente le nostre sormule si scopriranno le proprietà di questi moti, nè io m'inoltrerò di vantaggio, essendosi detto quanto basta intorno il geometrico.

S C O L 1 O.

Mi fermerò piuttosto sulle conseguenze Fisiche, che sono le più importanti, ed in grazia delle quali la soluzione del Problema è stata premessa. Il terzo, ed il quinto Corollario m'insegnano, che partendosi il pendolo dal punto di quiete R va scorrendo con moto accelerato l'arco RS ora più lungo, ed ora più breve secondo la diversa proporzione, che passa fra la resistenza, e la velocità. Abbia dunque nel punto S acquistata la velocità massima corrispondente alla massima inter-

cetta LK, continuerà esso a camminare per il restante arco ST con moto ritardato; di modo che arrivato al punto infimo T della cicloide, resterà totalmente immobile. Ciò si ricava evidentemente dalla costruzione; imperocchè esponendo l'intercetta ON lo spazio ST, e sacendosi sempre minori gli spazi, quanto più s'accostano al punto T, si scopre, che essendo nel punto A nulla l'intercetta descrivente, che ci rappresenta lo spazio da scorrersi sino al vertice della cicloide, nulla è parimente l'altra intercetta, da cui la velocità nel suddetto punto T resta espressa, e così il pendolo viene posto in istato di persetta quiete. Questa conclusione dimostrata in tutto rigore di Geometria ha un non so che del mirabile; quando massime si rissetta, che la proporzione costante della velocità alla resistenza può singersi grande quanto ci piace; che non ostante ciò, mentre la tenacità del fluido non sia infinitamente piccola, si verificherà sempre, che il pendolo compirà il suo moto in una mezza vibrazione; nè per quanto si supponga siscamente minima la viscosità del mezzo, il grave potrà mai passare nè meno per un brevissimo spazio la linea verticale. Disceso al sito più basso, ivi dee necessariamente fermarsi; attesochè nel luogo assegnato da questa legge di resistenza viene estinta tutta la velocità, che dalla gravità continuamente operante è stata ad esso di passo in passo comunicata.

Ora qual'è in Natura quel mezzo fluido, in cui non si trovi qualche grado di tenacità ? L'aria stessa non ne va affatto esente. Viscosa è l'acqua a parere del Sig. Nevvton, e più la dolce, che la salsa secondo il Sig. Montanari. Che che sia di ciò a tutte le spezie degli ogli non può negarsi una sensibile, e manifesta viscosità; e pure ho osservato più volte un pendolo a cicloide immerso nell'olio d'uliva, o di mandorle, e lasciato cadere da un punto di quiete, reciprocare, vibrarfi, e compire un buon numero d'oscillazioni. Anche lo stesso Sig. Nevyton ammonito, cred'io, dall'esperienza, col conghietturare, che la curva delle velocità relativamente agli spazi sosse una spezie d'elissi, ha tentato indarno di accordare il canone colle offervazioni. Supposta la legge del Sig. VVallis, poco uso potrebbe farsi de'pendoli, che in tutti i mezzi, trattone l'etere Cartesiano, ed il vuoto, estenderebbono il loro moto folamente alla metà della prima vibrazione. Se dunque non erra la Geomotria in tirare dai dati le conseguenze, è d'uopo rigettar come falsa l'ipotesi, da cui nascono alcune illazioni repugnanti

ai Fenomeni naturali.

Nè crediamo già di poter aggiustar le partite sossituendo il canone Nevvtoniano, per cui si computa la resistenza del sluido parte in ragion semplice, e parte in duplicata della velocità: conciossiachè senza tentare la soluzione d'un altro Problema, m'ingegnerò di metter in chiaro la faccenda con una sola, e semplicissima osservazione. Quando il pendolo resta semplicemente ritardato dalla viscosità del mezzo, quantunque appena sensibile, che all'azione della gravità sa contrasto, egli è certo per le cose dimostrate, che nel punto T la velocità è nulla, ed il mobile si trova ridotto alla quiete. S'aggiunga l'altra sorta opere Ricc. Tom. III.

et-

di resistenza, che nasce dall' inerzia della materia sluida, è ne seguirà, che debilitata dal nuovo ostacolo la celerità, in qualsivoglia punto, per esempio S, sarà minore di prima; stante che in ogni momento di tempo perde il grave, in vece d'un solo, due infinitessini
di velocità, per esser due le forze negative, che alla sua discesa s'oppongono. Se dunque nel sito insimo T era nulla la velocità nel primo
caso, debb' esser nulla anche nel secondo, ne il pendolo può ascendere
in conto alcuno per l'arco TX, e replicare le oscillazioni. Ed ecco
convinta di falsità al pari con quella del VVallis anche la legge Nevvtoniana, e dando ad ambedue un perpetuo essilo dalla Fisica, le riporremo fra le ipotesi puramente matematiche.

Io sin ora non ho pensato, che a distruggere, senza prendermi la briga di edificare, e non avrò fatto poco, se mi sarà riuscito di liberare il mondo Letterato da certi errori, che appoggiati all'autorità d' Uomini incomparabili, e dall' universale abbracciati, sono difficilissimi da scoprissi. Chi sa, che con altra occasione io non faccia come quegli Architetti ignoranti, i quali gittano a terra una fabbrica mal fatta, per innalzarne una peggiore?

ANNOTAZIONE.

Del Signor Abate Conte Girolamo Lioni.

A presente Dissertazione del Sig. Conte Jacopo Riccato un importantissimo documento ci somministra, ed è, che non dobbiam sidarci di qualunque ipotesi, per quanto giusta, e ragionevole ella ci sembri, se non è rigorosamente dimostrata. Le idee delle scienze, e particolarmente delle Matematiche sono per lo più alle idee comuni, e popolari direttamente contrarie; e popolari chiamar si possono tutte quelle opinioni, che non si veggono stabilite con una severa dimostrazione, quantunque sieno uscite dalla bocca d'un Filosofo, o d'un Geometra.

La legge Nevvtoniana delle resistenze pareva così ben sondata, tanto per quello riguarda la tenacità, quanto l'inerzia de'mezzi sluidi, che non ci voleva meno d'una dimostrazione per convincerla di falsità, e per obbligarci ad abbandonarla, come poco conforme ai Fenomeni della Natura. Ecco come viene spiegata dal dottissimo Gravesande delle sentenze Nevvtoniane sedelissimo interprete (a):, Retardatio ex cohassinone partium in eodem spatio, manente eodem corpore, est semper cadem, quacumque suerit corporis velocitas, eadem in omni casu cohassio superanda est; crescit igitur hac resistentia cum spatio percurso, in qua ctiam ratione crescit velocitas; est ideirco ut ipsa velocitas. Resistentia ex materia inertia, quando idem corpus per varia liquida, cadem cum celeritate, movetur, sequitur proportionem materia eodem tem-

(a) Elem. Physico-Mathem. lib. 2. cap. 6.

rempore removendæ, quæ est ut liquidi densitas. Quando idem cer us per idem liquidum variis cum celeritatibus sertur, resistentia hæc crescit cum numero particularum, in quas tempore æquali corpus impingit, qui numerus est ut spatium eo in tempore percursum, idest ut velocitas, sed crescit ulterius hæc resistentia in ratione viris, cum qua corpus in singulas particulas incurrit, quæ vis est etiam ut corporis velocitas, &c.; tota ergo resistentia est ut quadratum velocitatis. Corpori ergo in liquido moto partim resistitur in ratione velocitatis, partim in hujus ratione duplicata ».

Ora però, che siamo abbastanza illuminati, non ci riuscirà disticile lo scoprire il paralogismo, e mostrare in che consista il disetto del
discorso sopra riferito in quella parte, che concerne la tenacità de'
stiudi. Si vede per tanto ommesso un elemento, che dovea entrare necessariamente nel canone accennato; e questo si è il tempo. Imperocchè
se per disunire due particelle d'un liquido strettamente consiunte insieme da quel vincolo, cui si dà nome di viscosità, o per ispezzare un
corpo duro, le cui parti sono legate da innumerabili sibrille elassiche
l'una con l'altra intrecciate, s'adopra una forza determinata; egli è
manisesto, che per compire l'essetto si richiede un tempo determinato,
e che per ottenerlo in tempo più breve una forza maggiore vi si ricerca; talmente che per fare in un istante la separazione, non ci vorrebbe meno d'una forza insinita. Che se l'azione è sempre uguale, e contraria alla reazione, le suddette particelle, o sibre, con una resistenza
infinita s'oppongono ad una momentanea distrazione.

Quanto dunque con maggior celerità si muove un corpo solido per un mezzo tegnente, e viscoso, in tanto minore spazio di tempo supera l'unione delle parti, e conseguentemente incontra una più gran resistenza. Ma con qual legge cresca l'impedimento relativamente alla velocità, lasceremo di buona voglia all'industria dal Sig. Conte Riccato il determinarlo.

ANNOTAZĪONE DELL EDITORE.

Sarebbe da desiderarsi, che quanto è elegante, altrettanto sosse universale il metodo, con che il nostro Autore scioglie il proposto problema, ed alla costruzion lo conduce. Egli essendo pervenuto all' equazione m+1=2b, in cui la b devesser reale, ed affermativa,

ha formato giudizio, che la m non possa esser nè negativa, nè immaginaria, perchè verrebbe, dic'egli, ad esser negativa, od immaginaria la grandezza 2b. Quant'al negativo la conseguenza è verissima; perchè la somma di due quantità negative non può esser eguale ad una quantità positiva. Quant'all'immaginario, comunque ne tempi, in cui è stata seritta la presente dissertazione, quando le teoriche non eran poste in quel lume, che an ricevuto di poi per le fatiche di molti valent'uo-

mini, la conseguenza potesse parer verissmile; pure ella è lontana dal vero, potendo la somma di due quantità immaginarie una quantità reale somministrare.

E per non dipartirci dalla formula, di che si tratta, cerchiamo generalmente, quando la quantità $f + g \sqrt{-1} + \frac{1}{f + g \sqrt{-1}}$ di due

immaginari composta, sia nulladimeno reale. Ridotti i due membri alla stessa denominazione, si ha

$$\underbrace{ff - gg + 1 + 2fg \sqrt{-1}}_{f + g \sqrt{-1}} = 2f \cdot \underbrace{ff - gg + 1 + g \sqrt{-1}}_{2f}. \quad \text{Qualunque}$$

$$\underbrace{f + g \sqrt{-1}}_{f + g \sqrt{-1}}$$

volta $\frac{ff-gg-r}{2f}$ = f, fatta la divisione, rimarrà 2f, ch'è una quan-

tità reale; nel qual cafo si ritroverà $f = \sqrt{1-gg}$.

Maneggiata l'equazione $m + \frac{1}{m} = 2b$, ritroveremo

 $m=b+\sqrt{bb-1}$ la quale è immaginaria, se sia b<1, è può esprimersi così $m=b+\sqrt{1-bb}\cdot\sqrt{-1}$. Adunque fatto il confronto colla formula universale, sarà f=b, $g=\sqrt{1-bb}$, e si verificherà si che $f=\sqrt{1-gg}$. Di fatto la formula $b+\sqrt{1-bb}$. $\sqrt{-1}$ ridotta alla stessa denominazione darà $b+\sqrt{1-bb}$. $\sqrt{-1}$

$$\frac{2bb+2b\sqrt{1-bb}\sqrt{-1}}{b+\sqrt{1-bb}\sqrt{-1}} = 2b, \text{ quantità reale:}$$

Quindi è manifesto, che nell'ipotesi di b < 1 la costruzione nella dissertazione contenuta non può aver luogo. E noi possiamo asseverare; che da molti anni l'Autore s'era avveduto della limitazion del suo metodo, e che aveva in animo di supplire a quel che mancava, e di respectivo.

stringer le conseguenze, ch'avea dedotte: ma in altri studi occupato, e da altri assari impedito non ha mai messo la mano all'opera, ed è passato a miglior vita con tal disegno. Siaci pertanto permesso di compier ciò, che l'Autore non ha potuto eseguire, e di dar la soluzione nell'ipotesi, che b sia minore dell'unità.

L'equazione da costruirs è — ydy = 2budy = udu: e perciocchè dev', El'equazione da costruirs è — ydy = 2budy = udu: e perciocchè dev', effere b < 1, satto il seno totale = 1, pongasi b eguale al co-seno dell'angolo φ , chiamandolo = $\cos \varphi$: dunque l'equazione sarà — $ydy + 2 \cos \varphi$ udy = udu. A separare l'indeterminate, per modo che non inelegante riesca la costruzione, facciamo uso della seguente so situazione u = Mxy + Ny. Le M, N sono quantità da determinarsi acconciamente nel progresso dell'analisi. Scacciata la u, si trova — ydy + 2M. $\cos \varphi$. xydy + 2N. $\cos \varphi$. $ydy = M^2 x^2 ydy + M^2)^2 xdx$ — $2MNxydy + MNy^2dx + N^2ydy$. La qual equazione ridotta ci dà separate le variabili nella seguente maniera

$$\frac{-dy}{y} = \frac{M^2xdx + MNdx}{1 - 2M \cdot Cos \cdot \varphi \cdot x + M^2x^2}$$

$$\frac{-2N \cdot Cos \cdot \varphi}{1 + N \cdot N}$$

$$\frac{-2MNx}{2MNx}$$

Per conciliare alla formula maggiore semplicità, si discacci il sea condo termine del divisore col porre $N = \cos \varphi$, e nascerà

$$\frac{-dy}{y} = \frac{xdx}{1 - \cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{M}$$

$$\frac{1 - \cos \varphi}{MM} + xx = \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi} + xx$$

$$\frac{MM}{MM}$$

$$\frac{dy}{y} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline Sin. & \phi \\ \hline MM \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} Cos. \phi \ dx \\ \hline M \\ \hline \hline MM \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} Sin. & \phi \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline M \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} Sin. & \phi \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xx \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\ \hline MM \\ \hline \end{array}} = \underbrace{\begin{array}{c} xd \\$$

L'ultimo membro porta alla quadratura del cerchio. A rinvenirlo per tanto nel circolo, il cui raggio eguagli l'arco cicloidale, per cui difcende il mobile, che chiamiamo = f, fi faccia Sin. $\phi = f$; dunque M

$$M = \frac{\sin \theta}{f}$$
. Quindi l'equazione diverrà

$$\frac{dy - xdx}{y} = \frac{\cos \phi \cdot f \, dx}{\sin \phi}, \text{ ovver}$$

Tan.
$$\phi.f. \frac{dy}{y} + \frac{xdx}{ff + xx} = -\frac{ff \ dx}{ff + xx}$$

Chiamato = A l'arco circolare, il cui raggio = f, e la cui tangente = x, integriamo prendendo i logaritmi nel fistema, la cui sottangente = Tan. O.f, ed il cui protonumero, cioè quel numero, ch' ha il logaritmo = 0, fia = f, e ritroveremo $ly + l\sqrt{ff + xx} = G - A$. Per definire la costante aggiunta G s'avverta, che posto y=f, sarà ly = 0, u = 0; dunque $x = -\frac{\cos \phi}{\sin \phi}$. $f = -\cot \phi$. f, e l' arco A

si cangerà in un arco, ch'ha il raggio = f, e la tangente = - Cot. φ. f, il quale per effer negativo chiameremo = B; dunque avremo lf $\sqrt{\frac{1+Cot.\phi}{Cot.\phi}} = G + B$, ovvero lf. Cose. $\phi - B = G$. Softituito però nella nostra formula cotal valore di G, s'otterrà $ly = l\sqrt{ff - xx} - l$ Cose. $\varphi \cdot f = -A - B$, o chiamato A + B = z. ly $\frac{\sqrt{ff + xx}}{\text{Cose. } \Phi \cdot f}$ = -z, e posto c quel numero, ch' ha

per logaritmo l'unità,
$$y = c$$

$$\frac{\sqrt{ff + xx}}{\text{Cose}. \varphi. f.} = c$$

Quest'ultima equazione ci somministra una costruzione, che non può essere più elegante. Col raggio CA = f (Fig. 121.) si descriva il circolo AEB, indi pel punto A preso ad arbitrio si meni l'indefinita tangente DAM. Si conduca CD, che faccia colla CA l'angolo ACD, il quale insieme coll'angolo \(\rho\) compia un retto. E' chiaro, che AD = Cot. φ . f, e CD = Cose. φ . f. Quindi l'arco AB sarà quello, che nell' analifi abbiamo chiamato = B. Poscia pel punto B si descriva una spiral logaritmica BHF, che faccia co'suoi rami CB, CH l'angolo Ø, siccome esige Tan. Ø. f. sottangente del sistema, in cui abbiamo presi i logaritmi. Si taglino AM = x, sarà AN l'arco chiamato nell'analisi = A; dunque BAN=2; dunque CP = c-1.

L'equazione ci porge la seguente analogia $\sqrt{ff + xx}$: Cose. Ø. f

 $: c^{-2}: y: ma CM = \sqrt{ff + xx}, CD = Cofe. \phi. f. CP = c^{-2};$ dunque condotta dal punto P la PQ parallela a MD, saranno le CQ=>.

Resta da determinar le velocità acquistate per gli spazi passati BQ La formula suffidiaria ci dà u = xy. Sin. $\phi + y$. Cos. ϕ , o sia

$$fu = y \cdot x + f \cdot \text{Cof. } \phi = y \cdot x + \text{Cot. } \phi \cdot f : \text{ma} \quad \underline{\mathbf{r}} = \text{Cofe. } \phi :$$

$$\overline{\text{Sin. } \phi} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{\text{Sin. } \phi} = \frac{\mathbf{r}}{\text{Sin. } \phi} = \frac{\mathbf{r}}{\text$$

dunque Cose. ϕ . fu=y. $x+\text{Cot.} \phi$. f; dunque CD = Cose. ϕ . f: $DM = x + Cot \cdot \varphi \cdot f :: CQ = y : QP = u \cdot Quindi rappresentando BQ$ gli spazi passati, CQ que', che devono passarsi sin all' insimo, le velocità verranno espresse dalle rette QP ordinate alla spiral logaritmica, le quali incontrano l'affisse nell'angolo ϕ , angolo, che la spiral logaritmica fa co' suoi rami.

Le determinazioni sono sì facili, che basterà succintamente accennarle. Si meni il diametro E2 E parallelo alla tangente AM. Il corpo partendo dal punto di quiete B va movendosi colle velocità espresse dall' ordinate alla spirale, e giunto al punto insimo C si trova avere la velocità CF. In così fatto movimento non s'accresce sempre la velocità del pendulo, ma dopo un determinato spazio a ritardar s'incomincia: e per ciò avremo in un dato punto la velocità massima.

Questa si determina agevolmente considerando, ch' allor s'avrà la massima velocità, quando la tangente della spirale sia parallela alla linea dell'affiffe CD. Sia questa la HK; dunque l'angolo DCH sarà = CHK: ma questo essendo l'angolo, che la spirale sa col suo ramo $= \varphi$, si avrà DCH $= \varphi$. Quindi condotta la CH, che saccia colla CD l'angolo Ø, e dal punto H, ov'ella incontra la curva spirale, menata HI parallela a DM, questa esprimerà la massima velocità. Perciò il moto da B in I farà accelerato, da I in C farà ritardato.

Poiche giunto il mobile nel punto infimo C è dotato della velocità CF, chiara cosa è, che monterà con moto ritardato, venendo sempre espresse le sue velocità dall'ordinate della stessa spirale, che pur continua, finchè avendo passato lo spazio C 2 B, d'ogni movimento sarà

Sospeso il mobile dal punto 2B tornerà a discendere, e l'ordinate alla parte della spirale 2 B 2 F dinoteranno le sue velocità negative, e giunto in C si troverà avere la celerità C 2 F; quindi di nuovo ascendendo monterà per lo spazio C 3 B. Le seguenti oscillazioni verranno

espresse dagli infiniti successivi giri della spiral logaritmica. Dal che si ricava, che il pendulo non giungerà giammai ad una quiete persetta.

Essendo gli archi della spiral logaritmica segati dal diametro BG, come BF2B, 2B2F3B sempre simili, saranno simili ancor le scale delle resistenze; dunque essendo simili le scale delle forze non impedite dalle resistenze, saranno altresì simili le scale delle forze sollecitanti; dunque i tempi dell'oscillazioni grandi, e picciole saranno eguali, ed il pendulo isocrono. Ma s'avverta, che non dicesi eguale il tempo della discesa a quel dell'ascesa, ma il tempo per ciascuna discesa, ed ascesa prese insieme è sempre lo stesso. E ciò si vuol intendere non solo dell'oscillazioni, che il mobile di satto compie, ma ancora di qualunque altra; perchè da qualunque punto il mobile cominci a discendere, la spiral logaritmica, che ne determina le velocità, è sempre simile alla descritta.

Ma intorno a tempi farà bene a dir qualche cosa di più preciso; giacchè il metodo da noi usato ce ne dà una determinazion elegante:

L' noto effere
$$dt = -\frac{dy}{u}$$
: ma $u = \frac{xy \sin \phi}{f} + y$. Cof. $\phi = \frac{dy}{dt}$

$$\frac{\sin \phi \cdot y \cdot x + \cos \phi}{f} = \frac{\sin \phi \cdot y \cdot x + \text{Tang. } \phi \cdot f}{\sin \phi} \text{ dunque}$$

$$\frac{dt = -fdy}{\sin \phi \cdot y \cdot x + \tan \phi} : \text{ma} - \frac{dy}{y} = \frac{xdx + \tan \phi \cdot dx}{ff + xx}, \text{ come}$$

abbiam trovato di fopra; dunque dt = f $dx \cdot x + Tan. \emptyset = f$ $f + xx \cdot x + Tan. \emptyset$

$$\frac{fdx}{\sin \phi} : \text{ma} \quad \underline{\mathbf{r}} = \text{Cofe. } \phi; \text{ dunque } dt = \frac{\text{Cofe. } \phi \cdot fdx}{ff + xx}$$

Essendo $\frac{fdx}{ff + xx}$ la differenza dell'angolo ACN, il cui integrale deve

annullarsi posta CN sopra CB, sarà di mestieri aggiungere l'angolo costante BCA. Avrem dunque t = Cose. Ø. Ang. BCN: laonde non cangiandosi l'angolo φ , i tempi saranno come gli angoli BCN. Le con-

feguenze, che da ciò si deducono, son sì patenti, che ci abuseremmo dell'ozio de nostri Lettori, se in esse trattener ci volessimo.

Sin ora abbiamo confiderato come costante l'angolo \emptyset . Che se come variabile si riguardi paragonando due mobili, che discendendo come sopra per BC patiscano due diversi generi di resistenza, allora sistato il punto B, si prenderà come mobile il punto A, e descritte l'altre spirali logaritmiche, l'ordinate loro parallele alla tangente al punto A daranno le velocità. Queste si troveranno sempre maggiori crescendo l'angolo Φ , e diminuendo il suo complemento BCA, e s' aumenteranno ancora gli spazi della falita, per modo che se l'angolo Φ diventa retto, che dà il caso di Cos. Φ =0, e della resistenza nulla, la spiral logaritmica si cangia in un circolo, e le ordinate ottogonali al diametro BG appresentano le velocità, essendo eguale lo spazio della falita CG alio spazio della discesa BC.

All' opposto se l'angolo \emptyset si diminuisce, le velocità, e gli spazi della salita vanno sempre minorandosi, per modo che posto \emptyset infinitesimo, e l'angolo BCA pressocità retto, ch'è il caso di Cos. $\emptyset = 1$, al punto C la velocità si ritrova infinitesima, e infinitesimo pure lo spazio d'ascendimento. Laonde in quest'ipotesi il mobile giungerà sino in C,

dove si troverà spogliato d'ogni velocità.

Passiamo ai tempi. Quanto è maggiore l'angolo ©, e minore il suo complemento; tanto si minora la Cose Ø, e l'angolo BCE, ch'alla discesa serve; dunque si minora il tempo della discesa, il quale alle predette due quantità s'è provato proporzionale. All'opposito calando l'angolo Ø, il tempo della discesa s'accresce per guisa, che posto ©=0, divenendo la Cose. Ø infinita, il mobile non arriverà al punto C se non dopo un tempo infinito.

Lo stesso vuol dirsi della discesa, e dell'ascesa prese insieme; perchè l'angolo DCG in tal caso è sempre lo stesso, cioè uguale a due retti,

e però cotal tempo è proporzionale alla fola Cofc. .

Ma quant'al tempo dell'ascendimento la cosa è più varia; perchè delle due quantità, con che il tempo tien proporzione, crescendo l'una, l'altra divien minore. Se cresce la Cose. ϕ , si diminuisce l'angolo ECG= ϕ . Suppongasi passar ϕ successivamente dal retto ad angoli sempre minori. Egli è manisesto, che da prima calerà più l'angolo ϕ di quello, che cresca la sua cosecante; dunque il tempo dell'ascendimento si farà minore. Ma ciò accaderà sino ad un certo termine, dove si troverà scemar tanto l'angolo, quanto cresce la cosecante: e quì avremo il minimo tempo. Dopo questo termine crescendo più la cosecante di quello, che cali l'angolo ϕ , il tempo anderà crescendo, sino a diventar infinito nel caso estremo di Cos. ϕ =1, nel qual caso non s'avrà ascendimento di sorte alcuna.

Per determinar poi l'angolo Ø, che ci dà il minimo tempo della falita, basta ritrovare quel punto, in cui il complemento dell'angolo 3 tanto cresce, quanto cresce la secante di questo medesimo complemento. A questo fine col raggio CO=1 (Fig. 122.) descritto il cerchio OB, Opere Rice. Tom. III. Ddd c con-

condotta la tangente OD, pongasi, che la secante CD sia quella, is cui incremento eguagli l'incremento dell'arco OB. Preso il punto b infinitamente vicino, si meni la secante Cbd, e col centro C si descriva l'archetto Dm: egli è chiaro, che dovrà essere dm=Bb. Ciò posto, si ha dm: Dm:: OD: CO: ma Dm: Bb:: CD: CB= CO; dunque dm: Bb:: CD. OD: CO²; dunque essendo i primi due termini dell'analogia eguali, verrà ad essere CD. OD= CO² ovvero CD: CO:: CO: OD. Perciò descritto un triangolo rettangolo in guisa, che l'ipotenusa sia ad un lato, come questo all'altro, l'angolo, che sa l'ipotenusa col lato medio proporzionale, è il complemento dell'angolo φ, e l'angolo, che sa l'ipotenusa col lato medio proporzionale, è il complemento dell'angolo φ riccreato.

Ma del caso, ove Cos. $\Phi = 1$, sebbene abbiamo alcuna cosa accennata, essendo il limite estremo dell'ipotesi da noi trattata; pure perche le conseguenze, siccome immerse negli abissi dell'infinito, e dell'infinitesimo, non si veggono colla desiderata chiarezza, sarà bene separatamente parlare svogliendone, e costruendone l'equazione. Essa è la seguente,

$$-ydy + 2udy = udu.$$
 Disponiamola nella seguente maniera
$$-ydy + udy = udu - udy,$$
 ovvero
$$-dy \cdot y - u = -u \cdot dy - du;$$
 dunque
$$\frac{dy}{u} = \frac{dy - du}{y - u}.$$
 Pongasi $y - u = x;$ dunque
$$\frac{dy}{u} = \frac{dx}{y - u},$$
 o sia $xdy = ydx - xdx,$ e però
$$\frac{dy}{y - x} = \frac{dx}{x},$$
 o sia $xdy = ydx - xdx,$ e però
$$\frac{xdy - ydx}{x} = -dx,$$
 la quale integrata da $\frac{y}{x} = G - lx.$

Si sono presi i logaritmi nella logistica, che ha la sottangente = 1.

A fissare la costante G s' avverta, che se y=f, u=o; dunque x=f. Quindi sarà 1=G-lf, e supponendo lf=o, G=x. Avremo pertanto l'equazione completa y-1=-lx, oppure y-x=-xlx: ma

y-x=u; dunque u=-xlx, dalla quale trarremo la costruzione.

Sovra l'indefinita CR (Fig.123.) eccitata la normale CA = f, colla fottangente = 1 all'affintoto CR fi descriva la logistica ANR. Egli è maniscsto, che essendo le CM = x, saranno le MN = -lx. Si ponga

MQ

MQ eguale al rettangolo CM. MN diviso per l'unità: la curva AQC, che passa per tutti i punti similmente determinati, darà colle sue ordinate M Q le velocità = u. La massima velocità s'avrà, quando KL=1. Poichè y=x+u, colla CA faccia la CB un angolo semiretto, e si otteranno le PQ=y, mentre le MQ=u.

Passando a' tempi, la formula ci presenta

$$dt = -\frac{dy}{u} = \frac{-dx - du}{u} : \text{ ma } u = -xlx ,$$

e du = -dx - dx lx; dunque dt = -dx + dx + dx lx = -dx; dunque t = -lx.

Quindi i tempi verranno espressi dall'ordinate alla logistica MN, e perciò il tempo per la AC espresso dall'assintoto sarà infinito; dal che si

deduce, che il pendolo non giungerà mai al punto infimo.

Le cose tutte contenute nella presente annotazione danno a divedere, che se la specie chiamata =b dall' Autore non è minore dell'unità, egli è impossibile, ch'il pendolo reciprochi le sue oscillazioni, come la sperienza dimostra avvenire ne nostri fluidi. Ma per fine ci sia permesso d'esporre in termini più conosciuti quello, che dinota la specie b. Sia =p l'altezza, da cui il mobile discendendo nel vacuo acquista quella velocità, con che se viaggiasse nel pieno, patirebbe una resistenza eguale alla sua gravità. Cotal velocità adunque verrà espressa per $\sqrt{2p}$; dunque la resistenza $=2b\sqrt{2p}$: ma questa dev'esser eguale alla gravità; dunque $2b\sqrt{2p}=1$, ovvero b=1. Ed ecco il valor della specario della specario di presentati della specario della specario di presentati della specario della specar

cie b.

Acciocche il mobile reciprochi le oscillazioni sa di mestieri, che b < 1; dunque dev'essere $\frac{1}{2\sqrt{2p}} < 1$, ovvero 1 < 8p; dunque $p > \frac{1}{8}$:

ma i esprime l'arco semicicloidale; dunque p dev'esser maggiore dell'ottava parte dell'arco semicicloidale, o sia della metà del raggio del circolo genitore. Per tanto se l'altezza, per cui il mobile discendendo acquista tal velocità, onde nel pieno la resistenza eguaglia la gravità, sarà maggiore della metà del raggio del circolo, che genera la cicloide; si anderanno dal pendolo reciprocando l'oscillazioni: ma se sia eguale, e molto più se minore, il pendolo d'ogni velocità sarà ssornito nel punto insimo; anzi non arriverà a cotal punto, se non in un tempo insinito.

E con ciò rimane compitamente sciolto il proposto problema, nè senza qualche eleganza.

Ddd 2 SCHE-

SCHEDIASMA XXXII.

PROBLEMA.

Determinare il moto d'un pendolo a cicloide, supposta costante la resistenza del mezzo.

Ucsto Problema è già stato sciolto dalli Signori Nevvton, ed Er-manno; ma perchè eglino non an fatto parola di alcuni particolari appartenenti alla Fisica; non sarà suori di proposito il darne una

ruova, e più compiuta soluzione.

Oscilli il pendolo per la cicloide BCD (Fig. 124.) ed il principio della discesa si prenda dal punto di quiete B. La retta verticale BE doppia del diametro del cerchio generatore della curva ci esponga la gravità assoluta della ghianda B nel vano, e colla linea BG si esprima la gravità relativa, o specifica della medesima ghianda in un mezzo fluido resistente, e pesante. Condotta al punto B la toccante BF, e dalli punti E, G lasciate cadere sopra di essa le due normali EF, GH; cgli è certo, che la linea BF uguale all' arco cicloidale BC ci rappresenterà la forza tangenziale, da cui nel punto B viene sollecitato il mobile in un mezzo vuoto, o infinitamente raro: come altresì la retta BH dinoterà la forza tangenziale, da cui nel punto B il pendolo, stando ferme le circostanze, viene accelerato nel pieno.

L'altra forza collaterale GH, derivata dalla verticale BG s'impiega in istendere il filo AB, nel qual effetto consuma tutta la sua energia,

che dalla tenacità del filo è controbilanciata.

Da ciò fi deduce, che tanto nel punto B, quanto in qualunque altro della cicloide, per esempio I, l'impressione acceleratrice per la toccante è nel vano uguale agli archi BC, IC, e nel pieno in data ragione costante agli archi predetti, cioè a dire come BG : BE, ovvero come la differenza fra le due gravità assolute del solido, e del fluido al peso assoluto del solido.

Stendo l'arco della cicloide in una linea retta bd (Fig.124., e 125.), onde li punti b, c, d corrispondano agli altri B, C, D, e sia BC= bc, e CD = cd. Eretta fopra il punto b la perpendicolare bb, facciafi questa uguale alla forza BH, cioè in data ragione alla retta bc, o sia alla curva BC, e tirata l'ipotenusa hc, il triangolo hbc ci metterà sotto gli occhi la scala delle infinite impressioni, per cui viene di passo in passo accelerato il pendolo per tutti i punti dell' arco cicloidale BC. Segnato nella curva ad arbitrio il punto I, e fattasi l'abscissa bi = all'

arco BI, l'ordinata if al triangolo, che sta alla retta ic, o alla curva IC nella proporzione già assegnata, dinoterà la forza sollecitante il pendolo nel punto I:

In questo mentre supponendos costante la resistenza del mezzo. farà d'uopo il contrassegnarla con una quantità determinata, per cagion d'esemplo colla retta ba, e dal punto a condotta la linea an parallela a bd, tagliera essa la diagonale he nel punto g, e messa gn = ga, fia n'lo perpendicolare ad an.

La preparazione per questa volta ci manisesta da se sola senz'altro ajuto le passioni de moti da noi cercate, e sta in cambio di soluzione.

1º. Essendo la forza tangenziale sollecitante il pendolo nel punto B uguale all'applicata bb, se da essa sotterremo la resistenza costante ba, resterà la quantità ah esprimente quella sorza, che nello stesso punto B, non oftante l'impedimento del mezzo, attualmente stimola la ghianda alla discesa. Similmente essendo fi la forza tangenziale corrispondente al punto I, ed ie la refistenza costante, sarà ef l'impressione accelerante nel punto I purgata dalla resistenza.

2º. Nel punto k analogo all'altro K segnato nell'arco BC la forza tangenziale è uguale alla refistenza, e perciò operando le suddette potenze con direzione contraria, l'azione della prima resta equilibrata dalla reazione della seconda. Ma al di sotto del punto K fra li due limiti K, C, superate le forze acceleranti dalle resistenti, il mobile viene successivamente ritardato dalle impressioni negative, delle quali è scala il triangolo gmc . Finalmente passato il punto C, mentre il grave ascende, vi si oppongono unitamente tanto la forza per la toccante derivata dalla gravità, quanto la refistenza costante, e di queste potenze cospiranti a distruggere l'impeto impresso è scala il trapezio cmno.

3º: Il pendolo dal punto di quiete B fino al punto K acquifta sempre nuovi gradi di celerità: e la ragione si è, perchè le forze acceleranti purgate dalle resistenze, ed espresse per le ordinate del triangolo bag agiscono contro la ghianda, come s'essa camminasse nel vano: e quantunque sieno decrescenti, e vadano finalmente a terminare nel nulla; non ostante ciò ogni nuova sollecitazione produce un nuovo elemento di velocità, che alla già conceputa fi aggiunge. In ordine a ciò la velocità massima sarà nel punto K, e non già nell'infimo punto C della cicloide; conciossiache passato dal pendolo il predetto punto K, l'impeto acquistato si va a poco a poco debilitando, e le forze negative, che lo estinguono, ci vengono esposte dalle applicate del trian-

4º. Essendo pertanto il triangolo gno simile, ed uguale al triangolo bga, interviene, che tutto il moto generato dai successivi impulsi positivi contenuti nel triangolo, hg a faranno distrutti dalle successive impressioni negative contenute nel triangolo gno. Corrisponda il punto k all'analogo K, e facciass l'arco KL eguale alla retta kl: io dico, che gli archi BK, KL saranno eguali, e che nel punto L cesserà tutto il

moto del pendolo.

^(*) Diede occasione a questo, ed al seguente Schediasma, che furono composti l'anno 1732, una privata amichevole controversia tra il Sig. Conte Giovanni Rizzetti, e l'Autore circa la resistenza dei mezzi fluidi.

5°. La scala delle velocità crescenti da B sino in K, è decrescenti da K sino in L è la semiellissi Apolloniana bpl, il cui centro sia in k, e la proporzione sra il quadrato del semiasse maggiore kb, ed il quadrato del minore kp sia come EB: GB, vale a dire come il peso asfoluto della ghianda nel vano al suo peso relativo nel pieno.

6°. Collocata la ghianda fra i due punti B, K in qualunque fito I, da cui cominci a discendere, i tempi impiegati a scorrere gli archi BK, IK saranno uguali. Ciò nasce dalla similitudine de due triangoli bga, sge, i quali fatta l'abscissa bi eguale all'arco BI, sono nell'uno e nell'altro caso le scale delle forze acceleranti. La medesima osservazione ha luogo anche negli archi trascorsi sino alla totale estinzione del moto; laonde tutte le vibrazioni o grandi, o picciole in tal sorta di pendoli si scompiscono in egual tempo, e sono isocrone.

7°. Fissato l'arco IK=KC, se la ghianda principierà a cadere dal punto di riposo I, attese le cose dimostrate si anderà accelerando sino al punto K, indi ritardando sino a giungere al punto insimo della cicloide, in cui cesserà tutto il moto, ed in conseguenza non ci sarà

reciprocazione.

8°. Si può far cadere la ghianda dal punto di quiete M fituato fra i punti I, K, ed allora trovandosi la massima velocità in K, preso l'arco K N = KM, sarà estinta nel punto N sutta la velocità acquistata nella discesa.

9°. Esaminiamo cosa sia per risultare dal calcolo. Discenda il mobile dal punto di quiete N, e pongasi l'arco NC=b, e chiamati s gli spazi crescenti da N sino in C, uno de quali sia per cagion d'esempio NO, la forza sollecitante in O all'arco OC=b-s sarà in proporzione, come BG: BE, o come n:t, supposta n una frazione minore dell' unità. Avremo pertanto la predetta forza = nb-ns, da cui sottratta la resistenza costante r, perverremo alla nota formula nb-ns-r. ds = udu. Mentre r sia maggiore della quantità nb, lo che dee necessariamente succedere, potendo io diminuire quanto mi piace l'arco NC, stando sempre determinata, e costante la resistenza r; accaderà altresì, che il binomio nb-r sia una grandezza negativa = -g; dunque -gds-nsds=udu, ed integrando non ommessa l'aggiunta della costante, $c-gs-ns^2=u^2$: ma quando lo spazio s è nel punto N=o, si tro-

va essere la velocità u = 0; dunque sarà parimente = 0 la costante aggiunta c; così che la vera integrazione si ridurrà $-2gs - ns^2 = u^2$, nella qual equazione non si scanseranno mai gli immaginari, se non si prendano negative le s. Di satto se la resistenza costante sosse una potenza attiva, atta a generare il moto, la ghianda monterebbe all'insù, nel punto K sarebbe dotata della massima velocità, indi con moto ritardato perverrebbe sino al punto M, posto KM = KN, ed in questo spazietto reciprocherebbe le sue oscillazioni.

10°. Persistendo nella nostra ipotesi, se la ghianda nel partirsi dal punto di quiete B descriverà l'arco BCQ, indi reciprocando l'arco QCI, e poi l'arco ICP, e di bel nuovo reciprocando l'arco PCM, e così continuerà a vibrarsi, dico, che gli archi BCQ, QCI, ICP. PCM, ec. coffituiscono una progressione aritmetica decrescente. Chiamo p l'arco BC, e 2p l'arco intiero BCD, che dal pendolo si descriverebbe nel vano: chiamo r la resistenza costante, ed il primo termine della nostra serie sarà l'arco BCQ, che diviso per metà nel punto O, e posto l'arco OC=q s'esprimerà per 2p-2q, essendo l'arco QD, o la differenza, che passa fra gli archi BCD, BCQ doppia di OC, e per conseguenza = 2q. Il secondo termine della progressione, cioè l'arco QCI si esprime per la quantità 2p-6q; conciossiachè satto l'arco CS=CQ, e CR=CO, in discendendo la ghianda dal punto di quiete Q, acquisterà nel punto R la massima velocità, e perderà tutto il suo moto pervenuta che sia al punto I, restando indietro per l'arco IS doppio di CR, o di CO; e conseguentemente = 2q. Aggiunte pertanto le due differenze QD + SB = 49, l'eccesso, per cui l'arco BCD supera l'arco ICQ, si troverà = 69; dunque 1CQ = 2p - 6q. Per la stessa ragione sarà il terzo termine, o l'arco ICP = 2p -10q, ed il quarto, o l'arco PCM = 2p-14q, e così di mano in mano: di modo che la differenza costante, con cui un termine sorpassa l'altro immediatamente vicino, viene esposta per 44, ed è sempre quadrupla dell'arco dato OC.

11°. Osservo, che il suddetto arco OC sta alla resistenza costante r in ragion data, cioè a dire come il peso assoluto della ghianda al suo peso specifico, o come EB: CG, ovvero per servirmi dei simboli del n°. 9°. come 1: n. Senza moltiplicar le sigure singasi, ch'essendo la retta bc = all'arco BC, o alla toccante BF, e di più la normale bb = BH, sia l'abscissa bk=all'arco BO, e conseguentemente la kc = all'arco OC. Condotta l'ipotenusa bc, dalla kg verrà determinata la resistenza costante r; dunque ck=q: kg=r:: cb: bh:: FB: HB:: EB: GB:: 1: n; so che dovea dimostrarsi.

Perciò se q si scopre essere = $\frac{r}{n}$, la progressione aritmetica, di

cui abbiamo fatto parola, ci comparirà fotto un altro aspetto.

$$2p - \frac{2r}{n}; 2p - \frac{6r}{n}; 2p - \frac{10r}{n}; 2p - \frac{14r}{n}; ec.$$

S C O L I O.

Dalle seguenti considerazioni si raccoglierà, che avendosi ad abbandonare l'ipotesi delle resistenze costanti, siccome quella, che tira seco degli assurdi; sa di mestieri conchiudere, che le resistenze rispondano con qualche relazione alle velocità attuali del pendolo.

Riduciamo la cosa a computo, e fondiamolo sopra alcune sperienz ze registrate dal Sig. Cav. Nevyton nello Scolio generale annesso alla

propofizione 31. del fecondo libro de fuoi Principi.

Il pendolo ivi descritto, la di cui ghianda era di legno, rimosso come nel primo sperimento dalla linea del piombo per la distanza di due dita. onde nel vuoto descrivesse un arco di quattro dita, dopo 164. oscillazioni è montato nel pieno, cioè a dire nell'aere, per un arco d'un dito, e tre quarti; di modo che l'arco intiero percosso nell'ultima reciprocazione era profimamente di dita 3 1;

Supponiamo, che il ritardamento nasca da una resistenza costante, e procuriamo d'indagarne la precisa misura tanto nell'allegata esperienza, quanto in alcune altre dal citato Autore rapportate : ma prima è d'uopo di cercare il metodo, che ci guidi speditamente alla soluzione del quisito. Giacchè l'arco IQ è di quattro dita, ed il pendolo dopo 164. vibrazioni si riduce a descrivere l'arco MP di dita 3 1 ;

suppongasi, che nella prima oscillazione la massima velocità della ghianda sia nel punto O, e ci si presenterà l'equazione IQ - MP = b. OC. Per avere il valore della coefficiente b, da cui resta affetto l'arco costante OC, giusta la regola prescritta al nº. 10º. si moltiplichi il numero delle oscillazioni, che nel nostro caso è 164., per quattro, e dal prodotto fi levi il binario, con che sarà b = 654.; dunque IQ $- MP = \frac{1}{2} \text{ dito} = 654, CO, o fia CO = \frac{1}{1308} \text{ parte d'un dito}.$

Archi descritti dal pendolo di legno nelle sperienze Nevytoniane éspressi in dita

Numero delle vibrazioni, in cui si perde respettivamente l'ottava parte del moto,

Archi respettivamente percorsi dopo le dette vibrazioni espressi in

Valore della quantità coefficiente b nè casi sopraddetti

654,
$$482$$
, 274, 140, 72, $36\frac{2}{3}$

Mifura dell' arco CO negli esperimenti come sopra in parti d'un dito

Per le cose dette al nº. 11º. l'arco CO sta alla resistenza costan? te r come il peso assoluto della ghianda al suo peso specifico, cioè come BE: BG: ma il Sig. Nevvton ci afficura, che la fua sfera di legno era ad un pari volume d'acqua in proporzione di 55: 97, ed afsumendo una ragione almeno prossima fra la gravità specifica della palla del legno paragonata con quella dell'aere come 453 59. 1, e per-

ciò essendo BE: BG:: 453 59: 452 59, tale sarà parimente la pro-

porzione fra l'arco CO, e la resistenza costante r.

Confrontando insieme ciò, che risulta dalla prima, e dall'ultima esperienza, trovo, che la resistenza supposta costante nel primo caso sta a quella del secondo in ragione di 1: 897. prossimamente.

Questa enorme disparità, che per qualunque ripiego non può mai fanarsi, ci fa abbastanza comprendere, che l'ipotesi assunta è sì fattamente assurda, che destrugge se stessa. Il computo adattato alla sperienza prende per dato, che la resistenza sia costante, e l'esperienza modificando il calcolo, ci fa toccar con mano effer falso il dato, e la resistenza variabile, la quale va crescendo, a misura che il pendolo cammina con maggiore celerità; perchè esso incontra un maggior contrasto, quanto da maggiore altezza discende.

Eec

SCHE-

SCHEDIASMA XXXIII.

PROBLEMA.

Determinare il moto d'un pendolo a cicloide, supposta costante la resistenza, che si oppone alle discese, ed agli ascendimenti verticali.

E curiose proprietà notate nei pendoli oscillanti colle leggi suppo-ste nell'antecedente Problema, quantunque immaginarie, e discordi dai canoni, de' quali suole la Natura far uso, mi anno dato motivo di cercare in qual maniera dovessero regolarsi le resistenze, acciocchè gli archi delle decrescenti reciprocazioni, in cambio di formare una progressione aritmetica, ne costituissero una geometrica. Dopo un qualche giro di raziocinio, che per brevità tralascio, mi sono accorto, che per satisfare alle condizioni della quistione, sa di mestieri assumere le resistenze in qualunque punto della cicloide per esempio E (Fig. 126.) proporzionali alla forza tangenziale, che stimola il pendolo alla discesa.

Ci venga rappresentata per la verticale EI la gravità specifica, o relativa della ghianda oscillante in un dato fluido: sia IK la resistenza costante, e pongasi IH = IK. Poscia condotte alla toccante EN le due perpendicolari KL, HN, si osservi, che se il pendolo discende, dalla forza sollecitante EM dee sottrarsi la resistenza LM: all'incontro quando la ghianda in vigore dell'impeto impresso è obbligata ad ascendere, alla forza tangenziale EM, che si oppone all'ascendimento, bifogna aggiungere la resistenza MN, onde la retta EN dinoti la forza unita, per cui viene ritardato il pendolo nel punto E.

Chiamata pertanto g la gravità specifica EI, ed r la resistenza coflante IK, avremo EK = g-r, ed EH = g-r: ma come HE: KE:: NE: LE, e la forza tangenziale EM sta all'arco della cicloide EC in ragion data; dunque sarà nota altresì la ragione fra le rette EL, EN, e l'arco EC. Premessa questa preparazione, io tirerò semplicemente le conseguenze, ommesse le dimostrazioni, che dal metodo adoprato nel precedente problema agevolmente si deducono.

Dico dunque in primo luogo, che se la ghianda comincierà a discendere dal punto di quiete E, e dopo aver percorso l'arco EC monterà per l'arco CF, i due archi EC, CF faranno in ragion data come 2+r: g-r. Similmente qualora il pendolo reciprocando discende per

l'arco FC, ed ascende per l'arco CG, sarà FC: CG:: g+r:g-r, e così successivamente.

2°. Perciò tutti gli archi CE, CF, CG, CO costituiscono una serie geometrica decrescente, il cui esponente resta determinato dalla ragione costante di g + r: g - r. Di più le intiere vibrazioni EF, FG, GO formano altresì una serie geometrica decrescente all' infinito, ed in conseguenza di ciò il pendolo continuerà sempre a vibrarsi, senza che si riduca mai ad uno stato di persetta quiete.

3°. E perchè, se il pendolo altra resistenza non patisse, salvo che la nascente dalla gravità del fluido, in cui sta immerso, tanto ascenderebbe, quanto discende, siccome è facile a dimostrarsi, laonde alla discesa EC risponderebbe la salita uguale CP, quantunque più tempo impiegasse a scorrere l'arco ECP nel pieno, di quello facesse nel vano; ne seguita, che la differenza FP procede dalla resistenza proporzionale in qualfivoglia luogo alla forza accelerante, o ritardante, e lo stesso dicasi delle altre differenze EG, PO, le quali ponendo l'arco EC=a. e l'arco CF=x vengono espresse dalla seguente progressione

$$a = x$$
, $a = \frac{x^2}{a}$, $a = \frac{x^3}{a^2}$, $a = \frac{x^4}{a^3}$, $a = \frac{x^5}{a^4}$, ec.

Questa serie è crescente, ma prese le sue differenze

$$x - \frac{x^2}{a}, \frac{x^2 - x^3}{a}, \frac{x^3 - x^4}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$$
; ec.

formano queste una progressione geometrica decrescente.

4. Il tempo della discesa per la curva EC è maggiore del tempo impiegato nell'ascendimento per l'arco CF, e questi tempi sono in ras gion dimidiata degli archi EC, CF, o fia come $\sqrt{g+r}$: $\sqrt{g-r}$. Non ostante ciò le intiere vibrazioni EF, FG, GO, ec. sono isocrone, conciossiache sono uguali i tempi consumati nelle due discese EC, FC; ed altresi uguali i tempi spesi nelle due salite CF, CG.

5°. La velocità massima sarà nel punto infimo C della cicloide. c resterà fissata col prendere una media proporzionale fra l'arco EC della discesa, e la forza accelerante EL; ovvero fra l'arco CF della salita, e la forza ritardante corrispondente al punto F, la quale è quarta

proporzionale alle tre quantità FC, CE, EL.

6°. Le velocità poi nei punti di mezzo per esempio in G, ed O si ritrovano col descrivere due quarte d'ellissi; la prima per la discesa coll'affe maggiore uguale all'arco EC, ed il minore uguale alla suddetta media proporzionale; la seconda per l'ascendimento con l'ultimo

asse comune, e l'altro uguale all'arco CF.

7º. Due pendoli affatto fimili, cioè di ghiande, e di fili uguali, che si vibrino nel medesimo sluido, uno percorrendo archi maggiori, e l'altro minori, perderanno una parte proporzionale del loro moto in un pari numero d'oscillazioni. Scenda il primo dal punto di quiete E, e dopo cento vibrazioni pervenga al punto G; di modo che sia EG la quarta parte dell'arco EC: dico, che il fecondo, che fi parte dal punto di riposo B, dopo cento oscillazioni montera sino al punto E, e Eee2

che l'arco BE sarà subquadruplo dell'arco BC. La dimostrazione dipende dal nº. 2º. Le sperienze del Sig. Nevvton non savoriscono punto la nostra supposizione, come se ne può sar facilmente il confronto.

8°. Finalmente stando tutte le cose ferme come sopra, se i sili, o le catenelle, che sostentano le ghiande, saranno ineguali, in tal caso i tempi delle vibrazioni nei due disferenti pendoli saranno in ragione dimidiata delle lunghezze de' sili medesimi: proprietà, che si verifica anche nel vano.

SCOLIO.

Dalle conseguenze puramente geometriche mi saccio strada alle sisse. Prima di tutto io noto, che nei punti di quiete per esempio E, F, ecla resistenza r è necessariamente nulla; perchè il mezzo sluudo non ha ripugnanza veruna a persistere nello stato, in cui si trova, nè per quello appartiene alla sua inerzia, non essendo cacciato suori di luogo; nè per quello concerne la tenacità, ed il fregamento, mentre non restano le particelle staccate l'una dall'altra, nè si oppongono colla loro asprezza ad un corpo, che sta in riposo. Tutto ciò, che in tale incontro può operare il mezzo, consiste in togliere al solido una parte del suo peso, sucendo che il corpo discenda con una gravità relativa minore dell'asfoluta. Le altre resistenze anno relazione al moto, ed è un manisesto assurdo, che nel punto di quiete E abbia ad esprimersi la resistenza per la quantità finita LM, come richiede la nostra ipotes.

Molto meno intendo, qualmente facciasi il gran salto dal nulla al sinito, senza passare per i gradi di mezzo. Se dunque nello stato di riposo si sa essere e o, anche nello stato di moto, quando la velocità sarà infinitessima, sarà altresì minima la resistenza, e ad una celerità sinita corrispo derà una finita resistenza, nella quale c'entrerà sempre

una qualche funzione della velocità.

Cresce l'assurdo per un altro verso; conciossiache se nel punto di quiete E giusta l'ipotesi la resistenza LM è finita: all'incontro è nulla nel punto insimo C della cicloide, mentre cammina il pendolo colla massima velocità, e cammina per uno spazio minimo orizzontale, senza che sia nè accelerato, nè ritardato dalla sua natural gravità. In sì satte circostanze ripugna pure l'incrzia del liquido spinto suori del suo luogo, la tenacità delle particelle sluide, che vengono separate, e dissiunte, e sorse anco lo ssregamento; come dunque può essere, che tutte queste resistenze abbiano in tal caso tanta discrezione di permettere al solido libero il passaggio, senza sar contrasto al suo moto?

L'ipotesi Nevvtoniana, di cui ho favellato nello Schediasma XXXII. e la quale sottra la resistenza data dalla sorza tangenziale, quantunque sia stata assunta dall'Autore piuttosto come matematica, che sissica, è soggetta al primo, ma non già a quest'ultimo inconveniente.

SCHEDIASMA XXXIV. (*)

Osservazioni sopra il moto de' corpi solidi ne' mezzi fluidi.

Ella copiosa ristampa delle Opere del Galileo satta ultimamente in Firenze Tomo terzo, pag. 331., e seguenti, si trovano registrati alcuni Teoremi dell'incomparabile Geometra Ab. D. Guido Grandi intorno le velocità dei solidi discendenti nei sluidi: e sebbene questa Dottrina è maneggiata nella ipotesi più semplice, prescindendosi dalle resistenze; non ostante ciò parmi, che sia stata stabilita su principi incerti, e mal corrispondenti alle vere leggi del moto; laonde mi sono lasciato indurre a mettere in carta queste mie rissessioni.

Ecco in poche parole la sentenza del lodato Matematico. Discenda il corpo A (Fig.127.) per un fluido, e paragonate assieme le loro specifiche gravità, abbiano la proporzione di MG:FG, onde la dissernza MF esprima la sorza acceleratrice, con cui il selido A viene nel liquido alla discesa sollecitato. In fatti supponendosi, che la linea MG ci rappresenti il peso assoluto del corpo A nel vano, e la FG il peso parimente assoluto nel vano d'una mole del liquido precisamente uguale al volume del solido A; il peso comparativo, o specifico della palla A nel predetto sluido ci verrà espresso dalla retta MF; essendo certo, che il mezzo leva al solido tanto di peso, quanto pescrebbe una data quantità del sluido, che sottentrasse nel luogo occupato dal solido.

Quindi tirata l'orizzontale FH, che passa per il punto F, e ad essa dal punto M inclinata la diagonale MH uguale alla MG, si pretende, che il momento, per cui il mobile A scenderebbe nel vuoto giusta la direzione del piano inclinato HM, s'uguagli al momento, con cui è disposto il corpo A a discendere verticalmente per il mezzo fluido. E la rasgione si deriva da ciò, che la forza sollecitante alla discesa in tutti i punti analoghi degli spazi trascorsi, principiando dalla quiete, si trova essere precisamente uguale alla linea MF tanto nell'una, quanto nell'altra

ipotesi.

La dimostrazione camminerebbe ottimamente, se sossero pari le circostanze. Per meglio spiegarmi, sieno le due palle A, B (Fig. 128.) dello stesso volume, ma di differente peso, le quali si connettano con un filo, che sacciasi passare per la girella immobile C; e non si metta

(*) Nel mese d'Agosto 1720. comunicó l' Autore col mezzo dell'eccellente Astronomo Sig. Eustachio Mansredi all'acutissimo Geometra P. Ab. D. Guido Grandi le sue Osservazioni sopra il moto de corpi solidi ne mezzi fluidi. Si servì questi dello stesso Sig. Mansredi per inviare al C. J. la sua Risposta nel mese di Settembre dell'anno medesimo, in cui disendeva la propria sentenza pubblicata nella ristampa delle Opere del Galileo satta in Firenze l'anno 1718., e finalmente dopo la Replica dell'Autore si dichiarò inseramente persuaso.

Ciò premesso, per i canoni dei moti accelerati la forza sollecitante moltiplicata nel tempo è sempre uguale alla quantità del moto, o sia alla velocità moltiplicata nella massa, che attualmente si muove; e la forza medefima moltiplicata nello spazio trascorso equivale al prodotto del quadrato della velocità nella massa posta parimente in moto: ma nel caso nostro non s'imprime solamente il moto alla palla A, che discende, ma di più alla palla B, che con pari celerità è costretta ad ascendere; dunque chiamando, t il tempo, s lo spazio, u la velocità, avremo

le seguenti formule $m-n \cdot t = m+n \cdot u$ dalle quali dedurremo

$$m-n\cdot s=m+n\cdot uu,$$

tutte le proprietà del moto, che ci siamo proposti d'investigare.

Chi poi volesse considerare la salita del solido B, le formole diventerebbono negative, ed in tal incontro la forza accelerante n-m essendo una quantità negativa ci ammonisce, che il corpo B dee montare in cambio di discendere.

Applicando l'addotta dimostrazione a que' solidi, che calano abbasso ne'mezzi stuidi, io noto, che la forza accelerante, o il peso comparativo non folamente spinge all'ingiù la massa solida, ma obbliga a falire con velocità equivalente una massa fluida eguale al predetto solido, e ad occupare il luogo da esso successivamente abbandonato. Il difetto pertanto, che secondo il mio debole parere si rinviene in tutto il progresso delle dimostrazioni del lodato Matematico, consiste in una semplice inavvertenza, cioè a dire nell'aver folo posto mente alla massa, che piomba abbasso, e non a quella, che poggia in alto.

Ma s'egli avesse rivolto lo sguardo a que corpi, che per essere più leggieri in spezie del fluido, si trovano obbligati ad ascendere; si sarebbe accorto, che in tale ipotesi il liquido si è quello, che dal suo maggior momento astretto a calare abbasso, spinge il solido all'insù. Perciò la forza follecitante sarà n-m, e siccome nell'altro caso s'è messa in conto la massa, che discende; così non veggio, perchè nel nostro debba esfere trascurata. Non so capire per qual motivo nella prima supposizione s'adopri la formola m-n. t=u, e nella feconda non si faccia uso dell'

analoga
$$\underline{n-m} \cdot t = u$$
: anzi in sua vece si sostituisca la seguente $\underline{n-m} \cdot t = u$:

nella

nella quale, quasi che la massa fluida in discendendo non cagionasse principalmente l'effetto, si considera semplicemente l'ascendimento della solida.

In ordine a ciò per determinare il piano declive analogo HM, per cui il mobile liberamente sidrucciolando acquisti di passo in passo que' medesimi gradi di celerità, con cui il peso B per il fluido discende, egli è d'uopo diversificare la costruzione del Chiarissimo Autore, prendendo la normale HO, o sia FM non già eguale alla quantità m-n, ma più tosto all'altra $m \cdot \overline{m-n}$, la quale deriva dai nostri principj. $\overline{m+n}$

Risposta del P. Ab. D. Guido Grandi alle premesse Offervazioni.

La difficoltà mossa dal Sig. Conte Riccato non parmi, che giunga ad oscurare l'idea chiarissima, che abbiamo della forza, con cui scende un solido per un mezzo fluido, analoga a quella, che eserciterebbe sopra il piano da me assegnato.

Se colla funicella CA (Fig. 127.) il corpo A si sospende, e sia il peso del suddetto corpo A come MG; dentro il fluido GB, il cui peso in pari mole al folido sia GF, m'insegna Archimede, e me lo conferma l'esperienza, che la fune suddetta viene tesa con una forza come FM, cioè proporzionale all'eccesso del peso di A sopra il peso del suido B in pari mole. Similmente inclinata la MH eguale ad MG fopra l'orizzontale FH, se vi pongo sopra lo stesso corpo A, tenendolo colla sune AC parallela al piano HM, perchè non iscorra per esso; la forza, che ne sentirà la mano, sarà misurata dall'altezza perpendicolare HO, cioè dalla medesima MF; dunque in amendue i casi è la stessa forza, con cui il corpo A sta in procinto di scendere, e lo stesso momento esercita nel fluido, che nel piano HM.

Ora qui ci avverte il Sig. Conte, che diversamente si applica al moto la forza suddetta nel fluido, che nel piano; perchè in questo non na da muovere, se non lo stesso corpo A; ma nel sluido, si muove insieme il corpo A all'ingiù, ed una mole pari di sluido B all'insù: e però bisogna distribuire la forza ad ambi i corpi A, B in ragione delle loro masse.

Io dubito, che non si rimetta in campo una partità già pareggiata, facendo il conto due volte sopra il sluido B eguale in mole al corpo A, se si parla della tendenza di esso; oppure che non si voglia richiamare in iscena ciò, che si era accordato di lasciarlo suori, e prescinderne, se si parla del moto attuale del medesimo sluido.

Imperocchè quando si è detto, che la forza, la quale nel siuido tende la funicella CA, non è tutto il peso MG del corpo A, ma il solo eccesso MF sopra il peso GF del sluido B in pari mole, già si è considerata la tendenza del fluido B, che col suo peso GF resiste alla discesa del corpo A, perchè questa l'obbligherebbe a scomodarsi, e salire, per cedergli il luogo; e però detratta la forza suddetta GF, che resiste alla discesa del corpo A, il quale per altro con tutta la forza GM tena derebbe a discendere, gli rimane di libera la sola forza MF, con cui esercita il suo momento di scendere, e tira la funicella CA. Non accade adunque più considerare, che la sorza MF debba non solo muovere allo ingiù il corpo A, ma obbligare ancora il suido B alla salita, perchè già si è considerato questo punto una volta, quando si è concluso, che il corpo A non più ha la forza come tutta la GM (quale averebbe, se non dovesse contrastare cos suidos G ripugnante alla salita colla sua sorza GF) ma come la sola FM, tenendone continuamente impiegata la parte sua GF appunto in rintuzzare l'opposita tendenza del suido B, la quale essendo equilibrata colla porzione GF della forza GM, con ogni minimo vantaggio di moto attuale, anche infinitamente piccolo, che si consideri nel corpo A, resta poi vinta, ed obbligato perciò il ssuido B a falire.

Che se si vuole sar conto non del solo cedere, che sa il sluido B per rimanere la sua tendenza in qualsivoglia modo superata dall'intiera sorza di A, cd obbligata, per dir così, a ritirarsi dalle sue pretensioni, ma di più del moto attuale, che con una certa velocità ora minore, ed ora maggiore quindi ne segue, e trasporta di satto in alto il sluido B: eccoci alla resistenza del mezzo, da cui siccome avverte il medesimo Sig. Conte) prescindevasi in quella teoria: che però la considerazione di questa, che sul principio del moto (di cui si tratta principalmente) non è notabile, ma solo nel decorso diventa poi tale, potrà aggiugnersi a ciò, che si è dimostrato, senza gettare a terra le stesse dimostrazioni, quasi sondate sossero in falsi principi, e così persezionare la suddetta Teoria, supplendo ciò, che le manca.

Non sò però, se la strada tenuta dal Sig. Conte sia bastevole a ciò, perchè il fluido è obbligato, mosso ch'ei sia, a salire sempre con maggiore velocità, e quindi si va diminuendo il moto del solido; ma una parte di esso moto gli viene restituita dal fluido, che per di dietro ricorre, e così si entra in una Teoria complicatissima, che non può dipendere dalla formula costante $\frac{m-n}{m+n}$ trovata dal Sig. Conte; e

dubito, che gli sia per essere ammesso da tutti, che posto un corpo di due libbre in un fluido, che in pari mole pesi una libbra, debba stionarsi la sorza, che ha di scendere per esso, come di un terzo di libbra, cioè di 4. once, e non piuttosto di mezza libbra, come sin qui si è creduto, rimanendo l'altra mezza libbra, (e non 8. once) sollevata dal contrappeso d'una pari mole di fluido. Tuttavolta se la ragione del Sig. Conte Riccato convincerà in contrario, bisognerà pure ricredersi.

Solamente avverto, che quando si dice, che alla discesa del solido dentro un sluido sale altrettanta mole di sluido, in rigore non è poi vero, perchè se si muoverà il globo HKIL (Fig. 129.) per uno spizio infinitamente piccolo LO, basterà, che si muova la sola porzione HLOI del fluido, ed altrettanto ne ricorra dalle parti vicine nello spazio HNIK, il che la natura eseguisce prestissimo, e con minore scomodo, che sia possibile, onde sin ora non è stato necessario, che si muova una mole di fluido pari al folido, ma una parte infinitamente piccola, e con una velocità non maggiore di quella, con cui si è mosfo il solido, e però al moto del solido si aggiunge per conto del fluido un'altra quantità di moto infinitamente più piccola. Segua ora il folido a muoversi per un altro spazio infinitamente piccolo; saremo nel medesimo caso di prima: non essendovi necessità, che si muova il fluido che si muoveva nell'istante precedente, insieme con quello, che si muoverà ora, potendo quello rimanere equilibrato col resto. In somma in ogni istante troveremo, che una parte infinitamente piccola del fluido ha da salire (ed una simil parte ha da discendere) e non è se non per accidente, che si muova una parte notabile di esso fluido per dar luogo successivamente al solido, ed in ciò è differente il caso del moto ne'fluidi dal moto d'un peso attaccato ad una funicella, che passando per una troclea abbia attaccato all'altro termine un peso minore. In questo caso muovendosi in giù il maggior peso, è obbligato a strascicare allo nsù il peso minore tutto in un tempo in qualsivoglia istante; ma il folido muovendosi dentro il fluido non fa alzare tutto in un tempo una mole di fluido pari a se, ma a poco, a poco, e nel tempo, in cui discende per tutta l'altezza del suo diametro, la muove tutta a poco per volta. Anzi potrebb' essere il solido in un tal vaso. che non contenesse ne'meno tanta mole di fluido pari a se, e pure si potrebbe muovere per esso: come se un vaso di larghezza per ogni verso di once 13., e di altezza di once 15. contenesse un cubo di onnce 12. per ogni verso di qualche corpo solido più grave dell' acqua, ed il resto fosse acqua; potrebbe il solido elevato alla superficie cadere al fondo per l'altezza di once 3, e quando così avesse mossa tutta l'acqua, non ne avrebbe alzata la metà della sua mole, non essendovi che 807. once cubiche d'acqua in tutto, quando la mole del cubo è once cubiche 1728.

Il Sig. Bernoulli, non mi ricordo in quale Tomo degli Atti di Lipfia, calcolando il moto de'pendoli dentro i fluidi, computa la forza, che li muove appunto come ho fatt'io, fecondo l'eccesso della gravezza del corpo mosso sopra quella del fluido in pari mole, perchè avendo mostrato essere la moltitudine delle vibrazioni di pendoli eguali fatte nello stesso tempo in sudduplicata ragione delle forze, conclude poi, che essendo la ragione della gravità specifica del corpo a quella del mezzo come G ad M, il numero delle vibrazioni nel vuoto a quel-

lo delle vibrazioni nel mezzo farà come \sqrt{c} : $\sqrt{c-m}$. Onde se il Sig. Conte vorrà impugnare la mia Teoria, avrà l'onore nello stempo di correggere quella di un sì celebre Matematico Oltramontano.

Per essermi spiegato nell'altro mio foglio troppo in ristretto, ho dato motivo al dottissimo P. Ab. Grandi di muovere alcune difficoltà contro la mia Teorica in proposito della discesa de'corpi solidi ne'mezzi fluidi; alle quali m'ingegnerò di fatisfare tenendomi lontano da ogni

disputa, ed a solo oggetto di scoprire la verità.

Si mi permesto prima d'ogni altra cosa di esaminare l'ipotesi del celebre Autore nelle sue conseguenze; perchè se taluna d'esse sarà maniseltamente assurda, ci rendera sospetti i principi, da quali è stata legittimamente dedotta. Prend'egli nella Prop. 64. pag. 336. a misurare le velocità acquistate da un mobile, che discendendo per un fluido ci avrà speso un tempo determinato, e le paragona con quella, che in tempo pari si sarebbe acquistata nel vano, discorrendo nella seguente maniera.

La retta FG (Fig. 130.) esprima la gravità specifica del fluido, e la FC ci rappresenti la velocità, che nel voto guadagnerebbe qualsivoglia corpo in fine d'un dato tempo, il qual tempo si esponga altresì per la medesima retta FC. Compiuto il rettangolo FU, e prorogate all'infinito le due lince UG, UC, fra esse siccome assintoti descrivasi l'iperbola DFL, che passi per il punto F: interverrà, che se le abscisse GM, Gm esprimeranno le varie gravità specifiche de' solidi, che discendono nel predetto liquido, la di cui gravità specifica è GF; le corrispondenti applicate ML, ml esporranno le velocità acquistate nel tempo predetto FC.

La premessa costruzione trae l'origine dalla formola fondamentale

m-n. t=mu, nella quale n, e t fanno figura di costanti ed m, udi variabili. Quindi presa GM infinita, la velocità acquistata da un corpo infinitamente denfo nel fine del tempo FC sarebbe precisamente uguale alle celerità, che in detto tempo si guadagnerebbe nel vano. Se poi la densità del solido sosse uguale a quella del fluido, cioè GM = GF, l'ordinata che nel punto F è nulla, indicherebbe, che il folido collocato in qualunque fito del mezzo fluido starebbe in riposo.

Sin quì tutto cammina ottimamente : ma quando fi passa dal positivo al negativo, ci fi fa anzi gli occhi l'inconveniente. In vero presa la gravità specifica del solido minore di quella del liquido, onde il corpo immerso ascenda in iscambio di discendere; io posso determinare GN così piccola, che la velocità corrispondente ND acquistata dal mobile ascendente nel fine del tempo FC stia a quella, che acquisterebbe un corpo cadente in pari tempo nel voto, in proporzione maggiore di qualfifia data. Questa conseguenza, che viene ammessa dal P. Ab. Grandi nel Corollario secondo, basta da se sola, s'io non m'inganno, a sar toccar con mano, che la fua Dottrina non s'accorda colle vere leggi del

del moto, ne colla sperienza. Di fatto bisognerebbe, che un corpo leggieri come un sughero salisse nell'argento vivo con una incredibile celerità, e che con un moto prontissimo l'aria montasse per l'acqua, lo che ripugna alle offervazioni.

In oltre un corpo grave posto in un fluido di maggiore gravità specifica intanto ascende, in quanto viene estruso, e cacciato in alto dal maggior momento del liquido. Per altro il corpo più leggieri in ispecie non ha in se stesso alcuna facoltà, o alcuna inclinazione alla salita; e perciò non può mai ascendere con maggiore celerità di quella, con cui possa discendere il fluido, dal quale è spinto ed estruso. Ma certa cofa è, che il fluido non può discendere con maggiore velocità di quello farebbe in discendendo nel voto, quand'anche il solido immerso si supponga d'una infinita rarità ; dunque la velocità del folido ascendente, quantunque rarissimo, non può mai superare la velocità del folido de' gravi cadenti in tempo pari nel vano. Se altrimenti fosse, il predetto folido non poggerebbe in virtù della espulsione satta dal fluido più grave, che cala abbasso, ma per una sua natural leggerezza, e con una velocità, che supererebbe di lunga mano quella del fluido discendente in vigore di tutta la sua innata gravità. Sarebbe questa certamente una grande, e bella scoperta in Fisica, se sosse

Tentiamo di sciogliere lo stesso Problema inerendo ai nostri principi. Ciò si conseguirà sacilmente, presa per mano la formula

m-n. t=m+n. u, in cui supposte costanti n, t, s' assumeranno

m, u siccome variabili; onde abbiasi la seguente costruzione.

Sia FC la velocità acquistata da un mobile nel voto in fine del tempo espresso per la medesima FC, e ci rappresenti GF la densità del fluido. Facciasi Fg doppia di FG, e dato compimento al rettangolo Fu. dentro gli affintoti gu, uC descrivasi l'iperbola HFO, che passi per il punto F: dico, che se per esemplo l'abscissa GM esprimerà la densità del folido, dall'applicata MO ci verrà esposta la velocità acquistata da esso solido nel fine del tempo FC. Posta GM infinita, la velocità sarà uguale ad FC, e fatta la gravità specifica del solido pari a quella del fluido, la velocità farà nulla.

Ma prefa la denfità GN del folido più picciola di quella del liquido, la velocità sarà NP, che allora si troverà precisamente uguale alla velocità FC, ogni qual volta la rarità del folido sarà infinita; così che fatta GN infinitamente picciola, diventi la velocità GQ=FC. Per la qual causa in tale ipotesi il fluido discenderà, prescindendo dalle resistenze, come se discendesse nel vano, e colla stessa celerità verrà spinto all'insù il solido, che si finge infinitamente raro: conseguenze tutte, che si accordano col principio dell'estrusione, e dimostrano la

verità del mio assunto.

Da questa Dottrina si cava un Corollario importante, che riuscirebbe falso, mentre fosse vera l'opinione del P. Ab. Grandi: ed è, che Fff2

immerso il grave A in un fluido B di minore specifica gravità, se fingeremo un fluido D pari in gravità specifica al solido A, ed un solido C egualmente denso come il fluido B; il grave A nel discendere per il liquido B, ed il folido C nell'ascendere per il fluido D, principiando dalla quiete, acquisteranno in tempi uguali un grado pari di velocità. Ciò interviene, perchè la quantità positiva A - B è uguale

alla negativa C-D, con questo divario però, che all'affermativa ri-

fponderà una forza centripeta, ed alla negativa una centrifuga. Ma secondo il P. Ab. Grandi, la grandezza positiva A — B alla negativa

C-D avrà la proporzione inversa di A: C; laonde la velocità della

discesa a quella della falita in tempi uguali potrà essere in qualsivoglia ragione.

Il detto sin qui è sufficiente, s'io non erro, per istabilire la mia

sentenza: rimane per tanto, che si risponda all'opposizioni.

Dubita il lodato Scrittore, che si metta due volte in conto l'azione del fluido B, ma l'esempio da me recato toglie di mezzo la difficoltà. Fatto passare il filo per la troclea C (Fig. 128.), dal quale fiano lospesi i due gravi A maggiore, e B minore, egli è certo, che s'io porrò in D una potenza = A - B, che tiri dal basso in alto, si sarà l'equilibrio: contuttociò levata la potenza D, s'io vorrò determinare la velocità del peso A nel fine del tempo dato, bisognerà anche per fentimento del P. Grandi, ch'io mi vaglia della formula A-B. t=u.

In vece del peso B sia circondato il corpo A da un fluido, di cui un volume uguale ad A pesi quanto il grave B. Restituita la potenza D, di bel nuovo si rimetterà l'equilibrio. Ma tolta di mezzo essa potenza D, chiaramente apparisce, che siccome nel primo caso non può il corpo A calare abbasso, senza tirar in alto la massa B; così nel secondo non può il peso A farsi strada discendendo per il sluido, senz' alzare una mole di liquido corrispondente alla massa B. La ragione si è, che considerato il grave A in quiete, il suo momento, o la forza sollecitante equivale alla potenza D, nè si muta mai per tutto il tempo della discesa, se non se in quanto viene a distribuirsi ad una massa maggiore. Per la qual causa la predetta forza, o sia impressione sollecitante equivalente sempre alla potenza costante D tanto meno opera, respettivamente alla velocità comunicata, quanto ha da animare una massa più grande.

SCHE-

SCHEDIASMA XXXV. (*)

Delle pressioni, e degli equilibri de fluidi.

Vantunque sia malagevole impresa lo spiegare meccanicamente le proprietà de'corpi fluidi, e che i più sublimi Geometri nelle loro dilucidazioni abbiano lasciato molto da desiderare; non pertanto non mi sarà vietato di proporre alcune mie osservazioni, e di spargere un qualche nuovo lume fopra la presente oscurissima materia.

Prima d'ogn'altra cosa sa di mestieri comprendere in che consista la maggior difficoltà. Dai fenomeni impariamo essere i sluidi, a distinzione dei folidi, forniti d'una fingolare prerogativa di sfiancare per tutti i versi, e di esercitare la loro forza da tutti i lati: la qual forza è sempre proporzionale all'altezza verticale del fluido sopra incombente. Così i cannoni di piombo, o di rame ad uso delle sontane caricati d'acqua, e lungi oltre una certa mifura finalmente si fendono, ed aperto un picciolo buco nella parte d'un vase, esce il liquido con tanta velocità, quanta n'avrebbe acquistata in cadendo liberamente a piombo da una su-

blimità pari all'altezza del fluido sopra il centro del foro.

Abbiasi un cilindro retto, il cui vano sia pieno di ghiaccio. Ognun sa, che la massa gelata colla sua natural gravità preme il sondo, e non impiega qualsssia menoma parte della sua azione contro la superficie concava della canna. Il gelo fi squagli, ed allora oltreche il fondo soggiace ad una pari pressione, anche alla parte del vaso si addossa il suo carico, giusta la regola testè indicata. Pare adunque, che perseverando tutto intiero, e senz'alcuna diminuzione l'effetto cagionato sul fondo dal peso del ghiaccio, se ne aggiunga un altro spesse fiate assai più gagliardo contro la sponda, computata la somma totale delle pressioni. Ma se la cagione non si muta, l'essetto non dovrebbe mai crescere ; altrimenti si mette una eccettuazione al celebre ed inalterabile Assioma, che gli effetti prodotti non superano, nè vengono superati dall'energia della causa produttrice, quando questa nel generarli tutta si spende. Per isvogliere il nodo, premetto il seguente

ASSIOMA.

Si dispongano alquanti corpi toccantisi A, B, C (Fig. 131.) uno fopra l'altro verticalmente: è cosa chiara, che il più basso A sostenta il peso di tutti e due i superiori. La gravità non dorme mai, e perciò

(*) Fu composto questo Schediasma l'anno 1741, per isgombrare alcune difficoltà promosse dal P. Vincenzo Riccati, come si raccoglie da due lettere dello stesso Padre, l'una de' 10. Gennajo, e l'altra de' 7. Marzo dell'anno mentovato, dirette al Fratello Co. Giordano.

quando impedita non può stimolare le masse alla discesa, impiega tutto il suo vigore nel premere.

SCOLIO.

I fluidi sono composti di minime particelle disgiunte, e staccate, e che fra loro non anno una stretta connessione; laonde sono prontissimi a cedere ad ogn'impulso. Se la stilla E (Fig. 132.) non galleggia a sior d'acqua, ma sta in quiete immersa ad una data prosondità; egli è certo sossene essa il silo EF di tutte le goccie, che la caricano a perpendicolo, e in virtù di cotal pressione premer essa tutte le goccie vicine per ogni direzione. Quinci si rende manisesta la disserenza tra i fluidi, ed i solidi. Questi siccome composti di particole unite l'una coll'altra, e bene spessioni insieme intralciate, agunt per modum unius; nè una particella può ssancare dai lati, mentre non può staccarsi dalle contigue, ed operar separatamente. Là dove ne'ssuidi, oltre all'esercitare un azion comune, ciascuna goccia agisce da se sola, essendo pronta a cedere, da qualunque lato le venga aperta la strada.

TEOREMA PRIMO.

Nelle stesse circostanze dico, che la goccia E circondata dal sluido, persistendo in riposo, è compressa ugualmente per tutte le direzioni.

La dimostrazione presuppone esser le gocciole del fluido persetto dotate di squisita elasticità. Abbiamo dal premesso Assiona, che la stilla E viene aggravata a piombo dalla colonna sluida EF: ma non ostante il carico, e tutto che sia sostenuta da un appoggio, che cede ad ogni piccolo impulso, ella non si muove nè direttamente all'ingiù, nè obbliquamente dai dati, nè cangia ulteriormente figura; dunque perseverando l'equilibrio, lo ssorzo del silo verticale EF è contrabilanciato dalle impressioni, che premono tutto all'intorno la gocciola, le quali eguagliando la sua elasticità, vogliono misurarsi dalla gravità della colonna EF: il che ec.

COROLLARIO PRIMO.

Si appoggi la stilla G alla parete del vaso nel punto I: è cosa chiara, che non si turberà l'equilibrio; perchè la resistenza della sponda supplisce alla mancanza delle particole acquee, che da quel lato sacean contrasto. E lo stesso dee succedere, quand'anco le pareti non sossero normali al sondo, ma ripiegate, come nella figura, e curve piuttosto che rette; mercecche in qualunque incontro la massa della gocciola è del pari compressa da tutti i lati, e se altrimenti camminasse la faccenda, non sussistenza l'equilibrio.

Per discernere qual sorza impieghi la stilla G contro la parete del vase nel punto di appoggio I, basta misurare l'altezza del filo GH, e la specifica gravità del liquore. La goccia G è caricata dal peso della colonna stuida GH, e nello stesso tempo compressa da serze uguali, che tutto all'intorno la cingono: ma una di queste sorze si è la reazione della sponda nel punto I, la quale equivalendo per una parte allo ssorzo della gocciola G giusta la direzione perpendicolare alla linca del contatto, e per l'altra all'aggravamento del cilindro siudo GH; ne nasce di conseguenza, che la parete del vase in I viene pressa dalla stilla G con quello stesso vigore, per cui essa stilla viene aggravata dal peso del filo GH.

SCOLIO PRIMO.

Ed ecco sufficientemente dilucidata la maravigliosa proprietà dei fluidi di premere, e di ssiancare per tutti i versi; conciossiachè la goccia E non solamente sostenta il carico delle stille superiori, che a piombo la pressano, ma per mezzo della reazione anco lo ssorzo delle inferiori, che come in un torchio la stringono. Oltre ciò bisogna tener conto dei fili orizzontali, ed obbliqui, che tutti, e per tutte le direzioni contro essa stilla esercitano una pari azione, ad uno de quai fili supplisce il contatto della parete. Per la qual cosa le particelle elementari componenti il fluido si contengono in un esatto equilibrio.

SCOLIO SECONDO.

La Proposizione esposta, e dimostrata è talmente seconda, che da essa spontaneamente stussono le primarie affezioni dei corpi liquidi. Tutti sanno, che una massa pesante discende, ogni qualvolta si accosta al centro dei gravi, ed al contrario ascende, quando se ne discosta.

E'noto altresì, che un peso non impedito sempre cala abbasso, non cessando mai di operare la gravità innata. Quinci la superficie superiore d'un fluido si mette a livello, e si adatta ad una superficie sscrica egualmente distante da quel punto, verso cui in ogni Regione tendono i gravi. Se una parte si mantiene delle altre vicine più sollevata, sa d'uopo investigare la ragione, per la quale la gravità naturale in certi incontri patisce diminuzione, e se ne sta oziosa.

Non si dà sorse liquore, che di qualche picciola tenacità non sia sornito, ed oltre ciò i sluidi sono soggetti alle resistenze, ed ai fregamenti, e quanto sono più persetti, tanto più facilmente si spianano. Mi è venuto satto d'osservare, che escavatà una buca nel mele, sostanza consistente, e che può chiamarsi semissiuda, ci volevano parecchie ore, prima che la superficie si riponesse a livello.

Famosa si è l'esperienza del Galileo, per cui si sa stare a sior d'acqua una lamina piana di metallo, quantunque assai più grieve in ispecie dell'acqua medesima. Si vede tutto all'intorno alzassi un picciolo argine, e sostentarsi l'acqua senza sluire. La lamina unita all'aere occupante il vano della sponda acquea sorma un solido più leggieri d'altrettanta mole d'acqua, il quale a guisa di zatta galleggia. Ma bagnata gentilmente la lamina, questa subito si prosonda; perchè in tali circostanze l'acqua dell'arginetto non si sostiene, e scorre liberamente.

Mi sovviene d'avere spesse siate veduto a derivare un rigagnolo per un asciutto canaletto. L'acqua di poco corpo avvanzava stentatamente cammino, e con un moto interrotto; conciossiachè tratto tratto si fermava, restando immota per qualche tempo, sinattantochè saziato in prima l'alvco bibace, formava essa un grosso labbro, e si alzava a misura di poter superare la scabrosstà del sondo. Dappoi sluiva per un piccolo spazio, indi tornava a fermarsi, e ripetendo a passi regolati lo stesso giuoco, appena in una intiera giornata le riusciva di progredir

per un miglio.

Molto ci sarebbe da ristettere sopra le superficie dei liquori contenuti nei vasi o scemi, o pieni, o traboccanti, e sopra gli effetti indi nascenti, de' quali ha ragionato a lungo il Borelli nella sua Opera de' moti naturali dipendenti dalla gravità. Nè avrebbono ad ommettersi i curiosi Fenomeni delle goccie ora sensibilmente rotonde, ora bislunghe, ed ora schiacciate, che sono tanto più grosse, quanto che si attaccano a corpi più ruvidi, e più pelosi. Alquante belle offervazioni si leggono in tal proposito nel Trattato dei Barometri del Sig. Dott. Jacopo Piacentini, ora Primario Prosessore di Medicina nella Università di Padova.

S C O L I O III.

Se tutte le stille, che si rinvengono nella sezione orizzontale qualunque FD (Fig. 133.) del vase ABC pieno d'acqua non sono per ogni verso egualmente premute; dico che non suffissendo l'equilibrio, tutte le particelle del siudo tanto superiori, quanto inferiori alla segnata sezione si metteranno in movimento. La misura delle compressioni, che stringono tutte all'intorno la goccia D si desume dal silo verticale DE; e perchè si suppone, che la goccia F sia meno premuta, sostera essa il filo FG più corto di DE. Prevalerà dunque la maggior sorza, e la stilla F colle contigue sarà costretta a cedere, ed a falire, discondendo all'incontro il filo ED, e comunicata l'agitazione a tutto il corpo del sluido, dopo vari bilanciamenti non cessera mai il moto, se le particelle sottentrate nei posti D, F non saranno del pari compresse: lo che interverrà, mentre la superficie superiore AHC mettendos a livello, si trovi parallela alla sezione FD.

Non nega già, che l'acqua ammontata in HEC, e non impedita si fipiani in discendendo, come per un piano inclinato. Non pertanto il maggior effetto proviene certamente dalla pressione; conciossachè è molto più grande l'impulso, che spigne in alto la goccia F di quello, che stimola la stilla E a discender obbliquamente.

Per la cagione addotta si conserva perenne la corrente dei Fiumi, attesochè somministrando continuamente le sontane, e le vasche nuovo alimento, l'acqua, che sopraggiugne, carica, ed incalza quella, che precede; laonde le goccie d'una qualsivoglia sezione orizzontale non si rinvengono mai egualmente premute, e di conseguenza stanno in un perpetuo moto, senza mai pervenire all'equilibrio. Tre diversi elementi vanno considerati nel corso dei siumi, cioè la declività del lesto, quella della superficie, che si adatta ad una specie di curva assintotica, e per ultimo la forza della pressione, ai quali fanno contrasto le direzioni irregolari, e vorticose del filone, e le resistenze dell'alveo. Il secondo, e terzo elemento sono sempre in azione, ma non così il primo; perchè massimamente nei siumi di lunghissimo corso il sondo per tratti orizzontali benè spesso si stende, conforme ci ha resi avvertiti il Guglielmini. Quando fra monti, o in vicinanza d'essi è notabile il pendio del letto, allora i fiumi corrono precipitofi, e con poco corpo d'acqua, e strascicando seco le ghiaje, e i sassi fanno un continuo sforzo per allargarsi. Allo incontro quanto più s'accostano al Mare, tanto camminano più placidi, e più ristretti, ma con maggior profondità, supplendo in tal cafo alla mancanza del declive l'accrescimento della pressione.

SCOLIO QUARTO.

M'inoltro ai vasi comunicanti, uno de quali ci viene rappresentato dalla Figura 134. Il liquore contenuto nel tubo più largo BK conserva un perpetuo commercio con quello del cannello più stretto FG per mezzo del tubo XY. Ora io dico, che ne predetti vasi i fluidi omogenei, o almeno della specifica gravità stessa si quieteranno ogniqualvolta le due fuperficie IK, LM si accomoderanno allo stesso piano orizzontale. Seguitiamo per poco i popolari pregiudici, ed immaginiamoci, che predomini il liquore contenuto nel tubo più grande BK, di modo che l'acqua, a cagion d'esempio, sia ridotta a stato di riposo, mentre nel maggior vase si abbassa sino ad RS, e monta nel minore sino a GH. Si concepisca una qualunque goccia O, e condotta l'orizzontale ON, tagli le verticali QO, PN ne' punti O, N. Egli è manifesto, che la goccia O farà per l'una parte premuta con una forza proporzionale all'altezza QO, e per l'altra sosterrà una pressione, che corrisponde all'altezza PN; dunque essendo la prima pressione maggiore della seconda, sa di mestieri, che a quella ubbidisca la goccia O. La qual cosa verificandosi di tutte quante le goccie componenti il liquore, dovrà esso necessariamente discendere nel tubo opposto BK, sinattantoche qualunque stilla O sia del pari premuta per ogni verso, lo che interviene, quan-Opere Ricc. Tom. III. Ggg

do le superficie d'ambo i vasi s'adattano alla comune orizzontale IK LM.

Ma se i liquori sono disferentemente gravi in ispezie, la sezione TU divida i due liquori, per modo che di sopra ad esta nel sito UG stia il liquore più leggere, e di sotto il più grave. Si prenda in questra sezione la goccia O. Ognuno sacilmente comprende, che s'otterra l'equilibrio, qualunque volta l'altezza a piombo QO del liquor più leggiero sopra la goccia sarà all'altezza PN del liquor più grave in proporzione reciproca del peso specifico, e non già assoluto proprio del sluido GU, al peso altresì specifico del sluido SBFT. In tali circostanze è agevole il dimostrare, che la goccia O sarà egualmente premuta, stando le pressioni in ragion composta dell'altezza verticale, e della gravità specifica del liquore.

Posta poi cotal proporzione reciproca tra le gravità specifiche, e le altezze sopra il confine TU de' due liquori, io dico che qualunque goccia D sosterrà sempre equali pressioni. Imperocchè chiamate G, g le gravità specifiche dei sluidi più, e meno gravi, si ha per l'ipotesi g. QO = G. PN, o sia g. QD + g. DO = G. PN, ovvero g. QD = G. PN - g. DO: ma g. QD esprime la pressione, che la goccia D sostene in virtù del filo QD, e G. PN - g. DO la repressione; dunque è necessario, che trovandosi egualmente premuta, stia in equilibrio.

SCOLIOV.

Nella dimestrazione ultima s'è per noi tacitamente supposto, che il confine TU de'due liquori sia parallelo all'orizzonte, e posto in uno de tubi con unicanti. Ci framo così adoperati a difegno; poichè non è possibile, che nel caso d'equilibrio il predetto confine sia nel tubo di comunicazione, o suor di livello. Fingasi collocata nel cannello di comunicazione la separazione CE dei fluidi, e sia questa qualunque superficie o piana, o cuiva. Si segni la stilla A, che in equilibrio supponesi, per la quale passi l'orizzontale XY terminata alle verticali PN, QO prodotte. E' manifesto, che saranno le altezze PX, QY reciprocamente come le gravità specifiche G, g. Prendasi una nuova goccia tra A, E stando serme le gravità specifiche, s'accresceranno di due quantità eguali le nuove altezze, e per conseguenza sarà maggiormente premuta dal liquor più grave, che dal men grave. Tutto all'opposto interverrà, mentre seelgasi una goccia posta tra C, A: dunque dovrà seguir moto, inclinandosi la sezione AF verso F, e la sezione AC verfo X. La medefima dimostrazione avrà luogo, se il confine de'fluidi sia bensì in uno de' tubi comunicanti, ma però obbliquo relativamente all'orizzonte.

Abbiamo un celebre esempio del bilanciamento dei liquori eterogenei nella costruzione dei Barometri. L'argento vivo, che stagna nel catino, è del pari aggravato per una parte dal peso dell'aere, e dalla elasticità equivalente al peso medesimo, e per l'altra dalla colonna di mercurio, che ad una determinata altezza nel cannello si sossenza onde dalle due forze pari, e contrarie si genera l'equilibrio. Ed atteso che mutate le circostanze si altera la gravità dell'aria per que morivi, che non occorre indagare presentemente; in ordine a ciò anche l'argento vivo contenuto nel tubo si abbassa, e si rialza dentro certi limiti.

Qualora si vede estollersi un fluido sopra il consueto livello, sebbene circondato da un liquore della stessa natura, ed ivi reggersi senza discendere, si dica suori d'ogni dubbio aver esso per qualche esterno accidente perduta una qualche porzione della sua specifica gravità. Nei tubi capillari l'acqua monta più, e meno, quasi inerpicandosi per la picciola interior cavità del cannello. Se poi debba ciò ascriversi o all'attrazione Nevvtoniana, cuneo che serve per ogni nodo, o pure a cagioni più semplici, e meccaniche, non è ispezione, dietro cui io voglia presentemente spendere il tempo; avvegnachè uscirei troppo dal mio sentiero, se mi pigliassi la briga di sottoporre all'esame le moltissime sperienze in tal proposito registrate dal Sig. Musschenbrocek, e le oscillazioni, che ne vengon dedotte.

Aggiungo un esempio più manisesto. Se l'acqua del Mare si sostiene alla massima elevazione sotto l'Equatore, e sta sempre più depressa, quanto più ai Poli si va accostando; abbiamo a credere, che il Mare sia composto d'innumerabili fili comunicanti, la specifica gravità de quali venga passo passo minorata, procedendosi da Settentrione a Mezzogiorno, dallo accrescimento della forza centrisuga.

TEOREMA SECONDO.

Posta la goccia D abbracciata dal fluido, dico che non ostante le pressioni, a cui soggiace, la sua gravità innata sollecita la massa D colla forza consueta, e per la solita direzione verso il centro comune de'gravi. La ragione dipende dall'essere la gravità una sorza morta bensì, ma continuamente applicata, e che non cessa mai d'operare: laonde sebbene per qualche tratto di tempo le circostanze portano, ch'ella s'impieghi o nel muovere, o nello ammaccare, o nel premere, e condensare, o che so io, ed in tal guisa generi la sorza viva; compiuto però il lavoro, e ridotte le cose alla quiete, come nel caso nostro interviene, torna ad agire come prima, stimolando la goccia D alla discesa, ed aggravando l'ostacolo, che vi si oppone.

ANNOTAZIONE.

In comprovazione della verità posso addurre parecchi esempli, e fra gli altri quello della stadera, in cui la mano, che regge l'uncino, allora solo sossiene intieramente il carico dei due pesi attaccati alle braccia, quando fra loro si contrabbilanciano, non entrando in conto la mutua azione, e reazione, per le quali uno impedisce la discesa dell'altro.

Ggg 2

Di vantaggio sia insista nel pavimento orizzontale AB (Fig. 135.) la verga elastica CD costituita in sito verticale, a cui s'appoggi il pefo D, che la comprima, e la riduca alla minor lunghezza CE, nel
qual luogo dopo varie reciprocazioni il moto si estingua, e l'azione
del peso sia bilanciata dal contrassorzo della molla. Sinattantochè la
palla D, rannicchiando l'elastro da D sino in E, si accosta al piano
sottoposto, questo non risente se non se una parte del carico; perchè
quella perzione di forza, che si spende nel moto allo ingiù, non s'impiega ad aggravare, altrimenti la cagione del proprio essetto resterebbe
superata. Ma quando il corpo D sta in riposo nel sito E, allora tutto il suo peso si addossa al piano; atteso che esercitando esso tutto il
suo vigore contro la molla, la molla stessa in virtù della reazione al
pavimento AB lo comunica.

COROLLARIO PRIMO.

Ogni particola elementare del fluido viene spinta all'ingiù dal proprio peso, sebbene attesi gl'impedimenti, non succede l'essetto della discesa. Ciò che d'una particella si asserma, dicasi generalmente di tutte insieme. Essendo il liquore omogeneo, il peso di qualunque goccia è proporzionale alla massa: quinci attaccato il vase pieno d'acqua, di qualunque figura egli si sia, al braccio d'una bilancia, per equilibrarlo, si dee porre nella scodella opposta tanto peso, che sia precisamente uguale a quello del vaso continente, e dell'acqua contenuta, nulla importando, che l'acqua si trovi o sciolta o gelata.

COROLLARIO SECONDO.

Messa della natural gravità della stilla non è paragonabile coll'energia delle pressioni, che la predetta goccia tutto all'intorno circondano, e stringono. Lo ssorzo di una di queste pressioni, che a tutte le altre dà regola, si misura dal peso del silo verticale: ma un tal peso sta a quello della goccia prossimamente (perchè non si dee supporre, che tutti gli elementi d'un liquido omogeneo sieno fra loro con geometrica esattezza uguali) come il numero delle stille contenute nel filo all'unità; dunque se la stilla solitaria è minima almanco fiscamente, la sua gravità, e confeguentemente la sua forza a quella del silo premente è in una proporzione, che può assumersi, siccome minore di qualssia data. E molto più si allontana la proporzione, quando si mettano in conto tutte le altre pressioni, che contro la goccia impiegano il loro vigore.

SCOLIO PRIMO.

Oui mi si apre l'adito di liberare la Fisica da un confermato pregiudicio. Parecchi Matematici, che mi fono capitati alle mani, ipiegano le azioni dei fluidi contro le pareti, ed i fondi dei vafi per via delle forze equipollenti. Sia la sponda CD (Fig. 132.) o curva, o retta ed obbliqua all'orizzonte, alla quale nel punto I si appoggi la goccia G. La linea a piombo IL esprima il peso del filetto verticale HG, e condotta GK normale a CD, ovvero alla toccante del punto I, dal punto L si tiri la LK parallela ad IC, o alla menzionata tangente. Si pretende, che rifolvendosi la forza IL nelle due collaterali LK, KI, la seconda sia quella, per cui la goccia G preme la sponda nel punto I, giusta la direzione IK. Se così è, quanto più l'angolo ottufo BCD si accosta al retto, tanto più si minora la forza premente IK, sino a diventar nulla, mentre la parete CD è perpendicolare al fondo per esempio orizzontale BC. In tale incontro la sponda non sarebbe in conto alcuno premuta, nè la goccia G sarebbe nè punto, nè poco stimolata ad uscire dal vase con una direzione parallela all'orizzonte: lo che ripugna alle osservazioni.

Oltre ciò se la stilla G esercitasse contro la parete l'azione esposta per la normale IK, dallo impulso medesimo sarebbe ella, almeno sul principio del moto, sollecitata a sbucare dal vase per il forame aperto in 1, ed in conseguenza la impressione accelerante starebbe alla forza del filo premente HG come KI: IL. Non avrebbe dunque la gocciola G nè spirito, nè lena bastante per uscire dal vaso colla celerità conveniente alla discesa per la subsimità HG, conforme ci ammonisce l'esperienza, e conforme in progresso dimostrerò.

Non si reputi strayagante l'asserzione, che dalle cose premesse io sono per dedurre, ed è, che nei corpi siudi non anno punto che sare le sorze composte. Non nego già, che adoperandosi ancora la stilla G (Teorema secondo) a premere la sponda nel contatto I colla sua natia gravità, questa sorza non vada risoluta nelle due equipollenti IK, KL, mentre il peso della gocciola si esprima per IL: ma avendo notato (corollario secondo del suddetto Teorema), ch'ella posta a confronto con quella delle pressioni è minima, ed inassegnabile, ne siegue, che non se ne dee sar caso, e che non alterando in modo alcuno gli essetti, non solo un Geometra, che la considera siccome infinitessma, ma un Fisico altresì, il quale altronde sa quanto sia picciolissima, debbono del para trascurarla.

Senza il premesso avvertimento, io per me penso, che non ci andasse mai fatto di liberarci dall'equivocazione, e conseguentemente dal paralogismo. Ora sorata la parte del vase nel punto I, cessa la reazione del contatto, e si toglie di mezzo l'equilibrio.

Prima dunque ad operare si è la pressione direttamente contraria OG, pari, come più siate ho replicato, al peso del filo verticale HG, la quale s'impiega con più efficacia di tutte le altre, che stringono per ogni verso la goccia G; perchè non trova contrasto, che vi si opponga, c la quale per la direzione OI perpendicolare alla retta CD, o alla toccante della curva CID nel punto I comincia a follecitare al moto la stilla G. Qualmente poi si continui il movimento, e l'accelerazione, a suo luogo m'ingegnerò di spiegarlo. (a)

In ordine alle cose dette abbiasi la goccia S, che tocchi il fondo BC nel punto N, e la parete AB nel punto M. Essa goccia uscirà dal vaso con pari velocità, aperto ad arbitrio il soro nel sito N, ovvero M, colla differenza però, che l'azione principierà da quelle forze prementi, che direttamente si equilibrano colla reazione del fondo in N, o della sponda in M, cioè a dire, se il sondo sarà a livello, e retto l'angolo ABC, o dal filo fovraincombente a perpendicolo, o dall'orizzontale giusta la direzione CB.

SCOLIO SECONDO.

Stiamo ben attenti a non confondere il peso totale d'un fluido colle vicendevoli azioni, e reazioni delle particole elementari, che le compongono; conciossiachè quantunque gli essetti, che da ambo i principi dipendono, dalla sola gravità l'origine riconoscano, sono però fra loro affatto diffimili, e regolati con leggi totalmente diverse, confistendo in ciò principalmente la differenza, che si ravvisa fra i corpi solidi, e i fluidi. Il peso assoluto è sempre proporzionale alla quantità della materia, conforme per via delle oscillazioni dei pendoli ha dimostrato l'Ughenio, nè prescindendo dalla evaporazione punto si mura, ogniqualvolta a cagion d'esempio un pezzo di metallo di solido diventa liquido. All' incontro le somme delle pressioni notabilmente si diversificano, quand' anche sta salda la medesima massa, ed il fluido alla medesima altezza verticale si sostiene, purchè si muti o la figura del vase, o semplicemente la positura. Questa verità si vuole dimostrare in tutta la sua estensione.

TEOREMA TERZO.

Sieno due vasi ABC abc (Fig. 136.) ambo ripieni d'un liquore omogeneo, e sieno D, d i centri di gravità d'amendue le masse sluide: dico. che l'aggregato di tutte le pressioni verticali, a cui soggiacciono gli elementi del fluido contenuti nel vase ABC all'aggregato di tutte le pressioni altresì sofferte dalle particelle comprese dal vaso abc sia in proporzione composta delle masse liquide ABC, abc, e delle distanze ED, ed dei centri di gravità D, d dalle supreme orizzontali superficie AC, ac dei liquori.

La

(a) Area intenzione l'Autore, che non ha poi ridotta ad effetto, di aggiuno gere alla presente un altra Dissertazione.

La massima profondità del fluido ABC si misuri dalla verticale EB, a cui si ponga uguale la retta LM asse della curva, che dee descriversi. Tagliato il solido ad arbitrio colla sezione FIG parallela alla superiore AEC, facciasi BI=MQ, ed assunta la linea Z a piacimento siccome unità, sia il rettangolo Z. QR uguale all'area della sezione FIG. In tal guisa si continui l' operazione in ogni punto dell' asse ML, onde nasca la curva MRN analoga al corpo ABC: egli è certo, che qualunque ordinata QR esporrà il numero delle goccie contenute nella sezione corrispondente FG, e che l'intera superficie mistilinea LMRN dinoterà tutta la materia fluida, la quale empie il vaso ABC. Di più segnato il centro di gravità P dell'area LMRN, atteso che per la costruzione quest'area è analoga al solido ABC, i centri di gravità D, P saranno egualmente lontani, il primo dalla suprema superficie AEC del sluido, ed il secondo dall'ultima ordinata LN, laonde saranno eguali le distanze perpendicolari DE, PS.

Sopra la base LMRN s'intenda alzata una cilindroide retta, la di cui sublimità sia eguale all'asse ML = BE, e questo solido si tagli con un piano, il quale passando per l'ordinata LN, faccia colla sottoposta base LMRN un angolo semiretto. Dal detto piano si divida la cilindroide in due cuner, e pigliando a confiderare l'inferiore tagliato da tanti piani normali alla base LMRN, ed insistenti sopra le applicate QR, quante sono le applicate medesime, si scoprirà, che tali sezioni, atteso l'angolo semiretto, saranno altrettanti rettangoli compresi dalle affise, e dalle respettive ordinate della curva MRN, uno de quali si è

il rettangolo LQ. QR. In questo mentre il detto rettangolo LQR è proporzionale a tutte le pressioni verticali sosserte dalle goccie, che compengono la sezione FG; perchè l'applicata QR esprime il numero di esse goccie, e l'assissa LQ espone il peso del filo EI, da cui le dette pressioni prendon la norma. E verificandosi ciò in tutti i rettangoli del cuneo, ed in tutte le fezioni analoghe del folido; ne fegue, che il menzionato cuneo ci rappresenterà l'aggregato delle pressioni verticali, alle quali le stille, che riempiono il vase ABC soggiacciono in solido.

Questo giro di preparazione, e di discorso si applichi al vase abc, relativamente alla superficie mistilinea lmrn, ed al cuneo indi nascente, e cavate le conseguenze, cioè, che l'area lmrn ci rappresenti la quantità del fluido contenuta nel vase abc, che il cunco denoti l'aggregato delle verticali pressioni, e che sieno eguali le distanze de, ps determinate dai centri di gravità d', p, si conchiuda, che come il cuneo sopra la base LMRN all'altro sopra lmrn, così la somma delle pressioni verticali del fluido ABC a quella del fluido omogenco abc.

Appresso i Geometri sanno, che per la regola del Guldino i duc cunei s'aguagliano respettivamente a due cilindroidi erette sopra le basi LMRN, Imrn colle altezze PS, ps, per cui distano i centri di gravità P, p dei mistilinei LMRN, lmrn dalle estreme applicate LN, ln; dunque come queste Cilindroidi, così i cunei già descritti, e così gli aggre-

gati delle pressioni verticali d'ambo i sluidi ABC, abc, i quali aggregati saranno di conseguenza in ragione composta delle aree LMRN,

Imrn, e delle notate distanze PS, ps.

Quinci surrogando in cambio delle distanze PS, ps le uguali DE, de, ed invece delle arec LMRN, lmrn le masse sluide analoghe ABC, abc, si ricava, che le somme delle menzionate pressioni saranno in ragion composta delle masse ABC, abc, e delle distanze DE, de: il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Se le masse saranno eguali, gli aggregati delle pressioni perpendicolari saranno come le distanze dei centri di gravità dalle sommità dei liquori. E poste eguali le distanze, gli aggregati predetti saranno come le masse.

II. Che se le distanze si troveranno essere in ragione reciproca del-

le masse, le somme delle dette pressioni saranno eguali.

III. Nei vasi simili le somme delle pressioni serbano la proporzione

quadruplicata dei lati omologhi.

IV. Gli aggregati delle pressioni notabilmente si diversificano, mutata solo la positura del vase. S'empia di vino il bicchiero conico A (Fig. 137.), e vi si adatti il coperchio; di modo che inclinandolo, non si spanda il liquore. Capovolto il bicchiero, e collocato nella positura B, è facile a dimostrarsi, che parlando delle verticali, la somma delle pressioni del fluido in A alla somma delle pressioni dello stesso fluido in B sta come l'unità al ternario.

V. Riempiasi il vase abe (Fig. 136.) d'un liquore più grave, o più leggiero in ispecie di quello, che cape nel vaso ABC, tanto e tanto gli aggregati delle pressioni sono come il prodotto della massa ABC. DE al prodotto della massa abe. de. Da ciò ponno dedursi varie con-

feguenze, che tralascio per brevità.

SCOLIO.

Dalle cose dimostrate si ha un nuovo uso dei centri di gravità, i quali concorrono in parte a determinare la misura degli aggregati delle pressioni verticali, a cui soggiacciono i corpi sluidi. In esse va considerato non solamente il peso assoluto del liquore, che è sempre proporzionale alla massa, ma di più anche il peso, che serba relazione al centro di gravità di qualunque corpo, e chiamasi respettivo; perchè prende norma dalla diversità delle figure.

SCHEDIASMA XXXVI.

Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI. del Libro II. dei Principi Matematici della Filosofia naturale del Cavaliere Isacco Newton.

L Chiarissimo Signor Michelotti nella sua dottissima Opera ultimamente data alle stampe fattosi ad impugnare certa Dimostrazione del Signor Keil sondata sopra il Corollario secondo Proposizion 364.

Le date delle lettere manifestano il tempo della Controversia del C. J., prima col Sig. Pierantonio Michelotti, e poi col Sig. Daniele Bernoulli. Le tre ultime lettere, due dell' Autore, ed una del Sig. Bernoulli si lezgono stampate in Venezia l'anno 1724. presso Domenico Lovisa nelle esercitazioni matematiche dello stesso Sig. Bernoulli. Questo insigne Letterato esaminata posteriormente a sondo la materia, e conosciuta la verità del Corollario Nevutoniano, con sincerità filosofica così si espresse nella sua Idrodinamica, che uscì l'anno 1737. sezione 13, \$.9.

5. Licet hic paucis attingere verbis propositionem aliquam ex Princ. math. 3) Phil. nat. edit.2. Nevvtoni. Auctor hic postquam sententiam suame , de velocitate aquarum effluentium in prima citati Operis editione ex-, hibitam mutasset, easque si verticaliter sursum ejiciantur ad integram " superficiei aqua altitudinem ascendere agnovisset in editione secunda, , talia subject verba in libro secundo, propos. 36. coroll. 2. Vis, qua , totus aqua exilientis motus generari potest, aqualis est ponderi cy-, lindrica columnella aqua, cujus basis & foramen EF (vid. f.g. 138.), , & cujus altitudo est 2GI, vel 2GK. Ista sententia a me olim, & ab on aliis impugnata, ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc 9, aquarum motarum theoriam meditatus sum , lis ita dirimenda mihi , videtur, ut quum aque ad motum uniformem pervenerint, que quiby dem bypothesis est Nevvtoni, tunc recte altitudine 2GI vis illa desi-, niatur, sed ab initio fluxus, ubi velocitas adbuc nulla est, vis sim-» plici altitudini GI respondeat, moxque crescente velocitate simul vis on aquam ad effluxum animans crescat, & tandem ad cam magnitu-,, dinem exurgat, quam Nevotonus assignavit. Hec nunc sunt uniqui-, que obvia, quia vis motum aque generans, de qua Nevotonus lo-, quitur, non potest non esse aqualis vi repellenti, quam vidimus esse , aqualem a . v. Recte etiam Ill. Riccatus, cum quo mibi de hoc ar-3, gumento res erat, interrogatus; unde vis illa duplæ aquarum alti-, tudini conveniens oriri possit, quum obturato orificio vi simplicis ,, altitudinis urgere manifeste appareat, respondit, distinguendum esse , flatum quietis a flatu motus.

libro 2º. de' Principi, dell' incomparabile Isacco Nevvton, ha condannata come salsa la Dottrina del predetto Corollario. Avendomi sopra di ciò richiesta la mia opinione tal quale si possa essere, parmi, dopo aver satta una più posata rissessione sopra il passo controverso, che il detto Nevvtoniano sia conforme alla verità, massime nelle circostanze, in cui è stato proferito; mentre per altro la Proposizione citata è soggetta a varie importanti dissicoltà. Ho stimato bene comunicare con geometrica libertà il mio sentimento al Sig. Michelotti medesimo, acciò o mi cavi d'errore, o pure sino che la cosa è intera, possa prevenire le opposizioni, che dal suo Antagonista gli potrebbono esser fatte.

Presa per mano la figura del Sig. Nevvton (Fig. 138.), e tralasciate per ora le considerazioni sopra la Proposizione principale, che nell'ultime edizioni si trova corretta, e risormata, nel Corollario primo si stabilisce, che l'acqua uscirà dal vaso con tanta velocità, quanta ne acquisterebbe scorrendo con moto accelerato principiato dalla quiete lo spazio KC, che determina l'altezza, in cui l'acqua viene costantemente mantenuta nel vaso. Sin quì la deduzione è certissima, ed è già stata dimostrata da Sigg. Bernoulli, ed Ermanno, almeno per quello appartiene a sulli, che ponno assumers come composti di particelle siscamente minime.

Il secondo Corollario, su cui versa la contesa, è concepito ne seguenti termini. Et vis, qua totus aqua exilientis motus generari potest, aqualis est ponderi cylindrica columna aqua, cujus basis est soramen EF, & altitudo 2GI, vel 2CK.

Quì si parla dell'acqua, ch' esce dal vaso precisamente in tanto tempo, quanto ne consumerebbe a cadere con moto accelerato per lo spazio KC, e la ragione, che se ne adduce, chiaramente lo manisesta. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam aquat, pondere suo ab altitudine GI cadendo velocitatem suam, qua exilit acquirere potest, cioè a dire, che nel tempo medesimo, in cui l'acqua discendendo dal punto K di quiete in sorza della sua natural gravità scorrerebbe lo spazio KC, uscirà dal vaso tanta acqua, che riempirebbe un cilindro, la di cui base sosse il circolo EF del soro, e l'altezza sosse uguale alla doppia GI, o CK. Si spiega più apertamente l'Autore nel Corollario terzo con quelle parole, & aqua per soramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem IG, aqualis erit cylindro, enjus basis est circulus EF, & altitudo est 21G.

Ora su questa veristima asserzione io non ci so trovare difficoltà; imperocchè esprima per esempio la quantità v quella velocità, che una goccia d'acqua cadendo dal punto I, e scorrendo lo spazio IG s'acquisterebbe nell'ultimo punto G; egli è manisesto per le cose dimostrate dal Galilco, che se la predetta goccia in tutto il tempo impiegato nella discesa IG si sosse mossa con la velocità costante v, avrebbe camminato per uno spazio doppio di GI, ed in conseguenza per la doppia GI possiamo determinare la velocità v; atteso che ne'moti equabili, che si sanno in tempo determinato, le velocità si missurano dagli

spazi trascorsi. Ma l'acqua esce senza dubbio dal vaso con la velocità v, ovvero 2GI, e la quantità dell'acqua, ch' esce nel tempo di sopra espresso, è in ragion composta dell'ampiezza del soro EF, e della velocità, o sia della doppia GI; dunque la quantità scaricata dell'acqua sarà eguale ad un cilindro, la di cui base si è il soro EF, e l'altezza eguale all'altezza GI presa due volte: il che dovea dimostrarsi.

Ciò dimostrato, s'aprirà la strada all'intelligenza della frase Nevvtoniana nello stesso Corollario secondo Et vis, qua totus aqua exilientis motus generari potest, ec. Sotto il nome di forza, che genera un qualche moto, secondo il costume del nostro Autore, altro non s'intende, se non la forza sollecitante. Ora posto il tempo costante, la sorza è sempre come la quantità del moto, vale a dire, come la mana plicata con la velocità, e stabilita anche la velocità costante, la forza farà sempre come la massa. Si ricavano questi Teoremi dalla notissima formula ft=mu, in cui f è una forza sollecitante, che si suppone agire uniformemente accelerando il mobile, t significa il tempo, m la massa, ed v la velocità. Nel caso del Sig. Nevvton il tempo si determina eguale a quello, che s'impiegherebbe nella discesa dall'altezza IG, e può esprimersi per la doppia IG, che dinota pure la velocità, con cui l'acqua esce dal foro, conservato il fluido nel vaso alla medesima altezza IG; dunque la forza generante il moto si trova uguale alla massa dell'acqua, ch'esce dal soro nel tempo sopra determinato: ma questa massa per le cose dette è uguale ad un cilindro acqueo di base EF, e d'altezza 2GI; dunque la forza sollecitante sarà uguale al predetto cilindro: il che ec.

S'io volessi poi determinare la quantità dello scarico, avuto rissesso dalla contrazione della vena, ed a qualche altra circostanza, e massime alla diversa ampiezza de fori, ed alla varia densità, con cui li sluidi escono da vasi; sarebbe d'uopo esaminare da capo a fondo la citata Proposizione Nevvtoniana.

Risposta del Sig. Pierantonio Michelotti all' Autore.

Venezia 1. Novembre 17210

To aveva stabilito di aspettare la risposta o del Sig. Cav. Nevvtono da me molto stimato, o del celebre Sig. Giovanni Keill di Londra prima di rispondere a V.S. Illustriss. sopra le cose, che mi sece avanzare nella carta consegnatami benignamente da sua parte dall' Illustriss. Sig. Rizzetti mio riverito Padrone; e la cagione di questa mia meditata dilazione nasceva dalla curiosità, ch'io aveva di vedere, se le cose, che avrebbero potuto rispondere li due nominati Geometri, sossero state le medesime, che quelle, le quali ingegnosamente seppe ritrovare V.S. Illustriss. Ma prevedendo ora, che il tempo diverrebbe forse lunghissimo, a cagione che in Inghisterra non sono ancora arri-

vati gli esemplari della mia Opera colà spediti, risolvo di non tardare d'avanzo a comunicare a Lei tutte quelle ragioni, che mi anno mosfo a credere falso il consaputo corollario secondo della Proposizione 36. del libro secondo de Principi Nevvtoniani, ed esporle in oltre il mio sentimento intorno al ragionamento stimatissimo di V.S. Illustriss. col quale si è ssorzata di mostrare vero quello stesso corollario dopo aver fatta (come dice) più posata riflessione sopra il punto controverso. Certamente la forza generante il moto dell'acqua uscente per il foro EF altra non può essere che quella, la quale proviene dalla pressione dell'acqua imminente allo neno toro EF, cioè dal peso di questa me-altezza GI, ed il cilindro, la di cui base è il circolo CD nella figura dell'Ingegnosifs. Sig. Nevvtono, e l'altezza CK uguale a GI. Di questa cosa parmi, che niuno de' Geometri possa dubitare. Immaginiamoci primieramente, che il buco EF sia chiuso, sicchè tutto il sondo del vaso sia una base continua: dimando se il fondo CD sia premuto da altra cofa, che dal peso della colonna d'acqua KCDL: certo no. Ma le leggi idrostatiche c'insegnano, che ciascuna parte EF del fondo CD partecipa di codesta pressione totale a misura della sua ampiezza, e la preisione totale, che soffre la base CD, consiste nello ssorzo, che sa per scendere il peso di tutta la colonna KCDL, e questo peso sta al peso della colonnetta, che ha per base il cerchiello EF, per altezza la GI, come l'ampiezza del cerchio CD all'ampiezza dello stesso cerchiello EF; dunque la parte EF del fondo CD è premuta da una forza eguale ad un cilindro fluido, la di cui base è il cerchiello EF, l'altezza la semplice, e non la doppia GI. Se poi s: apre il foro EF, l'acqua uscirà subito certifilmamente: ma qual'è la cagione dell'uscita? Senza dubbio la preilione, della quale ora parlava. Imperochè fe l'acqua non fosse premuta, non uscirebbe per il pertugio più volte menzionato. Ora quella pressione (come ho dimostrato) è uguale al semplice peso del cilindro acqueo, la cui base è il cerchiello EF, e l'altezza la linea GI. Per certo io non vedo, che altra forza possa assegnare l'Illustre Signor Nevytono diversa da quella, che deesi al peso di tutta la colonna imminente a piombo al buco EF; particolarmente perchè a carte 330. della sua dottissima Opera di prima edizione così scrisse. Unde consequens est, quod motus aqua totius effluentis is erit, quem pondus aque foramini perpendiculariter incumbentis generare potest. Forse la dottrina del corollario in controversia, che fin ora ho provata falsa, cavò il Sig. Nevvtono da una falsissima conclusione a Lei già nota. Perciocchè dopo aver Egli falsamente contro la sperienza conchiuso, che l'acqua uscente per il buco EF voltandosi in su potrebbe ascendere alla metà dell'altezza A, soggiunse le cose seguenti (a). Et propterea quantitas aqua effluentis quo tempore corpus cadendo describere potest altitudinem - A, aqualis erit columna aqua totius AF foramini perpendiculariter imminentis. Dal che ne siegue, che nel tempo, che il grave scenderebbe per tutta l'altezza A, ovvero IG nella figura della seconda edizione, uscirebbe dal vaso per il pertugio EF tanta quantità d'acqua, che riempirebbe un cilindro, la di cui bale fosse il cerchiello EF del foro, l'altezza uguale alla doppia GI, o CK. Comunque si sia la cofa, il corollario, del quale parliamo, concepito come io l'intendo, al certo non può effere vero. Che se l'incomparabile Sig. Nevvtono volesse intendere per forza generante tutto il moto dell'acqua uscente, non quella che proviene, o ch'è nel peso dell'acqua soprastante al pertugio EF, ma quella che produce l'accelerazione nelle goccie dell', acqua medesima, e che chiamasi acceleratrice, come la forza della gravità (il che pare interpretri V.S. Illustriss.) allora malamente comparirebbe una tal forza, per la quale ciascuna goccia acquea viene accelerata ad una certa velocità, con qualche peso. Poichè sra di loro non sono più comparabili che la linea, e la superficie. Dovrebbe più tosto una forza di codesta sorta essere paragonata con un'altra forza acceleratrice, che con il peso, il quale nasce dalla forza esercitata nella massa. Per esempio dovrebbe compararsi con la forza della gravità ordinaria, con la quale essa ha tal proporzione, che con la linea finita la linea infinita; come potrei dimostrare facilissimamente col mezzo di quelle cose, che il Sig. Gio Bernoulli facilmente Prencipe (non meno che il Sig. Nevviono) de' Geometri dell'età nostra produsse negli Atti degli Eruditi pubblicati a Lipsia, dove addusse la ragione, per la quale si deve considerare l'infima goccia d'acqua vicina al pertugio satto nel fondo del vaso come animata da una forza acceleratrice, fra la quale, e la forza della gravità naturale vi fia quella proporzione, che tengono tra loro l'altezza di tutta l'acqua, e l'altezza della goccia acquosa, che sta per uscire dal vaso, e che dallo stesso Sig. Bernoulli su confiderata come una colonnetta d'altezza infinitamente picciola, come altra volta risposi a V.S. Illustris., quando voleva impugnare la dimostrazione Bernoulliana. Ma perchè la di Lei mente infigne conosca con maggiore evidenza quanto fia assurdo un fimile paragone; aggiungo ciò che siegue, e nel medesimo tempo rispondo al ragionamento sottilissimo, che si degnò farmi presentare dall'Illustriss. Sig. Rizzetti, che riverisco con ogni estimazione, e ringrazio per l'onore, che mi ha fatto, di provedersi di un esemplare della mia Opera. Ella rappresenta, ed in vero benissimo, la velocità dell'acqua uscente dal vaso per la doppia GI, e dimostra pure nobilmente essere la quantità dell'acqua uscita nel tempo, che la goccia d'acqua cominciando il moto dalla quiete nel punto I, percorre lo spazio GI, uguale ad un cilindro, la dicui base è il cerchiello EF del buco, l'altezza uguale alla doppia GI, o CK. Poi soggiugne: per sorza, che genera un qualche moto, altro non intende il Sig. Nevvtono, che la forza affrettante; la quale posti sì il tempo, che la velocità costanti, è come la massa: indi esprimendo nel caso del Sig. Nevvtono tanto il tempo, quanto la velocità per la doppia GI, e rappresentando la massa dell'acqua per il cilindro di base EF, e di altezza 2GI, conchiude essere la sorza, che si ricerca per generare tutto il moto dell'acqua uscente, uguale a quel medesimo cilindro, che ha per base il cerchiello EF, per altezza la doppia GI. Ma io con questo suo medesimo ragionamento potrei dimostrare, che la forza ricercata per generare tutto il moto dell' acqua, ch' esce del vaso, è uguale non solamente al doppio peso della colonna acquea, ma anche al quadruplo, al sestuplo, all'ottuplo ec. di quella medesima co-Ionna d'acqua: il che Ella ben vede quanto sia assurdo; perche una cosa, che in se stessa è invariabile, e determinata, sarebbe variabile, ed incostante. Potrei per esempio dimostrare, che la sorza, della quale più volte ho fatta menzione, è uguale ad una colonna d'acqua, che si fa moltiplicando il cerchiello del foro EF per la quadrupla di GI. Concepifca V. S. Illustrifs. nella figura del Sig. Nevvtono la GI prolungata in su fino al punto Z, di modo che CZ sia = 4GI, e s'immagini, che il Sig. Nevvtono abbia posto il tempo uguale a quello, che impiegherebbe la goccia d'acqua nel cascare dal punto Z di quiete per l'altezza GZ. Ciò premesso, così ragiono alla di Lei maniera. Per forza producente un qualche moto altro non intende il Sig. Nevvtono, che la forza sollecitante al moto, la quale posto il tempo costante è come la massa moltiplicata per la velocità. Nel caso del Sig-Nevytono ora supposto il tempo, che dura l'uscita dell'acqua, si pone uguale, o si rappresenta per 4GI, la velocità, con la quale esce l'aequa per il foro EF, si pone anche sempre costante, cioè come 2GI; dunque poiche sì il tempo, che la velocità si pongono immutabili, la forza generante tutto il moto dell'acqua farà uguale alla massa d'acqua, ch'esce in quel medesimo tempo, la quale massa, per essere il mio tempo doppio di quello pone V. S. Illustriss., sarà anche doppia della massa d'acqua, che uscirebbe nel tempo da Lei rappresentato per 2GI; e per conseguenza sarà la forza generante tutto il moto dell'acqua uscente uguale al quadruplo peso d'un cilindro acqueo, che ha per base il cerchiello EF del buco, per altezza la GI. Il che io doveva provare. In simil modo, assunta la GZ=n. 2GI (n rappresenta qualtivoglia numero) dimostrerò, che la forza ora menzionata è uguale a un cilindro acqueo, che ha per base il cerchiello EF, per altezza la linea 2GI moltiplicata per n, cioè uguale a qualsivoglia peso. Io non dubito punto, ch' Ella esaminate le cose fin qui da me esposte con il suo acutissimo ingegno da me tanto stimato, sia per riconoscere falfa la dottrina dell'infigne Geometra Sig. Nevvtono contenuta nel fecondo Corollario della propofizione 36. del secondo libro degli suoi Principi Matematici di Filosofia naturale da me per altro consideratillimi.

Del resto la prego conservarmi la di Lei consideratissima grazia, ed assicurarsi, ch'io ho una somma estimazione per il suo raro talento.

Da qualche tempo io sono debitore a V. S. Illustris. della rispossita ad una sua gentilissima lettera, ed avrei prima d'ora adempito a miei doveri, se varie distrazioni non m'avessero impedito di prendere nuovamente per mano la materia controversa, nella quale io bramerei, che la ragione stesse più dal suo canto, che dal mio; mentre ha Ella assunto con la stampa un pubblico ingegno, ed io ho esposto la mia opinione in una privata scrittura. Potrei dunque senza rossore consessare l'inganno, s'avessi saputo scoprirlo: e per parlare con tutta la sincerità, quantunque sia stato da Lei detto tutto quello può dirsi in savore della sua sentenza; non ostante ciò parmi, che non resti in parte alcuna snervata la forza della mia prima dimostrazione. Abbia la bonta di sossirio un altro poco di tedio, per vedere, se mi riesce di collocare in tutto il suo lume la verità, che io con buona sede, e senza

preoccupazione prendo a difendere.

Avanti d'entrare nel fondo della controversia stimo bene il premettere primieramente, che ricevo per bella, e per buona la dimostrazione dell'incomparabile Sig. Gio. Bernoulli intorno la velocità, con cui escono i fluidi da vasi per fori di determinata grandezza; perchè le mie difficoltà cadono sul modo di dimostrare, non sulla conclusione, che è verissima, e già mi sono proposto di consultare questo illustre Geometra sopra una circostanza, che non mi lascia penetrarne interiormente il midollo. Secondariamente io non assumo la disesa di ciò, che possa aver detto il Sig. Nevvton nella prima edizione de suoi Principi alla pag. 331. Mi è noto il suo errore, e nello stesso tempo mi è nota la sua lodevole correzione: anzi non mi prendo nè meno la briga di fare l'apologia di tutto ciò, che produce nella Propofizione 36. dell'ultima edizione. Quella sua Cateratta è soggetta a varie importantissime opposizioni, molte delle quali osservo da Lei ottimamente spiegate nella sua bell'Opera, ed alcune altre mi sono venute in mente, che m'ingegnerò di spiegare con miglior occasione. La disputa versa semplicemente sul secondo Corollario, che da Lei si giudica salso, e da me conforme alla verità.

Vis, qua totus aqua exilientis motus generari potest, aqualis est ponderi cylindrica columna aqua, cujus basis foramen EF, & altitudo 2GI, cioè a dire, quo tempore aqua pondere suo ab altitudine Gicadendo, velocitatem suam, qua exilit, acquirere potest. Questi sono i propri termini Nevvtoniani nel Corollario in quistione; veggiamo, se la dimostrazione si possa formare con i principi, anzi con le stesse parole tolte ad imprestito da V. S. Illustris, e adattate solamente alla mia figura.

vis pellens est, ut effectus ipsius, hoc est ut quantitas motus, qui ab ipsa dato tempore generatur: est autem quantitas motus dato tempore generata in ratione composita sluidi dato tempore per orificium EF essentis, &

velocitatis, eum qua fluidum ipsum ex dicto orificio erumpit. Ella gia riconosce per sua si fatta espressione, essendo levata di peso dal suo libro pag.78. Aggiungasi la seconda presa dalla pag.177. atqui eodem tempore grave percurrere potest motu uniformi spatium 2GI ea cum velocitate, quam ex casu per altitudinem IG acquirit. Dunque ella ne cavi le conseguenze, che certamente non faranno diverse da quelle, ch'io anderò deducendo; dunque la forza, che caccia l'acqua fuori del vaso KD per il foro EF in tempo dato, e come sopra determinato, non potrà esprimersi, suorchè per la quantità del moto in detto tempo generata. Vis pellens est ut effectus ipsius, hoc est, ut quantitas motus, qui ab ipsa dato tempore generatur, cioè per la mole dell'acqua, ch' esce nel tempo medesimo moltiplicata nella sua velocità: est autem quantitas motus dato tempore generata in ratione composita fluidi dato tempore per orificium EF effluentis, & velocitatis, cum quam fluidum ipsum ex dicto orificio erumpit: o pure nel nostro caso per la sola mole dell'acqua, che nel tempo assegnato si scarica; atteso che la velocità dello ssogo è sempre costante: ma la quantità dell'acqua, ch'esce nell'accennato tempo, è tanta nè più nè meno, ch' empirebbe il doppio cilindro, la cui base è il soro EF, e l'altezza IG, atqui eodem tempore grave percurrere potest motu uniformi spatium 2GI, ca cum velocitate, quam ex casu per altitudinem IG acquirit; dunque la forza predetta altrimenti non può esprimersi, che per la quantità d'acqua contenuta nel doppio cilindro soprannominato, o per il suo peso; il che dovea dimostrarsi.

Esaminata per tutti i versi l'addotta dimostrazione, non ci ho saputo vedere nè pure un'ombra di paralogismo, e ciò spiccherà maggiormente dalla risposta, ch'io sono per dare alle sue obbiezioni; supposto però, che seguitando le sue vestigia si prescinda dalle resistenze,
dalla contrazione della vena indicata dal Sig. Nevvton, e confermata
dal Sig. Marchese Poleni con replicate sperienze, ed in oltre da qualche altra circostanza sinora da Matematici non avvertita, e che si con-

sidererà in altro tempo.

La prima è di maggior peso; mentre per quanto vedo non sole dalla sua lettera, ma anche da ciò, che dice alla pag.112. del suo libro, è quella, su cui principalmente si sonda, ed è come la radice dell' equivocazione. Immaginiamoci, sono sue parole, che il buco EF sia chiuso; sicchè tutto il sondo del vaso sia una base continua: dimando, se il sondo CD sia premuto da altra cosa, che dal peso della colonna KCDL: certo no. Ma le lezgi sdrossatiche c'insegnano, che ciascheduna parte EF del sondo partecipa di cotessa pressione totale a musura della sua ampiezza, e la pressione totale, che sosse la base CD, consiste nello ssorzo, che sa per scendere il peso di tutta la colonna KCDL, e questo peso sta al peso della colonnetta, che sia per base il cerchiello EF, e per altezza la GI, come l'ampiezza del cerchio CD all'ampiezza dello siesso cerchiello EF; dunque la parte EF del sondo CB è premuta da una forza eguale ad un cilindro sluido, la di cui base è il cerchiello EF, e l'altezza la semplice, e non la doppia GI.

Sin qui ottimamente : ma quand' Ella fa un salto dallo stato di quiete a quello di moto, e foggiunge. Se poi s'apre il foro, l'acqua uscirà subito certissimamente: ma quale è la cagione dell'uscita? senza dubbio la pressione, della quale ora parlava; imperocche se l'acqua non fosse premuta, non uscirebbe ec. Senz'alcun fallo, se io non prendo inganno. ella incorre in un manifesto paralogismo: e la ragione si è; perchè se nel tempo determinato come fopra, ch'io per brevità chiamerò t, cioè in quel tempo, che spenderebbe un grave cadendo dall'altezza IG, non uscisse altra acqua, che quella contenuta nel cilindro, la di cui base è il cerchio EF, e l'altezza GI, avrebbe V.S. Illustriss. tutte le ragioni del mondo. Il punto sta, che in detto tempo esce una dopia quantità d'acqua, e su questo particolare siamo d'accordo; dunque se per la sua dottrina la pressione del fluido contenuto nel cilindro ultimamente nominato è quella, che mette in moto la mole d'acqua, che riempie lo stesso cilindro; per mettere in moto due volte tanta, ci vorrà una doppia pressione. Ed in fatti la cosa sta pur così; giacche per sare, che per il foro EF si scarichi nel tempo t una doppia quantità d'acqua di quella, che occupava in istato di quiete lo spazio EF. GI, è necessario, che l'acqua ci confluisca dalle parti laterali, ed entrando nel filone accresca la quantità dello scarico sino al doppio. Ora quest'acqua è spinta da qualche forza, cioè dalla pressione laterale della restante acqua contenuta nel vaso KD sotto la costante altezza GI, e così chi vorrà tener conto di questa forza laterale, che sa un effetto pari a quello cagionato dalla perpendicolare, bisognerà dire, che unite insieme non altrimenti possano esprimersi, che per l'essetto da esse prodotto, cioè per la quantità dell'acqua, che cacciano fuori del vaso nel dato tempo t. o sia per il peso del fluido EF. GI moltiplicato nel binario.

Dimando, nel tempo t quant'acqua esce per il soro EF? Ella mi risponderà certamente il doppio di quella, che occupava lo spazio EF. GI. Nel tempo stesso quant'acqua si dee insondere per le parti superiori, acciò il stusso si conservi in istato manente, e non s'alzi, o si deprima il livello KL? replicherà Ella altrettanta, ed io ripiglierò tutta l'acqua, che successivamente nell'accennato tempo s'aggiunge, sorse non preme, sorse non è quella, che serve a mantenere il corso perenne? certo che sì. La forza generante questo moto non è ella proporzionale alla quantità d'acqua, che nel tempo stesso per le parti superiori viene equabilmente somministrata? chi ne dubita? dunque conchiuderò: la predetta sorza necessariamente s'esprime per la copia d'acqua, ch'esce al di sotto, per quella, che s'insonde al di sopra, vale a dire, per una quantità doppia di quella, che si contiene nel cilindro, che ha per base il

cerchietto EF, e per alcezza la linea GI.

Io non mi fo persuadere, che V.S. Illustriss sia per negarmi, che l'acqua laterale, cioè quella, che non sovrasta a piombo al soro EF, resti obbligata dalla pressione obbliqua ad entrare nella vena, e ad aumentare la quantità dello ssogo; mentre questa è la sua stessa dottrina registrata alla pag.127. Cum nulla sit soliditas in parietibus AME, BNF Opera Riccati T. III.

(applico le sue parole alla mia figura) non video quid citra miraculum obstet, quin aqua in partibus S sese commisceat cum aqua delabente per catarastam, dirò io, per cilindrum EF. GI. Alla pag. 128. osservo una bella sperienza da Lei recata in prova del detto. Tingantur nimirum partes quadam aqua circa S immisso illuc aliquo colore, mox observabitur tincturam brevi communicatum iri cum aqua in spatio AMEFNB contenta.

Per procedere più rigorosamente, prendo un pezzo di ghiaccio eguale precisamente in peso a tanta mole d'acqua, quanta potrebbe capire due volte nello spazio cilindrico EF. GI, e chiamo la sua massa m. Faccio, che questo ghiaccio cadendo dal punto di quiete I scorra con moto accelerato la linea IG, giunto che sia al sito G abbia acquistata la velocità u, e vi abbia impiegato il tempo t; la sua quantità di moto sarà = mu, ch'è il prodotto della sua massa, e della sua velocità: ma nel medesimo tempo t si ssoga per il soro EF una quantità d'acqua eguale all'accennato solido di ghiaccio, e tutta esce con la velocità u; dunque per l'una, e per l'altra parte si saranno in tempo egual generate due quantità di moto eguali con questa sola disserenza, che nel primo caso sta costante la massa, e variabile la velocità; nel secondo è variabile la massa, e la velocità costante.

Una fola istanza potrebb' Ella farmi, che sosse di qualche considerazione, e sarchbe, per qual motivo il Sig. Nevvton abbia sissato per costante il tempo t, cioè quello, ch'impiegherebbe un grave a discendere per lo spazio IG, piuttosto che qualsivoglia altro tempo maggiore, o minore, come per esempio nt, nel qual caso verrebbe ad alterarsi l'espressione della forza, che spinge l'acqua suori del vaso. Per soddisfarla anche su questo punto, ristetto, che siccome la gravità, che accelera il ghiscoio, di cui abbiamo fatta menzione, cadente nel vuoto, secondo la Teorica del Galileo opera sempre uniformemente, ed in tempi eguali va generando nel predetto mobile gradi di velocità eguali, stando costante la massa; così la sorza espellente l'acqua fuori del vaso aggisce anch'essa uniformemente, ed in tempi eguali mette in moto quantità d'acqua eguali, stando costante l'altezza dell'acqua, e conseguentemente la velocità.

Nel primo caso avremo l'equazione disferenziale fdt = mdu, e nel secondo FdT = UdM, le quali sommate ci danno ft = mu, FT = UM: ma nella prima la forza sollecitante f si misura dalla inassa sollecitata m, onde f = m; dunque t = u. Nella seconda poi la forza F, che per quello s'è detto, opera in ogni istante uniformemente, non può mai farsi eguale alla massa variabile M, suori che nell'unico caso, che sia T = U, vale a dire che il tempo, e la velocità sieno eguali. Ora la velocità U è costante, uscendo l'acqua sostentata nel vaso all'altezza costante IG per il foro EF con un grado determinato, ed inalterabile di velocità; dunque resta sissa anche il tempo T: ma per acquistare la velocità U dovrebbe il ghiaccio scendere per lo spazio IG, ed impiegare nella caduta il tempo T; dunque nella formula ft = mu, posta u = U, sarà t = T, cioè a dire T = U, ed in conseguenza nella seconda formula FT = UM, F = M.

Si vede per tanto la ragione, che ci obbliga a prendere come constante il folo tempo t fra gl' infiniti tempi possibili: ed in satti tutte le circostanze cospirano a rendere necessaria l'elezione; imperocchè in tal caso la velocità, con cui l'acqua si ssoga, è uguale al tempo, che ci avrebbe speso il ghiaccio naturalmente cadente per acquistarla, e siccome avrebbe esso nel detto tempo scorso lo spazio IG; così l'acqua dee sostenarsi nel vaso alla medesima altezza, è sinalmente in questa unica supposizione la forza è uguale alla quantità del moto, e per essere costante la velocità, la forza stessa è uguale alla quantità dell'acqua, che nell'assegnato tempo si scarica.

Rispondendo in tanto ad un'altra obbiezione, facciasi com'Ella comanda, e si cerchi la forza, che opera in ogni momento di tempo per espeller l'acqua dal vaso. Stante l'equazione differenziale FdT = UdM, avremo il valore della forza F = UdM. Pongasi dT = nT, e per n si

esprima una quantità infinitamente piccola; e perchè la quantità del fluido scaricato è sempre proporzionale al tempo dello scarico, sarà T: M:: dT = nT: nM = dM. Sostituiti questi valori, avrassi la forza F = UnM = UM: ma per le cose dimostrate U = T: dunque F = M: nT

il che ec.

La forza dunque sollecitante in qualsivoglia istante l'uscita dell'acqua, s'esprime ottimamente per la massa dell'acqua stessa, che capisce nel doppio cilindro EF. GI. Passiamo ora a considerare ciò, che nasce dalla sua ipotesi. Secondo Lei dobbiamo rappresentare questa ferza F per l'acqua contenuta nel cilindro EF. GI, cioè per la metà di quella, che si ssoga nell'assegnato tempo T; dunque F M, ed in con-

feguenza MdT = UdM, o pure MnT = UnM: ma U = T; dunque

 $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}$, il che è assurdo.

Ripiglifi l'espressione FnT = UnM, e l'infinitesima n vada crescendo sino a diventare una grandezza finita uguale all'unità: in tale ipotesi, ch'è quella considerata dal Sig. Nevvton, avremo FT = UM: ma T = U (stante che il tempo speso da un grave nello scorrere lospazio IG, come più volte s'è detto, è uguale alla velocità acquistata nel sine di esso tempo); dunque F = M, cioè la forza eguale alla mole dell'acqua, che in detto tempo si scarica.

Che se poi alterato ad arbitrio il tempo dello ssogo, si considera la forza, o per parlare più giusto la somma delle sorze espellenti l'aequa suori del vaso; s'esprimeranno queste per la massa dell'acqua M

Iii 2

mol-

moltiplicata nel tempo nT, o ch'è lo stesso, per l'acqua, ch'esce nel tempo assegnato, cioè a dire per nM, o per la quantità del moto nMU: nè io so comprendere, che assurdo se ne possa dedurre, e svanisce il preteso inconveniente, per cui Ella pensava, che la predetta forza potesse rappresentarsi per una quantità d'acqua non solo doppia, ma multipla in qualsivoglia modo di quella, che si contiene nel cilindro EF. GI. Che meraviglia è, che a generare una maggiore, o minore quantità di moto ci voglia più, o meno forza, e che la stessa sortante F espressa ottimamente, come s'è dimostrato, per la massa M produca più, o meno quantità di moto, quando sia obbligata ad agire per un tempo più lungo, o più breve?

Ma questa difficoltà preme ugualmente il Sig. Nevvton, e V. S. Illustris. La forza che spinge l'acqua suori del vaso nel tempo T tante volte ricordato, e che dal Sig. Nevvton resta espressa col peso del doppio cilindro acqueo EF. GI, da Lei viene esposta col detto semplice cilindro Si legge alla pag. 112. Evidens est, vim illam, per quam suidum ex oriscio alicujus canalis essuens certam velocitatem acquirit, eam nempe, quam grave acquireret ex altitudine IG dilapsum, esse aqualem ponderi cylindri ejusdem sluidi, cujus basis aqualis est oriscio, per quod sluidum egreditur, altitudo vero aqualis ipsi simpla IG, non autem dupla, quemadmodum existimat Claris. Keillius nimis sidenter eminentem Geome-

tram Is. Nevotonum Jequutus.

Ora dirò io, aumentando, o sminuendo il tempo T, starà salda questa sorza da Lei esposta per il cilindro acqueo EF. GI? certamente no; altrimenti ne seguirebbe, che prendendo io due tempi uno infinitamente breve, e l'altro infinitamente lungo, onde nel primo uscisse una minima, e nel secondo una massima copia di sluido, la forza, o la somma delle sorze, che genera una quantità di moto infinita, non farebbe maggiore di quella, che ne genera una infinitesima: il che è veramente assurdo, nè credo, che possa mai essere da Lei adottato.

Le parole citate servono a togliere di mezzo un'altra sua obbiezione. Ella accusa il Sig. Nevvton, che paragoni una forza accelerante, o per meglio esprimermi, e per levar di mezzo ogni ambiguità, un aggregato di forze acceleranti, prementi, espellenti, o che so io, con un qualche pefo; poiche tra di loro non sono più comparabili, che la linea con la superficie. Rispondo in due parole, che in tali espressioni non si guarda un vero paragone d'uguaglianza, ma un paragone di rapporto, o di relazione, in quanto l'una, e l'altra grandezza, sebbene di diverso genere, fi può, e si debbe esprimere per lo stesso segno, cioè a dire, o per la stessa spezie analitica, o per la stessa quantità geometrica. E' forse nuova ne' Geometri questa licenza? ma come nuova, se nelle parole addotte di sopra Ella stessa se ne vale? La stessa forza dal Nevvton vien paragonata al peso del doppio cilindro acqueo EF. GI, e da Lei al peso del simplo. Sin quì la cosa cammina del pari. Tutta la difficoltà consiste in vedere qual paragone sia più giusto, e sopra di ciò parmi aver detto quanto basta in disesa della sentenza Nevytoniana.

Resta, che V.S. Illustrissima prenda in buona parte la libertà, ch' io mi arrogo per semplice amore della verità, e rassegnandole i miel rispetti inalterabilmente mi protesto.

Ad Illustrissimum, & doctissimum Com. Riccatum DANIEL BERNOULLIUS.

14. Febbruarij 1724.

Semper mihi paradoxum fuit coroll. 2. prop. 36. l. 2. princip. phil. Cel. Nevvt. edit. post. atque visum jure ab Cl. Michelotto impugnatum. Avide proin perlegi litteras Ill. C. Riccati ad Cl. Michelottum datas, & mecum ante 15. circiter dies communicatas, in quibus se demonstrationem prædicti Coroll. dedisse mihi dixerat ; sed , quod insignis illius Mathematici pace dixerim, multa in demonstratione ipsius excipienda inter legendum occurrerunt. Certiorem autem velim Virum laudatum non contradicendi pruritu, sed solo veritatis amore agitatum hæc a me scribi. Reperiet me Vir acutissimus (cujus sublimem in omni scientiarum genere cum primis vero in studiis Mathematicis doctrinam semper & agnovi, & admiratus sim) procliviorem ad sententiam suam complectendam, quam ad meam mordaciter defendendam. Verba Corollarii ita fonant: Vis, qua totus aqua exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aqueæ, cujus basis est foramen EF (Fig. 138.), & altitudo 2GI, vel 2CK. Manifestum est, quod foramine EF digito clauso, digitus tantam pressionem sit percepturus, quanta est columnæ aqueæ, cuius basis foramen EF, & altitudo simplex GI: digito autem remoto, esse guttulam foramini adstantem, que hanc pressionem recipiat, mihi quidem clarum est, nullum discrimen essentiale inter status quietis, & motus videnti; id quod manifestius fiet, si fluidum non vi gravitatis suæ, qua illud carere supponam, sed elasticitate sollicitatum ex vase superius clauso per foramen EF exilire intelligatur. Hæc ratio in contrarium multo validior mihi videtur, quam illa Nevvtoni, qua corollarium suum stabilire contendit, dicens: nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam aquat pondere suo ab a titudine GI cadendo velocitatem, qua exilit, acquirere potest; huic rationi Cel. Nevvtonus amplum ratiocinium in 3. Coroll. subnectit, quod non satis intelligo, cui tamen illud Nobilis. Riccati conforme esse video. Hujus demonstratio duobus principiis innititur 1°. quod vis, qua aqua ad exiliendum urgetur, sit aqualis massa, qua effluxit uniformi velocitate intra tempus constans, quod aquale ponit tempori, quo gutta per altitudinem IG eadit. Hic demonstrandum suisset, tempus constans æquale ponendum esse tempori definito. Hac suppositio mihi precaria videtur, nec patet cur non tempus illud constans eadem ratione cuicumque alio tempori æquale poni queat. Ad hoc respondebit sorsan Doctifs. Riccatus, aqua ea exilit velocitate, quam grave cadens ex altitudine IG acquirit, adeoque pro tempore constante sumendum est illud, quod grave lapsu per eandem alzitudinem IG impendit. Sed oftendat, cur non eadem ratione quis dicere posset, aqua ea exilit velocitate, quam grave cadens ex altitudine IG acquirit, adeoque pro tempore constante sumendum est illud, quod grave lapsu per duplicem v. g. altitudinem IG impendit.

Secundum Doctifs. Riccati principium est, quod eo tempore, quo grave per altitudinem IG cadit, exeat aqua quantitas, qua contineretur in cylindrulo, cujus basis est foramen EF, & altitudo 2GI. Sed nec hoc omni exceptione majus est; priusquam vero dubitandi rationem exponam, examinandus venit modus, quo Ill. C. Riccatus illud demonstrare contendit. Constat ex Galilai demonstratis grave delapsum ab altitudine 1G eam acquirere velocitatem, qua uniformiter currendo tempore, quod lapsu impendit, absolvere queat spatium 2GI: sed simul secundum Patris demonstrata aqua per foramen EF ea exilit velocitate, quam acquireret grave cadendo per altitudinem IG; ergo dicto tempore egredietur uniformi velocitate filum aqueum longitudinis 2IG duplum proin cylindruli aquei, cujus basis est foramen EF, & altitudo GI. Ultima hac consequentia non tam maniseste vera est, ac prima fronte videtur. Rationem paulo altius petam. Vas ACDEB (Fig. 139.) aqua repletum tribus foraminibus æqualibus C, D, E, per quæ aqua exilit, perforatum est; per foramen C aqua horizontaliter, per foramen D verticaliter deorsum, & per E verticaliter sursum effluit. His positis, apparet candem quantitatem aquæ per quodlibet foramen esse efsluxuram, si nimirum foramina sint in eodem plano horizontali; etenim aqua per unumquodque foramen æquali vi urgetur; hoc quidem de foraminibus C, & D clarum est, minus autem liquet de foramine E, ideo quod aqua in columella ER gravitare videri posset in guttam jam jam e foramine E egressuram, hancque impedire, ne eadem celeritate essuat, qua aqua fluit per reliqua foramina C, & D. At si attentius res perpenditur. apparet, columellam aqueam ER non impedire, quo minus gutta in E eadem celeritate exiliat, ac per foramen C, vel D, quia guttulæ duæ vicinæ semper eadem celeritate ascendere censeri possunt, adeo ut guttula pracedens numquam subsequenti resistat; hocque experientia confirmatur, constat enim jactum ERS parabolam infinite acutam formantem constantis permanere altitudinis, id quod non fieret, fi prima gutta majori quam subsequentes velocitate exiliret; patet ergo eandem quantitatem aquæ per quodlibet foramen esse effluxuram; quibus prænotatis ulterius ebservo, tempore t, (quo scilicet grave cadit per altitudinem FC) egredi per foramen E filum seu cylindrulum aqueum, cujus basis est foramen E, & altitudo ER = FC; eodemque tempore t egredietur per foramen C filum aqueum, cujus longitudo sit = 2FC, atque per foramen D dicto tempore t'effluet filum aqueum longitudinis 3FC, id patet ex celeritate, qua guttulas ex foraminibus exilire dixi; ergo cum omnia hæc fila aquea inter le fint aqualia, necesse est ut crassities suas longitudinibus habeant reciproce proportionales, adeoque diametros suas habeant in ratione 1, Va

& VI. Atque hactenus probavi necessitatem filorum aqueorum extes

nuationis; restat extenuatio illa pro majori dictorum confirmatione phy-

fice explicanda.

Sit filum aquæ aR (Fig. 140.) continue verticaliter descendens tis; intelligatur filum aR a tubo in istanti exorto, & ab R versus S fluente redigi in momento in filum parabolicum a S ejusdem cum aR capacitatis, sed longius; quod si aqua esset infinite sluida, id est si revera esset divisa in particulas infinite parvas, liquet tunc particulas infinitesimas 2b, 2c, 2d, 2e, &c. a se invicem fore discessuras, & hiatus infinite parvos 2b2c, 2c2d, 2d2e, &c. inter se relicturas, qui hiatus majores erunt, vel minores pro ratione distantiæ puncti S a puncto R. Sed cum aqua non sit revera in particulas infinite parvas divisa, fiet ut guttulæ 26, 20, 2d, 2e, &c. divisioni resistant, atque unitæ permaneant, contra vero elongentur, hocque modo forment filum continuum AC, sed tenuiorem quam est AB, uti id melius per figuras T, & U exprimitur. Ex hisce jam Illustriss. C. Riccatus facile videt, quid in secundo suo principio excipiam, nempe filum cylindricum aquæ ex soramine EF (Fig. 138.) exiliens, etsi longitudinis 2GI, non esse propterea duplicis capacitatis cylindruli, cujus basis est foramen EF, & altitudo GI, fed ipsis intercedere æqualitatem ob reciprocam bases inter, & crassities proportionem.

In confirmatione totius ratiocinii experientia indagari poslet, an ex vase supra descripto per quodlibet soramen æqualis quantitas aquæ effluat, dein an non fila aquea eo tenuiora fiant quo magis ad filum verticaliter descendens accedunt. Ultima hæc experientia iam ex parte a Viro Clariss. Poleni (ni fallor) instituta suit, observante filum aqueum horizontaliter ex vase effluens subito præ foramine attenuari, ubi hic

videre est (Fig. 141.)

Hæc omnia acutissimo Riccati judicio submissa sunto.

Venetiis a. d. 14. Feb. 1724

Com. Jacobi Riccati ad Doctissimum Virum Danielem Bernoullium.

EPISTOLA.

Obstupui, Eruditissime Vir, quod cum tu pro Clariss. Michelotto arma sumpseris, & difficultates illas, quas ipsi communicaveram, diluendas susceptis, in illum non autem in me tela conjeceris. Puto egregium illum Medicum, & Geometram deseri potius, quam sic desendi maluisse. Ego principia, quibus est usus, ultro, & libenter admiss, unicam ejus conclusionem tamquam principiis minus cohærentem erroris arguisse contentus: tu vero sundamenta succutis, & dum de principiorum certitudine dubitas, totum opus radicitus evertis. Duplici vindicis, & adversarii munere sungar, & modo contra Michelottum, modo pro me ipso decertans, me non nisi veritatis causam agere demonstrabo.

In laudato Auctore sequens pronunciatum invenies pag. 78. Vis pellens est ut effectus ipsius, hoc est, ut quantitas motus, qui ab ipsa dato tempore generatur: est autem quantitas motus dato tempore generata in ratione composita sluidi dato tempore per oriscium essluentis, & velocitatis,

cum qua fluidum ipsum ex dicto orificio erumpit.

Adde alterum desumptum ex pag. 177. Grave eodem tempore percurrere potest spatium duplum motu uniformi ea cum velocitate, quam ex

casu per datam altitudinem acquirit.

Quid ex his sequatur vides. Quod aqua ea velocitate per foramen exiliat, quam acquirit gutta cadens spatium conficiendo æquale altitudini aquæ in vase sustentatæ, Theorema Bernoullianum est; igitur si velocitate acquisita fertur per id temporis, quod in descensum impendit, duplum dicti spatii percurrit, ideoque assignato tempore quantitas aquæ pleno ostio exeuntis dupla est ejus quantitatis, quam continet cylindrus oriscio circulari superincumbens. Vis itaque eo tempore pellens est, ut quantitas motus generata, hoc est, ut aqua essens sub costante velocitate juxta Michelotti principia.

Verum tu vim illationis non infirmas, sed principia ipsa lacessis; quæ cum tam Nevvtono, & Michelotto, quam mihi, si lubet, communia sint, me cum Nevvtono conjungis, Michelottum ab utroque sepa-

ras, nimis fortasse de Amico sollicitus.

Circa quantitatem aquæ fluentis venæ contractionem, & fluidi tenacitatem opponis; sed hæc Michelottum urgent, apud quem de his
altum ubique filentium. Ego, dum ipsi morem gererem, non dissimulavi ejus propositionem non niss quibusdam limitationibus adhibitis admittendam esse. Hæc verba mea sunt. Supposto però, che seguitando le
sue vessigia, si prescinda dalle resistenze della contrazione della vena...,
e da qualche altra circostanza ec. Cur animadversionem meam tam claris
verbis expositam in me convertas ignoro.

Quod'

Quod si ab istis circumstantiis abstrahere recusas, me repugnantem mon habebis. Cum vim expellentem aliter metiri non possimus, quam per quantitatem motus dato tempore genitam, tunc minuenda erit vis an ea proportione, qua minuitur copia sluidi erumpentis. Experimenta me docuerunt, aquam tempore jam a Nevvtono definito ex vasc essurementa, si conseratur cum ea, que implet cavitatem cylindri oriscio

normaliter insistentis, simpla longe majorem esse, ad duplam nunquam pertingere; in aliquibus tamen casibus, quos videre est apud Clarifs.

Polenum, ita ad duplam accedere, ut differentia parum facienda sit.

Ut primam Michelotti propositionem evertas, asseris, demonstrari

Ut primam Michelotti propositionem evertas, asseris, demonstrari debuisse, tempus constans necessario æquale ponendum esse tempori a Nevvtono definito; nam eadem ratione quodcumque aliud tempus tamquam constans designari potuisse, & præsertim illud, quod grave ex dupla altitudine descendit. Huic difficultati in litteris ad Clariss Michelottum datis diligenter occurri. Cum nulla exceptione, quæ dicta a me sunt, elidantur, quid ultra reponam non habeo. Licuit prosecto Michelotto loco citato pag. 78. tempus aliquod determinare pro constante, at Theorema subiectæ materiæ applicaret; hoc idem mihi, & Nevvtono non licebit? Non ne vides, quod si alicujus momenti sit obiectio, essatum illud, quod vis se habeat ut quantitas motus dato tempore genita, inutile sit, & e manibus Mathematicorum excutitur? Semper enim ex infinitis temporibus, cur unum potius, quam aliud pro constante ufurpatum sit, quærere possem, & hac subdola interrogatione demonstrationem quamcumque eludere.

Transeo ad aliam majoris ponderis oppositionem, quam sic exponis. Manifestum est, quod foramine EF (sig. 138.) digito clauso, digitus tantam pressionem sit percepturus, quanta est columna aquea, cujus basis foramen EF, & altitudo simplex GI: digito autem remoto, esse guttulam foramini adstantem, qua banc pressionem recipiat, mibi quidem clarum est, nullum discrimen essentiale inter status quietis, & motus videnti; id quod manifestius siet, si sluidum non vi gravitatis sua, qua illud carere supponam, sed elasticitate sollicitatum ex vase superius clauso per soramen EF

exilire intelligatur.

Quid de fluidis elasticis sentiendum sit, non est hujus loci inquirere: certum est, corum leges toto cælo disserre a legibus studorum non elasticorum. Respondi jam Clariss. Michelotto, qui sententiam suam codem argumento desenderat, statum quietis cum statu motus confundendum non esse: in primo solam vim verticalem agere, in secundo ad majorem essectum producendum vim obliquam, & lateralem cum verticali conjungi; quam observationem cum ejus auctoritate, tum ejus experimento pag. 128. munivi. Tu rursus cum Amico pugnans, dum ejus opinionem tutaris, sidem enervas. Ego assertionem meam ita demonstro.

Tempore a Nevvtono definito suprema supersicies aquæ foramini imminens usque ad vasis sundum descendet; ergo si nulla esset vis lateralis, tota actio esset illius quantitatis aquæ, quæ implet columnam opere Rice. Tom. III.

Kkk fora,

foramini normaliter insistentem; igitur dicto tempore hæc quantitas sola per orificium transiret: sed plus aquæ, docente experientia, dicto tempore erogatur; igitur plus aqua in motu ponitur, ut per foramen exeat; ergo actioni aque verticalis addenda est etiam actio obliqua aquæ lateralis. Q. E. D.

Id pariter evinci posset ex aquæ copia superius dicto tempore insundenda, quæ quantitati aquæ crumpentis æqualis est, ut fluxus in statu manente perseveret: aqua autem super insusa tota agit (nulla enim afferri potest ratio, cur pars sit otioia, & pars in actione posita) ergo necesse est, ut major copia aquæ agat, quam quæ in dicto cylindro continetur, cujus superficies superior dicto tempore majus spatium conficere nequit, quam sit altitudo aquæ in vase stagnantis.

Utrum aucem tu conjecturæ innixus, qua putas, discrimen essentiale non intercedere inter statum quietis, & motus, corollarium Nevvtonianum pro paradoxo habere debueris, tibi judicandum relinquo, præ-

cipue cum ab Illustr. Anglo contractio venæ observata sit.

Cum te contrariam sententiam propugnare audivissem, existimabam te faltem argumentum prolaturum petitum ex tubis, in quibus cavitas vasis aqualis est aperto soramini. In his vis lateralis, & obliqua locum non invenit. Ab hac difficultate expedire me non potui, nisi co xperientiam confulendo, quam cum Theoria Nevvtoniana egregie conspirantem inveni. Sed nimis longum esset totam aquarum esssuentium materiam pro dignitate tractare. Hanc spartam adornandam sumplit sum-

mus Vir Bernardinus Zendrinus.

Vbi venæ contractionem explicas, ingenium laudo; in eam enim hypothelim incidisti, quam olim invenit Borellus, & exposuit in libro de motibus a naturali gravitate pendentibus. Henc enucleandis phænomenis a Poleno observatis sussicientem non existimo. Hoc unum te monco, filum aqueum non attenuari, ut figuram frusti conici acquirat, oux sententia tua est, & ex assumpta hypothesi sequitur. Postquam vena seu verticalis, seu horizontalis in parva a soramine distantia ad maximam constrictionem, quam pro circumstantiarum varietate pati potest, reducta est, rurius, codem Poleno observante, dilatatur, atque dispergitur. Displicet me aliis curis distractum his illustrandis satis ocii Suppeditare non polle; que raptim, & ex tempore a me scripta funt, at humaniter excipias rogo.

Danielis Bernoulli ad Clarifs. Com. Jacobum Riccatum.

EPISTOLA.

Ouod Objectiones meas contra demonstrationem tuam Coroll. Nevvconiani responsione dignari volueris, illud pergratum suit; nollem autem seram diu reciprocare; videtur enim quæstio talis, ut qui persuaderi nolit, semper amplissimum excipiendi campum reperiat. Secunda hac responsione tibi, Vir Doctissime, molestus non suissem, nisi monenda quædam habuissem ad Clariss. Michelottum pertinentia. Scias itaque, me neutiquam arma sumpsisse pro Viro illo Celeberrimo propriæ suæ causæ defendendæ abunde sufficienti : nec ille defensore orus habet, nec si habuisset, mini longe inferiori provinciam hanc demandaturus fuisset. Non aliud mihi proposui, quam demonstrationem tuam dicti Corollarii accuratius perpendere, illud folum libertate philosophica usus (addere debuissem, a te ipso rogatus) in præcedenti meo scripto agere contendi. Nunc autem ulterius dicam, me nondum videre, quanam in re principia a Clarifs. Michelotto adhibita adversentur iis, que a me dicta funt.

Ex principiis Viri modo laudati sequitur, quod eo tempore, quo grave cadit ex altitudine FC (Fig. 139.) exeat filum aqueum motu uniformi, & horizontali longitudinis 2FC; & ego hoc concedo; ted filum istud esse propterea duplo majus cylindro FC. C, tua est consequentia, de qua dubitandi rationem prolixis verbis exposui, ad quam nondum mihi responsum suit, nisi allegatione experientia, contra quam

postmodum excipiam.

Certe aut ponendum est, solam directionem foraminis efficere posse, ut eodem tempore, plus minufvæ aquæ effluat, aut concedendum, con-

fequentiam tuam fallam effe, medium non datur.

(Hoc ut intelligatur sciendum est, me pro majori explicatione fili contractionis confiderasse tubum diversis foraminibus acqualibus, & a suprema aquæ superficie æquedistantibus, sed diverse inclinatis, persoratum; per que foramina codem tempore equales quantitates aque fluere, manifestum est; erunt autem fila aquæ emanantis co longiora, ac consequenter eo tenuiora, quo magis accedunt ad lineam verticalem.)

Sed hæc alternativa facili experientia decidetur: fi posterius, demon-Atrationem tuam erroneo inniti principio ipse vides: si prius, hac quidem in parte procedere posse videtur, sed pro integra infins persectione demonstrandum est, pro tempore constanti sumendum esse illud, quod grave lapsu per altitudinem FC impendit; sufficientem enim rationem in litteris tuis ad Cl. Michelottum datis nondum vidi. Asseris, Vir Clarissime, ipsum Michelottum idem alia occasione secisse; locum reperire non potui, nec adeoque scio, an paritas exempli sit concedenda; sed hoc posito, non auctoritatem, rationem peto. Videtur aliam asseri non posse, Kkk 2

144 nisi illam a Nevvtono allatam, quod dicto tempore grave lapsu suo eans acquirit velocitatem, qua aqua exilit. Hanc vero rationem nullam effe ita demonstro: ponamus Theorema circa velocitatem aquæ esssuentis ita suisse enunciatum; velocitas, qua aqua exilit, aqualis est duple velocitati, quam

grave acquirit cadendo ex altitudine - FC. Hic velocitatem aquæ expri-

mendi modus, quamvis minus concinnus, non propterea minus verus fuisset; jam vero ipsissimis tuis verbis, paucis folum mutatis, probabo, pressionem, qua aqua ad egrediendum sollicitatur, non esse duplam, sed fimplam cylindri aquei FC. C. In Nevvtoni casu tempus ponitur æquale duplici tempori, quod infumeret grave cadendo per altitudinem 1 FC;

velocitas, qua aqua exilit, etiam ponitur femper eadem; igitur vis motum aquæ generans æqualis est ponderi aquæ, quæ eodem illo tempore exit ex foramine C; sed moles aquæ dicto illo tempore egressæ est æqualis cylindro aqueo, cujus basis foramen C, & altitudo FC (quod facile demonstratur, posito nimirum fassam esse conjecturam meam de fili contractione) quare etiam vis, quæ totum aquæ exilientis motum generat, æqualis est cylindro aqueo, cujus basis foramen C, & altitudo FC. Q. E. D.

Vides, Vir Doctissime, demonstrationem tuam hactenus nil esse ni

lufum verborum.

Quæ dixi, ut probarem, pressionem esse æqualem simplici pressioni cylindri aquei foramini ad perpendiculum imminentis, quæque tu titulo oppositionis majoris ponderis honorare voluisti, tanquam non dicta per me considerare licebit, utpote scopo meo minus convenientia; non enim Theorema, uti a Doctifs. Michelotto enunciatum suit, demonstrare, sed demonstrationem tuam Corollarii Nevvtoniani ponderare, animus fuit; possem tamen, si hanc digressionem facere vellem, argumenta proferre haud rejicula pro demonstrando, motum aquæ in vase etsi obliquum (quod tamen nondum constat) ad cylindrum verticalem supra foramen D, nihil contribuere ad pressionem guttæ foramini adstantis; sed hæc forent extra propofitum.

Nescio, an experientia doceat, tempore lapsus gravis per spatium FC cgredi majorem quantitatem aquæ, quam contineret cylindrus foramini infistens ad perpendiculum: certe ratio contrarium suadere videtur: necdum video, quid in ratiocinio supra exposito desiderari possit. Forsitan tempus illud experientia non recte definitum est, & justo majus sum-

ptum fuit, nimirum non considerando aerem lapsui resistere.

Vis, qua aqua effluit ex tubo, cujus cavitas æqualis est foramini; non comparari potest cum vi, qua eadem crumpit ex vase, cujus soramen supponitur infinite parvum, non magis ac punctum cum linea. Hud jusmodi difficultatem nunquam me urgere potuisse, libenter fatéor.

Si experientia circa extenuationem fili se habet, ut dicis, fateor illam nihil conferre pro sententia mez confirmatione, sed & nihil iph derogare dico.

Locum in Borello, quem ejusdem sententiæ esse afferis, libenter ex ce discerem.

Multa haberem addenda, sed nolo leviusculis hujusmodi dubiis preciossssma tua tempora diutius morari: hæc & præcedentia maturius per otium examinare, si examine tuo digna censes, poteris

Interim mente, & corpore Vale.

Com. Jacobi Riccati ad Virum Clarissimum Danielem Bernoullium

EPISTOLA ALTERA.

Ab his objectionibus, quas tuo nomine, Eruditistime Vir, paucis ab hinc diebus accepi, facile me expedire possem, nisi prius nonnulla animadvertenda essent, quæ æquivocationem omnem de medio tollant, & ostendant te Clarifs. Michelotti sententiam cum mea consundere; neque

adhuc scopum designasse, in quem tua spicula dirigeres.

Non aliud tibi proposuisti, ut asseris, quam demonstrationem meam Corollarii Nevytoniani accuratius perpendere: atque ulterius addis, te nondum videre qua in re principia a Michelotto adhibita adversentur his, quæ a te scripta sunt. Hoc profecto non vides, quia ejus librum qua par erat attentione nunquam legisti, & (pace tua sit dictum) quid impugnes, aut quid tuteris prorsus ignoras. Tali pacto seras quamdiu libuerit reciprocabis. Pergis porto: Ex principiis Viri modo laudati sequitur, quod eo tempore, quo grave cadit ex altitudine FC (Fig. 139.), exeat filum aqueum motu uniformi, & horizontali longitudinis 2FC, & ego boc concedo; sed filum istud esse propterza duplo majus cylindro foramini D=C normaliter insistente, tua est consequentia, de qua dubitandi ratio-

Hæc, Doctissime Bernoulli, mea consequentia non est, sed citati Michelotti; nam quantitatem liquoris in fluxu manente constituti, dato tempore, per datum foramen, sub data velocitate exeuntis aliter ipse non metitur, quam aream foraminis in velocitatem ducendo; neque aliam quam sequentem formulam usurpat q=tuo, in qua sub litteris initialibus exprimuntur fluidi quantitas, tempus, velocitas, & area orificii. Lege, si placet, ejus Operis pag.75,, & sequentes, una cum Corollario pag. 120, & Scholio pag. 121, 122, 123, & rursus quod scribit pag. 169,

& quid sequatur intelliges.

Quæro abs te, cur filum horizontale longitudinis 2FC duplam aquæ quantitatem non continct, si cum ca conseratur, que in cylindro FC. C continetur? Respondebis ob venæ contractionem, aliasque circumstantias: sed de his apud Michelottum ne verbum quidem. Iccirco admonui, con-Lequentiam illam ex ejus principiis sponte fluentem admittendam nullo modo esse, nisi quibusdam limitationibus adhibitis. Pudet me, que semel, atque iterum dixi, tertio inculcare.

Esaminata per tutti i versi l'addotta dimostrazione, non ci ho saputo vedere nè pure un ombra di paralogismo, e ciò spiccherà maggiormente dalle risposte, ch'io sono per dare alle sue obbiezioni (Michelotti videlicet). Supposto però, che seguitando le sue vostigia si prescinda dalle resistenze, dalla contrazione della vena indicata dal Sig. Neveton, e confermata con replicate sperienze dal Sig. Poleni, ed in oltre da qualche altra circostanza sin, ora da Matematici non avvertita, e che si considererà in altro tempo.

En verba mea ex litteris ad Clarifs. Michelottum datis excerpta luce meridiana clariora. Quid tu ad hæc? Dissimulatione uteris, & eandem semper cantionem canis, dum Michelotti lapsum, quem ego notavi, in me transferre conaris invitis Diis, hominibusque. Quæstio erat, an ex hujus Auctoris principiis demonstrari posset assertio Corollarii Nevvtoniani, non qualis revera est, sed qualis ab ipso fingitur, qua de re suo loco redibit seriao: hoc ni fallor clarissime præstici. Præscinde ab his, qua vel Michelotto in mentem non venerunt, vel a quibus præscindere voluit, ce demonstrationis mez vitium detege. Tunc eris mihi magnus Apollo. Ulterius progressus sum, principiorumque a me mutuo sumptorum desectum non diffimulavi; correctionem, quantadhibere oportet,

infinuavi; quid ultra facere debuerim, ut doceas, flagito.

Sed his missis, cum Achille tuo, hoc est cum argumento illo, quod in secunda scriptura iterum urges, congrediendum est. Putas ex mea sententia sequi, vim expellentem modo per duplam GI (Fig. 138.), modo per fimplam, aut per quamcumque aliam proportionem exponi debere. Id autem ratiocinatione probas, que mera cavillatio est. Quid nomine vis intelligas non fatis percipio. Si de vi follicitante loqueris, hæc conitans profecto est, & nulli mutationi obnoxia, usquequo omnia in codem statu permanent, ut supponimus; & aliter exprimi nequit, quam per masiam aquæ, quæ, nullis obsistentibus resistentiis, ex vase effluere deberet, tempore a Nevvtono definito. In hoc Theoremate nostræ disputationis cardo vertitur. Vel igitur illud admittis, vel falfum putas; nie hil enim est medium. Si primum, mecum consentis, Michelotti sententiam, immo paternam deseris, uno verbo, Nevetonianus es. Si secundum, illud invictissime demonstrabo. Quodlibet elige, & te causa cecidiffe convincam. Tergiversationi locus non est. Quod si nomine vis intelligis essectum a vi sollicitante productum (non enim de vocabulo qualtio movenda est) tunc vis in hoc sensu accepta erit variabilis. Vim follicitantem, qua uniformiter agit, pro tempore actionis sux majorem, aut minorem eficetum gignere, quis indubium vocet? Hoc satis gravitatis exemplo probatur.

Quantitatem aquæ affignato tempore erumpentem, quam abstrahendo a ici lentiis, vi follicitanti æqualem invenimus, tantam esse, ut implere queat duolam columnam foramini EF ad lineam insistentem, illorum fentencia fuit, qui effluxum metiuntur per factum ex velocitate in tema pus, & in aream foraminis. Hos inter recenfeo Gulielminum, Hermannum, Varignonium, Hughenium, quibus adde, si placet, & Michelot-

tum. Verum isti Auctores excessu peccant.

Cautius procedit magnus Nevytonus; hæc enim habet Propositione 36. casu primo, postquam obliquos motus particularum effluentium, & venæ contractionem consideravit. Per experimenta, inquit, constat, quod quantitas aqua, qua per foramen circulare in fundo vasis factum effluit, ea eft, qua pro diametro vena cum velocitate pradicta effluere debet. Ut autem experimenta Teorix congruerent, aqua exilientis velocitatem paulifper auget; & cum certum fit aquam superius infundi fine aliquo motu non posse, aquæ velocitatem in circulo AB talem supponit, ac si aqua cecidisset ex puncto quietis I, & spatium IH motu accelerato confecisset. Lineam IH postea determinat Coroll. primo, ut sit AK: CK in duplicata ratione areæ foraminis (per foramen EF venam contractam intelligit) ad aream circuli AB. Quam longe a mente Nevytoni tu cum tuo Michelotto recesseris, ex dictis patet. Nevytoniana recito fide historica, non in omnibus probo; nam scio summum Virum in sua cataracta substruenda aliquid humani passum esse; quamquam si cum aliis compa-

retur, omnes longo intervallo post se relinquat.

Sententiam tuam, Eruditissime Vir, libenter ex te discerem ; nam fere in omnibus tibi aqua hæret, & Scepticorum more aliorum opinionem lacessis, tuam manisestare resormidas. Ais te nescire, an experientia doceat tempore lapsus gravis per spatium IG egredi majorem quantitatem aquæ, quam contineret cylindrus foramini insistens verticaliter. Certe ratio, ut putas, contrarium persuadere videtur, nec dum evides, quid in ratiocinio tuo defiderari possit. Calculum subducere debueras, & ab hac ambiguitate te liberare. Cum experimenta contrarium evincant, ratio tua cum experientia, & cum Natura pugnabit. Sed quænam est hæc ratio? vereor enim, ne nubem pro Junone amplectaris. Verba tua audiamus. Possem argumenta proferre pro demonstrando, motum aqua in vase, etsi obliquum (quod tamen nondum constat) ad cylindrum verticalem supra foramen EF, nibil contribuere ad pressionem gutta foramini adstantis. Sic paulatim de loco pelleris: in prima scriptura motum obliquum repudiabas, in secunda de eo dubitas, in utraque statum motus cum statu quietis pro more tuo consundis. Dum particulæ aqueæ in vase contente quiescunt, tunc fundum æqualiter premunt; at dum aperto ostio essluunt, vis obliqua actionem suam exercet, & aquæ exeuntis copiam auget. Utrumque ita evidenter constat, ut non argumenta haud rejicienda, sed demonstrationes omni exceptione majores in medium afferre possem, si per otium liceret. Verum rationibus opus non est, ubi experientia clamat.

Interim finge plus aquæ non exonerari tempore a Nevvtono affignato, quam tu velles, ut tuam fententiam tueri valeas; fequitur vim sollicitantem optime a Clariss. Michelotto definitam per massam, seu quantitatem aquæ, quæ impleret cylindrum foramini ad lineam imminentem, seclusis tamen resistentiis. Quid tu, negas ne, an affirmas? Hic rursus tibi hæret aqua; nam de Theoremate Michelotti dubitas, & quæ de pressione scripsisti tamquam non dicta consideras. Meminisse debueras, hanc esse eximii Patris tui doctrinam potius quam Michelotti, ut Ill. iste

Medicus fatetur pag. 112. Vereris fortaffe, ne argumentum illud tuum ? quod tanti facis, & cui supra respondi, in te retorqueam? Quid, si consequentiam circa effluxum aquæ admittis, qua posita, Michelotta Theorema nullo negotio demonstratur?

Et quoniam tota quæstio, te ipso fatente, ad observationes tradu-Eta est, si Polenum, quem tibi laudavi, consulere recusas, si Mariottum, quem laudo, non probas, extat celebre Gulielmini experimentum circa finem Tractatus de mensura aquarum fluentium octies repetitum quod in suos usus transtulit conterraneus tuus Hermannus Phoronomiæ lib.2. Prop.37. Shol.I. Hoc si ad computum reducere non pigeat, quod magni laboris non est, te longe a veritate abesse deprehendes.

Ut igitur tua stet demonstratio, vel dicendum Viros accuratissimos in capiendis experimentis dormitasse, vel Lectoribus imposuisse, vel Naturam ipsam in paralogismum incidisse. Vide quas in angustias te conjicias. Excipe nunc, quod tempus illud experientia non recte definitum, & justo majus sumptum suit / nimirum non considerando aerem lapsus resistere. Exceptione tua nikil aliud facis, quam argumento ab experientia desumpto pondus addere; nam si effluxus observatus major est, quam eum opinione tua conciliari queat, quamquam aer resistit, hoc impedi-

mento sublato, augeri debet, non minui. Reliqua in scriptura tua , quæ ut fateris , minus ad rem faciunt ; consulto omitto. Quod dicis de foramine infinite parvo nova hypothesis est. In vase Nevytoniano diameter foraminis ad vasis diametrum assignabilem habet rationem, nec video quid absurdi sequatur, si tota aqua in glaciem concrescat, ea excepta, quæ orificio normaliter imminet, & fi aqua per cylindrum medium transeunte in effluxu perenni, & manente

constituta, hujus motus leges inquirantur.

Quod ambigis an vena contracta rursus dispergatur, ut dubitatio. nem exuas, citatum Polenum confule. Hoc phanomenum pro sententia tuæ confirmatione nihil conferre, sed & nihil ipsi derogare affirmas Putabam hæc inter se conciliari vix posse. Interea locum Joh. Alphonsi Borelli contractionem venæ tenacitati aquæ tribuentis invenies in libro de motibus naturalibus a gravitate pendentibus prop.226. Borellum deceptum scio; ob id conciliationem tuam falsæ suppositioni innixam, licet non viderim, probare tamen non possum.

Habes, Eruditissime Vir, sententiam meam indicatam potius, quam explicatam: sed tibi pauca. Quod si patientia tua diutius abusus sum

Id humanitati tuæ tribue, & vale.

Castrifranci die 20. Martii 1724.

Per mettere in un pienissimo lume la verità del Corollario Nevvtoniano sostenuta dal nostro Autore nel presente Schediasma, farò ricorso al metodo infallibile delle azioni, cioè a dire delle forze applicate agli spazi, illustrato dal Padre Vincenzo Riccati nel suo Dialogo delle forze vive, e della azione delle forze morte.

Sia ACDB (Fig.142.) un vaso cilindrico ripieno d'acqua, e nel centro del suo sondo CD sia aperto un menomo soro EF, per cui l'acqua trovi l'uscita. C'insegnano i canoni idrodinamici, che le velocità del fluido dentro, e fuori del vaso stanno nella ragione inversa del fondo CD al foro EF; di modo che la prima è picciolissima in paragone della seconda. Dovendosi passare per tutti i gradi dall'una all'altra velocità, la Natura forma in vicinanza del foro EF il gorgo SMEFNT, che trae l'origine dal girare la figura SMEGZ intorno l'asse GZ, che passa per-il centro G comune al buco EF, ed al fondo CD del vaso. Rimane immobile l'acqua nei fiti SMEC, TNFD, quafi che fosse folida, e l'acqua contenuta nel gorgo si va accelerando, a misura che sa

transito per sezioni più ristrette MN.

Suppongali, che la superficie AB del fluido sia calata abbasso per lo spazio minimo HQ, di modo che sia scaturita pel soro EF la quantità d'acqua AR. L'azione della gravità dell'acqua si sarà impiegata in tre effetti, cioè a dire nell'imprimere forza viva all'acqua contenuta nel cilindro PT, a quella contenuta nel gorgo SMEFNT. ed all'altra parimente, eguale al cilindro AR, ch'è scappata suori dal vaso. Quanto più picciola quantità di fluido riempie il gorgo, tanto minore d'esso fluido è la forza viva, e quanto minore è una tal forza viva, altrettanto maggiore si è quella, e dell'acqua PT dentro il vafo, e dell'acqua pari di mole al cilindro AR spicciata suori pel buco. Quindi l'esito del liquore è più veloce, e più copioso, ed una azione più grande viene in pari tempo esercitata dalla gravità dell'acqua dentro il vaso rinchiusa. Egli è suori d'ogni dubbio, che il peso dell'acqua, malgrado l'impedimento del vaso, tenta di effettuare la possibile massima azione. A tal oggetto dunque la Natura determina il gorgo SMEFNT di così picciola altezza ZG, che la forza viva dell'acqua, ch' esso comprende, possa trascurarsi sissicamente. Passando dal sissico al geometrico, si supporrà da noi matematicamente minima la detta forza viva, e tale, che relativamente alla forza viva dell'acqua PT fia permesso trasandarla nei computi. A norma di tale supposizione m'innoltro allo scioglimento del seguente

Determinare la velocità, colla quale esce l'acqua da un vase cilindrico per un foro minimo circolare aperto nel fondo del vaso stesso.

Nel primo istante del moto sia l'altezza dell'acqua HG=a, la base del vaso CD=b, il soro EF=c. Cominci l'acqua a scaturire dal foro, ed essendosi abbassata per lo spazietto HQ=s, sia uscita dal vaso la porzione di fluido AR=bs=m. Chiamifi U la velocità del corpo d'acqua PT, il quale s'adegua al cilindro AD = ab, ed u la velocità della massa infinitesima bs uscita pel buco r.

Ricorrendo al nominato metodo delle azioni, e fatta la riflessione, che mentre il fluido ab è disceso per lo spazio s, la sua gravità ha esercitata l'azione abs, e supponendosi trascurabile la forza viva dell'acqua, che riempie il gorgo, avremo per le note formole abs =

abU2 + bsu2 (1): ma come abbiamo di fopra notato, le velocità U, u

serbano la ragione inversa delle sezioni b, c; dunque si verifica l'equazione cu = U, e sostituendo questo valore nella nostra formola, ci si

presenta
$$abs = \frac{ac^2 + b^2 S}{2b}$$
. u^2 .

La massa liquida ab s'è mossa per lo spazio s, e l'acqua bs, ché che spicca dal foro, s'è conformata in un cilindro, la cui base c, e la lunghezza bs, che da noi ponesi = z. Giacchè bs = z, ne risultat

bs = cz = m (2), ed abs = acz. Si cavi la confeguenza importante, chè all'azione abs, che segue in Natura, può con un gioco di metodo sostituirsi l'eguale acz, e in cambio d'essa usarsi sicuramente. Surrogato in luogo di bs il fuo valore cz, la nuova formula az = ac + bz. u^2 (3),

o sia $\sqrt{2abz} = u$ (4) esprimerà la relazione fra le velocità, e gli spazi

fcorsi dall' acqua cz, ch'esce dal vaso: il che &c.

Nel principio del moto abbia corso l'acqua, che spicca dal soro, uno spazio z talmente minimo, che sia la quantità be infinitamente minore di ac. In questa ipotesi la formola (4) si riduce alla seguente

 $\sqrt{2a \cdot bz} = u$, ed eguagliandosi la frazione bz ad una grandezza im-

mensamente picciola, manisestamente si scopre, che la velocità u pareggia una parte inassegnabile di quella celerità \square, che viene in progresso dal fluido acquistata. La velocità per altro \(\frac{1}{2a \cdot bz} \) conceputa

dall'acqua ex uscita dal vaso è infinitamente maggiore di quella \(\sigma_{22}\), che avrebbe cagionata nell'acqua cz la sua gravità, essendo

√2a. bz: √2z:: √b: √c. Questa ristessione ci sa toccare con mano,

che la forza viva, ond'è fornita la massa ca, procede da un'azione incomparabilmente più grande di quella, che per lo spazio & verrebbe esercitata dalla gravità di essa massa.

COROLLARIO II.

Inoltriamoci alla supposizione, che le grandezze ac, bz, e conseguentemente anche le due c; & (supponendosi finite le quantità a, b) fi corrispondano in proporzione finita, e la formola (4) $\sqrt{2a}$. bz = u

ci addita, che essendo be quantità finita minore dell'unità, è pa-

rimente finito il valore della velocità u; ma però sempre più picciolo di Vaa, al qual valore si va vie più accostando, a mistira che s'aumenta la grandezza be relativamente ad ac. In questo incontro la forza viva dell'acqua uscita ez si eguaglia ad acz. bz, e giacchè, con-

forme abbiamo notato, è finita la grandezza $\frac{bz}{ac+bz}$, ed una finita re-

lazione passa fra le quantità c, z, la predetta forza serberà una ragione finita col quadrato ce. CO

LII 2

CO

COROLLARIO III.

Ma quando bz è divenuta infinita in riguardo ad ac, il che può succedere, anche mentre bz è grandezza minima, purchè s' eguali ad ac, e sia l'esponente n positivo, e minore dell'unità, in tal caso avremo $u = \sqrt{2a \cdot bz} = \sqrt{2a}$, e questo è il massimo valore, a cui

può pervenire la detta velocità.

Si osservi potersi asserire con verità, che lo spazio 2, quantunque menomo, sia stato passato con equabile velocità dall'acqua scaturita dal

foro. Sia per esempio $z = \frac{ac^{\frac{1}{3}}}{b}$: egli è manisesto per le cose dette,

che mentre era $z = \frac{1}{ac^{\frac{2}{3}}}$, la velocità u s'eguagliava a $\sqrt{2}a$; dunque

lo spazio $\frac{1}{ac^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{ac^{\frac{1}{3}}}$ s' è scorso con velocità equabile: ma per ade

quazione $\frac{ac^{\frac{1}{3}} - ac^{\frac{2}{3}}}{b} = \frac{ac^{\frac{2}{3}}}{b} \Rightarrow x$; dunque l'acqua si è mossa per

lo spazio z con equabile celerità:

La forza viva dell'acqua ez scappata fuori, cioè a dire acz. bz = ac+bz

acz, la scopriremo infinita relativamente a quella, onde è sornita l'acqua, che si muove con velocità finita, ma non per anche ridotta equabile, la quale nel precedente Corollario abbiamo avvertito riserirsi a c2 in proporzione finita.

SCOLIOI

Nella formola (4) $\sqrt{2abz} = n$ non abbiamo messa a computo $\sqrt{ac+bz}$

l'azione della gravità dell'acqua, dopo ch'è uscita dal vaso. Egli è d'uopo adunque fingere o che l'acqua scaturita resti priva di quantità,

o pure che l'acqua, tosto che è scappata suori pel buco, sia obbligata à voltar cammino lungo un canale orizzontale senza patire resistenza veruna.

S C O L I O H.

Prese le différenze nella formola (1) abs = $abU^2 + bsu^2$, dopo aver

in essa sossition in cambio di bs il suo valore cz, ci si presenterà $acdz = abUdU + czudu + cdzu^2$. L'azione adunque elementare acdz

cagiona tre effetti, accrescendo la forza viva nelle due masse ab, cz, ed imprimendo la forza viva $cdzn^2$ nella massa menomissima cdz, che

durante la infinitesima azione acdz spiccia novellamente pel foro. Quando il sluido è pervenuto ad una equabile velocità, i due primi essetti si annullano, essendo in tal circostanza tanto dU, quanto du = 0, e per conseguenza adempiesi l'equazione acdz = $cdzu^2$. Quindi nella detta

ipotesi l'azione minima acdz s'impiega tutta nel generare la forza viva nell'incremento cdz della massa sluida cz uscita dal vaso. Anzi verisicandosi nella nostra supposizione la formola acz = czu^2 , si può asserire

con geometrica adequazione, che mentre la velocità del fluido sia divenuta equabile, l'intera azione acz = abs s'è spesa nella forza viva della porzione d'acqua cz scaturita dal vaso.

Dalle cose dette raccogliesi, che se ci proporremo di ritrovare una sorza f, che agendo liberamente per uno spazio elementare cagioni l'esfetto cdzu², la totale azione di questa sorza, quando l'acqua equabil-

mente si muove, pareggierà $acz = \frac{cz n^2}{2}$; di modo che all'azione di essa

forza si potrà attribuire tutto il moto dell'acqua uscita. Supponendo il Cavalier Nevvton equabile la velocità del liquore, egli è suor di dubbio, che quelle parole del samoso suo Corollario, Vis, qua totus aquè exilientis motus generari potest &c. alludono alla sorza, di cui parliamo. Deve por esser libera la detta sorza; perchè potendo venir prodotta la sorza viva czua da infinite sorze, ciascuna delle quali eserciti una azione

eguale alla acz, e dicendo assolutamente il Sig. Nevvton, Vis, qua totus aqua

altrimenti che la gravità in un corpo, che discende per la linea del piombo.

PROBLEMA II.

Determinare la forza, che agendo liberamente, cagiona la forza viva nell'elemento d'acqua, che nuovamente scaturisce da un vaso per un foro minimo in tempo infinitesimo.

Conciossiachè $abz = u^2$, moltiplicando per le quantità eguali

cdz, dm, avremo $\frac{acbzdz}{ac+bz} = \frac{dmu^2}{z}$. Lo spazio, pel quale agisce una

forza costante libera, s'eguaglia alla metà di quello, che nel tempo della durata dell'azione si scorre dalla massa dm colla velocità n acquistata in vigore di detta azione. Agendo per uno spazio minimo la forza, che noi cerchiamo, si può considerare come costante, e giacchè la massa dm = cdx nel tempo, in cui segue l'azione, scorre lo spazio dx, la predetta sorza a norma delle cose dette agisce per lo spazio i dx.

Dividendo adunque per $\frac{1}{2} dz$ l'azione $\frac{acbz}{ac-bz}$, ne rifulterà la forza con-

tinuamente applicata, che da noi si nomina $f=:\frac{2acbz}{ac+bz}$ (5): il che ec

COROLLARIO I.

Se nel cominciamento del moto è bz infinitamente minore di ac, ci fi presenta la forza f=2bz. In tale incontro l'azione fdz=bzdz,

che genera la forza viva dmu2; è una parte minima della azione ele-

mentare abds = acdz, impiegandosi il rimanente, cioè per adequazione tutta l'azione acdz nel complesso dei due effetti nominati nel premesso.

Scolio II. abvdv + czudu = ac + bz. bvdv, o per meglio dire nel To-

lo incremento abvav della forza viva del corpo d'acqua ab, essendo relativamente nullo l'altro essetto candu.

COROLLARIO II.

Sia lo spazio z cresciuto si fattamente, che le quantità ac, bz si riseriscano in proporzione sinita, ed interverrà, che l'azione faz =

acbdz ferbi coll'azione elementare della gravità dell'acqua ab, cioè a

dire con abds = acdz la finita relazione, che passa fra le grandezze bz, ac + bz. Conseguentemente nel doppio essetto abvdv + czudu = ac + bz.

 $\frac{bvdv = ac + bz \cdot cudu}{c}$ fr spenderà l'azione $\frac{a^2c^2dz}{ac + bz}$. Mentre per esem-

pio fosse ac = bz, si troverebbe f = ac, fdz = acdz, e ciascuno degli

effetti abudu, czudu, che in questa ipotesi sarebbero eguali, richiederebbe l'azione acdz. La velocità u dell'acqua uscita dal vaso s'egua-

glierebbe a \sqrt{a} .

COROLLARIO III.

Finalmente quando è bz infinita relativamente ad ac, il che può verificarsi stando ancora bz dentro i confini delle quantità infinitesime, conforme abbiamo notato nel Corollario III. del Problema I, scopriremo f=2ac. In tale circostanza la velocità u, colla quale l'acqua scaturisce dal buco, è divenuta equabile, e s'eguaglia a $\sqrt[4]{2a}$, siccome appunto suppone l'incomparabile, Sig. Nevvton. Or ecco adunque, che nella supposizione del grande Inglese la forza f pareggia la grandezza 2ac a norma della espressione del tanto dibattuto suo Corollario: Vis, qua totus aqua exilientis motus generari potest, aqualis est ponderi cilindrica columella aqua, cujus basis est foramen EF (Fig. 138.), \mathcal{E} cujus altitudo est 2GI, vel 2CK. Si asserice in oltre con verità, che questa forza può generar tutto il moto nell'acqua, ch'esce dal vaso i imperciocchè essendo nella ipotesi di $u = \sqrt{2a}$ lo spazio scorso z'infinito re-

1456 lativamente a quello passato dall'acqua, mentre era u minore di $\sqrt{2a}$ per una quantità finita minima a piacimento, l'azione acz s'adegua a $\int \underline{f} dz$, e rettamente si asserma, che la forza 2ac agendo per lo spazio

 $\frac{1}{2}$ z ha prodotto nella massa cz la forza viva cz. $u^2 = cz$. e.

Impiegandosi tutta l'azione elementare del peso dell'acqua ab, va: le a dire abds = acdz nell'unico essetto cdz. $u^2 = cdz$. a, chiara si sco-

pre la nullità degli alti due effetti abvdv, ezudu. E così in fatti dee intervenire, perchè effendo la velocità v, u divenute equabili, s'eguagliano a nulla i loro incrementi dv, du.

Per intero compimento della materia aggiungo la foluzione del fe-

guente

PROBLEMA III.

Determinare la relazione fra gli spazi scorsi dall'acqua, che scaturisce da un vaso per un foro minimo, e i tempi impiegati a percorrerli.

Si nomini t il tempo confumato dal primo elemento di fluido ufficito dal vaso a passare lo spazio z, ed essendo dz = dt, e per l'equa-

zione (4)
$$\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+bz}} = u$$
, scopriremo $\frac{dz}{\sqrt{2abz}} = dt$ (6), e mol

tiplicando, e dividendo per
$$\sqrt{ac+bz}$$
, $acdz+bzdz$
 $\sqrt{2ab \cdot acz+bz^2}$

$$\frac{1 \ acdz}{\sqrt{\frac{2}{2ab \cdot acz + bz^2}}} = \frac{1 \ acdz}{\sqrt{\frac{2}{2ab \cdot acz + bz^2}}} = dt. L' \text{ integrale del termine}$$

I $acdz \Rightarrow bzdz$ $\sqrt{acz + bz^2}$, $\sqrt{acz + bz^2}$,

e quello del termine $\frac{1}{\sqrt{acz} + bz^2}$ pareggia la quantità $\frac{ac}{\sqrt{2ab^2}}$ $\sqrt{ac+bz-1}$, $\frac{1}{\sqrt{ac+bz-1}}$

dovendosi prendere i logaritmi nella logistica della sottangente = 1.

Sarà pertanto
$$\sqrt{acz + bz^2} + ac$$
 $\int 1 + \frac{2}{\sqrt{ac + bz - 1}} = t(7)$

formola, che dinota la proporzione fra lo spazio z scorso dall' acqua, che spiccia dal buco c, ed il tempo z impiegato a percorrerlo; il che ec.

COROLLARIO I.

Mentre nel cominciamento del moto la grandezza be è infinitamente minore di ac, la formola (7) prende l'aspetto

$$\frac{\sqrt{acx}}{\sqrt{2ab}} \stackrel{ac}{=} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}} = \ell. \text{ Ma eguagliandoff}$$

$$\frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}$$
 ad una grandezza menoma, abbiamo nella logistica della

Suttangente =
$$1 \int \frac{1 + 2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}} = \frac{2\sqrt{bz}}{\sqrt{ac}}$$
; dunqué effettuati i

necessari calcoli, $\sqrt{\frac{2cz}{b}} = t$. Questa stessa formola si può agevolmente

Opera Riccati T. III.

Mmm

de

dedurre dalla equazione differenziale (6) $dz \sqrt{ac+bz} = dt$, cancellan-

do nel numeratore il termine incomparabile bz, ed indi passando alla integrazione. Non lasciamo d'avvertire, che il tempo $\sqrt{\frac{2cz}{b}}$, oltre all

effere infinitesimo si scopre ancora menomo relativamente al tempo $\sqrt{2z}$, in cui la massa cz stimolata dalla sua gravità avrebbe camminato per lo spazio z.

COROLLARIO II.

Sia cresciuto lo spazio z si fattamente, che fra le grandezze ac; bz passi una proporzione finita, e dalla attenta considerazione della for-

mola (7)
$$\frac{\sqrt{acz+bz^2}+ac}{\sqrt{2ab}}$$
 $\frac{1+\frac{2}{\sqrt{ac+bz-1}}}{\sqrt{ac+bz-1}}$ = t rice-

veremo essere infinitessimo il tempo, in cui l'acqua uscita dal vaso è pervenuta ad una velocità, la quale per il Corollario III. del Problema I. è finita, ma però sempre minore di $\sqrt{2a}$. E vaglia il vero, il primo dei due termini, ai quali s'eguaglia il tempo t, cioè a dire

 $\sqrt{\frac{acz + bz^2}{2ab}}$ è chiaramente minimo. Lo stesso pure si verifica del se

condo termine
$$\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}}$$
 $\sqrt{\frac{1}{ac+bz}}$ imperciocchè $\frac{1}{bz}$.

 $\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}$ eccede l'unità per una quantità finita, e perciò

 $\sqrt{\frac{ac+bz}{bz}}$ — 1 s'eguaglia ad una grandezza finita positiva, laonde

 $\frac{1}{1}$ de maggiore dell'unità, e sta dentro i limiti del si $\sqrt{ac+bz-1}$

nito la differenza, con cui la supera. Quindi $\int \frac{1}{1} \frac{1}{-1} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{ac-1}-bz-1}} pareg-$

gia una quantità finita, e per conseguenza è infinitesimo anche il ter-

mine
$$\frac{ac}{2\sqrt{2ab^2}} \int \frac{1}{\sqrt{ac+bz}} \frac{2}{\sqrt{ac+bz}}$$

$$bz$$

COROLLARIO III.

Mentre la grandezza bz paragonata con ac è relativamente infinita, la formola (7) si trasforma così: $\frac{z}{2\sqrt{2a}} = \frac{ac}{\sqrt{2ab^2}} = \frac{\sqrt{4 \cdot bz}}{ac} = t$

glierebbe a 22; e serberebbe col primo una determinata proporzio-

ne: ma $\int \frac{4}{ac} bz$, è infinitamente minore di 4. bz; dunque il fecondo ter-

mine è inassegnabile in riguardo al primo, e può cancellarsi nella equazione, onde s'abbia x = t. Abbiamo veduto nel corollario III.

del Problema I, che quando bz è immensamente maggiore di ac, il che interviene, prima che lo spazio z giunga ad essere finito, la velocità del suido scaturito dal vaso s'eguaglia a $\sqrt{2a}$. Si cavi la conM m m 2

 $\sqrt{2a}$ in tempo infinitesimo, e quindi egli è vero adequatamente, che l'acqua esce dal vaso con quella velocità, che un grave guadagna cadendo dall'altezza a. S'è parimenti avvertito nel mentovato Corollario, che lo spazio z si corre con equabile velocità. Viene ciò confermato dalla nostra equazione $t=\frac{z}{\sqrt{2a}}$; imperciocchè la velocità è costante,

quando i tempi stanno come gli spazi. Posto z=2a scopresi $t=\sqrt{2a}$, ch' è quello stesso tempo speso da un grave a discendere dalla sublimità a, principiando dalla quiete. In fatti colla velocità, che un corpo acquista cadendo dall'altezza a, in pari tempo si passa un doppio spazio z=2a.

SCOLIO I.

Essendo $\frac{fdz}{z} = \frac{dmu^2}{z}$, o sia $fdz = dmu^2$, e scorrendosi dalla mas-

fa dm = cdz nel tempo dt lo spazio dz colla velocità u, di modo che il verifica essere dz = udt, sostituito sin cambio di dz un tal valore nella sormola $fdz = dmu^2$, ci si presentetà fdt = dmu. Si verifica nel presente incontro, non solo la sormola Leibniziana $fdz = dmu^2$, ma

Se per procedere con maggiore esattezza, volesse taluno mettere a computo la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, bisognerebbe, che prima determinasse la figura del gorgo, ed indi si facesse ad indagare la forza viva del sluido nell'atto, che passa pel gorgo.

Per istabilire la figura del gorgo, ponghiamo' in opera il seguente

metodo. Suppongasi la forza f divenuta eguale a 2ac., e sia IG (Fig. 142.) quello spazio, pel quale agendo una forza costante, che determineremo in progresso, sia capace d'imprimere allo strato acqueo compreso fra i due circoli orizzontali SZT, KIL la velocità u = V2a., Ne segue, che esercitando azione la detta forza per lo spazio IZ, è atta a cagionare nello strato KT la velocità v, di cui è fornita l'acqua prima d'infinuarsi nel gorgo SMEFNT, e che di più essendo v minima relativamente ad u, lo spazio IZ è una parte infinitesima dello spazio IG. Ora per noi s'afferma, che quando tutta l'acqua KSMEFNTL è scaturita pel foro EF, è seguito un effetto tale, come se tutto il nominato liquore sosse passato dalla velocità nulla alla velocità u. S'intenda diviso il gorgo in un numero infinito n di strati; ciascuno eguale di massa allo strato KT, e tagliata IX = n. IZ, e condotto per X il piano circolare orizzontale UXY, immaginiamoci distribuita l'acqua UKLY in un numero di strati, ognuno eguale allo strato KT. Chiare fluiscono le conseguenze, che le quantità d'acqua UKLY, KSMEFNTL s'eguagliano, e che nell'istante, che questa ha terminato d'uscire dal vaso, è discesa quella ad occupare il sito in abbandono lasciato. Siano eF, ¿L due dei nominati strati, e si chiami eF ultimo ftrato inferiore , kL ultimo ftrato superiore . Premessa la supposizione, che la forza costante da determinarsi abbia facoltà d'agire solamente dentro del gorgo, o sia per lo spazio IG, e non più, si offervi, che nel momento, che l'acqua KSMEFNTL ha sinito di scaturire dal foro, la superficie ef dello strato eF ha scorso dentro del gorgo lo spazio gG, e la superficie corrispondente kl dello strato LL ha scorso dentro del gorgo lo spazio Ig, e che la somma di questi spazi s' eguaglia ad IG. Egli è dunque lo stesso, come se un folo strato fosse stato sollecitato per lo spazio IG. Non altrimenti eguale ad IG sarà l'aggregato degli spazi passati dentro del gorgo dalle coppie degli strati penultimo inferiore, penultimo superiore; antepenultimo inferiore, antepenultimo superiore, e così di seguito; di modo che quando è uscita tutta l'acqua, che dianzi occupava il gorgo, tanti firati, quanti compongono il gorgo stesso, sono stati stimolati da altrete tante forze eguali per lo spazio IG, ed an fatto acquisto della velocità u = \$\forall 20; intervenendo lo Itesso esfetto, come se tutta l'acqua del gorgo avesse fatto transito dalla velocità nulla alla velocità = u.

Giacche la forza costante, di cui si va in fraccia agendo per gli spazi IG, IZ cagiona nello strato KT le velocità u, v, serberanno queste la ragione $\sqrt{1G}:\sqrt{1Z}$; ma se dette velocità stanno come b:c: dunque ponendo IG=g avremo $b:c::\sqrt{g}:\sqrt{1Z}$, e conseguentemente $IZ=\frac{gc^2}{b^2}$. Eguagliandosi a b la sezione ST, agevolmente

si scopre essere la massa dello strato KT = gc^2 . Si chiami p la forza

cercata, che operando per lo spazio IG=g, imprime nello strato KT.

= $\frac{gc^2}{b}$ la velocità $u = \sqrt{2a}$, e dalla nota formola $pg = \frac{gc^2}{b}$. a rica-

weremo il valore della forza $p = ac^2$:

Sia lo strato KT giunto nel sito MN, e chiamata l'ascissa IO = x, e la sezione MN=x, saranno le velocità in MN, EF come \sqrt{x} : \sqrt{g} : ma le stesse velocità si devono riferire nella ragione inversa delle sezioni MN=x, EF=c, dunque \sqrt{x} : \sqrt{g} : 1: 1 analogia;

the ci fomministra l'equazione $y = c \sqrt{g}$, da cui resta determinata

la figura del gorgo:

Cerchiamo ora la quantità della massa sluida, dalla quale il gorgo è riempiuto. L'elemento della massa contenuta nella porzione di gorgo

SMNT è $ydx = \frac{cdx}{\sqrt{g}}$. Quindi integrando avremo la maffa SMNT,

= $\int y dx = 2c \sqrt{gx}$ — A. Si determina la costante A rissettendo; che quando $x = \frac{gc^2}{b^2} = 1Z$, è SMNT = $\int y dz = 0$. Questa condi-

zione ci dà $A = \frac{2gc^2}{b}$, e conseguentemente SMNT = $\frac{2c\sqrt{gx} - \frac{2gc^2}{b}}{b}$

ma la massa KSTL = $\frac{gc^2}{b}$; dunque KSMNTL = $2c \sqrt{gx} - \frac{2gc^2}{b}$.

quando x = g = IG. fara l'intera massa contenuta nel gorgo KSME FNTL = $2cg - gc^2$, o sia adequatamente = 2cg.

Si è per noi fatta la riflessione, che mentre è spicciata pel soro tutta l'acqua 20g, che capisce nel gorgo, è seguito lo stesso effetto, come se tutti gli strati componenti il gorgo, ognuno stimolato per lo spazio g dalla sorza ac^2 , avessero satto acquisto della velocità $u = \sqrt{2a}$.

Abbiamo scoperta la somma dei predetti strati = zeg. L'aggregato delle sorze degli strati medesimi si rende manisesto coll'avvertire, che se uno strato, la cui massa ge^z , è animato dalla sorza ae^z , il complesso di tutti

gli strati, cioè a dire la massa 2gc, verrà sollecitato dalla sorza 2ac, laquale agendo per lo spazio g cagionerà la sorza viva 2gc. $u^2 = 2gc. a_s$

ed imprimerà nella massa 2go la velocità u = V2a.

Deducendosi dalla stabilita sigura del gorgo quella stessa son alla sigura stessa del problema II. indipendentemente dalla sigura stessa abbiamo determinata con altro metodo, chiaramente si scopre, che la sigura da noi assegnata al gorgo si è quella, che viene effettuata dalla Natura.

Dalla formola
$$fg = 2cg \cdot u^z$$
 si ricava l'altra $f \cdot g = \frac{2gc \cdot u^z}{n}$, la

quale ha luogo anche quando la velocità n non è divenuta equabile; dovendosi considerare come costante la forza f, mentre agisce per uno spazio minimo, = g. In virtù dell'azione d'essa social forza adequatamente

costante deve passare l'acqua 2gc dalla velocità nulla alla velocità n colla

legge d'un grave cadente, il che necessariamente richiede la figura del gorgo da noi scoperta. S'osservi, che eguagliandosi f ad una sunzione dell'incognita z, il suo valore è costante, sino a tanto che non si varia la grandezza di z: ma uscendo pel soro la infinitesima quantità d'acqua 230, la z persiste adequatamente invariabile; dunque mentre esce il

fluido 280; la forza f si può considerare come costante. A norma de

ciò s'adempie la formola f, $g = \frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$, e segue lo stesso effetto, co-

me se la forza costante $\frac{f}{n}$ stimolasse la massa, che spiccia nuovamente

dal foro, per lo spazio g, e generalle in essa massa $\frac{2gc}{n}$ la forza viva

 $\frac{2gc}{n} \cdot \frac{u^2}{2}$. Le cose dette di sopra ci fanno toccar con mano, che se

conforme alla natura d'una forza costante le velocità anno da stare come le radici degli spazi, a cui s'applica la forza stella, il gorgo deve avere quella sigura, che abbiamo determinata.

S G O L I O III.

La forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo agevolmente si deziduce dalla figura del gorgo medesimo. La forza viva dello strato $kT = \frac{zc^2}{b}$, il quale si muove colla velocità $U = \frac{cu}{b}$, s' eguaglia a $\frac{zc^4}{b^3} \cdot \frac{u^a}{z}$.

Nel sito MN la velocità dello strato ydx pareggia la quantità cu, e quin-

di ne rifulta la forza viva dello firato fuddetto $= ydx \cdot \frac{c^2 u^2}{2y^2} = \frac{c^2 dx \cdot u^2}{y}$.

Si fostituisca in vece di σ il suo valore suggeritori dalla equazione $\sigma = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, da cui resta determinata la figura del gorgo, e ci si presenterà la \sqrt{x}

detta forza viva = $\frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2}$. Passando alla integrazione, scopriremo

ia forza viva dell'acqua KSMNTL = $\int \frac{cx^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{\frac{a}{3}cx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{u^2}{2}$

B. Si noti, che la velocità u va considerata come costante, cercandosi la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, mentre la velocità u nel sito EF in quel tal momento è di determinata misura. Ritrovasi il valore della costante B rislettendo, che quando $x = gc^2 = IZ$, la

forza viva dello strato KT s'eguaglia a $\frac{gc^4}{b^3} - \frac{u^2}{2}$. Avremo per tanto in

detta circostanza $\frac{2}{3}cg^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}} \cdot u^{2} \Rightarrow B = \frac{gc^{4}}{b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{u^{2}}{2}$, e per conseguenza,

 $B = \frac{1}{2}gc^4 \cdot u^2$. Sarà adunque la forza viva dell'acqua KSMNTL

$$\int \frac{cx^{\frac{2}{3}} dx \cdot u^{2}}{\sqrt{g}} = \frac{\frac{2}{5} cx^{\frac{3}{3}}}{\sqrt{g}} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \frac{x \cdot gc^{4} \cdot u^{2}}{b^{3}}, \text{ e posta } x = g, \text{ scopriremo la}$$

forza viva dell'acqua, che capisce nel gorgo, $=\frac{1}{3}cg+\frac{1}{3}\frac{gc^4}{b^3}\cdot\frac{2^2}{2}$,

cioè eguale adequatamente a $\frac{2}{3} c\bar{g} - \frac{u^2}{2}$

SCOLIO IV.

Prima d'indagare la velocità, colla quale l'acqua scaturisce pel foro EF, mettendo a computo la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, egli è d'uopo dimostrare, che quantunque la Natura formi nel sondo del vaso il gorgo KSMEFNTL, ciò non ostante quando la superficie superiore dell'acqua è discesa per lo spazio minimo HQ = s, la gravità dell'acqua insusa entro il vaso ha esercitata l'azione abs = acz. Egli è chiaro, che l'azione dell'acqua AL s'eguaglia ad abs — gbs. Resta adunque da provarsi, che l'azione della gravità del studo, che riempie il gorgo, pareggia la quantità gbs. L'acqua = RR = bs uscita dal vaso si consorma nel sito MN in un volume, la lui altezza = bs.

e quindi scaturita che sia pel soro l'acqua suddetta, lo strato ydx è disceso per lo spazio $\frac{bs}{y}$, e la sua gravità ha effettuata l'azione

 $=ydx \cdot bs = dx \cdot bs$, la quale si scopre eguale alla massa liquida bs

Opere Ricc. Tom. III.

Nna

for-

fcappata fuori dal vaso moltiplicata nell' altezza dx dello strato zdx. Verisseandosi ciò delle azioni di tutti gli strati, che sormano il gorgo, rendesi manisesto, che la somma delle predette azioni s' eguaglia alla grandezza bs moltiplicata nella somma delle altezze d'essi strati, ch' è quanto a dire nell'altezza g del gorgo, onde s' abbia l'azione della gravità dell'acqua occupante il gorgo = gbs, conseguentemente l'azione dell'acqua tutta contenuta nel vaso = abs = acz.

COROLLARIO

Qualunque sia la figura d'un vaso KSMEFNTL ripieno di fluido, l'azione della sua gravità è sempre eguale al prodotto gbs, e serba la ragione composta dell'altezza verticale g del liquore, della sua superficie superiore b, e dello spazietto parimente verticale s, pel quale la mentovata superficie è calata abbasso. Questo curioso Teorema rende sacilissima la dimostrazione, che insusa dell'acqua in due vasi comunicanti di qualsivoglia sigura, si sormerà l'equilibrio, quando le due superficie superiori dell'acqua nell'uno, e nell'altro vaso s'adatteranno allo stesso piano parallelo all'orizzonte. S'esprimano per b, B le nominate superficie, che stanno fra loro a livello, e se pur è possibile, la superficie b discenda per lo spazietto s, onde nel primo vaso segua l'azione positiva gbs. Egli è chiaro, che da un tal vaso è uscita l'acqua bs, e che essendosi alzato il livello del liquore nel vaso secondo per una quantità d'acqua = bs, ha preso questa la forma d'un volume, la cui altezza = bs. A norma di ciò la gravità dell'acqua contenuta nel secondo vaso B

è stata obbligata ad esercitare l'azione negativa gB . $\frac{bs}{B} = gbs$. Es-

sendo pertanto eguali, e contrarie le due azioni, che succedono ne due vasi comunicanti, l'una impedisce l'altra, nè segue alcun moto; perchè quanta forza viva genererebbe l'azione positiva, altrettanta ne estingue-rebbe l'azione eguale negativa.

SCOLIO V.

Ora riesce agevolissimo il determinare la velocità, colla quale l'acqua zampilla suori del vaso, senza trascurare la forza viva dell'acqua, che capisce nel gorgo. Avremo pertanto $abs = acz = \overline{ab-bs-bg}$. Uz

$$\frac{1}{3}$$
 $\frac{2cg}{cz} \cdot \frac{u^2}{cz}$, e fostituendo in vece di U² il suo valore $\frac{c^2u^2}{b^2}$, ed ef-

Settuate le dovute operazioni $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac-cs-gc+2bg+bz}} = n$, e cancel-

lati i termini cs, ge incomparabili, l'uno con ac, l'altro con $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2abz}$ = $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac+2bz+bz}}$ = $\frac{1}{2abz}$

COROLLARIO I.

Se la quantità bg è infinitamente minore di ac, si verissicano tutte le conseguenze contenute nei Corollari del Problema I.

COROLLARIO II.

Suppongafi, che bg corrisponda ad ac in proporzione finita, e nel principio del moto, quando bz è minima in paragone di ac, ci si presenterà

$$u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{ac + \frac{2}{a}bg}}$$
, la quale velocità sta a quella, che abbiamo deter-

minata nel Corollario I. del Problema I., come
$$\sqrt{ac}:\sqrt{ac+\frac{1}{c}bg}$$
.

Se essendo cresciuto lo spazio z, le grandezze ac, bg, bz avranno fra loro una relazione finita, si scoprirà altresì finita la velocità u =

$$\frac{\sqrt{zabz}}{\sqrt{ac+\frac{z}{3}bg+bz}}$$
, ma però minore di quella, che sta espressa nel Co-

rollario II. del Problema I. nella proporzione di
$$\sqrt{ac + b}: \sqrt{ac + bz}$$
.

Finalmente quando bz sarà infinita relativamente ad ac, e per confeguenza ancora relativamente a bg, il che può verificarsi mentre bz è minima, troveremo, come nel Corollario III. del citato Problema, $u=\sqrt{2a}$

COROLLARIO III.

Sia bg minima, e nello stesso infinita in confronto di ac, e sul cominciare del movimento, quando bz può trascurarsi respettivamente ad ac, sarà $u = \frac{\sqrt{2abz}}{2abz} = \sqrt{3az}$, cioè a dire infinitamente mi-

ad ac, farà
$$u = \frac{\sqrt{2abx}}{\sqrt{\frac{3}{2}bg}} = \frac{\sqrt{3ax}}{g}$$
, cioè a dire infinitamente mi-

nore della celerità = $\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{a\varepsilon}}$, che supponendo potersi negligere la sor-

za viva dell'acqua contenuta nel gorgo, abbiamo scoperta nel Corollario I. del Problema I. La velocità per altro del presente Corollario è maggiore di quella $=\sqrt{2z}$, che acquisterebbe la massa cz sollecitata per lo spazio z dalla sua gravità.

Seguiterà altresì ad esser minima la velocità
$$u = \frac{\sqrt{2abx}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg}}$$
, quando

ba serba relazione finita con ac, e perchè divenga finita essa velocità, bisognerà, che ba riguardi bg con proporzione finita, onde s'abbia u

$$\frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{3}bg + bz}}$$

Divenuta poi che sia la quantità bz infinita respettivamente a $b\bar{g}$, il che interviene stando ancora dentro i confini delle grandezze minime lo spazio z, ne risusterà, come nel Corollario III. del Problema I., $z = \sqrt{2a}$.

COROLLARIO IV.

Fingasi sinita l'altezza g del gorgo e sinattantochè sarà infinitesimo lo spazio z, avremo $u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{2bg}}$, e l'acqua uscita cz si muoverà con una minima velocità.

Acciocche la celerità del liquore giunga ad un valore finito, egli è d'uopo, che sia parimente finito lo spazio z, ed in tal circostanza

ci accorgeremo effere
$$u = \frac{\sqrt{2abz}}{\sqrt{\frac{2}{2}bz + bz}}$$
 fempre minore di $\sqrt{2a}$:

Solamente quando fosse $z = \infty$, avrebbe l'acqua scaturita cz fate to acquisto dopo un tempo infinito della velocità equabile $= \sqrt{2a}$.

Osservandosi, che l'acqua, che zampilla suori d'un vaso per un soro picciolo, perviene così presto alla equabile celerità, che il senso non sene accorge, egli è evidente, che la Natura determina minima l'altezza g del gorgo, ricavandosi dai sovrapposti Corollari, che l'acqua guadagna la vesocità equabile $\sqrt{2}a$, dopo aver corso uno spazio inassegnabile in tempo infinitesimo, purchè non esca dai limiti delle quantità immensamente picciole l'altezza g del gorgo suddetto.

Siccome nell'indagare le leggi delle vibrazioni delle corde sonore si suppone minima matematica la sorza, che le stimola al moto, e le conseguenze geometriche, che si deducono, s'adempiono poi sissicamente, quando alla sorza infinitesima si sostituisce la sorza minima sissica; non altrimenti se proprietà, che si sono scoperte, singendo infinitamente piccioli il soro aperto nel sondo del vaso, e l'altezza del gorgo, si verischeranno sissicamente, se il soro c sarà assai ristretto relativamente alla capacità del vaso, e l'altezza g del gorgo assai picciola.

Collo stesso metodo delle azioni si può trattare il caso, quando il soro c, e la base b del vaso cilindrico si riguardano in proporzione sinita: ma con ciò si sorpasserebbero quei confini, dai quali la presente Annotazione vien circonscritta.

SCHEDIASMA XXXVII.

De fochi primari, e secondari delle lenti sferiche.

LETTERA I.,

Che servi di risposta ad una del celebre Sig. Marchese Giovanni Poleni; scritta all' Autore li 28. Settembre dell'anno 1716.

Der soddissare pienamente al desiderio di VS. Illustrissima sarebbe necessario risormare in grap parte la Diottrica, scienza non per anche ridotta all'intiera sua persezione. Sin ora non sono stati considerati, se non i sochi principali nelle senti sseriche, mentre le paraboliche, l'iperboliche, e le elettriche, sopra di cui tanto e stato scritto, sono bensì le migliori, quando l'oggetto sia un punto indivisibile; ma qualor si supponga di certa determinata grandezza, diventano assai peggiori dell'ordinarie. Il celebre Cristiano Ughenio è stato il primo, che si sia messo a considerare i sochi chiamati da me secondari, ed a missurare l'aberrazione de raggi, che nasce dalla figura sserica, ma non è credibile quanto le sue conclusioni sieno dalla verità lontane, non perche le sue dimostrazioni geometriche odorino di paralogismo; ma perchè vinto dalla difficoltà della materia, sonda il suo discorso sopra una falsa supposizione, che debba cioè considerarsi come nulla, ovvero infinitamente piccola la grossezza della lente.

Supposta una facilissima maniera di trovare i sochi principali, e secondari, non è credibile quante verità importanti ci si presentino, e quanti errori si dileguino per questa strada: schbene molto più mi restra da scoprire di quello ho scoperto, e molti Teoremi sono così ardui, che sin ora non ho potuto superarli nè per via d'Analisi, nè col mezzo della Geometria.

E per dar un saggio della premessa dottrina, m'ingegnerò d'applicarla al nostro proposito, se non con tutta l'esattezza Geometrica, almeno con tanta, che potrà supplire al bisogno, ristringendomi ad una sola refrazione, essendo sacile l'estenderla a'casi più composti.

Sia dunque la linea circolare GF (Fig. 143.) quella, che divide due mezzi, uno più raro, l'altro più denfo. Sia BC l'oggetto espresso da una linea, in cui debbano considerarsi vari punti. In primo luos go considero il punto di mezzo A, e tirato il raggio ADQ, che passa per il centro D del segmento GF, non sarà esso soggetto a qualsissa restrazione.

Immaginiamoci due raggi da una parte, e dall'altra dell' asse AD allo stesso infinitamente prossimi; s'uniranno essi all'asse nel punto Q, che sarà il soco principale del punto A.

COROLLARIO I.

Se le distanze DA, DB, DC saranno o eguali, o quasi eguali, come accade quando l'oggetto è lontanissimo dal centro della superficie refringente GF, la curva PR sarà un arco di cerchio, com'è facile a dimostrarsi. Nelle altre ipotesi dipenderà dalla sigura dell'oggetto BAC.

COROLLARIO II.

Confidero di bel nuovo il punto medio A, e perchè oltre a'raggi, che diffonde infinitamente profiimi all'asse, illumina anche tutta lacurva GF, vediamo cosa succede ne'due raggi estremi AF, AG. Questi per le leggi della refrazione si congiungeranno in un punto di mezzo tra D, e Q, per esempio nel punto O, e li raggi-refratti saranno GO, FO, e tutti i raggi, che cadono dal punto A nelle porzioni di curve GE, EF, verranno ad unirsi con l'asse principale ne punti di mezzo tra O, e Q, così che la retta OQ sarà l'ampiezza di soco del punto A, che raggia sopra tutta la curva GEF, o sia l'aberrazione de raggi per causa della figura.

Passo ora al punto estremo C, il di cui asse è CLDP. Tirato il raggio estremo CF, prendo l'arco LH uguale all'arco LF, e li due raggi CH, CF si uniscano nel punto M. Egli è certo, che li raggi incidenti dal punto C nell'arco HLF s'uniranno a due a due con l'asse CP ne'punti di mezzo tra M, P, e parimente quelli del punto B ne' punti di mezzo tra N, R.

Resterebbero da considerarsi i raggi, che dal punto C cadono nella porzion della curva GH, come sarebbe il raggio CG, che ristatto verrebbe a congiungersi con l'asse CP nel punto e; ma perchè questo raggio, come altresì tutti gli altri tra G, ed H, è solo, e non ha il raggio corrispondente dalla parte opposta, così non può egli dipingere immagine, e non serve che a turbare la pittura, quando s'inoltra da e sino in y.

COROLLARIO III,

Li fochi M, O, N fono chiamati da me secondari: e perchè al punto A corrisponde il 1000 O del raggio coremo AF refratto in FO,

ed alli punti C, B li fochi M, N; corrisponderanno altresi a tutti i punti dell'oggetto BC i loro fochi secondari, che saranno tutti nella curva MON.

Questa curva viene rappresentata ottimamente dalla figura, ed è composta di due parti MO, ON, che formano un angolo curvilineo nel punto O; e la ragione si è, che l'ampiezza del soco QO appartenente al punto A e la massima, giacchè massima è l'apertura della lente EF; e per la stessa causa, come che l'apertura LF, LH del punto estremo C è la minima, così alla stessa risponde la minima ampiezza di soco MP. Non sarà frattanto difficile l'indagare la natura della curva MON.

Lo spazio compreso tra le due curve PQR, MON, e le due rette MP, NR è quello, che circoscrive li fochi di tutti li punti dell' oggetto BAC, in maniera che preso in detto spazio un punto ad arbbitrio, sarà facile il determinare quale sia il punto dell' oggetto, e quali li due punti corrispondenti della lente egualmente distanti dal loro asse, a cui il punto del soco appartiene.

Per esempio il punto d è il foco de due raggi, che uscendo dal punto C dell'oggetto, vanno ad incontrare la lente ne due punti egual-

mente distanti dall'asse CL situati fra L, F, ed L, H.

A questo passo ci si sa innanzi una quistione non men curiosa, che astrusa, e consiste nel determinare in qual sito si formi l'immagine più distinta. L'esperienza c'insegna non essere il suo luogo in POR, e molto meno in MON, ma piuttosto in un sito di mezzo fra le dette due curve, come deg. In fatti ricevuta in carta l' immagine, dov'è più chiara, e distinta, per esempio in c, se a poco a poco si accosta la carta alla lente, o da essa si allontana, non si scancella tutta in una volta l'immagine, ma si conserva per qualche spazio, quanzunque sempre più confusa; segno evidente, che la più distinta immagine non è nè in Q, nè in O. Essendo certo, che nel sito inseriore al punto Q, e nel superiore al punto O non si può formare immagine, perchè non si fa intersezione de raggi simili; ne segue, che principiandosi a dipingere l'oggetto in MON, e terminandosi la pittura in PQR, ne'siti predetti l'immagine sarà confusa, e la maggior distinzione sarà in un punto medio, come c, sebbene poi riesce difficilissimo il determinarlo geometricamente.

Da ciò si rende manisesta l'impersezione delle nostre lenti, nelle quali i sochi principali restano turbati da secondari, ed i secondari da principali. Per esempio li due raggi BG, BI, che restratti in GN, IN sormano il soco secondario N, prodotti che sieno, il primo viene a cadere in S suori dell'immagine PR, il secondo in a dentro l'immagine stessa, onde il primo sa, che l'immagine non sia ben termina-

ta, il secondo, che sia consusa.

Le premese meditazioni servono mirabilmente a dimostrare la mia asserzione, che ogni punto della retina riceve più sorte impressione dal Sole in parte ecclissato; sebbene poi è minore la parte, che riceve l'impressione.

Sia per tanto BC il diametro del Sole, ed HI l'apertura della lente. POR la linea de'fochi principali, deg quella de'fecondari, rispondendo l'ampiezza di foco cQ all'apertura HI. Figuriamoci, che s'ecclissi parte dell'oggetto BC, di modo che s'impicciolisca la linea luminosa BC, altro non accaderà, se non che si scancellino da una parte, e dall' altra i fochi contenuti a cagion d'esempio da due mistilinei Paku, Reib; onde lo spazio, che comprende tutti i sochi nella presente ipotefi. farà Ukib. Nel rimanente starà ferma l'ampiezza di foco cQ, e le curve Ub, Ki, come pure tutte l'altre, che compongono il prenominato spazio, riceveranno dai raggi quasi la stessa impressione di prima; mentre lo scancellarsi una parte dell' immagine non leva la forza a" raggi, che dipingono l'altra parte, che si conserva. Ho detto quasi, perchè fo, che resterebbero tolti di mezzo alcuni raggi di poco momento appartenenti a' punti lucidi ecclissati, e che obbliquamente venivano a cadere nello spazio vkib, almeno nelle lenti ordinarie, perchè nell'occhio ciò non accade, come toccheremo in progresso. Sarà dunque minore lo spazio delle immagini, ma non minore l'impressione: il che ec.

Di più stando pure l'oggetto BC, come sopra, in parte ecclissato, si faccia maggiore l'apertura della lente da H sino in G, e da I sino in F; ed in questo caso non diventerà più grande l'immagine vb, come nè meno la ki, ma solo crescerà l'ampiezza de sochi, come per esempio il punto lucido A in cambio dell'ampiezza di soco Qc, avrà l'ampiezza QO, e così tutti gli altri proporzionatamente: onde lo spazio de sochi non sarà più vkib, ma UMNB, ed in conseguenza la linea PR, oltre l'antica impressione, verrà a ricevere tutti que raggi, che restatti dalle curve GH, IF vengono a congiungersi nello spazio fra le curve MON, kci, ed indi di nuovo separati serissono la curva Ub: sarà dunque maggiore l'impressione, supposto l'oggetto in parte ecclissato, mentre si ammette, che in questo caso sia maggiore l'aper-

· tura della lente, o della pupilla: il che ec.

Quest'asserzione tanto più trova luogo nell'occhio, quanto che la Natura corregge con una mirabile sagacità i disetti delle lenti ordinarie con levare l'ampiezza de' fochi, e renderla nulla. Tutti i raggi dunque, che partono da tutti i punti dell'oggetto, e cadono sopra la curva GF, i di cui sochi respettivamenre nelle lenti di vetro vengono a sormare lo spazio PMNR, dalla Natura vengono obbligati ad unissi nella linea deg, o almeno in uno spazio indefinitamente picciolo, così che quanto più aperta sarà la pupilla, resterà introdotta maggior quantità di raggi, ed in conseguenza la retina deg, in cui tutti i sochi vengono a finire, riceverà una maggior impressione. Non è maraviglia dunque, se nell'occhio è sempre distinta, e ben terminata l'immagine; mentre il punto A dell'oggetto in vece di stendere tutti i suoi sochi per la linea QO, li restringe nel solo punto c, con che si toglie la consusione, perchè ogni punto della retina altri raggi non riceve, se non quelli, che partono da un solo punto dell'oggetto.

Come poi la Natura ottenga l'intento, non è difficile da spiegarsi con i Canoni della Diottrica, supposti nuovi Teoremi, che io andrò indicando; mentre sarebbe troppo prolissa la dimostrazione.

Primo sia una lente convesso-convessa composta di due archi di cerchio dello stesso diametro ACBD (Fig. 144.) dico, che se si allontaneranno le due porzioni ACB, ADB, di maniera che si formi la figura ACBFDE tutta solida, e della stessa materia refringente, quanto più si discosteranno fra loro li due archi ACB, EDF, tanto minore sa l'ampiezza de'fochi, sino ad un certo segno però, mentre avremo la minima aberrazione, quando l'asse CD sarà eguale a due semidiametri, e le due porzioni ACB, EDF sieno parti opposte d'una ssera. Che se si facesse ancora maggiore la distanza, e l'asse CD sosse più grande del diametro della ssera suddetta, l'ampiezza de'fochi tornerebbe a crescere: onde si scopre manisestamente la ragione, per cui la Natura ha dato la figura sserica, e non lenticulare a tutto il complesso degli umori dell'occhio.

In secondo luogo la varietà delle refrazioni, per cui si passa prima dall'aria all'umor acqueo, indi al più denfo, ch'è il cristallino, e di nuovo al più raro, croè al vitreo, cagiona due maravigliofi effetti; primo, che si abbrevia in maniera l'aberrazione, che diventa quasi nulla, o almeno minima; secondo, che la linea de'fochi, in cui si dipinge l'immagine, s'accosta tanto alla superficie interiore dell'occhio, che quasi s'unisce con la convessità del diafano, e termina nella retina, che viene a vestire l'umor vitreo; altrimente farebbe stata obbligata la Natura ad allontanare la retina dall'occhio, e formarci due tubi in capo con grave incomodo dell'organizzazione. Si aggrunga, che l'umore di mezzo, vale a dire il cristallino, ne ben folido, ne ben fluido, è disposto a diversi strati d'inegual densità, più rari verso la superficie, e più densi verso il centro, come si scopre guando si sciolga a poco a poco nell'acqua; onde il raggio viene a patire innumerabili refrazioni, e con ciò la Natura ottiene tanto più facilmente i divisati effetti, massime avendo formata la lente del cristallino in maniera, che la parte più ottusa è voltata verso gli oggetti, e la più actita verso la retina. Con questi principi non senza difficoltà dimostrati per via di Geometria ordinaria, avendo sperimentata inutile l'analifi, io sono venuto in cognizione della vera teoria della visione, e solo mi resta da considerare con qual artifizio la Natura corregga il disetto, che nasce dall'aberrazione Nevytoniana, sopra di che non ho faputo per anco foddisfare a me stesso.

Con l'occasione, che mi si è presentata, ho stimato bene d'indicare a V.S. Illustrissima le verità da me ritrovate, assine di sentire il suo prudentissimo parere.

Nell'estratto, che ho per le mani, della grand'Opera del Sig. Ermanno io ci trovo più difficoltà di quello io supponeva, per mettere in tutto il suo lume, e con la dovuta brevità non solo i gran principi, di cui è seconda, ma inoltre la mirabile industria, con la quale

adatta i principi a' Problemi particolari; santo più che i Teoremi sono espressi in una sorma si sublime, e si generale, che non si poteva attendere, se non da un soggetto tanto versato nell'interior Geometria.

Avrà finalmente VS. Illustrissima la bontà di compatire il lungo tedio, che con le presenti le reco, e di credermi a tutta prova.

LETTERA II.,

Colla quale l'Autore rispose ad una lettera del Sig. Marchese Poleni in data de 18. Marzo dell'anno 1717.

Non aveva V. S. Illustrissima alcun motivo di replicare alla mia lunga, e pur troppo nojosa lettera; sì perchè in essa altro non si conteneva, che una semplice risposta ad una sua antecedente; come pure perchè mi sono abbastanza note le sue dotte occupazioni: ond'io non pretendo mai di frastornarla da' suoi studi più serj, acciò perda il tempo, e l'opera intorno le mie speculazioni da me conosciute, e consessate per debolissime. Gli ussici di scusa per tanto, che Ella per sua bontà passa meco in questo incontro, sono essetti della sua benignità,

e non di qual si sia obbligazione.

Osservo nel tempo stesso la difficoltà, che da Lei s'incontra nelle materie diottriche. Ella pensa, che le curve, in cui si terminano i sochi, sieno più rimote dalla pupilla, che non è la retina, e che non ostante ciò l'immagine paja distinta, perchè sia quasi la stessa l'azione de' raggi, o urtino questi nella retina nel punto preciso della loro congiunzione, o poco prima, o poco dopo, e di ciò aversene esperienza nella Camera oscura, ove l'immagine, che sembra la più persetta, non apparisce in un punto indivisibile, ma in qualche sensibile distanza. Soggiunge poi, che siminuita la grandezza d'un oggetto luminoso, minor copia di raggi viene a serir l'occhio; ma che quelli, che pur vi giungono, non mutano natura a causa di quelli, che si perdono.

Già sa V. S. Illustris, che quando geometricamente si parla, si tocca il preciso, e quando poi si sa passaggio dalla Geometria alla Fissica, il preciso si cambia in prossimo. Le sue osservazioni sono verissime, ed io non sono persuaso, che l'occhio sia una struttura così persetta, di modo che sin esso non abbia a notarsi qualunque minimo difetto: dirò bensì, che le mancanze sono insensibili, e corrette a bello studio dalla Natura con un'arte impareggiabile; onde chi si prende la briga di contemplarlo più da presso, dee prescindere da queste picco le imperfezioni, ed indagarne la consormazione in tutto il rigore di Geometria, giacchè scoperto per questa strada l'artifizio inimitabile, con cui è stato organizzato dalla Natura, dall'occhio puramente ideale può far passaggio al reale, e considerare, che non ostante la contumacia della materia sisca, la visione è così perfetta, che poco più sincera si sperimenterebbe in un occhio lavorato da una scrupolosa Geometria.

Per cagion d'esempio sia vera l'ipotesi di V. S. Illustrissima, che i raggi non vanno ad urtare nella retina nel punto preciso della loro unione: sarà frattanto necessario, ch' Ella confessi, che la loro unione si faccia in un fito così proffimo alla retina, che fra un punto, e l'altro non ci sia distanza sensibile, e che un punto possa prendersi per l'altro fisicamente; altrimenti come potrebbe spiegarsi il disetto de Presbiti, e de'Miopi, ne' quali si sa, che i raggi o troppo tardi, o troppo presto si uniscono, e dee in conseguenza esser corretto con le lenti convesse, o concave.

Nella Camera oscura non è maraviglia, che si osservi l'immagine con quasi egual distinzione in qualche spazio sensibile. Le lenti di vetro, che anno una grande ampiezza di foco sono la cagione di questo effetto; conciossiache li raggi, che vengono da vari punti dell' oggetto, e si rifrangono da vari punti della lente, si uniscono in diverse distanze, onde nello sparire d'un foco, alterandosi la distanza, supplisce l'altro, ma pure l'immagine s'offerva mal terminata: non così nell'occhio, in cui dalla Natura resta corretta qualsisia aberrazione soggetta a' sensi.

In prova di ciò debbo notare effere la Natura più delicata nelle sue operazioni di quello c'immaginiamo. Sin qui la Diottrica non ha messo in uso, se non lenti-impersette; mentre le caustiche del Cartefio, quand'anche potessero ridursi alla pratica, il che mi sembra impossibile, riuscirebbero peggiori dell'altre, supposto che l'oggetto non sosse un punto. Dopo dunque d'aver esaminate le lenti circolari di vetro, e scoperte le loro mancanze, mi sono avanzato a confiderare quelle che sono composte di due diafani, cioè di vetro, e d'acqua ricordate dall'incomparabile Sig. Nevvton. Applicata ad esse la mia Teoria, ho scoperte alcune loro ammirabili proprietà, che mi sembrano degne della sua crudita curiosità.

Sieno due pezzi di vetro lavorati, come nella Fig. 145., eguali, o ineguali, poco importa, purchè sieno soggetti ad una certa geometrica determinazione li semidiametri delle circonferenze tanto esterne, quanto interne, che compongono le accennate lunule, ed in oltre possano persettamente unirsi li due vetri a formare una lente intiera, in cui la cavità, che verrebbe a restar vuota nel mezzo, da me si suppone riempiuta d'acqua. Sia la retta AB asse della lente, ed il raggio infinitamente proffimo, e parallelo ad AB si congiunga con l'asse stesso nel punto E. Prendo una data apertura DB, che fara sempre la medesima anche ne' seguenti casi, e condotto il raggio CD parallelo ad AB, ho fcoperto col calcolo, e con l'affezione geometrica, che questo dopo quattro refrazioni verrà ad unirfi con l'affe in F, e la diffanza FG farà maggiore di EG; così che EF sarà l'aberrazione corrispondente all'apertura BD nella nostra ipotefi, che io chiamerò negativa; perchè il raggio estremo CD si unisce con l'arte in maggior distanza dall'infinitamente vicino. Fra li due vetri immaginiamoci frapposto un tubo cilindrico vuoto nel mezzo HH, come nella figura 146., e se farà E il foco del raggio infinitamente proffimo, F sarà il foco del raggio estremo CD; onde essendo, la distanza FG minore di EG, tutto al riverso

del caso antecedente, chiamerò positiva l'aberrazione EF.

Comprenda V. S. Illustrissima, che passandosi ne predetti due casi dall'aberrazione negativa all'affermativa, egli è necessario, che si dia un terzo caso, e che in una determinata altezza del tubo HH, che non è difficile a ritrovarsi per via d'Analisi, o di Geometria, i due raggi, uno infinitamente prossimo all'asse, e l'altro CD, da' quali viene determinata l'apertura BD della lente, s' uniscano nel medesimo punto. ed i due punti F, E si confondano, ed in conseguenza l'aberrazione diventi nulla. Ho detto nulla, non perchè io creda, che la predetta costituzione di lente acqueo-vitrea fia persettamente caustica, essendo che i raggi paralleli, che vengono ad urtar nella lente fra due punti B, D, non an precisamente il loro foco nel punto medesimo, in cui concorrono i due raggi prossimo, ed estremo, ma non ostante ciò deviano così poco, che se il punto dell'unione di tutti i raggi non è lo stesso geometricamente, almeno può prenderfi per tale fisicamente. Nelle lenti comuni di vetro a misura dell'apertura della lente cresce l'aberrazione; onde all' arco BD corrisponde maggior ampiezza di soco, di quella risponde all'arco minore BI: ma nelle nostre sino al punto I va crescendo l'aberrazione, e da I in D torna a decrescere, di modo: che come abbiamo detto, i due punti B, D anno lo stesso foco. Aggiungali, che nelle lenti acqueo-vitree l'aberrazione è assai minore, che nelle volgari, e spesse siate, se il calcolo non m'inganna, in eguali circostanze, e in proporzione come uno a dieci, onde per tutti i capi si manifesta la persezione delle nostre lenti.

Restava solo a vedersi, se l'esperienza corrispondeva alla Teorica, tanto più che io sospettava, che non venisse a turbare il tutto quella sorte di aberrazione, che dal suo Autore chiamasi Nevvtoniana, e che non dipende dalla figura, ma dalla varia refrangibilità. Il Sig. Giovanni Rizzetti ne prese sopra di se il carico, e fabbricati i vetri, trovò il modo d'adattarli, che potessero facilmente ricever l'acqua nel loro va-

no, e discostarsi uno dall'altro a misura del bisogno.

Per quello poi mi afficura V. S. Illustris, che il Sig. Niccolò Bernoulli, che degnamente occupa la cattedra delle Matematiche in cotesta Università, ha qualche stima particolare della mia debolezza, ciò è tutta cortesia del mentovato Sig., a cui per una sì buona disposizione io rendo le dovute grazie. Per conto mio la piccola contesa avuta seco non-ha punto alterato il concetto, che di già aveva dentro me stesso formato dalla sua abilità; ed incontrerò volentieri l'occasione di servirlo, tanto più, quanto per ora è fatto de'nostri.

Io sono dietro alla soluzione d'un arduo Problema ssuggito-alla perspicacia de'Sig. Nevvton, ed Ermanno, che ci anno pensato sopra, ma non ne sono venuti a capo, forse per non aver essi nelle mani un metodo di separar le variabili, che potesse estendersi alla seguente quistione. Posto, ch'un pendolo si vibri in una cicloide, e che la resistenza del mezzo sia come la velocità del mobile, determinare in ogni punto

della curva la velocità del pendolo stesso. Quando la cicloide si singa stesa in una linea retta, la curva delle resistenze è stata creduta dal Sig. Nevvton prossimamente una ellissi, e dal Sig. Ermanno una curva trascendente sin ora ignota, come dallo Scolio pag. 338. Ambidue si fono ingannati; mentre variandos la ragione della resistenza alla velocità attuale del mobile, che sebbene si pone costante, può però prenderfi in qualunque data ragione a misura della maggiore, o minore tenacità del fluido, si varia anche la curva delle velocità, e delle refistenze; onde infinite curve parte Algebraiche, e parte trascendenti, ponno satisfare al quisito. Per due diverse strade sono pervenuto alla bramata soluzione, di cui mi sono invaghito, avendo scoperte alcune cose sin ora ignote a Geometri, fra le quali il seguente Teorema, che le curve per esempio paraboliche, il di cui esponente è immaginario, dipendono nella lor costruzione dalla quadratura del cerchio, e non sono curve immaginarie, come tal uno si sarebbe dato a credere. Se V. S. Illustrissima parteciperà questo Problema al Sig. Bernoulli, ed avrà la bontà di farmi sapere il suo sentimento, l'ascriverò a sommo favore, e se mi verrà da Lei comandato, le trasmetterò, se non altro l'analifi, con la quale si può facilmente sar passaggio all'affezione Geometrica.

E' pregata finalmente V.S. Illustrissima a darmi notizia di qualche novità letteraria, come altresì di ciò, che da Lei si va meditando: mentre io col solito osseguio mi protesto.

SCHEDIASMA XXXVIII.

Omnes radii paralleli in sphæram incidentes duplicem refractionem pariuntur.

CIt sphæra AC (Fig. 147.) cujus axis ACD transiens per centrum B: dico omnes radios axi parallelos, qui veniunt ex medio rariori, & incidunt in superficiem sphæræ densioris, geminam refractionem pati, ita ut nullus reflectatur, quacumque posita proportione refractionis.

Sit diameter FBK normalis ad axem, & radius EF infinite proximus rectæ tangenti circulum in puncto F fit postremus ex incidentibus, qui inflexus a prima refractione perveniat ad punctum D, secetque in puncto G inferiorem circuli peripheriam, & cum FD ad DB fit in ratione refractionis, quæcumque possit esse hæc ratio, dico

Primo prædictum radium refractum FG in puncto G novam pati

refractionem.

Secundo, quod servata eadem refractionis lege, si radius ex puncto F incidat in quodcumque punctum arcus FG, inter F, & G, refractionem pati.

Ad utramque affertionem demonstrandam per centrum B, & per punctum G agatur recta BGH, & ex puncto D ad rectam BH demittatur

perpendicularis DH: dico GD ad DH effe in proportione refractionis FD ad DB. Producta GB usque ad peripheriam in I, ducatur FI. In triangulo DFB angulus ad punctum F, seu angulus GFK insistit arcui circulari GK, & in triangulo FGI angulus FGI infiftit arcui FI: sed prædicti arcus GK, FI funt æquales, anguli enim GBK, FBI oppoliti ad verticem funt æquales; ergo angulus BFD est æqualis angulo FGI: rurfus in iisdem triangulis DBF, IFG anguli ad puncta B, & F sunt æquales, utpote recti, primus ex constructione, secundus, quia est in semicirculo; ergo triangula DBF, IFG sunt similia: sed triangulo IFG est simile etiam triangulum DHG ob æquales angulos ad punctum G. & insuper angulos rectos ad puncta F, & H; ergo triangulum GDH simile est FDB; ergo FD : DB : : GD : DH . Hinc si per punctum G ducazur GL parallela ipsie HD, erit GL radius refractus puncti G.

Cum autem linea DH sit normalis ad BH, evidens est, facta eadem. constructione, radium GL esse ultimum refractum : quod erat demon-

Arandum .

SCHOLION.

Poterat etiam demonstrari eadem propositio ex mirabili circuls proprietate, scilicet, quod sumpto ad libitum puncto G, & ducta FGD, rectangulum DFG femper est constans, & æquale duplo quadrato FB.

Hoc autem patet ex sequenti analisi .

Sit BC = a, CD = x, rectangulum $ADC = 2ax + x^2$: fed re-Cangulum ADC = rectangulo FDG; ergo FDG = 2ax + x2, sed quadratum FD æquale duobus quadratis FB, DB, hoc est 2a2 + 2ax +x2; fubtrahe rectangulum FGD = 2ax + xz, remanet rectangulum DFC = 2a2: quod erat demonstrandum.

SCHEDIASMA XXXIX.

Dell'analogia fra i suoni, ed i colori, e del vero metodo di filosofare, in Fisica.

LETTERA I.

Del Padre D. Gio: Bernardo Pisenti C. R. S. all' Autore:

Plo fcorsa ultimamente l'Ottica del Sig. Nevvton, in cui bisogna certamente ammirare la scelta delle sperienze così ingegnose, che vi si trovano, così connesse, così cospiranti ad uno scopo, e cotanto circostanziate. Mi par in oltre di poter dire, riguardo ad alcune cose, ciò che del Descartes dicea Leibnizio, ch'ella c'introduce nell'Anticamera della verità: in fatti o non potiamo noi del tutto entrare in quest'anticamera, o non vi è altra porta da penetrarvi, che per i Fe-

nomeni, e per la Geometria. Ma un Fisico, credo io, deve andare più lungi, col fabbricar qualche Teoria sopra i Fenomeni, e particolarizzare le idee astratte della Geometria. Per avventura Descartes ha inteso questo più del Sig. Nevvton, e attaccatosi fortemente al suo gran Principio dell' Idee chiare, e distinte, che si prendono unicamente da una meccanica soggetta ai sensi, si abbandonò troppo alle Ipotesi, e alle analogie dei moti sensibili. Ma se la natura si potesse per questa via di una intelligibil meccanica feguitare, io non vedo perchè non dovesse coltivarsi il suo metodo. Il Sig. Nevvton medesimo nelle Quistioni dopo l'Ottica pare più pender a questo metodo, che ad altro, quando vuol rendere ragioni fifiche di qualche Fenomeno. Lo vediamo supporre ora un Fluido etereo per esplicar la Gravità, e l'azione de corpi sù la Luce, con una certa gradazione di densità nelle parti di esso fluido, ora essluvi intorno la calamita, ec. Può essere, che io intraprenda a spiegar la sua ottica più fisicamente di quello egli ha fatto. Io stabilisco per Principio, che i Fluidi Naturali sono eterogenei, che un tal fluido è la Luce, le cui parti varian perciò in grossezza, e forza, o vibrazione. Un certo tremore nel timpano, o nei nervi dell'. Udito porta il senso di un certo suono, e se vi è un certo accordo nelle vibrazioni delle corde sonore, questo ci cagiona un grato sentimento. Perchè non potrebbe essere altrettanto de' Nervi Ottici percossi dai raggi con un certo grado di forza, o separatamente, o più insieme? E certo si sente un qualche accordo di colori, che diletta, come uno di suoni, ch'è grato. Se a V. S. Allastrissima non riuscisse di troppo incomodo, ardirei pregarla di qualche suo saggio sù l'analogia dell' smpressioni del fluido aereo sù l'orecchio coll' impressioni del fluido luminoso sù l'occhio, ed in oltre, ch'Ella si prendesse la pena di esaminar due luoghi del suddetto Libro del Sig. Nevvton, che sono consimili; uno nell'Ottica stessa (1); l'altro nelle Quistioni (2), ove si parla dell'alternativa del Lume nel riflettersi, e nel trasmettersi delle lamette trasparenti. Puossi intendere ciò, che dice l'Autore, del Fluido etereo elastico, colle cui vibrazioni ora cospiri, ora no il moto dei raggi? ovvero ha V. S. Illustrissima qualche nuova spiegazione d'un fatto così sorprendente? Egli mi pare la cosa più strana del mondo, e il Fenomeno più difficile di tutta l'Ottica. Come la stessa lametta o aerea, o di acqua, o d'altro fottil mezzo, folo perchè a tutte le parti della sua superfizie non corrisponde la stessa grossezza, hassi da tingere qui d'un colore, là d'un altro con l'ordine, e successione, che si dice nella sperienza? E se vi cada sopra un solo lume omogeneo, per efem-

(1) Pag. 279. (io mi servo dell'edizione latina di Londra 1719.) dopo alcune cose: cumque radius aliquis sit in ea vibrationis parte, qua cum motu suo conspiret, tum eum per superficiem refringentem facile transmitti, &c. Opt. Lib. 2. Part. 3. Prop. 12.

(2) Qast. 29. pag. 376. Al hac, quò radii tuminis alternas babeant facilioris restexionis; & facilioris transmissus vices, &c.

esempio, rosso, o violetto; perchè si fanno un sì, un no quelli annelli rossi, o violetti, restando in mezzo a loro que vuoti, per cui passano gli stessi colori, che vanno a dipingere sopra una superfizie bianca posta di dietro altri annelli pure rossi, o violetti opposti a que vuoti rimasti fra i primi della lametta? Anzi perchè quella parte della lametta, che trasmette il lume di un colore, ristette un altro? ed altre maraviglie. Io le confesso, che mi sembra qui la Natura affettare le mai la massima oscurità, e bizzarria di condotta. Ho cercata, e dimandata ad altri sempre inutilmente qualche meccanica ragione, (io voglio dire sciolta dalla cortina di qualità occulte, come sarebbe un' attrazione, di cui non si ha idea) in somma qualche ragione appoggiata ad idee di corpo, e di moto, non ad idee indefinite di Geometria, come sono e, od y nell' Analisi, prima che si abbiano determinate. Se si può spicgare meccanicamente la rislessione, e la rifrazione del Lume, perchè non si può rendere ragione di un Fenomeno, ch'è solo un accidente di quelle? E' pure un accidente di quelle proprietà, che il lume con una certa incidenza sopra il mezzo disferente rifrangasi, e con un'altra più obbliqua riflettafi. Ma questo ancora quanto è strano? Conoscendo io i progressi di V.S. Illustrissima in ogni parte delle più belle cognizioni naturali, ed ancora la facilità, con la quale è folita benignamente impartire ad altri i suoi lumi, non ho avuta difficoltà a dimanderle sopra tal materia il suo sentimento; nè dubiterò a rettificar sopra di esfo i miei pensieri, o a cangiar qualunque Ipotesi io potessi aver conceputa. Attenderò con tutto il suo comodo le sue grazie, e con tutto il possibile rispetto mi dico.

Padova 6. Luglio 1736.

LETTERA II.

Dell'Autore al Padre D. Gio. Bernardo Pifenti.

Dopo un lungo foggiorno in Friuli restituitomi sinalmente a Casa trovo un gentilissimo foglio di V. S. Reverendissima, in cui vari
particolari si comprendono, ai quali non si vuole rispondere, come
dir sogliamo, su due piedi: tanto più che bisognerebbe entrare in una
delicata quistione intorno i metodi di filosofare in Fisica, e spiegare alcuni de più astrusi, e complicati Fenomeni dell' Ottica Nevvtoniana.

Nella presente lettera dirò qualche cosa concernente l'analogismo tra il suono, e la luce, sopra la quale in altro tempo ho io seria-

mente pensato, senza poter mai satisfare a me medesimo.

Nei suoni tre proprietà io considero, cioè a dire primieramente il tuono, che si varia in passando dal grave all'acuto, o al rovescio: secondariamente il piano, ed il sorte, secondo che l'impressione nel nostro orecchio, persistendo lo stesso tuono, si sa più risentita, o più lan-

guida; in terzo luogo la diversità, che passa fra suono, e suono, come per esempio quella, che si ravvisa fra la tromba, ed il violino.

Ognuno sa, che la prima affezione dipende dai tempr, e la seconda dalla maggiore, o minore espansione dell'onde aeree, alla quale corrisponde il maggiore, o minore stiramento delle fibre del sensorio. Su questo punto ho io data suori una dissertazione inserita nei supplementi al Giornale d'Italia, investigando, qualmente la forza degli obbietti venga modificata dalla reazione degli Organi. La terza affezione è più malagevole da concepirsi; conciossiachè dannosi suoni totalmente differenti, i quali fra loro convengono, e nel tempo delle oscillazioni, e per la forza, che obbliga le nostre fibrille a piegarsi egualmente. Con tutto ciò essendo facile a capire, che le onde dell'aria possono in maniere innumerabili incresparsi, a misura che vengono messe in moto dai corpi sonori diversamente tremanti, così che oltre il reciprocare del fluido elastico, ed oltre il dilatarsi in cerchio, ad ogni sua particella s'imprima un tremito, ed una subsultazione diversa, formeremo almeno in confuso una qualche idea della varietà de' fuoni, che ci seriscono le orecchie.

Non occorre però lufingarfi, che possiamo particolarmente sapere in quale precisa disposizione si disposiga l'increspamento dell'aria, ogni qual volta per noi si sente il suono d'una trombetta, o di un violino: aggiugnerò solamente, che ci si apre la strada di spiegare per qual cagione alcuni fuoni fi giudichino dolci, e foavi, ed altri aspri, ed inconditi. Una corda d'intestini si chiama fassa, quando divisa, per cagion d'esempio, in due parti eguali, una metà rende un suono, e l'altra un'altro; di modo che non essendo la funicella per tutta la sua lunghezza uniforme, in toccandola tutta intiera rifponde con due differenti fuoni, che in un solo nojoso, ed ingrato si consondono. Similmente se movendo lentamente il cavicchio d'un Violino andiamo fregando con l'arco la corda corrispondente, s'ode uno stridore aspro, ed insoffribile, il quale altro non è, che una mistura, e confusione di tutti que'tuoni, che alla fune successivamente stirata convengono. Per la diversità de' suoni poi si osservi, che un violino toccato col dito sa un suono, e con l'arco un altro tanto differente, quanto lo rendono due differenti stromenti: lo che succede per la varia impressione, che alla corda resta comunicata specialmente dall'archetto, che è una spezie di ſega.

Passo ora a considerare la luce: e siccome non ci arrecano difficoltà le impressioni più forti, o più fiacche dello stesso genere dipendenti dalla energia più grande, o più picciola degli oggetti; così passando secondo il sentimento di V. S. Reverendissima una qualche analogia fra i suoni differenti, e le varie modificazioni del lume, o vogliam dire i colori, se questi con i diversi increspamenti dell'etere spiegar si debbono, ricadiamo nelle ipotefi del Cartefio, o fimili. In questo mentre ella battendo una nuova strada, suppone essere eterogenei i fluidi naturali, e fra essi la luce, le cui parti variano in grossezza, e forza, o vibrazione.

Se noi vogliam procedere per idee chiare, e distinte, diremo, che la forza di due atomi di luce sta in ragione composta delle masse, e delle velocità o semplici, o dupplicate (non essendo questo nè il tempo, nè il luogo di decidere la famosa controversia), dunque sarà dotata di forza maggiore una particella di luce, che cammina fotto mafse pari con maggiore celerità, e conseguentemente se noi prenderemo quella, in cui risiede la velocità massima, patirà essa la massima refrazione, e sveglierà nel nostro occhio il sentimento del colore violetto più scuro, e più vicino al negro, o sia alla privazione del lume. Temo forte, che l'ipotesi mal s'adatti agli sperimenti; e per darne un faggio, se noi con l'occhio armato d'un Telescopio stiamo aspettando l'emersione d'un Satellite dall'ombra, e dal corpo di Giove, la luce, che si parte dal Satellite per giugnere a noi c'impiega, mentre si propaghi in tempo, lo spazio di alquanti secondi, e la prima ad arrivare alla nostra pupilla sarà certamente quella, le di cui particelle sono dotate della massima velocità, o della massima forza: per la qual causa si dovrebbe vedere il disco della Lunula gioviale tinto di violetto, indi di turchino, poi di verde, aureo, giallo, e rosso secondo la serie de colori, e finalmente bianco, qualora la retina è ferita nel tempo medefimo dalle particole luminose di tutti i generi, e si fa un impressione media fra le più gagliarde, e le più languide. Ora io so, che così in fatto non interviene.

Nè mi fi dica, che tutti gli atomi del lume procedono con pari celerità, e che la diversità della forza dee desumersi dalle masse, cioè dalla maggior quantità di materia, che una particella luminosa rispetto all'altra contiene fotto pari volume; perche io bramerei capire come le più dense siano soggette ad una maggior refrazione, ed a molti altri giuochi, che giusta la Teorica del Cav. Nevvton sa di mestieri ammettere nella luce. Aggiungo, che la maggior forza degli obbietti lucidi confiste nella quantità delle particelle, che di conserva piegano, ed incurvano le fibrille dell'occhio, e cento di esse, che fossero più dense, faranno lo stesso effetto, come un maggior numero di più rare, senza che si capisca il motivo, per cui le più dense abbiano a produrre il color violetto, e le più rare il rosso, non ostante che la sibra medesima sia sollecitata da una pari forza.

Bisogna per tanto ricorrere, per ispiegare la diversità dei colori, a qualche altra modificazione degli atomi luminofi, adattando cioè a dire le speculazioni Cartesiane, ovvero contentandosi di ricevere il princi-

pio Nevvtoniano, che i raggi sono tali di lor natura.

Io per dirle il vero sono da lungo tempo persuaso, che i colori altro non fieno, che un velamento di chiaro, ed oscuro, e ne ho sperimenti, che non mi lasciano dubitare di tal verità, ch'è un principio d'esperienza, vale a dire una ipotesi d'occhi, e non di cervello. Con questo principio alle mani mi riesce di spiegare ugualmente i senomeni e più semplici, e più complicati. D'un solo voglio sare ora parola. Se mentre il Sole è prossimo all'orizzonte, io ci tengo fermo per qualche ·

Ppp2

che tempo lo sguardo, indi chiudo le palpebre, mi si presenta un gentilissimo color rosato: ma se io mi metto avanti gli occhi un oggetto nero, per esemplo il mio Cappello, mi comparisce il violetto. Rimoslo il Cappello torna in campo il color di rofa, e così succede tante volte, quante mi piace di ripetere l'osservazione, finattantoche dura sensibilmente la impressione fatta dallo sfrenato lume Solare nel fondo del mio occhio. Desidererei, che qualche Filosofo Nevvtoniano mi rendesse ragione di sì fatta apparenza.

Ma per profeguire l'analogia della luce, e del suono, io nulla trovo nel lume, e nei colori, che corrisponda ai tuoni, ed alle musiche consonanze. Sono queste regolate su i tempi, si quali secondo me o non trovano luogo nell'Organo della vista, come in quello dell'udito, o almeno non abbiamo Criterio. Egli è vero, che si nota un qualche accordo, e se vogliam dirla armonia fra i colori, ma pare a me, che fi appoggi ad una cagione affatto diversa. La Natura ha una scala di colori principiando dal chiaro, e procedendo allo scuro, della guale il Sig. Nevvion ha fatto menzione. Ora io penso, che bene s'accordino inseme i colori vicini ad essa scala, e malamente i lontani. Mal s'accoppia il rosso col turchino, ed ottimamente il verde col giallo, e cosi vadasi discorrendo de'colori principali, ed anche de'secondari.

La lettera si sa ormai troppo prolissa, e mi riserbo di scrivere un' altra volta sopra gli altri particolari. Intanto ho l'onore di rassegnarmi,

Castelfranco 6. Agosto 1736.

LETTERA III.

Del Padre D. Giovan Bernardo Pisenti all'Autore.

Io non porto così lungi, che forse V. S. Illustrissima ha pensato l'analogia fra i colori, ed i suoni, ma solamente ristringomi al parallelo dell'azione dell'Aria sopra i Nervi Acustici, e di quella della Luce su'l Nervo Ottico. Credo, che le oscillazioni di questo più, e meno pronte, più, e men dilatate possano eccitar l'idee di differenti suoni. Ma io concepisco insieme, che nella Luce (la quale inchino a credere una emanazione) sianvi particelle eterogenee, che solamente per una differente groffezza possano contribuire alla differenza delle suddette vibrazioni del Nervo Ottico; le quali tutte insieme il bianco, e separate, o diversamente fra di loro composte vari colori primigeni, o varie composizioni di colori ci sacciano sentire. Io credo in oltre, che la fola groficzza nelle particelle della lucida emanazione le renda diversamente resrangibili, ne le parti dei corpi colorati (intendo parti menome) sieno tutte atte a concepir i tremoti di tutte le parti lucide, ma quali più, quali meno, ed altre sì, altre no; e quindi non tutte sieno idonee a ristetter ogni lume, nè pertanto a rappresentar ogni colore: in quella maniera, che non ogni vibrazione di Aria mette in

moto ogni corda.

Non fo come V. S. Illustrissima spieghi la Rifrazione: ma non convengo con Lei, che i raggi composti di particelle più grosse debban essere i più rifrangibili; io dico, che questi sono i più deboli, ed assumo per li più deboli, i composti di particelle più sottili, e delicate. Nevvton direbbe, che questi son più soggetti all'attrazione del mezzo refrangente, e pertanto più si risrangono; ma io non ho mai amato di servirmi di un termine così vago, e così poco significante in bocca di un Filosofo, com'è quello di Attrazione.

Mi piace moltissimo la idea di V. S. Illustrissima su l'accordo di que colori, che son prossimi nella scala de sette primari; per accordo intendo un accoppiamento di colori grato alla vista. E qui trovo un' altra analogia coi suoni. Vi è un numero determinato di tuoni, il cui vario accoppiamento fa diverse consonanze; quelli io chiamo suoni elementari, o Primogenj: i Pratici li fanno otto. La natura ha pure un numero determinato di colori, e talvolta la union delle vibrazioni, che può risultare nel Nervo Ottico, può cagionare una grata sensazione per

mezzo della vista.

Il Fenomeno dei colori immaginari, Roseo, e Violetto, propostomi da V. S. Illustrissima non mi succede sempre in un modo; ma nel fistema dei vari tremori, e della lor forza, e languidezza nelle fibrille dell'occhio la spiegazione non credo, che sia impossibile, nè molto difficile. Le impressioni dal lume Solare si sanno tutte insieme per tutti i colori, ma chiuse le palpebre, togliesi alle impressioni già fatte la comunicazione col lume esterno, ond' è, che si dovrebbero perder tutte, non venendo sempre avvivate dalla fonte del Lume. Ma come le impresfioni non sono tutte ugualmente forti, così non tutte insieme si estinguono, e si vede quel color, che risulta delle restanti, e dalle ultime a estinguerfi. Ma perchè frapposto il cappello tra me, ed il Sole, veggo tosto un altro colore, e rimosso, torna in campo quel di prima? Io osservo, che il cappello non può agire certamente su'l fondo del mio occhio tra per effer nero, e perchè to tengo chiuse le palpebre; ma solamente egli può sospender l'azion del lume Solare, che opra su'l mio occhio, anche essendo chiuse le palpebre. Quando dunques cessa questo di agire per la frapposizione di un oggetto opaco, le fibrille si riducono a poco a poco a quella languida vibrazione, da cui dipende la percezion di un colore più debole, come l'azzurro, ed il violetto; la qual istessa languida vibrazione cessando infine del tutto, svanisce ogni apparenza di colore. Rinnovasi poi di tratto in tratto, rimovendo il cappello, quel colore rosso, perchè, anche chiuse restando le palpebre, il lume Solare anima, c avviva di nuovo la forza delle vibrazioni impresse la prima volta; ma non le anima, nè avviva tutte, perchè altrimenti dovrebbesi scorger il bianco, o il puro chiaro, che da tutte rifulta. Io non so vedere, che in altra maniera possa mutar le impressioni, o le disposizioni dell' occhio la interpofizion di un cappello. Se qualche parte del lume Solare non

agisce su'l fondo dell' occhio, malgrado l'ostacolo delle palpebre chiuse, non vi potrà giugner nè meno l'ombra del cappello, per far una spezie di velamento al chiaro, come V. S. Illustrissima per avventura ha supposto. E se qualche parte del lume Solare, che ho dimmpetto, ancor agisce sul fondo del mio occhio chiuso, perchè non potrà questo turbare. o cangiarvi le disposizioni prima introdotte, e in conseguenza la sensazione, che lor corrisponde? Io non ho osservato farsi sempre questo cangiamento di roseo alla scoperta, in violetto dietro il cappello; ma talvolta di rosso in giallo, e di giallo in vari colori incerti fino al nero totale; e pure ho sempre usato dello stesso cappello. Ma io voglio attribuir questo all'aver aperti, e chiusi gli occhi troppo spesso in poco tempo; e troppe impressioni in conseguenza anno potuto concorrere a questo effetto; nè perciò faria facile esaminar un soggetto divenuto per questa via troppo composto.

Quanto all'ipotesi dei velamenti di chiaro, ed oscuro, realmente non comprendo, che siano altra cosa, che mezzi, o strati pellucidi di differente densità, e tessitura. E questi non possono colorire il lume, che li trapassa, se non rifrangendolo. Che altro è un velo nero, per cagione di esempio, a traverso di cui si riguarda la neve, o qualche altro oggetto? Ed eccoci all'altra ipotefi dei raggi di differente disposizione a rifrangersi, o a passare per mezzi trasparenti. Per uno di questi mezzi alcuni raggi avranno più facile trasmissione, che ristessione, e vice versa

per un altro.

Ho scritto in fretta, e senza studiar tutta la chiarezza, scrivendo a V.S. Illustrissima, la quale è ottimamente informata di tutti i Sistemi, e può in ogni caso supplire al mio difetto di espressione. Ma soprattutto le lascio un'intera libertà su li miei pensieri, non cercando io, che di rettificarli sopra la norma, che le piacerà di prescrivermi. Sono frattanto con un pienissimo rispetto.

Padova 11. Agosto 1736.

LETTERA IV.

Dell' Autore al Padre D. Giovan Bernardo Pisenti.

Comunque si spieghi la refrazione, io so, che le particelle componenti la luce in aprirsi la strada attraverso d'un corpo diasano, parte continuano il loro viaggio giusta la direzione dell'angolo dell'incidenza, parte si rislettono, parte si rifrangono, e nell'atto di rifrangersi si dispergono, piegandosi alcune più, ed alcune meno verso la perpendicolare.

Vorrebbe V. S. Reverendissima, che tutti questi effetti da una sola cagione dipendessero, e che la diversa grandezza delle suddette particelle iosse bastante a satisfare a tutti i senomeni. Non si muovono esse certamente con varia celerità, conforme ho dedotto io dalle apparenze delle Lune di Giove. Ella non si mostra inclinata a credere, che siano dotate di differente densità, ma piuttosto, che la loro diversa forza consista nel maggiore, o minor volume. Conforme che le supposizioni sogliono assumersi ad arbitrio, nè si prende mar la briga di dimostrarle; così sarebbe una difcortesia il negare a Lei la sua ipotesi. Io non sono per far ciò, ma potrebb' effere, che lo facciano altri più delicati in via di metodo.

Almeno fa di mestieri esaminare le conseguenze. E qui nasce una Quistione, se le più grosse, o se più minute particole luminose sieno le più refrangibili. Io non sono per deciderla così facilmente. Se ho detto, per dir qualche cosa, che quelle di maggior mole patiscono una più grande refrazione, ne sono stato indotto non già da una dimostrazione, ma da una secondo me plausibile conghiettura. E' pregata ad avvertire, che quanto il mezzo è più renne, o meno tenne, altrettanto la luce soffre minor refrazione; cofiechè i raggi, che maggiormente si piegano, sono quelli, che ad una maggior resistenza si trovano soggetti. Perchè dunque la sua sentenza fosse vera, bisognerebbe provare, che lo stesso mezzo fa minor contrasto, e meno s'oppone al passaggio degli atomi lucidi, a proporzione che questi sotto un maggior volume contengono più di ma-

Assumendo poi Ella, che i raggi diversamente refrangibili acquistano nell'atto dell'inflettersi una differente disposizione, la quale in altro certamente non può confistere, salvo che nel vario moto, e tremito delle particole luminofe; avanza cammino, e professa di spiegare con ciò la

scala dei colori.

A buon conto la fola varia groffezza non basta: e siccome nell'aere non diremo mai, che le parti più massiccie di questo siudo imprimano nel nostro orecchio il suono, per esempio d'una trombetta, e le più minute quello d'un gravecembalo, ricercandosi un non so che di più, cioè la differente modificazione, ed increspamento delle onde aerce; così nella luce cr vuole una qualche cosa analoga confistente nel diverso moto, e tremore delle sue particelle, per render ragione della varietà dei colori. Con ciò nulla si dice di nuovo, e si tenta di conciliare due Sette, adattando agli esperimenti Nevvtoniani le spiegazioni Cartesiane.

Il Cavalier Nevvton persuaso dalle sue osservazioni, che i raggi non siano tutti egualmente refrangibili, e che per questo capo nascano i diversi colori, si è messo ad indagare quali fra essi raggi siano capaci d'una maggior, o minor riflessione, quali ad un maggior, o minor incurvamento, e quali si trasmettano, o non si trasmettano per i fluidi, e perle laminette trasparenti. Con tali fenomeni alla mano da lui giudicati fondamentali è passato a dilucidare gli altri più composti, appoggiandosi sempre ai principi d'esperienza, senza prendersi la briga di più oltre silofofare, e cercare inutilmente in che precisamente confista la natura delle particelle luminose dotate delle menzionate differenti proprietà.

Ed in vero procede Egli ottimamente per quello rifguarda al metodo; conciossiache l'insinuarsi più addentro, e fassi ad indovinare le intime configurazioni, grandezze, e moti delle particelle costituenti li

corpi sisici, altro non è, che lusingarsi di saper ciò, che non può mai sapersi. Ai giorni nostri dai Dotti di miglior sapore si lasciano sì fatte speculazioni minute ai Francesi, che se ne mostrano oltre ogni credere invaghiti, e si compiacciono più di Romanzi silosofici, che d'una

foda Filosofia.

Diceva in una sua lettera il celebre Leibnizio, che ogni qual volta in certi incontri non ponno ridursi le cose ai primi elementi Geometrici, e Meccanici, egli è d'uopo prender per base de nostri raziocini un qualche principio sissco, vale a dire o uno sperimento ben circostanziato, o un effetto, di cui si abbia una sufficiente notizia. Così Egli, considerate le proprietà de feltri, che imbevuti d'un liquore lo separano da un altro eterogeneo, si è fatto strada a spiegare le secrezioni animali, fondandosi sulla legge dell'uniformità, con cui in casi simili fuole operar la Natura. Similmente il Sig. Nevvton nei due passi da V.S. Reverendissima nella sua prima lettera allegati, per dare una qualche idea delle vicende della più facile riflessione, e della più facile trasmissione, è ricorso alle vibrazioni del mezzo o cospiranti, o contrarie a quelle del lume :

Quanto a me s'io non adotto le speculazioni Nevvtoniane, ciò nasce, perche parmi di avere alle mani alcuni principi d'esperienza e più semplici, e più generali, e più fecondi in tale materia. Forse io m'inganno, ma fin ora rendo facilmente ragione di certi, fenomeni alla mia maniera, ai quali il mio corto intendimento non sa applicare le massi-

me Nevytoniane.

Se guardo un' obbietto bianco, e ben illuminato attraverso d' un fumo, d'una nebbia, o d'una lamina di quel vetro, che si chiama girasole, mi comparisce tinto di giallo, o di rosso. L'esperienza è certa, e chiara, e mi si presenta sempre la stessa, ogni qual volta mi cade in umore di ripeterla. Comprendo agevolmente, che i raggi riflessi dall' obbietto bianco, in passando a cagion d'esempio per il sumo o più denfo, o più raro, non ponno conservar intatto il loro candore; ma debbono in qualche modo alterarsi, e farsi vedere diversamente. In questo mentre non vo io in traccia della loro varia modificazione, non avendo dati, per rinvenire in che consista fuori di me, e molto meno dentro di me, come cioè per l'interposizione del sumo si cangi l'interna affezione della mia anima.

Quando poi leggo le osservazioni dell' Hallejo, il quale costituito nel toudo del Marc in giorno sereno, vedea rossa la superficie superiore della sua mano; senz'altri raggiri capisco, che così aveva a succedere; perchè dovea generare il rosso, in guardando il chiaro del Solo attraverso dell'acqua più opaca, e scura. Io non dirò, che l'acqua trasmette i raggi rossi, e rislette i verdi; conciossiachè vi si oppone la seconda parte della sperienza, per cui l'Inglese vedeva la parte inferior della mano di color verde. Se l'acqua, che giace al disotto tingea la mano, riflettendo la luce verde; egli è necessario, che la luce stessa passasse prima liberamente per il corpo dell'acqua superiore, altrimenti non avrebbe mai potuto riflettersi dall'inseriore. E se così è, non doveva la mano mirarsi in virtù de raggi trasmessi o rossa, o verde, ma d'una tinta di mezzo infra due. Per la stessa strada spiego i colori immaginari, e lascio a V. S. Reverendissima il dilucidare più minutamente il seno-

Raccordo a V. S. Reverendissima la mia divozione, e mi dico.

Castelfranco li 28. Agosto 1736.

LETTERA V.

Del Padre D. Gio. Bernardo Pisenti all' Autore?

Per rispondere qualche cosa alla stimatissima lettera di V. S. Illustrissima, farollo brevemente in tre capi, che sono il mio modo di concepir per ora la rifrazione in quella parte, che le faceva difficoltà, secondo il fenomeno di Hallejo mentovato nella sua, e terzo il metodo, che io credo distinguer la Filosofia dalla Storia, e dalla Geometria.

Dove i raggi si accostano alla perpendicolare nel rifrangersi, trovano minore refistenza, e ciò, quanto più sono composti di particelle minori. Ciò, che io provo così. E' di fatto, che il lume passando dall' aria nell'acqua, si frange, accostandosi alla perpendicolare. Dunque ci trova meno di refistenza, che nell'aria. Ma l'opposto accadendo a corpi fensibili, ciò non potrà avvenir al lume, che per la sua esterna piccolezza, come già se n'appose il Cartesio. Dunque se questo lume non è omogeneo, come si stabilisce dal Nevvton, quello, ch'è più sottile, soffrirà ancora minore resistenza nell'acqua, cioè quanto più si scosta dalla natura de corpi sensibili, tanto più se ne allontanerà dalla legge. Onde potrà farsi questa legge in Ottica: quanto più denso è il mezzo, in cui passano i raggi, tanto meno loro resiste, e quanto son essi più sottili, ancora meno. E' dunque la resistenza nel passar dal raro nel denso in ragion composta reciproca della sottigliezza del lume, e della rispettiva densità del mezzo.

Venendo al fenomeno d'Hallejo (intendo i colori della fua mano sott'acqua) poco veramente egli è circostanziato, almeno secondo, che lo riferisce il Nevvton nella sua Ottica. E certamente V. S. Illustrissima spiega così questo, come altri, abbastanza felicemente co'suoi principi; ma della folidità loro converrebbe giudicare non dipendentemente da alcuni, ma da quanti fenomeni è possibile unir insieme. Ne' colori prismatici ho trovata non piccola difficoltà a farvi l'applicazione dei mezzi più, e meno illuminati, quando si velano l'un l'altro; ma in cambio di questo, ritrovo degli altri fenomeni, che non si conciliano agevolmente colla Teoria Nevvtoniana. Sia un di questi, se così vuole, il mentovato nella sua lettera. Nondimeno, non potrebbe egli dirsi, che i raggi rossi, e i loro vicini doretti, e gialli passano liberamente per

Opere Ricc. Tom. III. Qqq. l'acqua del mare fino ad una grande profondità, e fin che qualche corpo differente dall'acqua riflettali? La mano dell'Hallejo dalla sua parte superiore doveva dunque rifletter questi, e tingersi di un rosso carico, quanto più ella era profondamente fott' acqua; ma roseo gli appariva, com'ei riferì al Nevvton, perchè col lume rosso una parte del violetto, e dell'azzurro fin là giungeva, che forse più oltre in minor copia sarebbe giunta fino a quell'altezza, a cui folamente li raggi rossi potrebbero penetrare. Questo roseo non era per avventura così bello, che una qualche piccola porzione di verde non si frammischiasse, ma il rosso predominante facesse col blò, che tinta fosse di roseo più, che d'altro color composto. Io dico, che la porzion di verde, la quale arrivava alla mano superiore, doveva esser piccola, e dobole, imperciocchè ogni strato di acqua dalla superfizie fino a quello, in cui la mano dell' Inglese si ritrovava, doveva riflettere del verde, ma insieme con qualche copia di azzurro, e violetto proporzionale alla profondità degli strati sotto la prima superfizie (ciò, che fa il verdemare). E perciò a misura, che c'inoltriamo sott acqua, dovremo ritrovare un verde meno impuro, che si riflette abbastanza copiosamente dai molti strati inferiori, com era quello, che dall' acqua più profonda dava nella parte inferior della mano del nostro Osservatore, nè il rosso, doretto, e giallo, che si trasmettevan col rosso; o il violetto, e l'azzurro, che per la più gran parte eransi riflettuti, dovevan confonder la tinta verde della sua palma ..

Quanto al metodo di filosofare in Fisica, io credo, che i principi di fatto, come si chiamano, od i senomeni più generali, non siano quelli, in cui debba finire la fisica risoluzione, ma per esser paghi, si debba procedere ad una ulteriore spiegazione di questi stessi, che sia appoggiata non ad idee matematiche, ma fisiche, io voglio dire, alle nozioni naturali, e semplici dell'estensione, e de' suoi modi. Se sopra di queste possa stabilirsi un'ipotesi, che il tempo, e le osservazioni confermino, o non distruggano, io non veggo, perchè ella debbasi escludere dai Sistemi Filosofici, che non sono finalmente un trattato di Geometria. Il male sarebbe ostinarsi a disendere l'Ipotesi invita Minerva, e far valere per una cosa di fatto ciò, che non è, se non un pensier filosofico. Le cause fisiche non possono, che spiarsi per via d'ingegno, e di ragionamenti probabili su le traccie dei Fenomeni raccolti in una quantità sufficiente La Storia della Natura, e la Geometria si esercitano bensì, l'una su le osservazioni naturali circostanziate colsa maggior esattezza, e l'altra sopra tutto quello, che ne Fenomeni ha rapporto colla quantità; e quindi potranno certamente l'una, e l'altra somministrare un grande ajuto alla Fisica: ma dopo tutto l'officio di questa sarà sempre lo specolar su le cause, ed il Fisico avrà dritto di estender le sue specolazioni, e ricerche fin dove lo può portare la curiosità d'intendere la Natura, ed in conseguenza oltre i limiti delle pure notizie storiche, e delle geometriche cognizioni.

Io metto tutto questo sotto i riflessi di V. S. Illustrissima prontissimo a riformarlo, s'Ella penserà altrimenti, non essendo questi miei, che pensamenti provisionali, ed ancora non ben digeriti. Frattanto mi dico con tutto il rispetto

Padova 18. Settembre 1736.

LETTERA VI.

Dell' Autore al Padre D. Gio. Bernardo Pisenti.

Mi permetta V.S. Reverendissima, che per me si dia cominciamento dall'ultimo capo della sua lettera, in cui si parla del modo di silosofare in Fisica. To seguitando le vestigia del nostro Galileo sono pochissimo amicò delle ipotesi, le quali, siccome parti della immaginazione, introducono una Filosofia fantastica. Mi sono preso la briga d'esaminare parecchie supposizioni di molti Valentuomini, ed avendole scoperte o mancanti, ed imperfette, o ripugnanti ai fenomeni, o fra loro contrarie, ho avuto finalmente la buona sorta di libetarmi una volta dal comune pregiudicio.

Ma per non uscire dalla materia, ch'abbiam per le mani, Ella è pregata ad avvertire, che il Cav. Nevyton, il quale da ogni ipotefi fi mostra affatto alieno, dando corso a suoi pensamenti, non ha saputo scansare l'inconveniente. Egli per una parte facendosi a spiegare la rifrazione per via delle sue attrazioni, ha dovuto ammettere, che il lume tanto minor relistenza incontri, quanto penetra un mezzo trasparente più denfo, stando tutte le altre cose pari: sentenza abbracciata anche da V.S. Reverendiss., che pone la resistenza nel passare dal raro al denso in ragion reciproca composta della sottigliezza della luce, e della respettiva densità del mezzo.

Per un altro verso poi volendo l'Inglese salvare il moto dei corpi celesti, i quali descrivono intorno i loro centri orbite, che in se stesse ritornano, laonde nelle loro rivoluzioni non incontrano resistenza di sorta alcuna; s'è trovato in necessità di supporre i Cieli vuoti d'ogni sensibil materia.

Se così è, venga il raggio ACB (Fig. 148.) dal Sole A, e passando per gli spazi vani, urti in C nella estima superfizie della nostra Atmosfera. Sia DCE toccante del punto C, e normale, ad essa sia la retta CF, la quale va a terminare nel centro della Terra F.

Ora la denfità dell'aere in C, per quanto fia picciola, farà infinitamente maggiore di quella di uno spazio inane; dunque ammesso il Canone da Lei stabilito, agevolmente si dimostra, che nella prima refrazione il raggio AC tanto alla perpendicolare s'accosta, che forma con essa un angolo infinitesimo: per la qual causa gli abitanti della Terra fituati in I, ai quali giugne il raggio spezzato ACI, vedrebbono sempre il Sole nel vertice, qualunque fosse l'inclinazione del raggio incidente AC. Curioso spettacolo sarebbe il mirare il Sol nascente comparire di salto sul Meridiano, ed ivi sermarsi immobile tutta la giornata;

indi con un altro salto improvisamente, ed in un batter d'occhio trame

Aggiungafi, che dopo aver il raggio AC sofferta la prima refrazione, camminerebbe sempre per la normale CIF, ed incontrandosi negli strati d'aria più densa, o nella superfizie d'un'acqua stagnante, continuerebbe senza mai più rompersi per la medesima perpendicolare il suo viaggio.

Già V. S. Reverendiss. s'accorge in quali assurdi vadano a terminare le due posizioni Nevytoniane accoppiate insieme, e quanto delle ipotesi possiamo fidarci. Per dire frattanto qualche cosa intorno il suo Canone, a me pare, che con ammetterlo s'incontra nel medefimo inganno,

in cui, trattando d'altra materia, è caduto Aristotile.

Osferva costui, che quanto il mezzo era più raro, altrettanto i gravi discendevano con maggiore velocità, e percorrevano in minor tempo uno spazio dato: e perciò inavvedutamente ha conchiuso, che in un mezzo infinitamente tenue, o sia nel vano il moto si farebbe in istante. Ma s'egli avesse avvertito essere limitata la forza della gravità; altro non avrebbe potuto inferire, se non che in un tempo qualunque dato s'acquista dal mobile una velocità finita, che nel vuoto è la più grande, che possa mai acquistarsi, e nel pieno sempre minore, e minore, quanto è più grande la resistenza, che dalla forza della gravità dec sottrarsi.

Applicando al caso nostro la riflessione fatta, mi sembra manifesto, che la forza, per cui il lume fi propaga nel vacuo, è nel suo genere determinata. Mi esprimo così, perchè non intendo di decidere la quistione, se la luce si propaghi in un istante, ovvero in tempo; sapendo che le quantità tanto finite, quanto infinite possono essere fra loro nella medesima data ragione. Ora mentre il lume cammina per un diafano di densità inassegnabile, la sua forza, qualunque essa sia, non trova intoppo, e perciò impiega tutta se stessa senz'alcuna diminuzione. Ma quando la menzionata forza ha da spingere le particelle luminose per un diafano denfo, io dimando come possa essa aumentarsi, ed acquistare nuovo vigore. Il mezzo trasparente è bensi disposto a ricevere l'impressione del lume, e ad opporvisi colla sua reazione, ma non mai ad avvalorar la sua forza, purchè non si voglia cancellare l'assioma, che l'azione è sempre uguale, e contraria alla reazione.

Bisogna per tanto consessare, che una porzione della forza del lume debba impiegarsi a vincere la resistenza del mezzo, e l'altra, che rimane, a penetrarlo; laonde anche in questo incontro abbia dalla forza to-

tale a sottrarsi la resistenza.

Nè vedo cosa ci abbiano da fare le attrazioni Nevvtoniane; conciossachè un corpo qualunque B (Fig. 149.) cammini giusta la direzione AC determinante l'asse del moto, che passa per il centro di gravità B, ed urti obbliquamente nel punto E d'un fluido più denso EF, indi a poco a poco fi vada infinuando, e lo penetri: io dico, che se l'aggregato di tutte le resistenze, le quali nella immersione si oppongono alla parte AEC, è maggiore dell'aggregato di tutte le refistenze, le quali fanno contrasto all'altra parte ADC, l'asse AC si ripieghera dal canto della perpendicolare EF; cosicchè inclinandosi passo passo, cambierà dire. zione, e continuando finalmente il viaggio per linea retta, farà foggetto

ad una spezie di refrazione.

Ma se le somme delle resistenze delle due porzioni AEC, ADC fossero pari, ovvero le prime dalle seconde venissero superate, in si fatti incontri o il mobile non si svierebbe dal suo cammino, o si spezzerebbe discostandosi dalla normale EF. Il primo caso per lo più ha luogo ne corpi regolari, ed omogenei, e negl' irregolari frequentemente gli altri due: e perchè la refrazione sia più grande, o più piccola, e si faccia più da un lato, che dall'altro, ci contribuisce la grandezza dei corpi, e molto più la figura, e la posizione.

Ouest' avvertenza ci somministra il modo semplice di spiegare la refrazione, e la difrazione del lume. Alcuni atomi lucidi (lasciando de parte quelli, che si rissettono) seguitano la loro strada dal raro al denso senza rompersi, e chiamansi trasmessi; altri poi più, o meno si frangono: e per renderne la ragione, basta il supporre, che tutte le particelle della luce non siano lavorate su un torno, e che siano fra loro diverse di grandezza, di figura, e di posizione. Con ciò possiamo satisfare agli accennati fenomeni, senza ricorrere a cagioni misteriose, ed ignote, dagli

Inglesi secondo me fuor di bisogno introdotte.

Per quello appartiene al Cartesio, quantunque egli nella conclusione convenga col Nevwton, e con V.S. Reverendiss., discorda però nei principi. Si diede il Francese a credere, che l'aria, in quanto è villosa. facesse alla luce maggior resistenza dell'acqua, e degli altri corpi trasparenti, i quali sebbene più densi assai, non anno però i minimi componenti tanto flessibili, e tanto fra loro intralciati. Forse se ne potrebbe prender conghiettura da' misti viscosi, e tenaci, siccome l'olio, il quale benchè più leggiere in ispezie dell'acqua, niente di meno a causa della fua tenacità più fortemente rifrange il lume. In questo mentre essendo cofa notissima agli Astronomi, che passando un raggio dall'etere all'aria. piega verso la perpendicolare; mi farei volentieri ad interrogare i Cartesiani, s'eglino pensano, che la materia sottile sia più villosa, e tegnente della nostr'aria.

Ho proposto l'esperimento dell'Hallejo, e l'altro dei colori immaginarj per metter in chiaro, che chi si mette a spiegare i due senomeni coi principi Inglesi, se pure nettamente esplicar si possono, dee servirsi di parecchie supposizioni, che danno indizio della mancanza del sistema, il quale s'imbroglia anche nelle cose più semplici. Ella però nell'altro fistema del chiaro, e dell'oscuro non crede, che si renda ragione quanto basta dei colori prismatici: ma se si prende a considerare la loro genesi nei casi più semplici; si scopre con facilità il meccanismo della Natura.

Castelfranco 7. Qttobre 1736.

LETTERA VII.

Del Padre D. Gio. Bernardo Pisenti all' Autore.

Convengo con V. S. Illustrissima, che non bisogna sacilmente sidarsi dell'Ipotefi; ma quanto dovremmo noi rigettare d'ingegnose specolazioni, e che anno tutta la verisimiglianza in Fisica, se vogliamo ristrignerci al fatto solo, e al dimostrativo? In oltre l'ipotesi non mettendo nulla in fatto, ne mai essendo una proposizione assoluta, ma relativa ai soli senomeni, che sappiamo, si potrà sempre abbandonarla, quando ne vengano alla luce de nuovi, che non fiano con quella compatibili. Che fe alcuni anno voluto più tosto tirar la Natura per forza alla loro ipotesi, che riformarla, o abbandonarla del tutto, tal sia di loro: e questa farà colpa dell'artefice, come si suol dire, non dell'arte. Quando nella risoluzione analitica di un Problema io mi so a ricercare, se quel, che ho supposto, sia quel punto, o quella linea, che si dimandava, non fo altro, ch'esaminare, se a quel punto, o a quella linea convengano le condizioni del Problema. Così a pari, se in una Question Fisica io trovassi, che quello ho supposto, si adatta alle condizioni, che ne conosco: perchè avrei io torto ad adottare, come si sa, provisionalmente la

mia supposizione?

Io aveva stabilito questo Canone, che la resistenza trovata dal sume nel passaggio per differenti mezzi è in ragion composta, reciproca della loro denfità, e diretta della fottigliezza dei raggi; imperciocchè quanto il mezzo è denso, o di maggiore specifica gravità, cateris paribus, e quanto minori sono le particelle lucide, di cui è composto il raggio (secondo la ipotefi, che ora ho in vista) tanto più i raggi si accostano alla perpendicolare, passando da un mezzo non denso in un più denso; e ciò costantemente in reiterate sperienze, non a caso, nè per difrazione di raggi, o costituzione di superficie refrangenti. Ella sa la celebre disputa, che su tra il Signor De Fermat, e Descartes, e che sinalmente i dotti fi dichiararono per quest'ultimo, restando sa maggior parte persuasi dal ragionamento meccanico del Sig. Descartes, il quale dall'accostamento alla perpendicolare argomentava la minore resistenza del mezzo, in cui quello facevasi; imperciocchè ogni corpo dee a quella parte accostarsi, da cui meno se gli resiste, in quella maniera, che una sfera sensibile si scosta dalla perpendicolare in quel mezzo, ch'ella trova maggior difficoltà a penetrare. Nulla valsero contro di questa evidenza le sottigliezze del Signor di Fermat, che metteva in campo le cagioni finali, volendo, che i seni d'incidenza, e di refrazione seguitassero la ragione inversa delle refistenze ne'due mezzi, per cui la luce viaggia, acciò v'impiegasse il men di tempo, che fosse possibile.

Le difficoltà, che ha questa Teoria, ed al mio Canone oppone V. S. Illustrissima, o non sono direttamente contro di me, che non determino nulla intorno al vacuo, o non mi pajono insolubili. So aveva detto, che il lume va più veloce ove trova minore refistenza, e perciò più veloce nell'acqua, che nell'aria, e più ancora nel vetro, che nell' acqua; e in effetto si è questa una conseguenza dell'accostarsi più alla perpendicolare, mentre il seno refratto essendo minor dell'incidente, la velocità verticale si dee aumentar dopo la refrazione, com'è facile dimostrare: effetto da Nevvtoniani attribuito alla maggior attrazione del più denfo, la qual agisce per direzioni verticali. Ella mi domandava, d'onde nasce quest'aumento di velocità del lume in un mezzo, che non può se non colla opposizione delle sue parti ritardare il mobile, che vi entra: dico, che qui la minor perdita tien luogo di guadagno, se si considera, che la luce è spinta incessantemente da nuovi, e nuovi, gradi di forza, che rifiede nella fua forgente, e che la perdita di moto, la quale fi fa, per esempio, nell'aria dalla luce rispetto a quello, ch' ella vi ha, ed acquista, è maggiore di quella perdita, che da essa luce si fa nell'acqua rispetto al moto, con cui vi entra, e che le si continua ad aggiugnere. Non ispiegherò per ora fisicamente il modo, in cui questa faccenda può andare, ma non credo sia difficile ritrovarne qualche cagione meccanica nella diversa fermezza delle parti, e struttura de pori, che sono ne' due mezzi differenti. Il P. Malebranche aveva pensato, che un mezzo fluido, e sortile, ch'è propriamente quello, per cui passa il lume, fi trovasse sparso in tutti li corpi diafani in una quantità reciprocamente proporzionale alla denfità loro; e che il lume perciò premuto di vanraggio da questo fluido nel diafano raro, in cui più abbonda, fosse ob-Bligato a cedere verso la perpendicolare nel diafano più denso, ove la resistenza del suddetto fluido men abbondante fosse ancora minore. Ma io ritrovo in tutto questo troppo di libertà Gallicana, e poco di meccanica precisione. Non sarebb'eglt più semplice il dire, che le parti di un fluido meno denfo sono più agitate, o più capaci di ricever agitazione, che quelle di un fluido più denso, ma che può permearsi con tutte le direzioni in tempo, che le piccole particelle di lume non gl' imprimono alcun moto, o ne sono meno distratte dal suo cammino, e meno della sua forza spogliate?

Ha in oltre opposto assa acutamente V.S. Illustrifs. l'assurdo, che seguirebbe nelle apparenze del Sole, dal combinare insieme il vuoto Nevvtoniano con l'accostamento de'raggi alla perpendicolare, ove questi entrano in un mezzo più denso; imperciocchè, dic'Ella, il vuoto nulla avendo di densità, e l'atmosfera terrestre avendone una infinita per rapporto al vuoto, se la rifrazione porta tanto più il raggio verso la perpendicolare, quanto più grande è la differenza tra la densità del primo, e secondo mezzo, ne seguirà, che la rifrazione dal vuoto nell'atmosfera farà massima, o l'angolo rifratto infinitamente piccolo, e perciò coincidente colla stessa perpendicolare. Per verità ciò seguirebbe ancora dal mio Canone, che porta l'angolo rifratto tanto minore nel mezzo più denso, quanto maggior è la differenza fra la densità de'due mezzi; ma come questo Canone esprime la facilità del passaggio reciprocamente proporzionale alla densità dei mezzi corporei, e resistenti al lume, ed il

yuo-

vuoto non è mezzo corporco, nè resistence; (della qual natura io non riconosco alcun mezzo) così tal assurdo non può seguitar dal mio Canone, che fa una comparazione di due mezzi corporei, e per il rapporto della lor testitura alle particole lucide più, e men resistente. Per altro supposto il vacuo, che non può toglier nulla al moto del lume, io dico, che quando da quello in un mezzo corporeo passasse il lume, si rifrangerebbe a perpendiculo contro l'osservazione Astronomica; perocchè la nuova resistenza sarebbe sempre maggior di una, ch'è nulla. Ma di ciò veggano quelli, cui sta a cuore difender questo mezzo incorporeo.

Diranno forse costoro, che l'assurdo dedotto da V. S. Illustrissima suffisterebbe, quando la cagion della rifrazione ad perpendiculum sosse semplicemente l'aumento di densità in un mezzo sopra quella dell'altro, onde il lume sortisce; ma poichè la cagione n'è solamente l'attrazione del mezzo, in cui entra, e questa è limitata, non può, che produrre un effetto finito, facendo accostar il lume alla perpendicolare proporzionalmente a quella forza attrattiva, che va crescendo a misura della vicinanza dell'atmosfera alla terra, e non facendolo coincider con essa perpendicolare, perchè in questo caso la detta forza dovrebb'essere un massimo, o infinita: in quella maniera, che dal farsi la discesa de gravi più presto ne mezzi più rari, non ne segue, che il moto de gravi debba farsi in istante ne mezzi infinitamente tenui, o nel vano; imperciocchè la

forza della gravità non è infinita, ma limitata.

Quello, che ho accennato della più difficil disposizione al moto nelle parti di un mezzo più denso, onde il lume abbia a perdervi men del suo moto, può confermarsi con quello Ella osserva dell'olio, che sebbene meno grave in ispezie dell'acqua, aifrange nondimeno più fortemente; la tenacità di quel fluido fa, che si tengano più unite le sue parti, e quindi fa una stilla, o un filo più seguente, che l'acqua; ne nascerà dunque in ciascuna parte una minor disposizione al moto, per essere ciascuna raccomandata a molte altre; e perciò meno resisterà al passaggio di un corpo dilicatissimo, come il lume, che non sa presa sopra di loro, e da cui son esse meno mobili, che le parti più sciolte di un attro fluido. L'etere, che si dissonde per il gran cammino della luce dal Sole a noi, ha più di ogni altro fluido noto questa disposizione nelle sue parti ad esser mosse, e quindi potrà sar più di diversione di forza. o ritardo al passaggio della suce, col trasserire in se parte del di lei moto, più di quello possa far l'aria, o l'atmosfera, in cui li raggi si rifrangono perciò ad perpendiculum.

Tutto ciò ho scritto fin ora più per rispondere qualche cosa a V. S. Illustrissima, da cui so, che molto posso imparare, che per esser in effetto persuaso di alcuna spiegazione; il meccanismo mi è sempre piaciuto in Fisica, perchè appaga più delle Qualità occulte; ed i principi di sperienza assunti senza spiegazione non mi pajono esser tutto quello. che si può desiderare, quando non sono semplicissimi. Le rassegno il

mio più fincero osseguio, e sono

Padova 30. Novembre 1736. LET-

LETTERA VIII.

Dell' Autore al Padre D. Giovan Bernardo Pisenti.

Soggiungo un'altra avvertenza intorno il metodo di ben filosofare in Fisica. Salva sempre la miglior opinione, secondo me, incombenza principale d' un Fisico si è l'andar in traccia delle leggi della Natura, collo scoprimento delle quali, oltre che si sparge un lume sopra le materie particolari, s'acquistano anche delle cognizioni per un sistema generale, e si promovono le Arti a benefizio dell'umana società. Le leggi della Natura si deducono o da primitivi originali principi, o dai senomeni ben accoppiati; o finalmente dalle leggi già dimostrate, colla di cui scorta ci sacciamo strada ad altre ignote, con l'ajuto però di certi metodi, de'quali troppo lunga cofa farebbe il farne parola.

Ora con tali mezzi messe in chiaro le regole, di cui nelle sue operazioni la Natura si serve, quando di conseguenza, e per via di corolalario ci si manisestasse anche il Meccanismo; confesso, che s'avrebbe tutto ciò, che può defiderarsi: ma di rado ci riuscirà lo svelarlo; perchè non abbiamo ne fensi così perspicaci, ne dati sufficienti per internarci nell' intima struttura dei corpi, e nella figura, disposizione, e moti delle particelle componenti. Ne bisogna farla da indovini; conciossiache c'è un grado minimo di probabilità, che fra le innumerabili ipotesi sin ora finte, e che finger si possono, la buona forte ci guidi a quell' unica,

che tra tutte è la germana, e la vera .

Aggiungafi, che non ho mai veduto a cavarsi dalle ipotesi le leggi della Natura; ho veduto bensì colle leggi della Natura alla mano restat le ipotesi convinte frequentemente di falsità. Chi mai ha saputo inventarne una, per cui si spieghino con chiarezza le sorze centrali, le elastiche, ec.? e pure ne sono pieni i libri, ed intorno la gravità, ch' è un fenomeno a prima vista si semplice, io più di dodici potrei contarne. La fimilitudine da Lei addotta d'un Problema geometrico mi sembra alquanto lontana. In Geometria abbiamo i dati fermi, coi quali si procede al quisito, ed ogni qual volta la stessa condizione s'adempie in Fifica, camminiamo con piede ficuro. Ma effendo i fenomeni que' dati, che si adoprano nella investigazione delle leggi-naturali, con esti rare fiate si perviene alla scoperta del meccanismo: laonde sa di mestieri contentarsi di quello, che si può sapere, ed abbiam tanto che sare in tal proposito, che non ci avanza tempo da perdere in architettare ipotesi che giusta il detto del Galileo sono belle, ed ingegnose, ma non dimostrate, nè dimostrabili.

Ben è vero, che siccome la Geometria si vale de suoi Postulati; così la Fisica spesso premette alle sue ricerche alcune posizioni semplicissime, ed evidenti, che si assumono se non in qualità di assiomi, almeno in quella di petizioni, le quali ragionevolmente non ponno essere contrastate. Tale si è la da me adottata nella precedente lettera, con cui mi fono ingegnato

di render ragione della trasmissione, della refrazione, è della diffrazione del lume, vale a dire che le minime particelle lucide non sieno tutte ne d'una grandezza, nè d'una figura. Credo poi, che debba annoverarsi fra primi principi, o almeno fra le verità dimostrate, che tanto più resistono i mezzi sluidi, quanto sono più densi, e più tenaci; dipendendo la loro reazione dalle regole della comunicazione del moto. Mettendo in conto la sola inerzia, trovo, che la resistenza serba la ragione composta della massa del fluido, e d'una quantità, che sta di mezzo fra il quadrato, ed il cubo della celerità di quel corpo, che a traverso del liquido s'apre il passaggio. Nè vedo per qual motivo abbia ad eccettuarsene la luce, quasi che la Natura per essa abbia stabilito un canone a parte: e ciò tanto meno dee credersi, quanto che i pori del diafano non sono maravigliosamente disposti in tutte le direzioni per dar transito-alla luce in qualsivoglia positura, e sotto qualsisia angolo. Questa sentenza è già screditata, ed io penso, che gli atomi luminosi a guisa di tanti piccolissimi cunei s'infinuino nel diafano, disgiungano la contiguità delle sue particelle, e le mettano in moto, e in tremito con tanto maggiore difficoltà, quanto esse sono più massiccie, e tegnenti. Se ne ha un chiaro indizio dal calore, che nel passaggio della luce i mezzi contraggono, e dalla loro sensibile raresazione. Quindi si scopre, che stando tutte le cose pari, i fluidi sono assai più trasparenti dei sclidi; mentre per l'esperienza del Sig. Halley fi fa, che la luce penetra l'acqua falfa ad una grande profondità, lo che non interviene nel vetro, che alla groffezza d'un palmo notabilmente s'infosca, per quanto sia limpido, e puro.

Ecco il metodo insegnato a Noi Italiani dal Galileo. Egli nelle sue Opere, e particolarmente nel Saggiatore ne ha sparso i semi. Oltre il passo citato intorno le ipotesi, asserma, che non è ussizio del Fisico l'indagare l'essenza delle cose, ma semplicemente render conto delle loro proprietà, ed assezioni: che la Natura è inesorabile, e non è disposta ad accomodarsi alle nostre fantasse: che il suo libro è scritto in cissra geometrica, e chi non è peritissimo in questa Scienza non isperi di penetrarne il misterio. Altrove dice, che la simplicità, ed il magistero intesi dalla Natura non sono quelli, che intendiam noi: che non si può fare un passo, quando l'esperienza non si congiunga colla ragione: che non bisogna assettarsi in rirare conseguenze dai senomeni; ma cavarne soltanto quelle, che spontaneamente ne sluiscono: che la Natura agevolmente si scopre nelle sue operazioni più semplici, e che con queste passo passo c'incamminiamo alle più composte, ed involute: che sinalmente in Fisica si vuol procedere a posteriori, e per via d'Analisi, e che tanto più questa Scienza-

farà perfetta, quanto meno verità insegnerà.

In questo mentre tornando alle refrazioni, per me non credo, che nella sentenza del Cartesso, e del Nevvton possa mai evitarsi l'assurdo, che io ho detto, delle refrazioni Astronomiche; conciossiachè per sua parte non era l'Inglese talmente cieco, che non vedesse essere i Cicli pieni di materia di luce, ed intanto ha posto in essi il vano per escludere la materia sottile. E per dire il vero, che bisogno c'è d'ammettere in quel

gran tratto due fostanze diverse, cioè l'etere, ed il lume : anzi i Cartefiani stessi vogliono, che la luce altro non sia, che un moto, una pressione, un ondeggiamento della materia sottile. Non c'è dunque Setta Filosofica, che collochi ne' Cieli due sorti di materia, essendo o l'una, o l'altra soverchia, e tutta la gran quistione si riduce al puro nome. Per discorrere colla maggiore semplicità, io giudico, che la luce sia la grande atmosfera del Sole, in cui nuotano i Pianeti, e la quale viene intersecata dalle altre atmosfere luminose delle Stelle fisse, che abbracciano, e stringono per così dire il nostro Vortice, perchè il lume d'esse Stelle, che sono tanti Soli, viene certamente ai nostri occhi. Mi persuado altresì, che dalla luce dipenda il moto de Pianeti, e la loro forza centrale, c ne prendo la conghiettura da ciò, che la forza del lume, e le forze centrali decrescono colla medesima legge, vale a dire in ragione reciproca duplicata delle distanze. Se ci sia poi, o no il vacuo disseminato, nulla rileva, quantunque a me paja affai più conforme ai fenomeni la opinione Epicurea.

Se così è, in qualunque maniera si propaghi la luce, o per via d'emanazione, o per via dei tremori dell'Etere, secondo le varie ipotesi, le quali io non approvo, nè condanno, quando i Cieli siano riempiuti d'una sola materia, che o sia lume, o veicolo del lume; è cosa chiara, che nel dissonders che sa la luce per quegli immensi spazi non incontra alcun corpo, che le faccia intoppo, e conseguentemente cammina libera-

mente, senza essere soggetta a veruna resistenza.

Ma quando entra nella nostr'aria, non può negarsi, ch' essa non urti in una materia diversa fornita d'inerzia, e di tenacità, che vi si oppone, e le sa contrasso. Se dunque nella estensione de Cieli è nulla la resistenza, ed è sensibile nell'aere, e pure non ostante ciò per le osservazioni Astronomiche il raggio si torce verso la perpendicolare; bisogna dire col Barovvio, ed altri suoi seguaci, che la faccenda vada al rovescio di quello

pensano i Cartesiani, ed i Nevytoniani.

Nè mi si opponga il principio meccanico, che ogni corpo si picga da quella parte, dove trova minor resistenza; atteso che parmi d'aver provato abbastanza nell'antecedente mia lettera, che l'assioma non è generalmente vero, anzi che nel caso nostro ripugna alle nozioni della comunicazione del moto, e delle refistenze. S'immagini V. S. Reverendiss, che una nave spinta dal vento con unisorme celerità sia obbligata a passare obbliquamente dall'acqua dolce alla salsa, io dimando verso qual parte si muterà la sua direzione. Per me sono persuaso, che si piegherà verso quel lato, in cui trova maggior resistenza; perchè ivi più che dall' altro canto si minora la velocità. L'esperimento della palla cacciata da un arcobugio dall'aria nell'acqua viene rapportato in tante maniere, c ci entrano tanti elementi, che nulla si può conchiudere. Noto semplicemente, che la luce passando dal raro al denso sotto qualunque angolo, almeno in parte si rifrange. Non così sa un corpo solido, che mentre l'angolo dell'incidenza sia picciolo, in cambio d'immergersi, si rissette: segno manisesto, che quand'anche s'attusta, vi si accoppia sempre il ribalzo, e la riflessione.

Non senza il suo perchè ho dimandato da qual cagione venga ac cresciuta la velocità della luce nel mezzo più denso, mentr'essa ci passa da un mezzo più raro, per esempio dal vetro al diamante. Ella ingegnosamente risponde, che la minor perdita sta in luogo di guadagno, ed avrebbe tutte le ragioni del mondo, ogni qual volta due raggi venissero ambo dal vuoto, ed uno cadesse obbliquamente per modo di efempio nell'aere, e l'altro nell'acqua. All' incontro quando un raggio ha già penetrata l'aria, e perduta quella porzione di velocità, qualunque ella sia, che corrisponde alla resistenza dell' aere, torno a dimandare come, o per qual motivo guadagni una nuova maggiore velocità, qualora passa nell'acqua. Una delle due dobbiam dire, o che la luce ha una propria innata celerità, che viene estenuata dagl' impedimenti, i quali totalmente rimossi, intiera di bel nuovo si acquista, e rimossi in parte, almanco s'accresce: ovvero sa d'uopo ricorrere alle attrazioni Nevytoniane. Nella prima ipotesi s'ascrive alla luce quella proprietà, che a' suoi Atomi attribuiva Epicuro, e si cancella l'assioma, per cui si stabilisce, che un corpo persevera nello stato, in cui si trova, quando non ne viene rimosso da un agente estrinseco. Nella seconda è evidente, che non si rende delle refrazioni quella ragione appoggiata ad idee di corpo, e di moto, ch'ella desidera.

Comprende V. S. Reverendissima, che la maniera, con cui spiego le restrazioni, e le dissirazioni, cioè a dire per la maggiore, o minore resistenza, che si oppone ad una parte più che all'altra del raggio luminoso, la quale sa che si ripieghi piuttosto in un senso, che nell'altro, non è soggetta a tale difficoltà, nulla importando, che nel passagio da un mezzo all'altro la velocità, o la facilità del lume sia alquanto più grande, o più picciola; perchè l'essetto, secondo me, segue in quel menomissimo strato, che divide i due mezzi, sinattantoche l'atomo lucido sia totalmente immerso, e non si trovi parte in un ssuido;

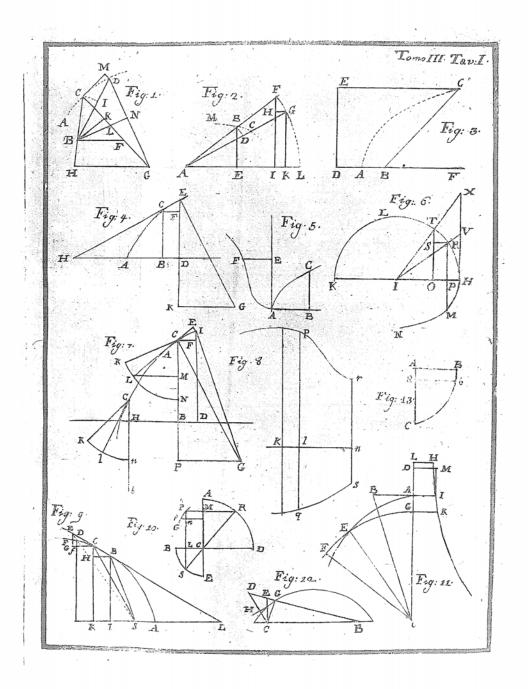
e parte in un altro.

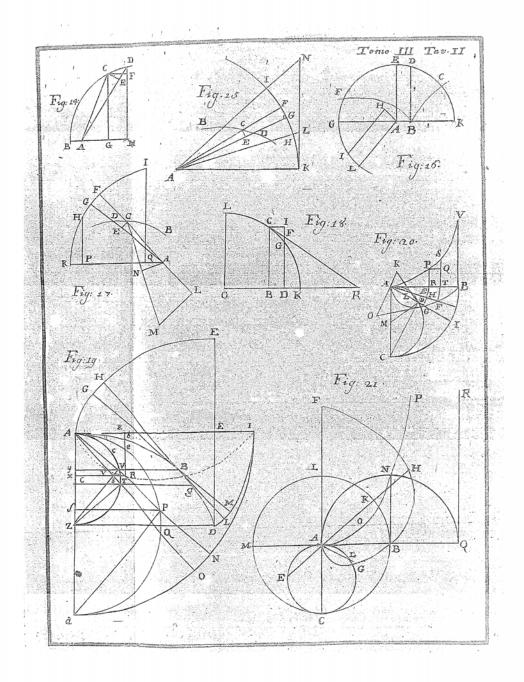
E ricordandole gli attestati della mia servitù, mi protesto.

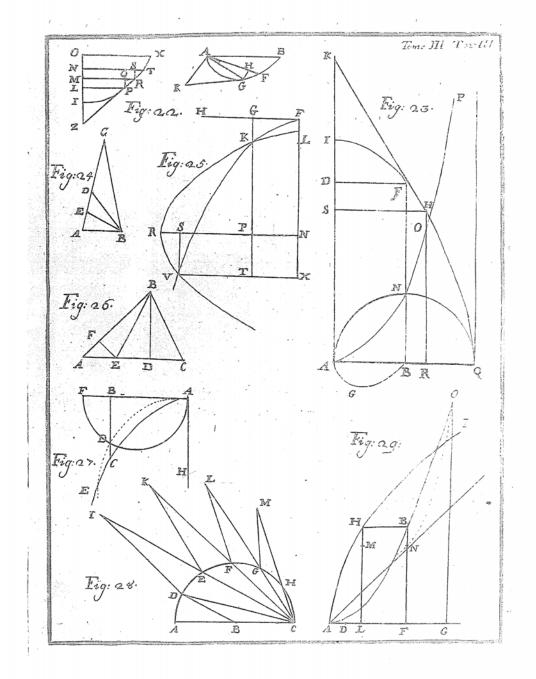
Castelfranco li 18. Decembre 1736.

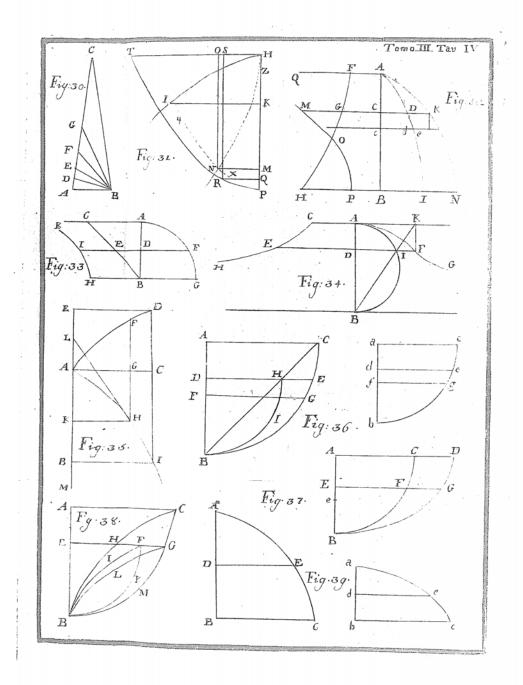
L' Autore in altre cose occupato non fini mai di trascrivere quest' ultima lettera, nè la inviò al Padre Pisenti.

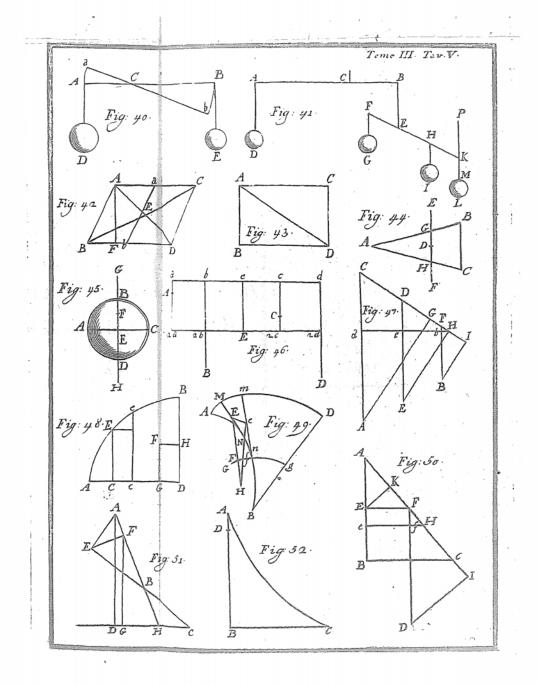
Fine del Tomo Terzo.

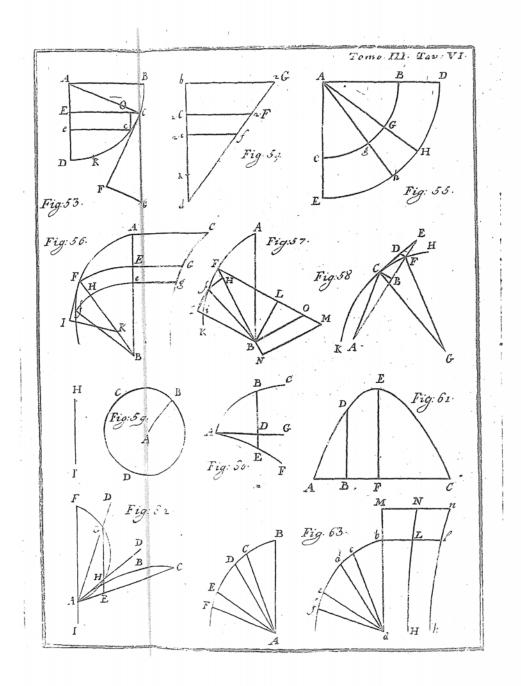


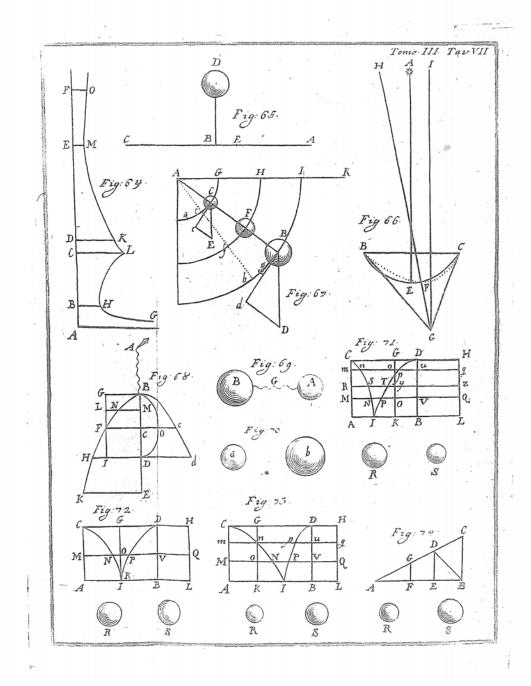


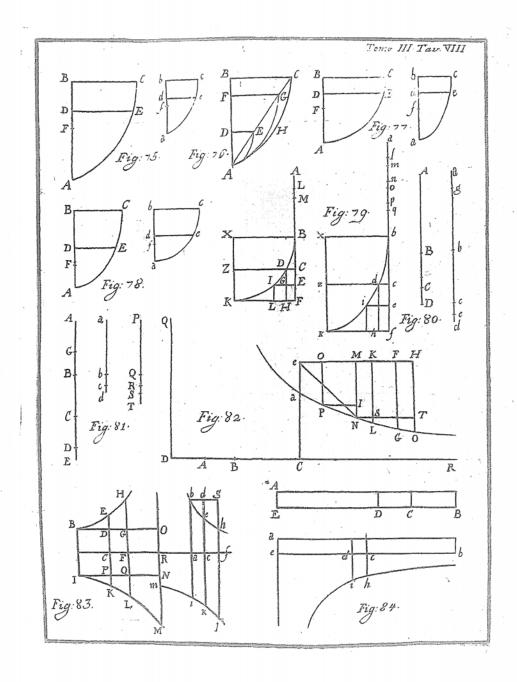


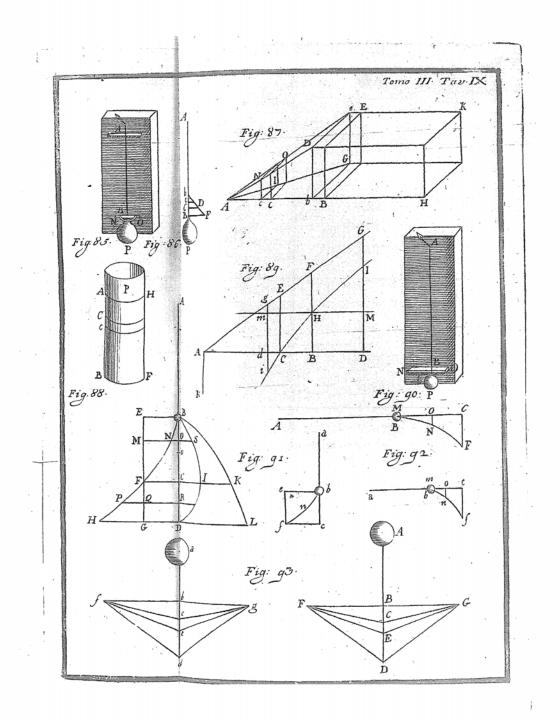


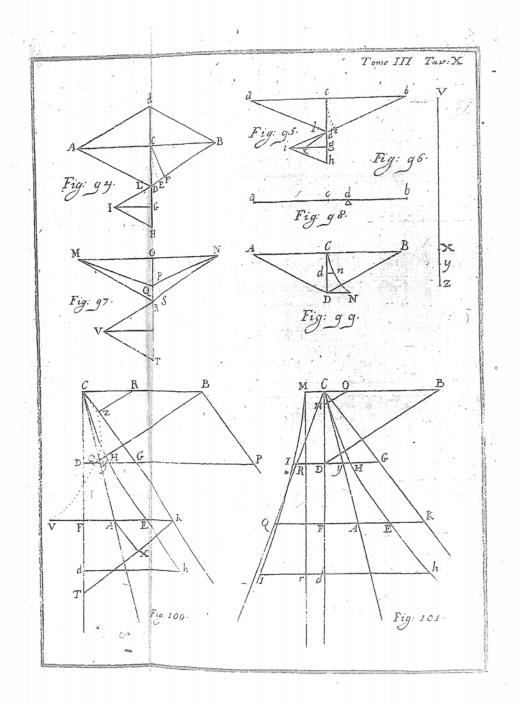


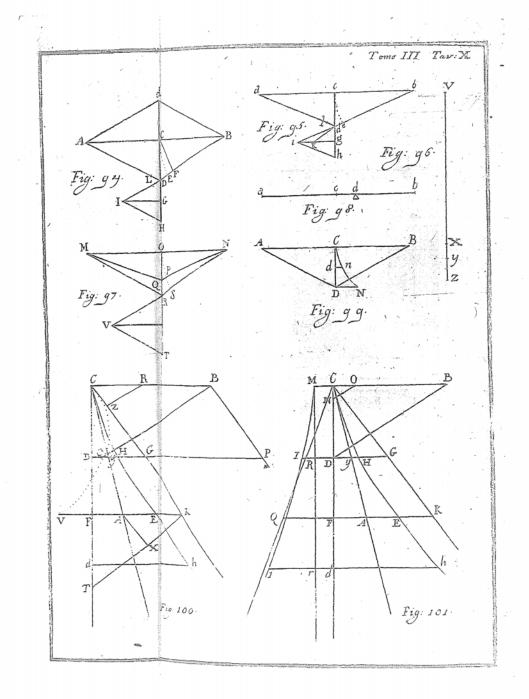


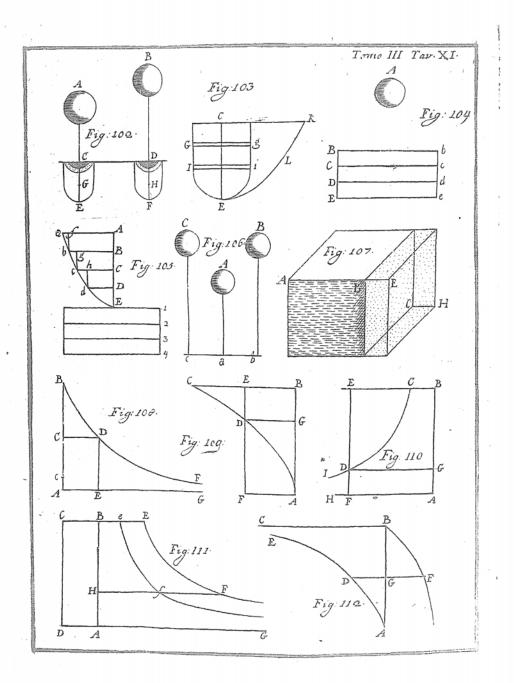


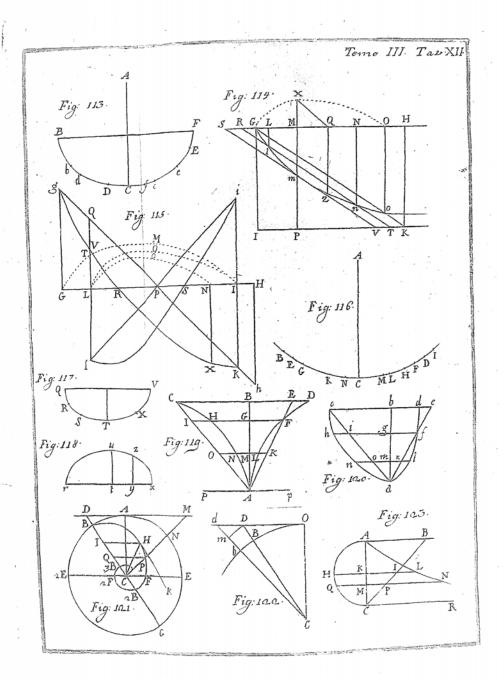


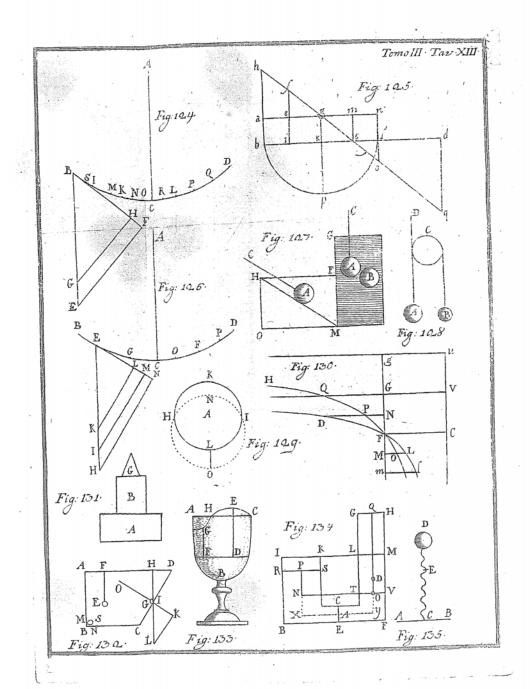


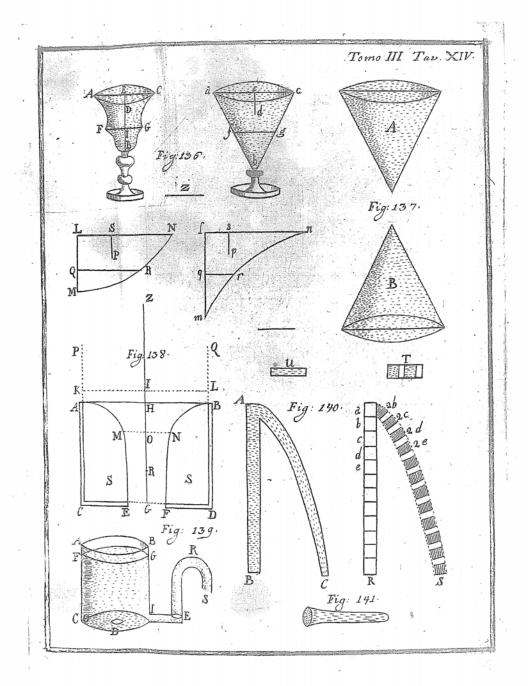


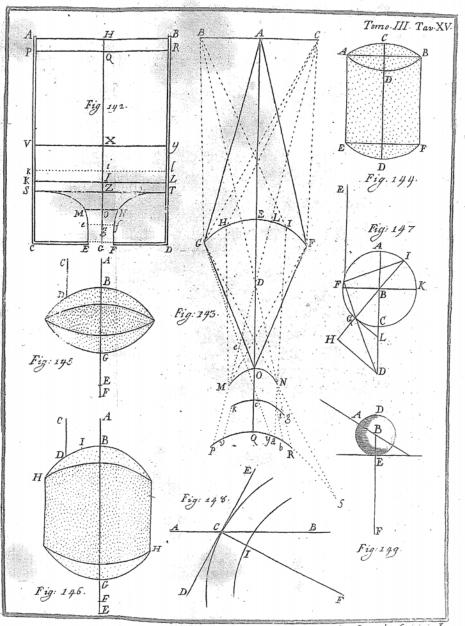












Abate Gio Canocchi feufi in L.