

OPERE

DEL CONTE

JACOPO RICCATI

NOBILE TREVIGIANO.

Tomo Terzo.



Gio. Conocchi del v. Calpi.

IN LUCCA MDCCLXIV.

APPRESSO JACOPO GIUSTI.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

SCHEDIASMI
FISICO-MATEMATICI.

di tanti nuovi scoprimenti. Gli Schediasmi XI, XII, XIII scritti l'anno 1705., o in quel torno da un giovane, che non giungeva ai trent'anni, mostrano a chiaro lume il suo straordinario valore.

Nella Prefazione al Trattato della Separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali ho conghietturato, che l'Opera dell'acutissimo Signor Gabbriello Manfredi *De constructione aequationum differentialium primi gradus* uscita in Bologna l'anno 1707. gli abbia servito di stimolo per vie più internarsi nel Calcolo integrale. La citata Prefazione contiene la storia dei suoi felici ritrovamenti, ed in questo Tomo si leggono gli Schediasmi, in cui c'entrano le dette scoperte, i quali non enumererò partitamente avendone dei principali nel ricordato luogo parlato, ed essendo non pochi quelli, che in se racchiudono i commendati artificj. Fa uso l'Autore di un metodo di sua invenzione nello Schediasma XXXI. *Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi solidi*, e questo metodo lo conduce ad una elegantissima costruzione. Ma non potendo essa a cagione delle quantità immaginarie abbracciare il caso, quando la resistenza s'eguaglia alla velocità a moltiplicata nella costante $2b$, la cui metà b sia minore della unità, ho con una opportuna Annotazione supplito nel detto caso alla soluzione del Problema: *Determinare nella Cicloide il moto d'un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione della velocità*. Non passerò sotto silenzio lo Schediasma V. *De' Polinomj* inserito dalla Dottissima Signora Contessa D. Maria Agnesi nelle sue Istituzioni Analitiche. In esso il Conte Jacopo insegna un metodo, che sarebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie, col di cui mezzo si riducono alle note quadrature i Polinomj differenziali: Meritano pure d'essere distintamente nominati gli Schedias-

diarmi, VII. *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, VIII. *Appendix ad Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, che ci additano la regola generale per distinguere, se ad una equazione differenziale si possa giungere assumendo, o non assumendo una prima differenza siccome costante. Ne parla con molta lode il Sig. Niccolò Bernoulli nella sua Risposta al Sig. Conte Gilio Carlo de Fagnani stampata nel Tomo IX. dei Supplementi degli Atti di Lipsia, Sezione III., Pag. 98.

Avendo il Conte Riccati inserito nell'Opera del Saggio intorno il Sistema dell'Universo le sue scoperte Astronomiche Lib. II., Parte I., Cap. V., VI., e VII., ci sono rimaste su questo argomento le *Riflessioni intorno le forze centrali tanto nel voto, quanto nel pieno* contenute nello Schediasma IV, il Capo V. *De Trajectoriis descriptis a viribus centralibus in vacuo* dello Schediasma XVI. *Scientia Dynamica Elementa*, e gli Schediasmi XVII. *In pleno tempore, quibus arcus trajectoria describuntur, non possunt esse arcus a radio vectore factis proportionalia*, XVIII. *Del Sistema Ticonico*, XIX. *Riflessioni sopra un principio usato dal Bradley per ispiegare l'aberrazione delle stelle fisse*. Gli offervi attentamente il Lettore, e vi scoprirà per entro degli originali pensamenti.

Non dobbio lasciar d'avvertire, che per determinare nello Schediasma XX. scritto l'anno 1735. la lunghezza d'un pendolo semplice isocrono ad un dato composto, si vale del metodo delle azioni, cioè a dire delle forze applicate agli spazj, fondamento principalissimo della Meccanica, che poscia è stato messo nel vero suo lume dal P. Vincenzo Riccati Figlio dell'Autore nel Dialogo delle forze vive, e della azione delle forze morte.

Delle speculazioni del Conte Jacopo intorno le comunicazioni del moto ne ho informato il Lettore nella Prefa-

fazione ai Principj, ed ai Metodi della Fisica. Resta da dir qualche cosa degli Schediasmi XXI, XXII, che trattano della stessa materia. Considerò egli nello Schediasma XXI. le comunicazioni del moto, che si fanno per via di attrazione, collocando un elastro fra due corpi, e supponendo, che il corpo agente tiri col mezzo dell' elastro il corpo paziente, e ciò coll' unica mira di far toccare con mano, che consumandosi fuor di dubbio una porzione della forza viva del corpo agente nello stirare l' elastro, non può sussistere la sentenza Cartesiana, che le forze vive sieno proporzionali alle quantità di moto, la quale ci guida necessariamente alla conseguenza, che nella distensione della molla nulla di forza viva si spenda. Per l' addietro i Fisico-Matematici anno rintracciate le leggi delle comunicazioni del moto fra i corpi o molli, o elastici perfettamente. Il nostro Autore ha mosso un passo di più nello Schediasma XXII, determinando i canoni della comunicazione del movimento in qualunque supposizione, o sieno ambo i corpi perfettamente molli, o perfettamente elastici; o di natura media fra le due estreme.

Somministrano la materia ai quattro seguenti Schediasmi le corde, o fibre elastiche. Gran lavoro ha costato all' Autore lo Schediasma XXIII. *Vera & germana virium elasticarum leges ex phaenomenis demonstrata*. Chi lo leggerà colla dovuta applicazione, lo troverà pregno di cose tutte massiccie, e sommamente importanti. Totalmente nuova è l' idea dello Schediasma XXVI. *Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengon prodotte*. Ecco ciò, che ne dice il P. D. Giovanni Crivelli nella Parte prima de' suoi Elementi di Fisica, pag. 174. *L' acutissimo Sig. Conte Riccati è il solo, ch' io sappia, che siasi proposto d'investigare la proporzione fra le affezioni de' nostri sensi, e la forza degli oggetti esterni*. Conciossia-
chè

nei due lodati Schediasmi il Conte Jacopo si appiglia a certe troppe ristrette supposizioni, ho presa risoluzione di trattare più ampiamente in due Annotazioni gli stessi argomenti.

Ho tenuto discorso nella Prefazione al Saggio intorno il Sistema dell' Universo delle fruttuose meditazioni del nostro Autore in riguardo alle Resistenze. Si maneggia una tale materia negli Schediasmi XXVII., XXVIII., XXIX., XXX., XXXI., XXXII., e XXXIII. Mentre il fluido scacciato di luogo non retroceda, ma o sfugga prontamente dal lato, o seguiti la direzione del corpo, che in esso si muove, ha dimostrato il Conte Riccati, che le resistenze nascenti dalla inerzia della materia stanno nel primo caso come il quadrato, e nel secondo come il cubo dell' attuale velocità. Che se il fluido ritorna in dietro, e col suo urto ritarda vie più il movimento del solido, le resistenze sono regolate da leggi molto diverse. Valendosi il Conte Jacopo degli esperimenti fatti dal Cavalier Nevvton con massima accuratezza sopra i pendoli, che si vibrano nell' aria, ha trovato nello Schediasma XXX., che i due limiti delle resistenze vengono determinati per una parte negli archi grandi da un contrasto proporzionale al quadrato della velocità, e per l' altra in quell' arco minimo, ed ultimo, che sia di mezzo fra i confini del moto, e della quiete, da una opposizione, che si può prendere per costante.

Succedono tre Schediasmi, vale a dire il XXXIV. *Osservazioni sopra il moto de' corpi solidi ne' mezzi fluidi*, il XXXV. *Delle pressioni, e degli equilibrj de' fluidi*, il XXXVI. *Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI. del Libro II. dei Principj Matematici della Filosofia naturale del Cavaliere Isacco Nevvton*. Gli Schediasmi XXXIV., e XXXVI ci pongono sotto gli occhi due controversie, l' una col P. Ab. D. Guido Grandi, l' altra primieramente col Sig. Pie-
b ran-

rantonio, Michelotti, e poscia col Sig. Daniele Bernoulli. S'accordavano l'Autore, ed il P. Grandi nel determinare la forza, che stimola al moto, eguale alla differenza fra i pesi del volume solido, e di un pari volume di fluido; ma poi si appigliavano a differenti opinioni, mentre si trattava di stabilire la massa posta in moto, mettendosi a computo dall'Ab. Grandi il solo corpo solido, e sostenendo il Conte Jacopo, che al corpo solido si dovesse aggiungere un egual volume di fluido. Mise questi così in chiaro nella sua seconda Scrittura la verità della sua proposizione, che il P. Grandi con ingenuità ben degna d'un vero Filosofo si dichiarò pienamente convinto. Non si può negare frattanto, che il P. Abate con acutezza da suo pari nella Risposta alle Osservazioni dell'Autore, non ponga la sua causa in quell'aspetto, ch'era il più favorevole. Un esito egualmente felice ebbe la seconda controversia; imperciocchè il Signor Daniele Bernoulli, che da prima negava costantemente la verità del Corollario Nevvtoniano difesa dal Conte Riccati, avendo poscia più posatamente meditato sopra la teorica dell'acqua, che scaturisce da un vaso, confessò sinceramente nella sua Idrodinamica, che nella ipotesi del Nevvton quando l'acqua è pervenuta ad una equabile velocità, la forza, che stimola l'acqua stessa ad uscir dal foro, s'egualgia al peso non della colonna fluida soprastante al buco, come per l'addietro avea sostenuto, ma bensì d'una colonna di doppia altezza, come assieme col Nevvton avea il Conte Jacopo dimostrato. Non farà discaro a chi legge, che nella Annotazione, che vien dietro allo Schediasma XXXVI., si ponga da me in maggior lume la verità del Corollario Nevvtoniano, facendo ricorso al metodo infallibile delle azioni. Egli è fuor di dubbio, che dalla azione della gravità dell'acqua contenuta nel vaso proviene la forza viva, e conseguentemente la velocità di quella parte di

flui-

fluido, che spiccia fuori pel buco. Dalla predetta azione per tanto io deduco e la velocità, colla quale esce l'acqua, e la forza libera e non impedita, che sarebbe atta ad imprimerle il detto moto, la quale quando la velocità è divenuta equabile, giunge alla misura assegnatale dall'incomparabile Sig. Nevvton. Colla stessa occasione si determina da me la figura del gorgo, che forma la Natura in vicinanza del foro, affine di passare per gradi dalla picciola celerità, che ha l'acqua dentro del vaso, a quella molto maggiore, che acquista; mentre scaturisce pel buco.

Allo studio della Diottica s'era molto il nostro Autore applicato. Scrive egli nel Lib. III. Cap. III. dei Principj, e dei Metodi della Fisica, che in compagnia di un suo dotto Amico, cioè a dire del Sig. Conte Giovanni Rizzetti, avea soddisfatto a parecchi ardui, ed eleganti Problemi, ed in particolare al seguente fra tutti il più malagevole. Data qualunque lente composta di due segmenti di cerchio, data la proporzione fra le forze refragenti dei due mezzi fluido, e solido, e dato il punto lucido nell'asse della lente, tirare una linea, limite dei raggi refratti, e riflessi, di modo che tutti i raggi, che urtano nella lente fra l'asse, e la detta linea, si rifrangano, e quelli che urtano al di fuori della linea stessa, si riflettano. Fra le sue carte non si sono in tale materia trovati, salvo che gli Schediasmi XXXVII, e XXXVIII, i quali per altro fanno vedere quanto egli fosse penetrato addentro in sì fatte speculazioni. E' curiosa la proprietà della sfera dimostrata nello Schediasma XXXVIII. Tutti i raggi, che passando per un mezzo più raro urtano nella superficie d'una sfera più densa con una direzione parallela all'asse della stessa, patiscono una doppia rifrazione; di maniera che nessun raggio si riflette, mentre sta per far transito dalla sfera più densa al mezzo più raro.

Chiudono la serie dei XXXIX. Schediasmi otto lettere, quattro del P. D. Giovan Bernardo Pifenti C. R. S., ed altrettante del nostro Autore, che trattano dell' *Analogia fra i suoni, ed i colori, e del vero metodo di filosofare in Fisica*. Non sapea il Conte Jacopo condescendere alla soverchia indulgenza del Padre Pifenti verso le ipotesi, standogli sempre a mente, che giusta il detto del Galileo sono belle ed ingegnose, ma per lo più non dimostrate, ne dimostrabili.

I N D I C E

D E G L I

S C H E D I A S M I.

- S**chediasma I. *Soluzione generale del Problema inverso intorno a raggi osculatori, cioè data in qualsivoglia maniera per l'ordinata l'espressione del raggio osculatore, determinare la curva, a cui convenga una tal espressione.* Pag. 1.
- Schediasma II. *Data in qualsivoglia modo per la curva, che descrivessi, l'espressione del raggio combaciante, determinare la curva medesima.* p. 8.
- Schediasma III. *Risposta ad alcune opposizioni fatte dal Sig. Giovanni Bernoulli alla soluzione del Problema inverso delle forze centrali nel vortice in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, pubblicata dal Sig. Jacopo Ermanno nel secondo Tomo del Giornale de' Letterati d'Italia Articolo XV.* p. 20.
- Annotazioni del Sig. Niccolò Bernoulli Nipote del Sig. Giovanni sopra lo Schediasma del Sig. Co. Jacopo Riccati pubblicate nel Tomo decimonono del Giornale de' Letterati d'Italia Articolo VII. Coll'annessa Soluzione propria del Problema inverso delle forze centrali agenti in un mezzo non resistente, dedotta da principj medesimi del Sig. Newton.* p. 29.
- Schediasma IV. *Contrariposta alle Annotazioni del Sig. Niccolò Bernoulli inserite nel XX. Giornale d'Italia Articolo XIII., con un metodo di separare le indeterminate nell'equazioni differenziali, e con alcune riflessioni intorno le forze centrali tanto nel vortice, quanto nel pieno.* p. 42.
- Risposta del Sig. Niccolò Bernoulli Nipote del Sig. Giovanni a quelle cose, che il Sig. Conte Jacopo Riccati inserì nel Tomo XXI. del Giornale de' Letterati d'Italia all'Articolo VIII.* p. 59.

Sche-

- Schediasma V. De' Polinomj. p.71.
 Schediasma VI. De recta ratione analytice exprimendi lineam interceptam inter tangentem, & curvam. p.79.
 Schediasma VII. Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus. p.83.
 Danielis Bernoullii Job. Fil. Med. Cand. Notata in præcedens Schediasma III. Co. Jacobi Riccati. p.88.
 Schediasma VIII. Appendix ad Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus. p.90.
 Danielis Bernoullii explanatio Notationum suarum, qua extant Supplem. Tom. VIII., Sect. II. p.97.
 Schediasma IX. Della quadratura della Post-evoluta della Cicloide. p.99.
 Schediasma X. Della connessione, che passa tra la costruzione dell'equazioni Analitiche, e la quadratura d'infinite curve Algebriche. p.112.
 Schediasma XI. De solutione æquationum Analyticarum, & Problematum Geometricorum per curvas simplicissimas. p.119.
 Schediasma XII. De modo construendi non ineleganter Problemata plusquam solida. p.127.
 Schediasma XIII. De analogia inter æquationes analyticas, & potestates logarithmicas. p.149.
 Schediasma XIV. Theoria proportionum per exponentes. p.152.
 Schediasma XV. De Organica Curvarum Trajectoriae, atque Logarithmica Constructione a Viro Celeberrimo Joanne Poleno inventa. p.161.
 Schediasma XVI. Scientiæ Dynamicæ Elementa. p.163.
 Schediasma XVII. In pleno tempore, quibus arcus trajectoriae describuntur, non possunt esse arcus a radio vectore factis proportionalia. p.198.
 Schediasma XVIII. Del Sistema Ticonico. p.199.
 Schediasma XIX. Riflessioni sopra un principio usato dal Bradley, per ispiegare l'aberrazione delle stelle fisse. p.205.
 Schediasma XX. Determinare la lunghezza d'un pendolo semplice isocrono ad un dato composto. p.208.
 Schediasma XXI. Delle comunicazioni del moto, che si fanno per via di attrazione. p.213.
 Schediasma XXII. Dei limiri, da quali restano determinate le leg-

- leggi della comunicazione del moto in qualunque ipotesi. p.228.
 Schediasma XXIII. Vera, & germanæ virium elasticarum leges ex phaenomenis demonstrata. p.239.
 Annotazione dell'Editore. p.258.
 Schediasma XXIV. Sopra alcune proprietà delle corde elastiche. p.276.
 Schediasma XXV. Confutazione dell'ipotesi, che due corpi dotati di eguali quantità di moto urtando in due corde del tutto eguali, le ripieghino per eguali saette. p.284.
 Schediasma XXVI. Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. p.287.
 Annotazione del Sig. Ab. Co. Girolamo Lioni. p.297.
 Annotazione dell'Editore. p.299.
 Schediasma XXVII. Delle Resistenze. p.323.
 Schediasma XXVIII. Della Forza, colla quale i corpi fluidi urtano nei solidi, o sia della Resistenza, con cui i mezzi fluidi s'oppongono al moto dei solidi. p.343.
 Schediasma XXIX. Data in qualsivoglia modo la forza centripeta per la distanza dal centro, e messa la resistenza in ragione composta della velocità attuale duplicata, e della densità del fluido, investigare le leggi della discesa d'un grave. p.349.
 Schediasma XXX. Del moto dei pendoli a cicloide, posta la resistenza del mezzo in ragione duplicata dell'attuale velocità. p.357.
 Schediasma XXXI. Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto de' corpi solidi. p.376.
 Annotazione del Sig. Ab. Co. Girolamo Lioni. p.386.
 Annotazione dell'Editore. p.387.
 Schediasma XXXII. Determinare il moto d'un pendolo a cicloide, supposta costante la resistenza del mezzo. p.396.
 Schediasma XXXIII. Determinare il moto d'un pendolo a cicloide, supposta costante la resistenza, che si oppone alle discese, ed agli ascendimenti verticali. p.402.
 Schediasma XXXIV. Osservazioni sopra il moto de' corpi solidi ne' mezzi fluidi. p.405.

- Schediasma XXXV. Delle pressioni, e degli equilibri de' fluidi. P.413.
 Schediasma XXXVI. Difesa del Corollario II. della Proposizione XXXVI. del Libro II. dei Principj Matematici della Filosofia naturale del Cavalier Isacco Newton. P.425.
 Annotazione dell' Editore. P.449.
 Schediasma XXXVII. De' fochi primarij, e secondarij delle lenti sferiche. P.470.
 Schediasma XXXVIII. Omnes radii paralleli in sphaeram incideres duplicem refractionem patiuntur. P.478.
 Schediasma XXXIX. Dell' analogia fra i suoni ed i colori, e del vero metodo di filosofare in Fisica. P.479.

SCHEDIASMA I. (a)

Soluzione generale del Problema inverso intorno a' raggi osculatori, cioè, data in qualsivisia maniera per l'ordinata l'espressione del raggio osculatore, determinar la curva, a cui convenga una tal espressione.

LE ordinate dalla curva ACD (Fig. 1.) partano tutte dal punto B, e sia $BC=y$, la sua differenza $=dy$, il minimo arco $CI=dx$, e CD elemento della curva $=ds$.

Supposto che il raggio osculatore $CG=r$ sia dato in qualsivoglia forma per l'applicata BC, di modo che la relazione di r ad y possa esprimersi con una nota equazione; si prenda come costante la differenziale $CI=dx$, ed in questo caso il valore del raggio osculatore verrà determinato dall'equazione $r = \frac{yds^2}{dxds^2 - ydxddy}$, ovvero $\frac{yds^2}{v} = dxds^2 -$

$ydxddy$, la qual formula mi fò lecito di prendere ad prestito dal Sig. Marchese dell'Ospitale; mentre essendo notissima a' Geometri, non giudico necessario dedurla dal metodo diretto degl' infiniti.

Per liberare la premessa formula dalle seconde differenze, condotta all'ordinata BC la perpendicolare BF, chiamo p la funnormale BF, e q la normale CF, dalla qual denominazione si cavano le seguenti analogie.

$$\left. \begin{array}{l} CB:BF::CI:ID \\ y:p::dx:dy \end{array} \right\} \text{ dunque } \frac{pdx}{y} = dy, \frac{ydy}{p} = dx.$$

$$\left. \begin{array}{l} BC:CF::CI:CD \\ y:q::dx:ds \end{array} \right\} \text{ dunque } \frac{qdx}{y} = ds.$$

Già che dunque $\frac{pdx}{y} = dy$, prese di nuovo le differenze in ordine alla prima ipotesi, supposta costante dx , avremo $\frac{pdydx}{y} - \frac{dpdx}{y} = -ddy$, e fo-

(a) Questo Schediasma è stato pubblicato l'anno 1712. nel Tomo undecimo del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo ottavo.

stituito questo valore nella formula generale, farà $\frac{yds^2}{v} = dxds^2 + \frac{pdydx^2}{y}$
 $- dpdx^2$: ma $ds = \frac{qdx}{y}$; dunque $\frac{q^2dx}{r} = q^2dx + pydy - y^2dp$, ed essen-
do $dx = \frac{ydy}{p}$, farà in conseguenza $\frac{q^2dy}{r} = q^2dy + p^2dy - ydp$. Trattan-
to si trova essere $p^2 = q^2 - y^2$, e $pdp = qdq - ydy$. e fatte le sostitu-
zioni, $\frac{q^2dy}{r} = 2qdy - ydq$, cioè moltiplicando tutti i termini per y , e di-
videndoli per q^2 , $\frac{ydy}{r} = \frac{2qdy - ydq}{qq}$, ed integrata l'equazione,

$$\int \frac{ydy}{r} = b = \frac{y^2}{q}.$$

Tirata poi dal polo B alla CF la perpendicolare BK, faranno in
proporzione continua le rette CF, CB, CK; dunque $\frac{y^2}{q} = CK$, ch'io
chiamerò t , e conseguentemente $\int \frac{ydy}{r} = t \pm b$.

Altra Soluzione.

Così, o in simil maniera avrebbe a procedersi, quando si stimasse
proprio di valersi delle formule già ritrovate, o pure la nostra Analisi
ci conducesse ad una espressione implicata con le seconde differenze;
giacchè non è sempre concesso nello scioglimento d'una questione lo sco-
prire a prima vista la strada più facile. Per altro seguendo i vestigj.
ed il metodo del dottissimo Sig. Jacopo Ermanno indicato nel settimo
Giornale d'Italia pag. 194. in due parole si soddisfarà al Problema
proposto.

Condotta dal punto B alla DG la normale BN infinitamente prof-
fima alla BK, stante il parallelismo delle due rette CM, BK perpendi-
colari alla retta CG per la costruzione, e dell'altre due CD, BN nor-
mali alla linea DG, l'angolo MCD farà eguale all'angolo KBL, e di
più al CGD per la proprietà de' raggi osculatori; dunque saranno simili
i due settori BKL, GCD, e così GC:CD::BK:KL; ma CD:DI::
CB:BK; dunque ex æquo perturbate GC, r:DI, dy::CB, y:KL, *de*
cioè $\frac{ydy}{r} = dt$.

COROLLARIO I.

Stimo superfluo l'avvertire, che l'accennata equazione può sempre
ridursi ad una differenziale del primo grado, in cui sono separate le in-
determinate; imperocchè si ha almeno trascendentemente per y , e le co-
stanti la sommatoria $\int \frac{ydy}{r}$, ed essendo questa più, o meno la costante

$$b = t = \frac{y^2}{q}, \text{ farà } q = \frac{y^2}{t}, \text{ cioè } q^2 = p^2 + y^2 = \frac{y^4}{t^2}, \text{ e } p = \frac{\sqrt{y^4 - t^2 y^2}}{t}$$

$$= \frac{ydy}{dx}, \text{ o pure } dx = \frac{tdy}{\sqrt{y^2 - t^2}}, \text{ il che ec.}$$

COROLLARIO II.

Se poi si desse in qual si sia modo per y , e le costanti la linea CH
intercetta fra il punto della curva C, e la normale tirata dal centro oscu-
lato G all'ordinata CB, si scioglierà facilmente il problema nella infra-
scritta maniera. Posta CH = z , è manifesto dalla premessa soluzione
essere $\frac{ydy}{r} = dt$, e verificandosi l'analogia CB, y:CK, t::GC, r:CH,

$$z, \text{ farà } \frac{zy}{t} = r \text{ e sostituito in luogo di } r \text{ questo valore, avremo } \frac{dy}{t} =$$

$$\frac{dt}{t}, \text{ ed integrando ec.}$$

COROLLARIO III.

Ma quando le curve cercate avessero relazione al loro asse, in quel
caso ripetendo la nostra formula generale $\frac{q^2 dy}{r} = 2qdy - ydq$, dalla
seconda parte dell'equazione dovrebbe sottrarsi la quantità qdy ; onde l'e-
spressione premessa si riduce alla seguente $\frac{q^2 dy}{r} = qdy - ydq$, o pure
 $\frac{dy}{r} = \frac{qdy - ydq}{qq}$, la quale sommata da $\int \frac{dy}{r} = \frac{y}{q} \pm b$. Similmente nelle
curve all'asse data in qualunque forma per y la retta CH = z , farà
 $\frac{dy}{z} = \frac{dy}{y} - \frac{dq}{q}$.

A z

SCO-

S C O L I O I.

Se bene il Problema, a cui ho soddisfatto, è generale tanto per la sua estensione, quanto per l'uso; con tutto ciò molto più generale dello stesso Problema si è la maniera di scioglierlo, al progresso della quale fatta la debita riflessione, si scoprirà, che poste le differenze delle coordinate d'una curva eguali a dx , dy , e presa la prima come costante, essendo variabile la seconda, il che può farsi in qual si sia caso; se si combineranno in qualunque forma possibile le grandezze date per y , e le differenziali dx , dy , ddy , e di più le loro dignità, o prodotti, purchè nella formula non v'entri l'indeterminata x , o le quantità per essa date, sempre l'equazione differenziale del secondo grado potrà ridursi ad una del primo, valendosi delle normali, e funnormali, tangenti, e suttangenti, o d'altre rette analoghe, conforme richiederà la facilità del calcolo, e la maggior semplicità della soluzione. Fatta poi la riduzione, supposto che in ogni incontro non sieno separabili le indeterminate non sarà questo difetto del metodo spiegato; ma piuttosto del metodo inverso delle differenziali del primo ordine, che non è per anche ridotto all'intera sua perfezione.

Eccone un'esempio de' più composti. Nel tentare un Problema di cui per ora darò la sola sintesi, riferbandomi ad altra congiuntura di pubblicarne l'analisi, mi sono incontrato nella seguente equazione d'una curva riferita al suo asse $yddy + dy^2 + dydx = ydy\sqrt{dx}$. Sia p la

funnormale della curva, e per le cose di sopra esposte avremo $yddy = dpdx - \frac{pdydx}{y}$. Fatta pertanto la sostituzione, $dpdx - \frac{pdydx}{y} + dy^2 + dydx = ydy\sqrt{dx}$.

ma $ydy = dx$; dunque fatta svanire la differenza dx , $\frac{dp}{dy} + dy \cdot \sqrt{py} = ydp - pdy$. A fine di separar le inde-

terminate dell'ultima equazione, sia $\sqrt{y} = z$, e $\sqrt{p} = u$, e fatta l'operazione, $udu + zdx = zdu - udx$, la qual espressione può ridursi col metodo del Sig. Bernoulli; imperocchè posta $u = zt$, e fatta sparire con l'equazione sussidiaria la quantità u , sarà $\frac{dz}{z} = \frac{a-t}{a^2+t^2} dt$, e la costru-

zione dipenderà dalla quadratura del circolo, e dell'iperbola Apolloniana.

Ma

Ma forse si ridurrà l'equazione $udu + zdx = zdx = zdu - udx$ più elegantemente nel modo infra scritto. S'intenda descritta la curva MBC (Fig. 2.), e pongasi $AE = u$, ed EB normale ad $AE = z$, indi trasportata l'equazione della curva all'asse ad un'altra equazione riferita al punto A, si osservi essere il membro $zdu - udx =$ al trilineo differenziale ABD = mdn , chiamata AB m , e dn il minimo arco BD; dunque $udu + zdx = mdn$: ma $udu + zdx = mdm$, ed in conseguenza $mdm = mdn$, ovvero $dm = dn$. Sarà pertanto la curva MBC una logaritmica spirale. Presa dunque fra l'unità, e l'abscissa AE la media proporzionale AI, e fra l'unità, e la BE la media IF, per il punto F, ed altri determinati in simil maniera passi la curva LGF, e finalmente si descriva una nuova curva, la cui funnormale sia data per l'applicata, come l'abscissa AI è data per l'ordinata IF, il che non farà difficile agli Analisti, e si avrà fatto quanto doveva farsi.

S C O L I O II.

Resta, che si metta in chiaro la costruzione di tutte le curve, che rimirano un punto fisso, quando però sieno separate l'indeterminate; giacchè per quelle, che anno relazione all'asse, la cosa è per se stessa facile, e piana. Io mi servo di questo modo meccanico. Suppongo, che la curva da descriversi sia riferita al suo asse, e la costruisco colle regole note; indi stando rigide le applicate restringo tutta la lunghezza dell'asse in un punto, di modo che si generi la convoluta: dico, che questa sarà la curva cercata.

Io non mi estendo in ispiegare più diligentemente sì fatta sorte di costruzione, perchè molti Geometri, fra quali Jacopo Gregorio, ed il Barovvio, anno parlato a bastanza di questo genere di convoluzione: aggiungo bensì, che con l'occasione di esaminar la materia, ho sciolto il seguente Problema, cioè: trovare una curva all'asse, che convoluta restituisca se medesima, ed ho scoperto essere questa una proprietà mirabile della Parabola ordinaria.

Sia la Parabola AC (Fig. 3.), il cui vertice A l'asse AF, ed il fuoco B, e presa nell'asse prolungato AD = AB, s'intenda condotta la perpendicolare DE. Dal punto C segnato ad arbitrio nella periferia della Parabola si tiri l'ordinata CE, e la CB al fuoco: dico, che fatta la convoluzione della figura DACE, si trasformerà questa nel trilineo ACB. Quanto è stato difficile lo scoprire l'accennata verità col mezzo dell'analisi, altrettanto riuscirà facile il dimostrarla per via di sintesi.

Facendo poi passaggio dalla costruzione meccanica alla geometrica; sia la curva MBC (Fig. 2.) riferita al punto fisso A, la di cui ordinata AB = y , e l'arco infinitamente picciolo BD = dx , e si esprima la natura della curva con l'equazione $zdy = dx$, nella quale z si suppone data in qualsiasi modo per y , e le costanti. La linea AEL rappresenti l'asse della curva, e fatto centro in A, descrivasi alla distanza arbitraria AL eguale all'unità, o a qualche altra retta cognita, conforme alle

con-

condizioni della curva, l'arco di circolo LGF, e fatta la preparazione come nella Figura, pongasi l'elemento dell'arco LG, cioè $GF = du$.

Perchè i settori ABD, AFG sono simili, farà $AB, y : BD, dr :: AF, a : FG, du$; dunque $dx = y du$; ma $dx = x dy$; dunque $\frac{x dy}{y} = du$,

ed integrando, $\int \frac{x dy}{y} = u$. Si raccoglie dalla premessa soluzione, che

se la retta AI verrà posta $= m$, il minimo arco $FG = du$ potrà esprimersi in un'altra forma, e farà $du = \frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$. Se dunque l'altro mem-

bro $\frac{x dy}{y}$ con le debite sostituzioni potrà ridursi alla formula $\frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$;

o ad altra equivalente, la curva MBC farà sempre Algebrica, ed in ogni altro caso trascendente.

ESEMPIO I.

La curva MBC abbia la sua sottangente costante $= a$; dunque $\frac{ady}{y} = dx$, ed $\frac{ady}{y} = du$, e sommata l'equazione, $a^2 = yu$, cioè

$u : a :: a : y$.

Costruzione. Sia la retta AL raggio dell'arco LF data di posizione, e tirata ad arbitrio la linea AF, sia come l'arco FL al semidiametro AL, così la stessa AL ad AB, ed il punto B farà nella curva cercata.

ESEMPIO II.

Sia proposta l'equazione della curva MBC $\frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = dx$, o pure

$\frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = du = \frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$. Fatta pertanto $y = a - n$, si avrà

$\frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{-dn}{\sqrt{a^2 - n^2}} = \frac{dm}{\sqrt{a^2 - m^2}}$; dunque $n = m = a - y$.

Costruzione. Pongasi $FB = AI$, ed il punto B farà nella curva desiderata. La curva MCB è la più semplice fra l'Epicicloidi, e si ge-
ne

nera quando un circolo si rivolge sopra un altro circolo eguale, essendo il punto A principio della rotazione. Nello stesso tempo si rifletta, che se si fosse descritta una curva all'asse con l'equazione $dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$,

questa sarebbe stata la più semplice fra le Cicloidi, dal che ne segue, che l'Epicicloide suddetta è la convoluta della Cicloide ordinaria.

La curva del primo esempio verrebbe descritta da un mobile, che si portasse al suo centro con una forza in proporzione reciproca triplicata della distanza; quantunque in questa ipotesi potesse aver il suo luogo anche la spirale logaritmica: ma se un corpo con relazione al suo centro descrivesse l'epicicloide del secondo esempio, la forza centrale sarebbe reciprocamente come il quadrato-quadrato della distanza, ed il centro farebbe il punto A principio della rotazione.

Questa proporzione reciproca quadruplicata, che fin'ora non è stata considerata da' Matematici, non è arbitraria, o geometrica, ma reale, e fisica, non meno dell'altra tanto famosa, in vigor della quale anelano i corpi al loro centro con una legge, che serba la ragione reciproca de' quadrati. L'illustre Sig. Nevvton, ed alcuni altri Matematici Inglesi anno fatta riflessione, che certi corpi, come i magnetici, vengono attratti dal centro, o per dir meglio, vengono spinti verso il centro con una proporzione maggiore della reciproca triplicata; e se non mi tradiscono alcune sperienze da me fatte con tutta la possibile diligenza, posso dire con coraggio, che si verifica la legge sopra esposta, e che di più sono tali, e tante le circostanze, che la confermano, ch'io non posso ragionevolmente metterla in dubbio.

Ma già che s'è fatta menzione delle forze centrali, gioverà forse per dar un saggio del nostro metodo, sciogliere il decantato Problema inverso delle forze predette nel voto. Sia data in qualsivoglia modo per l'ordinata y la forza centrale $f = \frac{ds^2 - y ddy}{y^3 dx^2}$, mentre suppongasi dx come

costante. Assunta poscia la sottangente della curva $= x$, col mezzo dell'equazione $y dx = x dy$, fatta sparire in primo luogo la seconda differenziale ddy , indi la dx , si perverrà all'equazione $f dy = \frac{dy}{y^3} + \frac{dx}{x^3}$, la quale in-

tegrata, non omissa l'addizione delle costanti, darà la formula generale espressa con le sue differenze, non dissimile alle altre, che vanno per le mani degli eruditi.

SCHEDIASMA II.

Data in qualsivoglia modo per la curva, che dee descriversi, la espressione del raggio combaciante, determinare la curva medesima.

Quando mi cadde in pensiero di esporre in pubblico nel Tomo undecimo del Giornale de' Letterati d'Italia pag 204. la mia soluzione del problema inverso intorno i raggi osculatori, altra mira non ebbi, salvo che di spianare un sentiero a coloro, che non si erano per anco internati ne' più profondi misterj del calcolo degl'infiniti; acciocchè potessero giugnere felicemente a soddisfare alle più ardue quistioni della pura, e della mista Geometria. Mi piacque allora di proporre il problema sotto la forma più semplice, e che più viene ad uso, supponendo, che il valore del semidiametro combaciante fosse dato in qualsivoglia maniera per una, o per l'altra delle coordinate: ma perchè bene spesso può intervenire, che la funzione del raggio diafi per le toccanti, per le normali, e per altre rette analoghe, e qualche fiata per la curva medesima, che ha da costruirsi; ho meco stesso divisato per compimento della materia d'aggiugnere alla prima un'altra dissertazione.

PROBLEMA PRIMO.

S'intenda dunque descritta (Fig 4.) la curva ACE, che abbia relazione al suo asse AB, ed il cui raggio osculante EG sia dato in qualunque maniera per l'arco AC. Pongo conforme il solito l'assisa AB = x , l'applicata BC = y , e la curva AC = s , ed in conseguenza i tre elementi CF, FE, CE faranno dx , dy , ds . Appreso sia il raggio EG = r dato per AC, cioè a dire per s , la toccante HC = t , e la fittangente HS = p .

Primieramente egli è certo essere la formula esprimente il valore del raggio osculatore, supposta ds costante $\frac{dxds}{ddy} = r$, la quale maneggia-

Si raccoglie da una lettera del Sig. Bernardino Zendrini de' 18. febbrajo 1715. diretta all'Autore, e da una copia di quel tempo del presente Schediasma II, che questa fu inserita nel Tomo ventesimo del Giornale de' Letterati d'Italia, e formare in esso l'Articolo X. Non essendosi allora stampato, è comparso alla luce tradotto in latino ed arricchito d'una Appendice, solamente l'anno 1747. nella Parte terza del Tomo secondo de' Commentarj dell'Istituto di Bologna. La Dottissima Signora Contessa Donna Maria Agnelli dà un esempio estratto di questo Schediasma, e del superiore al fine del Libro IV. delle sue Istituzioni Analitiche, che uscirono in Milano l'anno 1748.

col metodo spiegato nella citata dissertazione avremo $\frac{yds}{dy} = t$ e

prese le differenze in ordine all'ipotesi di ds costante, $dt = \frac{dy^2ds}{dy^2} - \frac{ydsddy}{dy^2}$,

vale a dire $\frac{dy^2ds}{yds} - \frac{dy^2dt}{r} = ddy$, o pure $dy^2ds - dy^2dt = \frac{ydxds^2}{r}$.

Ma essendosi messa la fittangente della curva = $p = \frac{ydx}{dy}$, o $\frac{pdy}{y}$

= dx , se col mezzo di questa equazione si farà sparire nella formola principale la flussione dx , si avrà $dyds - dydt = \frac{pds^2}{r}$, e collocando op-

portunamente in vece di ds il suo valore $\frac{tdy}{y}$, farà la premessa equazio-

ne ridotta alla equivalente $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{ds}{r}$. Il secondo membro $\frac{ds}{r}$ può

sempre sommarli almeno trascendentemente; giacchè nel nostro caso r altro non è, se non se una funzione arbitraria della curva s .

Nel primo poi $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt-yy}}$, surrogato in cambio di p il

suo valore $\sqrt{tt-yy}$, si separano con facilità le variabili; conciossiachè posta $q = \frac{y}{t}$, ed istituite le debite surrogazioni, svaniranno ambo le va-

riabili y , t , e resterà semplicemente $\frac{dq}{\sqrt{1-qq}} = \frac{ds}{r}$.

In oltre se nella espressione $\frac{tdy - ydt}{tp} = \frac{ds}{r}$, per mezzo dell'equazio-

ne $pp + yy = tt$, farò che si dilegui la spezie t , ed in iscambio che comparisca la p , troverò $\frac{pdy - ydp}{pp + yy} = \frac{ds}{r}$, e fatta $\frac{y}{p} = z$, ne risulterà

la formola libera dalla mescolanza delle variabili $\frac{dz}{1+z^2} = \frac{ds}{r}$.

Dalle cose fin qui dimostrate si raccoglie, che tanto il valore della curva s , quanto del raggio r , e della sommatoria $\int \frac{ds}{r}$ si vede noto

o algebricamente, o trascendentemente per z , e di conseguenza, disposta l'equazione come segue $ds = \frac{rdz}{1+zz}$, non si farà qualisiasi confusione

delle variabili: il che pure dee dirsi dell'altra equazione. $\frac{rdq}{\sqrt{1+q^2}} = ds$.

Ora si fa essere $ds = \frac{tdy}{y}$, e $\frac{y}{z} = q$; dunque $\frac{dy}{q} = \frac{rdq}{\sqrt{1+q^2}}$ ovvero dy

$= \frac{rqdq}{\sqrt{1+q^2}}$. E chi volesse servirsi della formola $z = \frac{y}{p}$, con un picciolo

giro di computo scoprirebbe $ds = \frac{\sqrt{pp+yy} \cdot dy}{y} = \frac{\sqrt{1+zz} \cdot dy}{z} = \frac{rdz}{1+zz}$

e finalmente $dy = \frac{zdx}{1+zz \cdot \sqrt{1+zz}}$.

Ed eccoci pervenuti a due nuove espressioni libere dalla complicazione delle indeterminate, in cui si ritrova l'elemento dy dell'applicata dato per le funzioni dell'arco s ; mentre le tre spezie q , z , r , combinate colla curva s formano altrettante equazioni, che si riducono a luoghi conosciuti. Ristringendo per tanto i termini, le formole, che abbiamo per mano, si tramuteranno nella più semplice $dy = wds$, ovvero in un'altra equivalente $udy = ds$; imperciocchè, se l'ordinata y è data per la funzione $\int wds$, ne segue, che la curva s farà data altresì per una funzione dell'applicata, quale si è $\int udy$; essendosi già scoperta u data in qualche modo per y .

Posta $udy = ds$, farà $u^2 dy^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2$; dunque $\sqrt{uu-1} \cdot dy = dz$, espressione generale, che abbraccia tutte le curve delle quali siamo andati in traccia nel problema, di cui si è data la soluzione.

Dee avvertirsi, che ambo le quantità differenziali $\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}$, $\frac{dz}{1+zz}$

si riducono alla flussione d'un arco di cerchio esposta o per il seno, o per la toccante. Quindi se l'elemento $\frac{ds}{r}$ farà algebricamente somma-

bile, la rettificazione delle curve cercate, ed in conseguenza il valore del semidiametro combaciante dipenderà dal tetragonismo del circolo, il quale tetragonismo c'entrerà, qualunque volta l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ si ridurà

rà

ai logaritmi, o a qualche quadratura di genere superiore. Ma se la sommatoria suddetta ricade nelle formole proprie degli archi circolari; allora tanto la misura della curva, quanto il valore del raggio può essere algebrico. In tal caso è fuor di dubbio, che le quantità s , r , q , z , si riguardano vicendevolmente con una data relazione analitica: ma che alla quantità u convenga una tal proprietà, è facile a dimostrarsi.

Attesochè s , ed r si danno in ordine alla ipotesi algebricamente a cagion d'esempio per z , e z per $\frac{y}{p}$, cioè per l'ordinata, e la fittangen-

te; si ricava ch'essendo $p = \frac{ydx}{dy}$, farà $\frac{pdy}{y} = dx$. Questo valore di dx

si surrogli nell'equazione generale delle curve $dx = \sqrt{uu-1} \cdot dy$, ed abbiassi $\frac{p}{y} = 1 = \sqrt{uu-1}$, e si conchiuda essere u data per z , e con-

seguentemente per s . Non si dee frattanto stendere la riflessione fino all'applicata y almeno generalmente: ed in fatti la rettificazione delle nostre curve non si dà analiticamente per le coordinate, se non se in un solo incontro; mentre cioè l'equazione $dy = wds$ ammette integrazione algebrica nell'omogeneo di comparazione.

Sia per esempio s in qualsivoglia forza data algebricamente per z , ed essendo $ds = \frac{tdy}{y}$, e $\frac{y}{z} = \frac{\sqrt{1+zz}}{z}$; dunque $dy = \frac{zds}{\sqrt{1+zz}}$.

$= z$, nel qual caso farebbe il raggio osculatore $r = 1+ss$, e l'equazione generale si trasformerà nella particolare $dy = \frac{zdx}{\sqrt{1+zz}}$, laonde in-

tegrando ommessa l'aggiunta della costante, $y = \sqrt{1+zz}$. E pure $\sqrt{yy-1} = s = z$, ed $r = yy$. La equazione per tanto della curva per rapporto alle coordinate farebbe $\frac{dy}{\sqrt{yy-1}} = dx$, che si costituisce supposta

la quadratura della iperbola.

Sia di bel nuovo $ds = z^{n-1} dz$, o sia $s = \frac{z^n}{n}$, e $dy = \frac{z^n dz}{\sqrt{1+zz}}$

Questa equazione farà analiticamente integrabile, ogniquale volta l'esponente n sia un numero intero, ed impari: ma se fosse pari, la sommatoria.

B 2

12
 toria dell'omogeneo di comparazione si avrebbe col mezzo dei logaritmi, o del tetragonismo iperbolico. Negli altri casi, posto cioè l'indice n o negativo, o rotto, l'effetto dal più, o dal meno, rimando il Lettore a quegli Analisti, che delle premesse formole an di proposito ragionato.

Queste osservazioni non sono affatto inutili; conciossiachè ci fanno chiaramente vedere, che bene spesso la espressione del raggio combaciante si riduce dalla funzione della curva a quella dell'ordinata.

COSTRUZIONE.

Espongasi l'indeterminata AB (Fig. 5.), che si chiami s , e ci rappresenti gli archi variabili della curva cercata; e perchè una delle nostre fondamentali equazioni era $dy = \omega ds$, in cui si dimostrava data per s , si metta l'applicata $BC = \omega$, e s'intenda descritta la curva AC; egli è manifesto essere lo spazio curvilineo $CAB = \int \omega ds = y$ coordinata della curva, che dee costruirsi.

Appresso dalla equazione $dy = \omega ds$ si passi all'analogia $\omega : 1 :: dy : ds$; ma s'era già stabilito $ds = u dy$, dunque $\omega, 1, u$ faranno tre quantità in proporzione continua. Facciasi pertanto come BC all'unità, così l'unità ad un'altra grandezza $= u$.

Quinci si descriva la curva AF, la di cui affissa AE s'uguagli al mistilineo $ACB = y$, e sia l'applicata $EF = \sqrt{uu-1}$, e conseguentemente

te l'area AFE uguale alla somma $\int \sqrt{uu-1} . dy = x$. Per la qual cosa le coordinate della curva, di cui andiamo in traccia, si esprimono, una cioè x per lo spazio FAE, e l'altra cioè y per lo spazio ABC.

Resta, che si determini geometricamente la curva AC. Per le cose superiormente dette si ha $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+z^2}$, e per ottenere una più ele-

gante effezione, istituisco la preparazione seguente.

Col raggio IH descrivo il mezzo cerchio HLK (Fig. 6.), ed alla estremità H del diametro alzo la normale HUX, che per essere toccante del circolo, sarà $= z$, giusta le spezie da me assunte. Quinci passando alle integrazioni, $\int \frac{ds}{r} = \int \frac{dx}{1+z^2} =$ all' arco circolare HR: ma

quest' arco si può esprimere diversamente; conciossiachè, posta l'affissa $HP = q$, e l'applicata $PR = \sqrt{2q-qq}$, si trova la flussione $RT = \frac{dq}{\sqrt{2q-qq}}$; dunque $\int \frac{ds}{r} = \int \frac{dq}{\sqrt{2q-qq}} =$ HR. Conseguentemente per

una

13
 una funzione dell'arco stesso, ovvero dell'affissa $HP = q$ sarà data generalmente la curva s , la quale potrà esponderfi per l'applicata PM d'una curva cognita HMN.

Appresso richiamata a memoria l'altra equazione, viene a dire $dy = \omega ds = \frac{r dz}{1+z^2} \cdot \sqrt{1+z^2}$, essendo $\frac{rdz}{1+z^2} = ds$; si avrà $\omega ds =$

$= \frac{2ds}{\sqrt{1+z^2}}$, o pure $\omega = \frac{2}{\sqrt{1+z^2}}$. Verificandosi poi l'analogia

$IR = 1 : RP = \sqrt{2q-qq} :: TU = \sqrt{1+z^2} : UH = 2$, si scoprirà $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \sqrt{2q-qq}$; dunque $\omega = \sqrt{2q-qq} = PR$. In ordine

a ciò paragonando la Figura 6. colla 5. si raccoglie, che le rette PM, PR faranno le ordinate corrispondenti della curva AC, cioè PM = all'affissa AB = s , e PR = all'applicata BC = ω : lo che rimaneva ad investigarsi.

Nella costruzione generale si è ommessa l'aggiunta delle costanti, lasciando a' Geometri la cura di determinarle ne' casi particolari.

Soluzione seconda.

La formula del raggio osculante esposta colle seconde differenze si era $\frac{ds}{r} = \frac{ddy}{dx}$, nella quale veniva assunto siccome costante l'elemento

ds della curva, che dee costruirsi. Ora costituendo un'altra espressione equivalente, in cui le costanti non abbian luogo, ci si affaccia la seguente $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{ds dx}$. Per far isvanire le seconde flussioni, ci si

presenti l'omogeneo di comparazione sotto quest' altro oggetto $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$, indi si osservi, che le quantità $\frac{ddy}{dy}, \frac{dds}{ds}$ sono integra-

bili per via de' logaritmi, e la loro sommatoria si è $l dy - l ds$, che fatta $= lp$, nascono le due equazioni $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, e $\frac{dy}{ds} = p$. Sarà

pertanto $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{p}$; ma $p = \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dy^2}{ds^2} = ds^2 = dx^2 \div dy^2$; dunque

dx

$$dx = \frac{\sqrt{1-pp}}{p} \cdot dy. \text{ Fatta opportunamente la sostituzione de' valori;}$$

troveremo $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$, e scoperta questa equazione, in cui sono se-

parate le variabili, si proceda come nell'antecedente soluzione.

Nella formola $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dx dx}$ presa per costante ds , e messa

$dy = pds$, dopo le debite operazioni, tornerà in campo la espressione

$$\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}.$$

Pongasi espresso dy in figura di costante, onde abbiati $\frac{ds}{r} = -\frac{dydds}{dx ds}$,

e fatta $ds = qdy$, o $dds = dydq$, e perciò $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2 dq}{dx ds}$, ed adoperate

le convenienti sostituzioni, perchè si dilegui col prodotto $dx ds$, si scoprirà $\frac{ds}{r} = -\frac{dq}{\sqrt{qq-1}}$.

Assumasi finalmente un'altra formola de' raggi osculanti, a cagion d'esempio $r = \frac{ds^2}{-dxddy}$, ovvero $\frac{ds}{r} = -\frac{dxddy}{ds^2}$, in cui si suppone co-

stante l'elemento dx . sia $z = \frac{dx}{dy}$, e $dz = -\frac{dxddy}{dy^2}$: di conseguenza

farà $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2 dz}{ds^2}$: ma nella ipotesi di $dx = zdy$ avrassi $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$+ dy^2 = 1 + zz \cdot dy^2$, e surrogato in cambio di ds^2 questo valore, risulterà $ds = \frac{dz}{1+zz}$.

In qualunque maniera ci adoperiamo sempre interviene, nè può succedere altrimenti, che l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ ha rapporto alla misura degli

archi circolari, la differenza de' quali ci viene espressa, o per via de' seni, o per mezzo della secante, o della tangente.

Solu-

15

Soluzione terza.

Dalle soluzioni analitiche passo ad una geometrica, che in un sol colpo tronca il nodo della questione, senza che ci sia bisogno di ricorrere alle formole da altri industriosamente scoperte.

Nella curva cercata, che suppongo descritta, segno le due porzioni infinitesime, ed uguali AC, CI (Fig. 7.), e tiro le due secanti infinitamente prossime LCE, KCI. Le due normali CG, IG alle due corde AC, CI s'uniscono nel punto G, e conseguentemente determinano il raggio combaciante CG dato per una funzione della curva. Quindi condotte dai punti C, I le ordinate CB, ID, e di più la fluessione CF dell'assisa parallela all'asse HD; fatto centro in C alla distanza minima CI descrivo l'archetto IE, e col semidiametro CN eguale ad una qualunque costante, l'arco di cerchio NLK, il di cui elemento LK resterà intercelto dalle due secanti CAL, ICK.

Dalla preparazione si desuma essere simili i due settori CGI, KCL siccome simili al terzo infinitesimo ICE; dunque assunto il semidiametro CN pari all'unità, si avrà $\frac{CI}{CG} = LK$: ma CG si suppone data per

la curva cCI; dunque la curva medesima, ed il raggio combaciante sarà dato per l'arco LN, cioè, (supposta la rettificazione della periferia, e delle sue parti) per il seno LM, o pure per CM, e parimenti CI fluessione della curva per una quantità differenziale dell'arco LN, o dei seni corrispondenti LM, MC. Essendo poi simili i due triangoli LMC, CFE, o CFI, conformemente che le linee costituenti il primo triangolo serbano vicendevolmente una nota relazione; così lo stesso dee dirsi delle tre rette infinitamente piccole, che compongono il secondo triangolo: laonde abbiamo tutto ciò, ch'era necessario per descrivere la curva cercata.

E qui si noti, che sebbene il circolo CNL si cangia di posizione; e che il suo centro C si applica successivamente ad ogni punto della curva cAI; ciò non ostante la soluzione è libera da qualunque ombra di paralogismo. Oltre che il raggio CN è sempre lo stesso; quello che più importa si è, che in qualsivoglia positura il punto N sta sempre fisso, ed è la comune origine di tutti gli archi NL crescenti, o decrescenti, aggiunto, o sottratto, se così pare, un arco costante; onde la nuova origine si trasporti in un altro punto della periferia circolare, ma sempre ugualmente distante dal punto N. Concepisco, che l'ordinata CB parallela a se stessa vada radendo col suo punto estremo C la curva CAc, e trasferisca con seco il cerchio CNL: acquistata ch'essa abbia la posizione, per esempio cb; succederà bensì, che le secanti cl, ck taglino l'arco nl ne' due punti l, k diversi affatto dagli altri due L, K, che gli archi nl, NL non sieno fra loro eguali: ma il punto c sarà in ogni sito il centro del circolo descritto col semidiametro cn = CN, ed il punto n lo

P R E F A Z I O N E

D E L L' E D I T O R E .

SI contengono nel presente Tomo terzo XXXIX. Schediasmi Fisico-Matematici del Conte Jacopo Riccati, i quali trattino alcuni, che o nei Giornali d'Italia, o ne' loro Supplementi, o negli Atti di Lipsia, o nei Comentarj di Bologna, o in qualche altra Opera furono già stampati, escono ora in pubblico la prima volta. Gli ho scelti da un numero molto maggiore, escludendo quelli, che o dall'Autore dopo aver riformate varie sue opinioni, erano stati rifiutati, o che erano rimasti imperfetti, o che versavano intorno subbietti di poca importanza, o che finalmente col totale loro spoglio avevano somministrata materia alle maggiori sue Opere. S'è per me giudicato sommamente importante il determinare a un dì presso il tempo, in cui ogni Schediasma è stato composto, ed essendo la mia diligenza relativamente a quasi tutti felicemente riuscita, ho notata questa circostanza al principio dei nominati Schediasmi, non tralasciando altresì di mentovare l'Opera, in cui sono stati impressi, quando per l'addietro sieno comparsi alla pubblica luce. Una Dissertazione composta al principio di questo secolo meritava certamente più stima di quella, che le farebbe dovuta, se fosse stata scritta cinquant'anni dopo, mentre che le Fisico-Matematiche Discipline sono state arricchite di

stesso stessissimo coll' altro N; laonde gli archi crescenti *nl*, *NL* avranno una comune origine.

COSTRUZIONE.

Il progresso del discorso ci guida ad un' altra costruzione onninamente diversa da quella, che si è dedotta dalla prima soluzione del problema.

Ed in fatti, essendo la curva cercata il suo raggio combaciante l'arco *NL*, ed i due seni *LM*, *MC* tutte quantità date l' una per l' altra, cioè le due prime per la ipotesi, e le tre altre per il giro della preparazione, e pel raziocinio indi nascente; ne segue, che prolungata, occorrendo, l'ordinata *CB*, e lasciata cadere sopra essa dal centro *G* la perpendicolare *GP*, ci si presenteranno le seguenti analogie
 $CL:LM::GC:CP::IC:CF$. Ma l'elemento *CI* della nostra curva si esprime per il prodotto del semidiametro osculante *GC*, nella flussione circolare *LK*; dunque $CI = GC: LK$, e conseguentemente
 $CL:LM::GC:CP::GC:LK:CF$.

Il primo analogismo ci fa vedere essere il co-raggio *CP* dato per una funzione dell' arco *NL*, o la seconda proporzione ci dà l'uguaglianza $CP. LK = CF$.

Con un simile andamento pervenuti alle analogie $LC:CM::CG:GP::CI:IF$, e messo in vece di *CI* il valore $GC. LK$, due illazioni ci si presentano: una, che l'altro co-raggio *GP* si rende noto per una funzione dell' arco *NL*: la seconda, che si ha l'equazione $GP. LK = FI$, e con ciò si fanno manifesti i valori delle due differenze *CF*, *FI*, e colle loro somme anco quelli delle due coordinate della curva in questione riferita all' asse *HB*.

Stendasi in una linea retta l'arco *NLK*, e segnato (Fig. 7., e 8.) in essa retta il punto *n* analogo al punto *N*, prendansi le assisse *nl*, *nk* uguali agli archi crescenti *NL*, *NK*; e tirate le due normali *lp*, *lq* in figura di ordinate, mettasi la prima uguale al co-raggio *CP*, e la seconda all' altro co-raggio *GP*. Per i punti poi *p*, *q*, ed altri infiniti in simil maniera determinati descrivansi le due curve *rp*, *sq*; egli è manifesto, che lo spazio elementare *plk*, la di cui sommatoria si è l'area mistilinea *lurp*, si trova uguale tanto al rettangolo *CP. KL*, quanto alla differenza *CF* dell' assissa spettante alla curva cercata *CAI*: dunque facendo transito alle integrazioni, per la menzionata area *lurp* si determinerà la suddetta assissa. Similmente l'area differenziale *qlk = GP. LK = FI* ci dà per via delle sommatorie da una parte lo spazio curvilineo *lmsq*, e dall' altro l'ordinata *BC* della nostra curva integrale della flussione *FI*. Per la qual cosa applicati all'unità i due spazi *lurp*, *lmsq*, esprimono, il primo l'assissa, ed il secondo l'ordinata della curva, di cui si va in traccia lo che ec.

PRO-

PROBLEMA SECONDO.

Mentre s'intenda dato in qualunque modo per la curva *cAC* (Fig. 7.) il co-raggio *PC*, ch'io chiamerò *u*, si scioglierà agevolmente la quistione, servendosi delle cose premesse. Scelgo ad arbitrio una delle tre formole della seconda soluzione per esempio $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$: ma come GC

$= r: CP = u:: CI = ds: CF = dx$; dunque $uds = r$, ed in conseguenza $\frac{ds}{u} = \frac{-dqds}{qdx \cdot \sqrt{qq-1}}$.

Ma per l'ipotesi $ds = qdy$, e $dx = \sqrt{qq-1} dy$; dunque avremo dopo le debite sostituzioni $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$.

Con lo stesso metodo, dato per la curva *cAC* l'altro co-raggio *GP*, scopriremo, posto $GP = z$, l'equazione $\frac{ds}{z} = \frac{-dq}{\sqrt{qq-1}}$. Quindi con-

chiuderemo, che siccome l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ s'eguaglia ad una espressione

dell'arco circolare; così le altre sommatorie $\int \frac{ds}{u}$, $\int \frac{ds}{z}$ si rinvergonno eguali a quantità, che ci portano alla quadratura dell' Iperbola, o ai logaritmi.

Nelle quistioni proposte l'espressioni del raggio combaciante, o d' ambo le sottosculatrici si suppongono date per le funzioni della curva, che dee descriversi, senza che c'entrino le coordinate; è perciò cosa chiara essere indifferente il considerare la nostra curva relativamente all' asse, o al foco. Ho prescelta la prima ipotesi siccome più semplice.

APPENDICE.

Giacchè sto maneggiando le formole differenziali del secondo ordine; piacemi di soggiungere un metodo venutomi in mente; e di cui non credo, che il più generale possa proponersi; perchè si stende a tutte le classi delle flussioni, ed in ognuna d'esse abbraccia infiniti casi, ristretti però fra certi limiti, ed adempiute alcune condizioni, che io anderò succintamente esponendo. Ad una perfezione troppo eccellente, e superiore forse all'umano intelletto, si ridurrebbe il calcolo integrale,

Opere Ricc. Tom. II.

C

1e

se ci venisse fatto di comprendere sotto un solo canone tutte le possibili formole.

Dico per tanto, che se nell'equazioni differenziali del secondo grado, assunto, o non assunto un primo elemento siccome costante, non si rinviene l'una, o l'altra delle variabili finite x , o y colle loro funzioni; la formola è sempre riducibile alle prime flussioni. Già se n'è dato un saggio nello scioglimento de' premessi problemi. Generalmente poi si operi, come nel seguente esempio.

L' espressione de' raggi combacianti, messa dy costante, si è $-\frac{dx ds^2}{dy ds} = r$. Ora vogliasi, che il raggio r sia dato per una qualunque

potestà della tangente $t = \frac{y ds}{dy}$, onde abbiati $t^m = \frac{y^m ds^m}{dy^m} = r$, e con-

seguentemente $-\frac{dx ds^2}{dy ds} = \frac{y^m ds^m}{dy^m}$. Prima d'ogni altra cosa egli è ma-

nifesto, che l'equazione è contenuta sotto il nostro canone; avvegnachè sebbene in essa si ravvisa la ordinata y alzata alla potestà indeterminata m ; non ci si trova però nè l'assissa x , nè taluna delle sue funzioni.

E perchè si è presa costante dy , per far isvanire la seconda differenza dds , facciassi $q dy = ds$, e differenziando, $dq dy = dds$, e messa in uso la sostituzione, $-\frac{dx ds^2}{dq dy^2} = \frac{y^m ds^m}{dy^m}$, ovvero $-\frac{dx}{dq} = \frac{y^m ds^{m-2}}{dy^{m-2}}$. In

luogo di ds^{m-2} si collochi il suo valore $q^{m-2} \cdot dy^{m-2}$, ed in vece di dx

l'altro valore $\sqrt{qq-1} \cdot dy$, onde ci si presenti la equazione

$$-\frac{dy \cdot \sqrt{qq-1}}{dq} = \frac{y^m q^{m-2} dy^{m-2}}{dy^{m-2}} : \text{la quale espurgata ci dà } -\frac{dy}{y^m} =$$

$$= \frac{q^{m-2} dq}{\sqrt{qq-1}}. \text{ Perciò l'applicata } y \text{ della curva da costruirsi è data per } q,$$

ed a vicenda q data per y : ma $dx = \sqrt{qq-1} \cdot dy$; dunque integrando, la spezie x , che segna l'assissa, si rende nota per l'ordinata y : lo che cc.

In un caso particolare messo l'esponente $m=3$, onde i raggi osculanti sieno sempre come i cubi delle rispettive tangenti l'espressione $-\frac{dy}{y^m} = \frac{q^{m-2} dq}{\sqrt{qq-1}}$ ridurrassi alla seguente $-\frac{dy}{y^3} = \frac{qdq}{\sqrt{qq-1}}$, e sommando,

$$\frac{1}{2y^2} = \sqrt{qq-1}. \text{ Ometto la costante; perchè con aggiungerla non si}$$

di-

diversifica nè punto nè poco la natura della curva. Ma si è trovata $dx \sqrt{qq-1} \cdot dy$; collocato dunque in vece di $\sqrt{qq-1}$ il suo valore equivalente $\frac{1}{2y^2}$, sarà $dx = \frac{dy}{2y^2}$, ed integrando, $x = c - \frac{1}{2y}$, e conse-

guentemente $2xy = 2cy - 1$: luogo alla iperbola fra gli assintoti, della quale ci si affaccia una curiosa proprietà.

Già si è veduto, che se nelle equazioni differenziali del secondo grado non si ritrova l'indeterminata x , o l'altra y , c'è un metodo fermo di operare, che ci guida alle prime differenze: foggiungo, che in quelle del terzo ordine succede lo stesso, quando mancano amendue, e la equazione è libera dalle variabili finite.

Eccone un'esempio. Sia $dx ddd y + dx^2 ddy = dx^4 + dy^4$; e sia stata assunta come costante dx . Pongo $p dx = dy$; dunque $dp dx = ddy$, e $dx ddp = ddy$. Fatte le debite sostituzioni, avremo $dx^2 ddp + dx^3 dp = dx^4 + dy^4$; ma $dy^4 = p^4 dx^4$; dunque $dx^2 ddp + dx^3 dp = dx^4 + p^4 dx^4$, e dividendo per dx^2 , sarà $ddp + dx dp = dx^2 + p^4 dx^2$. Così siamo giunti ad una espressione del secondo grado compresa dal canone testè stabilito. E proseguendo, metto $q dx = dp$, e differenziando nella ipotesi di dx costante, $dq dx = ddp$, ed in ordine a ciò, $dq dx + dp dx = dx^2 + p^4 dx^2$, o pure $dq + dp = 1 + p^4$. dx : ma $dx = \frac{dp}{q}$; dunque

$$dp + dq = \frac{1 + p^4}{q} \cdot dp. \text{ Spesse fiate interviene, che le due variabili co-}$$

struanti l'equazione sieno imbrogliatissime, e pressochè impossibili a separarsi: ma questo non è difetto del metodo, che vado esponendo. L'intoppo nasce dalla teorica delle primarie differenze, che massime, rispetto allo sviluppo delle incognite, è lontana assai dalla ultima perfezione.

Avanzo cammino, e dico, che nelle formole differenziali del quarto ordine, per conseguire generalmente, che sieno riducibili a quelle del primo, oltre le variabili finite anno da mancare o l'una o l'altra delle prime flussioni dx , dy colle loro funzioni. Dalle espressioni poi del quinto debbono restar escluse ambedue. In quelle del sesto, oltre le menzionate quantità finite, ed infinitesime, o l'una, o l'altra delle seconde differenze ddx , ddy colle loro funzioni, ed ambo in quelle del settimo, e così di mano in mano all'infinito.

Esempio del quarto ordine. Sia $d^4 y + dx d^3 y - dx^2 ddy = 0$, e la costante assunta dx . Facciassi conforme il solito $p dx = dy$, e conseguentemente $dp dx = ddy$, $dx ddp = d^3 y$, $dx d^2 p = d^4 y$; e sostituendo $dx d^2 p + dx^2 ddp - dx^3 dp = 0$, ovvero $d^2 p + dx ddp - dx^2 dp = 0$. In tal guisa siamo arrivati ad una equazione del terzo grado, in cui non si trova alcuna quantità finita variabile. Si proceda dunque colla solita maniera, e dopo varie operazioni, mettendo $q dx = dp$, indi $xdx = dq$, si otterrà

C 2

la

la formola $xdx + ydy = qdq$, nella quale le indeterminate sono separabili per via de' metodi conosciuti.

Non è difficile render ragione de' premessi canoni; conciossiachè non adempiute le accennate condizioni, giunti che faremo col giro del nostro metodo alle prime differenze, dopo aver fatto svanire le seconde, le terze ec., l'equazione indi nascente conterrà non solo le incognite principali x, y , ma di più le assunte p, q ec. colle loro flussioni. In tali incontri non si fa per lo più sviluppare le indeterminate, o ridurle alle integrazioni. Gioverà in sì fatti casi tentare la cosa per altre strade, e mettere in uso alcune particolari industrie con incertezza del buon esito.

SCHEDIASMA III.

Risposta ad alcune opposizioni fatte dal Sig. Giovanni Bernulli alla soluzione del Problema inverso delle forze centrali nel voto in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, pubblicata dal Sig. Jacopo Ermanno nel secondo Tomo del Giornale de' Letterati d'Italia
Articolo XV.

IL dottissimo Sig. Jacopo Ermanno, mentre occupava il posto di Pubblico Professore di Matematica nell'Università di Padova inserì nel Tomo secondo del Giornale de' Letterati d'Italia una sua elegantissima soluzione del problema inverso delle forze centrali nel voto, limitando però la legge delle forze medesime alla proporzione reciproca duplicata delle distanze. Ebbe egli la mala sorte d'incontrare due famosi Avversari, l'uno in Italia, e l'altro di là da Monti: e quantunque alle difficoltà messe in campo dal primo abbia soddisfatto l'Autore stesso, pubblicando replicate Dissertazioni in sua difesa (sopra il qual punto io non penso di prender partito per non far mie le altrui controversie) contuttociò succede ora il secondo senza dubbio più formidabile, ed è il Sig. Giovanni Bernulli, il cui solo nome basterebbe a dar peso alle opposizioni, quando nelle materie analitiche non si dovesse cedere il primo luogo alle dimostrazioni, e all'evidenza.

Nel comunicare che questi fece alla regia Accademia di Parigi due soluzioni generali del problema mentovato, che si trovano registrate nelle Memorie dell'anno 1710., v'aggiunse anche quella del Sig. Ermanno accompagnata però da un esame così severo, che ben si scopre aver lui preteso con l'altrui paragone dare un maggior risalto alle cose proprie. Ma s'io non m'inganno, mi pare, che un soggetto per altro ver-

Leggesi un tale Schediasma nel Tomo XIX. del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo VII., impresso l'anno 1714.

versatissimo in sì fatte speculazioni, siasi lasciato sorprendere dalla prima apparenza, e che tutte le riflessioni derivino dal non avere ben ponderata la forza, e l'eleganza della soluzione controversa. Tutta dunque la disputa verterà, non sopra il problema sciolto, che non è soggetto ad opposizione; ma sopra la maniera di scioglierlo, conforme il genio di questo delicatissimo secolo, che avendo insieme congiunte l'Analisi e la Metafisica, non fa tanto conto della verità ritrovata, quanto del metodo, con cui si scopre, e si manifesta. Sarebbe desiderabile che il Sig. Ermanno prendesse sopra di se il carico della risposta: ma perchè dalla gratitudine, e dall'amicizia gli vengono tolte di mano fino le armi a difesa, mi sforzerò io, per quanto fo, e posso, di supplir le sue veci; ond'egli abbia almeno, di quanto rinfrescimento sia stata in Italia la sua partenza, e con quale parzialità si conservi la sua memoria.

Frattanto perchè il Lettore non abbia a mendicare altronde lo stato della quistione, registrerò la soluzione del Sig. Ermanno tradotta fedelmente dalle citate Memorie dell'Accademia di Parigi.

Sia ABC (Fig. 9.) la curva cercata, LI il suo asse, S il centro delle forze, BC una particella infinitamente picciola della curva, sopra la qual particella prolungata prendasi CE = CB; dal punto E avendo tirata ED parallela a CS, e che incontri la curva nel punto D, sieno DF, CG, BH parallele a LI, dalle quali verrà incontrata in F, G la picciola retta EG parallela a BI, e che incontri la CG in C.

Ciò fatto, chiamisi SI = x , BI = y , si avrà SC = $\sqrt{x^2 + y^2}$, BH, o CG = dx , CA, o EG = dy , e conseguentemente CG = Cf, o DF = $-ddx$, EF = $-ddy$; ciò che darà il doppio del triangolo BSC, o CSD = $ydx - xdy$, ch'io suppongo costante; di maniera che i triangoli per la costruzione simili EDF, CSK renderanno ED = $-\frac{ddx \sqrt{xx + yy}}{x}$

Ora perchè il triangolo BSC è per ipotesi costante, s'avrà DE in ragione della forza centrale al punto C, cioè a dire in ragione di $\frac{1}{xx + yy}$

o in ragione di $\frac{(ydx - xdy)^2}{xx + yy}$; onde risulta l'equazione espressa con le se-

conde differenze $-addx = x \cdot \frac{ydx - xdy}{xx + yy \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = ydx - xdy$.

$\frac{yxdx - x^2dy}{xx + yy \sqrt{xx + yy}}$, il cui integrale si è $-dx = \frac{-y}{\sqrt{xx + yy}} \cdot ydx xdy =$

$xydy$

$\frac{xydy - y^2dx}{\sqrt{xx + yy}}$, ovvero $\frac{abx}{xx} = \frac{bxydy - by^2dx}{xx \cdot \sqrt{xx + yy}}$, la cui sommatoria è pa-

rimente $\frac{ab}{x}$, o più generalmente $\frac{ab}{x} = c = b \frac{\sqrt{xx + yy}}{x}$ o pure $a = \frac{cx}{b}$

$= \sqrt{xx + yy}$. che è una equazione alle tre sezioni del cono, vale a dire alla parabola, se $b = c$; all'ellissi, quando $b > c$; ed all'iperbola, in caso che sia $b < c$.

Esaminiamo ora le opposizioni del Sig. Giovanni Bernulli. Per parlarvi con tutta libertà, dic'egli nella risposta al Sig. Ermanno, la vostra soluzione sembra fatta a disegno, adattata a ciò, che voi andavate cercando, ma che nel tempo stesso era da voi conosciuto. Infatti come mai senza una precedente notizia avreste potuto sapere, che per trovar l'integrale della vostra equazione $\frac{ddx \sqrt{xx + yy}}{x} = \frac{ydx - xdy}{xx + yy}$, bisognava

ridurla a $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{yxdx - x^2dy}{xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy}}$? Di più come senza ciò

avreste voi saputo tirare l'integrale di quest'ultima equazione, ed in oltre l'integrale dell'integrale? poichè le indeterminate ci sono talmente complicate, che il voler separarle farebbe intraprendere una fatica disperata: e certamente vi sarebbe riuscito impossibile il sommarle così confuse, come da voi è stato fatto, se non aveste subodorato, che le sezioni coniche, le quali v'erano sempre anzi gli occhi, soddisfacevano alla vostra equazione differenziale del secondo ordine da voi felicemente incamminata al termine del vostro viaggio, e che non vi è stato difficile di ridurre finalmente ad una equazione puramente algebrica.

Sin qui il Sig. Bernulli; ed io confesso di non sapere per quale strada sia pervenuto il Sig. Ermanno alla sommatoria bramata: so bene, che poco, o nulla gli farebbe giovato l'aver in vista le sezioni del cono; mentre cangiando ipotesi, e prendendo di mira le curve medesime riferite al loro centro, o altre curve già conosciute per venire a capo della sua soluzione, gli farebbe convenuto derivarla da principj diversi, come vedremo a suo luogo; e perciò questo profondo geometra ha limitata la sua scoperta a quel solo caso, in cui poteva più facilmente aver luogo riferendosi poi di darle una soluzione più generale, ma meno semplice, per essere involuta fra quantità trascendenti.

Per altro io sono rimasto attonito, in riflettendo, che il Sig. Bernulli giudica disperata la separazione delle indeterminate nella formola del Sig. Ermanno, ed in conseguenza la sua doppia integrazione, o sia riduzione a grandezze algebriche. Io bramerei, che tutte l'equazioni dif-

differenziali fossero simili alla proposta, giacchè nel calcolo sommatorio non ci sarebbe più che desiderare, ed avremmo una volta ridotto alla intera sua perfezione il metodo inverso degli infiniti.

Sia dunque $\frac{ddx \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{ydx - xdy}{xx + yy}$; egli è manifesto, che

essendosi presa $ydx - xdy$ costante, se divideremo la seconda flussione ddx per $ydx - xdy$, la grandezza, che ne risulta, sarà integrabile: quindi rigettate tutte le altre quantità nel membro corrispondente dell'equazione resta a vedersi, se ci sia modo di separar le variabili, e se fatta la separazione si possa pervenire ad una integrazione algebrica. Avremo pertanto l'equazione espressa nella seguente maniera $\frac{ddx}{ydx - xdy}$

$$= \frac{x \cdot ydx - xdy}{xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy}}$$

Nel secondo membro la quantità $ydx - xdy$ si fa sommabile com'è noto, mentre si divide per il quadrato y^2 , ed in conseguenza sarà

$$\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyy}{xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy}} \cdot \frac{ydx - xdy}{yy} \cdot \frac{ydx - xdy}{yy} = dp,$$

ed integrando, $\frac{x}{y} = p$: fatta in consonanza di ciò l'opportuna sostituzione,

$$\text{ne, si scoprirà essere } \frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xydp}{xx + yy \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

dell'equazione $\frac{x}{y} = p$ facciassi svanire l'una, o l'altra delle indeter-

minate x, y , e se nell'operazione ambedue si dileguano, come accade nel caso nostro, segno manifesto è, che le variabili senz'altro artificio si separano. Nell'esempio proposto sparisca x , collocando in sua ve-

$$\text{ce il valore } yp, \text{ e perciò } \frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{y^3 dp}{y^2 p^2 + a^2 y^2 \cdot \sqrt{y^2 p^2 + a^2 y^2}} =$$

$$\frac{pdp}{a^2 + p^2 \cdot \sqrt{a^2 + p^2}}.$$

Conseguita la separazione delle indeterminate nell'o-

omogeneo di comparazione, facilmente si scopre esser sommabile la flussione $\frac{pdp}{a^2 + p^2 \cdot \sqrt{a^2 + p^2}}$, che dà $\frac{-a}{\sqrt{aa + pp}}$, ed in conseguenza

$$\frac{-dx}{ydx - xdy} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + p^2}} = \frac{-y}{\sqrt{xx + yy}}, \text{ surrogato in cambio di } p \text{ il suo}$$

valore $\frac{x}{y}$. Ed ecco la prima integrazione del Sig. Ermanno: facciamo passaggio alla seconda. Conciossiachè $\frac{-dx}{ydx - xdy} = \frac{-y}{\sqrt{xx + yy}}$, farà

$$-dx = \frac{y}{\sqrt{xx + yy}} \cdot \frac{xdy - ydx}{x}. \text{ Pongo } \frac{y}{x} = q; \text{ dunque } xdy - ydx =$$

$$= x^2 dq, \text{ cioè a dire } -dx = \frac{yx x dq}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ e fatta svanire nel presente caso}$$

$$\text{la quantità } y, -dx = \frac{x^2 q dq}{\sqrt{aa + qq}}, \text{ e finalmente } \frac{-dx}{xx} = \frac{q dq}{\sqrt{aa + qq}},$$

$$\text{si che sommando, } \frac{ab}{x} \pm c = b\sqrt{aa + qq} = \frac{b\sqrt{xx + yy}}{x}, \text{ che è la se-}$$

conda sommatoria del Sig. Ermanno.

Altamente.

Mi sia concesso di ridurre l'equazione controversa ad una formula più semplice, ed equivalente. Chiamerò z la retta $SC = \sqrt{xx + yy}$, e giacchè è costante la quantità $ydx - xdy$, si potrà denominare per brevità dt , essendo nel caso nostro la differenziale dell'area ABS proporzionale al tempo. Così avremo l'equazione trasformata $\frac{z ddx}{x} = f dt$.

$$\text{Pongo } dx = p dt, \text{ e prese le seconde differenze, stando ferma la costante } dt, ddx = dp dt; \text{ dunque } \frac{z dp}{x} = f dt, \text{ ma } dt = ydx - xdy =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{zz - xx}} \cdot \frac{zdx - xdz}{x}, \text{ quando in vece della variabile } y \text{ venga so-}$$

sti-

$$\text{stituito il suo valore } \sqrt{zz - xx}; \text{ dunque } -dp = \frac{fx}{\sqrt{zz - xx}} \cdot \frac{zdx - xdz}{zdx - xdz}.$$

$$\text{Stabiliscasi } \frac{x}{z} = q, \text{ ed in conseguenza } -dp = \frac{fxz q dq}{\sqrt{aa - qq}}.$$

$$\text{Sia in ordine all'ipotesi } f = \frac{a}{xz}; \text{ dunque } -dp = \frac{q dq}{\sqrt{aa - qq}}, \text{ ed}$$

$$\text{integrando, } p = \sqrt{a^2 - q^2}. \text{ Era in oltre } dx = p dt = \frac{px}{\sqrt{zz - xx}}.$$

$$\frac{zdx - xdz}{zdx - xdz} = \frac{xx p dq}{qq \sqrt{aa - qq}}, \text{ o pure } \frac{dx}{xx} = \frac{dq}{qq}, \text{ collocando in vece di } p \text{ il}$$

$$\text{suo valore } \sqrt{a^2 - q^2}; \text{ dunque integrando, } \frac{b}{x} \pm c = \frac{bx}{x}, \text{ il che ec.}$$

E qui si ponderi non succedere, almeno così facilmente, la separazione nell'equazione $-dp = \frac{fxz q dq}{\sqrt{aa - qq}}$, quando si muti la legge della

forza centrale, richiedendosi maggior industria in tutti gli altri casi possibili. Sia per esempio la forza in proporzione della distanza, cioè $f = z$, ipotesi, che va a terminare in curve già conosciute, e sono le sezioni del cono riferite al centro. Avremo pertanto $-dp = \frac{z^2 q dq}{\sqrt{aa - qq}}$, o sia

$$-dp = \frac{dq}{x^3 \cdot qq \sqrt{a^2 - q^2}}, \text{ e sostituendo in cambio di } -dp \text{ il suo valore } -\frac{ddx}{dt},$$

$$\text{farà } -\frac{ddx}{x^3} = dt \cdot \frac{dq}{q^2 \sqrt{a^2 - q^2}}.$$

Per quello che appartiene al secondo membro, poco ci è da riflettere; mentre la maniera di sommarlo è per così dire di comune giurisdizione: non così succede nel primo, che nella differenziale del secondo grado ci somministra un nuovo genere d'integrazioni dipendente dalla costante aggiunta $ydx - xdy$. Che gioverebbe a questo passo aver in vista le sezioni coniche, mentre non si scoprì prima il metodo di sommare l'espressione proposta? Io posso dire con verità, che forse non si

troverà strada per conseguire l'intento, senza che c'entrino, fatte le comparazioni, quantità trascendenti. Da quest'osservazione si renderà manifesto, qual differenza passi tra le formule generali, e la particolare del Sig. Ermanno, ed in che principalmente consista la bellezza della sua soluzione.

Desiderava in secondo luogo il Sig. Bernulli, che dal Sig. Ermanno venisse fatta una prova della sua analisi, applicandola all'ipotesi generale, col determinare le curve in qualsivoglia sistema delle forze centrali, almeno supposte le quadrature. Non ha mancato questi di soddisfare ad una brama sì ragionevole, come ne rende una piena testimonianza il Sig. Varignon nelle lodate Memorie dell'anno 1710., e come si può vedere dal quinto Giornale d'Italia, Articolo XVI., in cui si legge registrata la soluzione generale. Tutto l'artificio consiste nel trasportare opportunamente l'equazione differenziale delle curve cercate dall'asse al fuoco: ma io mi sforzerò calcando un altro sentiero di giungere alla stessa meta, e terrò ferma l'equazione delle curve all'asse medesimo; con che forse m'accontenterò più da presso alla prima intenzione del Sig. Ermanno.

Giacchè $\frac{zddx}{x} = fdt^2$, e $x^2 + y^2 = z^2$, prendasi $xdx + ydy =$

$= zdx = pdt$, e passando alle seconde differenze, posta dt costante, $xddx + yddy + dx^2 + dy^2 = dpdt$; ma la costante $ydx - xdy$ dà $yddx = xddy$, ed in conseguenza $\frac{y^2ddx}{x} = yddy$; ed essendo

in oltre $dx^2 + dy^2 = \frac{dt^2}{z^2} + dz^2$, come facilmente può dimostrarsi, avremo,

fatte le sostituzioni necessarie, $xx + yy \cdot \frac{ddx}{x} = \frac{zddx}{x} = dpdt =$

$-\frac{dt^2}{z^2} - dz^2$: ma $\frac{zddx}{x} = -fdt^2$, e $dt^2 = \frac{z^2dz^2}{pp}$; dunque $-\frac{fx^3dz^2}{pp} =$

$= \frac{zdzdp}{p} - \frac{dz^2}{pp} - dz^2$, cioè $-fdz = \frac{pdp}{zx} - \frac{dz}{x^3} - \frac{ppdz}{x^3}$, o pure

$\frac{dz}{x^3} - fdz = \frac{zdp}{x^3} - \frac{p^2dz}{x^3} = \frac{p}{x} \cdot \frac{zdp - pdz}{zx}$; sì che integrando,

$\frac{b-a}{2 \cdot z^2} - \int fdz = \frac{pp}{2zx}$, ovvero $\sqrt{bz^2 - a - 2zx} \int fdz = p$, dal

che si rende manifesto la quantità p essere data per z , e le costanti.

Di vantaggio, giacchè $\frac{zdz}{p} = dt = ydx - xdy$, pongasi $\frac{x}{y} = q$;
dun-

dunque $ydx - xdy = y^2dq$; ma $xx + yy = z^2$, e $x^2 = y^2q^2$; dunque $az = a^2y^2 + y^2q^2$, cioè $y^2 = \frac{az}{aa + qq}$, e conseguentemente $\frac{dz}{z^2} =$

$\frac{dq}{aa + qq}$.
Separate con questo metodo le indeterminate, non sarà difficile passare alla costruzione, essendo noto, che l'integrazione della differenziale $\frac{dq}{aa + qq}$ dipende dalla rettificazione dell'arco circolare, e che le curve

faranno algebriche, ogni qual volta si potrà ridurre ad una simile espressione l'altro membro $\frac{dz}{z^2} = \frac{dz}{z\sqrt{bz^2 - a - 2zx}} \int fdz$.

Dalle cose dette si scopre chiaramente, che la premessa soluzione non dissimile a quella del Sig. Bernulli nella conclusione, quantunque ritrovata con maniera affatto diversa, è bensì generale nell'estensione, ed abbraccia tutti i casi possibili; contuttociò non si debbono dissimulare le sue imperfezioni. Infatti quel comparire che fanno le stesse curve geometriche sotto espressioni meccaniche; quelle riduzioni, che restano a farsi, dopo scoperta la formula universale, e che sono più involute della soluzione principale, rendono a mio giudizio perplesso sì fatto modo di procedere. Io resto persuaso, che se dagli Analisti si fosse tentato prima il problema inverso del diretto, non sarebbe loro forse caduto in pensiero, che sotto l'espressione $\frac{dz}{zp} = \frac{dq}{aa + qq}$, o altra equivalente, stessero nascoste curve

algebriche, e nel caso particolare di $f = bz^{-2}$, se non si fossero tolte di mira, non si sarebbero forse poste in luce le sezioni del cono.

Lasci dunque d'opponere il Sig. Bernulli essere particolare, limitata, e per questo capo mancante la soluzione del Sig. Ermanno; imperocchè si potrebbe rispondere in primo luogo, che non si trattava di sciogliere generalmente il problema già risolto dall'illustre Sig. Newton per via delle quadrature, ma solo di vedere, come da tal fonte si derivassero le Traiettorie algebriche, e massime le sezioni coniche. Anno ciò intrapreso i Sigg. Bernulli, ed Ermanno, il primo col dedurre dalla soluzione generale il caso particolare, il secondo abbandonando la soluzione generale, e surrogandoci la particolare. Sin qui camminano del pari, e se voleva il Sig. Bernulli liberare la sua analisi dalla nota di particolare, ch'egli addossa all'altrui; era d'uopo, che con una generale espressione c'ingegnasse a distinguere le curve algebriche dalle meccaniche in tutti i casi possibili: questione proposta dal Sig. Ermanno, nè sciolta da chi si sia; dovendosi forse lasciare la lode di scioglierla a chi l'ha proposta. Direi in secondo luogo, ed il mio detto parerà forse troppo ardito a

28.
 taluno, doverli far più conto della soluzione particolare del Sig. Ermanno, che delle universali pubblicate dagli altri. Il Problema generalmente non può sciogliersi, senza ricorrere alle quadrature, e quello che è più considerabile, senza che le stesse curve algebriche compariscano sotto la maschera d'espressioni trascendenti; onde per riconoscerle sia necessario valersi di certe operose riduzioni, che tuttora esercitano l'ingegno de' Geometri. Anche il caso nostro, che è pure il più privilegiato, ed è, per così dire, il caso della natura, ci si fa innanzi confuso con tutti gli altri nella formula generale meccanica; ha però la buona sorte d'essere l'unico, che possa maneggiarsi con equazioni analiticamente integrabili. Il Sig. Ermanno con una industria degna di lui ha saputo distinguerlo, e separarlo da tutti gli altri più misteriosi, che richiedono nuovo artificio per le riduzioni. Giudichino ora i Geometri, se sia più elegante l'espressione universale, o la particolare, e se debba farsi più stima della regola, o dell'eccezione.

Non occorre, ch'io m'affatichi in soddisfare all'altra difficoltà messa a campo dal Sig. Bernulli, che versava sopra il non essersi dall'Autore della soluzione alla sommatoria delle seconde differenze aggiunta la quantità costante espressa con le prime. Il dottissimo oppositore ha avuto la bontà di troncar questo nodo, e lo stesso Sig. Ermanno non l'ha lasciato senza risposta, come si può vedere dal sesto Giornale d'Italia, Art. 12.

Chiuderò la presente Dissertazione con applicar la mia maniera di separare le indeterminate alla seconda soluzione del lodato Sig. Bernulli. Dalla sua analisi viene egli condotto alla seguente equazione, in cui la forza centrale f si suppone data per x , $f = \frac{dy^3 + dx^2dy - xdydx + xdx dy}{2x^3 dy^3}$.

Per liberarsi dalla confusione delle variabili, osserva doverli ridurre in compendio la formula col fare svanir due termini nel secondo membro dell'equazione. Arriva ingegnosamente al suo fine, prendendo come costante la quantità ydx , o pure $\frac{dx}{x}$: ma oltrechè non v'ha metodo fermo

per fissare le grandezze, che devono far figura di costanti; non so qual luogo potesse trovare in altri casi egualmente ardui quest'artificio.

Io procederei diversamente, facendo prima sparire le seconde flussioni; il che si otterrà facilmente, qualor si rifletta essere integrabile la quantità $dxddy - dyddx$ divisa per il quadrato dx^2 ; onde avrassi $\frac{dy}{dx} = p$, e $xdx dy - xdy dx = xdx^2 dp$. Quindi con l'aiuto d'una congrua

sostituzione liberata l'equazione dall'elemento dy , e dalle sue potestà, scopriremo essere $f = \frac{a}{2x^3} + \frac{a}{2x^3 p^2} + \frac{dp}{2x^3 p^3 dx}$, ovvero $f dx - \frac{dx}{2x^3} =$
 $= dx$

29
 $= \frac{dx}{2x^3 p^2} + \frac{dp}{2x^3 p^3} = \frac{a}{2x^3 p^3} \cdot \overline{p dx + x dp}$, e separate di bel nuovo le

variabili, col supporre $xp = q$, $\frac{dq}{2q^3} = f dx - \frac{dx}{2x^3}$, ed integrando

$\frac{a}{4q^3} = n - \frac{a}{4xx} - \int f dx$; ma $q^2 = x^2 p^2$; dunque $\frac{a}{4p^2} = nx^2 - \frac{1}{4} a - x^2$

$\int f dx$; così che p farà data per x , ed in conseguenza faranno anche separate le variabili nell'equazione assunta da principio $\frac{dy}{dx} = p$, o $dy =$

$= p dx$.

Io mi lusingo, che il Sig. Bernulli prenderà in buona parte questa mia risposta qual ella sia, parendomi nello stesso tempo d'aver favellato con libertà geometrica, e col rispetto dovuto al celebre Oppositore, come uno de' maggiori lumi, che abbiano le Scienze Matematiche, e che certamente non è il secondo fra gli Analisti del nostro secolo.

A N N O T A Z I O N I (*)

Del Sig. Niccolò Bernulli Nipote del Sig. Giovanni sopra lo schediasma del Sig. Conte Jacopo Riccati pubblicato nel Tomo decimonono del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo VII., coll'annessa Soluzione propria del Problema inverso delle forze centrali agenti in un mezzo non resistente, dedotta da' principj medesimi del Sig. Newton.

A carte 186. linea 5. (a) Ebbe egli la mala sorte d'incontrare due famosi Avversarj, ec. Qui a torto il Sig. Conte considera il Sig. Gio. Bernulli Avversario del Sig. Ermanno, imperciocchè ci mai non s'oppose agli sforzi di questo: ciò che il Sig. Bernulli avvisò amichevolmente, non dee subito prenderli per un'opposizione. Chi sia l'altro famoso Avversario, che ad esso aggiunge, se non m'inganno, l'intendo; ma le sue obiezioni fatte al Sig. Ermanno, che in parte abbiamo vedute, non sono da noi approvate.

In quel medesimo luogo lin. 27. (b) accompagnata però da un esame così severo, che ben si scopre aver lui preteso con l'altrui paragone dare un maggior risalto alle cose proprie. Una riflessione leggiera non è un esame severo, nè abbisognava a mio Zio dare un grado più eminente alla sua so-

(*) Si contengono queste Annotazioni nel Tomo XX. del Giornale de' Letterati d'Italia Articolo XIII.

(a) Nella presente edizione pag. 20. lin. 24.

(b) In questa edizione pag. 20. lin. 36.

30
soluzione. Il suo fine principale, quando esaminò la soluzione del Sig. Ermanno, non fu di censurare la medesima, ma piuttosto d'indi prendere motivo di comunicare la sua; e così solamente di passaggio accennò, che cosa potrebbe giustamente desiderare in quella del Sig. Ermanno: il che se sia stato fatto malamente, giudichi lo stesso Sig. Ermanno.

A carte 192. lin.4. (c) *mentre cangia: do ipotesi, e prendendo di mira le curve medesime riferite al loro centro gli sarebbe convenuto derivarla da principj diversi*, ec. Parla qui principalmente dell'ipotesi della forza centrale in ragione semplice diretta delle distanze: ma io mi maraviglio, che la soluzione in quest'ipotesi nè sia stata data dal Sig. Ermanno, nè benchè tentata sia potuta essere stata ritrovata dal Sig. Conte Riccato: la quale però più facilmente si deduce da medesimi principj, come apparirà dalle cose, che sieguono.

In quel medesimo luogo lin.15. (d) *riferbandosi poi di darne una soluzione più generale*, ec. Questa sua soluzione generale mai non l'abbiamo veduta; se essa consiste in una certa equazione de' differenziali del secondo grado, ovvero dove l'indeterminate non giacciono ancora separate l'una dall'altra, in vero poco promuove la cosa; imperciocchè niente v'ha di più facile, che di arrivare ad un'equazione tale quale: non è poco terminare i secondi differenziali, ovvero cavare l'equazione immediatamente dove vi sono i soli differenziali del primo grado; è molto separare l'indeterminate co' suoi differenziali l'una dall'altra; ma senza dubbio è cosa grandissima nell'applicazione alle ipotesi particolari determinare le spezie delle curve: le quali cose tutte; se non m'inganno, fece mio Zio, e particolarmente l'ultima nell'ipotesi comune delle forze centrali reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze.

Nel medesimo luogo lin.20. (e) *Il Sig. Bernulli giudica disperata la separazione*, ec. Non disse essere la cosa disperata, cioè impossibile, poichè la conosceva fatta, ed e' pure la fece: ma volle dire, che la via battuta dal Sig. Ermanno (cioè integrare le quantità differenziali composte di differenziali ancora mescolate) è assai scabrosa, e di tale natura, che atterisce l'Analista, prima che tenti, perchè subito a prima vista sospetta esservi sotto difficoltà forse maggiore di quella, che veramente v'è. Il Sig. Ermanno intanto non temette d'incontrare alcuna difficoltà nell'ipotesi comune, in quanto conobbe da altra parte, che la curva ricercata era una sezione conica. Se alcuno prima ch'egli pensasse a questo Problema inverso gli avesse solamente proposta questa equazione

$$\text{nuda} \quad -ddx \frac{\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{yxx - xdy}{xx+yy}^2, \text{ acciocchè determinasse a qual sorta}$$

di curva essa appartenesse, nascostagli frattanto la fonte, onde scaturì, forse avrebbe subito disprezzata la cosa proposta, come avente più difficoltà, che utilità. A

(c) In questa edizione pag.22. lin.27.

(d) Nella presente edizione pag.22. lin.31.

(e) Pag.22. lin.34.

A carte 193. lin.4. (f) *Sia dunque*, ec. Il Sig. Conte Riccato qui, e nel seguente modo di sciorre a carte 197. e seguenti (g) destramente si serve degli ajuti, ed artificj prima scoperti da miei Zii Jacopo, e Giovanni, e da medesimi adoperati per ottenere la separazione dell'indeterminate coll'ajuto di certe sostituzioni (v. g. $\frac{x}{y} = p$, $\frac{y}{x} = q$, $dx = pdy$,

$\frac{x}{y} = q$, e simili) che debbono essere fatte con destrezza; con che e

mostra d'essere versatissimo nel calcolo degli Integrali, e di aver ben penetrate le loro regole; ed in vero in tale maniera, che fra i forestieri appena possa ritrovarsi alcuno, che gli levi la palma. Ma e' mostra anche, che siccome la memoria d'un animo grato doveva disturbare dalla difesa di se medesimo il Sig. Ermanno (com'egli medesimo disse di sopra) lo stesso ufficio d'urbanità avrebbe dovuto costringere il Sig. Conte Riccato, obbligato, sebbene non immediatamente, a' Signori Bernulli, a non servirsi contro di loro de' sussidj del calcolo da essi nascente, nel quale ei sembra d'essere sì maschiamente versato.

A carte 195. lin.8. (h) *Ed in conseguenza*
$$\frac{dx}{ydx - xdy} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + p^2}}.$$
 In ol-

tre a carte 198. lin.7. (i) *ed integrando* $p = \sqrt{a^2 - q^2}$. In questi luoghi il Sig. Co. Riccato commette il medesimo errore, che nel Sig. Ermanno notò mio Zio, quando cioè integrando l'equazioni differenziali, trascura di accrescere l'uno, o l'altro membro dell'equazioni integrali, di una certa quantità costante; imperciocchè se bene in questi esempi una tale aggiunta non muta la specie della curva, in altri casi però può alle volte rendere la natura della curva sterminatamente differente; onde non può senza paralogismo trascurarsi, nè trascurata si può certamente affermare, che la curva ricercata è una sezione conica, benchè qui per accidente accada, che l'addizione niente muta nella natura della curva. Aggiungasi, che non appare se non finalmente dopo molte operazioni, che non si muti la specie della curva.

A carte 200. lin.7. (k) *non così succede nel primo*, ec. Qui il Signor Conte si mostra imbarazzato, e vuole piuttosto lasciare il Problema da sciogliere, che tormentarsi con uno sforzo vano; e contento di questa esclamazione: *Che gioverebbe a questo passo*, ec. afferma esser la cosa impossibile. Io posso dire con verità, seguita a dire il Sig. Conte, che forse non si troverà strada per conseguire l'intento, senza che e' entrino, fatte le se-

(f) Nella presente edizione pag.23. lin.4.

(g) In questa edizione pag.23. lin.17. e seg.

(h) In questa edizione pag.24. lin.2.

(i) In questa edizione pag.25. lin.4.

(k) In questa edizione pag.25. lin.17.

separazioni, quantità trascendenti. Tuttavia darò a dividere ciò non essere impossibile, e mostrerò come senza la presente separazione possa essere sciolto il Problema inverso delle forze centrali, quando sono supposte direttamente proporzionali alle distanze, cioè prendendo le coordinate sull'asse. Comunicherò anche un altro metodo di mio Zio per la soluzione del medesimo Problema, dove l'indeterminate compariscono separate, e poscia l'equazione viene integrata senza la vista di quantità trascendenti.

I. Poichè nella figura del Sig. Ermanno ED $\frac{-ddx\sqrt{xx+yy}}{x}$ esprime la forza centripeta, convien fare $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \sqrt{xx+yy}$ (ovvero piuttosto per osservare l'omogeneità per $ydx - xdy =$ ad una quantità costante) $= \frac{ydx - xdy}{a^2b} \sqrt{xx+yy}$, e perciò $-\frac{ddx}{x} = \frac{ydx - xdy}{a^2b} \cdot$ Moltiplicando poi per xdx , si ottiene $-dxddx = \frac{ydx - xdy}{a^2b} \cdot xdx$, e prendendo gl' integrali, $\frac{ydx - xdy}{a^2b} \cdot xdx = \frac{dx^2}{ac}$ $\frac{xx \cdot ydx - xdy^2}{a^2b}$; laonde $dx = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{a^2b}} \cdot \sqrt{aab - cxx}$, e $\frac{dx}{xx\sqrt{aab - cxx}} = \frac{ydx - xdy}{bx\sqrt{a}}$ presi un'altra volta gl' integrali, $-\frac{y}{x\sqrt{bc}} \pm \frac{1}{a}$; l'equazione ridotta avrà due dimensioni, d'onde appare, che la curva ricercata è una sezione conica.

II. Altramente più facilmente, e più elegantemente osserva mio Zio, che il Problema può essere sciolto, risolvendo le forze in due collaterali. Risolvasi la forza centrale in due altre, le cui direzioni facciano un dato angolo (v. gr. retto) LPM (Fig. 10.). Per lo centro C delle forze si tirino le rette CA, CB parallele a queste direzioni. Egli è manifesto, che il mobile descrive la medesima curva PG, o sia egli sollecitato solamente da una forza tendente al punto C, o in luogo di questa da due altre tendenti costantemente l'una alla retta CA, l'altra alla retta CB, cioè ognuna delle quali conservi una direzione costante, l'una alla

CB,

CB, l'altra alla CA parallela. In oltre è chiaro, che il concorso di queste due forze non impedisce, che s'avvicini all'una, e all'altra delle due rette CB, CA con quelle stesse velocità rispettivamente, colle quali e s'accosterebbe, se levata l'una forza, l'altra sola lo spingerebbe; cioè il mobile P ha tanta velocità per accostarsi alla CB secondo la direzione PL, quanta ne avrebbe nel punto M, scendendo nella retta AC da una conveniente altezza, e con una sola forza uguale a quella, che spingerebbe il medesimo mobile attratto verso CB; e scambievolmente egli ha anche tanta velocità per avvicinarsi alla CA nella direzione PM, quanta ne avrebbe nel punto L, se cadesse da un conveniente punto B della quiete per la retta BC cacciato da una forza uguale a quella, che spinge il medesimo mobile verso la retta CA. Ora la velocità di accostarsi alla CB, e la velocità per ritirarsi dalla retta CA, tutte e due sono fra di loro come le picciolissime linee percorse insieme in quelle direzioni, cioè come $Pn : np$, ovvero (chiamata CMx, MPy) come $-dx : dy$. La seconda dunque si riduce a questo, che primieramente sieno determinate le curve delle velocità ARD, BSE, cioè le cui ordinate MR, LS disegnino le velocità ne' punti M, L, se il mobile separatamente scendesse ora da A, ora da B nelle rette AC, BC; e poscia si cerchi la curva PG di tale natura, che condotte da qualsivoglia suo punto le coordinate PM, PL, e prolungate, fino che s'eghino le curve delle velocità ne' punti R, S, sia sempre $MR : LS :: Pn : np :: -dx : +dy$. Per applicare ciò al caso presente, dove la forza centrale è come la stessa distanza CP, e per conseguente le forze laterali, nelle quali essa si risolve secondo le direzioni PL, PM, come le rette medesime PL, PM, ovvero come CM, CL: è noto, il che può anche facilmente ritrovarsi, che le curve delle velocità ARD, BSE sono quadranti di circoli descritti col centro C, e co' raggi CA, CB; laonde se CA si chiama a , e CB b , farà $MR (\sqrt{aa - xx}) : LS (\sqrt{bb - yy}) :: -dx : +dy$, e perciò

$$-\frac{dx}{\sqrt{aa - xx}} = \frac{dy}{\sqrt{bb - yy}}, \text{ ovvero } \frac{dx}{\sqrt{aa - xx}} + \frac{dy}{\sqrt{bb - yy}} = 0, \text{ ma, come}$$

fanno anco i principianti, $\frac{dx}{\sqrt{aa - xx}}$ è il differenziale dell'angolo DCR,

e $\frac{dy}{\sqrt{bb - yy}}$ è il differenziale dell'angolo ECS: quindi perchè

$$\int \frac{dx}{\sqrt{aa - xx}} + \int \frac{dy}{\sqrt{bb - yy}} = \text{ad una costante, egli è manifesto, che}$$

gli angoli DCR, ECS presi insieme sono uguali ad un dato angolo costante.

stante; ovvero aggiunto il comune ECD, tutto l'angolo SCR sarà costante, se per avventura non cade la retta CS per diritto su la retta CR, il che avviene, quando DCR + ECS = ACD = al retto. Concepiamo dunque, che SCR, o sia angolo, o sia linea retta, giri intorno al punto C, e che in qualsivoglia sito sieno tirate da' punti R, S le rette RP, SP parallele alle rette CB, CA; descriverà il punto dell' intersezione P la curva PG ricercata, la quale troverassi essere un' ellissi, adoperando la sola Algebra ordinaria, il cui centro coincide col centro medesimo delle forze. Che se in oltre le rette SC, RC s'incontreranno per diritto, faranno i raggi CA, CB de' circoli ARD, BSE i semiasse coniugati dell' ellissi, ma se le medesime rette fanno l'angolo SCR, intendasi condotto per lo punto C il diametro d'un circolo passante per li tre punti S, P, R; il punto C dividerà questo diametro (d' una lunghezza costante) in due parti ineguali, le quali danno le lunghezze de' semiasse coniugati. Di che non conviene, ch'io faccia qui la dimostrazione, la quale spontaneamente si presenta dinanzi a chi seriamente ci pensa.

Se per avventura non piace al Sig. Co. Riccato, che abbiamo preso di sopra come noto essere $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}, \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}}$ i differenziali degli angoli, e

per questa cagione un'altra volta accusa (come fece, benchè male a proposito, contra la soluzione generale del Sig. Giovanni mio Zio, registrata nelle Memorie di Parigi) aver esso avuta in mente l'ellissi come l'obbietto principale, al quale dirizzati avea i suoi pensieri, chiamando in ajuto quell' insolita (benchè a noi abbastanza palese, e famigliare) differenziazione, ed integrazione degli angoli, altramente non avrebbe potuto sapere, che sotto quest' espressione $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}} = 0$ sta-

va nascosta la curva algebrica, non che l'ellissi: Se, dico, il Sig. Co. Riccato per avventura disapprova questo modo di procedere; eccone un'altro puramente analitico, ch'io presento, acciocchè egli veda un'altra volta, che s'inganna, quando stima, che il caso particolare, dove le forze sono reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze, sia il solo e l'unico, che trattare si possa coll'equazioni analiticamente integrabili; imparciocchè per fare nel nostro caso la medesima cosa, goderà, spero il Sig. Co. Riccato, quando vedrà, che la nostra espressione $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} +$

$\frac{dy}{\sqrt{bb-yy}} = 0$, forse contro la sua speranza può essere integrata, adope-

rando solamente le comuni regole del calcolo sommatorio, ma con qualche destrezza utile anche in altre occasioni, maneggiate. Si moltiplichino pri-

primieramente l'equazione per $\sqrt{aa-xx}$, e per $\sqrt{bb-yy}$, ed otterrassi

$$dx \sqrt{bb-yy} + dy \sqrt{aa-xx} = 0 \text{ e perciò } \int dx \sqrt{bb-yy} +$$

$+ \int dy \sqrt{aa-xx} = \text{ad una quantità costante } ac.$ Di poi si moltiplichino anche per xy , e si otterrà $\frac{y \cdot xdx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{xydy}{\sqrt{bb-yy}} = 0$; laonde anco farà.

$$\frac{\int y \cdot xdx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{\int x \cdot ydy}{\sqrt{bb-yy}} = \text{ad un'altra quantità costante } ae; \text{ ma è}$$

$$\frac{\int y \cdot xdx}{\sqrt{aa-xx}} = -y \sqrt{aa-xx} + \int dy \sqrt{aa-xx}, \text{ e } \frac{\int x \cdot ydy}{\sqrt{bb-yy}} = -x$$

$$\sqrt{bb-yy} + \int dx \sqrt{bb-yy}; \text{ dunque } \frac{\int y \cdot xdx}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{\int x \cdot ydy}{\sqrt{bb-yy}} (= ae) =$$

$$= -y \sqrt{aa-xx} - x \sqrt{bb-yy} + \int dy \sqrt{aa-xx} + \int dx \sqrt{bb-yy}; \text{ quindi } ae - \int dy \sqrt{aa-xx} - \int dx \sqrt{bb-yy}, \text{ cioè } ae - ac = -y \sqrt{aa-xx}$$

$- x \sqrt{bb-yy}$ equazione algebrica, che si riduce nella seguente maniera. Sia $c - e = b$, e si trasporti o l'una parte, o l'altra parte dell'ultimo

membro dell'equazione nel primo, talchè si abbia $ab - x \sqrt{bb-yy} = y$

$\sqrt{aa-xx}$, ovvero quadrando, $aabb + bbxx - 2abx \sqrt{bb-yy} = ayy$, e tra-

sportando, $aabb + bbxx - ayy = 2abx \sqrt{bb-yy}$, e quadrando un'altra

volta, $a^4b^2 + 2aabb^2xx + b^4x^2 - 2a^4b^2yy - 2aabb^2xxy + a^4y^2 =$

$= 4aabb^2xx - 4aabb^2xxy$. Si levi da ciascun membro $4aabb^2xx -$

$- 4aabb^2xxy$, e si otterrà $a^4b^2 - 2aabb^2xx + b^4x^2 - 2a^4b^2yy +$

$+ 2aabb^2xxy + a^4y^2 = bb^2 - hh$. $4aabb^2xxy$: cavata da ciascun membro la

radice quadrata, otterremo finalmente $aabb - bbxx - ayy = \pm 2axy$

$\sqrt{bb-bb}$, cioè un'equazione all'ellissi, e certamente riferita al centro. Da

ciò non solamente si vede, che la curva ricercata è la sola ellissi, ma

eziandio, che il centro delle forze è nel centro della figura QEI.

A carte 204. lin. 8: (1) che le curve saranno algebriche ogni qual volta ec. Non basta acciocchè le curve sieno algebriche, che ciascun

membro dell'equazione dipenda dalla rettificazione dell'arco di qualche

E 2

cir.

(1) Nella presente edizione pag. 27. lin. 7.

circolo; è necessario di più, che gli angoli sottesi da questi archi sieno commensurabili, altramente dalla loro comparazione non nasce alcuna equazione algebrica.

In quel medesimo luogo lin. 14. (m) *Soluzione non dissimile a quella del Sig. Bernulli nella conclusione, quantunque ritrovata con maniera affatto diversa, ec.* Questo metodo non è tanto diverso da quello di mio Zio, che non si veda facilmente essersi servito il Sig. Co. Riccato di questo medesimo come di regola, alla quale aggiustò il suo metodo, vestito solamente d'un'abito un po' diverso.

Nel medesimo luogo citato lin. penult. (n) *contuttociò non si debbono dissimulare le sue imperfezioni; ec.* Questa soluzione non ha imperfezione alcuna, anzi sarebbe stata perfettissima anco per approvazione del Sig. Co: Riccato, se avesse avuto Autore il Sig. Ermanno.

A carte 205. lin. 11. (o) *non sarebbe loro forse caduto in pensiero, che sotto l'espressione . . . , e nel caso particolare di $f = bx^{-2}$, se non si fosse ro tolte di mira, non si sarebbero forse poste in luce le sezioni del cono.*

Questo ritorcimento (col quale credette forse il Sig. Co. Riccato di punger mio Zio) quanto sia ingiusto, e quanto poco faccia a questo proposito, avrebbe potuto avvertire esso Sig. Conte, se avesse voluto osservare, che per gli altri casi particolari mio Zio cavò dalla sua formula, o soluzione universale le curve avanti di lui da niuno ritrovate. Per esempio nel caso particolare di $f = bx^{-3}$, cioè dove le forze centrali sono reciprocamente proporzionali a' cubi delle distanze; chi avanti di mio Zio ritrovò, o nominò oltre alla spirale logaritmica quell'altra spirale iperbolica, di cui ne diede la descrizione nel medesimo luogo citato dal Sig. Co: Riccato nelle Memorie di Parigi dell'anno 1710, a carte 533. oltre ad infinite altre curve sì algebriche, che trascendenti, le quali dedotte dalla sua soluzione universale pubblicò negli Atti di Lipsia l'anno 1713. nel mese di Marzo, a carte 129. Dica ora il Sig. Co: Riccato, come mio Zio abbia presentito, che sotto la sua espressione generale stava nascosta la spirale iperbolica insieme coll'altre curve, ch'egli comunicò al pubblico de' Letterati; ovvero ci mostri in che modo quelle sono venute alla luce, imperciocchè non si può dire, ch'egli le avesse già avanti avute in mente. Senza dubbio il Sig. Co: Riccato non ha lette quelle cose, che mio Zio pubblicò in questa materia negli Atti di Lipsia, e nelle Memorie di Parigi l'anno 1711., altramente avrebbe più benignamente giudicato della bellezza, e dell'eccellenza del suo metodo, il quale lodò grandemente anche il Sig. Ermanno medesimo, e lo preferì a quello del Sig. Newton, specialmente perchè ha luogo, anche se si considera la resistenza del mezzo. Frattanto stupisco, dopo avere di sopra a carte 204. (p) conosciuto, che dalla dipendenza, o riduzione all'arco circolare di ciascun

mem-

(m) Nella presente edizione pag. 27. lin. 8.

(n) In questa edizione pag. 27. lin. 11.

(o) In questa edizione pag. 27. lin. 18.

(p) In questa edizione pag. 27. lin. 22.

membro dell'equazione, si può conchiudere essere la curva algebrica, che non abbia dubitato di dire, che forse mai non sarebbero venute alla luce le sezioni coniche, se già non fossero state conosciute avanti, come avanti la proprietà ricercata: imperciocchè, che cosa è più naturale, che ritrovata l'algebraicità della curva, ricercar poscia qual sia quell'equazione algebrica, che esprime la natura della curva? Invita quasi spontaneamente a questa ricerca l'equazione differenziale del Sig. Giovanni mio Zio, la quale, come confessa esso Sig. Co. Riccato, rinchiude una manifesta comparazione di due archi circolari diversamente dall'equazione del Sig. Ermanno, la quale, per la confusione delle indeterminate non dando alcun indizio certo di successo felice, potrebbe subito disanimare l'Analista impaziente. Del rimanente benchè questa soluzione generale applicata al caso particolare $f = bx^{-2}$ conduca ad un'equazione involupata di quantità trascendenti, niente però impedita, che queste (purchè sieno algebriche comparabili, come son) per esempio gli archi circolari, i logaritmi, &c) possano trattarsi con un'integrazione puramente analitica, come la quantità assolutamente integrabile: il che poichè forse non crede il Sig. Co: Riccato, e per questa sola ragione vuole esporre la soluzione generale di mio Zio alla soluzione particolare del Sig. Ermanno, perchè questa consiste in una equazione assolutamente integrabile, quella al contrario in un'equazione, che contiene quantità trascendenti, vo applicare l'artificio sopra adoperato nella risoluzione del caso particolare $f = x$ (nel quale da queste quantità trascendenti con un'integrazione puramente analitica, si cava un'equazione algebrica per la curva desiderata) al caso presente $f = bx^{-2}$. Era arrivato mio Zio (vedanti le Memorie di Parigi dell'anno 1710., a carte 527.) a questa equazione differenziale $\frac{dx}{a}$

$\frac{dt}{\sqrt{bb-tt}}$. Sia p una perpendicolare calata dal punto L alla retta AO

(vedasi la figura a pag. 524.) e farà $Ll(dx) = \frac{adn}{\sqrt{aa-pp}}$, laonde $\frac{dz}{a}$

vero $\frac{dt}{\sqrt{bb-tt}} = \frac{do}{\sqrt{aa-pp}}$, e moltiplicando in croce $dt \sqrt{aa-pp} =$

$dp \sqrt{bb-tt}$, e prendendo gl'integrali $t \sqrt{aa-pp} \div \int t p dp = p \sqrt{bb-tt}$

$\div \int p t dt$. ma è $\frac{p t dt}{\sqrt{bb-tt}} = \frac{t p dn}{\sqrt{aa-pp}}$, e per conseguenza $\int \frac{p t dt}{\sqrt{bb-tt}} =$

=

$$= \int \frac{tpdp}{\sqrt{aa-pp}} \pm ae; \text{ dunque levate via le quantità eguali, si scoprirà}$$

$\pm ae \mp p \sqrt{bb-tt} = t \sqrt{aa-pp}$, equazione puramente algebrica, la quale prudentemente maneggiata, come di sopra s'è fatto, riducesi a questa $aatt + bhpp - aae = 2apt \sqrt{bb-ee}$. Ora questa giusto il solito cangiata in un'altra, che esprima la relazione fra le coordinate della curva ricercata, mostrerà esser ella un'ellissi, o un'iperbola, o una parabola riferita al foco.

A carte 206. lin. 9. (q). *Se voleva il Sig. Bernulli liberare la sua analisi dalla nota di particolare, ec.* Non capisco, che cosa si voglia il Sig. Co. Riccato: forse la soluzione di mio Zio ha il difetto di particolarità, perchè non supera l'impossibile? poichè io stimo egualmente impossibile determinare con un'espressione generale le curve algebriche per qualsivoglia data legge di forze centrali, e dare una regola generale, colla quale subito si possa conoscere, se qualche data equazione algebrica di qualsivoglia grado si possa ridurre col mezzo della divisione. Ed in vero il Sig. Co. Riccato ci promette una cosa troppo magnifica, quando dice, che quella questione forse potrà essere sciolta dal Sig. Ermanno, al quale si debba cedere la gloria dell'invenzione. Egli è certamente manifesto ciò, che già aveva avvisato mio Zio nelle Memorie di Parigi a carte 326., cioè che senza esitanza può dichiararsi allora essere algebrica una curva, quando ambedue le membra d'un'equazione disegnano i differenziali di archi, o piuttosto di angoli commensurabili; ma determinare sempre, se qualche quantità differenziale possa essere ridotta al differenziale dell'arco, o dell'angolo, è una difficoltà scabrosissima, nè questa supererassi, prima che si ritrovi la regola d'integrare tutto quello, ch'è integrabile: cosa a dir vero da desiderare, ma non da sperare.

In quel medesimo luogo lin. 20. (r) *Il mio detto parerà forse troppo ardito..... pubblicato dagli altri.* Anzi sembrerà non che ardito, ma paradossico, che la soluzione particolare abbia ad essere più stimata, che la soluzione universale. Ma quando vedrà il Sig. Co. Riccato, che quella ragione, per la quale pronunziò questa sentenza, è di niun peso, se pure avrà mostrato qui la maniera di trattare con un'integrazione analitica quelle medesime quantità trascendenti, che somministrò la soluzione generale, e cangerà spero parere, e ritratterà le parole un po più abbasso a cart. 207. (s) troppo precipitosamente proferite: *Ha però la buona sorte d'esser l'unico, che possa maneggiarsi con equazioni analiticamente integrabili.... e se debba farsi più stima della regola, o dell'eccezione; parte, perchè ho già dimostrato non esser l'unico, il caso; ma essercene un'altro analiticamen-*

(q) Nella presente edizione pag.27. lin.31.

(r) In questa edizione pag.27. lin.ult.

(s) In questa edizione pag.28. lin.9.

te integrabile, quando le forze centrali sono direttamente proporzionali alle distanze; parte perchè è chiaro dalle cose fin qui dette, che indarno si predica la singolare destrezza del Sig. Ermanno nel distinguere il caso più facile dagli altri tutti, come più misteriosi, poichè è falso, che questo caso sia più misterioso di quel primo sciolto dal Sig. Ermanno, essendo anzi molto più facile. Si aggiunga, che non iscelse quel caso il Sig. Ermanno, mà gli fu proposto da mio Zio in occasione che aveva osservato, che il Sig. Nevvton nella prima edizione de'suoi principj matematici (dappoichè nelle tre proposizioni 11. 12. 13. del primo Libro aveva ritrovato, che le forze centripete de'corpi mossi nelle sezioni coniche, tiranti all'ombelico della figura, sono reciprocamente come i quadrati delle distanze) nel corollario 1. prop. 13. aveva assunta senza dimostrazione la proposizione inversa, cioè essere sempre qualche sezione conica avente l'ombelico nel centro delle forze, quella curva, nella quale il corpo si muove con una forza centripeta reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza, la quale proposizione volle però stabilire con qualche dimostrazione il Sig. Nevvton nella seconda edizione.

A carte 208. lin. 9. (t) *Non v'ha metodo fermo, ec.* Sembra qui il Sig. Co. Riccato abbandonare il suo ufficio; poichè ciò che nel Sig. Ermanno grandemente loda, ed innalza (e per questo fine unicamente compose la sua scrittura, quasi che esso Sig. Ermanno abbia sciolto il suo caso particolare con una singolare destrezza) vitupera nel Sig. Bernulli; nè contento di quell'artificio, che diede, benchè, come il chiamò lo stesso Sig. Conte, ingegnoso, non dubita di domandargli un metodo fermo, o generale. Ma se mio Zio rendesse al Sig. Co. Riccato le sue parole così dicendo: *Il Sig. Ermanno arriva ingegnosamente al suo fine, moltiplicando, o dividendo ambedue le membra della sua equazione per certe quantità indeterminate per renderla due volte integrabile: ma oltrechè non v'ha metodo fermo per fissare le grandezze, per le quali bisogna moltiplicare, e dividere l'equazione proposta, non so qual luogo potesse trovare in altri casi egualmente ardui quest'artificio: che direbbe? Ma che più, non si serve forse esso Sig. Conte di questi artifici particolari, de'quali per avventura non fa di esser tenuto a' Sigg. Bernulli, quando a carte 209. (u) chiama in aiuto le sostituzioni congrue* ($\frac{dy}{dx} = p, xp = q$) per separare le quantità variabili; ma non dà rego-

la certa, e fissa, per mezzo della quale si faccia convenientemente una sostituzione, acciocchè le quantità variabili in qualsivoglia equazione proposta si separino l'una dall'altra. Cessi dunque il Sig. Co. Riccato di preferire la soluzione particolare alla soluzione generale, ovvero permetta al Sig. Bernulli, che goda in questa simile occasione quel medesimo privilegio, per lo quale la particolarità può rapire la gloria all'universalità.

A

(t) Nella presente edizione pag.28. lin.28.

(u) In questa edizione pag.28. lin.33.

A carte 210. lin. 8. (x). Io mi lusingo, che il Sig. Bernulli prenderà in buona parte ec. Perdoniamo, e chiediamo vicendevolmente perdonanza diamo volentieri la libertà Geometrica al Sig. Co: Riccato, la quale eppure non ci negherà; il che non impedirà, che non conosciamo, ed ammiriamo la sua acutezza nella Geometria, e la singolare facilità di penetrare queste cose difficilissime.

Darò in luogo d'aggiunta una nuova soluzione di questo Problema inverfo, dedotta da' medesimi principj Nevvtoniani, e la sua applicazione al caso particolare delle forze reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze.

Sia nella fig. 11. C il centro delle forze, A il punto, dal quale si parte il mobile, AB la sua direzione in questo luogo, e cominci il mobile a muoversi nel punto A con quella velocità, che acquisterebbe cadendo dall'altezza data DA, sollecitante qualche forza uniforme, ed eguale alla centripeta agente nel medesimo luogo A; e sia E qualche punto preso nella traiettoria ricercata, EF la direzione del mobile in questo punto; CB, CF le perpendicolari alle AB, EF; EG sia un'arco di cerchio descritto col raggio CE, la curva HIK quella, che determina la legge delle forze centripete, cioè tale, che le sue applicate AI, GK esprimano le forze centripete sollecitanti nelle distanze CA, CG (ovvero CE); e si chiamino $AD = a$, $AC = b$, $CB = c$, $CE = CG = x$, $CF = z$, $AI = g$, $GK = f$. Per quelle cose, che dimostrò il Sig. Nevvton propof. 39., e 40. del Lib. I., se si fa l'aja ALHI = al rettangolo ADMI, sarà l'aja ALHI all'aja GLHK, come il quadrato della velocità in A al quadrato della velocità in E; cioè perchè le velocità sono reciprocamente come le perpendicolari calate dal centro delle forze alle tangenti (il che dimostrò anche il Sig. Nevvton nella seconda edizione de' suoi Principj coroll. 1. propof. 1. Lib. 1.)

$$ag : \int -f dx + ag :: zz : cc \text{ e perciò } zz = \frac{agcc}{\int -f dx + ag} \text{ la qual equa-}$$

zione poichè involge la natura della tangente, l'ulterior sua riduzione dipende dal metodo inverfo delle tangenti. Nel caso particolare quando $f = \frac{bbg}{xx}$, l'equazione ritrovata $zz = \frac{agcc}{\int -f dx + ag}$ si muta in questa $zz =$

$$\frac{acc}{\int -bbdx} = \frac{acc}{\frac{bb-b+a}{xc}} \text{ (si sottrae dall'integrale } \frac{bb}{x} \text{ la quantità } b, \text{ perchè}$$

$$x=b, \text{ l'aja AIGK, ovvero } \int -f dx \text{ dee divenire } = 0) = \frac{accx}{bb-bx+ax}$$

Che

(*) In questa edizione pag. 29. lin. 7.

Che poi quest'ultima equazione sia alle sezioni coniche, così si fa palese: v'ha una notabile proprietà delle sezioni coniche, che se da uno de' fuochi si cala una perpendicolare nella retta toccante in qualche punto la sezione del cono, il quadrato di questa perpendicolare sta al quadrato del semiasse minore, ovvero alla differenza de' quadrati del semiasse maggiore, e della metà della distanza de' fuochi, com'è la retta tirata dal punto del contatto a quel foco, alla retta tirata dal medesimo punto del contatto all'altro foco; la quale proprietà facilmente si può così dimostrare. Sieno nella fig. 12. C, B due fuochi, GH la tangente: CH perpendicolare alla medesima si prolunghi, fino che incontri la prodotta BG in D, alla quale conduca dal punto C la perpendicolare CE. Per l'angolo DCG tagliato in due parti eguali dalla tangente, e per l'angolo retto H, sarà $DH = HC$, $DG = GC$, e $DB = GC + GB =$ all'asse maggiore. Ma è $CBq = CDq$ (4. CHq) + $DBq - 2BD \cdot DE$; in oltre per li triangoli simili DHG, e DEC è DG (GC): DH (HC):: CD (2CH): $DE = \frac{2CHq}{GC}$; perciò $CBq = 4CHq$

$$+ DBq = \frac{4BD \cdot CHq}{GC}, \text{ ovvero } \frac{DBq - CBq}{4} = \frac{BD - GC \cdot CHq}{GC} =$$

$$\frac{GB \cdot CHq}{GC}, \text{ e } CHq : \frac{1}{4} DBq - \frac{1}{4} CBq :: GC : GB. \text{ Quindi se si chiama}$$

$$sà CH = z, GC = x, DB = p, CB = q, \text{ sarà } zz = \frac{\frac{1}{4} pp - \frac{1}{4} qq}{p - x} \cdot x \text{ la}$$

qual equazione è simile alla ritrovata, e con essa coincide, se si pone $p = \frac{bb}{b-a}$, e $-\frac{1}{4} qq = \frac{acc}{b-a}$; il che mostra, che la curva ricercata è una sezione conica, il cui lato retto = $\frac{4acc}{bb}$, ed il trasverso = $\frac{bb}{b-a}$, e che in ispe-

zie la curva è una parabola, se $a=b$, cioè a dire se la velocità, con la quale il corpo comincia a muoversi in A, è uguale a quella, che acquisterebbe cadendo per un'altezza eguale alla distanza CA, spingendolo in tutti i punti la medesima forza centripeta, che spinge nel punto A; ma la curva sarà un'ellissi, se il mobile uscirà dal punto A con un velocità minore; e un'iperbola, se il medesimo mobile uscirà con una velocità maggiore.

PROBLEMA

proposto a' Geometri d'Italia.

Il punto C nella fig. 13. è il centro delle forze, BbC la curva, le cui applicate BA, ba esprimono le forze centripete giusta le diverse distanze CA, F

Opere Ricc. Tom. III.

42
CA, Ca, ed insieme i tempi, che consuma il mobile principiando la caduta da punti A, a, e scendendo per le distanze AC, aC; si ricerca, che curva sia questa AbC, ovvero in qual ipotesi di forze i tempi delle discese per AC, aC da' punti A, a della quiete sieno proporzionali alle forze agenti nelle distanze CA, Ca?

SCHEDIASMA IV. (*)

Contrarispota alle Annotazioni del Sig. Niccolò Bernulli inserite nel XX. Giornale d'Italia Articolo XIII., con un metodo di separare le indeterminate nell'equazioni differenziali, e con alcune riflessioni intorno le forze centrali tanto nel voto, quanto nel pieno.

LA presente Dissertazione servirà di risposta alle Annotazioni, che s'è compiaciuto di fare il dottissimo Sig. Niccolò Bernulli sopra la mia difesa della soluzione del Sig. Jacopo Ermanno, e per mia parte sarà certamente l'ultima: sì perchè eternar non si debbono i litigj, quantunque letterarj e moderati; come pure perchè da quanto s'è detto, e da quanto io sono per dire, potranno i Matematici formar un retto giudizio intorno la nostra controversia: anzi ho tale fiducia della mia causa, che ne rimetterei di buona voglia agli stessi Signori Bernulli la decisione. Infatti dall'un canto anno eglino sparte così a larga mano le loro dovizie, che corrono rischio di moltiplicarsi gli Avversarj, dal numero de' quali io bramo, che mi cancellino: giacchè niuno può uscir di briga, se non più dotto, e per dir così, più Geometra. Dall'altro anno risposto con tanta gentilezza, ch'io vorrei poter cedere il campo, e darmi per vinto: ma finalmente ad ogni costo si dee sostenere l'interesse della verità, e per farlo con la dovuta moderazione, metterò in non cale alcune espressioni, che potrebbero degenerare in contestazioni inutili, e procurerò a misura delle mie forze, che la risposta sia più dottrinale, che contenziosa.

Il primo capo della nostra disputa versava sopra la doppia integrazione nella nota formula del Sig. Ermanno

$$\frac{-ddx \cdot \sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{ydx - xdy}{xx+yy}^2$$

E quì è necessario, che il Sig. Niccolò Bernulli s'imprima saldamente nella memoria le seguenti parole del Sig. suo Zio, che le indeterminate ci sono talmente complicate, che il voler separarle è intraprendere una fatica disperata, e riesce impossibile il sommarle così confuse; onde inferi, che

(*) Questo Schediasma fu stampato l'anno 1715. nel Tomo XXI. del Giornale de' Letterati d'Italia, Articolo VIII.

43
che il Sig. Ermanno non ne sarebbe venuto a capo, se non avesse sempre avute innanzi gli occhi le sezioni del cono.

Io mi credeva d'aver pienamente soddisfatto alla difficoltà, con esporre un metodo fermo, per cui in due diverse maniere si potesse conseguire la bramata sommatoria; e mi pareva, supposto ciò, di dover con ragione cancellare la premessa espressione dal catalogo delle disperate. Nulladimeno contro l'evidenza d'un' analitica dimostrazione si persiste per parte de' Signori Bernulli tenacemente nella prima opinione: ma che rispondono mai?

Mi formano un'elogio, di cui tanto più rendo loro grazie, quanto so di non meritarlo; indi dicono, che disperato non significa impossibile, ma difficile e scabroso: che il Sig. Ermanno s'è lasciato guidare per un sentiero malagevole ad una formula, che atterrisce l'Analista; perchè a prima vista sospetta esserci sotto difficoltà maggiore di quella, che veramente c'è: che in tanto non temette d'incontrarne alcuna nell'ipotesi comune, in quanto conobbe da altra parte, che la curva ricercata era una sezione conica: che se gli fosse stata messa sotto gli occhi la nuda equazione, senz'indicarli la fonte, onde scaturì, avrebbe forse disprezzata la cosa, come avente più difficoltà, che utilità. Aggiungono, che io, per ridurre l'espressione, mi sono destramente servito degli ajuti prima scoperti da Signori Jacopo, e Giovanni Bernulli, e che se non altro, un'ufficio d'urbanità avrebbe dovuto costringermi a non rivolgere contro di loro i sussidj del calcolo da essi nascente.

Questo rimprovero inaspettato m'ha sforzato a pensare alla replica, e ad esaminare nel tempo stesso le loro proposizioni: per altro io, che sopra d'ogni cosa mi pregio di docilità, farci rimasto pago di qualunque risposta.

Primieramente io non saprei, nè lo sapranno i Sig. Bernulli stessi dare al termine di disperato più benigna interpretazione, quanto col dire, che per formula differenziale disperata s'intenda quella, alla cui integrazione non si perviene con l'ajuto dell'arte, ma con un'anticipata cognizione, o più per fortuna, che per industria. Quando abbiamo in mano un metodo certo, non ha più luogo la supposta disperazione. Qual'Analista mai farà così impaziente, che non voglia applicare, purché gli sia noto, il metodo generale al caso particolare? tanto più, quanto che la mia maniera di separare le incognite non è sì fattamente operosa, che possa stancare un Geometra delicato. Interroghiamo il Sig. Giovanni, s'egli numera fra le disperate la sua seconda formula $zfx^3dy^3 = dy^3 + dx^2dy - xdy ddx + xdx ddy$.

Abbia la bontà di ristettere, ch'essa non è meno composta di quella del Sig. Ermanno; che l'indeterminate ci sono egualmente confuse; e che si può ritorcere contro la sua equazione tutto ciò, che egli ha saputo scrivere contro l'altrui. Risponderà senza dubbio di no, e si farà forte con dire essere da lui stato scoperto il modo di svilupparla. Ma non ho io fatto altrettanto nella formula controversa, e forse di più? mentre finalmente la maniera Bernulliana è limitata, e non può estendersi all'espres-

sione del Sig. Ermanno; dove all'incontro la mia abbraccia l'una, e l'altra, come fondata sopra un principio più generale. Accetteremo dunque l'ingenua confessione del Sig. Niccolò, che l'equazione, di cui si parla, era più difficile in apparenza, che in verità: e conchiuderemo, che s'era disperata presso il Sig. Giovanni, non era tale presso di noi, e molto meno presso il suo chiarissimo Autore.

In secondo luogo, se crediamo a questi Signori, per sommare la nostra formula, altro non si richiedeva, fuorchè di mettere opportunamente in opera i sussidj del calcolo integrale da loro prima scoperto. Se così è, io bramerei capire, come un'espressione dipenda per l'una parte da canoni noti, e dall'altra si faccia passare per disperata. Gli artificj divisati non erano forse di comune giurisdizione? per qual causa dunque non poteva servirsene il Sig. Ermanno al pari d'ogn'altro, e qual necessità aveva mai di prender di mira le curve del secondo grado? Era superfluo, ch'egli accompagnasse la sua formula con una deduzione; mentre altro non avrebbe fatto, che rammentare al Sig. Bernulli i suoi artificj. Ma quello, che io non so intendere, si è, come se la prenda il Sig. Niccolò contro il Zio, e lo accusi, in vece di difenderlo, quasi che non abbia saputo far uso de' proprj principj. In fatti, se con gli ajuti Bernulliani, per detto del Sig. Niccolò, si può sviluppare una formula, che il Sig. Giovanni giudica disperata, ne segue, che o il Zio s'è trovato imbarazzato in applicarceli, o che sono insufficienti i decantati artificj, e falsa l'asserzione del Nipote. Comunque la cosa si sia, parmi d'aver favellato con più modestia, quando mi sono espresso, essersi il Sig. Giovanni lasciato sorprendere dalla prima apparenza.

In terzo luogo è necessario, ch'io mi purghi del rimprovero addossatomi, ed esponga almeno in compendio il metodo, di cui mi sono servito, e di cui non so d'esser debitore ad altri, che a me medesimo. Per dedurre la cosa da più alti principj, debbo premettere, che la separazione delle indeterminate m'è paruta sempre un giuoco d'ingegno, in cui abbia più luogo la pratica, la pazienza, la sorte, che l'arte, ed il metodo. Fra le insuperabili difficoltà, che rendono involuta l'operazione, non è forse la minima il poter restituire all'equazione que' termini che nel prendere le differenze ordinariamente svaniscono. M'è noto il grand'uso delle sostituzioni derivate dall'Analisi volgare in quella degl'infiniti; ma finalmente tra le innumerabili, che posson farsi, chi m'addita quell'unica, che può guidarmi più speditamente alla meta. So, che oltre molti artificj adattati da' Geometri a casi particolari, si trova registrata negli Atti di Lipsia 1696. la formula più generale dell'incomparabile Sig. Leibnizio, ampliata poscia l'anno 1697. dal Sig. Giovanni Bernulli; a cui, ommettendo per brevità le più limitate, s'aggiunga la maniera del famoso Sig. Jacopo Bernulli estesa fino alle terze differenze nella soluzione del Problema degl'Isoperimetri; e quella del lodato Sig. Giovanni, là dove tratta del solido della minima resistenza; e finalmente l'ultima d'un'insigne Italiano, cioè del Sig. Gabbriello Manfredi inserita ne' nostri Giornali. Contuttociò gl'illustri Autori de' metodi accennati conoscono ab-

ba-

bastanza la loro circoscrizione, senza ch'io m'affatichi in dimostrarla; e per dir vero si danno infinite espressioni, in cui con poco dispendio si separano le variabili, e pure sono per altro così ostinate, che non lasciano vincerli da' canoni mentovati.

A me nel maneggiare, come accade, varie formule, è riuscito o per ventura, o per arte di scoprire un modo facile per conseguire l'intento, che va accompagnato da tre circostanze importanti. La prima, che con la sua generale estensione abbraccia tutte le altre maniere sinora pubblicate, o almeno ne fa far uso come d'ajuti sussidiarj. La seconda, che arriva speditamente al suo fine, quand'anche nell'atto del differenziare sieno spariti alcuni membri dell'equazione. La terza, che valendosi delle sostituzioni, nel tempo stesso c'insegna, quali sieno le legittime, e quali le inutili.

Ecco tre canoni, su cui si fonda. Si dee primieramente disporre l'equazione proposta in maniera, che le quantità differenziali restino accompagnate rispettivamente dalle loro indeterminate, o si faccia, per così dire, una dimezzata separazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o divisori quelle grandezze, che turbano l'operazione; indi presa la sommatoria della differenziale così preparata, composta di due ignote, si dee porre uguale ad una variabile assunta, o col mezzo d'una equazione ausiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta osservazione a ciò, che succede, dee iterarsi l'operazione, fino a tanto che si conseguisca la bramata separazione, o si veda essere la formula contumace, e superiore alla nostra industria.

A questo passo mi si conceda di protestare altamente, che io non presumo d'integrar l'integrabile, ma solo di stendere in parte i confini del computo sommatorio. Conosco esserci alcune formule, che non ammettono la nostra preparazione, altre in cui tutti i tentativi messi in opera per separare le ignote, non servono, che a maggiormente imbrogliarle; e quantunque in certi casi non manchino ripieghi per superare gl'intoppi, con tuttociò resterà sempre da farsi più di quello, che s'è fatto. Chi sa? forse si danno certe formule, alle quali si potrebbe dare il nome di sovra trascendenti, con le indeterminate sì fattamente miste, e confuse, che non ammettono separazione veruna, e vogliono essere costrutte per una serie, e non per una quadratura. Sia questa un'idea ben fondata, o pure un sogno, poco importa; mentre in materia sì ardua bramerei piuttosto d'udire l'altrui parere, che di proporre il mio.

E S E M P I O I.

$$\text{Sia } \frac{x^3 dy + y^3 dx}{xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy} - xxy} = dz \text{ nella qual' equazione la}$$

quantità z è una funzione arbitraria di x , ovvero di y . Metto da parte la quantità $a : xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy} - x^2y^2$, che è un' affezione comune a due

ter-

termini, che compongono la prima parte dell'equazione. Resterà la differenziale nuda $x^3 dy + y^3 dx$. Divido dx per x^3 , e dy per y^3 , sicchè

$$x^3 y^3 \frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = x^3 dy + y^3 dx, \text{ e la nostra formula prenda il nuovo aspetto,}$$

$$\text{cioè } \frac{x^3 y^3}{xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy - x^2 y^2}} \cdot \frac{dx + dy}{x^3 y^3} = dz. \text{ Ottenuta questa dimi-}$$

diata separazione, in cui le due flussioni dx, dy si veggono combinate semplicemente con le funzioni delle loro fluenti x^3, y^3 , e gli altri termini dell'equazione costituiscono una quantità quasi estranea, che fa figura di comu-

ne moltiplicatore, pongo $\frac{dx + dy}{x^3 y^3} = -dp$, ed integrando, $\frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy} = p$.

$$\text{Sarà pertanto } \frac{-x^3 y^3 dp}{xx + yy \cdot \sqrt{xx + yy - x^2 y^2}} = dz, \text{ e surrogando in cambio}$$

$$\text{di } x \text{ per esempio il suo valore dato per } y, \text{ e } p, \text{ avremo } \frac{-dp}{2p \cdot \sqrt{2p-a}} =$$

$$= dz: \text{ il che ec.}$$

Raccogliasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per p , come $p = \frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy}$, o pure $\frac{xy}{\sqrt{xx + yy}} = q$, trovare-

$$\text{mo } \frac{dq}{\sqrt{aa - qq}} = - \frac{dp}{2p \cdot \sqrt{2p-a}} = dz, \text{ onde in un batter d'occhio si}$$

scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima implicate.

ESEMPIO II.

Pongasi l'equazione già preparata $y^m \cdot xdx + ydy = x^n \cdot ydx - xdy$, ovvero $y^{m-2} \cdot xdx + ydy = x^n \cdot \frac{ydx - xdy}{yy}$. Pongo $\frac{x}{y} = q$, ed $xx + yy = pp$,

ed in conseguenza $x dx + y dy = pdp$ ed $\frac{ydx - xdy}{yy} = dq$. Fatta la doppia

sostituzione, sarà $y^{m-2} \cdot pdp = dq$. La dignità y^{m-2} può rappresentarsi

nella

nella seguente maniera y^{n+t} , ponendo $m-2 = n+t$; dunque $\frac{y^{n+t} \cdot pdp}{x^n} = dq$:

ma essendo $\frac{y}{x} = \frac{a}{q}$ farà altresì $\frac{y^n}{x^n} = \frac{a^n}{q^n}$; dunque $y^t pdp = q^n dq$. Frattanto

in virtù della doppia equazione $x = yq$, e $xx + yy = pp$ collocando in vece di xx il suo valore $y^2 q^2$, avremo $y^2 q^2 + y^2 = p^2$, cioè $y = \frac{p}{\sqrt{aa + qq}}$, ed in conseguenza $y^t = \frac{p^t}{aa + qq^{\frac{t}{2}}}$; onde finalmente

siamo pervenuti ad una equazione libera dalla mistione delle indetermina-

$$\text{te } p^{t+t} dp = \frac{p^t}{aa + qq^{\frac{t}{2}}} \cdot q^n dq.$$

ESEMPIO III.

Considero una formula, che può maneggiarsi col metodo del Sig. Bernulli dell'anno 1697., cioè a dire $\frac{xdy + ydx}{a + x} = du$, in cui y si sup-

pone data in qualsivoglia modo per u . Metto $xy = p$; dunque $ydp - pdu = ydu$. Preparo di bel nuovo l'equazione nella seguente forma $p \cdot \frac{dp - du}{p \cdot y} = du$. Prendo $lp = \int \frac{du}{y} lq$, ovvero $l \frac{p}{q} = \int \frac{du}{y} x$, dun-

$$\text{que } \frac{p}{q} = a^x, \text{ e } dq = \frac{du}{ax}.$$

Tralascio d'addurre esempi nell'equazioni differenziali del secondo ordine, giacchè s'è fatta l'applicazione del modo, che dee tenersi all'espressioni de' Sig. Bernulli, ed Ermanno.

Non tocca a me il decidere, che conto debba farsi di questo metodo: io poca, o nessuna lode ne spero. Mi basta, che esso mi liberi dalla nota impostami gratuitamente da' Signori Bernulli. Mi dicano in qual libro, in qual Giornale, in qual registro d'Accademia si trovi questa maniera d'operare, acciocchè io sappia con chi per avventura mi sono incontrato, ed a chi si debba il pregio dell'invenzione: se bene la cosa è per se stessa di così poco momento, che io mi persuado non poter esserci fra Geometri, chi si curasse gran fatto d'averla scoperta. Resti dunque a' Sig. Bernulli la gloria d'occupare il primo posto fra promotori del cal-

calcolo dell'infiniti, e mi si conceda, che nel caso nostro non trovano luogo le loro sublimi fatiche.

Le cose dette chiamano un'altra necessaria riflessione. Nel ponderare, che io feci il modo, con cui il Sig. Giovanni sviluppa la sua seconda formula, diti non esserci metodo fermo per fissar le grandezze, che debbo far figura di costanti, e che non sapeva io, che luogo potesse avere in casi egualmente ardui quest'artificio. Il Sig. Niccolò non impugna il detto, ma contra di me lo ritorce, accusandomi, che io abbia abbandonato il mio ufficio, e messe in pratica le sostituzioni, senza dar regola certa, per cui si faccia convenientemente una sostituzione, acciechè le quantità variabili in qualsivoglia equazione proposta si separino l'una dall'altra.

Se si pretende, che il mio metodo abbia ad applicarsi a tutte le equazioni possibili, si pretende troppo; basterà, che possa adattarsi a qualche caso, che si chiamava disperato. Dirò bensì, ch'io non mendico la sostituzione da farsi, e che la mia preparazione mi somministra quella precisa quantità, che in cambio delle altre dee surrogarsi.

M'era quasi dimenticato d'un'altra difficoltà messa a campo da' Signori Bernulli. M'imputa un paralogismo per aver seguitati i vestigi del Sig. Ermanno, e per avere nel prendere gl'integrali omissio d'aggiungere le quantità costanti. Il peggio si è, che anche nella presente risposta sono caduto nello stesso fallo. Orsù abbiano la pazienza di leggere ciò, che da me è stato scritto nella prima difesa alla pag. 207. a), e vedranno, ch'io ho prevenuta in maniera l'opposizione, che non so come abbiano avuto coraggio di toccar questo punto. Per ora rispondo, che è stata mia intenzione di spiegar un metodo, e non di sciogliere un Problema.

Professa in oltre il Sig. Niccolò, che nello stendere a tutti i casi possibili l'equazione particolare del Sig. Ermanno, abbia io inorpellato il metodo del Sig. suo Zio. Non è poco, che mi sia riuscito di far tanto, e se il modo non fosse così palesemente diverso, potrebbe dir ciò che vuole. Non desiderava forse il Sig. Giovanni, che dal Sig. Ermanno venisse fatta una prova della sua analisi, applicandola all'ipotesi generale? In qualunque forma si sia soddisfatto ad una brama sì ragionevole, non possono giustamente pretendere di vantaggio. Per maggiormente persuaderli sappiano, che non ho battuto altra strada, che quella da me spianata nel mio Schediasma, in cui ho sciolto il problema inverso de' raggi osculatori pubblicato nell'undecimo Giornale d'Italia pag. 205. (b), prima che mi fossero capitate sotto l'occhio le speculazioni del Sig. Bernulli, e che mi potessi fognare d'inorpellare i suoi metodi. Tutto il giro consiste nel trasportare in qualche occasione più ardua l'equazione delle curve dall'asse al foco, e indi di nuovo per altra strada dal foco all'asse: Si degnino d'osservare l'esempio pag. 213. (c).

Per

(a) In questo Tomo pag. 28.

(b) Leggasi il citato Schediasma, in questo Tomo alla pag. 1.

(c) E nella presente edizione pag. 26.

Per far la seconda traslazione, che sembra la più difficile, e sopra di cui ha versato l'industria del Sig. Giovanni, io non ho adoperate, che due semplicissime equazioni note a tutti i Geometri senza chiamar in soccorso qualsivoglia preparazione. Nella curva BCD (fig. 14.) considera nello stesso tempo relativamente al foco, ed all'asse, non è egli certo, che il quadrato CD dell'elemento della curva è uguale tanto ai due quadrati CE, ED, quanto a i due altri AG, GC? Chiamando AG x , GC y , AC z , e l'arco minimo CE du , avremo $dx^2 + du^2 = dz^2 + dy^2$, e $x^2 + y^2 = z^2$. Ora l'equazione della curva al foco venga generalmente espressa dalla formula $pdx = du$, in cui p è una data funzione di z , e sarà $dx^2 + p^2 dz^2 = dz^2 + dy^2$, e collocato in vece di dy il suo valore nascente dall'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, vale a dire $\frac{zdx - xdx}{\sqrt{zx - xx}}$, trovare-

$$\frac{zdx - xdx}{\sqrt{zx - xx}}$$

mo $dx^2 + p^2 dz^2 = dz^2 + \frac{zdx - xdx}{\sqrt{zx - xx}}^2$, la qual equazione espurgata

con le trasposizioni, e con una semplice estrazione della radice prima, passa nella seguente $pdx = \frac{zdx - xdx}{\sqrt{zx - xx}}$; e separate le variabili col porre

$$x = zq, \frac{pdx}{z} = \frac{dq}{\sqrt{aa - qq}}$$

Il metodo del Sig. Ermanno consiste in notare l'uguaglianza fra le due quantità $zxdx$, e $ydx - xdy$, il che si ricava dalla sola ispezione della figura, essendo l'area BGC, meno il triangolo AGC, uguale al trilineo BCA, ed in conseguenza eguali i loro elementi.

Quando poi si voglia costruire la premessa equazione, ci si presenta la preparazione del Sig. Bernulli; giacchè il membro $\int \frac{dq}{\sqrt{aa - qq}}$ ricer-

ca la descrizione d'un arco circolare di raggio costante. E di fatto per questa via nel luogo sopraccitato sono venuto in cognizione, che l'epicicloide corrisponde alla legge di forza centrale in ragione reciproca quadruplicata delle distanze.

Nel secondo punto principale della nostra controversia si cercava, in che pregio dovesse tenerli la soluzione particolare del Sig. Ermanno; e non è paradosso il mio, come si sforzano di spacciarlo i Signori Bernulli, quand'ho avuto coraggio di preferirla, o almeno d'uguagliarla alla soluzione generale, per due motivi di somma importanza; sì perchè ha un non so che di singolare, come vedremo a suo tempo; sì perchè non resta invilupata fra quantità trascendenti.

Opere Ricc. Tomo III.

G

E'

E' massima comunemente ricevuta da' Geometri antichi, e moderni, non essere lieve fallo contro l'arte, quando un problema si scioglie per genere improprio. Viene censurato chi maneggia per li luoghi solidi un problema piano, chi soddisfa ad una quistione lineare con curve di grado troppo elevato; e pure tutte queste curve non escono fuori della linea delle algebriche. Che farà dunque il trattare un caso algebrico con curve meccaniche, che sono totalmente differenti di genere? Non vorrei però, che mi credessero così scrupoloso, quasi che io dispregiassi universalmente simil sorta di soluzioni. Io le accetto per buone, quando non ne trovo di migliori; mentre nulla rileva per qual sentiero si pervenga allo scoprimento d'una sublime verità. Lodo chi le adopera, e lodo molto più chi sa destramente schivarle: e qui dee notarsi, che la nostra disputa non cade sopra la bontà, ma solo sopra l'eleganza della soluzione.

Pare, che mi si ammetta il principio, e che si tenti di eluderlo con due risposte. Primieramente dicono, che quantunque le formule dipendano dalla comparazione di due archi circolari commensurabili, contuttociò non è difficile il ridurle ad equazioni puramente algebriche; e si servono d'un metodo ingegnoso, che nulla più, adattandolo poscia con pari sagacità agli esempi controversi. Chi mai ha negato ciò? non ci voleva un gran che a capire, che se sotto la sembianza d'espressioni meccaniche si nascondono curve geometriche, egli è d'uopo, che si possa levar loro la maschera, e ravvistarle per quelle che sono, almeno in alcuni incontri più manifesti. Era noto, che da due quantità logaritmiche si fa passaggio a due ordinarie, e non esserci quadratura per composta che sia, che non serva ad una curva algebrica, quando il membro corrispondente si possa ridurre ad una espressione simile con una congrua sostituzione. Ho detto simile, e mi par d'aver detto a bastanza per essere inteso in una materia sì conosciuta, tuttochè il Signor Niccolò Bernulli m'abbia a torto per questo capo accusato di paralogismo.

Ciò non ostante la risposta non tronca il nodo. Siaci pure il metodo per ottenere la bramata riduzione, ed anche più generale di quello, che in fatto si sperimenta; non sarà sempre meglio lo sfuggire, se pur si può, la comparazione delle grandezze trascendenti, che andare in traccia del modo, che dee servire a ridurle in quella guisa appunto, che in una quistione d'Analisi volgare meriterebbe più lode colui, che la maneggiasse con quantità reali, e commensurabili, di quello, che v'introducesse le irrazionali, e le immaginarie, se bene insegnasse poi la maniera di convertire le prime in commensurabili, e le seconde in reali.

Rispondono secondariamente i Signori Bernulli, che non è tanto singolare l'ipotesi comune considerata dal Sig. Ermanno, che non ce ne sia un'altra al pari privilegiata; cioè, quando le forze centrali s'erbano la ragione delle distanze, nella quale l'equazione viene integrata senza la vista di quantità trascendenti. Soggiungono, ch'io mi sono trovato imbarazzato, ed ho voluto lasciar piuttosto il problema da sciogliere, che tormentarmi con uno sforzo vano, e fanno le maraviglie, perchè dal Sig. Ermanno non sia stata estesa a questo caso la propria soluzione. Suppli-

ficono essi alla mancanza, e registrano due soluzioni, la prima derivata dalla formula del Sig. Ermanno; la seconda, tutto lavoro del Sig. Giovanni, procede per mezzo d'angoli ridotti geometricamente, ed analiticamente a grandezze algebriche.

In questa occasione i lodati Matematici anno ommesse, o troncate alcune mie asserzioni, e finto di non intendermi per più facilmente impugnarli. Sia tutto vero ciò, che propongono, è cosa notabile, che scandagliato da essi tutto il fondo della lor Geometria, non anno saputo rinvenire che un solo caso, oltre il già ponderato, in cui si possa procedere per quantità puramente algebriche; onde la nostra ipotesi lascerebbe bensì d'essere singolare, ma non d'essere privilegiata. Potrei far vedere, che non mi trovo imbarazzato, quanto essi credono, e potrei dilatare ad altri casi più composti la formula del Sig. Ermanno, se lo stimassi opportuno. Aggiugnerei di non aver mai negato, che non abbia ad avere il suo uso in qualche sistema particolare di forze centrali, o col preparar l'equazione, o col ridurre ad algebriche le quantità trascendenti, o coll'insinuare nell'espressione destramente le grandezze presupposte dalla predetta artificiale riduzione.

Ho detto generalmente non esserci strada di distinguere le curve geometriche, senza che c'entrino quantità meccaniche. Nell'atto stesso di prorompere, com'essi vogliono, nelle mie esclamazioni, e di recare l'esempio delle sezioni coniche riferite al centro, m'esprimo, che nulla gioverà averle in vista, mentre non si scuopra prima il metodo di sommare l'espressione proposta; e poco dopo conchiudo, che dalla mia osservazione si renderà manifesto, qual differenza passi tra le formule generali, e la particolare del Sig. Ermanno: tanto è vero, che io parlava generalmente. Alla pag. 207. (d) sostento essere il caso nostro l'unico, che possa maneggiarsi con equazioni analiticamente integrabili; ma nel luogo stesso soggiungo, che esso è compreso con tutti gli altri nella formula generale meccanica, e che per distinguerlo non c'è bisogno di riduzione. Da tali espressioni, e molto più dal mio modo di procedere alla pag. 200. (e) chiaramente spicca la mia intenzione. Nell'equazione del Sig. Ermanno conservata nella sua purità, e non alterata da preparazioni, o da riduzioni, per l'una parte le variabili non si separano, nè si da una doppia integrazione algebrica, fuorchè nell'unico caso della forza centrale in proporzione reciproca de' quadrati delle distanze; per l'altra in tutti gli altri casi possibili si richiede nuovo artificio, che generalmente non è noto, senza che s'incontrino quantità trascendenti; avvegnachè in qualche incontro certi giuochi d'analisi possano supplire al bisogno; dunque l'accennata ipotesi seguirà a godere il privilegio della sua singolarità.

Frattanto il Sig. Niccolò dà alla luce una maniera di sua invenzione, con cui soddisfa al caso medesimo senza l'aiuto delle quantità meccaniche. Se bene la sua soluzione non va immune da ogni neo di pec-

(d) In questa edizione pag. 28.

(e) Nella presente edizione pag. 25.

zion di principio; nulladimeno io, che mi sono proposto la difesa, e non l'offesa, risponderò, che il caso, e non il modo è stato chiamato da me singolare.

Si querelano i Signori Bernulli d'una mia innocente espressione, cioè, che se non si fossero tolte di mira, non si farebbero forse poste in luce le sezioni del cono. Vogliono, che sia una puntura, che vada a ferire ingiustamente il Sig. Giovanni; benchè io tutt'altro avessi in vista, ed abbiano la bontà di credermelo, fuorchè il mentovato Signore. Per far poi comprendere, che non m'è uscita a caso la parola di bocca, riflettano all'epoca della grand'opera Nevvtoniana, in cui il problema diretto si trova sciolto da tanto tempo, e m'intenderanno, senza che di vantaggio mi spieghi. La difficoltà non consiste, com'essi pensano, nel paragonare insieme due archi circolari; ma nel ridurre la differenziale proposta a quella d'un arco di cerchio: e la cosa è per se stessa, almeno presa universalmente, sì ardua, che da loro viene giudicata impossibile.

O qui sì che danno in esclamazioni: mi rimproverano, che accuso di particolarità la soluzione del Sig. Giovanni, perchè non supera l'impossibile; che presumo d'integrare l'integrabile, e che prometto cose troppo magnifiche. Io nulla prometto del mio: odano, come s'esprime il Sig. Ermanno nel VII. Giornale d'Italia pag. 227. „ Egli è certissimo, „ ch'avvegnachè il problema inverso delle forze centrali nel voto generalmente considerato è meccanico, niente di meno infiniti sono i casi „ particolari, che rendono il problema algebrico, e somministrano curve „ costruibili senza le quadrature delle figure curvilinee. Si domanda „ dunque una formula generale, che racchiuda tutti i casi possibili, che „ somministrano curve geometriche costruibili indipendentemente dalle „ quadrature. A molti parerà forse impossibile il problema, ma per disingannarli darò qui la formula desiderata, dimandandone solo la dimostrazione, e la costruzione delle curve, a cui compete. „ Aggiunge poscia la formula, che si può vedere nel luogo citato, e ch'io tralascio per brevità. Pareva, che il Sign. Ermanno prevedesse fin d'allora ciò, che doveano dire un giorno i Signori Bernulli, e se ben so, che egli con la loro acutezza, veduta la formula, ne penetreranno il misterio, non resterà però, che non abbiano giudicata impossibile la quistione: e mi credano, che non gioverà interpretare questo vocabolo, come anno fatto quello di disperato. Non farà pertanto picciola lode di questo insigne Geometra, che i suoi sforzi, per adottare la frase Bernulliana, tant'oltre s'estendano, che superino l'impossibile, e che egli sia arrivato fin dove i Matematici di prima sfera nè pure speravan di giungere. Premesso ciò, io mi contento, che m'accusino a loro talento di parzialità.

Ora capiranno, che non potea riuascirmi nuova, né la spirale iperbolica scoperta prima col metodo diretto dal Sig. Varignon, nè le infinite curve algebriche rispondenti alla legge di forza centrale in ragione inversa de' cubi delle distanze. Per darne un saggio mi fermerò su quest'ultimo punto, mettendo in chiaro l'analisi occultata dal Sig. Bernulli negli Atti di Lipsia 1713., a cui professa essere pervenuto per certi compendi di calcolo a lui noti.

Li.

Limitando dunque l'espressione generale delle forze centrali col porre nella nostra ipotesi $f = \frac{g}{y^3}$, troveremo $dx = \frac{dy}{\sqrt{c^2 y^2 + b^2 - a^2}}$, equazione

unica, che abbraccia curve infinite, secondochè si va alterando la relazione delle costanti.

Primieramente sia $c^2 = 0$, e l'equazione apparterrà alla spirale logaritmica, ed anche al cerchio, quando nella stessa ipotesi fosse $b^2 - a^2 = 0$.

Secondariamente posta c^2 uguale ad una quantità positiva, e $bb = aa$, farà $dx = \frac{dy}{cy}$, o pure $ydx = \frac{a}{c}$, di maniera che nella curva farà sempre

costante la subtangente, proprietà, che conviene alla spirale iperbolica.

In terzo luogo m'esse da parte le limitazioni, e considerata la nostra formula con tutti i suoi termini, possiamo concepire la quantità bb maggiore, e minore dell'unità a^2 , e presa $b^2 - a^2 = g^2$, può essere la g^2 o affermativa, o negativa. Tolta per mano la seconda supposizione, esaminiamo che conseguenze se ne deducano.

Assunto il raggio $AF = g$ (Fig. 15.), e tirato l'arco di circolo KFI , si verificherà l'analogia $AC, y: CE, dx:: AF, g: FG, dz$; dunque $gdx = ydz$, e fatta nella formula l'opportuna sostituzione $\frac{dz}{g}$

$$= \frac{dy}{y\sqrt{c^2 y^2 - g^2}}. \text{ Pongo } cy = s; \text{ dunque } \frac{dy}{y\sqrt{c^2 y^2 - g^2}} = \frac{dz}{g} = \frac{ds}{s\sqrt{ss - gg}}.$$

e moltiplicando i membri dell'equazione per g^2 , $gdx = \frac{g^2 ds}{s\sqrt{ss - gg}}$: ma

condotta la retta AK asse delle curve cercate, e preso l'arco $KG = x$, e la sua differenza $GF = dz$, la sommatoria di gdx , vale a dire gx , farà un arco di cerchio, per esempio KH in proporzione all'arco KG , come $g: a$. Di più è noto essere l'integrale $\int \frac{g^2 ds}{s\sqrt{ss - gg}}$ un arco pure di cir-

colo, il cui raggio è g , e la secante s , cioè a dire in forza dell'equazione premessa l'arco KH sopra determinato; dunque dato l'arco KH , farà data la sua secante $AL = s = cy$, e la secante AL farà all'ordinata AC delle curve cercate in proporzione costante: il che, ec.

COROLLARIO I.

L'arco KH si è supposto minore di KG , perchè nella formula generale alla quantità fdy s'è premesso il segno negativo, e le forze sono state considerate come centripete: ma cambiando sistema, e supponendole centri-

centrifughe, la quantità b^2 si trasforma in negativa, ed allora g^2 è necessariamente maggiore dell'unità. Sarà pertanto d'uopo il prendere l'arco KG in data proporzione di minore ingualità all'arco KI, e condotta la secante AN, determinare l'applicata AC, che sia sempre ad AN in ragione costante.

COROLLARIO I.

Variata la relazione di GK ad HK, ovvero IK, si muta la natura, ed il grado della curva BCD. Se le due quantità a e g serbano fra loro una ragione, o irrazionale, o trascendente, è fuor di dubbio, che sono meccaniche le curve descritte; ed all'incontro algebratiche, se la proporzione è razionale, e come di numero a numero. Ora si sa, che a misura della divisione, e moltiplicazione degli archi si muta l'equazione locale, ed il grado della curva. Così saranno infinite le curve geometriche, che soddisfanno al quisto.

COSTRUZIONE.

Sia GAK (Fig. 16.) asse delle curve, A il polo. Prendo l'arbitraria costante AB, e tiro ad AB la normale BD. Descritto col raggio variabile AK l'arco di cerchio KDFL, pongo l'arco KD intercetto fra le due perpendicolari BD, BK all'arco maggiore KF per le forze centripete, o all'arco minore KC per le centrifughe in ragione costante: i punti F, C saranno alle curve cercate.

Mi persuado essere diversa dalla mia l'analisi del Sig. Bernulli; mentre somministra bensì le curve stesse, ma in posizione differente, e riferite ad un altro asse. Per vedere l'accordo di queste due costruzioni, che a prima vista non apparisce, facciassi come l'arco KD all'arco KF; così il quadrante KE all'arco KL, vale a dire in proporzione costante; e tirato dal polo A il nuovo asse AL, sopra di cui s'alzi la perpendicolare AH=AB, la linea HS condotta parallela ad AL taglierà l'arco IL=ED. Perchè dunque KE:KL::KD:KF, o pure KE:KD::KL:KF, sarà altresì ED:DK::LF:FK, ovvero ED=IL:LF::KD:KF; sarà perciò LI ad LF in ragione costante, come appunto richiede la costruzione Bernulliana.

Resto, che si prenda per mano il quarto caso, e supponghasi assertivo il quadrato b^2 , e nello stesso tempo maggiore dell'unità, ovvero negativa la costante aggiunta c^2 : ma perchè da quel che s'è detto riesca facile il determinare le curve col mezzo de' logaritmi, e della rettificazione degli archi circolari, non ne parleremo di vantaggio.

Per chiudere la presente Dissertazione con qualche particolare, che abbia aria di novità, giacchè il Sig. Niccolò Bernulli ha fatto menzione nelle sue Note delle forze centrali nel pieno, credo non mi farà disdetto l'estendere le speculazioni del Sig. suo Zio, come questi ha ampliate le Newtoniane, pubblicando con l'occasione, che favorevole mi si presenta,

ta, alcune mie riflessioni in tal proposito, comunicate fin l'anno 1712. a' Signori Ermanno e Zendrini. E se bene io le ho dedotte da certe formule di mia maniera, tuttavia per non fare il già fatto, e per isfuggire il tedio d'una prolissa dimostrazione, adotterò quelle del Sig. Giovanni, che non saranno sospette.

Osserva egli acutamente al suo solito, che posta la densità in ragione reciproca della distanza, e la resistenza del mezzo in duplicata della velocità, non viene descritta dal mobile la spirale logaritmica nell'unico caso, in cui sia la forza centrale in proporzione inversa del quadrato della distanza, ma di più quando la forza è come qualsivoglia potestà della distanza medesima o diretta, o reciproca. Non è la sola spirale dotata d'una sì bella proprietà; altre curve infinite di numero, e quello ch'è più, di natura algebratiche vantano un simile privilegio, purchè si vada opportunamente alterando la legge della resistenza. Eccone la dimostrazione.

Sia la curva BCD (fig. 17.) trascorsa dal mobile nel pieno con una data ipotesi di forza, e di resistenza. AC è l'ordinata $=y$, CE un arco minimo descritto intorno il centro A $=dx$, CD l'elemento della curva $=ds$, CM il raggio osculatore, CL il co-raggio, o come io lo chiamo, la sottoosculatrice $=z$. Dal polo A si tiri la retta AN normale a CM, e s'appelli t l'intercetta CN.

Le formule del Sig. Bernulli, che perfettamente s'accordano con quelle del Sig. Ermanno sono le seguenti. $uu = fx$, $\pm Rds = udu = \pm fdy$, nelle quali R significa la resistenza, u la velocità, f la forza centrale data per una funzione arbitraria dell'applicata.

Venga proposto di determinare tutte le curve infinite, in cui le due flussioni udu , fdy si rimirino con una proporzione costante.

Conciosiachè $udu:fdy::a:2b$, dunque $2budu = fdy$, ed integrando

$$2uuu = \pm g \pm \int fdy = \pm g \pm p, \text{ posta } p = \int fdy, \text{ che sarà data in conseguenza per } y. \text{ Di più essendo } u^2 = fx, \text{ sarà altresì } \pm g \pm p = bfx, \text{ o pure } \frac{dy}{z} = \frac{b f dy}{2} = \frac{b dp}{2}: \text{ ma per le cose dimostrate}$$

$$\text{nella mia soluzione del problema de' raggi osculatori } \frac{dy}{z} = \frac{dt}{t} = \frac{b dp}{2g \pm p};$$

dunque sommando, si scoprirà t essere data per p , ovvero per y , e si farà facilmente transito alla costruzione delle curve desiderate.

COROLLARIO

Che se fosse $-fdy = udu$, allora, come ha notato il Signor Bernulli, restando il solo termine $Rds = 0$, le curve si descriverebbero nel vuoto; onde la nostra maniera di procedere ci suggerisce una

nuova formula generale con le variabili separate per le forze centrali in un mezzo non resistente.

Molte importanti riflessioni si potrebbero dedurre da' premessi principj, che io riferbo a miglior congiuntura. Presentemente limitando la formula col supporre $f = by^m$, ed ommessa l'addizione della costante g nel prendere l'integrale, la premessa analisi ci farà scoprire, essere proprietà comune delle nostre curve l'avere la sottofoculatrice all'ordinata in proporzione costante. In fatti essendo $udu: by^m dy:: a: 2b$, cioè a dire $2budu = by^m dy$, farà integrando $bu^2 = \frac{by^{m+1}}{m+1} = bfx = bhy^m x$, vale a dire

$$\frac{y}{m+1} = bx.$$

Giacchè dunque $y = cx$, abbiamo $\frac{dt}{t} = \frac{dy}{y} = \frac{cdy}{y}$, ed integrando

$t = by^c$; la quantità b è una costante arbitraria. Per iscoprire l'equazione generale delle curve abbracciate dalla formula, osservo verificarsi il seguente analogismo CE, $dx:: CD, ds:: CN^c, CA$, y dunque $yax = tds = by^c ds$, ed in conseguenza $dx = \frac{by^{c-1} dy}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}}$.

Preso AK asse delle curve, e dalla distanza AF = a descritto l'arco IFK, avremo AC, $y:: CE, dx:: AF, a:: FG, du$, e perciò $ydu = dx$, e $du = \frac{by^{c-2} dy}{\sqrt{aa-b^2y^{2c-2}}}$.

Sia $by^{c-1} = q$, e fatta la dovuta sostituzione, $c-1. du = \frac{dq}{\sqrt{aa-qq}}$.

COSTRUZIONE.

Facciasi come $c-1$ ad a così l'arco FK all'arco HK, ovvero IK, e tirate le normali HP, IQ, farà data la relazione dei seni AP, AQ all'ordinata AC in virtù dell'equazione $by^{c-1} = q$.

Variato l'esponente c si cambia la natura della curva, e dall'espressione generale oltre ad infinite curve meccaniche, vengono comprese infinite geometriche, mentre la ragione di c ad a sia razionale; fra le quali molte curve note, come la parabola riferita al foco, l'iperbola al centro, il circolo ad un punto preso nella circonferenza, e la più semplice fra le epicycloidi al principio della rotazione. Dee eccettuarli il caso di $c = a$, che dà la spirale logaritmica.

Ora

Ora nell'ipotesi assunta la formula Bernulliana $\pm R ds \pm udu = \pm fdy$ si trasforma nella seguente $\pm R ds = \pm Ay^m dy$, ed essendo nelle nostre curve l'elemento $ds = \frac{dy}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}}$, avremo

$$\pm \frac{R}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm Ay^m. \text{ Sia la resistenza in ragione composta della}$$

densità del mezzo, e di qualsivoglia potenza della velocità, cioè $R = Dv^n$; ma essendo $v^2 = By^{m+1}$, farà altresì $v^n = Cy \frac{mn+n+1}{2}$ e final-

$$\text{mente } \pm \frac{D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm Gy - \frac{mn+n+1}{2} 2m. \text{ Le lettere A, B,}$$

C, G dinotano quantità costanti surrogate in luogo d'altre più composte.

Primieramente sia, giusta la comune ipotesi, la resistenza in ragione duplicata della velocità, cioè $n = 2$ e l'esponente $-\frac{mn+n+1}{2} 2m = -1$.

Lo sparire che fa in quest'incontro l'esponente m indice della forza centrale dinota, che in sua vece si può sostituire qualsivoglia numero, e più generalmente qualsivoglia quantità determinata: da che si raccoglie essere proprietà comune delle nostre curve, che posta la densità $D = \frac{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}}{y}$,

e la resistenza come il quadrato della velocità, verà sempre dal mobile descritta una medesima curva, quantunque si muti la legge della forza centrale, e si prenda o come costante, o ad arbitrio come qualsivoglia dignità della distanza. Che se fosse $c = 1$, di modo che la quantità $\sqrt{aa-bby^{2c-2}}$ sia costante, diventando l'esponente $2c-2=0$, allora la curva sarebbe una logaritmica spirale, che cade sotto la nostra universal espressione, e la densità reciprocamente come la distanza.

Cosa maravigliosa si è, che nel voto, mutata la legge della forza, si cambia l'indole della curva, ed ogni supposizione richiede una linea diversa; dove all'opposto nel pieno una sola curva soddisfa a tutte le supposizioni.

In secondo luogo sia la resistenza come la velocità, cioè $n=1$; dunque $\pm \frac{D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm Gy - \frac{1+m}{2}$. Sia $m = 1$, in maniera che

$y^{\frac{1}{2}}$ sia costante, ed in tutte le nostre curve la densità sarà come

$\sqrt{aa-bby^{2c-2}}$, e determinando la formula ad esprimere la logaritmica spiale, la densità diventa costante; e se nella curva stessa fosse $m = -1$, la densità sarebbe come y^{-1} , cioè come la forza centrale in ragione reciproca della distanza; ma in questo caso sarebbe costante la velocità, la qual proprietà conviene a tutte le nostre curve; imperocchè essendo $u^2 = fz$, e $z = \frac{y}{c}$, e per la supposizione $f = by^{-1}$, sarà parimente $u^2 = \frac{b}{c}$.

La densità poi è come $\sqrt{aa-bby^{2c-2}}$ non solo nel caso di sopra espresso,

ma ripetendo la formula generale $\frac{\pm D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm G y^{\frac{-nm-n+m}{2}}$

ogni qual volta sia costante il secondo membro dell'equazione; e sia $-nm - n + m = 0$, il che si verificherà, quando sia $n = \frac{2m}{m+1}$; onde se m

$= -2$, come nella comune ipotesi, avremo $n = 4$, e così discorrendo.

Finalmente sia costante la forza centrale, ed $m = 0$, troveremo

$\frac{\pm D}{\sqrt{aa-bby^{2c-2}}} = \pm G y^{\frac{-n}{2}}$, e nella logaritmica la densità com' $y^{\frac{-n}{2}}$.

Non mi fermerò a determinare i casi dell'ascendimento, e della discesa, come nè meno gl'incontri, che cangiano le forze di centripete in centrifughe, essendo stati quelli punti chiaramente spiegati dal Sig. Bernoulli, che non si può desiderar di vantaggio. Basterà, che lasciate l'altre conseguenze, dia fine col fissare i canoni delle forze centrali per le nostre curve in un mezzo non resistente. Sarà sempre $\pm f dy = \frac{dt}{t^3}$; ma by^e

$= t$; dunque $\pm f dy = \frac{edy}{bby^{2c+1}}$, cioè $\pm f = \frac{e}{bby^{2c+1}}$.

Non ad altro oggetto ho pubblicate queste mie meditazioni, che starebbero meglio sopprese, se non per far vedere a' Matematici Oltramontani, ed in ispecie al Sig. Niccolò Bernoulli, che anche in Italia si spende da' Geometri qualche ora d'ozio in materie così sublimi, senza che egli si prendesse la briga di risvegliarli con un problema, e che gl'Italiani pensano quanto gli altri, ma non anno tanto prurito di farli Autori.

Ric

Risposta del Sig. Niccolò Bernoulli Nipote del Sig. Giovanni a quelle cose, che il Sig. Conte Jacopo Riccato inserì nel Tomo XXI. del Giornale de' Letterati d'Italia all'Articolo VIII.

Sarebbe stato da desiderare, che il Sig. Conte Riccato non avesse mai eccitata questa contesa inutile, che è fra lui, e me, o che si fosse acchetato alle risposte, che diedi nelle mie annotazioni alle obbiezioni, colle quali ei senza cagione attaccò mio Zio, o almeno avesse risposto alle mie

Si è stimato di far cosa grata al Lettore ristampando le Annotazioni del Sig. Niccolò Bernoulli allo Schediasma III., come altresì la presente Risposta contenuta nel Tomo XXIV, Articolo IV. del Giornale de' Letterati d'Italia; acciocchè non gli restasse che desiderare per intendere compiutamente la controversia fra l'Autore, ed i Signori Giovanni, e Niccolò Bernoulli. Alla lettera del Sig. Jacopo Ermanno al Sig. Giovanni Bernoulli inserita dal Sig. Niccolò nella sua Risposta si può contrapporre la seguente dello stesso Sig. Ermanno al Sig. Bernardino Zendrini, che la comunicò al nostro Autore con una sua in data de' 29. Giugno 1715. Ecco il paragrafo della lettera. „ Ho veduto la bella Risposta del Dottissimo „ Sig. Conte Riccato in mio favore alle opposizioni del Sig. Gio: Bernoulli alla soluzione del Problema inverso delle forze centrali nel voto. „ Mi riconosco tanto più obbligato alla bontà di questo Dottissimo Gentiluomo, quanto maggiore è l'affetto, che ha voluto palesarmi con „ espressioni non solo a me onorevolissime, ma nè meno da me meritate, „ e con cattar briga col Sig. Bernoulli poco usato a soffrire le altrui opposizioni. Prego V. S. di far conoscere al detto Sig. Conte, riverendolo „ in mio nome, questi miei sinceri sentimenti di gratitudine, sin a tanto „ che io abbia il modo di farlo da mia posta con le lettere, non bastandomi „ il tempo di farlo. Il Sig. Conte ha benissimo compreso il motivo dell'esame da lui stimato così severo della mia soluzione sospesa. Non ho „ risposto alla critica del Sig. Bernoulli, perchè non l'ho stimato necessario, „ conoscendo io medesimamente il motivo del Sig. Bernoulli, e potendo soffrir „ benissimo, che un Uomo tale dica la verità, preferendo la sua soluzione „ alla mia. Come egli è mio amico, non ho stimato opportuno, nè ben fatto „ ingaggiarla con esso lui per un motivo di sì poca rilevanza. Ma come il „ Sig. Conte ha voluto supplire alle mie veci, non posso non ringraziarlo di vero cuore. La risposta parmi sode, e dottissima, poichè è ripiena „ di riflessioni degne di lui. Egli ha ottimamente indovinato l'arbitrio, „ con cui sono arrivato all'integrazioni sospese, col porre come fa $\frac{x}{y}$

$= p$, e poi $\frac{y}{x} = q$, o supposizioni simili a queste.

H 2

mie annotazioni con quelle modestia, ch'egli loda in noi (di che gli rendiamo moltissime grazie) nè avesse tante volte con replicate parole accusato mio Zio d'ignoranza, come avesse disperato dell'integrazione d'una certa formula, che facilmente avrebbe potuto integrare, se avesse saputo servirsi de' propri sussidj; nè mi avesse apposto per lo Problema, che proposi a' Geometri d'Italia, ch'io aveva prurito di farmi Autore. Egli avrebbe potuto fare tutte queste cose, senza che niente perdesse della sua riputazione il nostro comune amico Sig. Ermanno, il quale, sono fermamente persuaso, che sia per disapprovare questa contesa; e facendo ciò, non ci avrebbe data occasione alcuna di sospettare, che abbia mossa la contesa a mio Zio per puro fine di contraddire. Imperciocchè che cosa importano a lui quelle cose, che gli amici con lettere familiari si comunicano, o delle quali amichevolmente si avviano? Certamente s'egli non avesse avuto prurito di farsi Autore delle parole, forse meno diligentemente proferite, come spesse volte accade nelle lettere familiari, mai non avrebbe cercata occasione di contendere. Niega mio Zio aver detto, che la formula del Sig. Ermanno è disperata; il Sig. Conte Riccato afferma. E quale utilità ricaverà il Pubblico da questa contestazione? Spiega mio Zio le sue parole in quel modo, ch'io notai nell'Articolo XIII. del Tomo XX. del Giornale a carte 319. (a), cioè essere il loro senso, che cotale formule atterriscono l'Analista, il quale sospetta esserci sotto maggiore difficoltà, di quella, che veramente v'è, e che però potrebbe sospettare alcuno, che il Sig. Ermanno avesse dedotta la sua integrazione da qualche precedente notizia, che esso ha avuta dalla curva ricercata; queste parole contengono conghietture, e non una seria affermazione. Non disse mio Zio, la vostra soluzione è fatta a disegno, ma sembra fatta a disegno; le quali sole parole mostrano, che mio Zio non ha assolutamente dichiarata impossibile la formula Ermanniana. Conceduto dunque al Sig. Ermanno, come concedo facilmente, che abbia dedotta la sua integrazione da qualche metodo a priori, solamente ne seguirebbe, che mio Zio non avrebbe bene conghietturato, ma non già, che esso si fosse lasciato ingannare dalla prima apparenza, di modo che credesse, che qualche formula integrabile non si potesse integrare. A torto il Signor Conte Riccato a carte 307. vuole renderci ridicoli, perchè dicemmo, che il disperato non significa impossibile: ognuno che leggerà le mie parole a carte 319. (b) ritroverà essere ciò falsissimo: imperciocchè ivi dissi tutto il contrario con parole chiarissime, e spiegai il disperato per l'impossibile. Le mie parole sono queste: *Non disse essere la cosa disperata, cioè impossibile, poichè la conosceva fatta, ed ei pure la fece*, ec. Quindi appare quanta gloria abbia riportata il Sig. Conte Riccato, cercando qualche cosa da contraddire, e quanto la sua risposta sia più dottrinale, che contenziosa. Ciò sarà poi anche più evidente, se esamineremo, che cosa risponda il Sig. Conte alla seconda obiezione fatta al Sig. Ermanno. Incolpa d'errore mio Zio, e me; quello,

(a) In questo Tomo pag. 30.

(b) Nella presente edizione pag. 30.

perchè oppose al Sig. Ermanno, che abbia trascurato d'aggiungere all'uno, e all'altro membro dell'equazione la quantità costante nella prima integrazione; me, perchè opposi a lui, che aveva seguitato le pedate del Sig. Ermanno, ed aveva parimente tralasciata la quantità costante da aggiungere nel prendere gl'integrali. Comanda, che noi leggiamo quelle cose, che ha scritte a carte 207. (c), e crede d'aver prevenuta l'opposizione in tale maniera, che ammira il nostro ardimento, perchè un'altra volta abbiamo toccato questo punto. Ho lette quelle cose, che sono scritte a carte 207., ma non vi ho ritrovati spaventi, che mi disturbino dal non fare una simile obiezione al Sig. Conte Riccato. Confesso, che questa obiezione niente leva alla soluzione del Sig. Ermanno, la quale lo stesso mio Zio lodò come buona, e degna della sua penetrazione; ma ne siegue dalla dimenticanza di quest'aggiunta, che il Sig. Ermanno avanti di aggiungere questa quantità costante, non avrebbe dovuto affermare per cosa certa (come fece nel principio della sua lettera, che è inserita ne commentarj di Parigi dell'anno 1710.) di avere ritrovato, che le sole sezioni del cono soddisfarebbono al Problema, il che solamente gli era stato proposto da ricercare da mio Zio. Imperciocchè quasi aggiunta avrebbe potuto mutare la natura della curva, e se bene in questo caso non muta le sezioni coniche in altre curve di più alto grado, muta però la specie delle sezioni coniche. Per esempio se $b=c$, la curva quistita sarà un'iperbola, e non una parabola, come asserì il Sig. Ermanno, se quest'aggiunta non sarà nulla. E s'egli Sig. Ermanno, conobbe nella sua risposta a mio Zio scritta a 6. di Dicembre 1710., che quest'aggiunta avrebbe potuto mutare la natura della curva, e che la sua soluzione potrebbe parer a qualcheduno adattata al quistito per consiglio; poichè egli così favella: *Gratum mihi fecisti, quod cogitata tua super analysim meam inversi problematis virium centralium in speciali hypothesi harum virium quadratis distantiarum reciproce proportionalium aperire voluisti: videtur tibi solutio mea ex consilio ad quæsitum accomodata, quod quidem non miror, cum tibi solutionis fundamentum nondum expresserim. Sed scias nunc velim me ex suppositione $ax=ty$ didicisse, quod formula mea, ut feci, disponenda, & quod ex iis præcisè quantitativis, quas mihi recenseres, integralia sumenda sint. Sed quid pluribus? entibi totum processum calculi. Aequatio differentialis secundi gradus resolvenda hæc erat.*

$$- \frac{addx\sqrt{xx+yy}}{x} = ydx - xdy \cdot \frac{1}{xx+yy}, \text{ quæ factis substitutionibus ope } ax=ty, \text{ mutatur in } - \frac{addx\sqrt{aa+tt}}{t} = ydt^2, \text{ \& } ydx -$$

$$x dy = y y dt = \text{const. unde } -addx = \frac{yy dt^2}{aa+tt \sqrt{aa+tt}} = a \cdot \frac{yy dt}{a} \cdot t dt$$

(c) In questo tomo pag. 48.

$\frac{tdt}{aa+tt\sqrt{aa+tt}}$; unde cum $\frac{yydt}{a}$ constans sit, liquet sponte sua absque

ulla accomodatione ad quæstum, æquationem integrabilem esse, eritque

$$-dx = \frac{yydt}{a} = \frac{1}{\sqrt{aa+tt}}$$

Hic libenter fateor me festinanter nimis quantitatem constantem integrali ipsius $-ddx$ adungere omisisse, idque paulo post observans, quam meas ad te dedissem, metuebam fore, ut aliæ curvæ, quam sectiones conicæ, exirent, sed metus omnis evanuit, ubi calculus profectus eram, ec. =

Siccome dunque non si può negare, che mio Zio abbia giustamente opposto al Sig. Ermanno, che la sua soluzione, benchè buona, sia però difettosa in questa parte, e che esso non sia stato certo, senza questa aggiunta fatta, che le sole sezioni coniche soddisfanno al quistito; così io ho meritamente accusato il Sig. Conte Riccato, perchè ha trascurato nelle sue prime integrazioni d'aggiungere a ciascun membro la quantità costante. Nè li giova la scusa, colla quale dice di non aver voluto sciorre il Problema, ma solamente mostrare il metodo dell'integrazione. Imperciocchè come può egli esser sicuro dell'esito del suo metodo, se prima non fa quelle cose, che ricerca il calcolo? Non può dubitare alcuno, che per l'aggiunta della quantità costante forse s'impedisce la seconda integrazione? Ma benchè ciò non accada, però avanti di aver fatta l'aggiunta non siamo certi, che la seconda integrazione non venga impedita, perlochè senza paralogismo in questi, e simili casi non si può tralasciar di fare quest'aggiunta.

In quanto all'altra contesa, che mosse il Sig. Conte Riccato dell'eleganza della soluzione Ermanniana, e Bernulliana, e quale di queste due soluzioni debba preferirsi; di ciò a noi non appartiene disputare, poichè da tale disputa la repubblica letteraria non ricaverà alcuna utilità. Ne giudichino i Geometri. Egli è però necessario, che io cancelli l'ignominia, che il Sig. Conte Riccato volle imprimere alla soluzione Bernulliana. Veramente è una cosa ridicola, che esso nieghi l'eleganza a questa soluzione, perchè si serve della comparazione degli archi circolari. Egli vuole, che questo sia un picciolo errore, ma però simile; e anzi maggiore di quello, che commetterebbe quegli, che volesse costruire un problema piano co' luoghi solidi, o un problema lineare colle curve di un grado più alto, le quali curve essendo però che non cessano d'essere algebræ, ne siegue, che sia un'errore molto più grande trattare un caso algebræ colle curve meccaniche. Pare, che il Sig. Conte adoperi più appostatamente il sofisma. Gli Antichi incolpavano quello, che costruiva il problema piano co' luoghi solidi, o un problema piano colle curve d'un grado più alto; e il Cartesio condanna quello, che costruiva colle curve meccaniche un problema costruibile colle curve algebræ; con-

dan-

danna pure il Cartesio quello, che per la soluzione del suo problema dimanda, che queste sorte di curve possano esser descritte. Ha dunque bisogno mio Zio della medesima dimanda per la sua soluzione? No: le quantità trascendenti non entrano nella soluzione del problema, ma solamente nel calcolo; gli archi circolari possono esser comparati, senza che sia bisogno di descrivere qualche curva meccanica. In oltre se per la costruzione del Problema avesse bisogno della descrizione di qualche curva meccanica, non però subito seguirebbe, che una tale soluzione dovesse posporre ad un'altra, che fosse fatta colle curve algebræ. Imperciocchè è noto da poco in quà, che molte curve meccaniche più facilmente si costruiscono, che molte curve algebræ, e che i Geometri celeberrimi del giorno d'oggi anno meritamente ripreso lo stesso Cartesio, perchè escluse dalla Geometria cotali curve meccaniche, e preferiscono la soluzione, la quale si fa più facilmente, e più elegantemente con una curva meccanica facile da costruire, a quella che non si farebbe, se non con fatica con una curva algebrica. S'inganna dunque molto il Signor Conte, quando pensa, che sia sempre meglio schifare nel suo calcolo le quantità trascendenti, che investigare il metodo di comparare fra di loro queste quantità; e anche quando crede, che meriti maggior lode quegli, che tratta qualche quistione d'analisi volgare colle quantità reali, e razionali, che colui, il quale introduce le quantità irrazionali ed immaginarie, benchè di poi mostrasse il metodo di ridurre cotali quantità alle ordinarie. Stupisco, che il Sig. Conte tanto abborrisca questa sorta di quantità, che non voglia ammetterle nel calcolo, se non forzato da una somma necessità. Certamente il buon Analista niente si curerà, che le quantità entranti nel calcolo sieno reali, o immaginarie, razionali, o irrazionali, algebræ, o trascendenti, anzi preferirà le ultime alle prime, se vedrà, che il problema possa sciorsi più facilmente, più elegantemente, o più brevemente con queste, che con quelle. Potrei ciò dimostrare con molti esempi, ma ne addurrò un solo. La soluzione generale del Problema: data la tangente di qualche arco, ritrovar le tangenti degli archi multipli, e summultipli, la quale diede mio Zio negli Atti di Lipsia l'anno 1714. a carte 274, e nella quale introdusse i logatitmi immaginari, non dee forse preferirsi in quanto all'eleganza a tutte l'altre, che finora abbiamo vedute? Giudichino di questo i periti Geometri. Certamente non dubito, che sieno per essere del mio sentimento, e che lo stesso Sig. Ermanno farà per condannare il Sig. Conte Riccato, perchè abbia incautamente accusato mio Zio d'un error grande in Geometria, per avere adoperato nella sua soluzione la comparazione di due archi circolari. Anzi sono persuaso, che il Sig. Ermanno per questa sola ragione non posporrà la soluzione Bernulliana (la quale grandemente lodò nella sua lettera sopracitata con queste parole: = Geminam tuam ejusdem problematis solvendi methodum magna cum voluptate perlegi, quarum prior perelegans mihi visa est, & Nevvtoniana multo simplicior; id tamen non efficit, ut alteram, quæ per differentialia secundum da procedit, minus æstimem, cum satis egregium artificium separanda-

rum

rum differentialium, eisdemque postea integrandi contineat, adeo ut tibi me obstrictum etiam, hoc nomine agnoscam, quod eam mecum communicare dignatus es, alla sua; ma nè anche per l'altra ragione, che adduce il Sig. Conte: a carte 327. (d); cioè perchè la sua soluzione ha un non so che di singolare, cioè (come spiega esso Sig. Conte a carte 334. lin. 2.) perchè versò sopra un caso singolare, per distinguere il quale dagli altri più misteriosi (come dice a carte 207.) (e) ci fu bisogno d'una singolare industria, essendo questo caso l'unico, che possa maneggiarsi coll'equazioni analiticamente integrabili. Non abbisognò alcuna industria per distinguere dagli altri questo caso, come propostogli da mio Zio; anzi questo caso non è l'unico, che possa maneggiarsi con equazioni analiticamente integrabili, come notai a carte 323. (f). Ma che cosa rispose a queste due cose il Sig. Conte Riccato? Alla prima niente ha potuto rispondere. Alla seconda risponde, che noi abbiamo dissimulato il vero senso delle sue parole, e che abbiamo tralasciate, o troncate alcune sue asserzioni; il che apparirà poi esser falso. Dappoi francamente, e senza ragione ci dileggia il Sig. Conte dicendo a carte 331. (g), che è cosa affai notevole, che scandagliata fino al fondo la nostra Geometria, non abbiamo potuto ritrovare altro, che un solo caso oltre il già considerato, nel quale possiamo procedere con quantità puramente algebriche; onde conchiude, che la detta ipotesi rimane privilegiata, benchè forse (se fosse vero ciò, che abbiain detto) cesserebbe d'esser singolare. Io veramente non aspettava dalla modestia del Sig. Conte Riccato una tale obbiezione: altramente avrei portati molti casi dove può farsi la medesima cosa. Nel resto chi gli ha detto, che per ritrovare il caso predetto, nel quale le forze si suppongono proporzionali alle distanze, e che per ritrovare questo caso unico, abbiamo consumata tutta la nostra Geometria? Addotto un caso, non si escludono gli altri. Per dimostrare, che l'ipotesi delle forze reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze non sia la sola, nella quale si può procedere con una integrazione analitica senza quantità trascendenti, non bastava forse ancora aver portato un caso, nel quale possa farsi il medesimo, e anzi quel tal caso, che ci offerì il Sig. Conte, e che egli ebbe per disperato? Indarno risponde, che e' non ebbe per tale questo caso, ma che facilmente avrebbe potuta estendere la formula Ermanniana ad altri casi più composti, se avesse giudicato ciò opportuno. Perchè dunque tentò questo caso, se non giudicò opportuno il perfezionarlo? Le sue parole sono sì chiare, che non può dolerli, che noi abbiamo loro affisso un falso senso. A carte 207. (h) favellando del caso del Sig. Ermanno adopera queste parole: *Ha però la buona sorte d'esser*

(d) In questo Tomo pag. 49.

(e) Qui il Sig. Bernoulli cita un luogo della prima risposta del C. S., che in questa edizione si legge a carte 28.

(f) Nella presente edizione pag. 32. 34.

(g) In questo Tomo Pag. 51.

(h) Citai un passo della prima risposta, che si legge in questo Tomo alla pag. 28.

d'esser l'unico, che possa maneggiarsi con equazioni analiticamente integrabili. E a carte 200. (i) parlando del caso presente: *Io posso dire con verità, che forse non si troverà strada per conseguire l'intento, senza che c'entrino, fatte le separazioni, quantità trascendenti.* Queste parole, per tralasciarne altre simili, con sufficiente chiarezza dimostrano, che egli ha creduto esserci il solo caso del Sig. Ermanno, il quale possa maneggiarsi con una equazione puramente analitica. Forse vuol dire, che il senso delle sue parole sia questo; cioè che certamente anche in altri casi la formula Ermanniana si può analiticamente integrare, ma non già senza una previa riduzione, o preparazione; che nel solo caso sciolto dal Sig. Ermanno questa formula conservata nella sua purità, nè mutata con alcune preparazioni, o riduzioni è analiticamente integrabile, e che in tutti gli altri casi si richiede un nuovo artificio generalmente incognito; imperciocchè così intendo quelle cose, che sono scritte a carte 333. (k). Ma il Sig. Conte Riccato non riceve alcun suffragio da questo suo rifugio. Per integrare l'equazione Ermanniana $\frac{ddx \sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{1}{xx+yy}$, ovvero (a

cagione di $ydx - xdy =$ ad una quantità costante) $= \frac{ydx - xdy}{xx+yy}^2$ non si

serve forse il Signor Conte Riccato di varie sostituzioni, e moltiplicazioni? Non mutò forse anche il Sig. Ermanno la sua equazione differenzio-differenziale colle sostituzioni, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$, e dividendo per xx ciascun membro dell'equazione

risultante da questa differenzio-differenziale? Abbiamo avuto bisogno di maggior artificio per risolvere il caso delle forze direttamente proporzionali alle distanze, cioè per integrare l'equazione $\frac{ddx \sqrt{xx+yy}}{x} =$

$\sqrt{xx+yy}$, ovvero $\frac{ddx}{x} = 1$? forse la moltiplicazione per $x dx$ confer-

va meno nella sua purità l'equazione, che la moltiplicazione per $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$? E' forse questa riduzione così insolita, ed incognita? E non

cade subito sotto gli occhj d'ognuno, che nell'equazione $\frac{ddx}{x} = 1$.

(i) Luogo della prima risposta in questo Tomo pag. 25.

(k) Nella presente edizione pag. 51.

(tralascio qui la quantità costante $\frac{ydx - xdy}{a^2b}$, perchè non v'ha bisogno

di conservare l'omogeneità, prima di aver fatta l'integrazione) l'altro membro non si può integrare, se non si moltiplica per qualche differenziale, e che non possa moltiplicarsi per altra quantità differenziale, che per $x dx$, acciocchè l'uno, e l'altro membro divenga integrabile. Ma egli è chiaro, che il Signor Conte Riccati non ha intese queste sorte di riduzioni, il che sarebbe cosa ridicola, poichè la maggior parte dell'integrazioni non si fa se non per cotali moltiplicazioni, e divisioni; ma si ricava dalle carte 206., e 207. (l), che il Sig. Conte ha inteso quelle faticose riduzioni, delle quali v'ha bisogno per levare la maschera delle espressioni trascendenti alle curve algebriche, e che il suo sentimento fu, che in tutte l'altre ipotesi, oltre quella che pone le forze in ragione reciproca duplicata delle distanze, le curve algebriche appajono sotto tale maschera, e perciò abbiano bisogno d'una tale faticosa riduzione. Essendosi dunque dimostrato, che la curva dell'ipotesi $f = z$ non comparisce sotto una tale maschera, ed il medesimo si potrebbe dimostrare di molt'altre ipotesi, se fosse necessario; ne siegue, che il Sig. Conte abbia malamente attribuito questo privilegio alla sola ipotesi predetta $f = z$. Questi sono stati i capi principali della nostra disputa. Ci farebbono ancora molte cose da avvisare, le quali trapasso sotto silenzio, per non dar occasione al Sig. Conte di prolungar la contesa, e di scordarsi della sua promessa di non voler più rispondere; però prima di finire questa mia risposta, che parimente prometto esser l'ultima, toccherò solamente alcune espressioni, colle quali esso Sig. Conte volle pungere mio Zio, e me. A carte 322. (m) dice, ch'io non ho negato esserci verun metodo certo di determinare le quantità, che debbono esser assunte per costanti, acciocchè nella seconda formula di mio Zio $2fx^2dy^2 = dy^2 + dx^2dy - xdydx + xdx dy$ svaniscano le due membra della seconda parte; ma che io ho solamente ritorto il detto, e che però l'ho ammesso tacitamente. Rispondo, che noi abbiamo un metodo fermo per far ciò in questo caso, ed in altri simili, dove è stato differenziato fino a secondi differenziali, e dove nella seconda differenziazione non è stata presa alcuna differenziale per costante, e che non ci sia bisogno (come e' parla a carte 323.) (n) di mendicare quella quantità, che dee averfi per costante. Ma egli non è necessario, ch'io esponga questo metodo; basta che abbia potuto giustamente ritorcere il detto del Sig. Conte Riccati; essendo vero, che egli non dà alcuna regola certa, e fissa, qual sostituzione debba farsi convenientemente, acciocchè nell'equazione egualmente difficili si separino d'insieme le indeterminate. Nè può sug-

gi:

(l) Passi della prima Risposta in questo Tomo pag.28.

(m) Nella presente edizione pag.47.

(n) Nella presente edizione pag.48.

gire questo ritorcimento con questa protesta, che non promette d'integrare tutto quello, che è integrabile, ed estendere il suo metodo a tutte l'equazioni possibili, e che basti, che l'abbia esteso a qualche caso, che è stato considerato come disperato. La prima cosa mai non gli è stata dimandata da alcuno, e la seconda non basta per rimuovere il ritorcimento, e perchè egli è falso, che quel caso sia stato considerato per disperato, e perchè nel medesimo modo avrei potuto rispondere, che basta che mio Zio abbia applicato al caso presente il suo artificio d'integrare questa sorta d'equazioni differenzio-differenziali. Dice in vero a carte 323., (o), che la preparazione, della quale si serve, gli somministra precisamente quella quantità, che dee sostituirsi in luogo dell'altra; ma questa asserzione è troppo precaria, tali preparazioni succedono in pochissimi casi, e quando succedono, non somministrano altre sostituzioni, che quelle, le quali sono state già molto tempo conosciute, e primieramente adoperate da miei Zii Jacopo, e Giovanni. Facilmente qui mi crederà quegli, che avrà lette quelle cose, che negli Atti di Lipsia, ed altrove da per tutto sono state fin qui pubblicate sopra il calcolo differenziale, ed integrale, e ritroverà a chi debbanfi tali sostituzioni, ed altri artifizj di questo calcolo. In vero se due uomini sublimi, il Sig. Marchese de l'Hospital, e il Sig. Leibnizio, si sono degnati di conoscere, che questo calcolo dee grandissima parte della sua propagazione all'industria de' Bernulli, non mi riprenderà il Sig. Conte Riccati, nè mi accuserà di parzialità, perchè ho detto, che esso se non immediatamente, almeno mediatamente è obbligato a' Bernulli; e lascio giudicare a' lettori, che cosa debba dirsi di quella franca affermazione, con la quale contende il Sig. Conte Riccati a carte 322. (p) che le sublimi fatiche de' Bernulli non vagliano tanto, che possano aver luogo nel presente caso. A carte 333. (q) accusa la mia soluzione di petizione di principio: non capisco, che cosa si voglia qui il Sig. Conte Riccati. Quegli si dice commettere petizione di principio, che senza dimostrazione, assume ciò, che è in questione. Ho io forse fatto questo? Ho io assunto senza dimostrazione, che le sole sezioni del cono soddisfanno al quisito, come fece il Sig. Ermanno? Forse dirà il Sig. Conte, che io ho bensì dimostrato, che quest'equazione $xx = \frac{accx}{bb-bx+ax}$ conviene alle sezio-

ni coniche, ma non alle sole sezioni del cono? Ma non vede il Sig. Conte, che questa mia equazione $xx = \frac{accx}{bb-bx+ax}$ in qualsivoglia caso

determinato, cioè posto per le lettere a, b, c , qualche valore determinato, dee convenire ad una sola curva, poichè egli è impossibile, che il

l 2

Pia-

(o) In questo Tomo pag.48.

(p) In questa edizione pag.48.

(q) In questa edizione pag.51.

Pianeta cominciando a muoversi con una data velocità da un dato punto secondo una data direzione, e cacciato verso il centro delle forze da qualche potenza determinata, descriva due orbite diverse? Ora qualsivoglia valore diasi alle lettere a, b, c , è stato dimostrato, che la curva sempre sarà una delle sezioni coniche, dunque le sezioni del cono sono le sole curve, che soddisfanno a questo Problema. E' egli questo un commettere petizione di principio, fare ciò, che nella soluzione Ermaniana non può farsi, prima che sia stata fatta l'aggiunta della quantità costante, cioè determinar gli stessi casi della natura, ne quali i Pianeti possono descrivere questa, o quella specie di sezione conica, cioè determinare con quanta velocità debbano cominciare a muoversi, acciocchè l'orbita, che descrivono, sia o una Parabola, o un'Iperbole, o un'Elisse? Vuole forse e' dire, ch'io non avrei saputo, che convenga alle sezioni coniche tale proprietà, quale io loro ho attribuita a carte 349., se prima non avessi conosciuto, che queste curve dovrebbero soddisfare al Problema? Ma questo non farebbe commettere petizione di principio; nè è necessario, che io gli dica, in che maniera abbia scoperto, che le sezioni coniche anno questa proprietà, e basta, acciocchè io sia libero da petizione di principio, che quella proprietà sia stata rettamente dimostrata. Egli aveva già fatta una simile obbiezione a mio Zio a carte 205. (r), cioè che se questi avesse tentato il Problema inverso avanti del diretto, mai non gli sarebbe venuto in mente, che le sezioni del cono soddisfanno al Problema. Io nelle mie Annotazioni a carte 336. (s) dimostrai, che era ingiusto questo ritorcimento. Indarno risponde il Sig. Conte Riccati essere stata innocente quest' espressione, nè aver esso avuto in mente di pungere con qualche ritorcimento mio Zio, e che noi intenderemo a bastanza la sua intenzione, se considereremo l'epoca della grand'opera Newtoniana, nella quale il Problema diretto è stato scritto molto tempo avanti. Questa risposta è sofistica. Imperciocchè qual conseguenza è questa: il Signor Newton molto tempo avanti sciolse il Problema diretto: dunque se non avessimo veduta questa sua soluzione, mai non avremmo potuto sciorre il Problema inverso? Siegue solamente, che di questa materia delle forze centrali, e del Problema inverso noi forse mai non faremmo stati per pensare, se il Signor Newton non avesse parlato del Problema diretto; ma non che se il Problema inverso ci fosse stato proposto avanti il diretto, forse mai non l'avremmo sciolto. Sarebbe stato a noi impossibile senza tale notizia ridurre le membra dell'equazione agli archi circolari commensurabili, e fatta questa riduzione, ritrovare l'equazione algebrica soddisfacente al Problema? Certamente non vedo, perchè fosse stato meno possibile di fare ciò in questa ipotesi, che in quella delle forze re-

ci-

ciprocamente proporzionali a' cubi delle distanze; e siccome in questa ipotesi mio Zio ha scoperte le curve da niuno avanti nominate, come la Spirale Iperbolica (la quale non capisco, perchè il Signor Conte Riccati a carte 336. (t), abbia detto, che è stata la prima volta scoperta con metodo diretto dal Sig. Varignon, poichè nè il Signor Varignon, nè alcun altro aveva avanti mio Zio fatta menzione di questa curva) ed altre sì algebriche, come meccaniche; così colla medesima facilità per l'ipotesi delle forze reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze egli avrebbe potuto scoprire le sezioni coniche, benchè queste curve prima non fossero state nominate da altri.

A carte 334. (u) dice il Sig. Conte Riccati, che la difficoltà di questo Problema inverso generalmente considerato non consiste, come noi crediamo, nella comparazione di due archi circolari, ma nella riduzione della differenziale proposta alla differenziale dell'arco circolare. Non capisco, perchè egli c'incolpi, che noi abbiamo in ciò creduto diversamente da lui, essendo certo, che noi abbiamo detto la medesima cosa, che egli a carte 342. (x), cioè la cosa difficilissima, che s'incontra in questo Problema, è la riduzione della differenziale proposta alla differenziale dell'arco, o dell'angolo; il che dipoi esso Sig. Conte contraddicendo a se medesimo confessa, quando dice, che la cosa è per se stessa, almeno presa universalmente, sì ardua, che da noi è giudicata impossibile. Le mie parole registrate a carte 342. del Tomo ventesimo sono queste: *Ma determinare sempre se qualche quantità differenziale possa essere ridotta al differenziale dell'arco, o dell'angolo, è una difficoltà scabrosissima, ec.* Anzi ci dà una puntura, riprendendoci, perchè abbiamo giudicata questa cosa troppo difficile, e più da desiderare, che da sperare. Ma che che sia della formula, che dice di aver pubblicata il Sig. Ermano nel Tomo VII. del Giornale a carte 227., e che noi non abbiamo veduta, desiderarei di vedere la dimostrazione di quella formula; imperciocchè ripetendo un'altra volta questa cosa, sono persuaso, che non possa darsi alcuna formula generale, che comprenda tutte le curve algebriche, le quali soddisfanno a qualsivoglia ipotesi data delle forze centrali, se prima non si mostra insieme il metodo di ridurre in qualsiasi caso le membra della nostra equazione alla differenziale dell'arco circolare, o, che è la medesima cosa, d'integrare quasi tutto ciò, che è integrabile, il che principalmente è quello, che al dì d'oggi desideriamo per la perfezione del calcolo integrale. Non credo necessario rispondere molte cose all'ultima riprensione, che mi fece nel fine della sua scrittura. Il giusto lettore giudicherà qual conto debba farsi di quella riprensione, ed a chi debbasi attribuire il prurito di farsi Autore, se a quello, il quale per promuovere la scienza propone qualche problema, o lo risolve proposto, o più tosto a quello, che non mai provocato attacca un altro con una pub-

(r) Luogo della prima risposta in questo Tomo pag.27.

(s) Nella presente edizione pag.36.

(t) Nella edizione presente pag.52.

(u) In questo Tomo pag.52.

(x) In questo Tomo pag.38.

pubblica scrittura? Che vi sieno in Italia molti insigni Geometri, i quali lodevolmente sono versati in questi sublimi calcoli, io non mai l'ho ignorato, ed a questo fine proposi a loro il Problema; acciocchè comunicati con noi i metodi, ci nascesse qualche occasione d'imparare da essi. Avvisaroso gli Autori di questo Giornale all'Articolo X. del Tomo ventesimo primo, che da molte parti d'Italia erano state mandate molte soluzioni di questo Problema, le quali tutte convengono nell'assegnare per la curva ricercata delle forze una Parabola cubica del primo grado. Non v'ha dubbio, che questa Parabola soddisfi al quesito; ma poichè so, che il Signor Ermanno (al quale proposi mio Zio due anni avanti questo Problema, e che dimostrarò, che quando la curva de' tempi è del genere delle Parabole, anche la curva delle forze dee essere del genere delle Parabole) nominò questa curva a molti suoi amici Italiani, prima che uscisse il Tomo ventesimo del Giornale, dai quali poi potette arrivare a molti questa notizia; preghiamo quelli, i quali da se medesimi anno ritrovata la soluzione di questo Problema, che si degnino di pubblicare la loro Analisi, o almeno di dimostrare, se la Parabola cubica sia la sola curva, che risponda al quesito, o no. S'ingannano questi Geometri, quando dicono, che questo Problema non contiene alcuna difficoltà. Conobbe esso Sig. Ermanno, che il Problema era difficilissimo; e saremo molto obbligati a quello, che ci darà la dimostrazione analitica dedotta a priori senza petizione di principio.

P. S.

Terminata questa risposta, arrivò a noi comodamente la lettera del Sig. Ermanno spedita da Francfort il dì undecimo dell'Ottobre passato, il cui contenuto aggiungerò qui, acciocchè sappia il Sig. Conte Riccato, che è stata molto spiacevole al Sig. Ermanno la contesa, che egli mosse a mio Zio. Così scrive il lodato Sig. Ermanno a mio Zio. „ Quod Comes Riccatus schediasma in publicum miserit Diario Veneto insertum, quo solutionem meam particularem inversi problematis virium centralium adversus structuras tuas tueretur, diu post demum rescivi „ quam prodissset, id quod molestum mihi accidit; alioqui si de proposito ejus mihi quicquam constitisset, litteras ad ipsum dedissem rogaturus, ut ab eo abstineret..... Nam si solutionem meam apologia „ indigere credidissem, talem egomet ipse conscribere potuissem; sed quia „ quæ monuisti, potius ad elegantiam spectant, quam quod methodum „ feriant, minime necessum duxi specimen illud meum, licet publice reprehensum, publico scripto defendere. „ Soggiunge poi il Sig. Ermanno in quella medesima lettera, che v'ha una sola cosa nelle mie annotazioni inserite nel Tomo ventesimo del Giornale, alla quale e' dee rispondere. Dice dunque, che il Sig. Conte Riccato non ha certamente dette di lui cose vane, e troppo magnifiche, quando ha promesso, che una volta darà il Sig. Ermanno la soluzione generale del Problema inverso delle forze centripete per le curve algebriche; e dice di aver fat-

ta

ta questa cosa nel suo libro a carte 393. §. XIII., ed a carte 399. dove ha data una doppia soluzione del Problema già tempo da lui proposto nel Tomo sesto del giornale di Venezia. *Exhibere generalem formulam virium centralium pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, & generalem equationem pro curvis, quibus formula virium centralium conveniunt;* e per conseguenza e' dice, che io ho malamente creduto, che questo Problema formonti i limiti della possibilità. Poichè dunque poco fa ci è stata portata questa sublime opera del Sig. Ermanno de Viribus, & Motibus Corporum, della cui recente edizione mi rallegro e col Pubblico, e con l'Autore medesimo, non ho trascurato di leggere subito il luogo sopracitato; ma fuori della mia speranza ho ritrovato, che il Problema, di cui ivi esibisce l'Autore la soluzione generale per le curve algebriche, è più tosto diretto, che inverso. Io però non nego, che sia per essere di grande uso la formula delle forze centrali, che egli ha data; imperocchè da quella formula possono dedursi innumerabili scale delle forze centrali, alle quali tutte soddisfacciano le curve algebriche. Ma ritrovare per qualsivoglia data scala delle forze centrali tutte le curve algebriche soddisfacenti, egli è un problema assai più difficile, anzi tale, la cui soluzione spero, che sia per giudicar meco impossibile anche lo stesso Sig. Ermanno, considerata la cosa più attentamente.

SCHEDIASMA V. (*)

De' Polinomj.

COL nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che anno per numeratore la flussione dx , e per denominatore un aggregato di potestà, gli esponenti delle quali costituiscano una progressione aritmetica, che va a terminarsi nel nulla. E mentre questa condizione non si adempia, bisognerà supplire qualche termine affetto dal coefficiente $= 0$.

Ab-

(*) Da una lettera de' 17. Novembre 1725. dal Dottissimo Sig. Abbate Giuseppe Surzi scritta all'Autore si ricava, ch'egli in quel tempo lavorava intorno al presente metodo. Si legge poi in una lettera de' 19. Luglio 1729. del rinomato Padre D. Ramiro Rambinelli diretta al Conte Jacopo, che gli rimandava inchiuso il Problema dei Polinomj. Questo Schediasma adunque è stato composto fra il 1725, ed il 1729. La celebratissima Signora Contessa D. Maria Agnès a istanza dell'Autore lo inserì nelle sue Istituzioni Analitiche pubblicate in Milano l'anno 1748. Tomo II., pag. 697., e ne fanno particolare menzione li Signori Dortous de Mairan, e de Montigny nell'onorifico estratto della lodata Opera scritto per ordine della Real Accademia di Parigi, e segnato sotto li dì 6. Dicembre 1749.

Abbiasi la espressione $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + a}$, che sembra a prima vista un tri-

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + a$$

nomio, ma realmente è un quadrinomio, e va esposta così

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{2}{6}} + ax^{\frac{1}{6}} + a}. \text{ In qualunque Polinomio esposto per una fra-}$$

zione, il di cui denominatore sia alzato alla potestà p , numero intero, e positivo, hassi un metodo, che farebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie, ed oltre ciò alcuni artifizj particolari, che talvolta opportunamente ci soccorrono.

Do principio dal trinomio $\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = dy$, ed avverto,

che a cotale espressione ogni trinomio facilmente si riduce; conciossiachè se la flussione dx fosse moltiplicata per la dignità x^n della variabile, io

farei $x^n dx = du$, ed integrando, $\frac{x^{n+1}}{n+1} = u$, cioè $x = \frac{1}{n+1} \frac{1}{u^{\frac{1}{n+1}}}$;

$$\text{dunque } x^{2m} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{u^{\frac{2m}{n+1}}} \text{ ed } x^m = \frac{1}{n+1} \frac{1}{u^{\frac{m}{n+1}}},$$

ed effettuate le opportune sostituzioni, ci si presenterebbe una nuova frazione differenziale, nel di cui numeratore avremo la sola flussione

du , e nel denominatore le due potestà $u^{\frac{2m}{n+1}}$, $u^{\frac{m}{n+1}}$, gli esponenti

delle quali sono in ragion doppia, e possono esprimersi per le due quantità $2m$, m . Ci sarebbe solamente qualche divario nei coefficienti, che in nessun modo turbano il metodo, ch'io mi propongo di spiegare.

Facciasi $x^m = z + A$ (è z una nuova variabile assunta, ed A una costante da determinarsi). Istituiti i necessarij computi per giungere alla sostituzione, abbiamo come segue

$$x^{2m} = z^2 + 2Az + AA$$

$$ax^m = az + aA$$

$$b = b,$$

e per

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dz}{z^2 + 2Az + AA + az + aA + b}.$$

Dee farsi in maniera, che spariscono le quantità $AA + aA + b$, prendendole $= 0$, e ne' casi, in cui A non è quantità immaginaria, succede ottimamente la riduzione. E giacchè $x^m = z + A$, e prese le dif-

$$\text{ferenze, } m x^{m-1} dx = dz, \text{ ed } x = z + A^{\frac{1}{m}}; \text{ dunque } \frac{dx}{m x^{m-1}} = \frac{dz}{m (z + A^{\frac{1}{m}})^{m-1}}.$$

In passando alle necessarie sostituzioni, onde nella nostra formola principale in cambio di x , e delle sue funzioni resti surrogata la variabile assunta z colle sue funzioni, troveremo

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dz}{m (z + A^{\frac{1}{m}})^{m-1} (z^2 + 2Az + AA + az + aA + b)^p},$$

e liberando la quantità z , che moltiplica il binomio $z + 2A + a$ sotto il segno, farà

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-1} dz}{m (z + A^{\frac{1}{m}})^{m-1} (z + 2A + a)^p}.$$

Il caso più semplice vuole l'esponente p eguale all'unità, essendo l'altro m qualsivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità $2A + a = g$, l'espressione generale passa nella particolare

$$\frac{z^{-1} dz}{g (z + A^{\frac{1}{m}})^{m-1} + z (z + A^{\frac{1}{m}})^{m-1}} = m dy.$$

74

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà $\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m}$, e fatta la moltiplicazione, e la sottrazione, conforme la

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m}$$

pratica ordinaria, il residuo sarà $-\frac{dz}{g}$ da essere partito per lo denomi-

natore, e perciò

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m} = \frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m} - \frac{dz}{g}$$

$$\frac{-dz}{g \times z + A^m + g \times z + A^m}$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo $z + A = u$, e fatte le debite sostituzioni, avremo

$$\frac{-dz}{g \times z + A^m + g \times z + A^m} = \frac{u^{-m+1} du}{g \times u + g \times A^m}$$

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente p eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intero: per ottenere l'intento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formula generale

$$\frac{z^p}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times z + A^m \times z + g^p} = dy,$$

e posto per esempio $p = 1$ al binario, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m + g \times z + A^m + g \times z + A^m} = mdy.$$

Di-

75

Divido come sopra il numeratore di questa frazione per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà $\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m}$, e dopo le neces-

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m}$$

sarie operazioni avremo il residuo $-\frac{2z^{-1} dz}{g}$ da essere nuovamente

per l'intero denominatore diviso. Istituisco una seconda divisione nella frazione

$$\frac{-2z^{-1} dz}{g \times z + A^m + g \times z + A^m + g \times z + A^m}$$

e dopo le debite operazioni si avrà il residuo $\frac{4dz}{g} + \frac{2zdz}{g}$ da partirsi

per l'intero denominatore. Nascerà pertanto la seguente equazione

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m \times z + g^2} = \frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m} - \frac{2z^{-1} dz}{g \times z + A^m} +$$

$$\frac{4z^{-1} dz}{g \times z + A^m \times z + g^2} + \frac{2zdz}{g \times z + A^m \times z + g^2}$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione sono due binomj, e gli altri due possono facilmente ridursi alla forma del binomio, facendo $z + A = u$, ovvero $z + g = u$. Ne' casi più composti, in cui si mette $p = 3, 4, 5$ ec., cresce il tedio del calcolo, ma il metodo non ci abbandona.

Esso metodo si estende a tutti i polinomj in infinito, mentre p sia numero intero, e positivo, perchè se fosse negativo, ed intero, la cosa riesce talmente facile, che non occorre favellarne. Per applicare il metodo, altro non si richiede, che replicare la sostituzione $x = z + A$, $x = u + B$, facendo sempre svanire que' termini, ne quali le sole quantità costanti si ritrovano; laonde per cagion d'esempio si riduca il quadrinomio al trinomio, e questo al binomio. In oltre è d'uopo di valersi di tempo in tempo d'una dimezzata divisione, perchè non abbiano a turbarci gli esponenti negativi, che bene spesso ci si presentano nel nu-

K 2

me-

meratore della frazione. Fra tanto il modo di operare si mostra più spedatamente cogli esempi, che coi precetti.

Sia il quadrimio $\frac{dx}{x^m + ax^{2m} + bx^m + c^p} = dy$. Le costanti

a, b possono essere $= 0$. Pongo $x^m = z + A$, ed avrassi
 $x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = z^3 + 3Az^2 + 3AAz + A^3$
 $+ azz + 2aAz + aAA$
 $+ bz + Ab + c.$

Faccio $A^3 + aAA + Ab + c = 0$, e così determino il valore della costante assunta A . Quindi ripetute le operazioni come nel trinomio, trovo

$$\frac{z^{-1} dz}{z + A} \frac{m-1}{m} \times \frac{z^2 + gz + b}{z^2 + gz + b}^p.$$

Le specie g, b sono costanti surrogate in luogo d'altre più composte, e stante che p è un numero positivo, ed intero, alzo il trinomio $z^2 + gz + b$ alla potenza p .

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denomina-

tore non si rinvenga altra quantità, che il binomio $z + A$,
e metto da parte sì fatte frazioni, che trascurati i coefficienti, saranno analoghe alla seguente $\frac{z^{-n} dz}{z + A} \frac{m-1}{m}$, posto n qualsivoglia numero positivo

ed intero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale

$$\frac{z^n dz}{z + A} \frac{m-1}{m} \times \frac{z^2 + gz + b}{z^2 + gz + b}^p.$$

Ripeto dunque l'operazione, facendo $z = u + B$, indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, e surrogati in cambio di z , e delle sue funzioni i valori espolti per la nuova indeterminata u , arriveremo

alla

alla espressione $\frac{u^n + B^n}{u + A + B} \frac{du}{u^2 + Ku}^p$. La specie K è posta in luogo

di altre quantità più composte. E quindi alzato il binomio $u + B$ alla potenza n avremo la seguente serie

$$\frac{u^n + nu^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}B^2 + \dots}{2} du, \text{ la quale si dovrà interrompere}$$

$$\frac{u^n + A + B}{u + A + B} \frac{m-1}{m} \times \frac{u^2 + Ku}{u^2 + Ku}^p$$

sicuramente; atteso che si suppone n numero intero, ed affermativo. Ciascun termine di questa serie si potrà generalmente esprimere dalla

$$\text{formola } \frac{u^n du}{u + A + B} \frac{m-1}{m} \times \frac{u^2 + Ku}{u^2 + Ku}^p = \frac{u^{n-p} du}{u + A + B} \frac{m-1}{m} \times \frac{u^2 + Ku}{u^2 + Ku}^p,$$

avvertendo, che il valore di n non è lo stesso in ciaschedun termine della prefata serie. Quando sia p maggiore di n , onde l'esponente $n-p$ sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente sarà

$$\frac{u^{-p} du}{u + A + B} \frac{m-1}{m}, \text{ essendo poi } n-p \text{ positivo, avremo}$$

$$\frac{u^n du}{u + A + B} \frac{m-1}{m} \times \frac{u^2 + Ku}{u^2 + Ku}^p; \text{ e finalmente ponendo } u + K = \omega, \text{ ed essendo}$$

tanto n , quanto p numeri interi, saranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riesce limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Ab-

Abbiasi per esempio il trinomio $\frac{dx}{x+2\sqrt{x+2}}$. Faccio $x^{\frac{1}{2}} = z + A$,

dunque $x + 2\sqrt{x+2} = zz + 2Az + 2z + AA + 2A + 2$. Mettendo $AA + 2A = 0$, trovo $A = \sqrt{-1}$; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo, avremo

$$\frac{z^{-1} dz}{z + A \times z + 2A + 2} = \frac{z^{-1} dz}{z + 2\sqrt{-1}}$$

$+ \frac{Az^{-1} dz}{z + 2\sqrt{-1}}$. Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo ma-

niera, e nella grandezza $zz + 2A + 2 \times z + AA + 2A + 2$ facciamo, che si dilegui il termine di mezzo $2Az + 2z$, ponendolo $= 0$, onde sia $A = -1$, e di più $AA + 2A + 2 = 1$, e la formula farà, come segue

$$\frac{dz}{z-1 \times zz+1} = \frac{zdz}{zz+1} = \frac{dz}{zz+1}, \text{ e ne' due binomj dell'}$$

omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agl'altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

SCHE-

SCHEDIASMA VI.

De recta ratione analytice exprimendi lineolam interceptam inter tangentem, e curvam.

CLARISSIMO VIRO JOSEPHO SUZZIO

S. D.

JACOBUS RICCATUS.

Gratulor mihi, Eruditissime Suzzi, sententiam illam meam, quam aliis curis distractus, & ex tempore in medium protuli, veluti semen secundo solo commissum in largam, atque uberem segetem excrevisse. Gratulor tibi, quod rem difficultatibus implicitam ita perfeceris, ut quid addam, quid demam, quid emendem prorsus non inveniam. Ne tamen vel tibi, vel mihi deesse videar, unicam observationem ad computum differentio-differentialem facientem tuo examini submittere decrevi.

Magnus Nevvtonus in prima editione Principiorum Mathematicorum Philosophiæ naturalis lib. 2. prop. 10. hoc arduum problema sibi proposuit. Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum Horizontis, sitque resistentia ut medii densitas, & quadratum velocitatis conjunctim, requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis. Dum quæstioni perplexa, & difficili aggressionem satisfacere conatur, se hominem esse ostendit, & canonem generalem variis curvis, & præsertim semicirculo (Fig. 18.) applicando, a proposito excidit; putavit enim resistentiam ad gravitatem in dato circumferentiæ punto G se habere ut abscissa OB ad semidiametrum OK. Sed cum priores curvæ a posterioribus perficiantur, in secunda aurei Operis editione inadvertentiam sustulit, veramque proportionem, ut tripla abscissa ad circuli diametrum substituit.

Antequam correctio Nevvtoniana prodiret, eandem spartam in Actis Lipsiensibus pro Anno 1713. ornandam suscepit Clarissimus Vir Johannes Bernoullius, at Illustris Angli errore notato, dum in ejus originem sollicitè inquirat, sequentia protulit. „Error iste, qui tanto Viro excidit, non quidem in ipsa ejus solutione latet, quam justam esse, & ab omni paralogismi vitio immunem, quanquam non parum detortam, & intellectu difficilem, sed quærendus ille est in ipso applicandi modo, qui eo

Questa lettera è stata pubblicata dal Sig. Abb. Suzzi nella sua opera *Disquisitiones Mathematicæ* stampata in Venezia appresso Domenico Lovisa l'anno 1725.

laborat, quod in serie, quæ exprimit DG terminum quemlibet sumat pro aliqua indeterminatæ DG differentiæ, seu ut ipse vocat fluxione tanti gradus, quantæ dimensionis existit littera o in ipso termino, quod in primo, & secundo verum esse potest, in reliquis verò minimè. Verum Nevvtonus emendationem aliter insinuat; totam enim propositionem principalem reformat, nova formula subrogatæ, sed eandem applicationem, posthabita Bernoulliana animadversione, constanter retinet.

Quæstio non est, Eruditissime Surzi, utrum terminus, qui ex repetita differentiatione quantitatum indeterminatarum oriuntur, ab his diversi sint, quos series Nevvtonianæ subministrant. Sed ex calculo manifestum est, & optime ostenditur a Bernoullio. Difficultas potius in hoc sita est, utrum lineola FG inter tangentem, & curvam, cujus valorem loco citato Nevvtonus investigandum sibi proposuit, exponi debeat, ut ipse vult, per tertium suæ seriei terminum, an per secundam differentiam ordinatæ BC juxta Bernoullii sententiam. Hunc longissimè a veritate aberrare pro certo habeo, quamquam vix affirmare audeo tantum Virum in errorem incidisse. Ut autem saltem tibi fidem faciam, hæc accipe:

Ne a circulo, quem præ manibus habemus, discedamus: potius OK = a, OB = x, BD = dx, BC vel DI = y, ordinata DG ipsi BC indefinite proxima a sequenti serie more Nevvtoniano exprimitur DG = y

$$- \frac{xdx}{y} - \frac{aadxx}{2y^3} - \frac{a^2x^2dx^2}{2y^5} \text{ \& cæt,}$$

in qua primus terminus exponit totam DI, secundus ejus portionem IF, tertius cum infinitis sequentibus interceptam FG. Summa autem omnium terminorum post tertium ad tertium terminum relata proportionem habet minorem quacumque data; igitur lineola FG per solum tertium terminum secundum Nevvtonum exponitur.

Modo ex æquatione locali circuli aa - xx = yy sumpta prima differentia, habebimus - xdx = ydy, vel - xdx : y = dy, & rursus differentians, accepta dx pro constante, - $\frac{dxx}{y} + \frac{xdxdy}{yy} = ddy$: & loco dy ejus valo-

rem - xdx : y subrogando, - $\frac{dxx}{y} - \frac{xxdxx}{y^3} = ddy$, hoc est -

$\frac{yydxx - xxdxx}{y^3} = ddy$; sed yy - xx = aa; ergo - aadxx : y³ = ddy. Secun-

da igitur differentia applicatæ BC, seu - aadxx : y³ ad tertium terminum - aadxx : 2y³ seriei Nevvtonianæ proportionem habet duplam, & cum juxta te demonstratum sit interceptam FG dimidium esse secundæ differentiæ ddy, vel - aadxx : y³, patet hanc lineolam optime exprimi a Nevvtono

no per tertium terminum suæ seriei, & malè a Bernoullio per secundam differentiam ordinatæ BC.

Ut veritas clarius elucescat, tangens CF prorogetur usque quò concurrat cum axe producto in puncto R, & intercepta FG, quæ ad secundum fluxionum ordinem spectat, vocetur ddx. Cum sit OB : BC :: BC : BR, erit subtangens BR = yy : x : est autem RB : BC :: CI : IF, hoc est $\frac{yy}{x}$

y :: dx : $\frac{xdx}{y}$ = IF; ergo invento valore ordinatæ GD, qui habetur sub-

trahendo quadratum OD, hoc est $x + dx^2$ quadrato radii, erit DI -

DG - FI = FG, scilicet in terminis analyticis $y - xdx = \sqrt{yy - 2xdx - dxx}$

= ddx, vel $y - \frac{xdx}{y} - ddx = \sqrt{yy - 2xdx - dxx}$, & quadrando, $yy - 2xdx +$

$\frac{xxdxx}{yy} - 2yddx + \frac{2xdxdx}{y} + ddxz = yy - 2xdx - dxx$, & deletis de-

lendis, & reducta æquatione, $\frac{xxdxx}{yy} + ddx = 2yddx + \frac{2xdxdx}{y} - ddxz$

vel $\frac{xxdxx}{2y^3} + \frac{yddx}{2y^3} = \frac{aadxx}{2y^3} = ddx + \frac{xdxdx}{yy} - \frac{ddxz}{2y}$. Porro in homo-

geneo comparationis sublatis termino secundo, & tertio, qui respectu primi evanescent; secundus enim ad tertiam, & tertius ad quartam classem differentialium pertinet, remanet intercepta FG, seu $ddx = \frac{aadxx}{2y^3}$

prout Nevvtonus ope suæ progressionis invenerat.

Sicut igitur Illustris Anglus per tertium terminum suæ seriei cum omnibus subsequenter, qui tertio infinite minores sunt, designat interceptam FG, quæ determinat angulum contactus FCG a tangente, & chorda contentum, seu curvaturam, quam curva obtinet in puncto C, ita per quantum terminum exponit variationem curvaturæ, per quantum variationem variationis, & sic deinceps.

Neque purandum cum eximio Geometra Nicolao Bernoullio (Vide Com. Ac. Regiæ Paris. pro anno 1711.) olim Professore Patavino, ex his, quæ tradidit Nevvtonus tractatu de Quadratura curvarum perinde esse juxta celeberrimi Angli sententiam sumere differentias more consueto, ac illas ex seriebus eruere, ita ut terminus quilibet in progressionem haberi

debeat pro differentia tot gradus, quot unitates continentur in exponente quantitatis dx .

Tam crassus error acutissimo Analystæ nimis liberaliter affingitur. Optimè Nevvtonus fluxiones ab incrementis distinguit. Fluxiones vocat, quas Leibnitiani differentias appellant, & Prop. prima ita inveniendas docet, ut ejus methodus a vulgari non differat, præter quam in signis arbitrariis. Incrementa, vel differentiæ apud ipsum sunt quantitates minimæ, puta FG , quæ licet plerumque fluxionibus æquales non sint, sunt tamen semper ipsis proportionales, atque has per serierum terminos investigat. Sed ipsum audiamus in ultimo Scholio citati libelli de Quadratura.

„Quantitatum fluentium fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus supra. Hæ fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium. Ut si x^n sit quantitas fluens, & fluendo evadat

$$\frac{x^n}{x+0^n}, \text{ deinde resolvatur in seriem convergentem } x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} + \text{æt.}, \text{ terminus pri-}$$

mus hujus seriei x^n erit quantitas illa fluens, secundus nx^{n-1} erit ejus incrementum primum, seu differentia prima, tertius $\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$ est ejus incrementum, seu differentia secunda, cui nascenti proportionalis est

$$\text{ejus fluxio secunda, quartus } \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \text{ erit ejus incremen-}$$

tum tertium, seu differentia tertia, cui nascenti fluxio tertia proportionalis est; & sic deinceps in infinitum. „

Quid clarius Eruditissime Suzzi? Non fallitur ergo Nevvtonus, dum fluxiones ab incrementis sejungit, & diversa ratione nobis exhibet. Fallitur Bernoullius, dum quantitatem FG , aliasque ejusdem generis per secundam fluxionem exprimit.

Neque audiendus egregius Johan. Bernoullius, qui censuram de seriebus Nevvtonianis ita concludit. „Judicet itaque æquus Lector, quid tenendum sit de usu hujus regulæ, quam deprædicat Author p. 264. in solvendis istiusmodi problematibus, quandoquidem usus tam facile in abusum degeneret. „Dicendum potius, quod asseruit Nevvtonus in prima editione, & in secunda confirmavit. „Unde obiter patet usus non conte-

mnem-

mnendus harum serierum in solutione Problematum, quæ pendet a tangentibus, & curvatura curvarum. „

Hæc dicta sint ad dirimendam litem inter Clarissimos Geometras Nevvtonum, & Bernoullios; qua in re si forte decipior, saltem haud turpe erit cum tam illustri Mathematico errasse. Vale

Castrifranci 5. Septem. An. 1725.

SCHEDIASMA VII. (*)

Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus.

Reductio æquationum differentialium secundi ordinis plerumque est adeo perplexa, atque involuta, ut Analystam minus attentum frequentissime eludat. Dum Synthetica viæ insistimus, & a primis fluxionibus ad altiorum gradum ascendimus, cum assumatur tamquam constans vel nota differentia, vel nulla, eæ difficultates, de quibus sermo erit, vix occurrunt; quæ tamen evitari nequeunt, si problema aliquod proponatur secunda elementa involvens, & analytica methodo procedendum sit. Infinitas dari formulas differentio-differentiales, ad quas pervenitur, nulla adhibita constante, nemo profecto ignorat: totidem quoque exhiberi posse, ad quas pervenire non conceditur, nisi constante in subsidium vocata, acutiores non latet Analystas: at quomodo ab invicem dignosci queant, & qua ratione tractandæ sint, non ita compertum, neque obvium puto; cum tamen sublimioris Geometriæ officium sit inspicere, quousque, & quibus in circumstantiis expressiones istæ solutionem admittant.

Sit ex. gr. construenda curva, in qua quælibet abscissæ dignitas se habeat directe ut secunda differentia ordinatæ, & inverse ut similis differentia ejusdem abscissæ, quæ curva exponitur per æquationem differentialem secundi ordinis $x^m dx = dy$: ajo nullam curvam inter possibiles quæstioni satisfacere, si a primis ad secundas fluxiones fiat transitus, absque eo quod aliqua prima differentia usurpetur pro constante, nec juvabit, salva æqualitate, æquationes ipsas quomodocumque alterare, sive

L 2

per

(*) *Lo Schediasma del C. I., e le Annotazioni del Sig. Daniele Bernoulli comparvero alla luce delle stampe l'anno 1722. nel Tomo VIII. Sezione II. de' Supplementi degli Atti di Lipsia. S'avverte il Lettore essersi corretto un errore o di penna commesso dall'Autore nello trascrivere lo Schediasma, o pure di stampa, ponendo c' in cambio di v; falsa lezione per l'u.o., o per l'altro degli addotti motivi insinuatasi nei Supplementi suddetti. Abbiamo pure effettuate due correzioni ricordate dal C. I. nel seguente Schediasma VIII.*

per additionem terminorum æqualium, sive per valorum substitutionem: & ex opposito, constante determinata, inveniuntur quidem curvæ problematis conditionem implentes, sed numero infinitæ, & indole differentes; utpote quæ variantur ad arbitrariæ constantis mutationem. Posteriores hæcæ expressiones, quæ sub falsa specie nobis imponunt, a veris, atque legitimis secernere, videtur esse profundioris indagationis; nihilominus certum, & quantum subjecta materia patitur, generale Criterium Mathematicis examinandum propono, quod saltem usui erit in his omnibus casibus, in quibus nos calculus integralis haud deserit.

Porro ad formulas primis tantum differentiis implicitas revocantur æquationes omnes differentiales secundi gradus, ad quas, sive assumpta, sive non assumpta constante, perventum est, & in quibus secundæ fluxiones cum primis, & cum finitis magnitudinibus quomodocumque miscentur, dummodo alterutra ex indeterminatis fluentibus cum suis functionibus æquationem propositam non ingrediatur: quod dicendum pariter de illis expressionibus, quæ ad hanc formam aliqua adhibita industria redigi possunt: cæterum in reliquis, quas progressus noster non complectitur, ad aliquos casus particulares se extendere potest Analystarum solertia; at si quis canonem generalem inveniret, is profecto esset mihi magnus Apollo. Interim consideranda venit æquatio catholica (A) $z dx = dy$, in qua omnes formulæ differentiales primi gradus continentur; cum littera z designet magnitudinem utcumque datam per functiones coordinatarum x , & y . Transeo ad altiores differentias, nulla assumpta constante, proditque æquatio (B) $z ddx + dx dz = ddy$, quæ, dum in eodem statu permanet, nullo negotio integratur. Quod si ipsius forma immutetur; subrogatis valoribus ab expressione (A) mutuo acceptis, tunc infinitæ formulæ oriuntur, quæ majus artificium postulant. A simplicioribus exemplum peto: loco ipsius dx substituatur quantitas æqualis $dy : z$, & primus terminus æquationis (B) multiplicetur per dignitatem $z^m dx^m$, reliqui vero per æquivalentem dy^m , unde resultet nova æquatio (D) $z^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz : z = dy^m ddy$.

Hujusmodi formulæ expedite reducuntur ope alicujus constantis, quod ut fiat quantum fieri potest, generaliter designo pro constante fluxionem $dx : q$, est autem q magnitudo quomodocumque data per indeterminatas x , y , & constantes. Pono $dx : q = dp$, & cum sit $dx : q$ constans, erit pariter constans dp . Hinc in æquatione $dx = q dp$ transeundo ad secundas differentias, habebimus $ddx = dq dp$. Præterea statuo $dy = u dp$, & sumptis secundis differentiis in eadem hypotesi constantis dp , erit $ddy = du dp$. Subrogatis in expressione (D) valoribus ut supra determinatis, & inventis, orietur æquatio

$z^{m+1} q^m dq dp^{m+1} + u^{m+1} dz : z \cdot dp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$, & dividendo per dp^{m+1} , $z^{m+1} q^m dq + u^{m+1} dz : z = u^m du$, & summam per regulas vulgares, non omitta constantis g additione, $g + q^{m+1} : m+1 =$

$u^{m+1} : m+1 \cdot z^{m+1}$, quæ æquatio dat $u = z \cdot \frac{q^{m+1} + gm+g^{m+1}}{m+1}$, & quia $dy = u dp = u dx : q$, opportuna adhibita substitutione, occurrit

æquatio reducta (E) $dy = \frac{q^{m+1} + gm+g^{m+1}}{m+1} \cdot z dx : q$.

Ex hoc operandi modo sponte fluunt nonnulla consuetudina.

Si determinata magnitudine z , æquatio (E) construat saltem per quadraturas quando fieri potest, & indeterminatæ sunt separabiles, manifestum puto curvas infinitas nostræ formulæ respondere, variatur enim natura curvæ, ob mutatam constantem $dx : q$, & quilibet valor quantitatis q novam semper æquationem localem, sive algebraicam, sive transcendente subministrat.

2. Quamquam alterato valore magnitudinis q curvæ diversæ originem ducant, certum tamen est in quacumque hypotesi locum invenire inter ipsas curvas, ut ita loquar, principalem dependentem ab æquatione fundamentali (A) $z dx = dy$, nam si fiat æqualis nihilo constans g , quam addidimus integrando, statim æquatio (E) transit in æquationem (A). In hoc casu nihil refert, quænam differentia $dx : q$ accepta sit pro constante, cum evanescente g , etiam quantitas q evanescat.

3. Si æquatio (E) ulterius differentietur, non restituit expressionem (D) nisi duobus in casibus; vel ponendo $g=0$, & procedendo ad secundas differentias nulla constante assumpta, multiplicatis tamen terminis per quantitates æquivalentes, ut supra factum est; vel iterum differentiendo, determinata prius pro constante fluxione $dx : q$. Utrumque patet relegendo analyseos vestigia. Cæterum æquatio (E) rursus differentiat, neutra conditione impleta, formulam toto cælo diversam ab expressione (D), quam reducendam assumpsimus, exhibet.

4. Idem omnino contingit, sumpto pro constante elemento $dy : q$; nam operationem juxta traditam methodum instituendo, quam brevitati consulens omitto, deveniemus ad æquationem reductam $dx = dy : z =$

$dy \cdot \frac{g^{m+1} + gm+g^{m+1}}{m+1} : q$ respondentem nostræ formulæ (D), in quo pariter notandum; quod facta constante superaddita $g=0$, prodit expressio fundamentalis (A) $z dx = dy$.

5. Denique ex dictis colligi posse videtur, quod proposita nuda formula differentiali secundi gradus (D) $z^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz : z = dy^m ddy$, putarem ex assue me satisfecisse Analystæ quantumvis moroso, observando ad hanc expressionem perveniri potuisse, vel nulla assumpta constante, quo in casu locum invenit æquatio integralis $z dx = dy$, vel designando pro constantibus fluxiones $dx : q$; $dy : q$, & tum summatorias esse $dy =$

$$q^{m+1} + gm + g^{\frac{1}{m+1}}. \quad xdx : q; dx = dy : x - dy. gm + g^{\frac{1}{m+1}} : q. \quad \text{Adderem}$$

æquationem unicam $xdx = dy$, quæ differentiata absque constantis beneficio transit in æquationem (D), ab aliis infinitis artificio supra explicato distingui posse, quia semper eadem manet in quacunque constantis suppositione, reliquæ vero variata constante mutationi sunt obnoxie.

Supereft ut videamus, utrum in aliis expressionibus, & præcipue in æquatione (F) $x^m ddx = ddy$ respondente problemati ab initio proposito assignatæ conditiones adimpleantur, an scilicet inveniri possit æquatio differentialis, quæ non mutetur ad mutationem constantis, & quæ rursus differentiatâ, nulla constante assumpta formulam (F), saltem terminis additis, vel subductis, aut valoribus subrogatis, salva æqualitate restituat. Fiat igitur de more $dx = qdp$, eritque propter constantem dp , $ddx = dqdp$. Sit iterum $dy = udp$, hoc est $ddy = dudp$ & substituendo $x^m dqdp = dudp$. seu $x^m dq = du$, &

integrando $\int x^m dq + g = u$; sed $dy = udx : q$; ergo $dy = \int x^m dq. dx : q + gdx. q$.

Hic noto, quod facta $g = 0$, & reducta ultima æquatione ad simpliciorrem formam, videlicet $dy = \int x^m dq. dx : q$ quilibet valor ipsius q æquationem, & curvam diversam subministrat, nisi fortasse poneretur exponentis $m = 0$, quod assumptam hypothesim evertit. Idem dicendum statuta constante fluxione $dy : q$, ex quibus infero frustra quæri æquationem differentialem primi ordinis, quæ propositum præstare queat, & formulam (F) $x^m ddx = ddy$, sine constantis auxilio, restituere; nam si daretur talis æquatio, prodere se deberet in quacunque constantis suppositione, cum tamen nostra analysis contrarium ostendat.

Constat igitur problema propositum, nempe curvam invenire, in qua data dignitas abscissæ sit semper directe ut secunda fluxio ordinatæ, & reciproce ut similis fluxio ejusdem abscissæ, solvi non posse, si curva quæsitâ talem proprietatem obtinere debeat, sumptis secundis differentiis nulla constante determinata, & ex opposito curvas infinitas satisfacere, si modo una, modo altera constans usurpanda sit.

Non erit abs re aliud exemplum in medium asserre, & sequentem formulam (G) $x^m ddx = xdx + dz^2 + 2xdz^2$ examini subicere. Hanc sub canone nostro non comprehendi, videtur primo aspectu colligi ex eo, quod æquatio utramque indeterminatam x, z , cum suis functionibus contineat: verum si fiat $xdx = dy$, nova expressio (H) $x^m ddx = ddy + dy^2$ ex hac substitutione resultans juxta regulas supra explicatas solutionem non respuit.

1. In primis designo pro constante differentiam dx , unde fit $ddx = 0$. Evanescente igitur termino $x^m ddx$, remanent $\frac{-ddy}{y} = \frac{dy^2}{y}$, vel $\frac{-ddy}{y} : dy =$

$= dy$, & integrando $\log : dx : dy = y$, vel $dx : dy = c^y$, hoc est $dx = c^y dy$, & tandem $dx : x = dy$, quæ æquatio dat logarithmicam vulgarem.

2. Statuo tanquam constantem alteram differentiam dy , in qua hypothesi, existente $ddy = 0$, erit $x^m ddx = dy^2$. Pono $dx = sdy = cdy$, c constans est sive affirmativa, sive negativa, & s variabilis determinanda. Transeo ad secundas differentias, & sese offert æquatio $ddx = dsdy$. Hinc

substituendo, $x^m ds = dy$: sed $dy = dx : s + c$; igitur $sds + cds = x^{-m} dx$, & summando, omissa inutili constantis g additione, $ss : 2 + cs = x$

$$\frac{-m+1}{-m+1}, \text{ seu } s + c = \sqrt[2x]{-m+1} : -m+1 + cc : \text{ atqui } dx = s + c.$$

$$dy = dy. \sqrt[2x]{-m+1} : -m+1 + cc, \text{ igitur } dx : \sqrt[2x]{-m+1} : -m+1 + cc = dy.$$

3. Quæro utrum logarithmica inventa num. 1. adhibita constante dx , locum pariter habere possit in suppositione constantis dy num. 2. usurpata. Facta

constante $c = 0$, periculum facio, an forte quantitas $\sqrt[2x]{-m+1} : -m+1$ possit esse æqualis magnitudini x . Quoniam hinc inde quadrando,

$$2x^{-m+1} : -m+1 = xx, \text{ igitur } 2x^{m+1} = -m+1. xx, \text{ \& cum}$$

eadem quantitas debeat esse tam in coefficiente, quam in exponente binario æqualis, sequitur ad æqualitatem non perveniri, nisi ponendo $-m+1 = 2$, quo in casu determinatur valor exponentis $m = -1$.

In formula (H) $x^m ddx = ddy + dy^2$ limitando, ut dictum est, valorem exponentis $m = -1$, tunc ad æquationem $x^{-1} ddx = ddy + dy^2$ pervenire possumus nulla assumpta constante, ejusque summatoria in hac hypothesi est æquatio differentialis ad logistham $dx : x = dy$; non ascendendo ad secundas differentias absque constantis auxilio, habebimus $ddx : x - dx^2 : xx = ddy$: sed dx^2 ; ergo $ddx : x = ddy + dy^2$.

5. Quod si valor ipsius m non sit æqualis quantitati negativæ -1 , ad expressionem (H) nullo modo pervenire conceditur, nisi aliqua fluxio tanquam constans determinetur.

6. Procedendo autem generaliter, ut supra factum est, repeto æquationem (H) $x^m ddx = ddy + dy^2$. Sumo pro constante elementum $dx : q = dp$, & statuo pariter $dy = udp$, ut obtineam rursus differentiendo $ddx =$

$dqdp$; $dy = dudp$, & substituendo, $x^m dqdp + dudp = dy^2 = dudp + ndydp$, & dividendo per dp , $x^m dq = du + ndy$; sed $dy = udx = udx$; q ; igitur $x^m dq = du + undx$; q .

7. Methodus generaliter separandi variables in hac expressione, etiam si quantitas q detur quocunque modo per functiones solius ignotæ x , pro desperata habenda est. Moneo tamen, quod si fiat exponent $m = -1$, simplicior indeterminatæ u valor prodit æqualis fractioni $q : x$; nam loco ipsius u hoc valore subrogato, omnes termini in æquatione se mutuo destruant. Hinc collocata in æquatione subsidiaria $dy = adp = udx$; q hoc valore, redit æquatio ad logarithmicam $dy = dx : x$, quæcunque fuerit constans assumpta per magnitudinem $dx : q$ expressa.

Denique manifestum est, nostrum operandi progressum in maximam difficultatem separationis indeterminatarum postremo desinere. Hanc spartam olim exornandam suscepi, specimenque aliquod in Diario Italico exhibui: sed aut ego fallor, aut negotium tam subtile, tam arduum, ex quo potissimum pendet calculi infinitorum optata perfectio, non nisi conjunctis viribus promovendum est. Ut igitur ad hanc inquisitionem profundioris analysis, & Geometriæ cultores excitent, sequens problema propono.

In superiori formula $x^m dq = du + undx$; q , dato ad libitum exponente m , statuatur quantitas $q = x^n$. Pto qua ratione determinandi sint valores alterius exponentis n , ut succedat indeterminatarum separatio, & æquationis constructio per solas quadraturas.

*Danielis Bernoulli, Job. Fil. Med. Cand. Notata
in præcedens schediasma.*

ILLUSTRIS. CO. JACOBI RICCATI.

Animadversiones has in æquationes differentiales secundi gradus ab Autore acceptas Frater meus Nic. Bernoulli, apud Italos h. t. agens, transiit ad Patrem, quem nomine Autoris rogavit, ut illas una cum scriptis suis Actis inferendas Lipsiam deferri curaret. Perlectis, priusquam mitterentur, Riccatianis Animadversionibus, sequentia in illas mihi obferta fuerunt.

Recte quidem asserit Ill. Riccatus, sæpius difficulter methodo, quam vocant a priori, formulam integrari, cujus integratio a posteriori nullo negotio exhiberi potest: sed exemplum, quo illud probare contendit, scopo, quem habet, non sat bene respondere videtur. Æquatio diffe-

rentio-differentialis exempli loco allata hæc est (D) $x^{m+1} dx^m ddx =$

$dy^{m+1} dz$; $z = dy^m ddy$, quam peractis nonnullis substitutionibus deduxit ex æquatione differentiali $zdx = dy$. Hæc enim æquatio (D) differentialis secundi gradus haud magno negotio a priori reducitur ad æquationem simpliciter differentialem, nimirum hoc modo. Æquatio (D) æqui-

(D) æquivaleret huic $dx^m ddx = dy^m z^{m-1} ddy - dy^{m+1} dz$, quæ positis $dy = q$, & $dddy = dq$ (ut integrabilitas terminorum eo melius patefcat) degenerat in hanc $dx^m ddx = q^m z^{m-1} dq - q^{m+1} z^{m-1} dz$, quæ integrata dat $\frac{1}{m+1} dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} q^{m+1} z^{m-1} + \frac{C}{m+1} dr^{m+1}$

(per $\frac{C}{m+1} dr^{m+1}$ intelligo quantitatem constantem arbitrariam reliquis

terminis homogeneam) & tandem resubstituto pro q valore dy , habebitur æquatio differentialis gradus primi $dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} dz^{m+1} z^{m-1}$

$= \frac{C}{m+1} dr^{m+1}$, seu $dx^{m+1} = dy^{m+1} z^{m-1} + c dr^{m+1}$; posito

autem $c = 0$, posteaque reducta æquatione habetur $zdx = dy$. Q. E. F. Errat quoque ex inadvertentia Ill. Riccatus, cum æquivalentem statuit æquationem $\log : dx : dy = y$ huic æquationi $dx : dy = 1$; illa enim est pro logarithmica, hæc pro linea recta, siquidem 1 , seu unitas ad quamcumque potestatem, sive determinatam, sive indeterminatam elevata nil nisi ipsam producit unitatem. Auctor in animo haud dubie habuit dicere æquationem $\log : dx : dy = y$, sumptis logarithmorum numeris, abire in hanc $dx : dy = n^y$, ubi per n non quidem ipsa unitas, sed talis intelligendus est numerus, cujus logarithmus est unitas, adeo ut Auctori contingerit confundere unitatem cum numero, qui unitatem habet pro logarithmo, quem numerum designo per n . Postea transformat æquationem

$dx : dy = n^y$, (loco 1 substituam semper n^y) in hanc $dx = n^y dy$, ex qua colligit $dx : x = dy$, id quod verum quidem est, sed patet Cl. Riccatus hanc consequentiam formando supponere $x = n^y$, quæ jam est ipsissima æquatio pro logarithmica, uti dudum hoc ostendit Parens meus, vid. Act. 1697. p. 294. unde liquet Riccatum delabi in petitionem principii, dum supponit æquationem esse pro logarithmica, quod id ipsum est, quod demonstrare sibi proposuit.

Ostendit tandem doctiss. Riccatus, quam necessaria sit separationis indeterminatarum doctrina, in qua excolenda multus fuit, strenueque, ut audimus, etiamnum se exercet non sine successu egregio; quin & stimulos admovent Mathematicis, ut conjunctis viribus negotium hoc promovendum amplectantur. Hunc in finem iidem problema proponit dignum a se habitum, cuius solutionem tentent. Perscribit Frater meus, se illud solvisse; sed præter ipsum alii quoque existunt solutores, solutionem enim eruerunt Pater, & Patruelis Nic. Bernoulli, pariter ac egomet; eorum vero analyses nondum vidi, excepta illa a Parente excogitata, quæ ra-

ratione operationis, & in procedendi modo a mea diversa est. Interim nos singuli sua quisque methodo utentes in eisdem valores exponentis n incidimus, unde suspicor, aliis non dari separabilitatis casus, quam quos per diversas vias deteximus; solutionem addo, ne tamen aliis idem tentandi occasionem adimam, illam characteribus occultis involvo, revelaturus significationem, quando tempus postulaverit.

Solutio problematis ab Illustriss. Riccato propositi characteribus occultis involuta.

24a, bb, bc, 8d, 33e, 5f, 2g, 4h, 33i, bl, 21m, 26n, 16o, 8p, 5q, 17r, 16s, 25t, 32u, 5x, 3y, +, -, =, >, <, 4, 2, 1-

SCHEDIASMA VIII. (*)

Appendix ad Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus.

Cum suadente doctissimo, & amicissimo Viro Nicolao Bernoullio tunc temporis apud nostrates agente, qualescunque meditationes meas de æquationibus differentialibus secundi ordinis ad illustrem Patrem Johannem Basileam transmissem, ut nonnisi ipso probante Actis Eruditorum Lipsiensium infererentur; hæc cum Annotationibus egregii Juvenis Danielis Bernoullii, ejusdem Nicolai Fratris, in publicam lucem prodire. Quanquam autem me tanto scholiaste dignum haud putarem; suspicor tamen illum minus attentum se præbuisse, & instituti mei rationem nullo modo fuisse assecutum.

Propositum mihi non fuit ex separatione indeterminatarum laudem querere; hæc enim investigatio ab intentione mea longissime aberat, ut sequentia verba satis superque indicant, quæ nulla interpretatione in alium sensum detorqueri possunt. Observabam (infinitas dari formulas differentio-differentiales, ad quas pervenitur nulla adhibita constante: totidem quoque exhiberi posse, ad quas pervenire non conceditur, nisi constante in subsidium vocata: at quomodo ab invicem dignosci queant, & qua ratione tractandæ sint, non ita compertum, neque obvium putabam). Exemplo deinde allato, quod mihi subministrabat formula $x^m dx = dy$, ita pergebam. (Posteriores hæc expressiones, quæ sub falsa specie nobis imponunt, a veris, atque legitimis secernere, videtur esse profundioris

in-

(*) Fu impresso questo Schediasma negli Atti di Lipsia dell'anno 1723.

indagationis: nihilominus certum, &, quantum subiecta materia patitur, generale criterium Mathematicis examinandum propono, quod saltem usui erit in his omnibus casibus, in quibus nos calculus integralis haud deserit.)

Porro generale criterium in hoc consistit, ut assumpta ad libitum æquatione differentiali secundi ordinis, cujus integratio sit in nostra potestate, si, quacunque usurpata constante, eadem semper summatoria nobis occurrat, aut saltem, deleatis constantibus, quas integrando addidimus, occurrere queat; signum est ad nostram æquationem differentio-differentialem perveniri, absque eo quod necesse fuerit constantem adhibuisse. Quod si oppositum contingat, concludere par est, sine constantis beneficio, propositam formulam per secundas differentias expressam ab æquatione elementa tantum prima involvente deduci non potuisse. Canonis hujus utilitas manifeste se prodit; cur enim infinita Problemata proponi non possunt, quæ secundas differentias necessario involvant? Quomodo autem ab hujusmodi quæstionibus Analysta se expediet, nisi noverit, quibus in casibus æquationes constantis assumptionem supponant, aut gigni queant, nulla usurpata constante?

Hinc ut methodo inservirem, & Analystis minus peritis morem gererem, (non enim solis Bernoulliis canimus.) Synthetica via, &, ut ajunt, a posteriori procedere constitui, ut deinde relictis vestigiis, rem a priori perlicerem. Eligendum itaque exemplum fuit, quod in quacunque constantis hypothese integrationem non respueret, & proposito ex omni parte responderet. Hoc autem, ni fallor, obtinui rursus differentiendo formulam (A) $x dx = dy$, & post aliquas substitutiones in sequentem transformando (D) $x^{m+1} dx^m ddx + y^{m+1} dy = dy^m ddy$, quam inter simpliciores numeravi, ejusque reductionem ope constantis dx : q tali pacto sum assecutus. (Pono dx : $q = dp$, est autem q quomodocunque data per indeterminatas x & y , vel earum functiones, & cum sit dx : q constans, erit pariter constans dp . Præterea statuo $dy = u dp$, & sumptis secundis differentiis, erit $ddx = d q dp$, $ddy = u d u dp$, surrogatis in expressione (D) valoribus ut supra determinatis, orietur æquatio $x^{m+1} q^m d q d q^{m+1} + y^{m+1} dz d p^{m+1} : z = u^m du d p^{m+1}$, & dividendo per $d p^{m+1}$, $x^{m+1} q^m d q + y^{m+1} dz : z = u^m du$, & summando, non omiffa constantis g additione, $g + q^{m+1} : \frac{1}{m+1} = u^{m+1} : \frac{1}{m+1} \cdot x^{m+1}$, quæ

æquatio dat $u = x \cdot \frac{1}{q^{m+1} + g m + g} : \& \text{ quia } dy = u dp = u dx : q$, opportuna adhibita substitutione, occurrit æquatio reducta (E) $dy =$

$\frac{1}{q^{m+1} + g m + g} \cdot x dx : q$, vel si fiat constans addita $g = 0$, $dy = x dx$. Q. E. F.)

M 2

Cum.

Cum igitur sancitus canon, ad quem tanquam ad scopum collineant animadversiones meæ, & de quo apud Eruditum Adolescentem (quod mirum profecto est) altum ubique silentium, in tuto sit, & extra censuræ jactum positus, exemplumque canonis illustrando adhibitum optime procedat; nescio quid ipsi in mentem venerit, ut me dixisse putet. (Recte quidem asserit Ill. Riccatus, methodo, quam vocat, a priori sæpissimè difficulter formulam integrari, cujus integratio a posteriori nullo negotio exhiberi potest.) Id si dixissem, verum utique dixissem, sed extra chorum saltando, & propositionem in medium afferendo ab instituto meo prorsus alienam. Addit (sed exemplum, quo illud probare contendit, scopo, quem habet, non sat bene respondere videtur, æquatio enim differentio-differentialis exempli loco allata hæc est (D) $x^{m+1} dx^m ddx + dy^{m+1} dz: x = dy^m ddy$, quam peractis nonnullis substitutionibus, deduxit ex æquatione differentiali $x dx = dy$.) Profecto ut constat ex dictis, exemplum finem alium toto cælo diversum respicit: & ineptus equidem fuisset si formulam inversa methodo, & a priori a me jam integratam, pro desperata vendidissem. Interim videamus, quomodo defectum meum supplere contendat Juvenis nimis fortasse ingeniosus.

(Hæc æquatio, inquit (D) differentialis secundi gradus haud magno negotio a priori reducitur ad æquationem simpliciter differentialem, nimirum hoc modo. Æquatio (D) æquivalet huic $dx^m ddx = dy^m x^{m-1} ddy - dy^{m+1} x^{m-2} dz$, quæ positis $dy = q$, & $ddy = dq$, ut integrabilitas terminorum eo melius pateat, degenerat in hanc $dx^m ddx = q^m x^{m-1} dq - q^{m+1} x^{m-2} dz$, quæ integrata dat $\frac{1}{m+1} dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} q^{m+1} x^{m-1} dz$

$\div \frac{C}{m+1} dy^{m+1}$ (per $\frac{C}{m+1} dx^{m+1}$ intelligo quantitatem constantem ar-

bitrariam reliquis terminis homogeneam) & tandem resubstituto pro q valore dy , habebitur æquatio differentialis gradus primi $\frac{1}{m+1} dx^{m+1} =$

$\frac{1}{m+1} dy^{m+1} x^{m-1} \div \frac{C}{m+1} dx^{m+1}$, seu $dx^{m+1} = dy^{m+1} x^{m-1}$

$\div c dx^{m+1}$: posito autem $c = 0$, posteaque reducta æquatione, habetur $x dx = dy$. Q. E. F.)

Pace acutissimi Scholiastis sit dictum, hoc nihil aliud est, quam actum agere. In ejus integrali $dx^{m+1} = dy^{m+1} x^{m-1} \div c dx^{m+1}$ fiat $dr = dx: q$; id enim permittit indeterminata arbitraria q ; erit igitur $dx^{m+1} = c dx^{m+1} \cdot q^{m-1} = dy^{m+1} x^{m-1}$, vel $\frac{dx^{m+1}}{q^{m-1}} = c \cdot dx^{m+1}$

$= \frac{dy^{m+1}}{x^{m-1}}$, & extracta hinc inde radice $q^{m+1} = c \cdot q \cdot dx: q = dy: x$.

Conferatur modo hæc formula cum nostra (E), scilicet.

$dy = \frac{x dx}{q} \cdot \frac{q^{m+1} + gm + g}{m+1}$, & patebit nullum aliud intercedere

discrimen, nisi quod magnitudo constans, quam vocat - c Clariss. Bernoullius, a me designatur per $gm + g$. Tota ergo differentia in hoc sita est, quod iste methodo particulari, ego vero generali, quæ ad casus infinitos difficiliores extenditur, rem sum prosequutus, ita instituti mei ratione postulante.

Quod si nonnisi de præmissa æquatione (D) sermo fuisset, ita secundæ differentiæ ad primas nullo negotio redigi poterant. Formula transeat in sequentem $\frac{x^{m+1} dx^m ddx}{dy^{m+1}} = \frac{ddy}{dy} - \frac{dz}{x} = \frac{dp}{p}$; igitur $dy = xp$,

& subrogando in primo termino loco ipsius dy^{m+1} ejus valorem $x^{m+1} p^{m+1}$, erit $dx^m ddx = p^m dp$, & integrando, $\frac{dx^{m+1}}{m+1} \div \frac{cdx^{m+1}}{m+1} = \frac{p^{m+1}}{m+1}$,

vel $dx^{m+1} \div c dx^{m+1} = p^{m+1} = dy^{m+1}: x^{m+1}$. Q. E. F.

Verum ut methodi generalis, quam nonnullis exemplis pro re nata aptandam censui, sæcunditatem demonstrarem, observo ad distinguendas æquationes differentio-differentiales, ad quas pervenitur, nulla ex primis fluxionibus usurpata tanquam constante, necesse non esse eas integrare in quacunque constantis suppositione, sed sufficere, ut habeatur summatoria saltem in aliqua particulari hypothesi, assumendo pro constante illam magnitudinem, cujus ope formula proposita facilius ad prima elementa reduci queat: imo si nihil aliud investigandum sit, quam utrum ad exhibitam expressionem pervenire possimus, nullo elemento primi ordinis pro constante designato, id consequi licet, etiamsi assumptæ æquationis integratio non sit in nostra potestate.

Ut dicto fidem faciam, sit formula $x ddx = uddy \div \omega dy^2$. Quantitates x, u, ω usurpantur pro arbitrariis functionibus coordinatarum x, y . In primis statuatur tanquam constans fluxio dy , & ob id, cum sit $ddy = 0$, erit $x ddx = \omega dy^2$. Fiat $dx = p dy$, & $ddx = dp dy$; igitur $x dp dy = \omega dy^2$, vel $dp = \frac{\omega dy}{x}$, & integrando omitta constantis additione,

$p = \int \frac{\omega dy}{x}$; sed $p = dx: dy$ ergo (A) $dx = dy \cdot \int \frac{\omega dy}{x}$. Iterum cum sit

94 $dp = \frac{\omega dy}{z}$, & $dy = dx : p$; ergo $pdp = \omega dx : z$ & summando, $p^2 = z$

$\int \frac{\omega dx}{z}$, vel $p = \sqrt{z \int \frac{\omega dx}{z}}$ & collocando pro quantitate p valorem dx :

dy , habebimus (B) $dx = dy \cdot \sqrt{z \int \frac{\omega dx}{z}}$.

Sumatur modo in formula principali constans dx , & fit $ddx = 0$; igitur $-uddy = \omega dy^2$. Fiat de more $dy = qdx$, & $ddy = dqdx$. Hinc $-uddy = -udxdq = \omega dy^2$; sed $dy^2 = q^2 dx^2$; ergo facta substitutione, $-dq : q^2 = \omega dx : u$, & summando neglecta ut supra constantis additione, $\frac{1}{q} = \frac{dx}{dy} = \int \frac{\omega dx}{u}$, & tandem $dx = dy \int \frac{\omega dx}{u}$ (C).

Rursus cum sit $-udqdx = \omega dy^2$, & $dx = dy : q$; igitur $-dq : q = \omega dy : u$, & integrando, Log. 1: $q = \int \frac{\omega dy}{u}$, scilicet 1: $q = dx : dy$
 $= c \int \frac{\omega dy}{u}$, hoc est (D) $dx = c \int \frac{\omega dy}{u} dy$.

Comparantur modo expressiones A, B, quæ pendent ab usurpata constante dy , cum expressionibus C, D originem ducentibus ex alterius constantis dx assumptione. Quoniam ex æquatione (A) habemus $dx = dy \int \frac{\omega dy}{z}$, & ex æquatione (C) $dx = dy \int \frac{\omega dx}{u}$, & utraque æquatio ex canone generali in eandem curvam definere debet, si ad nostram æquationem secundi gradus nulla adhibita constante perventum sit; ergo $dy \int \frac{\omega dy}{z} = dy \int \frac{\omega dx}{u}$; hoc est $dy : z = dx : u$. Hac æqualitate servata, quemcumque valorem obtineat altera quantitas ω , ad æquationem $zddx = zdxddy : dy + \omega dy^2$, in qua loco ipsius u facta est debita subrogatio, pervenire possumus absque constantis auxilio.

Iterum comparantur æquationes (B), & (C), hoc est $dx = dy \sqrt{z \int \frac{\omega dx}{z}}$, & $dx = dy \int \frac{\omega dx}{u}$, eritque $\sqrt{z \int \frac{\omega dx}{z}} = \int \frac{\omega dx}{u}$, & differentiendo, $\omega dx : z = \frac{\omega dx}{u} \int \frac{\omega dx}{u}$, vel $\frac{u}{z} = \int \frac{\omega dx}{u}$.
 In

95 In hoc quoque casu facta opportuna substitutione, haberi potest formula principalis per secundas differentias expressa, & ad quam pervenire licet nulla assumpta constante. Aliæ operationes, & comparationes institui possunt, sed hæc ulterius prosequi non vacat, cum hucusque dicta satis superque methodi usum ostendant.

Redeo ad doctissimum Danielem Bernoullium, qui secundo loco inadvertentiæ me accusat, dum ab æquatione Log. $\frac{dx}{dy} = y$ transio ad

sequentem $\frac{dx}{dy} = y^y$. Legendum porro erat $\frac{dx}{dy} = c^y$, quem errorem

in notis sive ipsarum similitudini, sive meæ inscribendo, vel exscribendo oscitantæ tribuam, nescio. Hoc unum scio, consequentiam esse legitimam, & cum defectus non in re, sed in speciebus consistat, corrigendus potius erat quam notandus; hanc enim veniam damus & petimus vicissim, ut lapsus in signis negligamus, nisi in paralogismum conclusionis definat. Vix huiusmodi errores vitari possunt, & data occasione admonéo in mea Dissertatione p. 69. n. 4. (a) pro æquatione $dx =$

$dy : q \cdot \frac{1}{mq + g^{\frac{1}{m+1}}}$ hanc aliam substituendam esse $dx = dy : z$.

$dy : m + g^{\frac{1}{m+1}} : q$.

Similiter pag. 70. (b) §. *Supereft*, post ea verba (assignatæ conditiones adimpleantur) legendum est an scilicet inveniri possit æquatio differentialis, quæ non mutetur ad mutationem constantis, & quæ rursus differentiatæ &c. Ita sensus, qui nullus erat, fit planus, & apertus, atque humanissimo Scholiasti gratias ago, quod correctioni locum dederit, & defectum sive scripturæ, sive impressionis mihi non imputaverit.

Fateor interim me conicere non potuiss., quid sibi velit laudatus Bernoullius his verbis. (Postea transformat æquationem $dx : dy = n^y$ (loco y^y substituam semper n^y) in hanc $dx = n^y dy$, ex qua colligit $\frac{dx}{x} = dy$,

id quod verum est, sed patet, Cl. Riccatum hanc consequentiam formando supponere $x = n^y$, quæ est ipsissima æquatio pro logarithmica, uti dudum hoc ostendit Pater meus Vid. Acta 1697. p. 293.; unde liquet Riccatum delabi in petitionem principii, dum supponit æquationem esse pro logarithmicam, quod id ipsum est, quod demonstrare sibi proposuit.)

Quod formula $dx = c^y dy$ in alteram $dx : x = dy$ transire queat, non ut demonstrandum assumpsi, sed ut notum suppofui. Quid pluribus verbis

(a) Nel presente Tomo pag. 89.

(b) pag. 86.

bis opus erat in re tam facili? Mirari subit Clarissimi Juvenis nimiam fortasse confidentiam; quomodo enim hariolari potuit me ad deductionem processisse, nonnisi subrogando x pro quantitate exponentiali c' , & ob id petitionem principii admittendo? Cum de methodo reductionis verba non fecerim, Bernoulliana oppositio mera suspicio est, quæ nulli conjecturæ innititur & sola negatione eliditur. Sed ipsi in re fati obvia morem geramus. Quoniam $dx = c'dy$, fiat $c' = z$; igitur $y = \log. z$, & differentiando, $dy = \frac{dz}{z}$: scribo z , pro c' , & dx pro dy ; ergo $dx = \frac{dz}{z}$,

& integrando, $z = x \mp a$, quo valore substituto in formula $dy = \frac{dx}{z}$

altera oritur $dy = \frac{dx}{x \mp a}$, vel $dy = \frac{dx}{x}$, posita $a = 0$. Aequatio itaque $dx = c'dy$ transit in sequentem $\frac{dx}{x} = dy$ Q. E. D.

Quod attinet ad Problema, nempe in formula $x^m dx = du \mp \frac{u dx}{x^n}$,

dato exponente m , determinare valores alterius exponentis n , ut succedat indeterminatarum separatio, illud non ea mente proposui, ut Mathematicis veteranis, & præcipue Geometricæ, ut ita loquar, Bernoulliorum familiæ impervium putarem. Cum enim ejus solutionem invenerim, dum adhuc utrum solvi posset ambigerem, cur ab aliis, quos de successu certiores feceram, enodationem non expectarem? Noveram insuper Cl. Virum Nicolaum Bernoullium laudati Johannis filium huic quæstioni, quam ipsi amice communicaveram, elegantissime satisfecisse. Problema igitur non e trivium petium, & quod novam requirit industriam, cui bono in publicam lucem emissem, ex nostra dissertatione colligi potest. Non enim id factum, ut quemquam lacerarem, quod profecto ab ingenio meo nimis alienum est; sed ut comparando inter se varias methodos, quibus Viri doctissimi propositum affecuti fuissent, aliquid luminis indeterminatarum separationi affunderetur. Vix fieri potest, ut singuli Analystæ eadem progressionem utantur, & ut methodus unico tantum Problemati inserviat. Quod si viri Clariss. Bernoullii solutiones inventas Geometris non inviderebunt, calculi integralis fines etiam in hac parte profuerent, & mihi aliquid accedet laudis, quod occasio saltem fuerim, ut talia ederentur.

DA-

DANIELIS BERNOULLI.

Explanatio Notationum suarum.

PRIMUM, quod obiter notavi in Riccatianis Animadversionibus, versatur circa æquationes (B, ac (D), quas æquali fere facilitate integrari observaveram, ac propterea vix conciliari posse verba Cl. Riccati, quibus posterioris integrationem *majus artificium postulare*, prioris vero *nullo negotio* absolvi asserit, atque hoc pacto fieri transmutationem formulæ (B) in alteram (D) quodammodo inutilem, utpote quam non alio instituit fine, quam ut posterioris integratio fieret magis ardua: utque adnotationem meam suffulcirem, ostendi, quam facile sit æquationem differentialem secundi ordinis (D) ad simpliciter differentialem reducere. Quid vero in ista reductione desiderandum sit, prorsus ignoro, nec adeoque video, quo titulo, me actum egisse, dicere queat Doctissimus Riccatus in sua Appendice. Quod si ipse insignis vir loco formulæ (D) aliam dedisset, sui integrationem densiori velo occultantem, non solum extra memoratam se positurus fuisset censuram, sed & simul melius ingeniosissimæ suæ methodi æquationum reducendarum præstantiam manifestaturus, hocque unicum fuit, quod desideravi, dum dicerem, *recte quidem asserit Ill. Riccatus, sapissime difficulter methodo, quam vocant a priori formulam integrari, cujus integratio a posteriori nullo negotio exhiberi potest: sed exemplum, quo illud probare contendit, scopo, quem habet, non sat bene respondere videtur*: quæ verba non ita interpretanda velim, ut fecit Cl. Riccatus, quasi nimirum credidisset, scopum primarium ipsi fuisse, exemplo monstrare, quam difficile sit a priori integrare formulas, quarum integratio a posteriori constat; facile enim quilibet perspicere potest, Virum Acutissimum in animo habuisse, ostendere, quomodo dignolci ab invicem queant æquationes differentiales secundi gradus, quæ pro sua reductione constantis positione opus habeant, vel non habeant; optimeque instituto suo præcipuo defunctus est. Attamen hoc non impedit, quin digressionem illam, qua æquationi (B) aliam inducit formam, videatur eo fine fecisse, ut novam exhiberet formulam, veluti (D), majus integrationis artificium postulantem, & cujus simul integratio a posteriori pateret: nec male hic applicantur verba ipsissima Clariss. Riccati: *dum synthetica viâ insilimus, eâ difficultates, de quibus sermo erit, vix occurrunt, quæ tamen evitari nequeunt, si problema aliquod proponatur secunda elementa involvens, & analytica methodo procedendum sit.*

N

Non

La presente spiegazione delle sue Annotazioni la fece inferire il Dottissimo Signor Daniele Bernoulli negli Atti di Lipsia dell'anno 1725. si legge parimente nelle Esercitazioni matematiche dello stesso Sig. Bernoulli stampate in Venezia per Domenico Lozza l'anno 1724.

Non credidissem, hanc meam in Riccatianas Animadversiones adnotationem, ipsum Riccatum parum, vel nihil offendentem, tanta explicatione indigere, nec illam dignam existimassem, de qua vel verbulo mentionem moverem, nisi magnam partem Doct. Riccati Appendicis in ipsius refutationem collineare vidissem.

Secunda mea notatio indicat errorem, quem ex inadvertentia in Animadversiones Riccatianas irrepsisse, atque corrigi posse, dixi, si pro x scribatur n , ubi per n intelligitur numerus, cujus logarithmus est unitas. Hinc conqueritur Cl. Riccatus in appendice sua de mea sincera agendi ratione, inquiens tales errores corrigendos esse, non notandos. Mihi sane videor id ipsum fecisse, quod desiderat; correxi enim errorem eundemque indicavi, non notavi, expressis innuens verbis, errorem irrepsisse ex inadvertentia; melius meo quidem iudicio fecisset confitendo talem inadvertentiam, nec summis viris ignominiosam, quam errorem attribuendo oscitantiae in exscribendo: vix enim verisimile est in eundem calami errorem bis incidere, atque dum se ex inadvertentia purgare conatur, obscuritatis se accusat: nam si loco unitatis scripsisset litteram c , definiendum fuisset, quid intellectum velit per litteram illam a novo introductam, & mox aliam significationem accepturam, in sequentibus enim per c intelligit quantitatem quamcumque constantem.

Tertia mea in Doctissimi Riccati Animadversiones notatio pertinet ad ipsius demonstrationem, qua ostendere sibi proposuit, formulam $-ddy = dy^2$ logarithmicam repraesentare. Nemini certe demonstrationem illam perlegenti suspicionem non movebit Cl. Riccatus, se in illa idipsum supposuisse, quod ostendere sibi proposuerat: unde mihi videor non absque ratione indicasse, latere petitionem principii in demonstratione Riccatiana.

Verum ipsa demonstrationis verba secundum Auctoris mentem correcta transcribam; *remanent*, inquit Cl. Riccatus, $-ddy = dy^2$, vel $-ddy : dy = dy$, & integrando $\log. dx : dy = y$. vel $dx : dy = c^y$, hoc est $dx = c^y dy$, & tandem $dx : x = dy$, quae aequatio dat logarithmicam vulgarem.

In huiusmodi demonstrationibus, ni fallor, quaelibet aequatio ita ex praecedenti deduci debet, ut deductionis principium sit simplex, & omnibus obvium: hoc ipsum in memorata demonstratione egregie observatur; ubique enim talis inter duas proximas aequationes elucescit connexio, ut transformationis fundamentum simplicissimum sit, atque vel primis tyronibus obvium. Quis itaque non eodem modo comparatas iudicet duas ultimas aequationes $dx = c^y dy$, & $dx : x = dy$, atque credat unica opus esse per se clara substitutione, ut ex priore habeatur formula posterior? Hoc autem si fit, necessario transformationis fundamentum est suppositio aequalitatis inter x , & c^y ; etenim diviso primo aequationis penultimae membro per x , & altero per c^y , obtinetur aequatio posterior, unde manifesto ponitur $x = c^y$, quae aequatio Logarithmicam repraesentat, adeo ut in Riccatiana demonstratione id ipsum supponatur, quod est in quaestione.

Et:

Expositam meam notationem ut eluderet Riccatus, quaerit, quomodo haviolari potuerim, se ad deductionem processisse non nisi subrogando x pro c^y ? Hariolatione sane opus non est, ubi sola contemplatio demonstrationis sufficit: nisi enim longam multarum substitutionum concatenationem instituere velit, nunquam formulam $dx = c^y dy$ transire faciet in alteram $dx : x = dy$ absque petitione principii; talem vero transformationum seriem, si tanquam notam, & obviam ponere velit, tota demonstratione superfedere potuisset; nam longe magis obviam puto transformationem primae formulae in penultimam, quam huius in ultimam. Vitiū itaque petitionis principii si libera esset demonstratio, insigni defectu laboraret. Sed huic five vitiū, five defectui optime medetur Vir Eruditissimus in appendice sua, ubi demonstrat identitatem inter aequationes $dx = c^y dy$, & $dx : x = dy$, quam equidem demonstrationis partem male ante omissam esse (si modo, ut dicit, consulto omisit) ex eo constare potest, quod illa sola multum excedat reliquum demonstrationis. Quod si forsannimum, & intempestivum brevitatis studium omissionis illius causa fuerit, potuisset eadem brevitate, & iisdem fere verbis totam demonstrationem abolvere (nisi forsā Paternorum scriptorum allegationem fastidisset) hoc modo: *remanet* $-ddy = dy^2$, vel $-ddy : dy = dy$, & integrando $\log. dx : dy = y$, vel $dx : dy = c^y$, hoc est $dx = c^y dy$, & rursus integrando $x = c^y$, (est enim $c^y dy = dc^y$, vid. *Act. Lips.* 1697. p. 291.) quae aequatio dat Logarithmicam ordinariam; vid. *Act. cit.* p. 294.

SCHEDIASMA IX.

Della quadratura della Post-evoluta della Cicloide Lettera dell' Autore al Sig. Bernardino Zendrini.

IL Problema proposto, e sciolto da VS. Eccellentiss. mi sembra uno dei più difficili della Geometria, ed io conoscendo la sua perizia in queste profonde speculazioni, stimava superfluo il tentarne lo scioglimento, dopo d'esserli ella internata nella materia. Contuttociò per secondare il suo invito, e per ricavar forse qualche nuovo lume dalla diversità de' metodi, le mando la mia soluzione tal quale ella possa essere.

Sii dunque data qualsivoglia curva ABD (Fig. 19.) la di cui evoluta sia AHF, e la post-evoluta DMI; egli è certo, che tirata dal punto B preso ad arbitrio la tangente GBM, la retta GB farà uguale alla curva AB, e la retta BM alla curva BD, dunque la linea intera GBM farà uguale a tutta la curva ABD; e perchè ciò sempre succede, in qualsivoglia sito della curva si prenda il punto B; ne segue, ch'ogni tangente terminata da una parte nell'evoluta, e dall'altra nella post-evoluta

luta è sempre uguale alla curva ABD, ed in conseguenza costante.

Ciò supposto, tirata dal punto A la linea Aa parallela alla DE tangente della curva data nel punto estremo D, e descritto dal centro A l'arco di cerchio INa, il di cui raggio sia uguale alla curva ABD, o alla sua tangente GM, dimostra il Sig. Gio: Bernoulli negli Atti di Lipsia al Mese d'Agosto dell'anno 1695., che l'arco INa è uguale alle due curve AGF evoluta, e DMI post-evoluta.

Nel nostro caso l'arco predetto farà un quadrante di circolo, perchè le due linee AE, DE, che toccano la cicloide ne' punti estremi A, e D, formano un angolo retto nel punto E. In oltre il semidiametro Aa uguale alla periferia della cicloide farà doppio della linea AZ diametro del circolo generatore, e perciò la circonferenza del quadrante farà uguale alla circonferenza del circolo generatore. Se dunque da questa circonferenza io sottrerrò la curva AHF, la quale per essere una cicloide simile alla prima è dupla del diametro AZ, rimarrà la curva DMI eguale alla periferia del circolo generatore, meno il doppio del suo diametro.

Stimo inutile l'avvertire, che nella maniera stessa si può determinare la misura di qualsivoglia porzione della curva DMI.

Questo, com'ella vede, è un semplice Corollario della proposizione universale del Sig. Bernoulli. S'incontra maggior difficoltà nella quadratura dell'area DEI, mentre osservo, che la sua formula riesce molto composta, non ostante le varie sostituzioni opportunamente inserite. In queste angustie io foglio trasmutare il mistilineo, di cui si desidera la quadratura, in un altro più semplice, se pure la trasmutazione è possibile.

Nel Problema, che abbiamo per le mani, giacchè mi si presenta l'occasione di stendere la speculazione del Sig. Bernoulli, Ella mi permetta di discorrere generalmente nella seguente maniera.

La linea GBM tocchi la curva ABD nel punto B, e tirata dal punto A centro dell'arco circolare INA la linea APN parallela alla predetta tangente, si prenda la linea AP uguale alla curva AB, o alla porzione BG della tangente; per il punto P, ed altri infiniti determinati nel modo stesso passi la curva APQa.

Dico, che l'area APQa è uguale al mistilineo compreso dalle due curve ABD, AHF, e dalla tangente DF.

Prendasi il punto g infinitamente prossimo al punto B, ed alla seconda tangente HgL sia parallela la linea AQQ.

Perchè le due linee Gg, Hg sono parallele alle due linee AP, AQ, l'angolo PAQ farà uguale all'angolo GgH: ma la linea gG=BG per la minima distanza de' due punti B, g, è anche uguale alla linea AP per la costruzione; dunque i due triangoli APQ, GgH sono uguali. Ma il triangolo APQ è l'elemento dell'area APQa, ed il triangolo GgH è l'elemento del mistilineo AgDFHA; dunque queste due superficie saranno uguali, il che dovea dimostrarsi.

Di

Di vantaggio tirata dal punto A la linea APN ad arbitrio, la quale intersechi la curva sopra descritta APa nel punto P, e l'arco circolare nel punto N, prendasi la linea AR uguale alla PN, e per il punto R, ed altri similmente trovati passi la curva ARI.

Dico, che l'area ARI è uguale al mistilineo contenuto dalle due curve ABD, DMI, e dalla tangente AI. La tangente GM è uguale al raggio AN: ma per la costruzione GB=AP; dunque PN=AR=BM. Per il rimanente s'applichi la sopra posta dimostrazione.

Suppongasi ora, che la curva ABD sia una cicloide, dico, che la curva APQa farà un semicircolo. Intendasi sopra il diametro AZ descritto il semicircolo generatore AVZ.

La linea BG tocca la cicloide nel punto B; dunque farà parallela alla corda AV: ma la corda PA è uguale, e parallela alla tangente BG per la costruzione; dunque per la proprietà nota della cicloide farà dupla della corda AV. Essendo pertanto Aa doppia di Az; dunque come Az ad Aa, così AU ad AP: ma il punto U è nella circonferenza del cerchio generatore; dunque il punto P è nella periferia d'un altro circolo, ch'ha il diametro doppio del primo, il che dovea dimostrarsi.

Resta, che s'indaghi la natura della seconda curva ARI; Sia AR=z; AX, ovvero KR=y, XR, ovvero AK=x; AN=a.

Gia che AR=z; dunque RN=a-z; ma AR=PN per la costruzione; dunque RN=AP=a-z. Per la natura del semicircolo APa

$$Aa : AP :: AP : Af$$

$$a : a-z :: a-z : \frac{a^2-2az+z^2}{a}$$

Di più stante li triangoli simili AXR^a, AfP,

$$AX : AR :: Af : AP$$

$$y : z :: \frac{a^2-2az+z^2}{a} : a-z,$$

e ridotta l'equazione,

$$ay-zy = \frac{a^2z-2az^2+z^3}{a},$$

è diviso l'uno, e l'altro termine per a-z, farà $y = \frac{az-z^2}{a}$,

$$\text{e } dy = \frac{adz-2zdz}{a}. \text{ Ma la } x = \sqrt{2z-yy}; \text{ dunque } x = \frac{z}{a} \sqrt{2az-2z^2}.$$

Quindi $xdy = \frac{azdz-2z^2dz}{aa} \sqrt{2az-2z^2}$. Per ritrovare più speditamente

l'in-

L'integrale di questa equazione pongo $AP = RN = a - z = t$, e fatte l'opportune sostituzioni trovo

$$x dy = dt \sqrt{aa - tt} = \frac{3tdt \sqrt{a^2 - t^2}}{a} + \frac{2t^2 dt \sqrt{aa - tt}}{aa}. \text{ S' avverta, che}$$

$$aP = \sqrt{a^2 - tt}, \text{ e che l'elemento dello spazio } aPQa = \frac{-dt \sqrt{a^2 - tt}}{2}; \text{ dun-}$$

que $\int -dt \sqrt{a^2 - tt} = a$ due segmenti $aPQa$, d'onde si vede l'integrazione del primo termine dell'omogeneo di comparazione. Quanto al se-

$$\text{condo, egli è integrabile, essendo } \int \frac{3tdt \sqrt{a^2 - t^2}}{a} = \frac{aa - tt}{a} \cdot \frac{3}{2} = \frac{a^3 - 3aP^3}{2a}.$$

Per ridurre il terzo, si denomi $Af = u$, e avremo $u = \frac{tt}{a}$. Facendo

dunque svanir la t , si avrà $du \sqrt{au - uu}$, la cui integrale ci dà il semi-

segmento $AePfA$; dunque $\int x dy = -2 \cdot aQPa + AePfA + \frac{a^3 - 3aP^3}{2a} - G$, la quale G è la costante da determinarsi opportunamente.

Prima di passar oltre dichiariamo il metodo da usarsi per rinvenire lo spazio ARI . Se dal centro C del circolo generatore della cicloide condurrò una parallela all' AI , essa toccherà la nostra curva ARI , e il punto del contatto dividerà in due parti. In virtù della nostra formula ritroviamo prima lo spazio rinchiuso tra la parte sinistra, e le due coordinate; indi quello, ch'è ferrato dalle stesse coordinate, dalla parte destra della curva, e dalla retta AI . Sottraendo poi il primo dal secondo di questi spazj, rimarrà lo spazio ricercato ARI .

A ritrovar il primo convien riflettere, che nel punto A , in cui dev'essere $\int x dy = 0$, s'annullano tutte e tre le x, y, z , e la linea AN viene a coincidere coll' Aa . Dunque il segmento $aQPa$ insieme colla corda AP s'annienta, ed il semisegmento $AePf$ diviene eguale al semicircolo APa ; dunque $0 = APQaA - G$, o sia $G = APQaA$. Quindi la vera

$$\text{formula sarà } \int x dy = -2 \cdot aQPa + AePfA + \frac{a^3 - 3aP^3}{2a} - APQaA.$$

Fissiamo or la costante necessaria a determinare l'altro spazio: Quando questo svanisce, la $y = 0$: ma tanto la x , quanto la z

$z = AI = a$, e la AN viene a cadere sopra la AI ; dunque il semisegmento $AePfA$ s'annulla, la Pa diviene $= Aa$, ed il segmento $aQPa$ si tramuta nel semicircolo $APQaA$. Sarà dunque $0 = -2 \cdot APQaA +$

$\frac{a^3}{2} - G$, o sia $= -2 \cdot APQaA + \frac{a^3}{2}$, le quali determinazioni ci danno la vera formula $\int x dy = -2 \cdot aQPa + AePfA +$

$$\frac{a^3}{2} - 2 \cdot APQaA - \frac{a^3}{2}.$$

In amendue le formule si faccia $y = AC = \frac{a}{4}$; e farà $z = \frac{a}{2} AZ$.

In quest'ipotesi i punti R, P si congiungono in uno, e la corda AP farà eguale al raggio del circolo APa , e per conseguenza lato dell'esagono iscritto; dunque aP lato del triangolo equilatero iscritto, a cui sarà eguale la doppia Pf . Si chiami $= B$ quel segmento nel circolo APa , che vien contenuto tra la terza parte dell'intera circonferenza, e la sua corda, ch'è il lato del triangolo equilatero iscritto, e questo lato si chiami C . Nelle nostre supposizioni farà $aQPa = B$, ed $AePfA = \frac{1}{2} B$.

Perciò nella supposizione di $y = \frac{a}{4}$ avremo il primo spazio $\int x dy =$

$$-\frac{3}{2} B + \frac{C^3}{4} - APQaA, \text{ ed il secondo de' detti spazj farà } \int x dy =$$

$$-\frac{3}{2} B + \frac{C^3}{4} + 2APQaA - \frac{a^3}{2}, \text{ e quello sottraendo da questo,}$$

$$\text{resterà lo spazio } ARI = 3APQaA - \frac{a^3}{2}.$$

Io non m'inoltro di vantaggio; perciocchè se dall'area ARI io sottrerrò l'area $ABDEA$ eguale al semicircolo generatore AUZ , rimarrà l'area cercata DEI .

Ella è pregata a confrontare questa con la sua soluzione, mentre io non avendo l'analisi della sua, non so come ottenere l'intento.

*Paragrafo d' una Lettera del Sig. Bernardino Zendrini
all' Autore.*

IN esecuzione de' reveriti comandi di VS. Illustrissima ecco l'analisi della quadratura della post-evoluta. Sia (Fig. 19.) $AZ = 2r$, $AY = x$, $AV = \sqrt{2rx}$, a cagione del circolo AVZ, $VZ = \sqrt{4rr-2rx}$, l'arco $AcV = u$, e l'altro $UTZ = Z$, MB a causa della cicloide $= 4r - 2\sqrt{2rx}$. Sia pure per abbreviare $\sqrt{2rx-xx} = p$, $\sqrt{2rx} = q$, e $\sqrt{4rr-2rx} = m$. Sarà dunque per causa de' simili settori ZST, BML; $ZV = \sqrt{4rr-2rx}$: $ST = \frac{rdx}{\sqrt{2rx}}$: $BM = 4r - 2\sqrt{2rx}$: $ML = \frac{rdx}{\sqrt{2rx}}$

$$\frac{2rdx}{\sqrt{2rx-xx}} = \frac{2rdx}{\sqrt{4rr-2rx}} = 2du + 2dm, \text{ per causa che } du =$$

$$\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}, \text{ e } dm = \frac{-rdx}{\sqrt{4rr-2rx}}.$$

$$\text{Di più } BML = ML. \frac{1}{2} BM = \frac{2du + 2dm}{2} \cdot 2r - q = 4rdu + 4rdm$$

$$= 2qdu - 2qdm. \text{ Ora } qdu = \frac{rdx \cdot \sqrt{2r}}{\sqrt{2rx-xx}} = \frac{rdx \cdot \sqrt{2r}}{\sqrt{2r-x}} = \frac{2r^2 dx}{\sqrt{2r-x}}$$

$$= 2r \cdot \frac{rdx}{\sqrt{4rr-2rx}} = -2rdm; \text{ dunque } -2qdu = 4rdm, \text{ e } 4rdu + 4rdm$$

$$= 2qdu - 2qdm = 4rdu + 8rdm - 2qdm, \text{ ed integrando, farà lo spazio}$$

$$IAbBMI = 4ru + 8rm + 2 \int -qdm = 8CVcA + 4VcAV + 8rm - P; \text{ la qual costante } P \text{ si troverà nella seguente maniera. Se } AY = 0, \text{ lo spazio } IAbBMI \text{ sarà } = 0; \text{ per lo che fa di mestieri, che la di lui espressione sia in tal caso } = 0; \text{ ed i membri } 8CVcA, \text{ e } 4VcAV \text{ in questa supposizione spariranno: ma } 8rm = 8CA. \text{ ZR diventa } = 8CA. AZ =$$

$$4AZ^2; \text{ dunque } P = 4AZ^2; \text{ e perciò farà } IAbBMI = 8CVcA +$$

$$4VcAV + 4AZ \cdot ZV - 4 \cdot AZ^2.$$

Che

Che se supponiamo cadere il punto V in Z ritroveremo tutto lo spazio IABDMI = a dodici semicircoli $AcVZ$ — quattro quadrati del diametro AZ; e per conseguenza lo spazio DMIE = ad undici semicircoli $AcVZ$ — quattro quadrati del Diametro AZ; il che ec.

Venezia li 21. Marzo 1710.

*Si seguita a trattare con differente metodo della quadratura
della Post-evoluta della Cicloide.*

LEMMA PRIMO.

Sia il quadrante di circolo ACB (Fig. 20.), e sopra il raggio AC intendasi descritto il semicircolo ADC. Esca dal punto A qualsivsia corda AD, e condotta dal punto D la tangente DK, la quale concorrerà necessariamente con la linea AK perpendicolare alla corda AD, si tirino le due rette DM, DC: dico, che le tre linee CD, DA AK sono proporzionali.

L'angolo KDM per la proprietà della tangente è retto, come altresì è retto l'angolo ADC nel semicircolo; dunque se dall' uno, e dall' altro si sottrarrà l'angolo comune ADM, farà l'angolo KDA uguale all'angolo MDC, ovvero all'angolo MCD, stante l'uguaglianza delle due rette MD, MC. Saranno pertanto simili li triangoli KDA, ACD, mentre oltre gl'angoli uguali KDA, ACD, anno gli angoli KAD, ADC retti; dunque come CD a DA; così DA ad AK: il che ec.

COROLLARIO.

Quindi sia $AI = a$, $DI = x$, che farà la corda della nuova curva, che abbiamo ad esaminare, $DA = a - x$, $DC = \sqrt{2ax - x^2}$; il valore della suttangente AK espresso per x si scoprirà $= \frac{a^2 - 2ax + x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}$.

LEMMA SECONDO.

Supposta la preparazione dell' antecedente Lemma, alla retta DI intercetta fra le due circonferenze del quadrante, e del semicircolo pongasi eguale l' AG, e per il punto G, ed altri infiniti trovati nella stessa maniera passi la curva BGA, questa farà la linea, che deve presentemente considerarsi.

○

Sia

Sia proposto da qualsivoglia punto G tirar la tangente GO. La linea KAO sia perpendicolare alla corda ADG, e la retta DK tocchi il semicircolo nel punto D. Prendasi la seconda corda ALF infinitamente prossima alla prima corda ADG, e dal centro A si descrivano li minimi archi DE, GH. Chiamo la costante AI = a, l'indeterminata AG = x la sua differenza FH = dx, l'altra indeterminata AD per l'ipotesi = a - x, la sua differenza EL = -dx, la futtangente del semicircolo data, cioè AK = s, la cercata AO = t.

Già che sono simili li triangoli LED, DAK;

$$DA : AK :: LE : ED$$

$$a - x : s :: -dx : \frac{-sdx}{a - x}$$

Di più per la similitudine de' triangoli, o settori ADE, AGH

$$AD : AG :: DE : GH$$

$$a - x : x :: \frac{-sdx}{a - x} : \frac{sxdx}{a^2 - 2ax + x^2}$$

Finalmente per esser simili li due triangoli FHG, GAO

$$FH : HG :: GA : AO$$

$$dx : \frac{-sxdx}{a^2 - 2ax + x^2} :: x : t,$$

e ridotta l'equazione, $t = \frac{-sx^2}{a^2 - 2ax + x^2}$

Il segno negativo preposto alla quantità $\frac{-sx^2}{a^2 - 2ax + x^2}$ indica, che la futtangente

te AO deve prenderfi dalla parte opposta della futtangente semicircolare AK.

LEMMA TERZO.

Sia qualsivoglia curva AGB, ch'abbia relazione al punto A, la di cui futtangente presa nella perpendicolare alla corda AG sia AO. Fatto centro in A, descrivasi l'arco GR, ed al punto R pongasi la perpendicolare RP uguale alla futtangente AO, e s'intenda descritta la curva APSU, la quale passi per il punto P, e per altri punti determinati nella stessa maniera; dico, che lo spazio ABV è duplo dello spazio AGB.

Intendasi condotta un'altra corda AF infinitamente vicina alla corda AG, e dal centro A descritto l'arco FT; l'applicata TS sia uguale alla

la futtangente corrispondente al punto F, e finalmente si tiri la linea PQ parallela all'asse. Il triangolo PHG è simile al triangolo GAO; dunque

$$FH = TR : HG :: GA : AO = RP;$$

dunque il rettangolo TP è uguale al rettangolo AGH, cioè doppio del triangolo rettangolo AGH: ma il rettangolo TP è l'elemento dello spazio ABV, e il triangolo AGH è l'elemento dello spazio AGB; dunque lo spazio ABV è doppio dello spazio AGB: il che ec.

Proposizione Prima.

Sia la curva AGB quella stessa, che fù descritta nel secondo Lemma, e supposta la costituzione del Lemma precedente, abbia ad indagarsi l'equazione locale della curva APV. L'applicata RP s'appelli y, l'abscissa AR = AG x, e per lo stesso Lemma secondo la futtangente

$$AO = RP \text{ farà } \frac{sx^2}{a^2 - 2ax + x^2} = y, \text{ cioè } sx^2 = a^2 - 2ax + x^2 \cdot y.$$

In luogo di s si collochi il suo valore espresso per x conforme il Corollario del primo Lemma, cioè $\frac{a^2 - 2ax + x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}$; dunque

$$\frac{a^2 - 2ax + x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} \cdot x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} \cdot y, \text{ e diviso l'uno, e l'altro mem-}$$

bro per $a^2 - 2ax + x^2$, s'avrà la seguente equazione

$$\frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = y : \text{ il che ec.}$$

COROLLARIO.

Dall'equazione locale $\frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = y$, ovvero $\frac{x^3}{2a - x} = y^2$ si rac-

coglie la linea APV essere la cissoide di Diocle descritta in un quadrante di circolo, essendo uguali le linee AB, BV.

La quadratura poi della cissoide dipendente da quella del circolo, essendo notissima, fù superfluo l'investigarla.

La curva AGB (Fig. 21.) descritta nel quadrante ACB può estendersi fuori del quadrante; imperocchè compiuti li cerchi CBLM, e CDAE, nell'altro semicircolo CEA s'applichi la corda arbitraria AE, la quale prolungata tagli la circonferenza maggiore in K, di poi prendasi la retta AH eguale ad EK intercetta tra le periferie del circolo maggiore, e minore; ed il punto H con altri similmente trovati sia alla curva BHF; farà questa la continuazione della curva AGB. Chiamata dunque AH x conforme il consueto, la corda AE farà $x-a$, mentre era prima $a-x$.

Questa mutazione non varia in conto alcuno il valore della suttangente, come si può vedere dal calcolo, e per conseguenza la suttangente farà sempre $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

Presa pertanto AQ=BM, e descritto il semicircolo ANQ diviso in due quadranti BNA, BNQ, se nel quadrante BNA si formerà la cissoide AON; lo spazio cissoidale ABN farà doppio dello spazio AGB, come si è dimostrato. Prolunghisi la cissoide in P, di modo che l'intera cissoide ANP sia quella, che appartiene al semicircolo, è manifesto, che lo spazio cissoidale infinito AQRPN è doppio del curvilineo AGBHF. E perchè lo spazio intero cissoidale è triplo del semicircolo ANQ, ne segue, che il curvilineo AGBHF farà triplo del quadrante BNA. La curva AGBHF si nomina concoide circolare, già che ha qualche similitudine con la concoide di Nicomede, se supporremo, che la retta, asintoto della concoide, si tramuti in una circonferenza di cerchio.

Proposizione Seconda.

Sia lo spazio curvilineo IPXO (Fig. 22.) diviso in minimi trapezi di base uguale LR, MT ec., e concepiscansi le parti della curva, cioè RP, TR ec., ed i loro seni PQ, RS ec. flessibili a guisa d'un filo; potrà dunque, stando rigide l'applicate LP, MR, il trapezio LMRP cangiarsi nel trilineo AGF, se supporremo, che li punti L, ed M s'uniscano in un sol punto. Che se ciò si praticherà in ogni trapezio, di modo che tutti li punti della divisione dell'asse si congiungano in un punto, nascerà la nuova curva AGB ed il punto A rappresenterà il concorso di tutti li punti I, L, M, N, O. Giacomo Gregorio chiama la figura AGB involuta, ed evoluta la figura IXO, delle quali si verificano le seguenti proprietà.

1. Tramutandosi il rettangolo minimo LQ nel settore di circolo AGH, ed essendo l'angolo AGH retto, e la linea AG per l'ipotesi uguale ad LP; il rettangolo LQ farà doppio del settore AGH; e perchè

chè ciò si verifica di tutti gli altri rettangoli, e settori; ne segue, che lo spazio IXO farà in proporzione dupla allo spazio AGB.

2. Per la costruzione la minima curva PR è uguale alla minima curva FG; dunque le due curve IPX, AGB saranno uguali.

3. Il triangolo GHF è simile, ed uguale al triangolo PQR; imperocchè questi triangoli anno tutti i lati corrispondenti eguali, e retti li due angoli alli punti Q, H: onde fatto l'angolo GAK retto, e tirate dalli due punti analoghi G, P le tangenti GK, PZ, saranno tra loro simili li due triangoli GAK, PLZ: ma la linea GA è uguale alla PL; dunque anche le due suttangenti AK, LZ saranno uguali.

Supposto tutto ciò, sia la nostra curva AGB, la quale si consideri come involuta, e si cerchi la natura della sua evoluta IPX. Chiamata al solito la corda AG x la suttangente AK farà $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$. Egli è

dunque evidente per le premesse, che dobbiamo trovare una curva, ch'abbia relazione al suo asse, nella quale possa l'applicata LP= x , la

suttangente LZ sia sempre $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$

Sia per tanto LP= x ; QR= dx ; IL= y PQ= dy ; dunque

$$\begin{aligned} RQ : QP &:: PL : LZ \\ dx : dy &:: x : \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}, \end{aligned}$$

cioè a dire mutata l'analogia in equazione, $dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, la qual

equazione differenziale è costitutiva della cicloide, come dimostra il Sig. Gio: Bernoulli negli atti di Lipsia al Mese di Maggio dell'anno 1697., ed il semidiametro del circolo generatore è uguale alla linea AB.

Ora sia descritta l'intera concoide circolare AGBHF (Fig. 21.) l'area della semicicloide, il di cui semicircolo generatore è BCM, farà dupla dello spazio AGBHF, ed il perimetro della stessa semicicloide farà eguale alla curva AGBHF, ed in conseguenza il curvilineo AGBHF farà triplo del quadrante BAC, come si è trovato di sopra, ed il perimetro della nostra curva farà doppio della sua base AF.

Che se poi si desiderasse la misura dello spazio AGB, concepiscasi (Fig. 23.) descritta la soprannominata cicloide QFI, e dal punto B centro del semicircolo generatore si tiri l'ordinata BF, e dal punto F cada la linea FD perpendicolare alla base; il trilineo cicloidale IDF

fa-

farà doppio dello spazio AGB, e la curva IF uguale alla curva AGB.

S C O L I O.

Questo secondo modo di misurare lo spazio compreso dalla nostra curva s'accorda perfettamente con il primo. Nella semicicloide QFI si prenda ad arbitrio il punto H, dal quale tirate l'ordinata HR, l'abscissa HS, e la tangente HK, prendasi la normale RO uguale alla suttangente SK, ed il punto O con altri infiniti nello stesso modo determinati sia ad una nuova curva ANOP; dico, che questa sarà la cissoide: imperocchè posta $SH = AR = x$, per la natura della cicloide la suttangente SK sarà $= \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$; ma per la costruzione $SK = RO$; dunque

$$RO = \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = y, \text{ la qual equazione appartiene alla cissoide,}$$

Quindi si deduce per il metodo delle tangenti di Barovv, che lo spazio cissoidale ABN inscritto nel quadrante sarà uguale al trilineo DEI, e l'area dell'intera cissoide sarà uguale all'area della semicicloide, cioè tripla l'una, e l'altra del comune semicircolo generatore ANQ.

Proposizione Terza.

Data qualsivoglia curva ABD (Fig. 19.), la di cui evoluta sia AHF, e la post-evoluta DMI, prendo ad arbitrio il punto B, e tiro la tangente GBM, questa sarà sempre costante, ed eguale alla curva ABD. Dal centro A descrivasi il settore del circolo AIA, il di cui semidiametro AI sia uguale alla tangente GM, e l'angolo aAI eguale all'angolo DEI formato dall'incontro delle due rette AE, DE, che toccano la curva ne' punti estremi A, D. Dimostra il Sig. Giovanni Bernoulli negli atti di Lipsia dell'anno 1695. al mese d'Agosto, che l'arco INa è uguale alle due curve AHF, DMI, cioè alla somma de' perimetri dell'evoluta, e della post-evoluta.

Io m'inoltro di vantaggio, e trasferisco la speculazione da' perimetri all'aree. Prendo il punto g infinitamente prossimo al punto B, e tiro la seconda tangente HgL, di poi dal punto A centro del settore intendansi con lotti i due semidiametri AN, AO paralleli alle due tangenti GM, HL. Si faccia $AP = BG$, ed $AQ = gH$, e per li punti P, Q ed altri similmente ritrovati passi la curva APQa. Dico, che l'area APQa è uguale al mistilineo compreso dalle due curve ABD, AGF, e dalla retta DF.

L'angolo PAQ si è fatto uguale all'angolo G_gH, e le linee AP, AQ uguali alle tangenti BG, gH, giacchè per la distanza infinitamente pic-

piccola il punto g cade sopra il punto B; dunque il triangolo GBH è uguale al triangolo PAQ: ma il triangolo GBH è l'elemento dello spazio ABDEFGA, ed il triangolo PAQ è l'elemento della figura APQa; dunque questi curvilinei saranno tra loro uguali: il che ec. Di più perchè $AN = GM$, ed $AP = BG$; dunque $PN = BM$, e per la stessa ragione $Qo = gL$. Facciasi $AR = PN$, ed $Ar = Qo$, e li punti R, r con altri infiniti siano ad una nuova curva ArRI: dico, che lo spazio ArRI è uguale al curvilineo compreso dalla curva ABD, dalla sua post-evoluta DMI, e dalla tangente AI. La dimostrazione è evidente, mentre il triangolo elementare RAr è sempre uguale al triangolo LgM: il che ec.

S C O L I O.

Suppongo in ordine al Problema proposto, che la curva ABD sia una cicloide, il di cui semicircolo generatore sia AVZ. L'angolo DEI sarà retto, e per conseguenza l'arco INa uguale all'evoluta, ed alla post-evoluta insieme, farà un quadrante, ed il raggio Aa uguale al perimetro della cicloide farà doppio della linea AZ, diametro del semicircolo generatore. La curva poi evoluta AGF, la quale è una cicloide, è uguale al raggio Aa; dunque il perimetro della post-evoluta DLI sarà uguale al quadrante INa meno il raggio Aa.

L'area della post-evoluta DEI + il complemento della cicloide ABDE = al semicircolo generatore AVZ è, come si è detto, uguale all'area ArRI; onde supposto, che la curva ArRI sia la medesima, che abbiamo considerata nelle proposizioni antecedenti, come dimostreremo, è manifesto esser nota l'area dello spazio DEI.

Acciò dunque sia manifesto, che la curva ArRI è la porzione della conoide circolare inclusa nel quadrante, deve dimostrarsi, che la curva APQa è un semicircolo.

Perchè la corda AP, la quale taglia il semicircolo generatore della cicloide nel punto V è parallela alla tangente BG; dunque per la natura della cicloide, e della sua evoluta, la tangente BG farà doppia della corda AV: ma PA è uguale a BG per la costruzione: dunque PA farà doppia di AV: ma il diametro aA è doppio del diametro ZA; dunque

$$AZ : Aa :: AV : AP. \text{ ovvero}$$

$$AZ : AV :: Aa : AP;$$

dunque il punto P è al semicircolo: il che ec.

Già che dunque la quadratura della post-evoluta della cicloide dipende dalla misura del curvilineo ArRI; è manifesto, che la quadratura della post-evoluta non può averli se non supposta la quadratura della cicloide, e per conseguenza quella del circolo.

SCHEDIASMA X. (*)

Della connessione, che passa tra la costruzione dell'equazioni Analitiche, e la quadratura d' infinite curve Algebraiche.

Due forti di curve Algebraiche possono distinguersi, avuto riflesso alla loro equazione locale. In alcune le coordinate x , ed y sono talmente separate, e distinte, che tutti i termini, che formano l'equazione, devono chiamarsi semplici, cioè a dire, non si dà alcun membro nell'equazione costitutiva della curva, in cui si trovi l'una, e l'altra delle indeterminate. Altre poi sono composte di termini misti, ne quali l'indeterminate in tal maniera si legano, ch'una si moltiplica per qualche potenza dell'altra, e riesco spesse volte difficile il separarle. Le sezioni del cono ce ne somministrano l'esempio; imperocchè se si proporrà l'equazione $ax + x^2 = y^2$, la quale è all'iperbola, tutti i termini sono semplici, mentre esaminandoli ad uno, ad uno si scopre, che dove si trova l'indeterminata x , non ha luogo l'altra indeterminata y . All'opposto nell'equazione $a^2 = ay + xy$, che pure appartiene all'iperbola fra i suoi assintoti, l'ultimo membro è misto, già che in esso s'incontrano ambe l'indeterminate x , ed y insieme moltiplicate, di maniera che sene forma il loro rettangolo. La medesima considerazione si può applicare alle curve di grado più elevato.

Le curve del primo genere, come che servono con la lor quadratura per sommare l'equazioni differenziali, nelle quali è riuscito di separar l'indeterminate; così sono state attentamente considerate da Promotori del Metodo Leibniziano. Si è tentato di quadrarle, o almeno di ridurle ad una quadratura più semplice, specialmente con l'uso dei logarithmi veri, ed immaginari; sopra di che vi sono frà l'altre l'acutissime osservazioni del Signor Giovanni Bernoulli negli Atti di Lipsia dell'anno 1703.

Poco, o nulla è stato scritto intorno le curve del secondo genere, se non in quanto anno procurato i Geometri di quadrarle col mezzo di qualche serie, o pure di trasformarle in curve del primo genere col separare l'indeterminate, nel che per il più s'incontra una somma difficoltà.

Con l'occasione, che mi fu proposto un Problema da sciogliere, mi sono fatto a contemplare più da vicino la natura di queste curve, e finalmente ho scoperto, che vi è una gran connessione tra la loro quadratura, ed il trovare in termini Algebraici la radice d'una data equazione Analitica, e perchè già si sa, che l'equazioni Analitiche sono di

va-

* Questo Schediasma è stato composto l'anno 1710, come consta da una lettera 21. Marzo 1710. del Sig. Bernardino Zendrini all'Autore.

varie forti, cioè alcune semplici, altre del secondo grado, o quadratiche, altre del terzo, o cubiche, e così in infinito; tutte queste anno il loro uso, e servono a misurare infiniti curvilinei.

Io non pretendo, che questo metodo sia universale, perchè ciò farebbe un presumere troppo; solo ne porterò alcuni esempi, che daranno qualche lume alla presente materia.

Principierò dunque dall'equazioni semplici.

Siano p , e q in qualsivisa modo date per x , e propongasi l'equazione $p + qy = y$, in cui l'applicata y non superi la prima dimensione, mentre l'abscissa x ascende a maggiori dignità.

Supposto $p + qy = y$, farà anche $p = y - qy$, cioè $\frac{p}{a-q} = y$. La spe-

zie a indicherà in appresso sempre l'unità. In luogo dell'ultimo membro dell'equazione, nel quale si trova la sola indeterminata y , sostituisca il suo valore $\frac{p}{a-q}$, e l'equazione premessa si trasformerà nella seguente

$\frac{p}{a-q} = p + qy$, ovvero $\frac{p}{a-q} - \frac{p}{q-q^2} = \frac{p}{q} y$. Fingasi y uguale alla differenza d'altre due indeterminate r , ed s ; dunque $\frac{p}{q-q^2} - \frac{p}{q} = r - s$,

e per conseguenza supposta l'uguaglianza frà li termini corrispondenti, il che è arbitrario, avremo due equazioni locali a due nuove curve, cioè $\frac{p}{q-q^2} = r$, e $\frac{p}{q} = s$.

Quello che si possa dedurre da questa formula generale, non può esser ignoto agli Analisti, con tutto ciò eccone un'esempio particolare.

Sia $q = x$, $p = x^m$, e la lettera m esprima un numero positivo, ed intero. L'equazione locale della curva, di cui si desidera la quadratura sarà $x^m + xy = y$, la quale per la premessa operazione è stata ridotta alla quadratura delle due curve $\frac{p}{q-q^2} = r$, e $\frac{p}{q} = s$.

In luogo di p , e q s'intenda sostituito il loro valore espresso per x , e le predette due curve si cambieranno nelle seguenti

$$\frac{x^{m-1}}{a-x} = r, \text{ ed } x^{m-1} = s.$$

La seconda equazione $x^{m-1} = s$, è costitutiva d'una delle infinite parabole. La prima poi $\underbrace{x^{m-1}}_{a-x} = r$, o pure $x^{m-1} + xr = r$ non è

diversa dall'equazione della curva proposta da principio, se non in questo, che la dignità di x si è abbassata d'un grado.

Sia di vantaggio $x^{m-1} = p$, ed $x = q$; dunque s'avrà l'equazione di prima $p + qr = r$, la quale trattata con la stessa maniera si risolverà in altre due curve $\frac{p}{q-q^2} = y$, e $\frac{p}{q} = z$, cioè sostituiti i valori di p , e

$q, x^{m-2} = z$ ad una dell' infinite parabole, ed $\frac{x^{m-2}}{a-x} = y$, ovvero

$x^{2m-2} + xy = y$, la qual equazione, se si metterà al confronto della prima equazione proposta $x^{2n} + xy = y$, non vi si scoprirà altra differenza, fuorì che la potestà di x è due gradi più depressa.

Si continui lo stesso modo d'operare, fin a tanto che la potestà di x si tolga affatto di mezzo, e si tramuti in una costante, ed allora avremo l'equazione $a + xy = y$, la qual, com'è noto, appartiene all'iperbola Apolloniana descritta fra li suoi asintoti.

Dall'Analisi si ne cava il seguente canone generale. Prendasi una serie d'infinita parabole principiando dal rettangolo, gli esponenti delle quali vadano crescendo conforme la serie naturale dei numeri, per esempio, $a = x$, $x = x$, $x^2 = x$, $x^3 = x$, e così in infinito, e raccolte in una somma l'area di tutte queste infinite parabole, alle quali s'aggiunga l'area dell'iperbola poco avanti mentovata, avremo la misura dell'area dell'infinita curve $x^m \div xy = y$, avuto riguardo, che l'esponente m superi d'una sola unità l'esponente dell'ultima parabola.

Sia la curva $x^4 + xy = y$. All'area dell'iperbola di sopra espressa aggiungo l'area del rettangolo, del triangolo, e delle due parabole quadratiche, e cubica, nella quale mi fermo, stante che il suo esponente 3 è minore d'una sola unità del numero quattro, ch'è l'esponente nella nostra curva. Dico, che l'aggregato di tutte quest'aree è precisamente uguale all'area della curva proposta.

Che se poi col nostro metodo si proseguirà nell'analisi, di maniera che la potenza di x^m non solo si cambi in una costante, ma in oltre di positiva diventi negativa; si scoprirà la quadratura dell'infinite curve

esprime con questa generale equazione $\frac{a}{x^m} + xy = y$; avvertendo solo,

che in questo caso la serie delle parabole si trasformerà in una serie d'iperbole, delle quali tutte una certa porzione dovrà essere sottratta da par-

parte dell' area iperbolica $a \mp xy = y$, conforme richiederà la natura della curva proposta.

Per efempio, fe da parte dell'arca infinita $a + xy = y$ io sottrerrò porzione limitata dell'iperbola ordinaria, la di cui equazione è $a = xz$, avrò la mifura della curva $\frac{a}{x} + xy = y$, e fe da quefta io sottrerrò di

nuovo un segmento d'un'altra iperbola solida, la di cui equazione sarà $a = x^2y$, avrà la quadratura della curva $\frac{a}{y^2} + xy = y$, e così in infinito.

Non mi estendo di vantaggio sopra questa materia, lasciando a' Geometri il determinare ne' casi particolari il rimanente.

S C O L I O.

Sò benissimo, che la quadratura delle infinite curve $x^m + xy = y$ si poteva ottenere con il metodo comune, separando l'indeterminata; imperocchè essendo $\frac{x^m}{a-x} = y$, s'io supporrò $a - x = z$, farà anche $a = z + x$.

$= x$; dunque la curva comparirà sotto un'altra forma $\frac{a-x}{x} = y$, ed

in conseguenza potrà misurarsi con il metodo ordinario. S'avrà di più la misura del solido, che si genera, fatta la rotazione della figura intorno l'asse, con alzare l'uno, e l'altro membro al quadrato. Contuttociò ho battuta una strada diversa, per aver a mio giudizio una soluzione più elegante.

Non devo tralasciare frattanto la misura del solido, che si genera, quando il curvilineo si gira intorno una linea tirata parallela alla base dal vertice, o quasi vertice della figura. Sia $x^m \div xy = y$, e faciasi $y = p \div q$; dunque $x^m = p$, la qual'equazione è ad una parabola. Dunque $xy = aq$. Ma xy è l'elemento del tronco analogo al predetto solido; dunque si avrà la sua misura, supposta la quadratura della curva, la quale è nota per le cose dette.

Paffo all'equazioni quadratiche, nelle quali la coordinata y fi trova non folo moltiplicata per le coftanti, ma di più elevata al quadrato.

S'intenda per esempio data l'equazione costitutiva d'una curva $p = 2qy = y^a$. Le lettere p , e , $2q$ esprimono le quantità in qualsivoglia maniera date per x , e le costanti.

Posta per tanto l'equazione $p + 2q = y^2$, farà $p = y^2 - 2qy$, ed aggiunto all'uno, e all'altro membro dell'equazione, conforme il metodo comune degli Analisti, il quadrato q ; farà $p + q^2 = y^2 - 2qy + q^2$,

$$p \quad \quad \quad q^2 \quad \quad \quad \text{ed}$$

ed estrarre la radice quadrata, $\sqrt{p+q^2}=y-q$, ovvero $\sqrt{p+q^2}+q=y$
ed alzati ambidue i membri al quadrato, $p+2q^2+2q\sqrt{p+q^2}=y^2$.
Si scopre adunque chiaramente, che tanto il termine y , quanto il suo
quadrato y^2 è dato per le quantità p , e q , cioè a dire per x .

Ciò fatto riassumo l'equazione proposta $p+2qy=y^2$, ed in vece
di y^2 sostituisco il valore trovato, e perciò

$$\sqrt{p+2qy}=p+2q^2+2q\sqrt{p+q^2},$$

ed espurgata l'equazione,

$$y=q+\sqrt{p+q^2}.$$

Sia la quantità $y=r+s$, dunque avrà luogo una doppia equazione

$$q=r, \text{ e } \sqrt{p+q^2}=s, \text{ o pure } p+q^2=s^2.$$

Immaginiamoci ora $p=x^m$, e $2q=x^n$, e ch'essendo m , ed n nu-
meri positivi, ed interi, sia m doppio di n . In luogo di $2q=2r$ avre-
mo $x^m=2r$, la qual'equazione è ad una parabola, ed in vece di
 $p+q^2=s^2$, avremo $x^m+x^{\frac{n}{2}}=s^2$; e perchè m si suppone dop-
pio di n , $x^m+x^{\frac{n}{2}}=\frac{s^m}{4}=s^2$ ad un'altra parabola. Tutte dunque

le curve infinite espresse per la general'equazione $x^{2m}+x^n y=y^2$ sono
assolutamente quadrabili.

Quando poi l'esponente m non fosse duplo di n , la soluzione di-
penderà dalla quadratura d'una dell'infinita iperbole.

Sia per esempio $x+x^2y=y^2$. Questa curva si risolverà in due
equazioni $x^2=2r$ alla parabola Appolloniana, ed $x+x^4=s^2$ ad una
iperbola.

Non istimo proprio d'aggiunger altro, quand'anche gli esponenti fos-
sero numeri rotti, o negativi, mentre questi casi sono tanto chiari, che
non meritano d'essere spiegati.

Ripeto la formula generale $q=r$, $p+q^2=s^2$. Sia $p=x-x^2=$
 $\frac{x^2}{4}$, e $2q=x^2$. Dunque nella prima equazione $q=r$, posto in vece di
 q il suo valore $\frac{x^2}{2}$, avremo un'equazione alla parabola $x^2=2r$. Nella

secon-

Seconda $p+q^2=s^2$, sostituiti i valori di p , e q .

$$x-x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{4}=s^2, \text{ ovvero } x-x^2=s^2,$$

la qual'equazione è al circolo, e per conseguenza la curva $x-x^2=$
 $bx^4+x^2y=y^2$, nella quale per conservar la legge degli omogenei si
prenderà la costante a quadrupla di b , dipenderà dalla quadratura del-
la parabola, e del cerchio.

Dato frattanto qualsivoglia valor di p , e q , se non riuscirà di ridurre
la curva a qualche quadratura nota; sarà sempre vero, che con questo
metodo si ridurrà almeno alla quadratura d'una curva, che non avrà
nella sua equazione locale termini misti, e nella quale le differenziali
saranno sempre separate, il che mi pare possa essere di qualche uso
nel metodo degli infiniti.

S C O L I O.

Sia la soprapposta equazione $p+2qy=y^2$, ed in luogo di y si col-
lochi il suo valore $\sqrt{p+q^2}+q$; dunque $p+2q\sqrt{p+q^2}+q^2=y^2$.
Prendasi $y^2=r^2+s^2+t^2$, e s'avranno le seguenti equazioni $p=r^2$,
 $2q^2=t^2$, $2q\sqrt{p+q^2}=s^2$, le quali servono per ritrovare la misura
del solido fatta la rotazione intorno l'asse, e sopra d'esse si possono fare
le medesime riflessioni.

Con lo stesso metodo si possono trattare le curve, nelle quali l'in-
determinata y ascende alla terza dimensione, accompagnata da tutti, o
da parte de' suoi gradi parodici; il che se non ad altro serve a tra-
sformare le curve in altre, nelle quali faranno separate l'indeter-
minate.

Il difetto però consiste in questo, che non s'è ancora scoperto un
metodo universale per trovar la radice di tutte l'equazioni Analitiche,
che possono proporsi, e che l'Algebra Cartesiana non s'inoltra all'e-
quazioni, che formontano il quarto grado.

Propongo per ultimo la curva, che mi fu proposta da quadrare,
e che mi ha data occasione di sfendere le presenti speculazioni, nella
soluzione del qual Problema si vedrà, come qualche volta sia bene d'un-
nir diverse maniere, per conseguire il fine desiderato.

Si dimanda la quadratura della curva costituita dall'equazione lo-
cale $x^3-x^2y=a^2y$. nel qual caso il valore dell'indeterminata y farà
 $=\frac{x^3}{a^2+x^2}$, e sostituito questo valore in luogo di y , avremo l'equazione

$$x^3-x^2y=\frac{x^3}{a^2+x^2}, \text{ e divisi tutti i termini per } x^2, x-y=\frac{x}{a^2+x^2}, \text{ o } x$$

— $\frac{x}{a+x^2} = y$. Pongasi $y = s=r$, e l'equazione predetta si risolverà in

altre due equazioni, cioè $x = s$ al triangolo, e $\frac{x}{a+x^2} = r$, ovvero $x =$

$r \mp rx^2$, o purè $\frac{a}{r} x = a \mp x^2$. Sia $\frac{a}{r} = 2x$; dunque $2x - x^2 = a$. Ora

quest'ultima equazione ha due radici vere, e per conseguenza in due forme si può esprimere il valore di x , cioè

$$x \pm \sqrt{x^2 - a} = x.$$

Perchè dunque $x \pm \sqrt{x^2 - a} = x$; dunque $2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - a} - a = x^2$.

Riassumo la soprapposta equazione $2x - x^2 = a$, ovvero $2x = a \mp x^2$, ed in luogo di x^2 collocato il suo valore, ho la seguente equazione

$$2x = a \mp 2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - a} - a,$$

ed espurgata l'equazione, $x = z \pm \sqrt{x^2 - a}$.

Prendo $x = \pm q \mp p$, e così dividendo l'equazione in due altre, la prima delle quali è $z = p$, ed in luogo di z sostituito il suo valore $\frac{a}{2r}$, farà $a = 2rp$ all'iperbola Apolloniana.

La seconda equazione è $\sqrt{x^2 - a} = q^2$, e sostituito il valore di $x^2 = \frac{a^2}{4r^2}$, avremo $\frac{a^2}{4r^2} - a = q^2$, ovvero $\frac{a^2}{4} - ar^2 = r^2 q^2$, o pure $a^2 b^2 - a^2 r^2 = r^2 q^2$.

Io non m'inoltro di vantaggio con l'analisi, perchè so, che quest'ultima equazione locale unita all'equazione costitutiva del quadrante del circolo compone l'equazione locale della conoide di Nicomede, la di cui quadratura dipendendo, com'è stato da altri dimostrato, da quella del quadrante, e d'un settore iperbolico, abbiamo ottenuto l'intento, e ridotta la curva da principio proposta $x^3 - x^2 y = y$ alla quadratura dell'iperbola.

SCHEDIASMA XI.

De solutione æquationum Analyticarum & Problematum Geometricorum per curvas simplicissimas.

Problematum Geometricorum in certas veluti classes distributio, non solum veteribus, sed & recentioribus necessaria visa est Analytici. Antiqui Mathematici præmissa problematum partitione in plana, solida, & linearia, legem sanxerunt, teste Pappo Alexandrino libro quarto Math. Collect., quæ a posteris communi suffragio recepta est, scilicet videri quodammodo peccatum non parvum esse apud Geometras, cum problema planum per conica, aut linearia iavenitur, & ut summatim dicam cum ex improprio solvitur genere. In veterum methodo duo inter cætera desiderabam. Primo evidens, atque indubitatum criterium, quo propositæ quæstiones secerni possent, planæ nempe a solidis, & solidæ a linearibus. Hoc illis notum fuisse res in incerto est, licet enim de locis acutissimas elucubrationes ediderint, tamen ex eodem Pappo manifestum est, Archimedes in opusculo de lineis spiralibus, & quod magis miror, Apollonium libro quinto Conicorum problema planum per conicæ sectiones construxisse. Displicet secundo loco vetustiores Geometras imperfectam problematum divisionem tradidisse, namque sub genere linearium, locos, & quæstiones cujuscunque gradus, & ordinis comprehensas video, nulla adhibita distinctione inter simpliciores, & magis compositas, nulla separatione facta Mechanicarum a Geometricis, vel, ut nunc loqui amant, transcendentium ab Algebraicis.

His incommodis obviam ivere nostri temporis Analystæ, postquam magnus ille Franciscus Vieta facem prætulit, speciosam Algebram Geometriæ conjungendo. Hac metodo problemata plana a solidis, & hæc a plusquam solidis feliciter distinxerunt, sed cum illa resolvere per curvas simplicissimas, & in suas classes dirimere aggressi sunt, scopum non attigisse infra clarissime demonstrabo.

Carolus Renaldinus vir alioquin in re Analytica exercitatissimus in suo Geometra promotum cujuscunque problematis constructionem perfecit per lineas curvas ejusdem cum problemate ordinis, & gradus. Sic æquationem ad septimam dignitatem ascendentem solvit per curvas septimi gradus, & illius, quæ pervenit ad decimam potestatem, per curvas decimi gradus solutionem exhibuit, eadem servata in cæteris methodo.

Hoc

* L'uniformità del carattere minuto, che si osserva negli originali di mano dell'Autore, e la similitudine di alcune frasi servono di fondamento per credere, che gli Schediasmi XI, XII, e XIII. sieno stati scritti in tempi poco l'uno dall'altro distanti. Veggia il Lettore ciò, che per noi si dice del tempo, in cui il C.J. ha composto lo Schediasma XII.

Hoc nihil aliud est, nisi Mathematicas légēs evertere, & contra geometricam simplicitatem præstare per plura, quod per pauciora absolvi potuisset. Artificis officium est, non solum viam detegere, quæ ducat ad propositæ quæstionis enodationem, sed insuper simplicissimam eligere, & assumere curvas, quantum fieri potest, minus compositas, & depressioris gradus ad problema construendum, & demonstrandum. Porro laudatus Auctor problemata solida per lineares locos, & plana per solidos construxit. E. G. radicem æquationis quadraticæ affirmative affectæ sub latere determinavit per intersectionem lineæ rectæ cum Hyperbola, prima siquidem ex suis lineis Mediceis Hyperbole Apolloniana est, quam æquilateram appellant, quod illum non animadvertisse satis mirari non desino.

Feliciores auspiciis rem agressus Renatus Cartesius, tentavit æquationes Analyticas in ordinem redigere, & problemata in sua genera distribuere. Observavit acutissimus vir, æquationes, quæ latus ignotum, aut quadratum non excedunt, primum, & simplicissimum problematum genus constituere, quæ plana a Geometris dici consueverunt. Similiter oriri tunc secundum genus problematum, scilicet solidorum, quando quantitas ignota ad tertiam, vel quartam potestatem ascendit, unde perperam continuata analogia, putavit æquationes quintæ, & sextæ potestatis ad tertium problematum genus pertinere; septimæ, & octavæ ad quartum, nonæ, & decimæ ad quintum, & sic in infinitum.

Hinc colligo ex mente Cartesii non variari problematum genus, quando fit transitus a potestate impari ad parem proxime majorem, sed solum quando dignitas par ad imparem uno gradu altiore affurgit, & numerum determinantem problematis genus semper duplo esse minorem exponente maximæ potestatis in æquatione contentæ, elevata, si opus fuerit, ad gradum parem.

Suspicio etiam ex eo deceptum Cartesium, quod sciret æquationes quadraticas ad simplices, & laterales reduci facili methodo, & tam veteribus, quam recentioribus familiari, quadrato-quadraticas autem ad cubicas deprimi posse per climaticam paraplerosin Vietæ peculiarem, quod artificium alijs verbis Cartesius enunciat; unde ratus regulam generalem esse, & obtinere in his casibus, in quibus occurrunt æquationes graduum elatiorum, in sua sententia confirmatus est, legemque constituit duas potestates proximas, licet diverſi gradus, unicum tantum problematum genus componere.

Primum præjudicium secundo occasionem præbuit, nam cum putasset Cartesius, æquationes graduum parium, in quibus una tantum ignota quantitas invenitur, ad æquationes graduum imparium proxime minorum reduci, idem omnino contingere in æquationibus localibus curvarum constitutivis, in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur, nimis confidenter pronuntiavit. Interim ex hoc forte derivavit locorum in suas classes distributionem, existimavitque æquationes locales ad tertiam, & quartam potestatem ascendentes, & curvas ex his oriundas unius, atque ejusdem generis esse, quod intelligendum de æquationibus,

bus, & curvis quintæ. & sextæ; septimæ, & octavæ dignitatis, & de cæteris eodem modo.

Reliquum erat, ut his jactis fundamentis unicuique problematum generi curvas proprie convenientes aptaret Cartesius, quod ita præstitit. Cum supposuisset, ut supra admonuimus, curvas tertii, aut quarti gradus ejusdem esse generis, atque ordinis; sicuti etiam curvas quinti, & sexti, septimi, & octavi gradus &c., indifferens esse judicavit, quibus lineis quis utatur, dummodo ad idem genus pertineant, libertatemque Geometris concessit in propositæ quæstionis enodatione adhibendi E. G. curvas vel cubicas, vel quadrato quadraticas. Hinc constructioni problematum ad quintam, & sextam potestatem ascendentium curvas tertii, aut quarti gradus destinavit, & si æquatio ad septimam, vel octavam dignitatem perveniat, per curvas quinti, aut sexti gradus, si ad nonam, & decimam per curvas septimi aut octavi gradus solutionem exhibuit, & sic uniformi in infinitum methodo, adeo ut genus curvarum constructioni problematis inservientium sit uno gradu depressius genere problematis.

Petrus Fermatius Analystarum sui temporis facile princeps Cartesianam hypothesim ex parte probavit, ex parte correxit. Præmissam tam problematum, quam locorum in classes distributionem retinuit, sed æquationum localium, quæ sunt curvarum constitutivæ, a gradu pari ad impari proximè minorem depressionem, tamquam impossibilem jure merito rejecit, deinde problemata cujuscumque generis per lineas simpliciores construere docuit, quod nec fecerat, nec fieri posse existimaverat Cartesius. Summa methodi, quæ apud ipsum Auctorem videri potest, huc reddit, ut idem omnino sit determinare curvas solutioni problematis congruentes, ac problema in suo genere constituere, idque obtineri potest, æquationem ab affectione sub latere liberando, dehinc utrumque membrum deprimendo, alterum per simplicem divisionem, alterum per radicis extractionem. Ascendat æquatio ad septimam, aut octavam potestatem, tum per ea, quæ superius tradita sunt, problema erit quarti generis; igitur illius constructionem exhibere possumus per intersectionem curvarum quarti gradus. Perveniat æquatio ad undecimam, vel duodecimam dimensionem, & problema ad sextum genus pertineat; illius solutionem dabimus per lineas sexti gradus, nempe cubo-cubicas juxta Fermatium. Nec difficilis erit applicatio regulæ ad cæteras æquationes in infinitum. Verum quidem est, quandoque Fermatium in casibus particularibus problematum constructionem tentasse per lineas adhuc minus compositas, specimenque exhibuit in inventionem mediarum proportionalium, sed nec canones generales reddidit, neque suæ methodo innixus generales reddere poterat.

Analystæ omnes, quotquot in manus meas pervenerunt, qui post Fermatium, & Cartesium florere, horum vestigia sequuti sunt, præter clarissimum Bernoullium, qui (a) defectus distributionis Cartesianæ notavit.

Ricc. Opere Tom. III.

Q

Ego

(a) Vide Aët. Erud. An. 1696., M. Junii.

Ego vero, ut problemata tandem suis sedibus restituantur, & geometricæ simplicitati consulatur, in Cartesio, & Fermatio aliqua immutanda, aliqua corrigenda censeo, quod sine dispendio famæ tantorum virorum me executurum profiteor.

In primis dico illos imperfectam, & insufficientem tradidisse problematum partitionem, nam & problemata generis ejusdem ad diversa genera pertinere arbitrati sunt, & problemata diversi generis sub eodem genere collocarunt. Ut res clarius intelligatur, tanquam notum suppono problemata omnia, cujuscumque tandem sint gradus, & ordinis, ad unicum genus contrahenda esse, quando solvi possunt per curvas ejusdem gradus. Sic æquationes cubicæ, & biquadraticæ unum problematum genus constituunt, videlicet solidorum, quia per conic sectiones explicantur. Pari jure, cum æquationes omnes, quæ ad septimam, octavam, & nonam potestatem assurgunt, per curvas tertii gradus construui possint, & debeant, ut infra constabit, evidens est problemata ab his derivata sub unico genere comprehendendi. Idem obtinet in æquationibus a decimo tertio gradu usque ad decimum sextum, quarum omnium constructio per curvas quarti gradus exhibetur. Quam congruenter igitur citati scriptores illas sub diversis generibus collocarint, aliorum esto judicium.

Iterum superius notavimus Cartesium, cui Fermatius consensit, æquationes nonæ, & decimæ potestatis ad idem genus revocasse, attamen mihi constat æquationes, quæ nonum gradum non excedunt, per curvas tertii gradus solutionem admittere, quod non contingit in his, quæ ad decimam potestatem ascendunt. Neque reponant prædictas æquationes explicabiles esse per lineas septimi, aut octavi gradus juxta Cartesium, vel per curvas quinti juxta Fermatium, adeoque sub eodem genere reponendas; quis enim non videt tunc problemata ex improprio solvi genere? Distinctio generum, non a quibuscumque curvis solutioni problematis inservientibus, sed a simplicissimis petenda est, adeoque problemata plana, & solida genere non differrent; nam extra dubitationem est, omnibus planis quæstionibus per loca solida satisfieri posse.

Secundo loco non placet locorum linearium Cartesiana, aut Fermatiana distributio, & satis intelligere non possum, qua ratione moti prædicti Auctores curvas E. G. tertii, & quarti gradus ad idem genus spectare existimaverint. Ego semper lineas cubicæ quadrato-quadraticis simpliciores arbitratus sum, neque Geometram absolverem, qui curvas biquadraticas in subsidium vocaret ad quæstionem enodandam, quæ facile per cubicæ solvi potuisset; nam si curvæ tertii, & quarti gradus ejusdem essent ordinis, sicuti etiam curvæ quinti, & sexti; septimi, & octavi & cæt., ex vi analogiæ idem statuere oporteret in lineis primi, & secundi gradus, & sic problemata plana cum solidis turpiter confunderentur. Deinde æquatio, quæ ad septimam, aut octavam dignitatem ascendit, solvitur non solum per duas curvas tertii gradus, sed insuper per alias duas, quarum altera est quarti gradus, altera secundi. Si igitur curvæ tertii, & quarti gradus essent æque simplices, cum aliunde con-

stet,

stet, lineam secundi gradus esse minus compositam, quam lineam tertii, sequeretur secundam solutionem esse simpliciores primam, quod quam verum sit, alii viderint. Firma ergo, atque inconcussa regula sit, variari locorum plusquam solidorum genus ex hoc præcise, quod varietur curvarum, vel æquationum localium gradus.

Ex dictis colligere licet, non bene a laudatis Auctoribus determinatas esse curvas unicuique problematum generi proprie convenientes. Proponatur æquatio ascendens ad decimam quintam dignitatem, hæc explicaret Cartesius per curvas decimi tertii, aut decimi quarti gradus, Fermatius vero per curvas octavi, ego autem pronuncio illius solutionem exhiberi posse per curvas quarti gradus. Assurgat æquatio ad dimensionem trigessimam tertiam: hujus constructionem dabit Cartesius per curvas trigessimæ primi, aut trigessimæ secundi gradus; at Fermatius sectator per curvas decimi sexti; ego infra clarissime ostendam datæ æquationis solutionem pendere a curvis sexti gradus, quod magnum esse in Analyti geometrica compendium, nemo veritatis amator poterit inficiari.

Ut datæ publicæ fidei satisfiat nostram methodum explicemus.

A. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 & cæt.

B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 & cæt.

Exponatur series A quadratorum ab unitate incipientium, quibus a regione scribatur altera series B numerorum procedentium ordine naturali; evidens est numeros secundæ progressionis respondentes quadratis primæ, semper illorum quadratorum esse radices. Hinc quadrata in prima serie disposita exprimunt, quarumcumque æquationum exponentes, vel si mavis, cujuscumque æquationis gradum; numeri autem secundæ serie designant gradum curvarum idonearum ad hujusmodi æquationes explicandas. Primum quadratum est unitas, cui in serie B etiam unitas applicatur, quod indicat æquationes primi gradus, hoc est simplices, & laterales, solvi debere per lineas primi gradus, nempe rectas. Secundum quadratum est quatuor, cui in altera serie respondet ejus radix; nempe binarius, ex quo inferitur omnes a secunda ad quartam, quarum exponentes sunt 2, 3, 4, admittere constructionem per curvas secundi gradus. Tertium quadratum est novem, cujus radix ternarius; per curvas igitur tertii gradus omnium æquationum, quæ quartum gradum superant, nonnumque non excedunt, solutio exhiberi potest. Idem de aliis esto judicium.

Quapropter quadratum utcumque sumptum in superiori progressionem denotat maximum gradum, ad quem pervenire potest æquatio, ut solutionem recipiat per curvas, quarum gradus, & natura innotescent ex numero correspondenti serie inferioris, qui semper est ejusdem quadrati latus. E. G. numerus quinque indicat, omnes æquationes, quæ vigesimam quintam potestatem ab illius quadrato denominatam non transcendunt, quomodocumque afficiantur, per curvas quinti gradus solvendas esse.

Hæc tamen prima determinatio non est numeris omnibus absoluta. Diximus supra æquationes locales curvarum constitutivas eo simpliciores

quo ad minorem gradum ascendunt. Sic minus composita censeri debet Problematis constructio, quæ sit E. G. per duas curvas, alteram secundæ, alteram tertiæ gradus, quam illa, in qua utraque curva adhibita ad tertium gradum pertineret. Cum igitur definitum sit, omnes æquationes, quarum maximi exponentes inter duo quadrata proxima continentur, explicari posse per curvas, quæ sint gradus denominati a radice majoris quadrati, id intelligendum est cum hac limitatione, ut saltem una ex prædictis curvis sit semper ad solutionem necessaria; cæterum alia curva in quibusdam casibus particularibus esse potest uno gradu depressior. Superest inquirendum, quænam sint illæ æquationes intermedie, quæ hujusmodi solutionem admittunt. Regula generalis hæc est, quæ potius exemplis, quam verbis declarari potest.

Sumo duo quadrata proxima V. G. 9., & 16. Horum radices 3., & 4. invicem multiplicentur, & productum sit 12. Numerus 12. denotat omnes æquationes a nona ad duodecimam dignitatem solvi posse per duas curvas, quarum prima sit tertiæ gradus, secunda quartæ. Itaque inter quæcumque quadrata, quorum radices unitate differant, collocetur numerus productus ex multiplicatione dictarum radicum, & eodem semper servato operandi modo, nova series orietur, ut sequitur.

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, & cæt.

Hoc habet peculiare hæc series, ut numerus quicumque medius inter duo quadrata proxima, non solum generetur ex radicibus dictorum quadratorum invicem multiplicatis, sed etiam idem numerus proveniat, si quadrato minori suum latus addatur. E. G. numero quadrato 16. adde suam radicem 4, producit numerus 20, qui in supraposita progressionem medius est inter quadratum 16, & proxime majus 25.

Secunda series jam condenda est, quæ primæ ex altera parte respondeat. Sub singulis quadratis superioris progressionis, ut supra etiam factum est, colloco eorum radices, quas eo modo scribo, quo fractiones in Arithmetica scribi solent. E. G. numero quadrato 16 subjacet suum latus designatum sequenti formula $\frac{4}{4}$. Deinde sub numeris non quadra-

tis primæ seriei pono fractionem compositam ex duabus radicibus quadratorum proximorum, ex quarum multiplicatione admonui præfatos numeros oriri. Numero E. G. 30. respondet fractio $\frac{5}{6}$. Sic igitur stabit

utraq; series.

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81; &c.

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}$ &c.

Usus

Ulus harum progressionum talis est. Numeri primæ seriei omnium æquationum gradus possibiles eminenter continent; at fractiones in secunda serie dispositæ determinant gradum duarum curvarum, quarum ope præfatæ æquationes explicari debent. Primus numerus in prima serie est unitas, cui subjicitur fractio ex unitatibus composita, hinc colligo æquationes simplices, in quibus ignota quantitas latus non excedit, facile resolvi per lineas primi gradus, nempe rectas. Secundus numerus primæ seriei est binarius, cui in altera serie respondet fractio $\frac{1}{2}$, quod

indicat, æquationes omnes quadraticas solutionem admittere per duas lineas, quarum prima sit primi, secunda secundi gradus, circulus enim cum recta conjunctus omnibus his æquationibus satisfacit. Circuli peripheriam mediam pono inter lineas primi, & secundi gradus, nam si consideretur ejus genesis simplicissima in plano, profecto inter lineas primi gradus locum habet; at vero ad secundum gradum spectat, si ad examen revocetur æquatio localis hujus curvæ constitutiva, quæ ab hyperbolæ æquilatere æquatione non differt, nisi per variam signorum positionem: unde mirum non est, circulum quandoque ad secundum gradum ascendere eo in casu, quo cum aliqua ex sectionibus conicis copulatur ad problemata solida explicanda, quod admonuisse operæ pretium duxi, ut omnis de medio tollatur æquivocatio.

Tertius numerus primæ progressionis est quatuor, & quartus sex, quibus in secunda junguntur fractiones $\frac{2}{2}, \frac{2}{3}$, ex quo inferitur æquatio-

nes tertiæ, & quartæ potestatis solvendas esse per duas curvas secundi gradus, quintæ vero, & sextæ per alias duas curvas, alteram secundi gradus, alteram tertiæ. Accipiat in superiori serie ad libitum numerus quicumque E. G. 42. Huic subjacet fractio $\frac{6}{7}$; omnes igitur æquationes a

trigesimo sexto gradu, usque ad quadragesimum secundum construuntur per intersectionem curvarum sexti, & septimi gradus. Exempla non multiplico, nam ex dictis intelligitur modus operationis in aliis casibus.

Inde emanat pulcherrimi problematis resolutio, videlicet. Data quæcumque æquatione, reperire curvas simplicissimas propositæ æquationis constructioni inservientes. Huic problemati per sequentem regulam generalem fit satis. Consideretur exponens dignitatis altioris, quæ in æquatione continetur. Si exponens reperiatur inter numeros primæ seriei, tum fractio correspondens sumpta in secunda serie determinat gradum duarum curvarum, per quarum combinationem simplicissime æquatio explicatur. At si dictus exponens non inveniatur inter numeros superioris progressionis, accipiat in serie numerus proxime major, & eodem modo fractio progressionis secundæ designat, ad quos gradus curvæ ascendere debeant, ut per illas simplicissime construat æquatio. Sit loco exempli

pli. proposita æquatio sequens $x^{34} + a^2 x^{32} = a^{33} b$. Exponens maximæ potestatis in hoc casu est numerus 34, quem constat in prima serie non reperiri. Sumatur itaque numerus proxime major, hoc est 36, cui conveniat fractio $\frac{6}{6}$.

sexti gradus, seu cubico-cubicas sufficere.

Hujus methodi demonstrationem innuere non erit abs re, ut quæ supra tradita sunt, confirmetur, & illustrentur. Theorema est omnium Analystarum calculis, & demonstrationibus comprobatum, quamcumque æquationem tot habere radices partim veras, aut reales, partim falsas, aut imaginarias, quot continet dimensiones maxima potestas ignota in æquatione contenta. Hinc si æquatio ad vigesimum quintum gradum E.G. assurgat, viginti quinque radices determinandæ sunt, quæ omnes si veræ sint, ut in aliquibus casibus accidit, omnes propositæ æquationi satisfaciunt. Ad hoc ut ergo æquationes construantur, duas curvas eligere oportet, quæ in eodem punctis se interfecent, aut saltem se interficere possint, quot radices habet, vel dimensiones æquatio, nam sicuti in unica æquatione plures radices comprehenduntur, ita illas invenire debemus unica constructione.

Jam ex altera parte certum est, & universaliter ex methodo Leibnitiana deducitur, curvam curvæ tot in punctis occurrere posse, sive secundo, sive tangendo, quot continet unitates numerus ille, qui oritur ex multiplicatione exponentium dictarum curvarum. E.G. duæ curvæ tertii gradus, quamcumque fortiantur positionem, sibi occurrere nequeunt in pluribus punctis, quam novem, qui numerus innotescit, si gradus primæ curvæ ducatur in gradum secundæ. Ut res clarius percipiatur, sit æquatio simplex, seu unius dimensionis; hæc unicam habet radicem, quæ facile determinatur per duarum rectarum intersectionem; recta enim rectam non nisi in puncto secat. Æquationes vero quadraticæ vel duarum dimensionum geminam fortiuntur radicem, adeoque explicantur per intersectionem duorum circulorum, vel circuli cum linea recta, quæ sit in duobus punctis, & duplex æquationis latus designat. Rursus confectiones, cum in pluribus punctis, quam quatuor occurrere non possint, necessario adhibentur ad construendas æquationes tertii, aut quarti gradus. Quod si æquatio ad quintam, aut sextam dimensionem ascendat, tunc assumendæ sunt curvæ, altera secundæ, altera tertii gradus, quæ juxta varias positiones in unico, duobus, tribus, quatuor, quinque, & sex punctis ad summum se interficere possunt, & sic omnes æquationis radices, si conditio problematis postulet, exhibere.

Uterius, cum duarum curvarum tertii gradus intersectio in novem punctis, & duarum quarti gradus in sexdecim punctis, & non ultra fieri possit, satis patet, ad quas æquationes explicandas hujusmodi linearum combinatio sit idonea. Tandem E. G. curva septimi gradus comparetur cum curva octavi, si invicem multiplicentur dictarum curvarum exponentes, prædit numerus 56, ex quo infero has curvas inutiles esse ad

ad construendas æquationes, quæ quinquagesimum sextum gradum superant; omnes enim illarum radices determinare non possunt, cum hæc lineæ occurrere sibi non possint in pluribus punctis, quam quinquaginta sex, adeoque in hoc casu ad lineas magis compositas recurrere debemus; & insuper his uti non oportere, in explicatione æquationum, quæ quadragesimum nonum gradum non excedunt; nam istarum determinationem assequi possumus per lineas simpliciores, nempe per duas curvas septimi gradus.

Hanc regulam quoque obtinere in omnibus casibus ex hoc fit manifestum, nam alioquin problema cujuscumque generis reduci posset ad genera depressiora, & sic solidum per lineas planas, & plusquam solidum per solidas construere liceret, quod omnino impossibile est.

Hucusque demonstrata cum his, quæ superius tradita sunt, aperitissime congruere manifestum puto, ex quo apparet mirabilis veritatum mathematicarum nexus, & dependentia.

SCHEDIASMA XII.

De modo construendi non ineleganter Problemata plusquam solida.

Communis Mathematicorum sententia est, Antiquorum analysim, magnum quondam Geometriæ arcanum, nunc inter artes inutiles reponendam, postquam nova methodus innovit, cujus inventor Vieta, promotor Cartesius. Nihil profecto excogitari potuit commodius, quam Algebræ speciosæ ad res Geometricas applicatio, satis enim se sua commendat universalitate, hujusque præsidio certa ratione obtinere datum est, quod Veteres methodo quidem duce, sed comite plerumque, aut industria, aut fortuna, assequuti sunt.

Interim si veritati locus esse potest, confidenter pronuncio, nostrum resolvendi modum vitio non carere, & magna adhuc obscuritate laborare, adeo ut nova methodus in his sæpius deficiat, in quibus antiqua excellit, & si quis utramque conjungere posset, & ex duplici unicam efficere, is omne tulisse punctum mihi videretur. Aliud est Problema solve quocumque modo, aliud elegantissima ratione id ipsum procurare, & ea perspicuitate, & nitore, qui Geometram deceat, hoc est brevissima analysi adhibita, & synthesi non operosa, quod in Veteribus admi-

(*) Una figura relativa a questo Schediasma delineata sopra una lettera scritta nell'anno 1705. serve di fondamento alla conghiettura, che il nostro Autore in quel tempo lo componesse. In certe aggiunte posteriori si legge: vel aliter juxta ea quæ tradidit nuper in Opere posthumo Marchio Hospitalius. Usq̃ in Parigi l'opera postuma del Marchese dell' Ospitale, cioè a dire il Trattato delle sezioni Coniche, l'anno 1707.

admiror, in Neothericis desidero. Non solum inventum Vietæum minus concinnam suppeditat Problematum constructionem, ut ab illustri Leibnitio observatum est, sed etiam ex modo, quo procedit, necessario derivatur perplexa resolutio, & difficilis compositio.

In primis totius novæ analysis progressum turbant quantitates ad instar fractionum expressæ, magnitudines irrationales, ascensus ad dimensiones plusquam solidas, quibus incommodis, cum vetus resolvendi ratio non subiaceat, hanc vere Geometricam dixerim, nostram potius Arithmeticæ, quam Geometriæ legibus conformem.

2. Quando ad æqualitatem ventum est, quot expurgationes, & terminorum transpositiones, quot specierum metamorphoses institui debent, ut ad simplicissimam formam revocetur æquatio? Facta reductione Geometrica effectio aptatur potius inventæ æquationi, quam Problemati proposito, & cum in quolibet genere Problemata sint infinita, æquationum vero numerus determinatus, constructio minus naturalis evadit; semper enim eodem modo solvitur Questio E. G. omnia Problemata solida explicantur per intersectionem parabolæ cum circulo juxta Cartesium, vel circuli cum ellipsi juxta Slusium, aut per duas hyperbolas Heuratii, vel per duas parabolæ Bakeri, & tamen in casu particulari quandoque Problematis conditio postulat, ut diversa utamur linearum solidarum combinatione; ex hac enim elegantissima profuit solutio, quam ab aliorum methodo sperare non licet. Veteres, teste Pappo Alexandrino, magnam collegerunt suppellectilem locorum tum planorum, tum solidorum, quos resolutos vocabant, & quos satis apposite adhibebant ad enodandas questiones, varietate locorum respondente varietati Problematum. Hinc cum resolutivus progressus duceret ad locos jam resolutos, vel saltem viam sterneret ad venanda nova loca constructioni inservientia, mirum non est hoc artificio obtineri solutionem magis naturalem, & cujusvis Problematis genio accommodatam.

3. Postquam ad mentem Recentiorum Problema constructum est, vix dimidium operis confecimus; superest enim ut vestigia analysis relegendo, eruamus Geometricam demonstrationem. At dum tentamus Algebraicæ resolutioni aptare compositionem verè Geometricam, in tot difficultates incidimus, ut melius plerumque sit novam cudere demonstrationem, quam prosequi insinuatam ab analysi. In Antiquorum methodo istæ perplexitates non occurrunt; sponte si quidem, ut ita loquar, analysis sequitur synthetis, & nihil tam obvium est, quam componendo demonstrare, quod resolvendo inventum est. Hos omnes defectus de medio tollere haud permittit ingenii tenuitas. Tantum specimen aliquod methodi exhibeo, ut Analysis fortasse occasionem præbeam meliora edendi. Interim tria præstare conabor.

1. Calculi tedium minuendum est, & liberanda resolutio a quantitate asymmetria, & magnitudinibus plusquam solidis.
2. Constructio ex ipsa analysi petenda est, & curvæ locales determinandæ, ex quarum intersectione, quantum fieri potest, minus composita habetur solutio.

3. Ita

3. Ita algebram cum Geometria conciliare oportet, ut ab analysi ad synthetism facilis evadat regressus.

Totum vero artificium in eo consistit, ut in resolutione pluribus quantitativis ignotis utamur juxta Problematis conditionem, & gradum.

Ignotæ porro quantitates non ad arbitrium, sed quando res postulat, sumendæ sunt, neque illarum numerus frustra multiplicandus; hoc enim confusionem pareret: sed sequentem potius adhibeamus cautionem.

Quando in analysi propositi Problematis eo ventum est, ut ulterius progredi non liceat, quin ignota quantitas assumpta, rem tractando juxta Questionis circumstantias, ad superiores gradus sive puros, sive affectos necessario ascendat, neque aut divisione, aut radice extractione ad simpliciorum reduci possit, tum species mutandæ sunt, & in resolutionem nova quantitas ignota introducenda, qua industria toties uti debemus, quoties in eundem casum incidimus. E. G. si ex problematis conditione quantitas ignota $\frac{ax+xx}{b}$ ducenda esset in x , productum $\frac{ax^2+xx^2}{b}$

ad tertiam potestatem pertineret; loco igitur ipsius $\frac{ax+xx}{b}$ ponatur se-

cunda incognita y , & productum evadat xy . Rursus sit quantitas ex ignotis composita $\frac{axy-xx^2}{a}$, quæ ducenda sit in $b-x$: tunc in producto $\frac{bxy-xx^2}{a}$

continetur solidum xy compositum ex quadrato magnitudinis ignotæ x , & latere alterius ignotæ y . Ad vitandum igitur ascensum loco $\frac{xy}{a}$

substituto tertiam incognitam z , & productum erit $bz-zx$.

In his operationibus dignitates altiorum graduum eminenter continentur; attamen species intra planorum limites semper subsistunt, quod quam magni sit usus, infra parebit exemplis.

Licet aliquando in resolutione ad cubos, & solida ascendere, si nempe in questione proposita, cuborum, & solidorum præcipue ignotorum aperta fiat mentio; Geometria enim a solidorum comparatione non abhorret. Cavendum interea est, ne ad dignitates cubo altiores perveniamus, & si regia via progrediendum sit, licebit solida, vel per rationum compositionem, vel alio quocumque modo resolvere. Exemplis potius methodus illustranda sit. Sit igitur propositum

P R O B L E M A I.

Eptagonum circulo inscribere.

*Quod ad aliud reducitur vestigiis Euclidis insistendo, videlicet
Triangulum isosceles construere, cujus uterque angulus
ad basim sit triplus reliqui.*

Sit jam factum, illudque sit triangulum ACB (Fig. 24.) Dividatur
angulus ad B in tres partes æquales, & tres anguli ABE, EBD,
DBC sint tum inter se, tum angulo C æquales, & linea AC, vel CB,
quæ ad arbitrium sumi potest, vocetur a .

Hoc Problema sic methodo vulgari resolvi potest.

Ignota CE esto x , adeoque AE erit $a - x$, & ob similitudinem tri-
angulorum CAB, ABE, ut CA ad AB, ita AB ad AE, & ob id rectan-
gulum CBE erit æquale quadrato AB; sed rectangulum CAE est $aa - ax$;
ergo & quadratum AB, sive BE erit $= aa - ax$, & AB, vel BE $=$
 $\sqrt{aa - ax}$.

Rursum ob similitudinem triangulorum ECB, EBD.

EC quadratum: CB quadratum:: EB quadratum: DB quadratum

$$x^2 : aa :: aa - ax : \frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x}$$

Ob eandem rationem

$$\begin{aligned} EC &: EB :: EB : ED \\ x &: \sqrt{aa - ax} :: \sqrt{aa - ax} : \frac{aa - a}{x} \end{aligned}$$

& DC $= x + a - \frac{aa}{x}$, si nempe ex CE $= x$ subducatur ED $= \frac{aa - a}{x}$

sed DC, & DB sunt æquales ob æquales angulos DCB, DBC; ergo
perventum est ad æquationem $\sqrt{\frac{a^2}{xx} - \frac{a^2}{x}} = x + a - \frac{aa}{x}$

& sumptis utriusque membri æquationis quadratis,

$$\frac{a^2}{xx} - \frac{a^2}{x} = x^2 + 2ax - a^2 = 2 \frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{xx}$$

& expurgata æquatione,

$$x^2 + 2ax^2 - a^2x = a^2.$$

Mc

Methodi vulgaris ope tali pacto obtinetur æquatio: sed cum Analysta
resolutionis vestigia reperit, & demonstrationem aggreditur, in magnas
incidit perplexitates, ob quantitates solidas, & irrationales, quæ in reso-
lutione continentur, ita ut si illam assequi liceat, fortunæ, aut industriæ
potius, quam arti id tribuendum sit.

Nostra methodo sic rem absolvimus.

Sint ea omnia, quæ superius. AB igitur, vel BE erat $\sqrt{aa - ax}$;
sed ex antecedentis analysis progressu patet, quod iisdem signis retentis,
ad superiores gradus sit ascensus; ergo per regulam traditam secunda
quantitas ignota in subsidium vocanda est. Sit $\sqrt{a^2 - ax} = y$. Ob simili-
tudinem triangulorum ECB, EBD sequens oritur analogia.

$$CE : CB :: EB : BD$$

$$x : a :: y : \frac{ay}{x}$$

Sed DC est æqualis ipsi BD ob angulos æquales DCB, DBC, &
DC erat ex superiori resolutione $= x + a - \frac{aa}{x}$; ergo datur æquatio

$$x + a - \frac{aa}{x} = \frac{ay}{x}, \text{ sive } xx + ax = aa + ay.$$

Ut locus Geometricus huic ultimæ æquationi respondens invenitur,
sic procedendum est. Quoniam $xx + ax = aa + ay$, erit $xx + ax = ax$,

si $a + y$ ponatur $= z$: addito utrimque $\frac{1}{4}aa$, erit $xx + ax + \frac{1}{4}aa$
 $= ax + \frac{1}{4}aa$, & hinc inde extracta radice, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}$.

Sit $x + \frac{1}{2}a = q$, & erit $q^2 = ax + \frac{1}{4}a^2$. Esto insuper $\frac{1}{2}a + z$
 $= p$; ergo $q^2 = ap$, qui locus est ad parabolam.

Rursum altera æquatio erat $\sqrt{aa - ax} = y$, hoc est $aa - ax = yy$.

Statuatur $a - x = r$; igitur $ax = y^2$, qui locus est ad alteram para-
bolam, & sic per duarum parabolaram intersectionem Quæstio soluta est.

Tentemus modo quæstioni satisfacere aliorum placitis insistendo.
Repetamus itaque superius inventam æquationem $x^2 + 2ax^2 - a^2x = a^2$,
quæ si construenda sit more Carthesiano liberanda prius erit ab affe-
ctione sub quadrato, deinde per circulum, & parabolam habebitur in-
tentum. Verum huiusmodi æquationis expurgatio, & reductio ad cubum
tantum affectum sub latere totius analysis, & synthesis progressum tur-
bat, & solvendi problematis hypothesim confundit.

R 2

Mc

Methodus, quæ locis utitur juxta mentem Fermatii, talis est. Supponatur comparationis homogeneum prædictæ æquationis, scilicet a^3 , æquari solido axy , & cum hac quantitate assumpta comparetur utrumque æquationis membrum, eritque prima æquatio $a^3 = axy$, hoc est $a^2 = xy$, qui locus est ad hyperbolam intra asymptotos. Altera æquatio erit $x^3 + 2ax^2 - aax = axy$, & omnibus per x divis, $x^2 + 2ax - a^2 = ay$, qui locus est ad parabolam. Per intersectionem igitur hyperbolæ, & parabolæ problemati fit satis.

Vel aliter juxta ea, quæ tradidit nuper in opere posthumo Marchio Hospitalius. In supradictæ æquatione $x^3 + 2ax^2 - a^2x = a^3$ ponatur loco quadrati x^2 divisi per cognitam quantitatem a secunda ignota y , ita ut confurgat æquatio ad parabolam $\frac{x^2}{a} = y$, deinde loco plani x^2

in æquatione proposita substituatur suus valor ay , & sic stabit æquatio $axy + 2a^2y - a^2x = a^3$, & omnibus terminis ad a applicatis, $yx + 2ay - ax = a^2$. qui locus ad hyperbolam pertinet. Quæstio igitur solvitur per combinationem parabolæ, & hyperbolæ.

Non dissimili ratione alia loca solida venari possumus, & eo artificium deducere, ut acceptis ad libitum duabus conic sectionibus, vel circulo, & quacumque conic sectione, per harum intersectionem problema enodare valeamus.

Interim methodum tam Fermatii, quam Hospitalis Carthesianæ præfero, eo quia neutra ullam adhibet expurgationem, aut specierum transmutationem, ut constructionem perficiat, utraque tamen vitio non caret; nam opportune quidem determinat valorem magnitudinis incognitæ x , sed dum æquationem analyticam in duos locos Geometricos resolvit, & assumit secundam ignotam y , hæc quantitas, ut ita loquar, extranea est, neque convenit præmissæ præparationi. Valor ipsius y relatus ad primam incognitam x , secundum Fermatium est $\frac{aa}{x} = y$, secundum Hospitalium

est $xx = y$. Nullam autem in fig. 24. præparationis invenio lineam, quæ hujusmodi valoribus respondeat, adeoque quantitas y , quæ non minus ac prima ignota x ex constructione innotescit (semper enim vel sola, vel juncta magnitudinibus datis, & aliquando etiam ignotis componit alterutram ex coordinatis curvarum localium) in demonstratione vix locum habere potest, cum nullum habeat in præparatione. Hinc compositio extraneis quantitatibus implicatur, atque ardua, & expertis artis redditur, ut propria experientia didici, qui defectus in methodum nostram non cadit, nam secunda ignota y optime præparationi congruit; valet

enim idem ac $\sqrt{a^2 - ax}$, & per consequens designat quantitatem AB , vel EB . Hæ autem lineæ non solum in præparatione, sed etiam in demonstratione considerandæ sunt, ut ex ipso compositionis progressu manifestum est.

Si

Si libeat in constructione, & demonstratione, ad specimen artis ostendendum, præmissæ nostræ analytici vestigia sequi, ita Problema Geometricè constructur, & demonstratur.

Sumatur (Fig. 25.) infinita FX , cui ad angulos rectos insistat FH æqualis lateri quæsitæ trianguli, & vertice F , axe FX , parametro FH describatur parabole FKV . Latus rectum FH bisariam dividatur in puncto G , & agatur indefinita GT ipsi FX parallela, deinde a linea FK abscindatur FL æqualis quartæ parti parametri FH ; & insuper LN æqualis dictæ parametro. Erigatur perpendicularis NR , secans rectam GT in puncto P , & posita PR æquali lateri recto FH , vertice R , axe RN , parametro RP , vel FH describatur altera parabole RV primam secans in puncto U , & ducantur normales VS , VT . PS est $= x$, $SV = PT = NX = y$.

Dico primo rectangulum BRS esse æquale quadrato SV , vel PT , quod ex descriptione parabolæ RV manifestum est; supponitur enim RP æqualis lateri recto dictæ parabolæ.

Dico secundo rectangulum RPS una cum quadrato PS esse æquale quadrato RP , & rectangulo RPT . Ex natura parabolæ rectangulum HFX est æquale quadrato XV ; sed rectangulum HFX est æquale duobus rectangulis HFL , & HF in LX , quorum primum potest quartam partem quadrati FH ; assumpta est enim in constructione FL æqualis quartæ parti ipsius FH ; igitur quadratum UX est æquale rectangulo AF in LX , & insuper quartæ parti quadrati FH , seu quadrato FG , vel XT . Quadratum autem VX æquatur quadratis XT , TV , & duplo rectangulo XTV , quod duplum rectangulum æquale est rectangulo sub RP in TV ; facta est enim RP æqualis FH , & per consequens dupla ipsius XT ; ergo si ab utraque parte auferas quadratum XT , rectangulum sub FH in LX erit æquale rectangulo sub RP in TV , & quadrato TV , seu rectangulo RPS , & quadrato SP .

Porrò cum rectangulum sub FH in LX sit æquale duobus rectangulis sub FH in LN , hoc est quadrato FH , vel RP , & rectangulo sub FH in NX , hoc est rectangulo RPT , erit rectangulum RPS una cum quadrato PS æquale quadrato PR , & rectangulo RPT . Q. E. D.

Ponatur jam AC æqualis PR (Fig. 24., & 25.) & CE æqualis SP , adeoque AE erit æqualis SR . Super data AE construatur triangulum Isosceles ABE , cujus utrumque latus sit æquale datæ PT , & jungatur BC . Ex supra demonstratis erit rectangulum CAE æquale quadrato AB , vel EB , & rectangulum ACE plus quadrato EC æquale quadrato CA plus rectangulo CAB . Dico jam triangulum ACB esse quæsitum. CE ita dividatur in puncto D , ut rectangulum CED sit æquale quadrato EB , & ducatur DB .

Quoniam rectangulum CAE est æquale quadrato AB , erit ut AC ad AB , ita AB ad AE ; ergo triangula ACB , ABE habentia circa communem angulum A latera proportionalia, erunt similia. Isosceles est igitur triangulum ACB , & angulus ABE æqualis angulo C .

Iterum, quoniam rectangulum CED factum est æquale quadrato EB , erit, ut CE ad EB , ita EB ad ED , adeoque triangula ECB , EBD

134
EBD habentia circa communem angulum E latera proportionalia erunt similia; angulus igitur EBD est æqualis angulo C.

Tandem quoniam rectangulum ACE, & quadratum EC sunt æqualia quadrato CA, & rectangulo CAB, si hinc inde auferatur rectangulum ACE, erit quadratum EC æquale differentiæ quadrati CA, & rectanguli ACE, hoc est rectangulo CAE, & insuper rectangulo CAB; sed rectangulum CAE est æquale quadrato AB, vel EB, hoc est rectangulo CED; ergo quadratum EC æquatur rectangulis CED, CAB, & ab utraque parte dempto rectangulo CED, erit differentia quadrati EC, & rectanguli CED, scilicet rectangulum ECD æquale rectangulo CAB, vel CBE.

Jam ob superius demonstratam similitudinem triangulorum EBD, ECB, erit, ut EB ad BD, ita EC ad CB; ergo rectangulum CBE erit æquale rectangulo sub EC in BD: sed rectangulo CBE erit etiam æquale rectangulum ECD; igitur rectangula ECD, & EC in BD sunt æqualia, & ob eandem altitudinem EC, DC & DB sunt æquales, & per consequens angulus DBC æqualis angulo C. Tres itaque anguli ABE, EBD, DBC sunt tum inter se, tum angulo C æquales, & ob id angulus ABC triplus anguli C, quod erat faciendum.

S C H O L I U M I

Præmissum problema construximus per duas parabolas, sed facilius expediri poterat per parabolam, & hyperbolam. Prima namque æquatio localis erat $a^2 - ax = y^2$ ad parabolam. Altera æquatio item ad eandem curvam erat $ax + xx = a^2 + ay$, vel $x^2 - ay = a^2 - ax$. Loco membri $aa - ax$ pono suum valorem y^2 , qui a prima æquatione locali determinatur; ergo $xx - ay = yy$, hoc est $ay + yy = xx$, qui locus est ad hyperbolam, quam æquilateram vocant. Combinatio itaque parabolæ, & hyperbolæ quæstioni satisfacit. Interim gemina parabola potius usus sum, licet difficilior, & magis prolixa evaserit compositio, quia parabolam simpliciore, & minus compositam curva hyperbolica sum arbitratus, si non genere & gradu saltem æquatione locali. Huic observationi nec scrupulosus adhærere, nec illam omnino spernere debet Analysta. Eligat igitur curvas quantum fieri potest æquationis simplicioris, dummodo id permittat, ut in casu nostro natura problematis.

Omittere non possum elegantem solutionem per hyperbolam intra asymptotos, & circulum, quæ ita se habet. Transformentur species sequenti modo. Sit ignota $y = data\ b$, hoc enim arbitrarium est, & nota a ponatur æqualis incognitæ q , & $a - x = z$. Prima æquatio localis, facta specierum metamorphosi, novam hanc induit formam $xq = b^2$, quæ æquatio spectat ad hyperbolam intra asymptotos. Secunda æquatio localis $ax + xx = aa + ay$ transmutata ad normam assumptæ hypothese talis est $3qz + bq - qq = xz$, qui locus quidem est ad alteram hyperbolam: sed si vice $3qz$ colles suum valorem $3b^2$ cognitum ex æquatione $xq = bb$, hyperbola transit in circulum, & oritur æqua-

tio

135
tio localis ad circulum $3bb + bq - qq = x^2$. Simili ratione, mutata positione specierum, alios locos omnino diversos indagare possumus, unde colligitur nostræ methodi sæcunditas.

S C H O L I U M II

Consueverunt Analystæ duplicem, aut triplicem quantitatem ignotam assumere in resolutione problematum indeterminatorum, sive localium, hoc est duas incognitas si locus est ad lineam, tres si pertinet ad superficiem, cum optimè noverint hujusmodi problemata per unius ignotæ positionem solvi non posse. Cæterum plurium ignotarum usus non adeo communis est; nam licet aliqui in analysi multas ignotas in subsidium quandoque vocaverint ad calculi tedium minuendum, tamen illarum valoribus substitutis, omnes tandem reducunt ad unicam incognitam, & sic resolutionem claudunt per consuetam æquationis inventionem, cujus constructionem perficiunt more vulgari, quod omnium Analystarum exemplis ostendi potest.

Neque aliter rem expedire, aut possunt, aut debent, cum enim hucusque nemo docuerit, qua occasione, & quibus in circumstantis secunda, & ultiores quantitates ignotæ sumendæ sint, sequitur delectum ignotarum hucusque fuisse artis expertem, & omnino arbitrarium. Quod si quis duas ignotas accipiat ad libitum, & his utatur tamquam duabus coordinatis geminæ curvæ localis inservientis solutioni quæstionis, fieri potest, ut fortuito incidat in duo loca, quæ simplicissima sint, neque assurgant ad altiore gradum, quam postulet conditio problematis, sed plerumque quæstio solvetur ex improprio genere, solida nempe per curvas plusquam solidas, & linearia cujuslibet classis per curvas convenientes quæstionibus sublimiorum graduum.

In Fig. 24. vocata data AC a , eligantur duæ ignotæ ad libitum AB, & ED, quarum prima sit x , secunda y . Ex supra demonstratis.

$$AC : AB :: AB : AE$$

$$a : x :: x : \frac{xx}{a},$$

adeoque CE erit $= a - \frac{xx}{a}$ sed proportionales sunt

$$CE : EB :: EB : ED$$

$$a - \frac{xx}{a} : x :: x : y;$$

ergo prima datur æquatio localis $xx = ay = \frac{x^2 y}{a}$ ad curvam tertii gra-

us. Rursus

EC

$$EC : CB :: EB : BD$$

$$\frac{a-xx}{a} : a :: x : \frac{a^2x}{aa-xx}$$

sed $BD = DC$, & $DC = a - \frac{xx}{a} - y$; ergo oritur altera æquatio lo-

$$\frac{aax}{aa-xx} = a - \frac{xx}{a} - y, \text{ videlicet } a^2x = a^2 - 2aax + x^2 - a^2y +$$

$axxy$, quæ æquatio simplicissima est ad curvam quarti gradus. Peccaret Analysta contra leges Geometricæ simplicitatis, si problema hac ratione construeret, & in eundem scopulum incideret, si pro coordinatis curvarum localium eligeret duas ignotas EB , BD , & hac hypothese adhibita tentaret solutionem problematis. Nostra methodus has difficultates de medio tollit; quando enim in resolutione ventum est ad quantitatem $\frac{xx}{a}$, vel ad aliam $a - \frac{xx}{a}$ ulterius progredi non licet, nisi ascen-

dendo ad magnitudines solidas. Canon itaque generalis subit, ut secundæ ignotæ detur locus, adeoque recta AE , vel saltem EC erit $= y$. In hac suppositione omnia legitimè procedunt, & habetur solutio vere Geometrica per duplicem curvam secundi gradus, Hæc dicta sint, ut Analystæ innotescat usus, & necessitas nostri Canonis generalis; ex hoc enim totius methodi vis, & artificium dependet.

PROBLEMA II.

Datis base, & perpendicularo, dataque ratione aggregati ex uno latere; & perpendicularo ad aggregatum ex altero latere & perpendicularo, reperire triangulum.

HOc Problema consulto elegi, utpote jamdudum resolutum a Renaldino in suo Geometra promotum pag. 52. operosa præparatione, analysi, expurgatione, & constructione. Nostra autem methodo sic problemati satisfacio, nulla adhibita præparatione.

Sit jam factum: & quæsitum triangulum esto ABC (Fig. 26.) in quo datur basis $AC = a$, normalis $BD = b$, & ratio $AB + BD$, ad $BC + BD$ data est ut r ad s .

Aggregatum ex $AB + BD$ esto x ; ergo $r : s :: x : \frac{sx}{r}$, quæ ultima

quantitas est æqualis summæ ipsarum BD , & BC ; adeoque $BC = \frac{sx}{r} - b$,

c-

ejusque quadratum $= \frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r} + b^2$, ex quo si auferas quadratum

$BD = b^2$, erit quadratum $DC = \frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}$, & $DC =$ radici hujus

quadrati. Hic nostra analysis sistit; nam si progrediendo supponamus AD esse $= a - \sqrt{\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}}$, & hujus quadratum efformandum sit, ut

additum quadrato DB fiat horum aggregatum æquale quadrato AB , implicatissima redditur æquatio, in qua continentur quantitates irrationales. Igitur $\sqrt{\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}}$ sit $= y$, & $AD = a - y$, quæ facilitatis gratia

non necessitatis vocetur z ; ergo $z^2 + b^2 = x^2 - 2bx + b^2$, seu $x^2 - 2bx = z^2$, qui locus est ad hyperbolam. Altera æquatio erat $\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{2bsx}{r}$,

qui locus est ad alteram hyperbolam, & per duarum hyperbolarum intersectionem solutum est Problema propositum.

PROBLEMA III.

Data differentia segmentorum basis, & alterutro angulorum ad basim, datoque rectangulo sub lateribus, reperire triangulum.

Sit jam factum, & quæsitum triangulum sit ABC , in quo datur differentia segmentorum basis AE , angulus BAC , & rectangulum sub lateribus AB , $BC = c^2$. A puncto E ad latus AB intelligatur ducta perpendicularis EF .

In triangulo rectangulo AFE , quoniam AE data est, & datur angulus ad A , datum erit magnitudine dictum triangulum; ergo utraque AF , FE data est. Sit $AF = a$, $EF = b$, & ignota $FB = x$. Quadratum igitur EB , vel BC , erit æquale duobus quadratis FB , & FE . Quod si EB ponatur æqualis secundæ incognitæ y , ventum erit ad æquationem $b^2 + x^2 = y^2$, qui locus est ad hyperbolam aequilateram. Rectangulum porro ABC , vel ABE erat æquale plano c^2 , & cum AF sit $= a$, $FB = x$, & $BE = y$, erit idem rectangulum $ABE = ay + xy$; Ergo altera oritur æquatio localis $ay + xy = c^2$ ad hyperbolam intra asymptotos. Per intersectionem itaque duarum hyperbolarum Problema solutum est.

Ricci. Opere Tom. III.

S

Hoc

Hoc problema, aliaque similia in Astronomicis locum habent, si tamen verum est, quod Cassinus suspicatur, planetas motu suo non describere Ellipsim Apollonianam, sed omnino diversam, in cuius nempe peripheria sumpto da libitum puncto, & ductis ad utrumque polum lineis rectis, harum summa non est ubique eadem, ut in Ellipsi vulgari, sed potius semper constans est rectangulum sub dictis lineis comprehensum.

Decreveram methodum ad solida tantum Problemata hucusque applicatam ad linearia etiam extendere, sed jam nimis in longum dissertatio excurrit. Itaque otio tuo Illustrissime Vir diutius abutendum non est. Quod si tu, alique in Geometrico pulvere exercitati has nugas putent esse aliquid, non dubitabo methodum ipsam usque ad umbelicum perducere.

APPENDIX.

UT datæ fidei satisfiat, methodus, quam superiori dissertatione adumbravi, amplianda est, & quæstionibus magis compositis applicanda, qua data occasione, non solum ostendam, quomodo se gerere debeat Analysta in casibus difficilioribus, sed etiam non inutiles fortasse meditationes adjungam circa naturam, & constitutionem Problematum plusquam solidorum, & locorum linearium. Verum quia nuda præcepta vix intelligi possunt, non erit abs re præceptis exempla conjungere, sumpto initio ab his quæstionibus, quæ ad quintum, aut sextum gradum ascendunt, & primum genus Problematum linearium constituent. Sit igitur propositum.

PROBLEMA I.

Data prima, & summa secunda, & sexta in serie sex quantitatum continue proportionalium, singulas distinguere.

Prima quantitas nota ex hypothesi vocetur a , aggregatum ex secunda & sexta sit b , secunda vero, quæ ignota est, ponatur $= x$, adeoque sexta erit $= b - x$. Adhibita methodo ordinaria, sic stabit analysis

$$a : x : \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{aa} : \frac{x^4}{a^3} : \frac{x^5}{a^4} = b - x.$$

Nostra methodo, quando perventum est ad magnitudinem $\frac{xx}{a}$ ulté-

rius progredi datum non est, nisi ad quantitatem tertii gradus ascendamus,

mus, videlicet ad $\frac{x^3}{a^2}$ loco igitur $\frac{x^2}{a}$ pono secundam incognitam y ,

eruntque proportionales

$$a : x :: y : \frac{y^2}{x}.$$

Hic iterum subsistere necesse est, nam si procedat resolutio, in eundem scopulum incidimus. Sit ergo $\frac{y^2}{x} = z$. Fiat ut secunda x ad tertiam

y , ita quarta z ad quintam $\frac{yz}{x}$. Rursus ut tertia y ad quartam z , ita

quinta $\frac{yz}{x}$ ad sextam, nempe $\frac{x^2}{x}$; sed sexta erat etiam $= b - x$; ergo

datur æquatio $\frac{z^2}{x} = b - x$, vel $z^2 = bx - x^2$. Ecce ex analysi constru-

tionem.

Quoniam prima æquatio erat $\frac{xx}{a} = y$, qui locus est ad parabola-

lam, sumatur indefinita AH (Fig. 27.), & vertice A, diametro AH, parametro $= a$ descripta intelligatur parabola Apolloniana ACE, & ducta ad AH normali AB, omnes abscissæ AB vocentur x , & omnes applicatæ BC in trilineo parabolico vocentur y . Jam quia altera æquatio erat $\frac{yy}{x} = z$, hoc est $yy = xz$, seu æquatione in analogismum conversa, $x :$

$y :: y : z$, fiat semper ut AB ad BC, ita BC ad BD, & per punctum D, aliaque simili ratione inventa, transeat curva ADE, in qua ordinatim applicatæ semper erunt $= z$. Ultima vero æquatio $bx - x^2 = z^2$ dat circuli peripheriam ADF descriptam super diametro AF $= b$, quæ curvam ADE secabit in puncto D, & ducta perpendiculari BDC, AB erit secunda, BC tertia, & BD quarta ex quæsitis proportionalibus. Q. E. F.

Scholium primum.

Si loco aggregati ex secunda, & sexta quantitatē, data fuisset ipsarum differentia, in geminam incidissemus æquationem $z^2 - x^2 = bx$, & $x^2 - z^2 = bx$. Prima oritur, quando crescit proportio, secunda quando decrescit, utrique autem satisfacit hyperbola æquilatera. Interim non est animus prosequi varios Problematum casus, & determinationes, vel curvarum proprietates; hæc enim extra nostrum sunt institutum. Ali-

Aliqua potius tradenda sunt de constitutione locorum linearium, quorum descriptio Mathematicorum semper vexavit ingenia. Contemnenda non est Antiquorum methodus, qui curvarum plusquam solidarum constructionem aggressi sunt per varios linearum rectorum motus certis legibus temperatos, cujus rei illustre exemplum habemus in conchoide Nicomedis: licet autem curvæ simpliciores hac ratione eleganter delineari possint; tamen in magis compositis, & ad altiores gradus pertinentibus ineluctabiles difficultates occurrunt ob multiplicem rectorum combinationem, & nimiam motuum compositionem.

Clarissimus de la Hire locorum linearium generem repetit a sectionibus corporum solidorum; sicuti enim ex coni, originem circulo debentis, varia sectione omnia loca solida comparantur, ita supposita descriptione circulerum tertiæ, quartæ & aliarum dimensionum in infinitum, & super his altiorum graduum conoidibus constitutis, loci lineares solidis respondentes derivantur, videlicet infinitæ parabolæ, Ellipses, & hyperbolæ. Interim si nostro instituto aptetur Clariss. Viri hypothesis, in duobus potissimum deficit. Primo non servantur Geometriæ canones, qui jubent, ut a simplicioribus ad magis composita gradum faciamus: qua ratione autem circulus E. G. quinti gradus sit simplicior parabola, aut hyperbola ejusdem ordinis prorsus non video. Neque respondeat, idem absurdum sequi, dum loca solida ex coni sectione derivantur; nam circulus, qui coni basis est, quamvis habeat æquationem sui constitutivam ad secundum gradum spectantem, & ejusdem generis cum æquationibus localibus sectionum conicarum, tamen ob illius simplicissimam generem in plano, inter locos planos, potius quam solidos jure merito collocatur. Secundo loco certum est, & ab Analysis demonstratum, in sectionibus conicis omnia loca solida contineri, ita ut nulla possit inveniri æquatio tertiæ, aut quartæ dimensionis, quæ per hujusmodi curvarum combinationem non explicetur: At conois gradus superioris quomodocumque secta non exhibet omnes curvas locales ad eundem gradum spectantes; multæ siquidem assignari possunt ab his omnino diversæ, quas doctissimus de la Hire consideravit. E. G. curvæ tertii ordinis, aut gradus in universum numerantur septuaginta duæ, ut patet ex celeberrimi Newtoni opusculo de speciebus, & magnitudine figurarum curvilinearum.

Dominus de Tschirnhausen in libro, qui inscribitur Medicina mentis, curvarum plusquam solidarum descriptionem tentavit per focos, vel umbilicos, qua methodo nihil potuit ingeniosius excogitari; sed optandum esset, ut illam Illustris Auctor universalem redderet; & omnibus curvis aptaret, nam observante Joanne Bernoullio, sæpe in simplicioribus hæret aqua, & nondum constat, qua ratione per focos delineari possit parabola, quam cubicam secundam vocant, & cujus æquatio localis est $ax^2 = y^3$.

Omitto dictarum curvarum constructionem, quæ fit per motum evolutivum Hugheii, vel per tractorium Leibnitii, vel per reptorium Bernoullii, hi enim motus solum in aliquibus casibus magis compendio-

sam

sam solutionem Analystæ subministrant. Interim ad methodum generalem properandum est.

Ego semper regia via incedendum putavi, hoc præmissa axiomate, videlicet curvarum magis compositarum generem, & constructionem petendam esse a curvis simplicioribus, & depressioris gradus, quarum descriptionem, & originem aliunde notam suppono; quemadmodum enim ex planis loca solida in plano satis apposite derivantur, ita ex solidis deducuntur loci lineares primæ classis, & ex istis lineares secundæ, eodem in infinitum servato operandi modo.

Hinc procedendi rationem numeris omnibus absolutam pronuncio. Primo adeo universalis est, ut nullus dari possit locus plusquam solidus, cujuscumque sit generis, & quacumque labore terminorum affectione, qui tali pacto non determinetur, & construatur. Secundo, loco fundamenti hoc unum postulo, ut concedatur sectiones conicas in plano delineari posse. Hoc posito gradatim progredior, & a facilioribus incipiendo, viam sterno ad difficiliora. Si describenda sit E. G. curva localis ad quintum genus pertinens, id obtineri non poterit, nisi præmissa constructione quorundam locorum linearium, qui quintum, & secundum genus, quod est solidorum, interjacent.

Quærere quis posset, qua arte obtinere liceat locorum linearium descriptionem. Hoc nostra Analysis ignotum esse non finit. Methodus, quæ pluribus quantitatibus ignotis utitur, hoc habet peculiare, ut non solum designet curvam localem inservientem solutioni Problematis propositi, sed etiam illius constructionem opportune doceat, ut ex allato exemplo, & clarius ex sequentibus patet.

Sic curva ADE est parabola, quam cubicam primam vocant Geometræ, hanc vestigiis methodi insistendo per simplicem analogiam ex parabola Apolloniana deduximus, unde hujusmodi curvæ descriptio non ex suppositione, sed ex vi resolutionis inventa est.

Scholium secundum.

Accidit aliquando ultimam æquationem determinantem Problematis solutionem, & quæ in superiori exemplo erat $bx - x^2 = z^2$, non solum duas quantitates incognitas, sed tres, vel etiam plures continere, quod tamen nullum negotium facessere debet Analystæ, ut constabit ex sequenti Problemate, cujus resolutionem simplicioribus exhibere potuissim, sed malui potius proposito, quam Problemati inservire.

P R O B L E M A II.

Datum arcum in quinque æquales partes dividere.

It jam factum, & compleatur semicirculus AHG (Fig. 28.), & arcus divisus in quinque partes æquales sit AH. Ducantur lineæ BD, CD, CE, CF, CG, CH, & recta CE ita producat ad punctum S, ut CD, DI sint inter se æquales. Similiter linea CF producat in K, ut CE sit ipsi EK æqualis. Eadem ratione CF ponatur æqualis LF, & CG æqualis GM.

Ex præparatione primo patet triangu-
la BCD, DCI, ECK, FCL, GCM esse similia; omnia enim sunt isoscelia ex constructione, & anguli BCD, DCE, & cæt. sunt inter se æquales, ob æquales arcus AD, DE, & cæt.

Patet secundo rectam EI esse æqualem rectæ AC, & FK æqualem DC, quod dicendum est de lineis LG, EC, & MH, FC. Comparantur invicem duo triangu-
la ACD, DIE, in quibus duo latera CD, DA sunt æqualia duobus lateribus ID, DE ex constructione, & insuper angulus ad I æqualis est angulo ACD; ergo dicta triangu-
la sunt similia, & æqualia, igitur latus IE erit æquale lateri AC. Hæc demonstratio cæ-
teris triangulis applicetur.

His præhabitis, sic analysim instituo. Esto AC = 2a, adeoque BC = a. Sit HC data = b, at vero incognita CD ponatur = x

Quoniam similia sunt triangu-
la BCD, DCI erit

$$BC : CD :: CD : CI$$

$$a : x :: x : \frac{xx}{a}$$

Ad vitandum ascensum ad dimensiones solidas, statuat $CI = \frac{xx}{a}$

= y, & cum IE sit = AC, hoc est = 2a, erit EC = y - 2a.

Ob similitudinem triangulorum BCD, ECK, erit

$$BC : CD :: EC : CK.$$

$$a : x :: y - 2a : \frac{xy}{a} - 2x.$$

Sed FK est = CD, nempe = x; ergo FC erit = $\frac{xy}{a} - 3x$:

Rursus cum similia sint triangu-
la BCD, FCL, erit

BC

$$BC : CD :: FC : CL$$

$$a : x :: \frac{xy}{a} - 3x : \frac{xx}{aa} - \frac{3x^2}{a}.$$

Putasset minus peritus Analysta quantitatem $\frac{x^2y}{aa} - \frac{3x^2}{a}$ inter soli-

das reponendam, adeoque nova incognita in resolutionem introducta, totius analysis seriem turbasset: sed. profecto deciperetur; nam si loco $\frac{x^2}{a}$ ponatur suus valor y, prædicta quantitas hanc induit formam $\frac{y^2}{a}$

3y, & a planorum limitibus non egreditur, quod admonuisse sufficiat.
Sed LG est = EC, hoc est = y - 2a; ergo GC erit = $\frac{y^2}{a} - 4y + 2a$.

Hic tertia quantitate incognita in subsidium vocata, ne ad altiores gradus perveniamus, fiat magnitudo $y^2 = 5az$, & per consequens $\frac{y^2}{a}$

$$4y + 2a \text{ erit} = 5z - 4y + 2a.$$

Tandem quoniam similia sunt triangu-
la BCD, GCM,

$$BC : CD :: GC : CM$$

$$a : x :: 5z - 4y + 2a : \frac{5xz}{a} - \frac{4xy}{a} + 2x.$$

Sed MH est = FC scilicet = $\frac{xy}{a} - 3x$; igitur HC erit = $\frac{5xz}{a}$

$\frac{5xy}{a} + 5x$: sed eadem HC ex hypothesi est = b; ergo datur æquatio

$$\frac{5xz}{a} - \frac{5xy}{a} + 5x = b, \text{ \& reducta æquatione, assumptaque data } c \text{ æquali}$$

quintæ parti ipsius b,

$$ax - ac = xy - xz.$$

In hac æquatione tres ignotæ continentur, hoc tamen non obstante ut desideratam constructionem assequamur, prædicta æquatio convertatur in sequentem analogiam $x : a :: x - c : y - z$.

Quo

Quoniam prima æquatio, in qua secunda ignota assumpta est, erat $x^2 = ay$, locus huic æquationi respondens erit ad parabolam. Vertice igitur A (Fig. 29.), & latere recto $= a$ intelligatur descripta parabola vulgaris ABC, & omnes abscissæ in trilineo parabolico, veluti AF, AG, vocentur x , omnes ordinatæ, puta FB, GC, vocentur y . Æquatio autem secunda erat $5ax = y^2$. Vertice A, diametro AL, & parametro $= 5a$ describatur altera parabola AHI, & ex puncto B utcumque accepto in prima parabola agatur linea BH parallela rectæ AG secans secundam parabolam in puncto H, & demissa normali HL, erit semper HL $=$ BF $= y$, & sagitta LA $=$ tertiæ incognitæ z .

Denique ex ultima æquatione deducta est sequens analogia $x : a :: x - c : y - z$. Sit $y - z = q$, & per consequens $y = z + q$. Ex recta AF abscindatur AD $= c$, hoc est $= b$, & ducta concipiatur AK faciens

eum AL angulum semirectum. Fiat semper, ut AF $= x$ ad constantem a , ita DF $= x - c$ ad KM, quæ erit $= q$: sed LK est $= LA = z$; ergo LM erit $= q + z$, videlicet $= y$. His factis, puncto F insitit perpendicularis FN $= LM = y$, & per punctum N, aliaque simili modo inventa, transeat curva NCO occurrens parabolæ ABC in puncto C, & demissa normali CG, dico AG esse $=$ quæsitæ x , & sic Problema per locum solidum, & curvam tertii gradus solutum est.

S C H O L I U M.

Quod si quis postularet æquationem localem exprimentem naturam curvæ NCO relatæ ad axem AG, ita procedat. Reassumatur supra exposita proportio $x : a :: x - c : y - z$: loco z pono suum valorem y^2 ; igitur $x : a :: x - c : y - \frac{y^2}{5a}$, & proportionem in æqualitatem

mutata, $xy - \frac{xy^2}{5a} = ax - ac$, & reducta æquatione, $5axy - xy^2 = 5a^2x$

$= 5a^2c$, quam curvam ad tertium gradum pertinere manifestum est.

P R O B L E M A III.

Triangulum isosceles construere, cujus uterque angulus ad basim sit quintuplus anguli ad verticem.

Hujus Problematis resolutio parum differt ab illa, qua in superiori dissertatione usi sumus, dum Eptagonum circulo inscriberemus; hoc exemplum tamen omittendum non erat, ut cognosceret Analysta, qua ratione debeat a simplicioribus ad magis composita gradum facere.

Sit

Sit igitur jam factum, & quæsitum triangulum sit ABC (Fig. 30.) Alteruter angulorum ad basim, puta angulus ABC intelligatur divisus in quinque partes æquales, ductis lineis rectis DB, EB, FB, GB. Ponatur nota CB, vel CA $= a$, assumantur autem duæ ignotæ quantitates, nempe CE $= p$, & EB $= q$.

Quoniam similia sunt triangula ECB, EBF, habent enim angulum ad punctum E communem, & angulos EBF, ECB æquales ex constructione, erit

$$EC : CB :: EB : BF$$

$$p : a :: q : \frac{aq}{p}$$

Ob eandem rationem

$$EC : EB :: DB : EF$$

$$p : q :: q : \frac{q^2}{p}$$

$$\text{adeoque } FC = p - \frac{q^2}{p}$$

Manifestum est, quod iisdem speciebus retentis, ulterius progredi non licet, nisi ascendendo ad gradus superiores. Ex methodo itaque generali novæ incognitæ in resolutione sunt introducendæ. Sit ergo BF $= \frac{aq}{p} = m$, & FC $= p - \frac{q^2}{p} = n$.

Ob similitudinem triangulorum FCB, FBG habentium angulum ad F communem, & angulos FBG, FCB æquales per constructionem, erit

$$FC : CB :: BF : BG$$

$$n : a :: m : \frac{am}{n}$$

Et ob eandem rationem

$$FC : FB :: FB : FG$$

$$n : m :: m : \frac{m^2}{n}$$

$$\text{adeoque } GC = n - \frac{mm}{n}$$

Sed GC est æqualis GB ob angulos æquales GBC; GCB, ergo ventum est ad æquationem $n - \frac{mm}{n} = am$, vel $am + \frac{m^2}{n} = n^2$, qui lo-

cus est ad hyperbolam.

Opere Iccc. Tom. III.

T

Ad

Ad tollendam confusionem præstat huic primæ parti analysi suam constructionem aptare. Quoniam ex superiore æquatione erat $am + m^2 = n^2$, sumpta infinita AK (Fig. 30, 31.) cui ad angulos rectos insistat linea KI, & vocatis abscissa HK m , & ordinatim applicata KI n , intelligatur descripta hyperbola æquilatera HI præmissæ æquationi locali respondens. Superest, ut ex datis indeterminatis m , & n investigemus relationem inter p , & q magnitudines ignotas in principio resolutionis assumptas, & hoc pacto describamus curvam localem, cujus omnes sagittæ sint $= p$, & ordinatæ $= q$.

Ex resolutionis progressu erat $BF = m = \frac{aq}{p}$; ergo $\frac{mp}{a} = q$: sed

EF erat $= \frac{q^2}{p}$; ergo loco q^2 posito ipsius valore $\frac{m^2 p^2}{aa}$, erit EF $=$

$\frac{m^2 p}{aa}$: sed CF est $= n$, & CE $= p$; igitur datur æquatio $n + \frac{m^2 p}{a^2} = p$,

vel $aan = ap - m^2 p$, & æquatione in analogisimum conversa,

$$a^2 - m^2 : a^2 :: n : p.$$

Fiat ut quadratum constantis a minus quadrato variabilis HK ad quadratum ejusdem constantis, ita HI ad HM. Et rursus quoniam erat $\frac{aq}{p} = m$, adeoque $a : p :: m : q$, fiat ut nota a ad HK, ita HM

ad MN, & per punctum N, aliaque puncta simili ratione determinata transeat curva HN, cujus coordinatæ sint HM, MN, videlicet p , & q , atque hoc pacto descripta est prima ex curvis localibus necessaria ad perficiendam Problematis constructionem.

Transcramus modo ad secundam resolutionis partem, & ad vitandas quantitates solidas, novis ignotis detur locus, sitque DB, vel AB $= x$, & DC $= y$. Ob similitudinem triangulorum CAB, ABD

$$CA : AB :: AB : AD$$

$$a : x :: x : \frac{xx}{a},$$

atque adeo CD erit $= a - \frac{xx}{a}$; sed eadem CD ex hypothese est $= y$,

ergo perventum est ad æquationem $a - \frac{xy}{a} = y$, qui locus est ad para-

bolam. Abcindatur HP $= a$, & vertice P, diametro PH, & parametro $= a$ describatur parabola PRT, sumptoque ad libitum in axe puncto Q, & ductis QR, RS, erit QR, vel SH $=$ indeterminatæ x , SR vero, vel HQ $= y$ alteri indeterminatæ.

De

Deinde existentibus similibus triangulis DCB, DBE.

$$DC : CB :: DB : BE$$

$$y : a :: x : \frac{ax}{y}$$

sed eadem BE est $= q$ ex his, quæ assumpsimus in primo membro resolutionis; ergo data est æquatio $\frac{ax}{y} = q$, & per consequens analogia

$y : a :: x : q$. Fiat semper ut HQ $= y$ ad HP $= a$, ita SH $= x$ ad quartam HO $= q$.

Ob eandem rationem

$$CD : DB :: DB : DE$$

$$y : x :: x : \frac{xx}{y}$$

& ideo CE erit $= y - \frac{xx}{y} = p$ ex prima analysi parte, & æquatione

in analogisimum mutata, $y : x :: x : y - p$. Ponatur $y - p = z$; ergo $y - z = p$. Fiat semper ut HQ $= y$ ad HS $= x$, ita eadem HS ad quartam HZ $= z$, & ob id HQ existente y , erit QZ $= y - z = p$. Puncto O insistat normalis ON æqualis QZ, & per punctum N aliaque similiter inventa transeat curva YNX, cujus coordinatæ HO, ON erunt, p & q . Dico hanc curvam esse localem secundam, quæ primam secundo in puncto N Problema determinabit, eritque HO æqualis quæsitæ EB, & ON æqualis EC. Q. E. F.

SCHOLIUM PRIMUM.

Si quæstio proposita methodo vulgari tractanda sit, ex suppositione, quod linea AC sit $= a$, & AB $= x$, adhibita opportuna specierum substitutione, nisi me calculus decipit, sequens occurret æquatio

$$a - bx^2 + cx^4 - dx^6 + ex^8 - fx^{10} + gx^{12} - hx^{14} + x^{16} = x - ix^3 + kx^5 - lx^7 + x^9.$$

Hujus æquationis constructionem non ita facile inveniet Cartesius Analyta. Quod si tota res absolvenda sit per locos juxta Neothericorum placita, propositam æquationem resolvere in duas æquationes locales quarti gradus, hoc opus, hic labor est. Interim nostra methodus hoc ipsum nullo prorsus labore assequitur, unde ex hoc capite patet, quantum ex dictis Geometricæ Analyti compendium accesserit.

T 2

SCHO

SCHOLIUM SECUNDUM.

Investigemus igitur æquationes locales experimentes naturam curvarum HN, YNX. Curvam HN deduximus ex hyperbola æquilatera HI, cujus æquatio erat $am + mm = nn$. Loco specierum m , & n substituo ipsarum valores ex superiori resolutione inventos; erat enim $m = \frac{aq}{p}$; & $n = p - \frac{q^2}{p}$, & statim prodit æquatio localis quæ sita $\frac{aaq}{p}$

$$+ \frac{aaq}{pp} = p^2 - 2q^2 + \frac{q^4}{p^2}, \text{ \& omnibus terminis ductis in } p^2, a^2pq +$$

$$a^2q^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4, \text{ quæ dat curvam quarti gradus.}$$

Curvæ autem YNX sic æquationem determino. In ultima æquatione quæ erat $y - \frac{xx}{y} = p$, loco y colloco suum valorem $\frac{ax}{q}$; eritque $\frac{ax}{q} -$

$$\frac{qx}{a} = p, \text{ \& per consequens } aax - xqq = aqp, \text{ atque adeo } x = \frac{aqp}{aa - q^2}.$$

Iam æquatio constitutiva parabolæ PRT erat $aa - ay = x^2$. Loco y pono suum valorem $\frac{ax}{q}$, ita ut nova oriatur æquatio $a^2 - \frac{a^2x}{q} = x^2$, &

loco x substituo valorem nuper inventum $\frac{aqp}{aa - q^2}$, & sic stabit æquatio

$$a^2 - \frac{a^3p}{aa - q^2} = \frac{a^2q^2p^2}{a^4 - 2a^2q^2 + q^4}, \text{ \& ductis omnibus terminis in } a^4 - 2a^2q^2 + q^4$$

$+ q^4$, in aliam incidimus æquationem, videlicet $a^6 - 2a^4q^2 + a^2q^4 - a^3p + a^3pq^2 = a^2q^2p^2$, & omnibus ad a^2 applicatis, $a^4 - 2a^2q^2 + q^4 - a^3p + apq^2 = q^2p^2$, quæ æquatio est ad alteram curvam quarti gradus.

SCHOLIUM TERTIUM.

In primo, & secundo exemplo locorum plusquam solidorum origo petenda fuit ex supposita descriptione locorum magis simplicium, hac tamen lege servata, ut utraque curva tam generans, quam genita communem axem haberet, quod manifestum reddit 27. mæ, & 29. mæ Figure inspectio. At in exemplo, quod præ manibus habemus, constructionem lineæ AN, sicut etiam YNX perfecimus neutra ex coordinatis curvarum generantium, scilicet hyperbolæ HI, & parabolæ PRT, retenta. Unde propositi Problematis solutio novam, & fortasse non inellegantem locorum linearium generis subministrat.

SCHE.

SCHEDIASMA XIII.

Da analogia inter æquationes analyticas, & potestates logarithmicas.

Mathematicus non infima notæ super sequens Problema proposuit invenire numerum y , qui elevatus ad dignitatem quomodocumque affectam a potestatibus sui logarithmi x , & constantibus, faciat productum æquale datæ magnitudini.

HAc quæstione mihi communicata, dum illius solutionem tentarem, inci in speculationem omnino novam, & fortasse non injucundam, qua scilicet detegitur mirabilis profecto armonia, & correspondentia inter potestates logarithmicas, & æquationes analyticas cujuscumque gradus. Veritatem istam Mathematicam, ut pote secundam, & ad majora viam aperientem, perire non patior, adeoque tuo committendam judicio decrevi Vir Illustriss. & Eruditiss. ut qualicumque sit meditatio mea tuo probetur, vel improbetur suffragio.

LEMMA PRIMUM.

Sit quicumque numerus y cujus logarithmus x ducatur in quantitatem b , & fiat productum bx , quod consideretur tanquam magnitudo logarithmica: dico numerum huic quantitati logarithmicæ nempe bx , respondentem esse = dignitati y^b . Demonstratio hujus lemmatis pendet ex conceptu multiplicationis & ex genesi logarithmorum. Multiplicare enim x per quantitatem b , nihil aliud est, quam toties sumere magnitudinem x , quoties b continet unitatem. Atqui iterata additio in serie logarithmorum postulat iteratam multiplicationem in progressionem numerorum; igitur numerus y toties in se ipsum multiplicari debet, quoties sumitur ipsius logarithmus x , vel quot sunt unitates in b , & per consequens elevari ad dignitatem, cujus exponents sit b . Q. E. D.

LEMMA SECUNDUM.

Logarithmus x ascendat ad potestatem quamcumque m , numerus correspondens dignitati logarithmicæ x^m posito quod y sit numerus logarith. x , quod & in sequentibus semper intelligendum, erit $= yx^{m-1}$. Potestas x^m hanc novam inducat formam $x^{m-1}x$, & sit $x^{m-1} = bx$. Per lemma autem superius numerus responders log. bx est $= y^b$, ergo, si loco quantitatis b ponas suum valorem x^{m-1} , erit yx^{m-1} numerus log. x^m Q. E. D.

LEM.

LEMMA TERTIUM.

Dignitas quæcumque a^m ducatur in quantitatem c , & fiat productum ca^m , quod habeatur pro magnitudine logarithmica: dico numerum huic quantitati respondentem esse $= yca^{m-1}$. Potestas a^m in c est $= ca^{m-1}x$, & factio termino $ca^{m-1} = b$ erit dignitas $ca^m = bx$: sed logarith. bx numerus est $= y^b$; ergo si loco b ponas suum valorem ca^{m-1} , numerus dignitatis logarithmicæ ca^m erit $= yca^{m-1}$. Q. E. D.

S C H O L I U M.

Propositiones conversæ horum Lemmatum non minus veræ sunt. Si proponatur E. G. dignitas logarithmica yca^{m-1} , patet logarithmum hujus dignitatis esse $= ca^m$. De cæteris idem esto iudicium.

Ut autem ostendam relationem, & correspondentiam inter dignitates logarith., & æquationes analyticas, sequentia Problemata propono.

P R O B L E M A P R I M U M.

Propositum sit invenire numerum y , qui elevatus ad dignitatem sui logarithmi x faciat productum y^x æquale datæ quantitati b .

Quoniam $y^x = b$; ergo istorum numerorum logarithmi erunt inter se æquales: sed numeri dati b datur logarithmus c , & potestatis y^x logarithmus est $= ax$ ex converso secundi Lemmatis; igitur datur æquatio $ax = c$, & assumpta quantitate a loco unitatis, $xx = ac$, adeoque $x : c :: a : x$; igitur x est media proportionalis inter a , & c . Q. E. I.

Aliter.

Sit primus numerus in serie numerorum habens unitatem pro logarithmo $= z$ & numerus quæsitus y ponatur $= z^x$: evidens est, quod numeri z^x logarithmus erit $= x$. Quoniam vero numerus z^x elevari debet ad potestatem sui logarithmi, hoc est ad potestatem x , erit facta operatione $= z^{xx}$: sed numeri z^{xx} logarithmus est $= xx$; qui æqualis supponitur c logarithmico numeri b : ergo datur æquatio $xx = c$. Q. E. I.

P R O B L E M A S E C U N D U M.

Propositum sit elevare numerum y ad quamcumque potestatem sui logarithmi x , puta ad potestatem x^{m-1} , & facere productum y^{xm-1} æquale datæ quantitati b .

Quoniam $y^{xm-1} = b$; ergo eorum logarithmi erunt æquales: sed dignitatis y^{xm-1} logarithmus est $= xm$, & numeri b dati datus est logarithmus c , ergo ventum est ad æquationem $xm = c$, & assumpta magnitudine a loco

co

60 unitatis, $xm = a^{m-1}c$, & conversa æquatione in analogisimum, $a^{m-1} : x^{m-1} :: x : c$. E. Q. I.

Si m ponatur $= 3$, erit $a^2 : x^2 :: x : c$, & per consequens $x^3 = a^2c$, adeque x est prima ex duabus mediis proportionalibus inter unitatem a , & datam quantitatem c . Sit iterum $m = 7$; ergo $a^6 : x^6 :: x : c$ & ob id $x^7 = a^6c$; x igitur est prima ex sex mediis proportionalibus inter a , & c .

Aliter.

Primus numerus in serie numerorum, cui convenit unitas pro logarithmo, sit $= z$, & numerus quæsitus esto z^m , cujus logarithmus, $= m$. Ascendat quantitas z^m ad quamcumque potestatem sui logarithmi, E. G. ad potestatem m^n , & fiat dignitas $z^{m \cdot mn}$, vel quod idem est $z^{m^{n+1}}$: logarithmus hujus dignitatis erit $= m^{n+1}$ ergo dabitur æquatio $m^{n+1} = c$, & sumpta unitate a evecta ad potestatem n , $m^{n+1} = a^nc$, quæ æquatio est ad tot medias proportionales, quot unitates continet exponens n , & semper magnitudo m erit p^a . in istis mediis proportionalibus.

P R O B L E M A T E R T I U M.

Propositum sit elevare numerum y ad quamcumque dignitatem, cujus exponens componatur ex pluribus nominibus, & in qua indices potestatum sint quæcumque potestates sui logarithmi x per quasque quantitates datas quomodocumque multiplicatæ, & oporteat facere hoc productum æquale magnitudini b .

Sit ex præscripto questionis E. G. numerus y elevatus ad potestatem $x^{m-1} + x^{n-1} + x^{p-1} + x^{q-1} = b$, & æquatio hanc novam inquat formam.

$$y^{x^{m-1}} \cdot y^{x^{n-1}} \cdot y^{x^{p-1}} \cdot y^{x^{q-1}} = b.$$

Assumptis igitur per præmissa lemmata harum quantitatum logarithmis, & signis multiplicationis mutatis in signa additionis (evidens namque est multiplicationi in serie numerorum respondere additionem in serie logarithmorum) altera occurrit æquatio

$$x^{m-1} + x^{n-1} + x^{p-1} + x^{q-1} = \log. b = c.$$

Facta autem denominatione in numeris quantitatum generalium m , n , p , q & posito $m = 7$, $n = 5$, $p = 3$, $q = 1$, dabitur æquatio analytica ascendens ad septimum gradum $x^7 + x^5 + x^3 + x = c$. Q. E. I.

Sit altera dignitas $y^{x^{m-1} + x^{n-1} + x^{p-1} + x^{q-1}} = b$ & facta operatione, ut prius, & positis $m = 15$, $n = 7$, $p = 5$, $q = 3$, erit,

$$x^{15} + x^7 + dx^5 + fx^3 = c.$$

Aliter.

Aliter.

Sit x primus numerus in serie numerorum, cujus logarithmus est unitas, & x^n aquet quæsitum numerum y . Elevanda sit x^n ad potestatem $x^m + dx^n$, habebitur $x^n \cdot x^{m+n} \cdot dx^n = x^{n+m+1} + dx^{n+1}$, cujus numeri logarithmus $x^{m+1} + dx^{n+1} = c$, & positis $m=3$, $n=2$, erit.

$$x^4 + dx^3 = c:$$

Hinc patet correspondentia inter omnes possibiles æquationes analyticas, & dignitates logarithmicas, quod hujus demonstrationis scopus erat.

SCHEDIASMA XIV.

Theoria proportionum per exponentes.

1°. Comparatis inter se duabus magnitudinibus ratione aliqua se invicem respicientibus (rationem autem habere dicuntur ex magnitudines, quæ multiplicatæ se mutuo superare possunt) illud in primis manifestum est, quod prima A erit vel totum, vel pars respectu secunde B; & cum relationes inter duas quantitates infinitæ esse possint, unica tantum locum invenit inter magnitudines determinatas A, B, estque modus ille peculiaris, quo fit, ut prima tot vicibus, & non pluribus, aut paucioribus contineat secundam, aut saltem partem aliquam sive finitam, sive infinitam secundæ.

2°. Sic numerus 8. bis continet numerum 4, & quatuor vicibus tertiam partem numeri 6, aut octies sextam partem ejusdem numeri 6. Hinc sequitur, quod semper datur aliqua quantitas hujusmodi relationem, seu melius continentiam exprimens, quæ a Geometris vocatur exponentis rationis.

3°. Comparentur magnitudines A, & B, & sit m ea quantitas, quæ exponat continentiam ipsius A respectu B: liquet, quod cum quantitas mB eodem modo, ac antecedens A contineat consequens B, idem est scribere A, ac mB , ideoque relatio inter A, & B per exponentem rationis, hoc est per duos terminos mB , & B optime repræsentatur.

4°. Quod si invertatur ratio, & quærat exponentis rationis B: A, vel B: mB (est enim $mB=A$) divide utrumque terminum per m ; igitur $B=\frac{A}{m}$, & collocando in ratione B: A, loco B valorem æqualem

$\frac{A}{m}$, exprimitur ratio per magnitudines $\frac{A}{m}:A$, & tunc quantitas $\frac{1}{m}$

erit exponentis rationis B: A.

Exem-

Exemplo rem declaro. Pono $A=8$, $B=4$. In ratione A ad B exponentis m est $=2$, quia A bis continet B: at in ratione B ad A exponentis $\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$, quia B est dimidium ipsius A.

5°. His præhabitis, rationes æquales, ex quibus oritur proportio, sunt eæ, quarum exponentes sunt æquales. Sint quatuor magnitudines A: B::C:D proportionales, hoc est eodem modo A contineat B, ac C continet D: si numerus, vel quantitas m exponit continentiam ipsius A relata ad B; idem numerus, vel quantitas m designabit pariter continentiam ipsius C relata ad D; nam si secus esset, non existentibus hinc inde continentis æqualibus, eadem non esset proportio. Hinc si exprimo primam rationem A: B per terminos æquivalentes $mB:B$, debeo quoque exprimere secundam C: D per terminos æquivalentes $mD:D$, eritque $mB:B::mD:D$.

6°. Sint modo quatuor magnitudines A, B, C, D: exponentis rationis inter primas A, B sit m , & inter secundas C, D sit n , offeranturque more nostro sic $mB:B$, $nD:D$.

Ex dictis si $m=n$, dictæ magnitudines erunt proportionales: sed si m sit major quam n , tunc A magis continet B, quam C contineat D, & in hoc casu dicatur major proportio A ad B, quam C ad D. Si vero quantitas m sit minor quam n , tunc A minus continet B, quam C contineat D, & in isto casu dicatur minor proportio A ad B, quam C ad D.

Ex his principiis fluunt omnes argumentandi modi, quos adhibent Geometræ, & Euclides longo circuitu demonstravit.

7°. In eadem ratione, in qua sunt magnitudines A, B erunt eorum æquemultiplices nA , nB , vel partes similes $\frac{A}{n}$, $\frac{B}{n}$.

Exponatur ratio A: B per suum exponentem, scribaturque $mB:B$. Jam quoniam $A=mB$, substituendo valorem ipsius A in magnitudinibus nA , $\frac{A}{n}$, erit $nA=m \cdot nB$, & $\frac{A}{n}=\frac{mB}{n}$. Hinc cum rationes $mB:B$:

$m \cdot nB:nB$; $\frac{mB}{n}:B$ habeant idem exponentes m , ita erit

mB , vel A: B:: $m \cdot nB$, vel nA : nB : $\frac{mB}{n}$ vel $\frac{A}{n}$: B. Q: E: D.

Euclides statuit quatuor terminos A: B::C: D, tunc esse in eadem ratione, quoties auctis eadem multiplicatione antecedentibus, hoc est prima, & tertia quantitate, auctis etiam alia quacumque multiplicatione consequentibus, hoc est secunda, & quarta, semper evenit, ut si multiplex primæ est majus multiplice secundæ, multiplex tertiæ sit etiam majus multiplice quartæ, & si est æquale, aliud sit etiam æquale, & si est minus, sit etiam minus.

8°. Hanc magnitudinum proportionalium affectionem inter Theoremata, non inter axiomata colloco, & sic demonstro. Sint quatuor quantitatis proportionales $A : B :: C : D$, vel (n°. 3°.) $mB : B :: mD : D$. Multiplicentur termini antecedentes per quancumque magnitudinem p , & consequentes per aliam quancumque q , & sint $pmB : qB :: pmD : qD$. Sit modo pm major quam q ; ergo tam pmB erit major ipsa qB , quam pmD ipsa qD ; nam cum multiplicatio non sit nisi repetita additio; existente A majore quam B , etiam $2A$ major erit quam $2B$, $3A$ quam $3B$, & sic deinceps; igitur etiam factum pA factio pB majus erit.

Sit secundo loco $pm = q$; ergo $pmB = qB$, & $pmD = qD$, æquales enim quantitates multiplicatæ per æquales gignunt producta æqualia.

Sit denique pm minor quam q ; ergo pmB minor quam qB , & pmD minor quam qD , quæ omnia erant demonstranda.

9°. Rursus sint quatuor magnitudines A, B, C, D , & sit exponens rationis $A : B$ quantitas m , & quantitas n sit exponens alterius rationis $C : D$, ponaturque m major, quam n . Sumantur æque multiplices more Euclideo $pmB, qB; pnD, qD$. Fieri potest, ut ita determinentur magnitudines multiplicantes p , & q , ut sit $pn = q$, & $pnD = qD$. In hac hypothefi cum sit m major quam n , erit etiam pm major quam pn ; sed $pn = q$; ergo pm major quam q , & pmB major quam qB .

Ex dictis autem constat, quod $A : B$ majorem habet rationem quam $C : D$, cum exponens m rationis $A : B$ supponatur majus exponente n alterius rationis $C : D$; contingere itaque potest, quod sumptis æquemultiplicibus, ut præscribit Euclides, multiplex primæ sit majus multiplice secundæ, & multiplex tertiæ non sit majus multiplice quartæ; sed vel æquale, vel minus, & hoc in casu erit major ratio primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam. Quod si oppositum evenit, minor erit ratio primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam.

10°. Est etiam alia insignis proprietates quantitatum proportionalium; quod factum sub extremis æquale sit factio sub mediis. Sint quatuor magnitudines A, B, C, D , sitque ut $A : B$ ita $C : D$: dico productum ex extremis A in D æquale esse productio sub mediis B in C . Utrobique est eadem ratio; ergo & idem exponens m ; ergo $mB : B :: mD : D$: factum autem tam ex extremis quam ex mediis est mBD ; igitur manifesta est æqualitas.

11°. Dico insuper, quod si duo producta sint æqualia, puta $A.D = B.C$; erit $A : B :: C : D$. Si vera assertio non est, habeat $B : G$ $A : B$ minorem rationem quam $C : D$; ergo datur magnitudo aliqua major ipsa A , quæ ad B habet eandem rationem, quam $C : D$, & hæc magnitudo ponatur $A + N$.

Jam cum ex suppositione sint proportionales $A + N : B :: C : D$; ergo (n. 10.) factum sub extremis æquatur factio sub mediis, hoc est $AD + ND = BC$; sed ex hypothefi $AD = BC$, ergo $AD + ND = AD$, vel totum parti, quod est absurdum.

12°. Ajo postremo, quod si factum AD sit majus factio BC , erit major ratio $A : B$, quam $C : D$. Quoniam productum AD majus est productio

cto BC , huic adde aliud productum NC , ut fiat æqualitas $AD = B + N.C$; igitur (n. 11.) $A : B + N :: C : D$: sed A magis continet B , quam $B + N$; ergo major est ratio $A : B$, quam $A : B + N$: sed $A : B + N :: C : D$; ergo major est ratio $A : B$ quam $C : D$.

Et si sit major ratio $A : B$, quam $C : D$, factum AD majus erit factio BC ; & contra si sit minor ratio $A : B$, quam $C : D$, factum AD minus erit factio BC .

Demonstro nunc omnes argumentandi modos a Geometris adhiberi solitos.

Conversa ratio.

13°. Esto $A : B :: C : D$: dico $B : A :: D : C$.

Sit m exponens tam rationis $A : B$ quam $C : D$; ergo (n. 4.) $\frac{1}{m}$ erit ex-

ponens tam rationis $B : A$, quam $D : C$; igitur æquali existente utrobique exponente, $B : A :: D : C$.

14°. Sit major ratio $A : B$, quam $C : D$: dico quod ratio conversa $B : A$ minor erit, quam $D : C$. Exponens rationis $A : B$ sit m , & rationis $C : D$ sit n ; erit m major quam n , $\frac{1}{m}$ minor quam $\frac{1}{n}$: sed $\frac{1}{m}$ est

exponens rationis $B : A$, & $\frac{1}{n}$ rationis alterius $D : C$, ergo minor est ratio $B : A$, quam $D : C$.

Aliter.

Sit $A : B :: C : D$: erit factum $BC =$ factio AD ; ergo $B : A :: D : C$.

Similiter demonstratur numerus 14. Quoniam major ratio $A : B$, quam $C : D$; ergo factum BC minus quam AD ; ergo minor ratio $B : A$, quam $D : C$ per num. 12.

Alternata seu permutata ratio.

15°. Esto $A : B :: C : D$: erit alternando, vel permutando $A : C :: B : D$; nam cum sit $mB : B :: mD : D$, erit $mB : mD :: B : D$, consule numerum septimum.

16°. Hinc si sit major ratio $A : B$, quam $C : D$, exponens m rationis $A : B$ majus erit exponente n rationis $C : D$; ergo mB magis continet nD , quam B contineat D ; ergo permutando major erit ratio $mB : nD$, vel $A : C$, quam $B : D$.

Aliter.

Quoniam est $A : B :: C : D$; ergo $AD = BC = CB$, ergo $A : C :: B : D$.
Si fit major ratio $A : B$, quam $C : D$; ergo AD major quam CB ;
ergo major ratio $A : C$, quam $B : D$. (n. 12.)

Compositio rationis.

17°. Sit $A : B :: C : D$; dico componendo ita esse $A + B : B :: C + D : D$.
Loco A scribe mB , & loco C scribe mD ; ergo

$$\frac{mB + B}{m + 1} : B :: \frac{mD + D}{m + 1} : D,$$

& cum utrobique sit idem exponens $m + 1$, utrobique erit eadem ratio.

Sit major ratio $A : B$ quam $C : D$; dico componendo $A + B : B$ majorem habere rationem quam $C + D : D$.

Demonstratio facilis est. In prima ratione exponens est $m + 1$, in secunda $n + 1$, & cum m sit major quam n , etiam $m + 1$ major erit quam $n + 1$; ergo &c.

Aliter.

Si $A : B$ est in eadem ratione cum $C : D$, factum sub extremis æquale erit factum sub mediis; ergo $AD = BC$, & addito hinc inde BD erit $AD + BD = BC + BD$, vel $A + B : D :: C + D : D$.

Divisio rationis.

18°. Sit $A : B :: C : D$, erit dividendo $A - B : B :: C - D : D$. Exponens utrobique est $m - 1$; ergo &c.

Si major sit ratio $A : B$, quam $C : D$, dividendo erit major ratio $A - B : B$, quam $C - D : D$. Exponens primæ rationis est $m - 1$, secundæ $n - 1$. Porro si m major quam n , etiam $m - 1$ major erit quam $n - 1$.

Aliter.

Quoniam $AD = BC$; ergo $AD - BD = BC - BD$; ergo $A - B : B :: C - D : D$, quæ divisio est rationis.

Quod si AD major est ipsa BC , etiam $AD - BD$ major erit $BC - BD$; ergo major erit ratio $A - B : B$, quam $C - D : D$. Q. E. D.

Cor.

Conversio rationis.

19°. Si sit $A : B :: C : D$, erit per conversionem rationis $A + B : A :: C + D : C$.

Quoniam $A : B :: C : D$, ergo convertendo $B : A :: D : C$, & componendo $B + A : A :: D + C : C$.

20°. Si $A : B$ majorem rationem habuerit, quam $C : D$, per conversionem rationis erit minor ratio $A + B : A$ quam $C + D : C$. Demonstratio est eadem.

Demonstrari quoque potest conversio rationis per exponentes; in analogia enim

$$\frac{A + B}{m} : A :: \frac{C + D}{m} : C$$

factum pariter sub extremis est $AC + BC$, & factum sub mediis est $AC + AD$; sed $BC = AD$; ergo $AC + BC = AC + AD$; id est $A + B : C :: A : C + D$.

Sequitur, quod si sit $A : B :: C : D$, erit quoque $A - B : A :: C - D : C$, vel $B - A : A :: D - C : C$.

21°. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam, hoc est sit $A : B :: A - P : B - Q$, erit pariter $A : B :: P : Q$. Demonstratio ex antecedentibus facile deducitur.

Ordinata ratio.

22°. Si fuerit ut $A : B$, ita $P : Q$, & ut $B : C$, ita $Q : R$, erit ex æquo ordinate $A : C :: P : R$.

Disponantur tres magnitudines A, B, C , & aliæ tres P, Q, R . Sit exponens rationum $A : B :: P : Q$ quantitas m , & sit quantitas n exponens rationum $B : C :: Q : R$; ergo $A = mB, P = mQ, B = nC, Q = nR$; sic ergo stabent magnitudines $A = mB, B = nC, C; P = mQ, Q = nR, R$, & extremæ ex utraque parte $mB : C :: mQ : R$. Loco B colloca suum valorem nC , & loco Q colloca suum valorem nR ; ergo $mnC : C :: mnR : R$; sed utrobique est idem exponens mn , ergo ultimæ quatuor quantitates sunt proportionales. Sed $mnC = A$, & $mnR = P$; ergo sunt etiam proportionales $A : C :: P : R$. Q. E. D.

23°. Si sit major ratio $A : B$, quam $P : Q$, & rursus major ratio $B : C$ quam $Q : R$, erit major ratio $A : C$, quam $P : R$. Quoniam major ratio $A : B$, quam $P : Q$, erit permutando major ratio $A : P$ quam $B : Q$; & quia est major ratio $B : C$, quam $Q : R$, erit etiam permutando major ratio $B : Q$, quam $C : R$; ergo multo major ratio est $A : P$, quam $C : R$; igitur permutando erit major ratio $A : C$, quam $P : R$.

Adi.

Aliter.

Quoniam proportionales sunt $A : B :: P : Q$; ergo $AQ = PB$. Iterum quoniam proportionales sunt $B : C :: Q : R$; ergo $BR = CQ$, & multiplicando utrumque membrum ultimæ æqualitatis per P , $PBR = PCQ$; sed $PB = AQ$; ergo $AQR = PCQ$, & dividendo per Q , $AR = CP$; ergo $A : C :: P : R$. $Q : E :: D : .$

Perturbata proportio.

24°. Si sint tres magnitudines, & aliæ totidem in eadem ratione perturbata, etiam extremæ proportionales erunt $A, B, C : P, Q, R, S$. Sint tres magnitudines A, B, C , & aliæ totidem P, Q, R in eadem ratione perturbata, hoc est sit $A : B :: Q : R$, & $B : C :: P : Q$; dico $A : C :: P : R$. Addatur quantitas S , ita ut sit $B : C :: R : S$; & quoniam $A : B :: Q : R$, & $B : C :: R : S$, erit ex æquo ordinate (num. 23.) $A : C :: Q : S$. Sed $B : C :: P : Q :: R : S$; ergo permutando, $P : R :: Q : S$; sed $A : C :: Q : S$; igitur $A : C :: P : R$.

Per exponentia proportionis sic.

$$A, B, C : P, Q, R, \text{ vel}$$

$$mB, B = nC, C : nQ, Q = mR, R.$$

Loco B substitue valorem nC , & loco Q valorem mR ; ergo $mnC = A : C :: mnR = P : R$; & cum utrobique inveniatur exponentis mn , patet veritas propositionis.

Aliter.

$A : B :: Q : R$; ergo $AR = BQ$. Rursus quoniam $B : C :: P : Q$; ergo $BQ = CP$; igitur $AR = CP$; ideoque $A : C :: P : R$.

Sit major ratio $A : B$, quam $Q : R$, & major ratio $B : C$, quam $P : Q$; erit major ratio $A : C$, quam $P : R$. AR maior est quam BQ , & BQ major quam CP ; ergo AR multo major quam CP ; quare patet propositio.

25°. Sit $A : B :: C : D$, sitque $E : B :: F : D$; dico $A + E : B :: C + F : D$. Prima analogia convertitur in æqualitatem $AD = BC$, secunda in aliam æqualitatem $ED = BF$; ergo $AD + ED = BC + BF$; ergo transeundo ab æqualitate ad alteram analogiam, $A + E :: C + F : D$.

Hec est propositio 24 Euclidis, sed ex hypotesi nonnullæ aliæ illationes deducuntur.

Quoniam $AD = BC$; ergo $\frac{AD}{C} = B$; & quoniam $ED = BF$, ergo

ED

$$\frac{ED}{F} = B; \text{ ergo } \frac{AD}{C} = \frac{ED}{F}, \text{ vel dividendo per } D, \frac{A}{C} = \frac{E}{F}; \text{ ergo } A : C :: E : F.$$

Rursus quoniam $AD = BC$, & $ED = BF$, erit $AD - ED = BC - BF$; ergo $A - E : B :: C - F : D$.

26°. Sint quatuor magnitudines proportionales $A : B :: C : D$, & sit maxima magnitudo alterutrum antecedens puta C ; dico consequens B esse minimam magnitudinem. Et primo cum sit $C : D :: A : B$, & C sit major quam D , erit A major quam B .

Secundo quoniam $C : D :: A : B$, erit permutando $C : A :: D : B$; sed C major quam A ; ergo D major quam B , ergo B erit omnium minima.

Deinde sit maxima quantitas alterutrum consequens, puta D , antecedens A erit minima: nam convertendo, $D : C :: B : A$; ergo patet secunda pars propositionis.

Tandem ajo, quod aggregatum ex maxima, & minima majus est aggregato reliquarum.

Sint proportionales $A + B : C + D :: A : C$, sitque $A + B$ maxima, erit C minima. Summa ex maxima, & minima est $A + B + C$. Summa reliquarum est $A + C + D$.

Quoniam $A + B : C + D :: A : C$; ergo permutando $A + B : A :: C + D : C$, & dividendo, $B : A :: D : C$, & permutando, $B : D :: A : C$; sed C utpote minima, est minor quam A ; ergo D minor quam B ; igitur $A + B + C$ major quam $A + D + C$. $Q. E. D.$

De rationum compositione.

Nihil utilius in tota Geometria, quam rationum compositio, & divisio; vix enim demonstratio aliqua majoris momenti absque earum subsidio eleganter perficitur.

27°. Sint magnitudines A, C , inter quas interponatur media quæcumque ad libitum B , & ordine collocentur A, B, C . Queritur quomodo ratio primæ A , & tertiæ C exprimi queat per rationes primæ A ad secundam B , & secundæ B ad tertiam C .

Exponens rationis $A : B$ sit m , & rationis $B : C$ sit n , & scribatur $mB, B = nC, C$. Loco B in primo termino substitue valorem nC , & habebimus $mnC = A, nC = B$; igitur ratio $A : C$, vel $mnC : C$ constituitur ex exponentibus rationum $A : B$, & $B : C$ in se invicem multiplicatis.

Ratio itaque primæ ad tertiam dicatur composita ex rationibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, quia si harum exponentia invicem multiplicentur, componunt exponens rationis primæ ad tertiam.

28°. Datæ quotcumque quantitativibus sequenti ordine dispositis A, B, C, D, E , &c., ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus omnium mediarum, hoc est sint exponentia rationum $A : B = m, B : C = n, C : D = p, D : E = q$, exponens rationis $A : E$ erit $mnpq$.

Quo.

Quoniam ratio $A : C$ componitur ex rationibus $A : B$, $B : C$, & ratio $B : D$ ex rationibus $B : C$, $C : D$; igitur ratio $A : D$ componitur ex rationibus tribus $A : B$, $B : C$, $C : D$, &c.

Iterum sint quantitates A , B , C , ratio $A : B$, hoc est primæ ad secundam; componitur ex ratione directâ $A : C$, & inversâ $B : C$. Constituat C media inter A & B , sic $A : C$, $C : B$. Ratio $A : B$ componitur ex rationibus directis $A : C$, $C : B$, sed ratio $C : B$ est inversa rationis $B : C$; ergo &c.

29°. Si ratio $A : C$ componatur ex rationibus $P : Q$, & $R : S$; dico $A : C :: PR : QS$, hoc est eadem ac antecedentium utriusque rationis componentis productum ad productum consequentium. Sit $P : Q :: A : B$, eritque $B : C :: R : S$. Ratio est, quia cum ratio $A : C$ componatur ex rationibus $A : B$, & $B : C$, & pariter ex rationibus $P : Q$, & $R : S$, & sit $A : B :: P : Q$, erit $B : C :: R : S$.

Jam exponens rationis $P : Q$, vel $A : B$ sit m , rationis vero $R : S$, vel $B : C$ sit n ; ergo exponens rationis $A : C$ erit mn . Porro in ratione $P : R : QS$ si loco P ponas valorem mQ , & loco R valorem nS , erit $PR = mnQS$; itaque in ratione $mnQS : QS$ habetur idem exponens mn ; ideoque

$$A : C :: PR : QS. \text{ Q.E.D.}$$

Si ratio $A : C$ componatur ex quibuscumque rationibus $P : Q$, $R : S$, $T : V$, $X : Z$, &c. erit $A : C :: PR : TX : QSVZ$. Demonstratio est eadem.

30°. Sint magnitudines quotcumque continue proportionales A, B, C, D, E, F , &c. Ratio $A : C$ componitur ex rationibus $A : B$, $B : C$; sed $A : B :: B : C$; igitur ratio $A : C$ componitur bis ex ratione $A : B$, & ob id dicitur duplicata. Ratio $A : D$ componitur ex ratione $A : B$ ter sumpta, & vocatur triplicata, ratio $A : E$ quadruplicata, ratio $A : F$ quintuplicata rationis $A : B$, & sic deinceps.

Ponatur $A =$ unitati, & termini sic exprimuntur in allata continua proportionem

$1, B, BB$, vel B^2 , BBB , vel B^3 , B^4 , B^5 , &c. Numeri $2, 3, 4, 5$ vocantur exponentes, & quantitates B^2, B^3, B^4, B^5 appellantur potestates, vel dignitates. Numerus puta 4 denotat dignitatem B^4 effici ex multiplicatione B in B in B in B quatuor vicibus repetito B , & sic de aliis.

Prima dignitas B^2 , vocatur quadratum, secunda B^3 cubus, tertia B^4 quadrato-quadratum, quarta B^5 quadrato-cubus, &c.

Ratio tandem $A : B$ ex adverso dicitur dimidiata rationis $A : C$, & ratio $A : B$ dicitur subtriplicata rationis $A : D$, &c.

Rationes quomodocumque ex æqualibus rationibus compositæ sunt æquales. Ratio dependet ab exponentibus.

Ratio inversa, vel reciproca tollit directam.

Pono rationem $A : B$, sitque $A : B :: C : D$, & $B : A :: D : E$; dico $E = C$, nam cum sit $B : A :: D : E$; ergo convertendo $A : B :: E : D$; sed $A : B :: C : D$; ergo $E : D :: C : D$, & permutando $E : C :: D : D$ sed $D = D$; ergo $E = C$.

SCHE-

SCHEDIASMA XV. (*)

*De Organica Curvarum Tractoria, atque Logarithmica Construtione
a Viro Celeberrimo Joanne Poleno inventa.*

JACOBUS RICCATUS JOANNI POLENO.

S. P. D.

Quæ duo a Te excogitata, atque inventa Instrumenta sunt, ut curvas binas, Logarithmicam, & Tractoriam, hodiernæ Geometriæ apprime necessarias, quæque numero censentur Transcendentium Curvarum, mechanice describeres expendi diligenter; mirificeque sum illis delectatus. Ac quod nostro hoc genere rectissime æstimantem facere oportet, ut traducat ad periculum, semel ipse iterumque transtuli. Re admiratione haud levi, sic inveni: eas lineas inde oriri, & mihi existere, quas utpote natura sua, ac indole obscuras & difficiles, mente dumtaxat, & cogitatione antea perceperam; ita porro clare ac distincte eas describi, ut ne notæ quidem vulgo Coni Sectiones certius in plano, ac luculentius delineari ratione ulla mihi posse videantur. Sed ex rebus omnibus param simplicemque rationem demiratus sum, qua rem ipsam struis ex proprietatibus earundem Curvarum, quarum altera Tangentem, Subtangentem altera constantem jugiter habet. Cæterum hæc ipsa simplicitas, quæ tantopere adamatur, cum prima existere, & apparere deberet, latens tamen est, detegiturque extrema: quo fit, ut ego putem, in quocumque artificio difficillimum esse videre, ac cernere, quam facile ad exitum proposita res perducatur. Namque post Neperum id instituerunt Mathematici, ut plurimum operæ ac studii Logarithmicæ tribuerent, & aliquanto post de Tractoria cogitarunt. Earum proprietates illustrare, atque ad quadraturas, rectificationes, mensuras corporum solidorum, horumque superficierum usque penetrarunt. At nemo unus adhuc inventus est, qui de organica construtione Curvæ utriusque cogitaverit, aut tanquam Problema aliquod proposuerit. Tu tamen rem investigasti, nobisque eodem tempore felicissime adaperuisti.

Renutus Cartesius, Vir de Mathematicis Scientiis optime meritis, nullam aliam ob causam curvas Transcendentes repulit a Geometria, nisi quod ea ratione illi non occurrerent, qua exprimere Curvarum naturam consuevit; analyticis nimirum æquationibus, quas quantitates duæ

Opera Riccati Tomo III.

X

in-

(*) Dopo la lettera del Signor Marchese Poleni al Sig. Jacopo Ermanno stampata in Padova l'anno 1729., che tratta dell' Organica Construzione della Trattoria, e della Logarithmica, leggesi la presente del nostro Autore.