

Quoniam ratio $A : C$ componitur ex rationibus $A : B$, $B : C$, & ratio $B : D$ ex rationibus $B : C$, $C : D$; igitur ratio $A : D$ componitur ex rationibus tribus $A : B$, $B : C$, $C : D$, &c.

Iterum sint quantitates A , B , C , ratio $A : B$, hoc est primæ ad secundam; componitur ex ratione directâ $A : C$, & inversâ $B : C$. Constituat C media inter A & B , sic $A : C$, $C : B$. Ratio $A : B$ componitur ex rationibus directis $A : C$, $C : B$, sed ratio $C : B$ est inversa rationis $B : C$; ergo &c.

29°. Si ratio $A : C$ componatur ex rationibus $P : Q$, & $R : S$; dico $A : C :: PR : QS$, hoc est eadem ac antecedentium utriusque rationis componentis productum ad productum consequentium. Sit $P : Q :: A : B$, eritque $B : C :: R : S$. Ratio est, quia cum ratio $A : C$ componatur ex rationibus $A : B$, & $B : C$, & pariter ex rationibus $P : Q$, & $R : S$, & sit $A : B :: P : Q$, erit $B : C :: R : S$.

Jam exponens rationis $P : Q$, vel $A : B$ sit m , rationis vero $R : S$, vel $B : C$ sit n ; ergo exponens rationis $A : C$ erit mn . Porro in ratione $P : R : QS$ si loco P ponas valorem mQ , & loco R valorem nS , erit $PR = mnQS$; itaque in ratione $mnQS : QS$ habetur idem exponens mn ; ideoque

$$A : C :: PR : QS. \text{ Q.E.D.}$$

Si ratio $A : C$ componatur ex quibuscumque rationibus $P : Q$, $R : S$, $T : V$, $X : Z$, &c. erit $A : C :: PR : TX : QSVZ$. Demonstratio est eadem.

30°. Sint magnitudines quotcumque continue proportionales A, B, C, D, E, F , &c. Ratio $A : C$ componitur ex rationibus $A : B$, $B : C$; sed $A : B :: B : C$; igitur ratio $A : C$ componitur bis ex ratione $A : B$, & ob id dicitur duplicata. Ratio $A : D$ componitur ex ratione $A : B$ ter sumpta, & vocatur triplicata, ratio $A : E$ quadruplicata, ratio $A : F$ quintuplicata rationis $A : B$, & sic deinceps.

Ponatur $A =$ unitati, & termini sic exprimuntur in allata continua proportionem

$1, B, BB$, vel B^2 , BBB , vel B^3 , B^4 , B^5 , &c. Numeri $2, 3, 4, 5$ vocantur exponentes, & quantitates B^2, B^3, B^4, B^5 appellantur potestates, vel dignitates. Numerus puta 4 denotat dignitatem B^4 effici ex multiplicatione B in B in B in B quatuor vicibus repetito B , & sic de aliis.

Prima dignitas B^2 , vocatur quadratum, secunda B^3 cubus, tertia B^4 quadrato-quadratum, quarta B^5 quadrato-cubus, &c.

Ratio tandem $A : B$ ex adverso dicitur dimidiata rationis $A : C$, & ratio $A : B$ dicitur subtriplicata rationis $A : D$, &c.

Rationes quomodocumque ex æqualibus rationibus compositæ sunt æquales. Ratio dependet ab exponentibus.

Ratio inversa, vel reciproca tollit directam.

Pono rationem $A : B$, sitque $A : B :: C : D$, & $B : A :: D : E$; dico $E = C$, nam cum sit $B : A :: D : E$; ergo convertendo $A : B :: E : D$; sed $A : B :: C : D$; ergo $E : D :: C : D$, & permutando $E : C :: D : D$ sed $D = D$; ergo $E = C$.

SCHE-

SCHEDIASMA XV. (*)

*De Organica Curvarum Tractoria, atque Logarithmica Construtione
a Viro Celeberrimo Joanne Poleno inventa.*

JACOBUS RICCATUS JOANNI POLENO.

S. P. D.

Quæ duo a Te excogitata, atque inventa Instrumenta sunt, ut curvas binas, Logarithmicam, & Tractoriam, hodiernæ Geometriæ apprime necessarias, quæque numero censentur Transcendentium Curvarum, mechanice describeres expendi diligenter; mirificeque sum illis delectatus. Ac quod nostro hoc genere rectissime æstimantem facere oportet, ut traducat ad periculum, semel ipse iterumque transtuli. Re admiratione haud levi, sic inveni: eas lineas inde oriri, & mihi existere, quas utpote natura sua, ac indole obscuras & difficiles, mente dumtaxat, & cogitatione antea perceperam; ita porro clare ac distincte eas describi, ut ne notæ quidem vulgo Coni Sectiones certius in plano, ac luculentius delineari ratione ulla mihi posse videantur. Sed ex rebus omnibus param simplicemque rationem demiratus sum, qua rem ipsam struis ex proprietatibus earundem Curvarum, quarum altera Tangentem, Subtangentem altera constantem jugiter habet. Cæterum hæc ipsa simplicitas, quæ tantopere adamatur, cum prima existere, & apparere deberet, latens tamen est, detegiturque extrema: quo fit, ut ego putem, in quocumque artificio difficillimum esse videre, ac cernere, quam facile ad exitum proposita res perducatur. Namque post Neperum id instituerunt Mathematici, ut plurimum operæ ac studii Logarithmicæ tribuerent, & aliquanto post de Tractoria cogitarunt. Earum proprietates illustrare, atque ad quadraturas, rectificationes, mensuras corporum solidorum, horumque superficierum usque penetrarunt. At nemo unus adhuc inventus est, qui de organica construtione Curvæ utriusque cogitaverit, aut tanquam Problema aliquod proposuerit. Tu tamen rem investigasti, nobisque eodem tempore felicissime adaperuisti.

Renutus Cartesius, Vir de Mathematicis Scientiis optime meritis, nullam aliam ob causam curvas Transcendentes repulit a Geometria, nisi quod ea ratione illi non occurrerent, qua exprimere Curvarum naturam consuevit; analyticis nimirum æquationibus, quas quantitates duæ

Opera Riccati Tomo III.

X

in-

(*) Dopo la lettera del Signor Marchese Poleni al Sig. Jacopo Ermanno stampata in Padova l'anno 1729., che tratta dell' Organica Construzione della Trattoria, e della Logarithmica, leggesi la presente del nostro Autore.

indeterminatæ ingrederentur. Sed hoc haud recte factum ab Renato, qui sic æxistimavit, tam longe porrigi Geometriæ fines, quam suæ methodi regio proferretur.

Mihi præ cæteris Nevvtoni, Viri incomparabilis, sententia probatur. Sic enim ille æxistimabat, ut in Geometria Elementari, seu bina Postulata, assumerentur ductus rectæ lineæ de puncto ad punctum, atque descriptio circuli ad quodlibet intervallum, ita in sublimiori id contingere, ut Curvarum Constructiones totidem sint Postulata; quæ deinde ad indolem Problematum pertineant; quorum solutio a Mechanica, non a Geometria sit expectanda. Munus est Geometriæ investigare, & expandere Curvarum naturam; ideam illarum exprimere distinctam; idque palam facere, qua ratione progignantur; denique ex earum origine commonstrare, eas non contradicentium numero, sed ejusmodi rerum, quæ fieri possunt, contineri. Ac quamdiu proprietatibus illarum utitur, ut propositis quæstionibus difficilioribus satisfaciat, res versatur ipsa in contemplatione sola: cum vero hinc ad usum operamque rem traducit, Mechanica sæpissime opus est, & iis instrumentis, quæ ad manum pertinent. Porro Mechanica motu opportune uti solet, quem tamen Ars temperet, ac moderetur. Ad Artem vero spectat, adjuncta omnia versare in singulas partes, & expendere vel defectus ipsos materiæ, a qua omnino abstrahit Geometria. Qui trahens pondus aliquod, obligatum fune, arbitraretur, ea ratione, se describere Tractoriam, aut Catenariam, binis clavis funem suspendens, aut Elasticam chalibys flectens laminam; curvarum istiusmodi ob oculos haberet rudem quamdam imaginem: materies enim ad eas curvas perfecte referendas nequam est accommodata. Et multa quidem præterea hujusmodi addere possem exempla.

Qui curvarum focis, funiculisque adhibitis, curvas describunt, accuratius rem tractant; dum tamen ne foci multiplicentur, & funiculi, namque si hi frictionibus sint pluribus obnoxii, inæqualiter extenduntur: resque minus procederet, cum infiniti foci essent; & cum funiculum adaptari oporteret alicui curvæ, ut in Evolutis Hugenii. Neque hoc prodest, filorum loco substituere catenulas, cum, curvæ loco, tunc polygonus conformetur.

Mea est igitur sententia, ex omnibus constructionibus mechanicis illas plurimi faciendas, quæ conficiuntur per instrumenta solidis, firmisque regulis formata, in quibus nullus esse locus potest incommodis, quæ commemoravi. Neque quicquam aliud, ut res undique perfecta sit, requiritur, nisi ut organi constructio accurata, ac simplex sit. Ex veteribus autem Nicomedes nobis ejusmodi exemplum reliquit, & quidem præclarum, in Conchoidis constructione, & ex novissimis nonnulla habemus pro aliquibus curvis ex numero analyticarum.

Ad Te autem unum ea jure pertinebit laus, quod curvas Transcendentes (ut ita dicam) indole asperas quodammodo mansuefeceris; deque contemplatione ad operam, ex Geometria ad Mechanicam transtuleris. Instrumentis a Te nuper inventis, nihil aut ad rem aptius, aut simplicius potest excogitari.

Quod

Quod ad usum attinet, quis ignorat, Transcendentes quæstiones partem magnam ad Hyperbolæ quadraturam referri, aut ad Logarithmicæ descriptionem? Sint Problemata, aut localia, aut determinata; hoc est sive adhibenda sit integra Curva, aut ejus pars aliqua; vel secari ipsa debeat ab aliqua nota alia curva, ut signari possint quæstia puncta: cum Geometra arbitrabatur, se tandem industriæ, & investigationis suæ finem attigisse, sic inveniebat etiamnum circum initia se quodammodo versari. Itaque necesse illi erat approximationum methodis uti; ac vel Series, vel Logarithmorum tabulas adhibere: hacque ratione, Geometriæ cancellis veluti egressus, in fines Arithmeticæ pertransire.

Geometra deinceps usum Logarithmicæ, ac Tractoriæ perinde retinere facile poterit, ac si una usus esset aliqua Coni Sectione, atque, ferme dixi, circulo ipso. Cæterum, ut opus tantopere utile omnino perficiatur, sine Tu, ut hoc Ego iniciam, ut tibi ponas etiam ante oculos Curvas, quibus arcuum circularium rectificationes continentur; quemadmodum Cyclois, Linea item sinuum, aut alia quæpiam analoga, tentando hoc maxime, ut organice describantur. Ita enim fiet, ut Mechanica, & Geometria novo, neque minore, invento adaugeantur. Præstare hæc posse melius Te neminem puto, qui in istiusmodi rebus non contemplandis modo, sed etiam persequendis excelsis. Vale.

Castrofranco X. Kal. Apr. CIOCCCXXVIII.

SCHEDIASMA XVI. (*)

Scientiæ Dynamicæ Elementa.

CAPUT PRIMUM.

De legibus virium sollicitantium.*

DE materiæ attributo primario disputent inter se Physici, & Mathematici. Mathematici est eas corporum proprietates contemplari, quæ ex Phænomenis manifestæ sunt.

Quantitas materiæ cujusque corporis, quam massam deinceps vocabimus, est complexus omnium particularum corpus componentium.

Volumen cujusque corporis est spatium a materia corporis occupatum simul cum interpositis poris.

Ex collatione massæ cum volumine resultat corporis densitas, quæ est ratio, quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad cor-

X 2

poris

* Questo Schediasma era compinto nel 1722., trovandosi nominato in una lettera 10. Marzo 1722. del Conte Giovanni Rizzetti all' Autore.

poris volumen. Ut si corpus in massam poris carentem intelligatur colliquatum, eadem massa erit sub minori volumine, & sub majori densitate.

Raritas est corporum qualitas densitati reciproca consistens in ratione voluminis ad massam, seu materiæ quantitatem.

Ex hisce definitionibus fluunt sequentia confectaria. Dicantur corpora inter se comparata C, c , eorum massæ M, m , volumina V, v , densitates D, d , raritates R, r .

1. Quantitates materiæ, seu massæ M, m sunt in ratione composita densitatum D, d , & voluminum V, v ; hoc est $M : m :: DV : dv$. Nam $D = \frac{M}{V}$, & $d = \frac{m}{v}$; ergo $D : d :: M : m$, vel $M : m :: DV : dv$.

2. Habebimus ergo $Mdv = mDV$, & mutata æquatione in analogiam, $V : v :: Md : mD :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$, hoc est volumina erunt in ratione

composita directæ massarum, & inversæ densitatum.

3. Sed densitates sunt reciproce ut raritates, ergo volumina se habent in ratione composita ex directæ massarum, & directæ raritatum, scilicet $V : v :: MR : mr$.

4. $M : m :: \frac{V}{R} : \frac{v}{r}$, seu massæ erunt inter se directæ ut volumina

& reciproce ut raritates. Reliqua omitto, quæ facile ex formula deduci possunt.

Motus corporis est translatio ejusdem corporis de loco in locum, seu successiva applicatio corporis diversis partibus spatii immobilis.

In motu consideratur vis generans, & consideratur vis genita. Prima vocatur vis mortua, secunda vis viva, vel hæc simpliciter vis, & illa sollicitatio.

Vis mortua ea est, quæ sensibilem effectum non producit, & ex qua ullus motus actualis non resultat nisi aliquandiu in corpore continuata, & replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulsus, nullis aliis ei succedentibus. Etenim nisi post infinitos demum gravitatis ictus indefinenter replicatos motus sensibilis gravi non acquiritur.

Ut hæc doctrina clarius intelligatur, considero corpus grave cadens ex quiete, quod tempore finito acquirit determinatum motum, seu gradum celeritatis. Cum gravitas constanter agat, & mobile transeat per omnes velocitatis gradus, necesse est, ut primus impulsus gravitatis gradum infinitesimum velocitatis producat, ex quo sequitur, quod si gravitas per ictus repetitos non ageret, non ederet sensibilem effectum.

Vis viva cum motu jam acquisito conjuncta est, & est aggregatum actionum omnium virium mortuarum, quæ successive operantur. Impetus enim corpori communicatus licet minimus, conservatur in corpore, & infiniti impetus simul additi vim vivam constituunt.

Sicut

Sicut ex vi mortua generatur, ut dictum est, vis viva, ita ex vi va generatur vis mortua. Finge pilam data celeritate motam impingere in chordam tensam, & elasticam; manifestum est pilam inflatendo chordam totum suum motum amittere, & rursus chorda sese restituentem, amissum motum pilæ communicari.

Velocitas, quæ consideratur in corpore moto, semper ad tempus refertur, dicimusque corpus illud velocius, quod minori tempore idem spatium pertransit. Hinc si velocitas esset uniformis, se haberet semper directæ ut spatium, & inverse ut tempus. Frequentissime tamen velocitas est variabilis, hoc est vel crescens, vel decrescens, & tunc ad uniformem reducenda est. Dico igitur velocitatem percurrere uniformiter spatium infinitesimum.

Sit velocitas variabilis, qua percurratur spatium minimum ds : in principio hujus spatii velocitas erit u , & in fine ejusdem spatii erit $u \pm du$; supponitur enim crescere, vel decrescere: atqui $u \pm du = u$; ergo dictum spatium ds in hac hypothese percurritur velocitate variabili quidem, sed quæ pro uniformi assumi potest.

Quantitas motus mensuratur a massa ducta in velocitatem. Hinc si quantitas motus vocetur q , habebimus $q = mu$.

Axiomata.

Corpus non impeditum perseverat in statu suo, hoc est si quiescit, semper quiescit, nisi ab altero corpore impellatur, & si movetur, semper movebitur eadem velocitate, nisi in alia corpora impingat, quibus communicet motum.

Motus de se fit semper per lineam rectam; nulla enim est ratio, ut corpus sursum, vel deorsum, vel ad dextram, vel ad sinistram deflectat, nisi aliqua vi a recto itinere abducatur.

Corpus movetur semper per directionem, qua moveri incipit; est enim indifferens ad quamcumque directionem, & per consequens ad aliquam determinari debet a vi impellente.

Actio est semper æqualis, & contraria reactioni. Corpus tantum agit, quantum patitur. In hac lege fundatur vis passiva corporum, quæ venit nomine inertie. Hæc vis in corporibus quiescentibus se facit prodire. Etenim corpus quodcumque A in aliud quiescens B impa-ctum, aliquid de sua vi, & motu amittit. Ex quo patet corpus quiescens B habere aliquam vim passivam superandam a corpore incurren-te A: alioquin impellens A post occursum nihil de suo motu amisisset. Cum corpus quiescens B, si resistendi facultate careret, alterius motus nullam remoram affrret.

Hæc lex semper præ oculis habenda est, nam hæc neglecta peccamus contra sequens axioma. Vis igitur quocumque modo agit, agendo aliquid amittit de propriis viribus.

Causa est semper proportionalis effectui, neque edere potest effectum se ipsa majorem.

Sol-

Sollicitatio, seu vis mortua, quæ agit per tempus, vel spatium infinitesimū, licet sit variabilis, constanter agit. Confer quæ dicta sunt de velocitate.

De sollicitationibus verticalibus.

THEOREMA PRIMUM.

Si quæcumque vis mortua, vel sollicitatrix dato tempore constanter agat, erit proportionalis quantitati motus, quæ dato tempore generatur. Nam vi manente constanter, quo major est massa moyenda, eo minor velocitas, & e contra. Insuper positis massa, & tempore constantibus majori vi major velocitas respondet. Demum positis constantibus, tempore, & velocitate, quo major est massa moyenda, eo magis requiritur vis motrix. Si hæc secus fuerint, effectus non essent proportionales suis causis, vel sollicitatio per totum tempus non ageret uniformiter, quorum primum absurdum est, secundum verò contra hypothesim.

Hinc sit vis $= f$, tempus $= dt$; per tempus enim infinitesimū quæcumque vis variabilis constanter agit. Sit pariter massa $= m$ & fluxio velocitatis dato tempore dt acquisita $= du$: habebimus semper $f dt = m du$, ex qua formula omnia Theoremata ad hanc rem pertinentia deduci possunt.

THEOREMA SECUNDUM.

Si corpus velocitate determinata infinitesimo tempore percurrat spatium infinitesimū, semper erit velocitas $u = \frac{ds}{dt}$. Cum enim spatium

minimum ds percurratur, ut dictum est, velocitate uniformi, eo major erit velocitas, quo dictum spatium percurritur minori tempore; & e contra. Igitur velocitas quæcumque variabilis sese habet directe ut fluxio spatii, inverse ut fluxio temporis.

Ex assignata formula collige, spatium servare proportionem compositam velocitatis, & temporis, & tempus se habere directe ut spatium, inverse ut velocitatem.

THEOREMA TERTIUM.

Momentum velocitatis est semper ut vis ducta in elementum spatii directe, & ut massa reciproce. Momentum velocitatis nihil aliud est quam velocitas multiplicata in suum elementum, exprimiturque per factum $u du$. Erit igitur $\frac{f ds}{m} = u du$. Nam cum sit per Theorema primum

$f dt$

$\frac{f dt}{m} = du$, & per secundum $dt = \frac{ds}{u}$ ergo substituendo, $\frac{f ds}{mu} = du$, vel

$$\frac{f ds}{m} = u du. \quad Q. E. D.$$

Hæc formula sæcundissima est; multæ siquidem consequentiæ deduci possunt. Unam tantum, quæ frequentissime uluvenit, non omittam. Quoniam $\frac{f ds}{m} = u du$, ergo integrando, neglecta constante, quæ in multis casibus peculiaribus negligenda non est,

$$\int \frac{f ds}{m} = \frac{u^2}{2} \quad \text{vel} \quad \sqrt{2 \int \frac{f ds}{m}} = u: \text{ sed } u = \frac{ds}{dt}; \text{ ergo}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2 \int \frac{f ds}{m}}} \quad \& \text{ integrando rursus, } t = \int \frac{ds}{\sqrt{2 \int \frac{f ds}{m}}}$$

SCHOLIUM.

Quæ beneficio specierum inventa sunt, figuris geometricis aptare oportet. Grave A (Fig. 32.) ex puncto quietis A descendat versus centrum B, & in quocumque puncto descensus, puta C, sollicitetur a vi centrali CG, & sit curva FGH scala virium centralium. Vocetur f variabilis GC, & s spatium decursum AC. Velocitas CD acquisita in puncto C ponatur $= u$, fluxio spatii $Cc = ds$, & fluxio velocitatis $de = du$. Per Theorema autem tertium invenimus $f ds = u du$ (hic cum non varietur massa corporis, quantitas m constans pro unitate assumi potest). Factum $f ds$ nihil aliud est quam GC . Cc rectangulum, quod est elementum areæ FACG. Sed $S ds = \frac{u^2}{2}$; igitur quadratum CD est

semper æquale duplæ areæ CAFG. Hinc si dictæ duplæ areæ facias semper æquale quadratum rectæ CD, & per punctum D, aliaque similiter inventa transeat curva ADI, hæc est scala velocitatum.

Rursus quoniam $\frac{ds}{u} = dt$, si fiat $\frac{a}{u} = p$ habebimus $p ds = dt$: sed

$a = up$; ergo facto rectangulo DCM = constanti a , vel unitati, erit CM = p , & curva MOP erit reciproca curvæ velocitatum. Est autem rectangulum MC . Cc = $p ds = dt$. Igitur integrando, $Spds = t$, hoc est area QACM æqualis tempori. Posita demum curva AKN, quæ sit quadratrix curvæ MOP, ita ut ordinata CK sit semper æqualis areæ QACM, curva AKN erit scala temporum, quæ omnia erant inveniendæ.

EXEM-

EXEMPLUM PRIMUM.

In hypothesi gravitatis constantis curva virium FGH mutatur in lineam rectam ipsi AB parallelam. Integrando itaque formulam, resultat $2fs = uu$, locus ad parabolam ADI, quæ est scala velocitatum.

Iam existente $\frac{a}{u} = p$, erit $\frac{a}{uu} = pp$: sed $u^2 = 2fs$; ergo $a = 2fspp$

ad hyperbolam secundi gradus MOP. Hujus autem hyperbolæ quadratrix AKN, scilicet scala temporum, sic invenitur. Quoniam $\frac{ds}{u} = dt$,

$$\& u = \sqrt{2fs}; \text{ ergo } \frac{ds}{\sqrt{2fs}} = dt, \text{ vel } \frac{fds}{\sqrt{2fs}} = fdt, \& \text{ integrando, } \sqrt{2fs}$$

$$= ft, \text{ vel } \frac{2s}{f} = tt. \text{ Erit igitur curva AKN parabola, \& per conse-}$$

quens tempora erunt inter se, ut velocitates, & tam tempora, quam velocitates in ratione dimidiata spatiorum e quiete decursorum. In nostro casu facilius inveniri potest scala temporum; est enim $fdt = du$,

& integrando, $ft = u$: sed $u = \sqrt{2fs}$; ergo &c.

Ex dictis collige tempus, quo spatium quodlibet AC cadendo conficitur, esse ut duplum spatium AC applicatum ad celeritatem CD hoc tempore acquisitam. Nam cum sit $t = \frac{u}{f}$, erit pariter $t = \frac{u^2}{fu}$: atqui

$$u^2 = 2fs; \text{ ergo } t = \frac{2s}{f}.$$

Adde vim centralem esse semper ut subnormalem in scala velocitatum; est enim $f = \frac{udu}{ds} =$ dictæ subnormali.

SCHOLIUM PRIMUM.

Vocentur duorum mobilium massæ M, m; vires, seu gravitates, seu pondera P, p; spatia cadendo descripta S, s; & tempora descensuum T, t. Ex dictis non omitendo considerationem massarum, erit $PT^2 = 2MS$, & $pt^2 = 2ms$: adeoque si spatia ab ambobus mobilibus diversis temporibus confecta, sunt in duplicata ratione temporum, ut experimenta nos docent, corporum pondera massis erunt proportionalia. Nam $TT : tt :: S : s$, erit $TTs = ttS$, adeoque $PTT = 2MS$ fiet $\frac{tPS}{s} = 2MS$, vel $\frac{Ptt}{p} = 2Ms$, hoc est $= \frac{2Ms}{p}$, & omnibus ductis in

P,

$$p, ptt = \frac{2pMs}{p}; \text{ sed } ptt = 2ms; \text{ ergo subrogando, } 2ms = \frac{2pMs}{p}, \text{ vel } mp = Mp, \text{ scilicet } P : p :: M : m; \text{ hoc est pondera massis proportionalia.}$$

SCHOLIUM SECUNDUM.

Quod si motus a quiete non incipiat, tunc in integrationibus addenda est constans, quod sequenti exemplo declaro. Grave B projiciatur in altum a B versus A. In hoc casu quoniam crescentibus spatiis decursis Bc, BC, BA; velocitas minuitur, cum impetus impressus in puncto B a repetitis ictibus gravitatis paulatim destruat: illud sequitur, quod sumpta tamquam positiva fluxione spatii, fluxio velocitatis negativa est. Habemus igitur in hac specie $fds = udu$, & integrando, $fs = -\frac{u^2}{2} + bb$. Ut determinetur valor constantis bb, observandum, quod

spatio existente = 0 in puncto B, velocitas initialis in dicto puncto B est æqualis constanti, puta $a = BI$. Deleto igitur in æquatione termino fs, remanet $2bb = uu$: sed in nostra hypothesi $uu = aa$; ergo $2bb = aa$, & integralis vera fit $fs = -\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{2}$. Similiter crescente tem-

pore, velocitas minuitur, ideoque habebimus alteram formulam $fdt = -du$, & integrando, $ft = -u + b$: sed t existente = 0, $u = a$; ergo constans addenda = a, & summatoria vera est $ft = -u + a$. Cætera perficientur per regulas supra traditas.

EXEMPLUM SECUNDUM.

Sint vires centripetæ, ut distantia a centro, hoc est grave in quocunque puncto D (Fig. 33.) sollicitetur versus centrum B a gravitate variabili, quæ sit semper ut distantia DB: scala virium erit triangulum ABC. Ponatur AB = a, spatium percursum AD = s, spatium percurrendum DB = vi centrali = x. In formula generali $fds = udu$ loco f pone x, & loco ds pone -dx; quia crescente cum spatio AD velocitate, spatium DB decrescit. Habebimus igitur $-xdx = udu$, & integrando addita debita constans, $\frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{u^2}{2}$, vel $a^2 - x^2 = u^2$,

qui locus est ad circuli quadrantem AFG, a quo representatur scala velocitatum.

$$\text{Quoad tempus, } \sqrt{aa - xx} = u: \text{ sed } ds = -\frac{dx}{u} = dt; \text{ ergo } \frac{-dx}{\sqrt{aa - xx}}$$

$$= dt. \text{ Integratio primi membri, ut notum est, respondet arcui AF; er-}$$

Opere Ricc. T.III.

Y

g^o

270
go per arcum AF exprimitur tempus descensus per sinum versum AD.

Iterum reassumpta formula $fds = udu$, cum sit $f = a - s$, erit
 $ads - sds = udu$, & integrando, $2as - ss = u^2$, locus ad circulum, ut
antea. Cum autem sit $\sqrt{2as - ss} = u$, & $ds = dt$, erit $\frac{ds}{\sqrt{2as - ss}} = dt$,

& integrando, $t =$ arcui circulari AF.

Linea reciproca velocitatum KIH erit $a = p\sqrt{2as - ss}$, cujus quadratura dependet a rectificatione arcus circularis.

In hac hypothesi spatia decursa sunt ut sinus versi AD, velocitates ut sinus recti DF, vires acceleratrices ut sinus complementi DB, tempora ut arcus AF.

EXEMPLUM TERTIUM.

Sint vires centrales reciproce ut quadrata distantiarum a centro, & positis spatiis percurrendis $DB = x$ (Fig. 34.), scala virium HEC sit curva hyperbolica quadratica $\frac{a^2}{2xx} = f$. In formula generali $fds = udu$

loco ds substitue $-dx$, & loco f ejus valorem $\frac{a^2}{2xx}$, eritque $-\frac{a^2 dx}{2xx} = udu$, & integrando, $\frac{a^2}{2x} - \frac{b}{2} = \frac{u^2}{2}$, vel $\frac{a^2}{x} - b = u^2$: sed exi-

stente velocitate nulla in puncto A, spatium percurrendum $x = a$; ergo $b = a^2$. Constans igitur addenda est $-\frac{a^2}{2}$, & integratio completa se

habet $\frac{a^2}{x} - a^2 = u^2$, hoc est $a^2 - a^2x = xu^2$.

Constructio hujus curvæ sic haberi potest. Super AB describe semicirculum AIB, cujus tangens in puncto A sit AK. Sumpto ad libitum puncto D, ducatur ordinata DIF, quæ secet circumferentiam in puncto I. Agatur BI, quæ producta secet rectam AK in puncto K, ex quo dimittatur ad ordinatam DF normalis KF. Punctum F erit ad curvam quæsitam.

Supereft investiganda scala temporum, quam esse cycloidem facile demonstrare possumus.

SCHOLIUM.

Exempla sumpsimus ad Physicam accomodata. Gravitatis constantis hypothesi Galilæana est, & est veluti radix cæterarum omnium: nam præterquamquod hæc lex obtinet in gravibus cadentibus quam proxime ob magnam centri distantiam, certum quoque est vim quæcumque variabilem continuo applicatam per spatium infinitesimum agere uniformiter, & constantem esse.

Secunda lex, quæ ponit vires in ratione distantie a centro, a Fermatio primum excogitata, & quam demonstratione munire conatus est non sine principii petitione, deinde a Viviano & a Borellio usurpata censetur locum habere posse a clarissimo Nevvtono in iis gravibus, quæ occupant spatium a centro telluris usque ad superficiem.

Tertia denique lex obtinet in sistemate Planetario, cum Planetæ, & comete hac lege gravitatis serantur in solem, sicuti etiam planetæ secundarii in primarios.

Consideratis his legibus, addo aliqua de alijs, quæ contradictio- nem involvunt. Putavit Cæreus celeritates acquisitas in eadem propor- tione esse, ac spatia confecta, quo in casu erit $u = s$: atqui $u = \frac{ds}{dt}$

ergo $\frac{ds}{dt} = s$, sive $dt = \frac{ds}{s}$ unde $t = \ln s$. Jam existente $s = 0$, & lo-

garithmo ipsius $s = 0$, scilicet infinito, erit $t = \infty$: hoc est infinitum tempus requiritur ad percurrendum initio spatium nullum, adeoque grave ibi perpetuo quiescet. Simili ratiocinio aliæ leges ad examen revocari possunt.

THEOREMA QUARTUM.

Curva AFD (Fig. 35.) sit scala velocitatum relate ad tempora, hoc est expriment abscissæ AG, AC tempora descensum cujuscunque mobilis & ordinatæ GF, CD velocitates in fine dictorum temporum acquisitas. Idem mobile celeritate variabili, tempore AC percurrat spatium AB, & in puncto B adeptum sit velocitatem CD: dico quod si toto tempore AC grave delatum fuisset velocitate constante CD, percurrisset spatium AM, quod ad spatium AB esset in eadem ratione, ac rectangulum AC. CD ad aream curvilineam AFDC.

Quoniam $ds = udt$; ergo integrando $s = \int udt$, vocato autem spatium AM = S, est $S = \int ut$ supposita velocitate constant; ergo $S : s :: ut : Sudt$, hoc est ut spatium AB ad spatium AM, ita area AFDC ad rectangulum ACD.

COROLLARIUM.

Sit curva AHI scala temporum relate ad spatia decursa. Tangat recta HL curvam prædictam in quocumque puncto H, erit spatium AK, quod percurritur motu accelerato, & subtangens LK erit spatium, quod grave percussisset in toto tempore KH, si delatum fuisset ex constante celeritate, quam obtinet in puncto K. Nam per Theorema præmissum $Sudt : ut :: AK = s : KL$; ergo cum sit $Sudt = s$ erit $kL = ut$: sed $u = \frac{ds}{dt}$; ergo $KL = \frac{tds}{dt}$; ergo subtangens curvæ AKI. Q.E.D.

SCHOLIUM PRIMUM.

In hypothesi Galilæana gravitatis constantis curva AHI erit parabola Apolloniana, ideoque subtangens KL duplex abscissæ AK, & spatium confectum celeritate terminali duplum ejus, quod per motum acceleratum conficitur.

In altera hypothesi virium servantium proportionem distantiarum a centro spatia decursa in allatis circumstantiis ut sinus versus AD (Fig. 33.) ad quartam proportionalem post radium, sinum rectum, & arcum AF. In tertia hypothesi (Fig. 34.) ubi scala temporum erat cyclois, prædicta spatia se habebunt ut ordinata in circulo generatore ad ordinatam in cycloide.

SCHOLIUM SECUNDUM.

Hæc satis superque essent ad præsentis materiæ illustrationem, nisi quandoque inter se essent comparandæ vires continue applicatæ, quarum scala nobis ignota est. Ne igitur aqua hæreat, aliquot Theoremata nobis subiicienda sunt.

THEOREMA QUINTUM.

Si scalæ virium centralium sint curvæ similes, & pondera sint massis proportionalia, mobile abscissarum partes similes eodem tempore percurrit.

Ponantur duæ figuræ similes ABC, *abc* (Fig. 36.), & duo mobilia descendant per lineas verticales AB, *ab*; conficiant spatia AB, *ab* temporibus æqualibus. Fiat $AB : ab :: AD : ad$, ita differentia DF ad alteram *df*, & cum velocitates mobilium in punctis D, *d*, sint in ratione dimidiata arearum ADEC, *adec*, & areæ ob figuras similes sint ut quadrata AD, *ad*; igitur velocitates in D, *d* erunt, ut abscissæ, seu ut fluxiones DF, *df*: sed tempora, quibus percurruntur spatia minima DF, *df* sunt ut prædicta spatia divisa per velocitates, seu $T : t :: \frac{DF}{df} : \frac{df}{df}$, quæ

173
quæ ratio est æqualitatis; ergo eodem tempore percurruntur spatia DF, *df*, & quia tot DF continentur in AB, quot *df* in *ab*, spatia AB, *ab*, vel analogæ quæcumque AD, *ad* eodem tempore conficiuntur. Q.E.D.

COROLLARIUM.

Si omnes curvæ similes ita disponantur, ut earum origo sit in B, & una ex dictis figuris sit DBH; recta conjungens puncta B, & C transibit per punctum H, & alia similiter determinata. Hinc pars DBH, & ceteræ omnes trianguli ABC erunt similes toti. Triangulum itaque est figura isocrona, hoc est temporibus æqualibus percurruntur abscissæ AB, DB, FB, & præstat per unicam lineam continuam id, quod reliquæ omnes figuræ similes per curvas diversas.

THEOREMA SEXTUM.

Sint duæ curvæ ad eundem axem, & analogæ ad ordinatas, hoc est in curvis BFC, BGD (Fig. 37.) rescissa abscissa AE utcumque, ordinata EF sit ubique ad alteram EG in ratione constante AC: AD. Moveatur corpus, cujus massa = *m* per AB sollicitatum a scala virium ACB, & rursus alterum corpus cujus Massa = *M* a scala virium ADB. Sint AE = *s* Ea = *ds*, EF = *f*, EG = *F*. Quoniam per notas formulas habemus $fds = mudu$ $Fds = MVDV$; ergo integrando, $Sfds = \frac{mu^2}{2}$, &

$SFds = \frac{MV^2}{2}$. Sed areæ ACFE ADGE sunt inter se ut $f : F$; ergo

$\frac{2f}{m} : \frac{2F}{M} :: uu : VV$, vel $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{M}} :: u : V$. Omitto corollaria, quæ nullo

labore deducuntur ex formula.

Cum autem sit $u = \frac{ds}{dt}$, & $V = \frac{ds}{DT}$, erit $dt : DT :: t : T :: \frac{1}{u} : \frac{1}{V}$

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$$

SCHOLIUM.

Hinc solvi potest problema, quod Geometris Italici proposuit Cl. Nicolaus Bernoullius. Queritur quænam sit curva BGC (Fig. 38.) in qua tempus, quo percurruntur AB, EB, sit ut dignitas virium AC, EG.

Circa axem AB describantur ex origine B infinitæ curvæ similes ad libitum, quarum duæ sint BHC, BIF, ductaque recta BC, hæc tran-

transibit per punctum F. Corpus igitur sollicitatum a scalis curvarum similium, eodem tempore per Theorema quintum percurrat lineas AB, EB. Producat EF in G, quæaturque ordinata EG ita ut descripta curva BLG ipsi BIF analoga, si mobile acceleretur a viribus, quæum scala sit curva BLG, tempus, quo percurrit totam EB, sit ut data dignitas applicatæ EG.

Per Theorema sextum in curvis analogis $t : T :: \frac{1}{\sqrt{f}} : \frac{1}{\sqrt{F}}$, exi-

$$\sqrt{f} \quad \sqrt{F}$$

stentibus massis constantibus in nostra hypothesis: sed tempus t constans, & tempus $T = F^*$; & $EF = f$ ad $EB = s$ in ratione constante, hoc est $f = bs$; ergo $t : F^* :: \frac{1}{\sqrt{bs}} : \frac{1}{\sqrt{F}}$, vel $t = \frac{F^*}{\sqrt{F}}$, ex quo fit

$$bs = \frac{F^2 n^2}{12}$$

Si ergo per punctum G, & alia infinita similiter determinata ducatur curva BGC, hæc erit ex familia parabolæ, vel hyperbolæ; ajo curvam BGC esse quæsitam. Nam descripta curva BKF simili ipsi BGC, ex proprietatibus dictarum curvarum erit curva BKF analoga portioni BGM, ut demonstrari facile potest; ergo &c.

THEOREMA SEPTIMUM,

Sint duæ Figuræ ABC, abc (Fig. 39.) analogæ ad abscissas, hoc est sumptis abscissis AD, ad in data proportione constante, ordinatæ DE, de sint æquales, & reassumpta hypothesis superioris Theorematis, erit $Sfds : SFDS :: mn^2 : MV^2$; sed in nostro casu areæ $Sfds : SFDS$, vel ADE, ade sunt inter se ut $s : S$, hoc est ut AD : ad, igitur $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{M}} :: u : V$, & cum velocitates sint in temporum ratione reciproca, & directa spatiorum, siue $\frac{ds}{ds} : \frac{dS}{dT}$, erit $\frac{ds\sqrt{m}}{\sqrt{s}} : \frac{dS\sqrt{M}}{\sqrt{S}} :: dt :$

dT , & per consequens $\sqrt{ms} : \sqrt{MS} :: t : T$ Q. E. D.

Hujus, & antecedentis Theorematis usus patet, & inservit, dum comparandæ sunt vires, quarum lex nobis ignota est. Observandum etiam doctrinam supra explicatam locum habere non solum in gravibus cadentibus, sed in viribus quibuscunque applicatis, ut sunt pressiones, vires elasticæ, & cæteræ omnes, quæ debent replicari, ut effectum sensibilem producant.

CA-

CAPUT SECUNDUM.

De principio fundamentali Mechanices.

THEOREMA PRIMUM.

SI sollicitationes quæcumque æquali tempore agentes producant quantitates motus in data ratione, etiam sollicitationes in data ratione erunt. Id patet ex formulis $Sfdt = mu$, $SFdt = MV$; nam cum tempus utrobique ponatur æquale, erit $Sfdt : SFdt :: f : F :: mu : MV$. Si $mu = MV$; igitur $F = f$. Neque quidquam facit utrum sollicitationes sint constantes, vel variabiles, nam in secundo casu erunt æquales areæ curvarum ipsas repræsentantes, quæ sollicitationum scalæ vocantur.

THEOREMA SECUNDUM.

Ex extremitatibus libræ horizontalis AB (Fig. 40.) cujus jugum sit in puncto C, pendeant duo pondera D, & E, quorum directiones sint parallelæ tendentes ad centrum infinite distans. Sit D: AC = E: BC, hoc est pondera se habeant reciproce, ut distantia a fulcro: dico pondera prædicta manere in æquilibrio.

Ponderi E superadde pondus infinitesimum p , & descendat brachium libræ CB per spatium infinitesimum Bb, ascendente altero brachio CA per spatium infinitesimum Aa. In hac hypotesi habebimus motum inassignabilem, quin destruat æquilibrio, & cum tempora descensus per Bb, & ascensus per Aa sint æqualia, sollicitationes erunt inter se ut quantitates motus, hoc est ut massa E ducta in velocitatem, qua percurritur fluxio Bb ad massam D ducta in velocitatem, qua percurritur fluxio Aa: sed ex una parte pondera sunt ut massæ, & velocitates ut arcus nascentes Bb, Aa, hoc est ut distantia CB, CA, & producta D. AC, & E. CB sunt æqualia; ergo & sollicitationes erunt æquales. Neutra igitur alteram prævalebit, & libra perseverabit in æquilibrio.

SCHOLIUM.

Allati principii demonstrationem deduxit Archimedes ex centro gravitatis, ponderibus hinc inde dispositis, assumendo, quod pondera æqualia eodem modo gravitent, ac si conjuncta essent in centro gravitatis. Verum in hoc discursu adest petitio principii; centrum enim gravitatis illud est, quod corpus dividit in partes æqualium momentorum.

At Galilæus, & qui hunc sequuti sunt, fingunt per impossibile grave E describere arcum inassignabilem Bb, & grave D per arcum similem Aa ascendere; postquam autem demonstrarunt quantitates motus esse æquales, rem ad absurdum deducunt, supponendo vires vivas esse ut quantitates motus, hoc est æquales. Hoc autem, ut supra demonstravimus, falsum est.

Quan-

Quantitates motus non sunt ut vires vivæ, sed ut vires mortuæ, seu sollicitationes, & manifestum est æquilibrium fieri non a viribus vivis, quæ numquam cum æquilibrio stare possunt, sed cum mortuis, a quarum æqualitate dependet æquilibrium.

Hoc adeo verum est, ut pars gravitatis, quæ impenditur in generatione vis vivæ, nullo modo gravitet, ac premat, alioquin causa non responderet effectui, cum eadem sollicitatio ad duplicem effectum in solidum extenderetur. Placet autem veritatem hanc rigorosa demonstratione evincere. Sit

THEOREMA TERTIUM.

Sit libra AB (Fig. 41.), cujus jugum C. Ex puncto A pendeat grave D, & ex puncto E altera libra FH, cujus jugum E cum ponderibus appensis G, & I. Sint omnia in æquilibrio, hoc est pondera G, I sint æquilibrata circa punctum suspensionis E, & tota libra FH cum suis ponderibus æquipondium cum gravi D constituat in libra AB. Removeatur grave I, & suspendatur puncto K, ita ut in lance FH tollatur æquilibrium, descendente pondere I, vel LM, & ascendente pondere G: dica quod turbatur æquilibrium alterius lancis AB, & quod onus D necessario descendit.

Cum pondera G, I in punctis FH, stent æquilibrata, eundem conatum efficiunt respectu gravis D, ac si utrumque penderet ex jugo E. Supponimus enim virgas librarum esse lineas geometricas nullo modo ponderantes. Jam cum grave I translatur in M L suspenditur ex puncto K tollitur, ut dictum est, æquilibrium, quod ut restituatur, fiat ut distantia KE ad distantiam EF; ita pondus G ad pondus L: & cum pondus M sit illud, quod æquilibrium destruit, sustineatur a potentia P. His positis, G & L ita sunt disposita respectu ponderis D, ac si conjuncta penderent ex puncto E. Sed ad constituendum æquilibrium cum pondere D, suspendi debent ex ipso tria pondera G, L, M; ergo duo G, L minora sunt; quam quæ necessaria sunt ad æquilibrium faciendum cum onere D; ergo pondus D præponderabit, & descendet.

COROLLARIUM.

Remota potentia P, quæ impedit descensum gravis ML, & est æqualis, & contraria gravi M, est ab hac petenda vis sollicitationis ad descensum. Grave igitur M dum actu descendit, nullo modo gravitat.

COROLLARIUM II.

Hinc vera est clarissimi Leibnitii doctrina pluviam descendentem per aerem nullo modo gravitare in Barometrum, quamquam ad explicanda Barometri Phenomena non sufficiat. Quantitas enim aquæ, quæ actu descendit, comparari non potest cum ascensu Mercurii, ut in eundo computum manifestum sit.

THEO-

THEOREMA QUARTUM:

Corpus per duas diversiones impulsu percurret diametrum parallelogrammi, cujus latera vires repræsentant.

Corpus quodcumque A (Fig. 42.) impulsu a data vi agente per directionem AB versus B percurrat dato tempore velocitate AB spatium AB, deinde impulsu ab altera secundum directionem AC pertransseat eodem tempore spatium AC velocitate AC: sunt enim spatia eodem tempore percursa, ut velocitates constantes, quibus percurruntur. Perficiatur Parallelogrammum AD, & eodem tempore, hoc est eodem instante, corpus A impellatur a præfatis viribus duabus: dico tempore æquali percurre diagonalem AD.

Finge corpus A transferri a linea AB, quæ sibi ipsi sit semper parallela velocitate AC, & motu proprio velocitate AB incedere per dictam lineam. Quo tempore linea AB acquisivit positionem ab, corpus A per ipsam incedens, dimenso jam spatio AB, reperietur in E puncto Diagonalis AD, & cum id verificetur de omnibus aliis punctis, revera corpus semper fuit in dicta diametro, atque illam determinato tempore debuit percurre. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM:

Quod si angulus ABD (Fig. 43.) sit rectus, & parallelogrammum transeat in rectangulum, tunc geminæ vires corpori A impressæ, prima juxta directionem AC, altera juxta directionem AB, prima horizontalis, & altera verticalis, cum nullo modo contrariæ sint, nulla datur reactio opposita actioni, & cum corpus A ab utraque impellatur eodem tempore, utraque perseverare debet in dicto corpore, cum fertur per diametrum AD. Vis igitur corporis A lati per AD æqualis est viribus simul sumptis duorum corporum æqualium, quorum primum eodem tempore incederet per AB, secundum per AC.

Sit horum corporum massa = m , vis primi per AD = F , vis secundi per AB = f , vis per AC = ff ; ergo $mf + mff = mF$, vel $f + ff = F$.

Hujusmodi autem vires non possunt esse æquales, si exprimantur per quantitates motus, hoc est in casu nostro per velocitates, massis existentibus æqualibus. Nam cum velocitates per spatia exprimantur æqualibus temporibus decursa, hoc est per rectas AD, AB, AC, evidens est summam rectarum AB + AC non æquari diagonali AD.

Hujusmodi æqualitas obtineri non potest, nisi prædictæ vires vivæ exprimantur per velocitatum quadrata, tunc enim $f + ff = F$; nam $u^2 + vv^2 = v^2$.

Cujuscumque igitur corporis vis viva proportionalis est massæ ductæ in quadratum velocitatis, quod est principium Dynamicum Leibnitii.

Opere Ricc. Tomo III.

Z

tia

tianum, de quo in sequentibus redibit sermo. Quæ cum ita sint, manifestus redditur error Galilæi in demonstratione Theorematis fundamentalis. Confer Scholium ad Theorema secundum.

COROLLARIUM II.

Quod si angulus ABD (Fig. 42.) sit acutus, ex puncto A demitte normalem AF. Cum vis per AB æqualis sit viribus per AF, BF, mobile A percurrento rectam AB idem præstat, ac si dum incedit per AF velocitate AF, linea AF moveatur super FB velocitate FB; sed mobile A fertur etiam versus C celeritate AC, cui contraria est velocitas FB ab F versus B; ergo deductis deducendis, revera corpus A non fertur versus partes DC, nisi velocitate FD, & versus lineam FD, nisi velocitate AF. Percurrit autem diagonalem AD, cujus quadratum duobus quadratis AF, FD æquale est. Igitur ex hoc dicta in antecedente corollario confirmantur.

COROLLARIUM III.

In hoc casu, ut vidimus, velocitates in parte se elidunt, ac destruant. At si angulus ABD esset obtusus, tunc essent conspirantes, & se mutuo adjuvarent, ut demonstrari facile potest. Quod autem demitur a contrariis, a conspirantibus restituitur: unde sequitur vim corporis moti velocitate AD, plus vim corporis moti velocitate BC æqualem esse viribus quatuor corporum, quorum duo moveantur celeritate AB, & duo velocitate AC. Verum enim est, & Geometris notum duo quadrata diagonalium AD, BC æqualia esse quatuor quadratis laterum parallelogrammi.

SCHOLIUM.

A viribus vivis transeamus ad mortuas. Si mobile sollicitetur a duabus sollicitationibus AC, AB juxta directiones a prædictis lineis determinatas, idem omnino præstabit, ac si sollicitetur ab unica sollicitatione AD agente per directionem AD, non quia ejusmodi sollicitationes sint æquales, neque tempore infinitesimo æqualem producant motus quantitatem, sed quia quocumque impulsu, licet minimo, sollicitationes laterales æqualem vim vivam corpori imprimunt, ac diagonalis, quod facile eruitur, si velocitates genitæ tempore inassignabili eandem proportionem servant, ac sollicitationes ipsæ, hoc est linearum AC, AB, AD. Nam etiam in hoc casu vis infinitesima nascens erit, ut quadratum velocitatum minimarum nascentium, & per consequens locum habent corollaria supra explicata.

CA-

CAPUT TERTIUM.

De centro gravitatis.

Centrum gravitatis illud est, ex quo si intelligatur grave suspendi a filo aliquo, nullo modo movetur, sed quiescit. Linea igitur suspensionis est veluti jugum in libra, circa quod partes corporis sunt in æquilibrio, & hinc inde exercent momenta æqualia. Sit corpus quodcumque ABC (Fig. 44.), cujus centrum gravitatis D, & linea verticalis suspensionis transiens per dictum centrum sit EDF; pars corporis AGH ex uno latere lineæ AF erit in æquilibrio cum parte corporis BGHC ex altero latere ejusdem lineæ verticalis.

Hinc centrum gravitatis semper affectat locum infimum; congruere enim debet cum linea verticali suspensionis: aliter cum partes non sint æquilibratæ, quæ majus momentum exercet, attollet contrariam, & descender usquequo centrum gravitatis ad infimum locum perveniat.

Cum vero grave quodcumque constituitur in statu manente, ut loqui amant Mechanici, hoc est quiescit, signum est centrum gravitatis ad locum infimum descendisse, quod tamen intelligendum dum fieri potest; nam aliquando descendere nequit ob indifferentiam.

Putabat Borellius, quod si sphaera AC (Fig. 45.) cujus superior medietas esset plumbea, inferior lignea, descendendo per lineam verticalem GH volvi circa centrum E Figuræ, ut centrum gravitatis F, quod in emisphaerio superiori locatum esset, ad locum infimum tendere posset. At cum nulla sit ratio, quæ determinet punctum F, ut potius inclinetur versus A, quam versus C, aut quamcumque aliam plagam, mathematicè loquendo, dum pila descender versus centrum gravium, nullo modo centrum gravitatis deferet locum superiorem.

Sed hujusmodi meditationes sunt altioris indaginis, transeamus ad faciliora.

THEOREMA.

Sint data quæcumque corpora, seu melius puncta gravia A, B, C, D, (Fig. 46.), quæ referantur ad planum quodcumque ad, & sit omnium centrum gravitatis E. A dictis punctis gravibus, & ab eorum centro gravitatis ducantur in dictum planum normales aa, bb, cc, dd, ee: dico, quod si ponatur $A \div B \div C \div D = M$, erit $A. Aa \div B. Bb \div C. Cc \div D. Dd = M. Ee$. Per punctum E, hoc est centrum gravitatis, ducatur planum 1a 2d plano ad parallelum. Cum in recta 1a 2d sit centrum gravitatis E, hoc est axis æquilibrii respectu ponderum A, B, C, D; ergo per principium fundamentale Machanicæ $A. A1a \div C. C2c - B. B1b - D. D2d = 0$. Similiter cum recta Ee transiens per gravitatis centrum E sit alter axis æquilibrii, $A. ae \div$

Z 2

B. be

B. $be = C. ce - D. de = 0$. Iterum quia $Aa = a_2a - A_2a = Ee - A_2a$; $Bb = Ee - B_2b$; $Cc = Ee - C_2c$; $Dd = Ee - D_2d$, erit
 $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee - A. A_2a + B. Ee - B. B_2b + C. Ee - C. C_2c + D. Ee - D. D_2d$. Atqui $-A. A_2a + B. B_2b - C. C_2c + D. D_2d = 0$; igitur subductis hisce terminis, remanet $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee + B. Ee + C. Ee + D. Ee = A + B + C + D. Ee = M. Ee$ ex hypotefi. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Si aliqua puncta gravia, vel corpora sita essent infra planum ad , & aliquot supra dictum planum; tunc si distantiae inferiores spectantur tamquam positivae, superiores affiguntur signo negativo. Cæterum signis mutatis, Theorema verum est.

COROLLARIUM II.

Si omnia corpora A, B, C, D sunt æqualia, omnes eorum distantiae a linea ad , erunt multiplex distantiae centri gravitatis E ab eadem linea secundum ponderum numerum, & in casu primi corollarii computandi sunt excessus ob signa partim affirmativa, partim negativa.

SCHOLIUM I.

Facile demonstrari potest, quod si directiones gravium tendant ad centrum infinite distans, & sint parallelæ, unicum datur in unoquoque corpore centrum gravitatis. Duorum ponderum A, B (Fig. 47.), ut brevitati consulam, sit centrum gravitatis E: non solum verificatur propositio superior respectu plani ab , sed etiam alterius quomodocumque inclinati CF; sunt enim similia triangula CAG, DEH, FBI: ex quo fit, quod signato centro gravitatis in corpore, ad quodcumque planum, vel lineam suspensionis referatur, si directiones punctorum gravium sint parallelæ, partes hinc inde a plano suspensionis sunt æqualium momentorum.

SCHOLIUM II.

Hinc demonstratur regula Guldini a Pappo indicata; nempe figuram solidam ex rotatione cujuslibet figuræ planæ circa rectam positionem datam oriundam æquari producto ex figura genitrice in viam centri gravitatis. Pono ordinatam $CE = y$ (Fig. 48.) fluxionem $Cc = dx$, distantiam $GF = a$, figuram genitricem $ABD = f$, solidum ab illa geni-

nitum in rotatione circa $AD = s$, ejus elementum $= ds$. Quibus positis, per nostram propositionem erit $af =$ summæ omnium momentorum partium, seu punctorum gravium componentium figuram f . Elementi areæ, hoc est rectanguli $Ee = ydx$ centrum gravitatis distat a recta AD per dimidium EC , hoc est $\frac{y}{2}$; ergo ejus momentum $= \frac{y^2 dx}{2}$.

ergo $af = \int \frac{y^2 dx}{2}$, & ductis omnibus in p notam circumferentiæ, paf

$= \int \frac{py^2 dx}{2}$: sed pa est periphæria radii GF , & py circumferentia radii

CE , & $\frac{py^2}{2}$ circulus ex radio CE ; ergo $\frac{py^2 dx}{2} =$ cylindro inscripto in

solido rotundo; ergo $\int \frac{py^2 dx}{2} = s$; ergo tandem $paf = s$. Q. E. D.

Ob similem rationem si punctum F sit centrum gravitatis non spæzii ABD, sed curvæ AB, superficies genita ex rotatione curvæ AB circa axem motus AD æqualis est rectangulo ex curva AB in viam rotationis puncti F. Notandum tamen hanc regulam Guldini locum invenire in corporibus uniformiter, non autem difformiter gravibus.

SCHOLIUM III.

Hinc ortum habent formulæ, quarum ope centra gravitatis inveniuntur. Si F sit centrum areæ ABD, habebimus distantiam GF , hoc est $a = \frac{\int x y^2 dx}{\int y dx}$. Distantia porro $FH = b = \frac{\int x^2 y dy}{\int x dy}$, & cum utroque

biquè area $ABD = \int y dx = \int x dy$, posito quod DC sit $= x$, erit $GF = FH$, ut solidum ex figura ABD circa axem AD ad solidum ex eadem figura circa DB . Similiter si sit F centrum gravitatis curvæ AB, erit $FG = a = \frac{\int y ds}{s}$: est autem curva $AE = s$, ejus elementum $Ee = ds$;

Centra gravitatis conoidum, eorumque superficiæ inveniantur determinando centra gravitatis spatiorum analogorum.

S C H O L I U M IV.

Regula Guldini obtinet etiam in motibus, ubi centra, vel axes rotationis mutantur; semper enim vel solidum, vel superficies genita æqualia sunt figuris, vel curvis ductis in viam rotationis. Id explico, adducto Theoremate Leibnitiano.

Sit curva quæcumque ACB (Fig. 49.), cuius centrum gravitatis G. Evolvatur curva more Hugheniano per suas tangentes, ac generet figuram AMD, centrumque gravitatis curvæ in actu evolutionis incedat per curvam GFg. Sint duæ tangentes MN, *mn* proximæ. Centra gravitatis harum tangentium sint puncta media E, *e*. Centrum gravitatis curvæ BN + rectæ NM sit F; curvæ autem Bn + rectæ *nm* sit *f*; rectæ EF, *ef* concurrant in puncto H.

Demonstrat Varignonius, quod MN. E *e* = MN + NB. Ff = ACNB. Ff; ergo per calculum summatorium area ABD = rectangulo ex ACB. GFg.

Consule de centro gravitatis Varignonium laudatum in actis Academiæ regię Parisiensis anni 1714.

CAPUT QUARTUM.

De Pendulis.

THEOREMA I.

Grave quodcumque descendat prius per lineam verticalem AB (Fig. 50.), deinde per planum inclinatum AC, & sit linea quæcumque horizonti parallela EF: Dico primo in punctis E, F velocitates esse æquales. Linea verticalis FD exprimat vim absolutam gravitatis, ejusque directionem ad centrum infinite distans, & sit DI normalis ad rectam AC: manifestum est vim FD resolvi in vires ID, FI, quarum prima cum sit plano inclinato perpendicularis, tota infumitur in ejusdem plani compressionem, altera vero FI juxta directionem plani ea est, quæ grave ad motum sollicitat per dictum planum declive. Sunt autem vires acceleratrices FD, FI semper constantes, & uniformiter urgentes mobile, incipientes a puncto quietis A; ergo velocitatum quadrata utrobique se habebunt, ut factum ex vi sollicitante in spatium decursum, hoc est $V^2 : u^2 :: FD : AE$. FI. AF: sed ob similitudinem triangulorum AEF, FID, FD: FI :: AF: AE, vel FD. AE = FI. AF; ergo $VV = uu$, vel $u = V$. Q. E. D.

Quoad tempus: cum velocitates per elementa Ee, FH sint æquales, ex formula $ds = vdt$ evincitur, tempus, quo percurritur fluxio Ee, vel Ef,

Ff, ad tempus, quo percurritur fluxio FH, esse ut Ff: FH :: EA: AF, in qua ratione constat pariter esse tempora integra, quibus percurruntur spatia AE, AF; AB, AC. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Ex puncto E duc ad rectam AC normalem EK: illud sequitur; quod spatia AE, AK æqualibus temporibus percurrantur. Cum enim tempus per AE ad tempus per AF sit, ut AE ad AF, tempus vero per AF ad tempus per AK in ratione dimidiata FA: KA, hoc est in ratione simplici FA: AE; ergo tempus per AE ad tempus per AK, ut AE: AE, hoc est in ratione æqualitatis.

COROLLARIUM II.

Ob angulum rectum ad punctum K idem punctum erit in circumferentia semicirculi, cuius diameter AE, unde ducta a puncto A quacumque chorda pertingente ad peripheriam, tempora per diametrum AE, & per dictam chordam sunt semper æqualia, quod invenit Galilæus.

THEOREMA II.

Feratur mobile A (Fig. 51.) per duo plana inclinata AB, BC: dico mobile non inchoare motum descensus in primo puncto B secundi plani ea velocitate, quam acquisiverat in puncto ultimo B primi plani post descensum acceleratum per integram AB. Velocitas acquisita in puncto B ex casu per AB exprimatur per eandem AB, & producta CB ad partes E cadat ex puncto A ad CE normalis AE. Velocitas AB resolvitur in duas velocitates AE, EB, quarum prima, cum sit plano EBC perpendicularis, tota infumitur in compressionem dicti plani, & a plani reactione destruitur; altera vero EB juxta directionem plani BC, cum a nulla vi contraria destruat, tota perseverat. Mobile igitur incipit moveri in plano BC non celeritate AB, sed solum celeritate EB, determinata ut supra. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Ex puncto E duc ad AB normalem EF: mobile ea velocitate inchoat motum in plano inferiore BC, ac si descendisset ex puncto quietis F, non ex puncto quietis A, & eandem velocitatem habet in puncto B, quam habet, & postulat casus per FB, non autem per integram AB. Reliqua velocitas, quæ mobili erat acquisita, amittitur, dum planum subiectum comprimit, & percutit. Hinc protracta AB in H usque ad horizontalem DC, si mobile motum suum continuasset per planum ABH in puncto H, eandem velocitatem acquisivisset, ac si cecidisset per verticalem AD. Et percurrendo successive per duo plana inclinata AB, .

AB, BC, in puncto C majorem celeritatem non adipiscitur, quam si de-
scendisset per verticalem FG. Velocitas autem per FG ad velocitatem per
AD se habet in ratione dimidiata ipsius FG ad AD. Hæc omnia satis ma-
nifesta sunt. Cum enim EB sit media proportionalis inter AB, & BF, sit
velocitas terminalis acquisita in descensu per AB exprimitur per eandem
AB, velocitas terminalis acquisita in descensu per FB exprimitur per EB:
sed per eandem EB exprimitur velocitas, qua mobile incipit moveri in
plano inferiore BC; ergo &c.

COROLLARIUM II.

Si angulus ABC rectus esset, & secundum planum BC normaliter
plano AB insisteret, tunc tota velocitas periret, & insumeretur in percus-
sionem. Id intelligo, existente corpore non elastico; nam si elasticum esset
reflexionem pateretur. Similiter in positione planorum ABC, dum corpus
elasticum transit ab uno in aliud planum, aliquam reflexionem patitur,
& saltum efficit. Movetur itaque in aere per parabolam, & rursus secun-
dam percussionem efficit, mox per alterum saltum tertiam percussionem,
& sic deinceps, usquequo totus motus reflexionis amittatur, & mobile
incepat tangendo planum declive. Hæc circumstantia tamen non facit,
quod in puncto C non acquirat velocitatem supra determinatam.

COROLLARIUM III.

Si angulus EBA esset infinite acutus, & angulus ABC a duobus rectis
quàm minime distans, superest inquirendum, quid inde sequatur. Erit
in hoc casu tam EA, quam EF infinitesima primi gradus ob finitas EB,
BA; ergo FA infinitesima secundi gradus. Nam BF: FE:: FE: FA. Su-
blimitates igitur descensus non differunt, nisi per secundam differentiam.

COROLLARIUM IV.

Hinc si essent infinita plana se mutuo succedentia, ita ut anguli
inclinationis ab invicem differrent per angulos infinitesimos, quod con-
tingit in curvis, in quibus sunt minimi anguli contactuum, in transitu
ab uno plano in aliud minuitur sublimitas descensus per secundam flu-
xionem, quæ infinites repetita primam fluxionem æquat. Perveniant igi-
tur duo gravia æqualia ad eandem horizontalem BC (Fig. 52.), &
unum descendat per verticalem AB, alterum per curvam AC, velocita-
tes in punctis B, & C erunt æquales. Nam grave descendens per cur-
vam, eandem acquirit velocitatem, ac si cecidisset ex sublimitate DB:
sublimitas autem DB differt a sublimitate AB per infinitas infinitesi-
mas secundi gradus, quæ simul junctæ, & in unam summam collectæ
constituunt AD infinitesimam primi gradus. Velocitates ergo utrobique
se habebunt, vocando AB x , ut $\sqrt{x} : \sqrt{x-ax}$, hoc est æquales, quod
erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA III.

Descendat grave in hypothesi gravitatis constantis per curvam
quancumque BCD (Fig. 53.), & gravitas absoluta mobilis exponatur
per constantem CG. Ducta tangente C c F, ex puncto G demittatur
ad dictam tangentem normalis GF. Quoniam vis CG resolvitur in vi-
res CF, FG, quarum secunda nihil facit ad motum, cum sit norma-
lis ad curvam, & tota insumitur, vel in gravitando curvam, vel in
distensionem sili AC in pendulis; illud sequitur, quod vis CF sit illa,
a qua mobile per curvam acceleratur, & quam deinceps vocabimus vim
tangentialem: sed CG: CF:: Cc:: co; ergo vocando vim CF = f .
CG = a , Cc elementum curvæ = ds , co elementum abscissæ = dx ,
habebimus $f = \frac{adx}{ds}$.

COROLLARIUM I.

Si curva BCD sit quadrans circuli, & exponatur vis constans CG
per radium AC, erit ordinata EC = vi tangentiali FC. Unde
circulus ipse est relate ad se ipsum scala virium tangentialium accele-
rantium.

COROLLARIUM II.

Porro velocitas in quacumque curva est semper in ratione dimi-
diata sublimitatis AE.

COROLLARIUM III.

Cum sit $f = \frac{adx}{ds}$, vel $ds = \frac{adx}{f}$ & sit $ds = vdt$, habebimus dt

$= \frac{adx}{fv}$, & integrando, $t = \int \frac{adx}{fv}$: utraque autem f , & v data est per
 x , ut docuimus:

THEOREMA IV.

In duobus pendulis oscillantibus in vacuo AB, AD, (Fig. 55.)
& arcus similes describentibus sint vires absolutæ f , F, in qua ratione
cum sint tangentiales, ut ob similitudinem triangulorum manifestum sit,
perinde est utrum usurpentur tangentiales, vel absolutæ, dum motus
pendulorum circularium inter se comparantur. Sint massæ corporum m
A a M, &

M, & longitudines pendulorum AB, a , AD, A: quæro quænam relatio intercedat inter velocitates, & tempora oscillationum. Pono arcus minimos $Gg = dt$, $Hb = dS$.

Quoniam si vires sollicitantes pendula, ducantur in elementa spatiorum dimensurum, producta æqualia sunt facto ex momentis velocitatis in massam, igitur $fds = mudu$; $FDS = MVDV$; ergo $fds : FDS ::$

$$mudu : MVDV, \text{ \& integrando, } \int fds : \int FDS :: mu^2 : MV^2 : \text{ sed } Gg = ds : Hb = dS :: AG = a : AH = A; \text{ igitur } fa : FA :: mu^2 : MV^2; \\ \text{vel } \frac{fa}{m} : \frac{FA}{M} :: u^2 : V^2.$$

Jam cum sit $u = \frac{ds}{dt}$, & $V = \frac{dS}{dT}$, facta horum valorum substitutione, ponendo etiam loco ds , dS proportionales a , A ; $\frac{fa}{m} : \frac{FA}{M} ::$

$$\frac{a^2}{dt^2} : \frac{A^2}{dT^2} : \text{ unde fit } \frac{am}{f} : \frac{AM}{F} :: dt^2 : dT^2, \text{ vel } \frac{\sqrt{am}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{AM}}{\sqrt{F}} :: dt :$$

$dT :: t : T$; nam cum sint in assignata ratione tempora infinitesima; quibus percurrunt spatia minima Gg , Hb , in eadem ratione erunt tempora integra, quibus conficiuntur arcus similes quicumque BG , DH , BC , DE . Quod erat inveniendum.

COROLLARIA.

1°. Tempora oscillationum pendulorum diversorum sunt ex formula assignata in composita ratione ex subduplicata massarum, & longitudinum pendulorum directe, & subduplicata itidem, sed inversa ponderum.

2°. Si longitudines pendulorum sint æquales, hoc est $a = A$, erit

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}} :: t : T.$$

3°. Si $t = T$; ergo $\frac{am}{f} = \frac{AM}{F}$ vel $a : A :: f : F$, hoc est pen-

dula sunt isocrona, quando pondera divisa per massas sunt in eadem ratione, ac longitudine.

4°. Quod si massæ sint æquales, isocronismus servatur, dum vires sunt inter se, ut longitudines pendulorum, & si æquales vires, in eadem hypothefi longitudines debent esse in massarum ratione inversa.

5°. Si

5°. Si sollicitationes, quibus pendula agitantur, id est vires, vel pondera sint proportionalia longitudinibus pendulorum, tempora erunt in ratione dimidiata massarum; tunc enim $\sqrt{m} : \sqrt{M} :: t : T$.

6°. Cum autem sint numeri oscillationum in ratione inversa temporum, hoc est $t : T :: \frac{1}{n} : \frac{1}{N}$ hinc alia corollaria deduci possunt; tot

enim sunt, ex quibus tot Theoremata confici possunt, quot sunt combinationes specierum a , A ; f , F , m , M ; t , T ; n , N , a quibus repræsentantur longitudines, massæ, pondera, tempora, & numeri oscillationum.

SCHOLIUM I.

Attendendum potius est ad phænomena, quæ in pendulis communibus observantur. Si pendula sint æqualis longitudinis semper erunt isocrona, licet ipsis appendantur non solum æqualia pondera, sed inæqualia, nec tantum ex eadem materia confecta, sed etiam ex diversa; ut si glans unius penduli sit aurea, & alterius lignea, vel plumbea. In hujusmodi pendulis machinæ Boyleanæ inclusis, ubi minima est aeris extenuati resistentia, oscillationes sunt perfectæ isocronæ, si fiant per arcus æquales; adeo ut in mille vibrationibus vix notari possit dimidiæ oscillationis differentia. In aere libero resistentia mediæ aliquid operatur, & turbat isocronismum. Notandum tamen, quod pendula demitti debent ex æqualibus altitudinibus; nam per arcus inæquales in circulo descensus non sunt æque diuturni. His positis, in nostra formula

$$\frac{\sqrt{am}}{\sqrt{f}} : \frac{\sqrt{AM}}{\sqrt{F}} :: t : T \text{ habebimus } t = T, \text{ \& } a = A; \text{ ergo}$$

$$\frac{m}{f} = \frac{M}{F}, \text{ hoc est } f : F :: m : M. \text{ Erunt igitur vires, seu pondera mas-}$$

sis proportionalia, quod alibi ex descensu verticali gravium demonstratum est, & nunc confirmatur ex oscillationibus pendulorum.

Quæ cum ita sint, erit in formula generali ad pendula communia applicata $\frac{m}{f} = \frac{M}{F}$; ergo $\sqrt{a} : \sqrt{A} :: t : T$, hoc est tempora in ra-

tione dimidiata longitudinum; quod comprobatur experientia; si enim comparantur inter se duo pendula, quorum secundum sit primi quadruplum in longitudine, tempora oscillationum erunt in ratione dupla.

S C H O L I U M II.

Hoc fundamentale principium innumeras Physicorum hypothesen evertit. Mirari non desino confidentiam, qua Philosophi minimis particulis corpora praesertim fluida componentibus peculiares figuras assignant. Sic atomi aquae cylindricae sunt, vel sphaericae, at illae, ex quibus argentum vivum componitur, sunt minimae sphaeroides ellipticae. Sal marinum constat ex cubis, & reliqua falia figuras sortita sunt determinatas, & regulares. Verum si huiusmodi hypothesis conferatur cum his, quae demonstrata sunt, statim falsitatis arguetur. Si aqua constat ex sphaeris, cum cubus ad sphaeram inscriptam sit quam proxime in ratione binarii ad unitatem, sequeretur nullum corpus in natura dari, cuius gravitas specifica esset plus quam dupla gravitatis aquae in specie, quod est contra experientiam. Sed de his dicta sint satis.

P R O B L E M A.

Invenire pendulum isocronum in hypothesi gravitatis constantis.

Quaestio huc redit, ut determinetur curva, per quam pendulum oscillando quascumque vibrationes, sive magnas, sive parvas eodem tempore perficiat.

Sit jam factum, & curva quaesita sit BCD. (Fig. 53., & 54.). Gravitas mobilis in quocumque puncto C, cum sit constans, & tendat ad centrum infinite distans, exprimatur per constantem GC axi AD parallelam: vis tangentialis, qua mobile urgetur uniformiter per elementum Cc curvae, erit CF, quae determinatur, ut jam dictum est, ducta tangente CF, & demissa ex puncto G normali GF.

His positis curva BCD extendatur in rectam verticalem b_2Cd , & sit $BC = b_2C$, & $2C_2c = Cc$. Ponatur ordinata $2C_2F = CF$, hoc est vi tangentiali curvae in puncto C, & per punctum 2F, aliaque similiter determinata transeat curva d_2F_2G , quae sit scala virium sollicitantium mobile per rectam bd . In primis manifestum est pendulum descendere per curvam BCD, vel per quamcumque ejus portionem CD eodem prorsus tempore, quo mobile percurrit rectam bd , vel ejus partem $2Cd = CD$.

Cum enim tam spatiola Cc, $2C_2c$, quam vires acceleratrices CF, $2C_2F$ sint utrobique aequales, manifestum est tempora minima per Cc, $2C_2c$ esse aequalia, quod cum verificetur in singulis elementis arcus CD, & abscissae $2Cd$, evidens quoque est tempora integra per CD, $2Cd$ esse aequalia. Idem demonstrabimus de descensu penduli per arcum quemcumque KD, & mobilis per rectam aequalem kd . Interim Problematis conditio postulat, ut tempora descensus per arcus BD, CD, KD, vel

per

per verticales bd , $2Cd$, kd &c. sint aequalia; ergo per ea, quae sunt alibi demonstrata, haec conditio impleri non potest, nisi scala virium sollicitantium mobile per verticalem bd sit triangulum, & curva d_2F_2G transeat in lineam rectam, tunc enim tempora descensus per bd , $2Cd$, kd sunt aequalia; ergo $2Cd : 2C_2F :: DC : CF$ in ratione constante.

Sit itaque arcus $DC = s$, ejus elementum $Cc = ds$, vis subtangentialis $FC = bs$, utpote quae debeat esse ad arcum in ratione constante, gravitas absoluta $CG = a$, elementum abscissae De , hoc est $Ee = dx$. Ob similitudinem triangulorum GCF, Cco , erit $GC = a : CF = bs :: Cc = ds : Co = dx$; ergo $\frac{adx}{b} = ds$, quae est aequatio

differentialis ad Cycloidem.

C O R O L L A R I U M.

Si ponatur CG constans = duplo diametro circuli genitoris Cycloidis, hoc est gravitas absoluta exprimatur per duplum ejusdem diametri, vis tangentialis CF erit ubique arcui cycloido CD aequalis.

C A P U T Q U I N T U M.

De Trajectoriis descriptis a viribus centralibus in vacuo.

Ad hanc tractationem aggredimur, quam tamen ad aliquas facilliores res formulas adducere tentabimus, nonnullis praemissis Theorematis.

T H E O R E M A I.

Sint duo gravia aequalia, quorum primum descendat versus B (Fig. 56.) per lineam rectam AB sollicitatum a viribus centralibus, quarum scala sit curva CGg; alterum feratur per trajectoriam Af hac lege, ut ex centro B ductis quibuscumque arcibus circularibus EF, ef secantibus trajectoriam in punctis F, f, mobile in puncto F, vel f sollicitetur versus centrum B vi EG, vel eg: dico utrumque grave, tam illud descendens per rectam AE, quam illud, quod fertur per curvam Af, in punctis analogis E, F; e, f habere velocitates aequales.

Incipiant moveri dicta mobilia in punctis E, F velocitate impressa aequali, & mobile, quod fertur per lineam rectam, sollicitetur per minimum spatium Ee a vi centripeta EG: aliud vero describens arcum infinitesimum Ff a vi tangentiali FI; nam posita $FK = EG$, si ex puncto K ad tangentem FI demittas normalem KI, vis centralis FK resolvitur in vires IK, FI, quarum prima utpote perpendicularis ad curvam trahit grave a tangente versus curvam, altera juxta directionem tangentis illud accelerat.

Jam

Jam ob triangula similia, $KF:FI::Ff:FH$, vel Ee ; ergo $KF:FH = EG.Ee = FI.Ff$. sed $GE.Ee =$ momento velocitatis in e , & $IF.FE =$ momento velocitatis in f ; ergo dicta momenta, hoc est velocitates in e, f sunt æquales. Et quoniam id semper verificatur, sumptis in recta AB , & curva AFK duobus aliis elementis analogis, sequitur in quibuscumque punctis analogis velocitates esse æquales. Quod E. D.

COROLLARIUM.

Ex Theoremate præmissio prima deducitur formula. Cum enim in motu rectilineo sit semper $fds = udu$, & velocitas etiam in motu curvilineo sit eadem, atque insuper sit $Ee = FH$, habebimus pariter vim centalem ductam in elementum ordinatæ FH æqualem momento velocitatis mobilis in quocumque puncto F curvæ; ergo $2aa = 2Sfds = u^2$, ponendo $FH = ds$.

THEOREMA II.

Describat gravē, cujus vis centripeta tendat ad centrum B (Fig. 57. quamcumque trajectoriam AFK : dico tempus per arcum curvæ AF esse semper proportionale spatio ABF . Postquam mobile pervenit ad punctum F curvæ, habet velocitatem acquisitam, per quam tempore infinitesimo percurrat uniformiter curvæ arcum Ff : si dictum mobile a nulla vi centrali afficeretur, motum suum continuaret per tangentem Ff productam, & secundo instanti primo æquali percurreret spatium $fI = Ff$: sed vis centripeta urget grave per directionem Ii , quæ cum centro ipso concurret, versus quod grave impellit, & ob angulum infinitesimum FBI est etiam parallela rectæ BF ; ergo mobile per legem virium centripetarum fertur per elementum curvæ fi , & in fine secundi instantis reperitur in puncto i .

Jam rectæ infinitesimæ æquales Ff, fI exponunt duo momenta æqualia, & cum sint etiam æqualia duo triangula FBf, fBI , & triangulum fBI sit æquale triangulo fBi , quod semper verificatur, veritas Theorematis manifesta est.

COROLLARIA.

I. Hinc profluit altera formula; si enim elementum temporis, quo percurritur arcus infinitesimus Ff , vocetur dt , sit autem $Bf = s$, & arcus minimus $fI = dz$, habebimus $sdz = dt$.

II. Est autem tempus ut elementum Ff directæ, & velocitas inversæ, ponendo $Ff = dvv$; $dt = \frac{dvv}{u}$; ergo $sdz = \frac{dvv}{u}$, quæ est tertia formula.

III Sit

III. Sit FL normalis ad curvam, ad quam ex centro B demittatur perpendicularis BL : habebimus ob similitudinem triangulorum FfH, FBL (si statuatur $FL = p$) $BF = s: FL = p:: Ff = dvv: fH = dz$; ergo $sdz = pdvv$, & in formula corollarii secundi $sdz = \frac{dvv}{u}$,

collocando loco sdz suum valorem $pdvv$, erit $pdvv = \frac{dvv}{u}$, hoc est

$p = \frac{s}{u}$. Est igitur semper normalis FL reciproce ut velocitas, quæ

est quarta formula.

IV. Sit radius osculator MF , & centrum osculi M , a quo ad ordinatam FB demittatur normalis MN , erit FN subosculatrix, seu co-radius, sitque $FN = q$; per ea, quæ dicta sunt in problemate inverso radiorum osculatorum, $\frac{ds}{q} = \frac{dp}{p}$: sed $ds = -\frac{udu}{f}$, & $\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u}$

ab æquatione $p = \frac{s}{u}$; ergo factis substitutionibus, $\frac{udu}{fq} = \frac{du}{u}$, seu u^2

$= fq$. Velocitas igitur semper est media proportionalis inter vim centalem, & co-radius, quæ est quinta formula.

V. Quoniam $u^2 = fq$, vel $\frac{ds}{q} = \frac{fds}{u^2}$, & $\frac{ds}{q} = \frac{dp}{p}$; ergo $\frac{u^2 dp}{p} = fds$: sed $u^2 = \frac{s}{p}$; ergo $\frac{dp}{p^3} = fds$, quæ est sexta formula. Hæc etiam

formula deduci potest ex prima $fds = udu$; nam cum sit $u = \frac{s}{p}$ & $du = -\frac{dp}{p^2}$, erit $udu = \frac{dp}{p^3} = fds$.

SCHOLIUM.

Ex prædictis formulis nullo negotio deducere possumus æquationem trajectoriæ expressam per secundas differentias. Sed præstabit formulam ipsam differentio-differentialem ex aliis principiis deducere. Sit trajectoria KCH (Fig. 58.), centrum virium A , & sit mobile in puncto C . Sumatur arcus infinitesimus CF , sitque CE tangens curvam, quæ tangens ab ordinata AF producta secetur in E . Centro A intervallo AC describatur arcus minimus CB , & centro C intervallo CF alter arcus minimus FD , deinde sint rectæ CG, FG normales ad curvam in punctis C, F , quæ concurrant in puncto G , & sit GC , vel FG radius osculator. Hæc

Hac præparatione facta manifestum est interceptam EF esse spatium, quod mobile percurrit sollicitatum a vi centrali, eo tempore nempe dt , quo percurreret tangentem CE, ex quo fit, quod revera percurrat arcum CF. Jam velocitas, qua percurritur linea EF est $f dt$, hoc est ut vis ducta in tempus, & est etiam ut EF directe, & ut tempus inverse; ergo $f dt = \frac{EF}{dt}$; vel $f = \frac{EF}{dt^2}$; sed GC, r : CF, dvv :

$$CF, dvv: DF = \frac{dvv^2}{r}, \text{ \& rursus } BG, dz: CF, dvv: DF, \frac{dvv^2}{r}$$

$$FE = \frac{dvv^3}{rdx} \text{ igitur substituendo, } f = \frac{dvv^3}{rdx dt^2}. \text{ Verum cum tempora sint}$$

$$\text{in ratione arearum, habebimus } dt = sdx, \text{ posita nempe } AC = s; \text{ ergo } f = \frac{dvv^3}{rs^2 dz^2}.$$

$$\text{in CB} = dz, \text{ vel CF} = dvv, \text{ vel BF} = ds, \text{ est respective } \frac{sdvv^3}{dvv^2 dz - sdx dds}$$

$$\text{vel } \frac{sdx dvv}{dx dz - sdds}, \text{ vel tandem } \frac{sdvv^3}{dx dvv^2 - sds ddz}; \text{ hinc factis operationibus,}$$

$$\text{\& opportunis substitutionibus, erit } f = \frac{dvv^3 - sdds}{s^3 dz^3}, \text{ vel } f =$$

$$\frac{dvv^2 dz^2 - sdvv^2 dds}{s^3 dz^3}, \text{ vel } f = \frac{dx dvv^2 - sds ddz}{s^3 dz^3}. \text{ Iactis his fundamentis;}$$

placet aliquot necessaria Problemata addere.

PROBLEMA I.

Determinare leges virium centralium in circulo:

Circa clavum fixum in puncto A (Fig. 59.) roteretur grave aliquod alligatum filo AB, & describat circumferentiam BCD motu æquabili. Vocetur ut moris est vis centrifuga, seu conatus, quem mobile exercet, ut recedat a peripheria circuli per tangentem, vocetur inquam f , cui semper æqualis est, & contraria vis, qua retinetur in dicta circumferentia. Hac scilicet grave tentat extendere cordam, quam suppono infinite rigidam. Voco u velocitatem actualement mobilis per circumferentiam, & sit radius AB = r , circumferentia = cr , tempus unius integri circuitus sit t . Ergo habebimus $cr = t$, & hæc est prima formula.

Deinde sumamus alteram formulam ex corollario quarto, hoc est $f q = u^2$, sed cum in circulo tam radius osculator, quam subosculatrix coincident cum semidiametro AB, erit $fr = u^2$.

De-

Denique idem grave, ut acquirat velocitatem u , quam habet dum agitur per circumferentiam BCD, debeat descendendo verticaliter ex puncto quietis H percurrere lineam verticalem HI, & in puncto I moveatur prædicta velocitate u . Vocetur altitudo HI, a , gravitas communis, g ; ideoque $2ga = u^2$.

Ex inventarum formularum combinatione sequitur primum $fr = u^2 = 2ga$, & ponendo $r = 2a$, erit $f = g$, hoc est si mobile revolvatur ea velocitate, quam acquisivisset cadendo dimidii radii ex altitudine, conatus centrifugus gravitati æqualis est: & generaliter conatus centrifugus est ad gravitatem, ut dupla HI ad radium AB.

$$2^o. \text{ Cum sit } fr = u^2, \text{ \& } u = \frac{cr}{t}, \text{ vel simpliciter } \frac{c}{t} \text{ ponendo } c =$$

$$\text{circumferentiæ radii AB; ergo } fr = \frac{c^2}{t^2}, \text{ vel } \frac{c^2}{fr} = t^2, \text{ hoc est } \frac{c}{\sqrt{f\sqrt{r}}} = t,$$

& ponendo r loco unitatis, erit tempus ut arcus directe, vel integra circumferentia, & inverse ut radix conatus centrifugi. Reliquæ habentur ex formulis.

SCHOLIUM.

Comparemus conatus centrifugos mobilium, qui circulos diversos describunt, & lineæ minusculæ designent in uno circulo, quod in alio majusculæ. Sit igitur $fr = u^2$, $FR = V^2$; $\frac{c}{t} = u$, $\frac{C}{T} = V$; $\frac{c}{\sqrt{f\sqrt{r}}} = \frac{C}{\sqrt{F\sqrt{R}}}$

$$= t \frac{C}{\sqrt{F\sqrt{R}}} = T.$$

I. Sint velocitates æquales; ergo $fr = FR$; & conatus centrifugi in ratione inverse radorum, seu distantiarum a centro, hoc est $f: F:: R: r$; deinde ob $\frac{c}{t} = C$, $c: C:: t: T$: sed $c: C:: r: R$; ergo tempora

ut distantia, hoc est in ratione virium inversa:

II. Sint velocitates in quacumque ratione distantiarum, hoc est $u = r^m$, $V = R^m$: habebimus $fr: FR:: r^{2m}: R^{2m}$, vel $f: F:: r^{2m-1}: R^{2m-1}$. Si igitur velocitates sint ut distantia, & sit $m = 1$, vires erunt ut eadem distantia. Et si velocitates sint in ratione inversa dimidiata distantiarum, hoc est $m = -\frac{1}{2}$, vires erunt inter se in ratione reci-

proca duplicata distantiarum; habebimus enim $f: F:: r^{-2}: R^{-2}$. In
Opere Ricc. Tom. III. B b hac

hac hypothesi tempora erunt in ratione fefquiplicata distantiarum; & in hoc consistit celebre Theorema Repleri pro motibus cælestibus. Nam cum $c : t :: C : T$, vel $u : R :: t : T$, hoc est $rr : RR :: t^2 : T^2$, &

$$u^2 = fr, V^2 = FR; \text{ ergo } \frac{r}{f} : \frac{R}{F} :: t^2 : T^2 : \text{ sed } f = \frac{1}{rr}, \text{ \& } F = \frac{1}{RR}$$

igitur $r^3 : R^3 :: t^2 : T^2$.

III. Si tempora periodica sint æqualia, conatus centrifugi erunt ut distantie. Reliqua prætereo, quæ ex formulis facile deducuntur.

PROBLEMA II.

Invenire vim centralem cujuscunque mobilis datam trajectoriam in vacuo describentis.

VEL æquatio differentialis curvæ data est relate ad focum, hoc est ad centrum virium, vel solum data est relate ad axem.

In primo casu res est facilis, sive utamur formula secundas differentias involvente, sive adhibeamus formulas continentes tantum primas differentias. Exemplum dabimus in utraque hypothesi.

EXEMPLUM I.

Sit Logarithmica spiralis, cujus æquatio sit $adx = bds$, hoc est sit CB: BF (Fig. 58.) in ratione constante: erit semper triangulum minimum spetie datum, & $CF = dw = cds = bdx$. Jam sumpta pro constanti dx , habebimus $bdds = 0$. In formula igitur $f = \frac{dw^2 - sdds}{s^3 dx^2}$

deleatur terminus $-sdds = 0$, & loco dw^2 collocetur valor $bhdx^2$: habebimus valorem $f = \frac{bh}{s^3}$, hoc est vires reciproce ut cubi distan-

tiarum.

EXEMPLUM II.

Sit Spiralis hyperbolica ad focum, cujus subtangens sit semper constans, & $= a$. Habebimus ergo $a : s :: dx : ds$, vel $\frac{ads}{s} = dx$. Suman-

tur iterum differentia, sumpta ds pro constante, & habebimus $\frac{-ads^2}{s^2}$

$$= ddx$$

$= ddx$. Jam cum sit $\frac{ads}{s} = dx$, vel $\frac{a^2 ds^2}{s^2} = dx^2$, habebimus $\frac{a^2 ds^2}{s^2} = dx^2$

$ds^2 = dx^2 = \frac{1}{a^2} dw^2$. Sumamus formulam huic casui convenientem $f = \frac{dx dv^2 + sdsddx}{s^3 dx^3}$, & substitue valores inventos loco dx , dw^2 ,

ddx , & dx^3 , & sic stet formula $fs^3 dx^3 = dx dw^2 - sdsddx$: habebimus $fa^3 ds^3 = \frac{a^3 ds^3}{s^5} - \frac{ads^3}{s} - \frac{ads^3}{s}$, & elisis elidendis, & facta divisione per

ds^3 , erit $f = \frac{1}{s^3}$, hoc est vires in ratione reciproca triplicata distantiarum,

ut etiam in curva logarithmica spirali. Facilius fortasse præstari potuisset, adhibita sexta formula $fds = \frac{dp}{p^3}$, in qua p (Fig. 57.) significat

portionem normalis resectam versus partes superiores a perpendiculari BL.

Sit rursus spiralis hyperbolica, cujus subtangens a , sive unitas, & ætensis iidem denominationibus, sit BO perpendicularis ad ordinatam BF, & per consequens subnormalis curvæ, eritque $BO = \frac{ds}{dx}$ sed in no-

stra hypothesi $\frac{ds}{s} = dx$; ergo $BO = \frac{s^2}{a}$, & quadratum OF $= s^2 = \frac{s^4}{a^2}$

sed OF: FB:: FB: BL; ergo FL $= p = \frac{s}{\sqrt{aa = ss}}$, & differentiando,

$dp = \frac{ds}{aa = ss \cdot \sqrt{aa = ss}}$, & dividendo utrobique per quantitates æquales

$p^3 = \frac{s^3}{aa = ss \cdot \sqrt{aa = ss}}$, erit $\frac{dp}{p^3} = fds = \frac{ds}{s^3}$, ergo f ut cubus distantie

reciproce.

Altera hypothesi est, quando curva refertur ad suum axem, ejusque localis æquatio data est per abscissas, & ordinatas more Cartesiano. Hic casus pariter in duos casus dividitur; vel enim vis centripeta dirigitur ad datum punctum tamquam centrum virium, vel ad punctum infinite distans, ita ut directiones vis centripetæ fiant secundum ordinas parallelas.

Si vis centralis tendat ad focus datum; tunc æquatio curvæ ad axem convertenda est in æquationem differentialem ad focus, & res per methodum supra expositam tractanda venit.

EXEMPLUM I.

Describat mobile circuli peripheriam, & vis centralis tendat ad punctum datum in eadem circumferentia: quæritur lex vis centripetæ. In hoc casu erit in ratione reciproca quintuplicata distantia.

EXEMPLUM II.

Moveatur Planeta per perimetrum alicujus sectionis conicæ elipsi scilicet, vel parabolæ, vel hyperbolæ, & vis tendat ad centrum sectionis, erit in tali casu ut distantia. Hæc problemata solvuntur per regulas supra traditas.

Transitum faciamus ad hypothesim, in qua vis dirigatur ad centrum infinite distans & recenseamus nostras tres formulas exhibitas in Scholio Theorematis secundi, nempe $f = \frac{dw^2 - sdds}{s^3 dz^2}$, in qua est constans

$$dz; f = \frac{dw^2 dz^2 - sdw^2 dds}{s^3 dz^4}, \text{ in qua est constans } dw; f = \frac{dz dw^2 + sdsddz}{s^3 dz^3},$$

in qua est constans ds .

Ut has formulas aptemus nostræ hypothesi, notandum primo, quod termini dw^2 in prima, $dW^2 dz^2$ in secunda, $dz dw^2$ in tertia, utpote cum aliis incomparabiles, evanescunt; est enim $s = \infty$.

Notandum secundo, quod quantitas s fit constans; cum enim sit infinita, variabilis esse nequit, & differentia finitæ duarum quantitatum infinitarum æqualitatem non destruunt.

Hinc formulæ prædictæ transeunt in tres sequentes, assumendo pro constantibus eodem ordine $dz, dw, ds, f = -\frac{dds}{dz^2}, f = -\frac{dw^2 dds}{dz^3},$

$$f = \frac{dsddz}{dz^3}.$$

EXEMPLUM I.

Sit quæcumque parabola vel hyperbola ABC (Fig. 60.), cujus abscissa AD = z , ordinata BD = s . Moveatur corpus in curva ABC, & detineatur in dicta curva a viribus centralibus, quarum directiones sint juxta ordinatas BD. Sit æquatio catholica $z^m = s$, & differentiendo, $mz^{m-1} dz = ds$, & rursus differentiendo, sumpta constante dz , $mm - m. z^{m-2} dz^2 = dds$. Quoniam facta est constans dz , sumatur prima for-

formula $f = -\frac{dds}{dz^2}$, & substituendo loco dds valorem inventum, habebimus

$$f = \frac{m-mm}{m} \cdot z^{m-2}; \text{ sed } z^m = s, \text{ ergo } z^{m-2} = s \frac{m-2}{m}; \text{ igitur}$$

$$f = \frac{m-mm}{m} \cdot s \frac{m-2}{m}.$$

COROLLARIUM I.

Si $m = 2$, & tunc $f = -2$, scilicet constans, & negativa: hoc significat, quod descripta parabola AEF relata ad tangentem AG, per hanc fertur mobile gravitate constante existente, ut jam demonstravit Galilæus: verum vis centralis negativa est, quia non tendit ad partes superiores versus D, sed ad inferiores versus E.

COROLLARIUM II.

Sit $m = 1$, in quo casu ABC esset linea recta, & tunc vis centripeta $f = 0$.

COROLLARIUM III.

Sit $m = \frac{1}{2}$, in quo casu curva ABC est parabola relata non ad tangentem, sed ad axem AG, & vis centralis erit reciproca, ut cubus ordinatæ BD. Omitto alias deductiones, quæ patent ex formula.

EXEMPLUM II.

Sit parabola ADEC (Fig. 61.), in qua sit AB = z , BD = s , & æquatio curvæ $az - zz = bc$. Sumptis differentiis, erit $adz = 2zdz = bds$, & rursus differentiendo, sumpta ds pro constante, ut locum inveniat tertia formula $f = \frac{dsddz}{dz^3}$, erit $addz = 2zddz = 2dz^2 = 0$; ergo

$$addz = \frac{2dz^2}{a-2z}. \text{ Facta substitutione, erit } f = \frac{2ds}{adz-2zdz}; \text{ sed } ds = \frac{a-2z}{b}$$

dz ; ergo rursus substituendo, $f = \frac{2}{b}$. Curva igitur parabolica est trajec-

toria, quam gravia nostra describant; nam & gravitas in motibus pro-

projectorum pro constanti usurpari potest; & directiones; quæ non nisi in centrum terræ convergunt, pro parallelis haberi possunt.

SCHOLIUM.

Problema addo, quod hanc materiam exhaurit. Grave A (Fig. 62.) emittatur oblique cum data velocitate, & describendo parabolam ABC, debeat pervenire ad datum punctum C: quæro per quam directionem, puta AD, grave impelli debeat. Sit linea verticalis FAI, sumaturque AF talis, ut grave decidens ex puncto quietis F percurrendo rectam FA, acquirat in A eam velocitatem, cum qua grave proicitur. Super AF describatur segmentum circuli AHGF capiens angulum æqualem angulo CAI, & abscindatur AE quarta pars sagittæ AC, ducaturque altera verticalis EHG. Hæc vel cadit extra segmentum circuli, vel illud tangit, vel secat. In primo casu velocitas impressa non est sufficiens, ut projectum attingat scopum C. In secundo casu unica tantum datur inclinatio, quæ præstet effectum. In tertio datur geminā inclinatio, hoc est AHD, AGD: utralibet electa projectum attingit scopum C. Demonstrationem inveniendam relinquo.

SCHEDIASMA XVII. (*)

In pleno tempora, quibus arcus trajectoriæ describuntur, non possunt esse arcus a radio vectore factis proportionalia.

SUSPICARI quis posset Canonem Nevvtoni, quod nempe tempora; quibus arcus trajectoriæ describuntur, sint semper arcus a radio vectore factis proportionalia, locum etiam invenire in pleno, dum Planeta fertur per medium resistens; nam resistentiæ fortasse ita temperari queunt, ut mobile eundem arcum majori quidem tempore percurrat, sed tamen arcarum ratione servata. Hoc autem impossibile esse sic demonstro.

Circa focum A (Fig. 63.) describat mobile in pleno trajectoriam BCE in quacumque virium centralium, & resistentiarum suppositione, sintque tempora per arcus BC, BE, ut aræ correspondentes BAC, BAE. Cum curva BCE data sit specie, & positione, repetatur in bce, & determinetur vis centralis directæ ad focum a, per quam eadem cur-

va

(*) Spiand la strada alla dimostrazione del presente Theorema la bella scoperta fatta dall'Autore l'anno 1723., che un Pianeta può descrivere nel vano la stessa curva, mentre da infinite scale analoghe all'ordinate di forze centrali sia stimolato. Al detto tempo adunque dee riferirsi questo Schediasma.

va percurratur in vacuo, ejusque scala sit curva NLH. Jam demonstratum est, quod sumptis pro scalis virium centripetarum infinitis curvis analogis ad ordinatas NLH, nlh &c., semper eadem curva bce describitur, variantibus temporibus & velocitatibus. Eligatur ea scala virium puta nlh, ut velocitates in punctis C, c, utriusque curvæ æquidistantibus a verticibus B, b sint æquales, & existentibus æqualibus non solum velocitatibus ex constructione, sed insuper etiam arcibus minimis CD, cd, & elementis arearum CAD, cad, tempora quoque per arcus CD, cd, erunt æqualia. Sumantur alii duo arcus ad libitum æquales EF, ef, & cum sit ex hypothesi tempus per CD ad tempus per EF; ut area CAD ad aream EAF, & sit in vacuo ut tempus per cd ad tempus per ef, ita area cad ad aream eaf, tempora per EF, & ef erunt æqualia; ergo & velocitates per dictos arcus erunt æquales: sed velocitas utrobique est media proportionalis inter vim centram, & subosculatricem punctorum E, e, quæ subosculatrices sunt æquales; igitur in dictis punctis erunt æquales vires centripetæ. Si itaque curva bce describitur in vacuo, existente f vi centripeta, per eandem vim non potest altera curva BCE describi in medio resistente, quia resistentiæ nullo modo agerent. Repugnat igitur, ut salva lege Nevvtoniana, quælibet trajectoria describi possit in pleno Q. E. D.

SCHEDIASMA XVIII.

Del Sistema Ticonico.

PER rispondere al quisito fattomi, se fiasi mai dimostrato falso il Sistema di Ticone, io non mi fermerò in andar bilanciando i motivi finora addotti, sopra i quali sono già usciti in pubblico i giudizj de' Dotti: ma piuttosto proporrò una mia osservazione ad altri non venuta in mente, ch'io sappia, e lascerò a chi legge la cura di decidere di che peso ella si possa essere.

I Difensori de' due celebri sistemi di Ticone, e di Copernico (mentre degli altri già screditati non occorre farne menzione) convengono in ciò, che i cinque Pianeti, cioè Mercurio, Venere, Marte, Giove, e Saturno anno per centro delle loro rivoluzioni il Sole, intorno cui fanno i loro giri in tali tempi periodici, che giusta la regola del Keplero sono in ragione sesquiquadrata delle distanze. Da questa legge ne nascono dimostra-

tiva-

(*) Questo Schediasma è stato dall'Autore composto a richiesta del P. D. Giovan Bernardo Pisenti C. R. S., il quale ne lo pregò con una lettera de' 25. Aprile 1734. Il C. I. gli rispose così li 12. Maggio dell'anno medesimo. » Per quello riguarda il dubbio da lei propostomi, le trasmetto una mia » Dissertazione lavorata i giorni passati, e per cui ho dovuto ritardare » la risposta.

tivamente altre tre, vale a dire, che l'Orbite de' predetti Pianeti sono tante curve ellittiche, trovandosi il Sole in un umbilico d'esse a tutte comune; che la forza centrale d'ogni Pianeta in qualunque punto della sua ellisse sta in proporzione reciproca duplicata della lontananza dal foco; e che i tempi parziali serbano la ragione delle aje descritte dal moto de' raggi direttori: i quali canoni tutti e quattro si verificano nelle rivoluzioni dei Satelliti rispetto ai Pianeti principali, come altresì delle Comete relativamente al Sole.

Non c'è discordia fra gli Astronomi d'ambo i partiti nello stabilire il moto della Luna intorno la Terra; restando tuttavia in quistione, s'ella debba annoverarsi fra i Pianeti primarij, ovvero fra' secondarij.

Tutta adunque la gran controversia a ciò si riduce, se la nostra terra abbia a collocarsi fra i Pianeti, onde faccia i suoi viaggi intorno al Sole colle regole già stabilite, e si ravvisi nel nostro Vortice una perfetta unità di Sistema: ovvero se costituita essa immobile, serba di centro ai giri di alcuni corpi celesti, e specialmente del Sole, che colle sue rivoluzioni l'abbraccia, tirandosi dietro il corteggio di tutti i Satelliti, tanto principali, quanto secondarij.

Ognuno comprende agevolmente, che l'ultima ipotesi ci viene suggerita dalle apparenze, e che in qualunque luogo noi fossimo stati prodotti, la persuasione di stare in quiete ci farebbe cangiar sistema; non essendoci maggior ragione, per cui s'abbia ad attribuire il riposo piuttosto alla Terra, che a Venere, o a Giove, e per cui gli Abitanti di que' globi, se per avventura ci fossero, esser dovessero immuni da un tal pregiudizio. All'incontro la costruzione Copernicana non soffre alterazione di sorta alcuna dalla mutazione del sito, in cui l'Uomo si ritrova, e di qualsivoglia Patria egli si finga Cittadino; purchè il Sole pongasi nel centro dei moti, nè si diversifica il sistema, nè si variano in conto alcuno le leggi della Natura.

Facciamoci ad investigare più da presso le conseguenze, che derivano dalla posizione comune. Intorno la Terra immota gira da vicino la Luna opaca di sua natura, e ad una assai più grande distanza il Sole risplendente di luce propria, e circondato da cinque globi, che da lui prendono il lume, tre de' quali camminano da se soli, e due dalle loro lunule accompagnati. Per ultimo ad una incomprendibile lontananza si rivolge attorno la Terra lo stuolo innumerabile delle Stelle fisse, che sono tanti Soli. E qui si noti, che il moto annuale del Sole è lo stesso, che alla Terra attribuir si dovrebbe collocata nel suo sito fra Pianeti, per salvare la regola del Keplero.

Nel sistema di Ticone il moto fisico del Sole si fa per una spirale delineata intorno ad una specie di frusto conoidale, e per ben concepirlo è d'uopo poner mente all'obliquità, ed alla eccentricità dell'Eclittica; ma perchè i due moti diurno, ed annuo sogliono distinguersi, e separarsi; osservo per quello appartiene al primo, che facendosi le rivoluzioni diurne prossimamente in tanti cerchi paralleli all'equatore, i quali sebbene anno e diametri, e centri diversi, non ostante ciò vengo-

no

no percorsi in ispazj di tempo poco presso eguali di ore ventiquattro; bisogna dire seguitando le dimostrazioni Nevvtoniane, che le forze centrali, le quali trattengono il Sole nelle periferie di questi archi, e rimirano centri differenti, attesi i tempi periodici eguali, siano proporzionali a' raggi dei medesimi cerchi.

E se il Sole col giro annuale descrive un'ellissi intorno al globo terrestre, il quale è collocato non già nel centro, ma in uno dei fochi dell'Orbita, conforme le osservazioni Astronomiche ci insegnano, egli è evidente per le cose dimostrate dal citato Inglese, che costituito il Sole in varie distanze dalla Terra, le forze centrali, che lo sforzano a non abbandonare l'orbe ellittico, riguardano sempre il centro terreno, e decrescono in ragione inversa duplicata delle distanze. Sembrami una stravaganza, che allontanandosi il Sole da noi per descrivere i cerchi maggiori, che regolano il moto diurno, la forza centrale s'aumenti a misura che dee viaggiare per circonferenze più grandi; ed all'opposto, che relativamente al moto annuo la forza centripeta si accresca, ogni qual volta le distanze si minorano.

Non cesso frattanto di maravigliarmi, che non sia ad alcuno caduto in pensiero di misurare l'energia della forza centrale, per cui nel Sistema Ticonico il Sole viene obbligato nel corso d'un anno a percorrere la sua ellissi, la quale per la grandezza, e per la proporzione degli assi resta dagli Astronomi delineata, senza scostarsi gran fatto dal vero. Per farmi strada alla soluzione di questo nuovo Problema, premettasi ciò, che abbiamo dal lodato Sig. Nevvton, cioè che viene affetta dalla medesima gravità la Luna, che circondando il globo terracqueo si mantiene nella sua orbita, ed un corpo qualunque de' nostri, che per l'aere verticalmente discende. Veggasene l'ingegnosissimo computo, e la illazione, che se ne deduce, che quanto più i corpi, ne quali la stessa gravità risiede, si discostano dal centro; tanto più vassì rallentando lo sforzo, che gli stimola alla discesa, e ciò in proporzione reciproca de' quadrati delle distanze.

A buon conto si fa, che questa legge si stende dalla Terra fino alla Luna, e posto giusta il Cassini, che l'intervallo medio fra questo Pianeta, e noi sia di semidiametri terrestri $57 \frac{1}{2}$, e che per il numero

2

1000000. preso ad arbitrio si esprima la forza della gravità, che si ravvisa nei nostri corpi; se faremo come il quadrato di $57 \frac{1}{2}$ alla unità,

2

che ci espone il raggio della periferia massima della Terra, così 1000000. al quarto numero = 302. $\frac{242}{1}$, con esso dinoteremo il valore di quel-

529

la forza, che conserva la Luna nella sua Orbita.

Che se supporremo propagarsi la legge menzionata sino alle regioni del Sole, la distanza media del quale dalla nostra Terra è di semidiametri terrestri 22000., secondo il citato Cassini, ed istituiremo la seguente analogia, come il quadrato di 22000. all'unità, così 1000000. ad $\frac{1}{484}$; avremo la misura della forza centrale del Sole nell'ipotesi as-

484

funta. Seguitando a cavare dagli stessi dati le conseguenze, giacchè per la regola del Keplero i quadrati de' tempi periodici sono come i cubi delle distanze; troveremo, che il Sole dovrebbe compiere il giro della sua ellissi in mesi lunari di giorni 27, ed ore otto l'uno n°. 7484. Ma il detto Pianeta, che cammina con assai maggior celerità, non impiega nella sua rivoluzione, salvo che giorni n°. 365., e sei ore; dunque la sua forza centrale supera di lunga mano quella, che corrisponde al canone premesso.

Per rinvenirli farebbe di mestieri dimostrare un Teorema, che per ora mi si conceda di supporlo vero, ed è, che quando un corpo qualunque ora più lento, ed ora più celere descrive una data orbita in due tempi differenti, le forze centrali sono reciprocamente come i quadrati dei tempi periodici, nei quali le due rivoluzioni si compiono. Ed atteso che 7484. mesi lunari contengono giorni 204562 $\frac{2}{3}$; se faremo

3

come il quadrato di 365 $\frac{1}{4}$ all'altro di 204562 $\frac{2}{3}$, così $\frac{1}{484}$ forza

4

3

484

centrale del Sole, che risponde alla ragione reciproca duplicata delle distanze, ad un quarto numero prossimamente = 648, ci darà questo la forza centrale del Sole stesso tal quale la ricerca il Sistema Ticonico adattato alle osservazioni. In questo mentre quella, che nella Luna risiede, e s'è già determinata, s'esprime col numero 302 $\frac{242}{529}$; dunque

529

nonostante la grandissima lontananza del Sole dalla Terra, che messa a confronto con quella della Luna si trova essere come 22000: 57 $\frac{1}{2}$:

2

383: 1, la forza, che spinge il Sole verso il centro terrestre, è più che doppia dell'altra, che fa girare la Luna nella sua ellisse.

Passiamo ad investigare come si diffonda all'intorno del nostro centro la forza, qualunque ella sia, che si chiama gravità, per opera della quale la Luna, il Sole, e le fisse sono obbligate nell'ipotesi di Ticone ad abbracciare la mole terracquea colle loro rivoluzioni.

Primieramente per il computo Newtoniano, in cui si paragona la gravità di un corpo terreno con quella del globo lunare, abbiamo, che questa forza si diminuisce in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Situata adunque la terra in A (Fig. 64.), e la luna in B, la porzione

GH

GH della iperbola quadratica ci rappresenterà la scala delle predette forse decrefcenti.

In secondo luogo sia AD la massima distanza del Sole dalla Terra, ed AC la minima, onde CD sia la doppia eccentricità di semidiametri terrestri 748: egli è manifesto, che viaggiando annualmente il Sole per la sua ellisse, ed essendo posta la Terra in uno de' fochi, almeno per tutto il tratto DC dovrà essere regolato il moto da una forza centrale, che colla legge già nota si minori al ricrescere delle distanze. Fingasi perciò, che la curva LK sia una parte della iperboloide, che serve di scala alle forze, per cui viene temperato il corso ellittico del Sole, e se ne deduca, che essendo l'ordinata CL, come di sopra s'è provato, più che doppia di BH, l'arco KL non ha punto che fare colla curva GH, e che queste due linee quantunque dello stesso genere, sono fra loro differenti per il valore delle costanti, ch'entrano nelle loro locali equazioni.

Finalmente essendo che la forza centrale va crescendo, come abbiamo veduto nel passare dalle regioni Lunari alle Solari, e che si fatto transito non si fa per via di salto, ma per gradi impercettibili; bisognerà, che la curva GH estendendosi si ripieghi in senso contrario, avanzandosi col ramo HL, in maniera che le sue applicate in progresso si aumentino sino all'ordinata CL, indi torni ad inflettersi per un terzo ramo iperbolico Lk, di cui si è fatta parola.

Ciò, che fin ora si è detto, basterebbe per far comprendere la stravaganza del Sistema, in cui la scala delle forze centripete, la quale è formata dal raccoglimento di vari pezzi di curve, non procede con legge certa, e determinata. Ma se rivolgeremo la nostra considerazione a' moti delle stelle fisse, ci si presenteranno nuovi, e maggiori assurdi.

Messo per ora da parte il loro moto diurno, per cui si girano in cerchi paralleli all'Equatore, nel centro de' quali non si trova quello dell'Universo, o sia della Terra, e con forze tali, che serbano la ragione delle distanze; facciamci piuttosto a riflettere sovra un altro moto, per cui tutte le fisse compiono le loro rivoluzioni da Occidente in Oriente attorno la Terra stabile in anni numero 25920, il qual periodo si chiama anno grande, o Platonico, e la qual apparenza spiegasi da' Copernicani col mezzo della precessione degli Equinozi. E se gli Astri predetti non sono tutti inchiodati, come in una volta nella superficie concava d'una sfera, giusta la credenza degli Antichi, ma sono disposti in differenti distanze dal centro comune del Mondo, siccome ce lo persuadono il buon senso, e parecchi fenomeni; bisogna necessariamente dire, che le loro forze centrali serbino la proporzione delle lontananze; stantechè nel compiere i loro giri c'impiegano tempi periodici eguali.

Investighiamo presentemente a quale intervallo abbia a collocarsi tal una d'esse Stelle, onde debba terminare il suo periodo nell'assegnato numero d'anni, salvo il canone del Keplero. E perchè se ne può fare un doppio paragone, cioè col corso mestruo della Luna, e coll'annuale del Sole, nel primo caso, la Stella si discosterebbe da noi per 283590

Cc 2

fc-

femidiametri terrestri, vale a dire non arriverebbe ad esser lontana tredici volte, quanto è lontano il Sole; nel secondo caso la distanza notabilmente s'accrescerebbe, fino ad essere 876 volte più grande di quella, che dal Cassini al Sole viene attribuita.

Ognun sa, che non abbiamo alle mani fin ora dati sufficienti per misurare la lontananza delle Stelle fisse: a me basta però per dedurre legittimamente le mie conseguenze, che sia maggiore delle due ipoteticamente determinate. E quanto alla prima, che supera di poco quella di Saturno, non se ne debbe fare alcun conto: per la seconda poi, la quale ha più del ragionevole, posto il diametro apparente del Sole di mezzo grado, una Stella, per modo di esempio Sirio, liberata con un ottimo Telefcopio dal capillizio si vedrebbe sotto un diametro apparente

di minuti secondi $2\frac{1}{20}$ nella supposizione, che la mole di Sirio fosse presso poco uguale a quella del Sole. E pure egli è certo, che l'angolo, sotto cui si osserva, non eccede venti minuti terzi, cosicchè la minima lontananza, che a Sirio possa attribuirsi, è per sei volte almanco maggiore di quella da noi fissata di 876. femidiametri dell'orbita annua del Sole.

Ma se non altro per dar regola ai calcoli prendiamo la misura trovata dall'Ughenio per via delle ragioni Diottriche, che fa il diametro apparente di Sirio di quattro minuti terzi, e lo discosta dal nostro occhio 27664 volte più del Sole: avvertendo però, che coll'accrescerla, o col diminuirla anche fuori del limite assegnato, non si toglie nè punto, nè poco la forza all'induzioni, che sono per fare.

Fingo dunque, che alla stessa distanza di Sirio ci sia un gran corpo, il quale finisca il suo periodo a confronto di quello del Sole in tanto tempo, quanto appunto ne richiede la regola del Keplero. In tale ipotesi essendo i cubi delle distanze come i quadrati de' tempi periodici; avremo (esprimendo per l'unità la distanza del Sole dalla Terra, ed il suo tempo annuale) avremo dico il tempo periodico di Sirio d'anni 4601214, ed in oltre la sua forza centrale, che paragonata con quella del Sole = 648 decresce in ragione inversa de' quadrati delle distanze, espressa per la frazione $\frac{648}{765206896}$. Ma di fatto la menzionata Stella

$$\frac{648}{765206896}$$

termina assai più presto il suo corso in anni 25920, dunque la sua vera, e reale forza centripeta è incomparabilmente più grande di quello si confaccia alla legge del Nevvton, da cui dipende la Kepleriana: ed istituito il computo in ordine del Teorema di sopra ricordato, che le forze centrali, per cui si descrive la stessa orbita da corpi differenti, o dallo stesso con diverse velocità, sono reciprocamente come i quadrati

de' tempi periodici, la troveremo prossimamente $= \frac{1}{37}$ di gran lunga minore di quella, che risiede nel Sole già stabilita = 648.

Sarà

Sarà perciò necessario, che la scala delle forze centrali, in passando dalle regioni Solari a quelle della Stella fissa a noi più vicina situata in E ci venga rappresentata dalla curva KM, che sempre più si va accostando all'asse ACE, onde la forza centrale si esprima per l'ordinata EM minore assai di CL: avvertendo però, che la suddetta curva KM non è la continuazione dell'iperboloide LK, e molto meno dell'altra GH, le quali prorogate passerebbono fra i due punti E, ed M.

Ma perchè la scala delle tante volte mentovate forze centripete dee stendersi per l'immenso spazio di tutte le Stelle fisse, ognuna delle quali fa la sua rivoluzione intorno la terra nel tempo prefisso d'anni 25920, per salvare questa uguaglianza fra i tempi periodici, farà di mestieri, che la nostra scala proceda non più per pezzi di linee curve; ma bensì per la retta MO, la quale inferiormente prolungata vada a congiungerli col punto A, centro della Terra, e dell'Universo.

La sola ispezione della figura, che ci mette sotto gli occhi le irregolarità, di cui abbiamo a lungo favellato, ci fa comprendere, quanto sia composto, disordinato, ed irragionevole quel sistema, che obbliga la Natura ad operare in una sì stravagante maniera.

SCHEDIASMA XIX.

Riflessioni sopra un principio usato del Bradley per ispiegare l'alterazione delle stelle fisse.

Discenda il mobile D (Fig. 67.) per la verticale DB, e giunga a colpire il piano sottoposto AC, che cammina con moto equabile per la direzione ABC: si dimanda secondo qual linea, e sotto qual angolo si farà la percossa.

Per soddisfare al quesito, io premetto un notissimo principio. La Natura non opera mai per via di salto, vale a dire, che se il mobile rispetto ad una qualsivoglia direzione si trova privo di moto, non acquisterà mai un grado determinato di velocità giusta la direzione medesima, se prima non si passa per tutti i gradi di mezzo; perchè se si facesse in un momento il transito dalla velocità nulla ad una data, e finita, non ci vorrebbe meno d'una forza accelerante infinita.

Ap-

Ha data occasione allo Schediasma XIX. un Problema proposto da un Geometra Napoletano, e che il Padre D. Giovanni Crivelli C. R. S. con lettera de 31. Marzo 1734. comunicò al nostro Autore; acciocchè dicesse la sua sentenza, e gli permettesse di mandarla a Napoli. A fine di esaminare il principio usato dal Sig. Bradley per ispiegare l'alterazione delle stelle fisse, si cercava secondo qual linea una palla cadente a piombo percossa un piano orizzontale, che con direzione parimente orizzontale cammina con moto equabile.

Applicando al caso nostro l'assioma, egli è certo, che sinattantochè la palla D cade per la perpendicolare DB, in essa non si ravvisa alcuna imprerfione orizzontale; quando non si volesse, che il moto del piano comunicato all'aere facesse deviare la sfera menzionata dalla linea del piombo: la qual particolarità non si vede espressa nella proposta, e ad altro non servirebbe, che a rendere la questione più complicata.

Perciò se noi supponiamo, che la percossa si faccia in un istante, io penso, che il globo D nell'atto di toccare per un solo momento il piano, non possa guadagnare, salvo che un grado infinitesimo di velocità orizzontale. E se tanto la palla, quanto il piano fossero perfettamente elastici; non ho dubbio, che la riflessione non si avesse a dirriggere per la stessa linea BD già trascorsa nella discesa.

Ma se, per dir così, il colpo istantaneo muore nel piano, onde sia escluso il moto riflesso, dopo seguita la percossa secondo la linea verticale DB, il grave appoggiato al piano acquisterà a gradi la velocità orizzontale; ma ciò si farà a norma dei canoni della comunicazione del moto fra i corpi molli. Sia M la massa del piano AC, V la sua velocità, ed m la massa della palla D; ogni qual volta la palla stessa camminerà con tutta quella celerità, che le può essere partecipata, avremo la velocità comune della palla, e del piano uguale alla quantità $\frac{MV}{M+m}$.

$$\frac{MV}{M+m}$$

E se così è, cangiando ipotesi, e posto, che la percossa non sia momentanea, ed il corpo D consumi qualche piccolo spazio di tempo a premere il piano, perdendo successivamente, e a gradi tutta la velocità acquistata nella caduta; mi sembra manifesto, che durante l'azione del colpo, o per dir meglio de' colpi replicati l'un dopo l'altro, alla palla si comunichi nel tempo stesso una qualche parte di quella velocità, con cui il piano attualmente cammina. E se nel caso dell'urto momentaneo questa velocità è inassegnabile; ne segue dipender essa dal tempo, in cui la percossa si compie, il quale quanto sarà più breve, tanto minor velocità orizzontale nella palla D verrà impressa. La durata del tempo da molte circostanze resta alterata, cioè dalla grandezza, dalla materia, e dalla figura del corpo D, e molto più dalla sua velocità, ed in oltre dalla materia, dall'asprezza, e dalla velocità del piano, e da parecchi altri accidenti, che si potrebbero aggiungere.

A questo passo si noti, che nel fermarsi, che fa la palla sul piano, sinattantochè la percossa si compia, relativamente al punto mobile B del piano medesimo resterà essa alquanto indietro; perchè non può al primo tocco acquistare l'intera velocità orizzontale. Ma rispetto al punto immobile, che si considera fisso nella verticale DB, la palla in virtù del moto orizzontale guadagnato appoco appoco, nel mentre che va perdendo il verticale, s'avvanzerà dal punto B verso C giusta la direzione del piano.

In-

Interverrà pertanto, che il primo urto si eserciterà a piombo contro il punto mobile B, e che in progresso la palla s'appoggi, e prema diversi punti del piano compresi fra i due limiti B, E, supposto che pervenuta la palla al contatto in E, tutto il moto per la direzione verticale sia estinto, e finita conseguentemente l'azione della percossa. Ognuno vede, che nelle imprerfioni di mezzo fra B, ed E si complicano i due moti verticale, ed orizzontale, e che si va sempre variando la proporzione, atteso che in vicinanza del punto B il moto a piombo supera di lunga mano l'orizzontale; laddove ne' punti prossimi al punto E succede tutto all'opposto. Diviso perciò il tempo finito della percossa in minimi elementi, e considerato il colpo come una serie d'impressioni istantanee, e successive contro tutti i punti della retta BE, egli è certo, che ogni imprerfione in particolare si fa sotto una diversa direzione, e in ordine a ciò farebbe mestieri determinare la media direzione: ma stante, le contusioni, che si fanno tanto nella palla, quanto nel piano sottoposto, e le cose notare di sopra, io giudico la quistione insolubile.

Non è però affatto inutile la speculazione, e serve, s'io non m'inganno, a metter in chiaro la bella scoperta dell'Inglese Bradley in proposito dell'aberrazione delle stelle fisse. Non cerco per ora, se la dimostrazione dell'Autore sia concludente; affermo bensì, che corrispondendo sì esattamente la sua ipotesi alle osservazioni, non bisogna così di leggeri abbandonarla.

Ecco come per me la cosa si spiega. Mentre s'ammetta, che la luce si propaghi in tempo, ne nasce per necessaria conseguenza, che si fa in tempo anche la nostra visione. L'occhio adunque stabile BC (Fig. 66) rimiri la stella fissa A, e la luce, che produce in noi la visione, dopo aver penetrati gli umori dell'occhio faccia imprerfione in una fibrilla BC del nostro sensorio, e la ripiegghi nella curva elastica BEC: in questo caso la visione si farà per la retta EA, che passa per il vertice E della curva, ed è l'asse, che taglia per metà, e perpendicolarmente tutte le ordinate della curva medesima parallele alla BC.

Ma se nel tempo medesimo, in cui s'inlette la fibra BC, accaderà, che l'occhio si muova giusta la direzione CB, per le cose dette i raggi luminosi, che non acquisteranno in un momento il moto giusta la direzione dell'occhio, resteranno addietro, ed in vece di piegare la fibrilla nella curva BEC, la infletteranno nella curva alquanto obliqua BEC segnata a punti, il di cui vertice sarà in F. Per avere la media direzione di tutti gli impulsi, basterà seguitando i documenti del Signor Gio. Bernoulli, a due punti estremi B, C tirare le due toccanti BG, GC, e diviso l'angolo BGC per metà colla retta GH, determinerà essa il raggio visuale, che formerà l'angolo picciolissimo HGI colla linea GI parallela ad EA. Non si vedrà adunque l'obbietto luminoso per la GI, o per la EA, le quali linee per la loro minima distanza fisicamente coincidono, ma piuttosto per la GH, la quale prorogata alla distanza sterminata, per cui sono da noi lontane le stelle fisse, cagionerà quella

picciolissima diversità d'aspetto, o sia aberrazione; che da noi si offeriva, e di quest'angolo d'aberrazione se non altro dai Fenomeni se ne avrà la misura. Sopra questo punto assai delicato sarebbe necessario prender per mano le osservazioni fin ora fatte, ed istituire calcoli assai laboriosi, ch'io lascio di buona voglia agli Astronomi, bastandomi d'aver arricchito una conghiettura.

SCHEDIASMA XX. (*)

Determinare la lunghezza d'un pendolo semplice isocrono ad un dato composto.

Sia il pendolo composto ACB (Fig. 67.) con due pesi C, B attaccati alla verga rigida, e non pesante AB, il quale movendosi dalla orizzontale AK pervenga nel sito ACB, e sia disposto a continuare il suo viaggio nel tempo minimo dt per gli archi infinitesimi, e simili $Bb = dS$, e $Cc = ds$. Le due verticali BD, CE espongono le masse M, m delle due ghiande B, C animate dalla lor naturale gravità, e condotte le rette Bd, Ce. che tocchino gli archi Bb, Cc nei punti B, C, dalle estremità D, E si lascino cadere sopra le menzionate tangenti le due perpendicolari Dd, Ee.

Ognun sa, che le intercette Bd, Ce esprimono le forze tangenziali, da cui i gravi B, C vengono stimolati alla discesa per gli archi Bb, Cc: non ostante ciò è cosa per se stessa manifesta, che per esse non ponno esprimerli le totali azioni esercitate dalle ghiande B, C nell'atto di percorrere gli spazj Bb, Cc. La ragione si è, perchè essendo le forze morte tangenziali Bd, Ce in ragione siccome le masse M, m, o sia come ED: CE, in qualunque sito della verga AB si collocassero i pesi B, C, le intiere forze agenti, e conseguentemente gli effetti generati farebbono proporzionali alle masse; lo che è un assurdo, che ci condurrebbe a stravagantissime conclusioni.

Nè giova ricorrere al tempo, di cui sogliono in simili incontri valersi i Cartesiani; atteso che nel nostro pendolo composto descrivendosi in pari tempo gli archi Bb, Cc, la durata dell'azione ajuta egualmente le due forze morte $Bd = Me$, e $Cc = m$.

Bisogna per tanto farsi ad esaminare da quali elementi le predette masse, ovvero le sollecitazioni per le toccanti restino avvalorate. Per venirne a capo io la discorro così. Se i due gravi B, C cadessero liberamente, senz'essere impediti, e deviati dalla verga girante intorno il centro A, discenderebbono dai punti I, G della orizzontale AH per le li-

(*) Avendo il C. J. distesa questa soluzione l'anno 1735, la spedì al Padre D. Ramiro Rampinelli Monaco Olivetano, conforme s'impara da una lettera 20. Settembre 1735. dallo stesso dottissimo Padre diretta al Co. Giordano Figlio dell'Autore.

linee del piombo, ed in tempi eguali precorrerebbono eguali spazj. Di più se i predetti mobili B, C oscillassero in figura di pendoli semplici, impiegherebbono tempi minimi disuguali, in passando per gli archi simili Bb, Cc, e la ghianda C v'impiegherebbe tempo minore della ghianda B. Nel dato tempo $= dt$ descriva il pendolo AC l'arco Ca, ed il pendolo AB l'arco Bg: e perchè quando i corpi C, B essendo congiunti costituiscono un pendolo composto, le masse C, B nel tempo medesimo passano per gli archi simili Cc, Bb, ne segue, che messa a confronto la prima colla seconda ipotesi, il mobile C resta indietro per l'archetto ca, ed all'opposito il mobile B avanza strada per l'archetto gb.

Quindi la forza per la toccante cioè Ce non può estendersi ad accompagnare il mobile, salvo che per tutto l'arco Cc, nè più oltre si difonde, e per la stessa ragione la forza morta Bd sollecita costantemente la massa B per tutto l'arco Bb. Dunque le forze tangenziali Bd, Ce provenienti dalla gravità tante volte ripetono l'impressioni ne' predetti corpi B, C, quanti sono gli elementi eguali contenuti negli archi ineguali Bb, Cc, ed il numero degli impulsi risponde alle lunghezze degli spazj trascorsi.

In ordine a ciò le masse M, m, le quali essendo alle forze tangenziali proporzionate si possono in luogo loro sostituire, anno a moltiplicarsi per le flussioni DS, DS degli archi corrispondenti, onde si determini la precisa misura d'amendue l'azioni equivalenti una ad MDS, l'altra ad mds. Ma (chiamate U, u le velocità acquistate dalle masse M, m in B, C, e DU, du i loro elementi) la somma dell'azioni dev'essere proporzionale alla somma de' prodotti delle masse ne' momenti delle rispettive velocità, cioè, MUDU, mudu; dunque perverremo all'equazione

(1^a) $MDS + mds = MUDU + mudu$: ma $DS = UDT$, e $ds = udt$; dunque sostituendo, (2^a) $MUDT + mudt = MUDU + mudu$.

E perchè come i due raggi $AB = R$: $AC = r$: $U:u$: $DU:du$, troveremo $\frac{VU}{R} = u$, ed $\frac{VDU}{R} = du$, i quali valori surrogati nella superiore

espressione ci danno la (3^a) $MUDT + \frac{mvUdt}{R} = UDU + \frac{Mv^2UDU}{R^2}$.

Abbiassi ora $AF = x$ lunghezza del pendolo semplice isocrono al nostro composto, in cui la forza tangenziale accelerante s'esponga per la massa T, e tanto l'una, quanto l'altra per l'unità. Segnifi colla specie W la velocità acquistata dalla ghianda F nel percorrere l'arco HF; e per la Teorica de pendoli semplici, il tempo dt consumato nel passare per l'arco inassegnabile Ef farà come l'incremento dW della velocità, cioè $dt = dW$: ma per la seguente analogia $AB = R$: $AF = x$: $DV: dW$ si ha $\frac{xDV}{R} = dW = dt$, e sostituendo in cambio di dt il suo valore $\frac{x dV}{R}$,

l'espressione (3^a.) si trasformerà nella

$$(4^a.) \frac{MXVDV}{R} + \frac{mr^2VDV}{R^2} = MVDV + \frac{mr^2VDV}{R^2},$$

la quale espurgata ci somministra $MRX + mr^2x = MR^2 + mr^2$, e finalmente la (5^a.) $x = \frac{MR^2 + mr^2}{MR + mr}$, lo che &c.

S C O L I O I.

Presa di bel nuovo per mano la seconda delle nostre formole, vale a dire $MVDT + mndt = MVDV + mudu$; egli è manifesto, che essendo le velocità V, u proporzionali alle distanze R, r , posso collocare in vece delle due prime le due ultime quantità, onde sia $MRDT + mrdt = MRDV + mrdv$.

Quindi si viene in cognizione per qual motivo il Sig. Ermanno sia stato affretto ad avvalorare per una parte colle distanze R, r le masse M, m già moltiplicate nel tempo comune dt ; e per l'altra abbia dovuto altresì avvalorare le quantità infinitesime del moto acquistato $MDV, mudu$, per le distanze analoghe, R, r .

S'io debbo però dire sinceramente il mio parere, giudico, che siasi proceduto alla soluzione quantunque vera per un genere improprio, e che si sieno assunti principj tali, che abbiano bisogno d'essere appoggiati ad altri più chiari, e più semplici.

La perplessità nasce, secondo me, da ciò, che il citato Autore ha fatto entrare nella sua analisi le differenze della quantità del moto $MDV, mudu$, le quali nella nostra ricerca naturalmente non anno luogo, in iscambio delle altre due $MVDV, mudu$, che sono le flussioni delle forze vive misurate alla maniera del Leibnizio. Ed in fatti chi non vede, che per iscanfare il paralogismo è stato in necessità di moltiplicar le prime per le distanze R, r , riducendole a $MRDV, mrdv$, senza che se ne capisca a prima vista lo perchè: laddove senz'altri raggiari potea valersi più naturalmente delle seconde.

In oltre i prodotti MDT, mdt , si applicano altresì per R, r , e si fanno diventare $MRDT, mrdt$, applicando al caso la forza, o il momento delle masse M, m , avvalorate dal vette: ma $MRDT$ eguale a MDS , e $mrdt$, a mds , e gli spazj DS, ds moltiplicati nelle forze tangenziali M, m ci danno la vera misura delle azioni generate dal diffondersi, che fanno le impressioni acceleranti Bd, Ce rispettivamente per gli archi simili Bb, Cc ; dunque senza tante tergiversazioni avea a farsi uso della nostra formula segnata (1^a.), e poi passar oltre, e dar compimento alla soluzione.

S C O L I O II.

La nostra quinta equazione $x = \frac{MR^2 + mr^2}{MR + mr}$ si guida ad una con-

clusione, della quale, siccome d'un principio, s'è già servito il Signor Giovanni Bernoulli, ed è, che supposti due pendoli semplici AB, AC discesi per gli archi simili IB, GC , la somma delle forze vive da essi acquistate ne punti B, C si trova eguale all'aggregato delle forze vive guadagnate dalle predette ghiande, mentre discendono in figura di pendolo composto per gli archi medesimi IB, GC .

Non succede però così, quando si confrontano insieme le quantità del moto. E per dilucidare la materia, i due pendoli semplici AI, AG separatamente discendano per gli archi simili IB, GC ; è cosa chiara, che dalle replicate impressioni della gravità agente contro le masse B, C per gli spazj IB, GC un certo, e determinato effetto verrà prodotto. Ma stante che la gravità non ha il discernimento di distinguere, se i gravi B, C formino un pendolo composto, o due semplici; nell'uno, e nell'altro caso avremo due effetti pari, siccome generati da pari cause agenti necessariamente.

Ciò posto, gli effetti prodotti, o saranno le quantità del moto comunicate nella doppia ipotesi assunta alle due ghiande B, C , ovvero le forze vive misurate alla Leibniziana. Già sappiamo, che l'uguaglianza sta salda nella seconda supposizione: veggiamo cosa nella prima succeda.

Nel pendolo semplice AB la velocità acquistata in B può esprimersi per $\sqrt{AB}$; dunque la quantità del moto ad esso partecipata sarà $= B. \sqrt{AB}$; e per la stessa ragione la quantità del moto guadagnata dal pendolo semplice AC in C si esporrà per $C. \sqrt{AC}$; laonde si avrà la somma delle predette due quantità di moto $= B. \sqrt{AB} + C. \sqrt{AC}$. Nel pendolo poi composto chiamata U la velocità della palla B in B , sarà $= \frac{V. AC}{AB}$ quella della sfera C in C , e conseguentemente le due

quantità del moto saranno BV , e $\frac{CV. AC}{AB}$, e il loro aggregato $BV + \frac{CV. AC}{AB}$.

Se dunque gli effetti nascenti dalla gravità nella nostra doppia ipotesi si misurano dalle due somme della quantità del moto come sopra generate, ambe esse somme deono essere fra loro eguali, cioè

D d 2 B.

$B \cdot \sqrt{AB} + C \cdot \sqrt{AC} = BV + \frac{CV \cdot AC}{AB}$, e ridotta l'equazione;

$$\frac{B \cdot AB \cdot \sqrt{AB} + C \cdot AB \cdot \sqrt{AC}}{B \cdot AB + C \cdot AC} =$$

Per rinvenire poscia in tale falsa supposizione il pendolo semplice AF isocrono al composto ACB, pongasi la lunghezza della verga $AF = x$, la velocità della ghianda F nel punto $F = \sqrt{x}$, e giacchè per avere l'isocronismo, le velocità nei siti analoghi debbono esser proporzionali ai raggi, vale a dire $\sqrt{x} : V :: x : AB$; dunque $AB = \frac{V \cdot x}{\sqrt{x}}$.

Scoperti in tal guisa i due differenti valori di V, nascerà l'equazione

$$\frac{B \cdot AB \cdot \sqrt{AB} + C \cdot AB \cdot \sqrt{AC}}{B \cdot AB + C \cdot AC} = \frac{AB \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{B \cdot AB + C \cdot AC}{B \cdot \sqrt{AB} + C \cdot \sqrt{AC}} = \sqrt{x}$$

Questa formola ci porta ad un manifesto assurdo, e per dimostrarlo, prendo a considerare un pendolo composto, in cui il punto di sospensione sia di mezzo fra i due pesi C, B. Se in tal supposto prendesi per negativa la distanza AC, la nostra espressione passa nella seguente

$$\frac{B \cdot AB + C \cdot -AC}{B \cdot \sqrt{AB} + C \cdot \sqrt{-AC}} = \sqrt{x}$$

in cui nel denominatore della frazione ci si presenta la quantità immaginaria $\sqrt{-AC}$, e perciò la grandezza x , o sia la lunghezza del pendolo semplice isocrono è impossibile a determinarsi, nè si trova scritta sul libro della Natura.

Chi per iscanfare l'inconveniente volesse porre negativa la massa C in cambio della distanza AC, ne incontrerebbe un altro, il quale si deduce dalla formola

$$\frac{B \cdot AB - C \cdot AC}{B \cdot \sqrt{AB} - C \cdot \sqrt{AC}} = \sqrt{x}$$

Facciasi $B \cdot AB - C \cdot AC = 0$, onde le masse B, C sieno in ragione inversa delle distanze AB, AC, nel qual caso i pesi starebbono in equilibrio, ed il pendolo isocrono AF farebbe infinitamente piccolo, cioè a dire

dire il centro di gravità della sua ghianda s'unirebbe con quello di sospensione. Quanto dunque fosse minore la differenza fra i due prodotti $B \cdot AB$, $C \cdot AC$, tanto più celeri si troverebbero le oscillazioni del pendolo composto, il che è falsissimo. E da ciò si scuopre, che posta l'uguaglianza fra i suddetti prodotti, la lunghezza del pendolo isocrono semplice AF è infinita, come si ricava dalla nostra formola.

$$x = \frac{MR^2 + mr^2}{MR - mr} = \frac{MR^2 + mr^2}{0}$$

SCOLIO III.

Non si vuole lasciar d'avvertire, che la Natura in regolando i moti dei pendoli composti, e semplici nelle circostanze di sopra notate mantiene ferma l'uguaglianza fra le forze vive Leibniziane, e non già fra le quantità del moto. Quantunque queste due leggi spesso s'uniscano, sono però differenti, nè sono talmente connesse, che una non possa star senza l'altra. Molte fiate dalla Natura vengono nelle sue operazioni insieme congiunte; ma qualora ripugna, che amendue nel tempo medesimo si verifichino, ha sempre luogo la prima, e resta esclusa la seconda, siccome nel caso nostro intervienne. E da ciò si raccoglie, qual sia la legge fondamentale, e principale della Natura, e quale l'accessoria, e secondaria. Potrei addurne parecchi esempi, che ci fanno toccar con mano, quanto sia ragionevole la sentenza di Leibnizio, che coll. sue forze vive, e non colle quantità del moto misura le azioni, e le reazioni.

SCHEDIASMA XXI.

Delle comunicazioni del moto, che si fanno per via di attrazione.

Que' Valentuomini, che difendono la più vecchia, e la più comune opinione intorno la misura delle forze vive, in veggendo, che se nell'urto dei corpi molli concedono eglino impiegarsi nelle ammaccature una qualche benchè picciola parte della forza primitiva; la cosa è fatta, ed il tutto in vigore delle mie deduzioni cospira (a) a favore della sentenza Leibniziana; volteranno i loro sforzi a mettere in dubbio il principio, che serve di base alle mie dimostrazioni. Debbo però eccettuare l'in-

Fu scritto dal C. Jacopo nel 1733., come si ricava da lettera del Padre D. Ramiro Rampinelli al Co. Giordano Riccati de' 21. Luglio 1733. Uscì alle stampe tradotto in latino dal Padre Vincenzo Riccati l'anno 1747. nella terza parte del Tomo secondo dei Comentarj dell' Accademia di Bologna.

(a) Veggasi il Cap. XIX. del lib. II. de' Principj, e de' metodi della Fisica.

l'incomparabile Sig. Cav. Nevvton, il quale ha conosciuta almen di passaggio questa verità, e ce ne ha lasciata ne' suoi libri una pubblica testimonianza, che non può più cancellarsi: e quantunque non gli sia venuto in mente di pensare alle illazioni, che cavar se ne possono; perchè gli uomini anche di vista acutissima sopra ogni obbietto non gittano i loro sguardi, ciò non ostante mi persuado, che avendo egli ammessa una volta la massima, non isdegnerebbe, se fosse in vita, attesa la sua ingenuità, d'ammettere per belle, e per buone le conseguenze.

In tanto almeno in grazia de' suoi discepoli, m'ingegnerò di dimostrare la mia proposizione fondamentale con un altro giro di cose: e perchè nel tempo medesimo mi si apre la strada di considerare una diversa maniera di comunicare il moto, e di farlo passare da un corpo all'altro per via non già di spinta, ma di attrazione; farò vedere con che leggi si regoli questo transito, e come la Natura sia in tutte le sue operazioni uniforme; mettendo in chiaro colla medesima occasione, che fra le infinite ipotesi, che noi possiamo immaginarci intorno la giusta misura delle forze vive, trattane quella del Leibnizio, tutte le altre ci conducono ad assurdi, e contraddizioni.

Prima d'ogn' altra cosa io dimando, se supposta una corda elastica, o una molla nel suo naturale stato, per istenderla, ed allungarla abbiasi ad impiegar forza. Di questa mia interrogazione alcuni faranno le meraviglie, e ciò interverrà, perchè non distingueranno a prima vista a quale scopo essa sia indiritta. Se rispondono affermativamente, ho io nelle mani quanto mi basta, per condurre a fine la mia dimostrazione: ma in caso di negativa, ch'io non lo credo, bramerei, che facessero meco le seguenti riflessioni.

Penda dal chiodo immobile A (Fig. 68,) l'elastro AB, alla di cui estremità B s'attacchi il peso C, discenderà questo con moto accelerato per esempio fino al punto C, indi per vigore dell'impeto impresso, seguirà esso a discendere, ma con moto ritardato, distendendo la molla fino ad un certo termine, come farebbe il punto D, in cui si ridurrà alla quiete. Prevalendo allora la forza elastica, la discesa si volterà in ascendimento, ed il grave C monterà da D fino in C con moto accelerato, e poi con ritardato fino in B. Così reciprocando a guisa d'un pendolo, continuerà a calare abbasso, e risalire in alto infinite volte, se la verga AB sarà fornita d'una perfetta virtù elastica, e se il giuoco si farà nello spazio vano. Ma non verificandosi queste due circostanze, come in fatto non si verificano, dopo varie oscillazioni si fermerà il peso immobile nel sito C, e l'elastro patirà la distensione BC.

Ora se la resistenza dell'elastro non facesse ostacolo all'azione della gravità, dovrebbe il peso discendere con quella stessa legge di accelerazione, come piomberebbe nell'acque, mentre staccato dalla verga venisse messo in libertà; perchè dunque percorrendo lo spazio BC non si affretta quanto dovrebbe; perchè va tardando il suo moto per l'intervallo CD; perchè giunto in D si trova in istato di riposo; e perchè finalmente mutata direzione, in vece di seguir il suo cammino verso

il

il centro, è obbligato a ritornar in dietro per la linea DB? Non è egli evidente, che tuttocìò procede in parte dalla reazione, ed in parte dall'azione dell'elastro?

Per vederne il modo, si rifletta, che la molla AB ridotta alla sua natural dimensione ha una minima ripugnanza per soffrire uno stiramento infinitesimo: ma quanto più si va stendendo, altrettanto resiste ad una ulterior distensione, sinattantochè non potendosi la verga prolungar all'infinito, giunta che sia ad un certo termine di lunghezza, finalmente si spezza. La curva dunque, che colle sue ordinate esprime le tenacità crescenti dell'elastro, avrà l'origine nel punto B, e si andrà sempre più discostando dall'asse BE, come farà per cagion d'esempio la curva BHK, di cui non importa per ora d'investigar la natura, bastando che la minima resistenza risponda al punto B, e la massima al punto E, posto, che si spezzi la verga, quando alla lunghezza AE sia pervenuta.

In questo mentre la costante BG ci rappresenti il peso del Globo C, e tirata la verticale GI, tagli questa nel punto F la scala delle resistenze; egli è manifesto, che nel punto B il grave esercita tutta la sua azione, perchè in quel sito la resistenza della molla è minima, ma arrivato, che sia al punto M, la gravità non mette più in opera la sua intiera, ed innata forza LM, dovendosi da questa sottrarre il contrasforzo dell'Elastro esposto dall'applicata NM; laonde l'impulso, che sollecita il grave all'ingiù, ci viene rappresentato dall'intercetta LN, e l'aggregato di tutte le successive impressioni non si misura già dal rettangolo GFCB, come interverrebbe, se la palla C discendesse liberamente, ma bensì dal trilineo GFNB. Quindi fatta l'area FHI inferiore al punto F uguale alla superiore GFNB, e condotta l'ordinata HD, segnerà essa il punto D, in cui il peso C, dopo essere disceso per la verticale BD, si ridurrà alla quiete.

Descrivasi ora la parabola Apolloniana Bcd, colle ordinate della quale si espongano le velocità Cc, Dd, che avrebbe acquistate il grave non impedito nello scorrere rispettivamente gli spazi BC, BD: e giacchè lo stesso grave pendente dall'elastro, giunto che sia al punto C in vece di camminare colla velocità intiera Cc, cammina con una assai minore CO: ne ciò certamente nasce dall'azione della gravità, la quale in ogni punto della discesa non cessa di sollecitarlo con tutta la sua energia; dunque dobbiam dire, che una porzione della forza totale della gravità, la quale alla celerità CO avrebbe aggiunta la OC, siasi impiegata contro l'elastro, vincendo la sua tenacità, e stirandolo da B fino in C. Similmente pervenuto il peso al punto D, si trova egli costituito in quiete, in tempo che liberamente piombando avrebbe guadagnata la velocità Dd; dunque tutta quella forza, ch'è necessaria per imprimere al mobile la suddetta velocità, qualunque ella siasi, si è spesa nello stendere la molla per tutto il tratto BD.

Osservisi in oltre, che l'Elastro nell'atto di rimettersi strascina all'insù il peso C, e lo sforza a rimontare dal luogo D fino in B: ma per

per farlo ascendere contro l'inclinazione della sua gravità innata; appunto tanta forza ci vuole, quanta ne avrebbe acquistata in discendendo liberamente da B fino in D; dunque tutte le successive impressioni comunicate dalla gravità costante al mobile C nella discesa, in vigore della reazione si sono trasfuse nell'elastro, il quale recuperando la sua natural dimensione, tira in alto il peso con un aggregato pari di forze, non ostante i replicati impulsi, con cui tenta la gravità di spingerlo abbasso.

Queste poche cose, che dette si sono fra le molte, che dir si potrebbero, basteranno per farci intendere, che non può un elastro qualunque, le cui fibre sieno per se medesime in riposo, stendersi, nè rannicchiarsi, senza che vi si adoperi una forza estrinseca. Ciò premesso mi metto sotto gli occhi la seguente

IPOTESI.

Alla palla A (Fig. 69.) sia attaccato l'elastro rigido C, ed ambo camminino per uno spazio infinitamente raro colla velocità comune V. Nel tempo, che sono in moto, e scorrono una linea retta orizzontale per non fermarsi mai, all'altra estremità della molla s'intenda congiunta la sfera B priva affatto di moto, e per maggiore facilità si supponga, che tanto i due globi, quanto l'elastro sieno senza gravità, e che la massa di questo abbia alle masse dell'una, e dell'altra palla una minima inassegnabile proporzione; non essendovi ripugnanza, che una molla di una massa quanto si voglia picciola sia dotata d'una finita tenacità: si dimanda con che leggi si regolerà nella nostra ipotesi la comunicazione del moto.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Dico prima d'ogni altra cosa, che nell'atto, in cui si partecipa il moto alla palla B, l'elastro C si allungherà; conciossiachè se la molla non patisce alterazione di sorta alcuna, ne seguirebbe, che la massa B nel primo istante della sua unione all'elastro dovrebbe di salto acquistare tutta la velocità della sfera A. E se ciò intervenisse, avrebbesi un effetto, che supererebbe di lunga mano l'energia della propria cagione; attesochè la forza prodotta alla primitiva, stante le velocità pari, farebbe in proporzione, come le masse $A : B : A$. Mentre poi si volesse, che la palla B ricevesse a gradi il moto, che ad essa per mezzo della molla si partecipa, allora si avrebbe l'azione, senza la corrispondente reazione: ma tutte queste conseguenze sono ripugnanti a verità incontrastabili; dunque nella nostra costituzione di cose l'elastro necessariamente si stenderà; lo che ec.

CO.

COROLLARIO.

E perchè non si può tener ferma l'analogia, che passa tra la cagione, e l'effetto, se acquistando il corpo B una qualche velocità, il corpo A non ne perde una parte di quella, che in esso risiede; siccome il primo la va acquistando a gradi, il secondo altresì a gradi la va perdendo: ma la comunicazione del moto non si fa se non per via dell'elastro C; dunque anche questo si andrà estendendo appoco appoco, nè cesserà d'allungarsi, finattantochè ambi i corpi A, B, e la molla stessa non camminino con pari velocità.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Per istendere l'elastro oltre i limiti della sua natural dimensione, deesi nel caso nostro consumare una porzione della forza primitiva.

Supponiamo, che il corpo A, il quale certamente ne spende una parte a tirarsi dietro il corpo B, sia pervenuto a quel segno, in cui amendue essi corpi procedono con eguale celerità. E perchè il moto comune punto nè poco influisce nell'azione particolare farà lo stesso, che la molla sia di mezzo a due palle, ch'assieme con essa si muovono di pari passo colla velocità comune per esempio V, come se stesse di mezzo alle predette due sfere costituite in riposo. Ciò dipende dalla dottrina dei moti traslati, e di fatto se si collocheranno i due globi in una navicella, che proceda in senso contrario coll'assegnata celerità V, coloro, che stanno fermi sul lido, vedranno la molla nell'atto del restringersi agire contro le due masse poste in quiete, l'una, e l'altra delle quali si verranno incontro con direzione opposta. L'elastro dunque, nel ridursi alla sua prima positura, vince l'inerzia di due corpi, che si ponno considerare in quiete, ed imprime loro velocità tali, che sono dell'ordine delle finite: ma ciò non può farsi senza forza, e questa forza la molla non può riceverla altronde, salvo che dalla sfera A; dunque una parte della forza primitiva è passata nell'elastro, il quale viene determinato ad operare nel rannicchiarsi a misura della forza, che nello stenderlo è stata impiegata.

COROLLARIO.

Se ambe le palle assieme colla molla si muovono, la forza primitiva si divide in tre parti, una se ne conserva nella sfera A, l'altra si comunica alla B, e la terza si partecipa all'elastro. Quando poi tutti e tre essi corpi procedono con celerità eguale, in tal caso essendo la molla

Opera Ricc. T. III.

E c

fog.

soggetta alla maggior distensione, che soffrir possa, stando ferme le addotte circostanze; accadrà, che quanto più di forza si troverà nell'elastro, tanto minore sarà quella delle due sfere.

S C O L I O.

Nell'atto, che il corpo A per mezzo della molla C va comunicando il moto al corpo B, già s'è veduto, che l'elastro continua a stendersi, sin tanto che le sfere A, B si riducano a camminare con pari velocità. Ora io dico in primo luogo, che in questo caso particolare la comunicazione del moto si fa con quelle medesime leggi, delle quali si serve la Natura nell'urto de' corpi molli.

Quando poi l'elastro C già dilatato a quel segno, oltre cui attese le circostanze non può più estendersi, comincia conforme s'è detto a rannicchiarsi, ed accelerando sempre più il moto della palla B, e ritardando quello dalla palla A, si accorcia in maniera, che finalmente riacquista la sua natural dimensione: dico in secondo luogo, che in tale postura di cose la comunicazione del moto, almeno per un istante, si fa secondo le leggi messe in opera dalla Natura nella collisione fra i corpi dotati d'una perfetta virtù elastica.

In terzo luogo ridotta la molla a tal segno, egli è necessario, che la sfera B attesa la sua maggiore velocità spinga avanti la palla A, sin tanto che ambo procedano con velocità pari, e torni in campo quella stessa legge di moto, come se tolto di mezzo l'elastro, il corpo B, urtasse nel corpo A, ed entrambi fossero molli, ed inerti. Ciò non può farsi se la molla non si corruga, e ristringe, di modo che pareggiata la velocità delle due palle, cessi l'azione, e la reazione. Anche in questo caso la forza primitiva si divide fra le sfere, e l'elastro; essendo cosa per se manifesta, che questo non può patire una compressione, senza che vi s'impieghi una qualche forza.

Per ultimo posta la molla fra due corpi, che camminano con velocità uguale, e colla medesima direzione, egli è lo stesso, come se fosse collocata fra due masse costituite in riposo: e perchè si trova da una violenza estrinseca rannicchiata, e compressa, dee senza fallo dilatarsi, e restituirsi. Quindi accadrà, che la forza sfiancante con direzioni opposte, togliendo il moto al globo B, accrescerà quello del globo A; cosicchè ricuperata dall'elastro la sua consueta lunghezza AB, se non altre per un momento la palla B si troverà in quiete, e camminerà la palla A colla velocità primitiva V.

In tal guisa dopo varj giuochi tornando le cose di tempo in tempo da capo, continueranno le due masse A, B assieme colla molla fraposta il loro viaggio all'infinito per un mezzo vano, e non resistente; quando però si considerino i limiti estremi, per cui l'elastro o soffre il maggiore stiramento, o la maggior compressione, e ritorna al suo stato primiero. In alcuni poi dei casi intermezzi la comunicazione del moto si farebbe, come se si urtassero due corpi imperfetta-

men-

mente elastici: ma di ciò non occorre favellare, essendosene in altra occasione detto abbastanza. (a)

Le verità per noi semplicemente enunziate anno a stabilirsi colle dimostrazioni, onde si tolga di mezzo ogni dubbiosità, e si dia luogo ad alcune importanti riflessioni.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

La palla A giusta la nostra ipotesi debba tirarsi dietro il corpo B, e fingasi, che la comunicazione del moto si faccia in un vascello, il quale cammini colla velocità stessa U impressa da principio nella sfera A, ma con direzione contraria. Coloro che sono portati dalla nave, veggono ritardarsi appoco il moto del globo A, ed accelerarsi quello del globo B, sin tanto che in entrambi si ravvisi una velocità pari, ch'io chiamerò u . Tutto all'opposto gli spettatori fermi sul lido osservano sul principio la sfera A in quiete, a cui viene partecipato il moto dalla sfera B procedente colla velocità $-V$ del vascello, e ciò fino a tanto che amendue camminino con velocità eguale, che si esponga per la spezie v . Ma i primi, terminata l'azione, anno sotto gli occhi la velocità u propria delle due palle, ed i secondi la relativa $V-u$, cioè a dire la differenza, che passa tra la predetta celerità, e quella della nave; dunque $V-u=v$, o sia $V=u+v$.

E da ciò s'inferisce (conciossiachè posso io servirmi dell' antecedente discorso, quando stando ferma la palla A viene essa strascicata dalla palla B, che si suppone camminare da principio colla solita velocità V) s'inferisce dico, che considerata l'azione nella sfera A, la quale si tiri dietro la sfera B, o tutto al rovescio, facendo, che il corpo B imprima il moto nel corpo A, ogni qual volta nell'uno, e nell'altro caso ambo esse masse procederanno con celerità pari, per cagion d'esempio nel primo caso colla velocità u , e nel secondo colla velocità v , l'aggregato di queste due celerità farà sempre uguale alla primitiva, e costante U , cioè $u+v=V$, lo che io m'era proposto di dimostrare.

COROLLARIO I.

Le prenotate velocità u , v anno fra loro un qualche rapporto dipendente dall'analogia, che corre fra le masse A, B. Di fatto, se stando fermo il corpo A, e la celerità V , il corpo B si va scemando sino a diventare infinitesimo, la velocità u vassì accostando alla primitiva,

E c z

a cui

(a) Accennasi dall'Autore il seguente Schediasma XXII., in cui tratta dei limiti, da quali restano determinate le leggi della comunicazione del moto in qualunque ipotesi.

a cui si fa finalmente uguale, nel qual incontro l'altra velocità v diventerà nulla. Ognuno vede, che mentre la sfera A ha da tirarsi dietro una massa minima, non perde, salvo che una parte inassegnabile del suo moto: siccome parimente se la palla B dee strascinare un corpo infinitamente maggiore di se, non può ad esso comunicare, fuorchè una celerità infinitamente pigra. Così se il globo B va all'infinito crescendo, si minora sempre più la velocità u , aumentandosi l'altra v , fino a divenire uguale all'assunta V . Che se poi i corpi A, B fossero di pari massa, sarebbe $u = v$, ed amendue precisamente uguali alla metà della velocità primitiva.

COROLLARIO II.

Risponde altresì ad una qualche relazione fra le masse A, B la forza, che si spende nel dilatare la molla C, particolarmente quando ambo le masse giungono ad acquistare una velocità pari. Posto che il corpo A sia finito, ed il corpo B infinitesimo, egli è evidente, che l'elastro patisce uno stiramento inassegnabile, e che conseguentemente vi si applica una forza minima: al contrario se B fosse infinito, tutto lo sforzo del globo A si consuma in distendere la molla, e perciò nei casi di mezzo, quando cioè le due sfere si riguardano con una finita proporzione, l'energia della palla A divide in due, e parte s'adopra nella comunicazione del moto, e parte nello stirare l'elastro: con questa avvertenza però, che quanto è maggiore la grandezza del corpo B rispetto a quella del corpo A, altrettanto una maggior porzione di forza contro l'elastro si spende, la quale vassi sempre diminuendo, quanto più, stando costante la massa A, viene ad impicciolirsi la massa B.

S C O L I O.

Fa a mio proposito, che si mettano a confronto le due maniere, per cui si comunica il moto, cioè quella per via d'attrazione con l'altra, nella quale vi si impiega l'impulso, e la percossa. Abbianfi (Fig. 70.) due altre palle $a = A$, e $b = B$, e facciasi, che la sfera a mova colla velocità V , urti nella b quiescente, e dopo la collisione, essendo ambedue perfettamente molli, ed inerti, camminino unite colla celerità comune x : indi la palla b , in cui risegga la medesima velocità V , si volti a percuotere la sfera quieta a , e dopo il colpo procedano ambe di conserva colla velocità y .

Dico, che la somma delle due predette velocità $x + y$ è uguale alla velocità primitiva V . Per i canoni della comunicazione del moto fra i corpi molli comunemente ricevuti, e da me dimostrati (a) si trova $x = \frac{aV}{a+b}$, ed $y = \frac{bV}{a+b}$; dunque $x + y = \frac{a+b}{a+b} V = V$. Da ciò se

ne

(a) Lib. 11. Cap. XVIII. de' Principj, e de' metodi della Fisica.

ne ricava, che essendosi per noi provato essere $u + v = V$, avremo ancora $x + y = u + v$.

Dico di più, che ammessa per vera la sentenza dei Cartesiani, che le forze vive si misurino dalla quantità del moto, e che conservandosi nella collisione de' corpi inerti la stessa quantità di moto tanto prima, quanto dopo la percossa, onde niuna parte della forza viva passi in morta, e nella contusione si spenda; non può mai verificarsi la suddetta equazione $x + y = u + v$.

La ragione si è, perchè se dopo d'avere la palla A (Fig. 69. e 70.) comunicato per quanto può il moto alla palla B, si conservasse in esse palle tutta la forza primitiva senz'alcuna diminuzione, una parte non se ne potrebbe impiegare nel distendere l'elastro; altrimenti l'energia dell'effetto supererebbe di gran lunga quella della propria cagione: ma già si è detto, che una porzione di forza viene assorbita dalla reazione della molla; dunque la restante espressa secondo i Cartesiani per

$A + B$. u è minore della primitiva AV , a cui essendo uguale la forza $a + b$. x , che richiede nei due corpi a, b , dopo la percossa; ne segue, che essendosi poste uguali le masse A; a ; B, b , la velocità x sarà maggiore di u .

Col medesimo progresso si proverà, che la celerità y è più grande di V ; dunque il binomio $x + y$ eccederà l'altro $u + v$, il che è un manifesto assurdo, e contrario alla conclusione per noi di sopra dimostrativamente dedotta.

Nè si può credere, che una più grande porzione della forza primitiva si spenda nella contusione, messa al paragone di quella, che s'impiega a distendere la molla; conciossiachè si manterrebbe minor quantità di forza viva nelle due palle a, b dopo l'urto, ed all'incontro una maggiore quantità nelle altre due A, B, tirato che fosse l'elastro a norma della nostra supposizione. In ordine a ciò la velocità u supererebbe la velocità x , come altresì sarebbe v maggiore di y , e conseguentemente il binomio $x + y$ minore dell'altro $u + v$, il che ripugna alla nostra dimostrazione.

Bisogna per tanto dire, che una medesima porzione di forza viva si spenda ugualmente nello stirare l'elastro, e nel formare la contusione, e che in qualunque maniera passi l'azione da un corpo all'altro o per via di spinta, o per via d'attrazione, non alterandosi in conto alcuno la quantità primitiva del moto, da essa non abbia a prendersi la giusta misura della forza viva, da cui non solamente il moto superstito riconosce l'origine, ma di più ciò, che nelle ammassature, o nelle distensioni degli elastri si consuma.

Le cose dette senz'altra perquisizione ci fanno comprendere con qual legge si regoli la prima comunicazione di moto, che si fa per via d'attrazione, stante che essendo per una parte $x = u$, ed $y = v$, e per l'al-

tra

tra $x = \frac{aV}{a+b}$, ed $y = \frac{bV}{a+b}$, avremo le celerità u , v espresse per le mas-

se, e per la velocità primitiva, e potremo tirare tutte quelle illazioni, che per intero compimento della materia opportune si giudicassero, quand'anche ambo le masse da principio si supponessero mosse con velocità diverse, o coispiranti, o contrarie. In tanto procuriamo di camminare per un'altra strada, e sia

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

Determinare quanta forza si consumi nella distensione dell'elastro, e come abbia a misurarsi la forza primitiva della palla A.

Pongasi per procedere generalmente la forza viva della palla A (Fig. 69.) avanti qualunque azione in ragion composta della massa A, e di qualsivoglia dignità U^n della velocità: e perchè già s'è insinuato, che la forza, la quale si conserva nelle due sfere A, B, compita che sia la comunicazione del moto, a quella, che si trasfonde nell'elastro, serba una relazione, che dipende in qualche modo dall'analogia fra le masse A, B; facciasi, che la distribuzione delle predette forze seguiti la proporzione, che passa fra le due potestà indeterminate $A^n : B^n$.

Inerendo alla nostra ipotesi, la forza viva, che resta nelle due palle dopo l'azione, s'esprime per le masse $A + B$ moltiplicate nella velocità u alzata all'esponente n , cioè per $A + B \cdot u^n$: ma come $A^n : B^n :: A + B \cdot u^n : A + B \cdot B^n u^n$; dunque l'ultimo termine dell'analogia ci di-

nota la forza impiegata a prolungare l'elastro, e sommate queste due forze, che unite insieme pareggiano la primitiva, attesa l'egualità fra gli effetti prodotti, e la cagione produttrice, ci si presenterà l'equazione $A + B \cdot u^n + \frac{A + B \cdot B^n u^n}{A^n} = AV^n$, o sia $A^n + B^n \cdot u^n = A^n + B^n \cdot V^n$, ed

abbassando i membri coll'estrazione della radice, il cui indicè è n ,

$$\frac{A^{\frac{1}{n}} V}{A^{\frac{1}{n}} B^{\frac{1}{n}}} = u.$$

Similmente dopo l'azione della palla B, che mossa da principio colla celerità V si tira dietro la palla A, la forza, che risiede nelle due sfere,

se, si ritrova $= A + B \cdot V^n$: ma come $B^n : A^n :: A + B \cdot V^n : A + B \cdot A^n V^n$;

è questo ultimo termine dinota la forza impiegata contro l'elastro; dunque uguagliando l'aggregato delle predette due forze alla primitiva BV^n , e riducendo il calcolo siccome di sopra s'è fatto avremo

$$\frac{B^{\frac{1}{n}} V}{A^{\frac{1}{n}} B^{\frac{1}{n}}} = v. \text{ Ma per il nostro Teorema } u + v = V$$

dunque $\frac{A^{\frac{1}{n}} V + B^{\frac{1}{n}} V}{A^{\frac{1}{n}} B^{\frac{1}{n}}} = V$, e finalmente

$$A^{\frac{1}{n}} + B^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{n}} + B^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{V}{V} = A^{\frac{1}{n}} + B^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{V}{V}.$$

Fa di mestieri dunque, per iscoprire ciò, di che andiamo in traccia determinare talmente i due esponenti n , t , che qualunque siasi la proporzione, con cui si riguardano le masse A, B, che può in infiniti modi ad arbitrio variarsi, si verifichi sempre la nostra ultima equazione. Ciò però non si conseguirà mai, se non si fisserà l'esponente $t = 1$, e l'altro esponente $n = 2$; dunque la forza primitiva è come la massa A moltiplicata nel quadrato V^2 della velocità, e si distribuisce in maniera, che la forza, la quale dopo la comunicazione del moto si mantiene nelle due sfere A, B, a quella, che si spende nell'agire contro l'elastro nella stessa proporzione delle masse, cioè a dire come A, B: le quali tutte cose doveano determinarsi.

COROLLARIO I.

Sieno le forze vive proporzionali alle quantità del moto siccome vogliono i Cartesiani, onde abbiassi l'esponente $n = 1$, e la formula generale si riduca alla particolare $A^{1/1} + B^{1/1} = A + B$. $A^{1/1} + B^{1/1}$, ovvero $A^{1/1} + B^{1/1} = A^{1/1} + B^{1/1} \cdot \frac{A}{A} + \frac{B}{B} \cdot B^{1/1}$. Comunque si determini il valore dell'indice t , nascerà sempre l'assurdo, che il tutto sia eguale alla parte, ovvero che una delle due masse A, B abbia a prendersi per negativa, riducendosi la premessa equazione alla seguente $A^{1/1} = -B^{1/1}$: laonde per picciola, che si finga quella porzione di forza, che si spende nello stiramento della molla, farà sempre un fenomeno, che ci mette sotto gli occhi la ripugnanza della comune opinione.

CO-

COROLLARIO II.

Diversificata la supposizione, ci si affaccieranno gli stessi inconvenienti, o pure bisognerà determinare quel preciso valore della massa B per rapporto alla massa A, che alla nostra equazione soddisfaccia, ed allora potrà la Natura operare in un solo caso, e negli altri innumerevoli dovrà pensare a mutar legge, ovvero a permettere una sorta di comunicazione di moto assurda, ed impossibile.

COROLLARIO III.

Non così interviene, mentre sia $t=1$, ed $n=2$; perchè in qualsivoglia determinazione delle masse sta salda l'egualità fra i due mem-

bri dell'equazione, essendo $A+B=A^2+2AB+B^2$.

COROLLARIO IV.

Se poi si prendessero uguali le masse A, B allora l'equazione si fa

più semplice, e si riduce alla seguente $2A \frac{t+1}{n} = 4 \frac{1}{n} A \frac{t+1}{n}$, o pure $2^n=4$. ed in questo incontro si vede essere l'esponente n necessariamente uguale al binario; dunque se posta $B=A$, la forza della palla A ci viene esposta per il prodotto AV^2 , non ammette essa alterazione in qualsivoglia altro caso; perchè la forza viva d'un corpo in moto in nessuna maniera dipende dal corpo B, a cui per mero accidente se ne debbe una qualche parte comunicare.

COROLLARIO V.

Prefa di bel nuovo per mano la formula generale

$A \frac{t+1}{n} + B \frac{t+1}{n} = A+B. A^2+B^2$, si ridurrà essa più particolare; in facendo $n=2$, giusta la determinazione del precedente corollario;

Quindi $A^{t+1} + 2A \frac{t+1}{2} B \frac{t+1}{2} + B^{t+1} = A^{t+1} + AB^t + BA^t + B^{t+1}$;

e conseguentemente $2A \frac{t+1}{2} B \frac{t+1}{2} = AB^t + BA^t$, e dividendo tutti i

termini per il prodotto AB; $2A \frac{t+1}{2} B \frac{t+1}{2} = B^{t-1} + A^{t-1}$, o sia

$A^{t-1} = 2A \frac{t-1}{2} B \frac{t-1}{2} + B^{t-1} = 0$, ed estrarra la radice quadrata;

$A \frac{t-1}{2} - B \frac{t-1}{2} = 0$. Queste ultime equazioni si riducono al caso particolare di $A=B$, la qual egualità permettendoci di poter assumere come unità ognuna delle due masse A, B, nulla rileva, che alla quantità t si dia qualunque valore. Intanto ci è un'altra strada di salvare l'uguaglianza nelle formule antecedenti, ponendo l'indice t uguale all'unità, senza limitare la proporzione fra le due masse A, B.

S C O L I O.

Per tutto ciò, che fin ora si è spiegato, chiaramente apparisce, che surrogata qualunque altra legge, col mezzo della quale si pensi di misurare la forza viva d'un corpo in moto, trattane la sola Leibniziana, ci si fanno incontro parecchie contraddizioni. In fatti io stabilisco due principj incontrastabili, a quali il mio discorso s'appoggia, cioè primieramente, che debba ammettersi la Teorica de' moti traslati, ed in secondo luogo, che una qualche porzione della forza primitiva si spenda nello stirare l'elastro: e da queste verità cavate per via di dimostrazione alcune necessarie conclusioni, chiaramente comprendo, che qualsivoglia canone, che mi piaccia d'assumere intorno le forze vive, distrugge o l'una, o l'altra, o amendue insieme le massime mentovate, le quali vanno perfettamente d'accordo colla sola legge scoperta dall'incomparabile Leibnizio. Ogn'altra ipotesi dunque è impossibile, ne può essere messa in opera dalla Natura, senza che ci si facciano innanzi gli inconvenienti, che si dia un effetto fisico, cui non risponda la propria causa, ovvero che il moto comune a molti corpi confonda, e perturbi il particolare.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Ogni qual volta le due sfere A, B, sono ridotte a camminare con pari celerità, allora l'elastro C soffre il maggiore stiramento, a cui possa essere soggetto nelle circostanze, in cui si ritrova: e perchè abbiamo osservato, che allora sta in mezzo a due corpi, i quali con esso lui procedono con egual moto, cessata totalmente l'azione del globo A, e la reazione del globo B, comincia ad operare la molla, accorciandosi appoco appoco, finattantoche ritorna al suo stato naturale, ed in tal guisa viene ad accelerare il moto della sfera B, e a ritardare quello della sfera A; dico, che in tali circostanze la comunicazione del moto farsi secondo le regole dei corpi perfettamente elastici.

La palla $a = A$ (Fig. 69. e 70.) urti nella palla $b = B$, e siano le due masse A, b dotate d'una squisita virtù di molla, onde dopo la percossa intieramente si restituiscono. Già si è dimostrato, che tanta forza precisamente s'impiega nell'ammaccatura, quanta nello stiramento dell'elastro, e che tanto le due sfere a, b , quanto l'altre due A, B almeno per un momento procedono di conserva con una velocità data $\frac{AV}{A+B}$;

le seconde quando l'elastro patisce la massima distensione, e le prime quando l'ammaccatura è intieramente compiuta. Le predette dunque due forze uguali nel rimettersi agiscono collo stesso vigore ogn'una di esse contro masse uguali, mosse colla medesima direzione, e con uguale velocità; perciò stando tutte le cose pari, non ci è ragione, per cui non abbiano ad essere uguali gli effetti, e conseguentemente terminata l'operazione delle mentovate due forze, le velocità delle due palle A, a , come altresì delle due B, b faranno eguali: ma dopo la percossa, e la restituzione della contusione, i globi a, b camminano colle regole della comunicazione del moto, che si osservano negli urti de' corpi perfettamente elastici; dunque colla stessa legge procedono anche le masse A, B , dappoichè l'elastro s'è ridotto alla sua prima, e natural distensione.

COROLLARIO I.

In tale circostanza tutta la forza primitiva AV^2 risiede nelle due sfere; conciossiachè niuna forza s'impiega contro la molla, mentre questa non è stirata, nè compressa.

COROLLARIO II.

Di fatto la velocità della palla B si fa essere $= \frac{2AV}{A+B}$, e quella della

palla $A = \frac{A-B}{A+B} V$, ed alzando queste due quantità ai loro quadrati,

i quali si moltiplicheranno rispettivamente per le masse B, A , avremo le forze vive delle due palle, cioè quella della sfera $B = \frac{4BA^2V^2}{(A+B)^2}$,

e l'altra della palla $A = \frac{A^3 - 2A^2B + AB^2}{(A+B)^2} \cdot U^2$. Congiunte in una som-

ma le suddette due forze, faranno precisamente uguali alla primitiva $A V^2$.

SCO-

S C O L I O II.

Io non mi prenderò la briga di dedurre tutte quelle conseguenze, che discendono dalle nostre proposizioni fondamentali, o considerando il passaggio del moto da un corpo all'altro, e la distribuzione delle forze; ovvero come dalla legge principale nasca la secondaria, per cui si conserva sempre la stessa quantità relativa del moto, ed il centro di gravità delle due palle non cangia nè velocità, nè direzione. Lascierò pure da parte i casi più composti, cioè a dire se si supponesse, che alla sfera B , nell'atto di congiungersi con l'elastro, fosse impresso un moto a parte a quello della sfera A o cospirante, o contrario. Di tutti questi accidenti ho con altra occasione favellato abbastanza, nè debbo io abbussarmi della pazienza di chi legge, mettendogli innanzi più fiate la cosa medesima, quantunque sotto un aspetto diverso.

S C O L I O II.

Avvertirò per ultimo, che la comunicazione del moto regolata sulle leggi dei corpi elastici non dura più d'un istante, e la ragione consiste in ciò, che o la sfera B cammina con maggiore velocità della sfera A , quand' ambo procedono colla medesima direzione; ovvero, come può frequentemente succedere in caso, che A sia minore di B , si vengono esse incontro con moto contrario. Comunque vada la faccenda, egli è necessario, che l'elastro patisca una compressione, compiuta la quale, acquistando le sfere una pari celerità, ci metteranno sotto gli occhi un'altra specie di comunicazione di moto, che si fa per via d'impulso, e seguita le leggi dei corpi molli.

Ma trovandosi la molla rannicchiata da una forza esterna, dee di bel nuovo dilatarsi, e recuperare la sua naturale lunghezza; dunque ritarderà essa il moto della palla B , ed accrescerà quello della palla A : terminata la qual operazione, la prima si ridurrà alla quiete, e la seconda acquisterà la velocità primitiva V .

Così torneremo da capo, dappoichè alle due sfere sarà stato partecipato il moto in tutte le maniere, e circostanze possibili. La dimostrazione degli ultimi due fenomeni si cava per via di corollario dalle premesse Proposizioni.

Ff 2

SCHE-

SCHEDIASMA XXII. (*)

Dei limiti, da' quali restano determinate le leggi della comunicazione del moto in qualunque ipotesi.

Prendo a considerare uno dei casi più semplici, quando cioè il corpo R, che cammina con una data velocità $= V$, incontra per viaggio il corpo S costituito in quiete, e ad esso comunica il moto in qualunque supposizione, o sieno ambo perfettamente molli, o perfettamente elastici, o di natura media fra le due estreme. Gli altri casi più composti, vale a dire mentre il corpo S si muove con una determinata celerità o co-spiciente, o contraria a quella del mobile R, si riducono facilmente alla già proposto col mezzo della teoria de' moti traslati.

Urtando dunque il corpo R nel corpo S, compito l'effetto della contusione, prima che l'elastro si spieghi, procederanno essi almeno per un istante colla velocità comune $\frac{RV}{R+S}$, giusta i canoni della comuni-

cazione del moto fra i corpi inerti, e la loro forza viva in tale stato computata alla Leibniziana, moltiplicando della predetta velocità il semiquadrato $\frac{R^2 V^2}{2 \cdot R+S}$ per la somma delle masse $R+S$, farà $= \frac{R^2 V^2}{2 \cdot R+S}$:

ma la forza viva del corpo R prima della percossa era nella stessa ipotesi $= \frac{RV^2}{2}$; dunque sottratta quella da questa, avremo la forza morta,

$$\text{che si spende nella contusione} = \frac{RV^2}{2} - \frac{R^2 V^2}{2 \cdot R+S} = \frac{RSV^2}{2 \cdot R+S}.$$

Ora

(*) Da una lettera scritta nel mese di Luglio dell'anno 1731, e diretta al Fratello Co. Giordano siamo istruiti, che il Padre Vincenzo Riccati avea ricevuta una Dissertazione del C.J., che promette di tradurre in latino. Li 4. Settembre dell'anno seguente manda il Padre Vincenzo al Co. Giordano la traduzione della sopraddeffa Dissertazione, ed indi a' 17. dello stesso mese rende ragione della versione della parola elastro, dicendo per altro, che starebbe bene modificata conforme il suggerimento del C.J. Questa circostanza ci manifesta, che la mentovata Dissertazione era il presente Schediasma XXII, trovandosi nell'esemplare di pugno del Padre Vincenzo la stabilita correzione, e si rende noto altresì, che nell'anno 1737. era compiuto lo Schediasma, di cui parliamo.

Ora questa forza morta si è quella, che torna ad esser forza viva, quando i corpi si rimettono in virtù del loro elaterio. E perchè la forza morta può restituirsi o in tutto, o in parte, secondo che i corpi sono dotati o d'una perfetta, o d'una imperfetta elasticità; facciamo, che l'intera $= \frac{RSV^2}{2 \cdot R+S}$, a quella, che dalla molla viene restituita, sia in ra-

gione come 1: n, onde la forza restituita s'esprima generalmente per $\frac{nRSV^2}{2 \cdot R+S}$.

A questo passo si noti, che la specie n è circonscritta da' suoi limiti, cioè per una parte dal nulla, e per l'altra dall'unità, oltre i quali non può trascorrere. Nel primo caso, quando $n=0$, i corpi sono perfettamente molli; nel secondo, mentre sia $n=1$, sono perfettamente elastici: nei casi di mezzo la forza dell'elastro è imperfetta, ed a questo genere si riducono tutti i corpi da noi conosciuti, che per un verso non si dimostrano affatto inerti, rendendo nella mutua percossa un suono muto, indicio di qualche elasticità, e per l'altro lo stesso suono, che s'ode, ci fa comprendere, che almeno una parte di quella forza, da cui venivano animati i corpi avanti la collisione, si spende a mettere in tremito le minime particelle, delle quali sono composti; laonde, trattane forse la luce, non c'è materia dotata d'una isquisita elasticità.

In altra occasione ho dimostrato essere proprietà d'un elastro posto in mezzo a due corpi costituiti in quiete di ripartire ad essi la sua forza in proporzione reciproca delle masse. Perciò se la forza d'un elastro pareggi la grandezza $\frac{nRSV^2}{2 \cdot R+S}$, facendo $R+S:R::\frac{nRSV^2}{2 \cdot R+S}:\frac{nR^2SV^2}{2 \cdot R+S^2}$,

l'ultimo termine dell'analogia ci rappresenterà la parte di forza, che dalla molla viene comunicata al corpo S; e facendo

$$R+S:S::\frac{nRSV^2}{2 \cdot R+S}:\frac{nRS^2V^2}{2 \cdot R+S^2}, \text{ l'ultimo termine ci dinoterà quella}$$

porzione di forza, che dall'elastro viene comunicata al corpo R.

Agevolmente si determinano le velocità, che a' suddetti corpi quieti R, S vengono partecipate per l'espansione dell'elastro. Dividasi per la massa S la forza viva $\frac{nR^2SV^2}{2 \cdot R+S^2}$ comunicata, come si è detto di sopra

al corpo S, e ci si presenterà il semiquadrato della velocità cercata $=$

$$= \frac{n R^2 V^2}{2 \cdot R+S}; \text{ dunque la velocità impressa dall' elastro al corpo}$$

$$S = \frac{RV\sqrt{n}}{R+S}; \text{ similmente la velocità partecipata al corpo R si troverà}$$

$$= \frac{SV\sqrt{n}}{R+S}. \text{ Ma per la teorica del moto traslato, agli stessi corpi nella}$$

dilatazione d'un elastro le stesse velocità si comunicano, o sieno quieti, o si muovano insieme con qualunque celerità; dunque le velocità ritrovate son quelle stesse, che nella nostra ipotesi ricevono dall' elastro i corpi R, S, l'una delle quali è contraria, l'altra cospirante alla comune velocità primitiva $= \frac{RV}{R+S}$. Perciò l'intera velocità del corpo

$$S = \frac{RV}{R+S} + \frac{RV\sqrt{n}}{R+S} = \frac{1+\sqrt{n}}{R+S} \cdot RV = u, \text{ e quella del corpo}$$

$$R = \frac{RV}{R+S} - \frac{SV\sqrt{n}}{R+S} = \frac{R-S\sqrt{n}}{R+S} \cdot V = W; \text{ le quali due equa-}$$

zioni, posta n indeterminata, sono a due parabole Apolloniane.

COROLLARI

Andrò raccogliendo alquante conseguenze, che nascono immediatamente dall' Analisi.

I. Le velocità, le quali dalla forza elastica, che si restituisce, vengono impresses con direzione contraria nelli due corpi R, S, cioè a dire $\frac{\sqrt{n}}{R+S} \cdot SV$; $\frac{\sqrt{n}}{R+S} \cdot RV$ si scoprono essere come S : R in proporzione reciproca delle masse.

II. Perciò moltiplicando la velocità partecipata dall' elastro al corpo $R = \frac{\sqrt{n}}{R+S} \cdot SV$ per la massa R, e l'altra comunicata al corpo S $= \frac{\sqrt{n}}{R+S} \cdot RV$ per la massa S, avremo per una parte, e per l'altra quan-

tà

230
tà di moto uguali, ma con opposta direzione. E questa è una proprietà comune a tutti gli elastri collocati in mezzo a due corpi, che può facilmente dimostrarsi per altra strada.

III. La somma delle quantità del moto generata dall' elastro, e fra due corpi egualmente distribuita $= \frac{2\sqrt{n} \cdot RSV}{R+S}$, paragonata colla quan-

tà del moto RV, che risiedeva nel corpo R prima della percossa, ci dà la proporzione come $2\sqrt{n} \cdot S : R+S$. La prima dunque può essere maggiore, minore, ed eguale messa a confronto della seconda, conforme si va variando la ragione fra le masse R, S, ed il valore della spezie n relativamente all' unità.

IV. Egli è certo, che se urtando la massa R colla velocità V nella massa S quieta, si farà la comunicazione del moto secondo le note regole dei corpi molli, ambo essi corpi R, S procederanno colla celerità comune $\frac{RV}{R+S}$. Moltiplicando pertanto la velocità del corpo R per la sua

massa R, e quella del corpo S per la sua massa S, avremo le due quantità di moto $\frac{R^2V}{R+S}$, $\frac{RSV}{R+S}$, che unite in una somma ci daranno la

quantità di moto RV, quella stessa, da cui veniva animato il corpo R avanti la percossa.

V. Ora se dalla quantità del moto del corpo R $= \frac{R^2V}{R+S}$, con cui

camminerebbe esso corpo dopo la collisione, se fosse affatto inerte, sottrarremo la prodotta dell' elastro in senso contrario $= \frac{\sqrt{n} \cdot RSV}{R+S}$, ed

alla quantità del moto del corpo S nella circostanza come sopra $= \frac{RSV}{R+S}$ aggiungeremo la generata dalla molla con direzione cospirante

parimenti $= \frac{\sqrt{n} \cdot RSV}{R+S}$, scopriremo, che sieno i mobili o inerti, o do-

tati di perfetta, o imperfetta elasticità, tanto prima, quanto dopo l'urto si mantiene la stessa quantità di moto, avuto però riguardo ai moti o cospiranti, o contrarij.

VI. Quindi non resterà mai alterata nè la velocità, nè la direzione del centro di gravità dei due corpi R, S; e come camminava avanti il congresso, così seguirà a muoversi dopo la collisione.

VII.

VII. La velocità relativa delli due corpi R, S, restituito che sia elastico, s'esprime generalmente per la quantità $U\sqrt{n}$, e farà alla velocità relativa de' predetti corpi prima dell'urto come $\sqrt{n}:1$, la quale analogia si cambia in egualità, posto che i corpi sieno perfettamente elastici.

VIII. Finalmente computata la forza viva del corpo R avanti la percossa giusta la sentenza del Leibnizio, moltiplicando la massa R nel semiquadrato $\frac{V^2}{2}$ della velocità, questa forza farà all'aggregato delle

forze vive, che risiedono nei corpi R, S compiuta la comunicazione del moto, come $R+S:R+nS$, e conseguentemente a quella porzione di forza, che dai corpi imperfettamente elastici resta per così dire assorbita, e non agisce nell'atto della restituzione, come $R+S:S-nS$.

Se dunque saranno i corpi affatto inerti, fatta $n=0$, la forza primitiva farà alla viva, che resta, come la somma delle masse $R+S$ alla massa R del corpo in moto, ed alla morta, che si perde nella contusione, come la somma delle masse $R+S$ alla massa S del corpo in quiete, ed in conseguenza avremo in ragione di $R:S$ la forza viva, che nei corpi dopo l'urto si conserva, alla morta, che senza restituirsi nella mutua ammaccatura si spende.

Se poi si supporranno essi corpi perfettamente elastici, allora essendo $n=1$, la forza viva prima del urto si mantiene la stessa anche dopo l'urto, dividendosi fra corpi con quelle leggi, che dal calcolo risultano.

Nei corpi dotati d'imperfetta elasticità, la formula c'insegna come cammina la faccenda,

S C O L I O

I Corollarij, che si sono dedotti, e che concordano colle Proposizioni già dagli altri Geometri dimostrate intorno la comunicazione del moto ne' due casi più semplici di corpi o perfettamente molli, o perfettamente elastici, mi porgono motivo di render la ragione, da cui sono stato persuaso a servirmi nell'analisi della ipotesi Leibniziana, supponendo, che le forze vive d'un corpo in moto abbiano a misurarsi dalla massa moltiplicata nel semiquadrato della velocità, e non dalla quantità del moto, come pretendono i Cartesiani, ed i Nevvtoniani.

Il Corollario quinto c'insegna, che urtando il corpo R nel corpo S, si mantiene costante tanto prima, quanto dopo l'urto la medesima quantità di moto, o sieno i corpi totalmente inerti, o dotati di perfetta, o imperfetta elasticità. Su questo principio suole comunemente fondarsi una delle principali ragioni, per cui si professa, che la forza viva dalla quan-

tà del moto non si distingue: e pure s'io non m'inganno, penso, che da ciò debba tirarsi una conseguenza direttamente contraria.

Egli è certo, che nelle percosse vicendevoli di tutti que' corpi, che abbiamo alle mani, quantunque sieno de' più risentiti, e de' più disposti a prontamente rimettersi, non si conserva intera dopo l'urto quella quantità di forza viva, da cui erano animati prima della collisione. In prova di questa verità basta leggere le accuratissime osservazioni fatte col mezzo dei Pendoli dal Cav. Nevvton, e le più recenti registrate in una Dissertazione del Sig. Giovanni Rizzetti stampata nel primo Tomo degli atti dell'Accademia di Bologna.

E perchè nelle citate sperienze sono state computate diligentemente le resistenze, e particolarmente quella, che nasce dal contrasto dell'Aria; si persuadeva il Matematico Inglese, che la diminuzione della forza, la quale nelle palle di vetro da lui adoperate era prossimamente la decimasesta parte della forza primitiva, nascesse da qualche picciola contusione, per cui nell'atto della percossa restassero esse sfere intaccate, e viziate in maniera, che per quanto fossero pronte a restituirsi, non giungessero però mai a recuperare esattamente la loro primiera figura.

A buon conto secondo l'opinione del citato Autore, ogni qual volta dopo l'urto rimane la contusione, abbiamo ad inferire, che ci è perdita di forza: ma nel congresso dei corpi molli si rende manifesta al senso l'ammaccatura; dunque se la stessa quantità di moto si conserva, o la forza è una cosa diversa dalla quantità del moto, o nulla di forza si perde nella contusione. Guardinsi dunque i Nevvtoniani, che nell'opporli al Gravesande, che prima d'ogni altro di quella forza, che nelle ammaccature si consuma, e passa da viva in morta, ha fatto parola, non gettino a terra le massime del loro Maestro, e non impugnino una verità evidente da lui conosciuta, e insegnata per difendere una ipotesi, che mal s'accorda con i fenomeni.

In molti incontri la cosa succede almeno in parte come il Signor Nevvton va divisando, specialmente in quella sorta di materie, che fra le molli, e le dure stanno di mezzo, e che ci fanno sentire un suono ottuso. Frattanto spesse fiate accade, che parecchi corpi possono chiamarsi in un senso perfettamente elastici, come per cagion d'esempio le sfere di vetro, di bronzo, d'avorio, in quanto cioè compiuta la compressione nascente dalla percossa, anno in se tal virtù di rimettersi, e di recuperare la loro figura, che in esse non si discerne nè pur vestigio di qualsivisa minima contusione. Sopra questo punto merita d'esser letto ciò, che dopo il Mariotte ha dottamente scritto il Sig. Rizzetti nella citata Dissertazione.

Non ostante ciò se rifletteremo, che tutta la forza primitiva non s'impiega nella comunicazione del moto, ma che una parte se ne trattiene, per così dire, dai corpi stessi, le minime particelle dei quali vengono agitate, e sconvolte da un moto intestino di tremito, e di palpitazione, per cui si genera il suono, che sempre mai durerebbe, se non venisse estinto dalla resistenza del mezzo; conchiuderemo, che in

qualunque caso la forza, dalla quale viene generato il moto prodotto dalla riflessione, è sempre minore di quella, che risiedeva nel corpo stessi, e da qui nasceva il moto locale prima della percossa.

E se così è (perchè s'altrimenti fosse, la forza viva, che si conserva nel moto riflesso, aggiunta l'altra, che si spende, o nel tremito, o nella contusione, o in ambo i suddetti elementi, supererebbe la forza primitiva, che sola l'uno, e l'altro effetto produce, e si porrebbe un'eccezione al generalissimo assioma, che l'energia dell'effetto non può mai eccedere quella della propria cagione) mi sembra evidente, che se nella percossa una qualche parte della forza viva s'impiega sempre in produrre il tremito, e frequentemente anche la contusione, e che ciò non ostante tanto prima, quanto dopo l'urto la stessa quantità di moto locale sussiste in tutti i corpi o affatto inerti, o perfettamente, o imperfettamente elastici; non abbia punto che fare la forza viva colla quantità del moto, e che queste sieno due proprietà diverse, che senza incorrere in un manifesto paralogismo non possono mai prendersi per una cosa medesima.

C O S T R U Z I O N E .

La velocità U , con cui cammina il corpo R (Fig. 71., 72., 73.) prima d'urtare nel corpo S , ci venga rappresentata dalla retta CD , alla quale tirata la perpendicolare CA , questa ci esponga tutta la forza, che s'impiega nella compressione, e che intiera si restituisce dai corpi perfettamente elastici, con che le ascisse crescenti Cm , CM , che principiano dal nulla, e vanno a terminare nella massima CA , esprimeranno le forze, con cui si sviluppano gli elastri imperfetti in tutti i casi possibili. Compiuto il rettangolo $CABD$, la base AB si divida in due parti AI , IB , che sieno in ragione reciproca delle masse R , S , e dai vertici C , D intorno gli assi CA , DB si descrivano le due semi parabole come nello schema, che ambe passino per lo punto I . Quindi prolungata CD in H , facciano tanto DH , quanto CG uguali all'ordinata BI , e condotte le normali HL , GK , si avrà ciò, che basta per la costruzione, e per le necessarie determinazioni.

C O R O L L A R I .

I. L'ordinata BI appartenente alla curva BPI nel punto, dove le due parabole si tagliano, dinota la velocità, con cui urtando il corpo R colla celerità AB nel corpo S quieto, ambo camminerebbono uniti dopo la percossa, mentre fossero perfettamente molli. All'incontro l'applicata AI dell'altra parabola CNI esprime la velocità, colla quale nella medesima ipotesi procederebbero di conserva i mobili S , R , quando il corpo S colla suddetta velocità AB urtasse nel corpo R costituito in riposo.

II.

II. La supposizione dell'antecedente Corollario ci somministra uno dei limiti, che per un verso circoscrivono le operazioni della Natura. L'idea d'un corpo affatto inerte è un lavoro del nostro intelletto, al quale poco costa il fingere, che tutta la forza impiegata nella contusione passi in forza inerte, di modo che se ne restituisca una porzione, o nulla, o infinitamente picciola. In fatto si trovano alcune materie pigre, e cedenti, come per esempio la creta molle, che a tale immaginaria proprietà così da vicino si accostano, che fra i canoni, i quali da essa se ne deducono, e le più delicate sperienze non si ravvisa differenza, che col senso possa distinguerli. Nel caso nostro si vuole, che sia $n=0$, conseguentemente le due ascisse ne due punti H , G , saranno nulle, e le ordinate, che partono dai predetti punti andranno a terminare nei vertici D , C delle parabole, camminando dopo l'urto ambo i corpi congiunti colla celerità comune HD , ovvero GC .

III. Il limite opposto ha luogo, qualunque volta i due corpi R , S sono perfettamente elastici, e per tali intendo io non già quelli, che nell'atto di rimettersi, esattamente la loro prima figura riacquistano; ma solamente gli altri, se pur si danno in Natura, che non ritengono in se alcuna quantunque minima parte di forza impiegata nel comprimerli, e nel far loro cangiar figura. Per le osservazioni del lodato Sig. Rizzetti prossimamente si verifica la posizione in certi corpi sferici, piccioli, pronti, che rendono un acutissimo suono, e che conseguentemente un brevissimo tempo in restituirsi consumano. L'ipotesi richiede, che sia l'ascissa $CA=n$: e giacchè le velocità si misurano dalle applicate LI , KI , che vanno a terminare nella intersecazione delle parabole; la prima spiegato intieramente l'elastro, converrà al corpo S , e la seconda al corpo R .

IV. E qui cadono in acconcio alquanto considerazioni. Qualora le due masse R , S , fornita la collisione, in figura di masse inerti camminano di conserva, la retta IB , ovvero BL dinota la loro comune velocità: perciò si fa manifesto, che aggiunto al corpo S il moto prodotto dalla forza cospirante dell'elastro, si raddoppia la sua velocità. All'incontro l'azione della molla comunica alla sfera R la celerità AI , la quale, come già si è avvertito, non è diversa da quella, con cui congiuntamente procederebbero i corpi molli R , S , quando S urtasse in R colla velocità AB . Ed essendo la celerità AI contraria di direzione alla KA , o sia BI acquistata già dalla palla R prima dello sviluppo dell'elastro, ne siegue, che compiuta l'operazione, camminerà essa colla velocità IK , differenza, che passa fra le celerità assegnate.

V. Quindi si scorge, che siccome nel doppio urto successivo dei corpi inerti, mentre cioè R percuote S , si muovono ambo colla velocità IB , e mentre S percuote R , procedono ambo colla velocità AI , le quali velocità unite insieme sono eguali alla primitiva AB ; così parimente nella doppia azione, che nasce dall'evoluzione della molla, si generano le predette velocità in senso contrario, aggiungendosi la prima al corpo S , e levandosi la seconda al corpo R : dal che si rende manifesto, quanto

Gg 2

te-

tenace delle proprie leggi sia la Natura, e quanto uniforme nelle sue operazioni.

VI. Dalli mentovati due limiti restano abbracciati tutti gli altri casi. In fatti se la forza impiegata nella contusione, e nella costringimento delle parti non si restituisce intieramente, facciasi come la forza in-tera a quella, che si rimette, così $AC:MC$, e tirata la retta MQ , di- noteranno le applicate UP , MN quelle velocità, che dalla sola azione dell'elastro imperfetto vengono comunicate a due corpi S , R , ed ag- giunta al primo, e sottratta dall'altro la comune velocità UQ , o sia MO , farà QP la velocità totale del corpo S , ed ON quella del corpo R , compiuta che sia la restituzione.

VII. Quanto i corpi sono dotati di maggior forza di molla, tanto più s'aumenta la celerità del corpo S , e si scema quella del corpo R ; di modo che questa ultima in parecchie circostanze può diventar nulla, ed anche negativa. Se il corpo R è maggiore del corpo S , succede ciò, che la figura adattata a questo caso ci dimostra (Fig. 71.), e di qualunque genere i suddetti corpi esser si possano conserveranno dopo la percossa la direzione del corpo R , ed ambo acquisteranno quelle ve- locità, che negli incontri particolari restano dalla costruzione deter- minate.

VIII. Ma se le masse R , S (Fig. 72.) fossero uguali, ed in con- seguenza uguali i segmenti AI , IB , la perpendicolare GK verrebbe a cadere nel punto I , intersezione delle due parabole; laonde riducendosi a nulla la retta KI , ci dà a divedere, che nell'ipotesi d'una perfetta ela- sticità il corpo R , compiuta la restituzione, si ferma immobile, e che il corpo S riceve in se tutta la velocità AB . Se poi i mobile saranno im- perfettamente elastici, fatta la forza, che si spende nella contusione, a quella, che si restituisce, come $AC:MC$, e tirata la retta MQ , il cor- po R procederà colla velocità OM , ed il corpo S colla celerità QP ver- so dove era diretto il moto del corpo R prima dell'urto. Ma perchè nel presente caso le due applicate ON , OP sono eguali, accaderà, che la somma delle due velocità $QP+PO$ sia sempre uguale alla celerità primitiva IL , o sia AB .

XIX. Per ultimo se la massa, che si muove, è minore dell'altra; che stando quieta aspetta d'essere cacciata di luogo, la Fig. 73. ci ma- nifesta con quali canoni si regoli la comunicazione dei moti. Se ambe esse masse fossero affatto inerti, procederebbono per la direzione RS colla comune velocità IB . Se poi fossero dotate di perfetta elasticità, la palla S giusta l'assegnata direzione camminerebbe colla velocità LI , e la palla R tornerebbe indietro colla velocità IK . Nelle costituzioni di mezzo, secondo la varia proporzione fra la forza impiegata nella contusione, e quella, che dall'elastro imperfetto si rimette, può accadere, che muovend-osi sempre il corpo S verso la medesima parte, l'altro R o seguiti i suoi vestigi, o si fermi, o volti cammino. Si ferma, qualora la veloci- tà generata dall'espansione dell'elastro è precisamente uguale a quella, con cui progrediva in figura di corpo molle, ed il punto n , in cui la

ret-

retta GK taglia la parabola, ed a cui conviene l'ordinata $mn=AK$, determina la proporzione tra AC , MC . Procede per la direzione del corpo S , quando la forza restituita è minore di MC : e muta viaggio in senso contrario, mentre sia maggiore di MC la forza, colla quale la molla si spiega, essendo obbligata in tal incontro a retrocedere colla ve- locità per esempio ON .

S C O L I O.

Per dimostrare maggiormente quanto la Natura sia conforme, e co- stante nelle sue operazioni, io dico, che non solamente il centro di gravità continua il suo solito viaggio, compiuta che sia la comunica- zione del moto, ma di più nell'atto stesso senz'alcuna interruzione, in cui il moto va passando per gradi, e successivamente da un corpo all' altro, e ciò generalmente, e senz'alcuna eccezione in tutte le varie sup- posizioni, che da noi fin ora sono state considerate.

Prima di proceder oltre si noti, che quantunque pajà al senso ri- durfi con tal prestezza a termine l'operazione, che non si possa discer- nere il principio dal fine; contuttociò sempre vi s'impiega un tempo determinato, ora più lungo, ed ora più breve secondo la varia natura, e costituzione dei corpi, lo che ci viene chiaramente indicato dal suono più acuto, e più grave, che si ode nell'atto della percossa.

Aggiungasi, che dovendo far passaggio il corpo S (Fig. 71.) dallo stato di quiete ad un grado determinato di celerità, e conseguentemente scemarsi, ed alterarsi quella del corpo R , che talvolta, come abbi- am veduto, è obbligato a cangiar direzione; ne siegue, che non operando mai la Natura per via di salto, anderanno a poco a poco crescendo, e decrescendo le predette velocità, fino a giungere in passando per tutti i gradi di mezzo a que' limiti, che già si sono assegnati. Ma con che regola procedano principiamo ad investigarlo dal caso, in cui gli elastri dopo sofferta la compressione si vanno di passo in passo sviluppando.

Sia dunque la forza impiegata nella contusione a quella, che si re- stituisce, come $AC:MC$, onde sieno ON , QP le velocità dei due cor- pi R , S , terminata che sia l'evoluzione dell'elastro. Suppongasi, che la molla cominci ad impiegare una parte minima della sua azione contro le masse R , S , espressa per l'abissa Cm , e ci sia concesso d'impedire con qualche ordigno l'ulteriore restituzione; egli è manifesto, che in questo caso procederà la cosa, come se la forza consumata nell'ammac- catura, a quella, che si rimette, fosse in proporzione di $AC:MC$: ma per ciò, che di sopra si è provato, in tale circostanza non resta punto alterato il moto del centro di gravità; dunque nè meno sarà soggetto a qualsivisa alterazione in quel momento di tempo, in cui il mobile R cammina colla velocità on , ed il mobile S colla celerità qp . Facciassi, che la molla agisca con un secondo elemento di forza, e replicato il discorso, si raccolga, che quantunque le suddette velocità a misura, che si va spiegando l'elastro, o ricrescano, o si diminuiscano, non ostan-

te

238
te ciò mantengono fra loro una così giusta relazione, e sono in maniera temperate, che il centro di gravità seguita sempre il suo viaggio in qualunque ipotesi colla stessa direzione, e colla stessa velocità.

Deducasi dalle cose dette per via di corollario, che le parabole nello schema delineate servono di scala per determinare le velocità variabili dei corpi R, S nell'atto, che la molla si va sviluppando. Compiuta la confusione, le due masse camminano per un istante in qualità di corpi molli colla comune celerità GC, ovvero HD, ma in progresso si aumenta il moto della palla S, e si sminuisce quello della palla R, finattantochè la prima acquista la velocità QP, e la seconda si riduce colla velocità OU, nel quale stato si suppone; che l'elastro consumata tutta la forza, cessi d'esercitar la sua azione. In questo mentre avendo il corpo R a passare dalla velocità GC alla ON per tutti i gradi intermedj, ci sarà un momento di tempo, nel quale dovrà procedere colla velocità YS, ed in questo medesimo istante il corpo S camminerà colla celerità corrispondente ZT, regolandosi le rispettive velocità sulla comune abscissa CR, e sulle ordinate terminate alle due curve paraboliche.

La mentovata legge di Natura, siccome generale, trova altresì luogo nell'atto stesso, che percuotendosi un corpo con l'altro, si genera la mutua confusione. La Massa R nell'esercitar la sua azione contro la massa S costituita in quiete perde la sua velocità a gradi, ed a gradi parimente la palla S acquista la velocità ad essa dovuta, finattanto che finita l'operazione, ambe procedono con pari passo in figura di corpi molli. Frattanto in qualunque stato si mantiene sempre costante la medesima quantità di moto; perchè colle stesse leggi la forza viva passa in morta, e la morta in viva, ed in ogni elemento di spazio l'elastro si spiega con una forza eguale, o almeno proporzionale a quella, con cui è stato compresso; cioè a dire uguale, mentre i corpi sieno perfettamente elastici, e proporzionale, quando sono dotati d'una imperfetta elasticità.

Colla retta AB. (Fig. 74.) espongo la velocità della palla R, e condotta al punto B la perpendicolare BC, faccio AB: BC in ragione inversa di R: S. Taglio per metà colla linea BD l'angolo retto ABC, e dal punto D d'intersecazione lascio cadere la normale DE = EB. Egli è certo, che se le sfere R, S faranno affatto molli, ed inerti, terminata che sia la comunicazione del moto, ambe cammineranno colla comune celerità ED, o sia EB: ma nel tempo, in cui dura l'azione, se per cagion d'esempio la massa R avrà perduta la velocità AF, la massa S avrà acquistata la velocità FG, e così successivamente, fin tanto che la celerità DE acquistata dal corpo S, e la EB rimasta nel corpo R sieno eguali, cessando allora l'azione, e la forza della percossa, quando il primo con pari velocità si sottragge alle impressioni del secondo.

SCHE-

239 SCHEDIASMA XXIII. (*)

Veræ & germanæ virium elasticarum leges ex phænomenis demonstratæ.

Arduum opus aggrediantur hi, qui quæstionem aliquam enodandam sibi proponunt, in qua cum nihil datum sit, quod ad investigationem perducatur, quot data invenire oportet, totidem nova, & difficulta problemata solvenda occurrunt. Et quamquam ea, quæ pro notis usurpamus, non ex fictis philosophorum hypothesebus, sed ex ipsa natura, & ab experimentis petenda sunt; sæpius accidit, ut quæ priora videntur, & rem fere attingunt, ea nos a proposito longissime removeant. Hoc periculo meo didici; cum enim in leges virium elasticarum inquirerem, putabam me voti compotem fieri debere, si spirarum, laminarum, funium sese restituentium supellectile comparata, majori qua poteram accurate experimenta instituissem. Verum incassum recidit labor, & rei difficultas qualemcumque industriam meam frustrata est; nullus enim canon observationibus ex omni parte respondens fanciri potuit; quod an materiæ defectui, & circumstantiarum varietati, an experimentorum subtilitati tribuam, nescio: parumque absuit, quis in doctissimi Jacobi Bernoulli sententiam descenderem, unumquodque scilicet corpus pro varia suarum partium textura, peculiarem, & ab aliis corporibus diversam elasticitatis legem obtinere.

Cum autem de re mea non conquiescerem, venit in mentem ab acustica auxilium petere. Notissimæ sunt fidium musicarum harmonicæ proprietates, sed nondum compertum est, ex quo canone virium elasticarum dependeant, argumentumque hoc nullis clarissimorum mathematicorum paralogismis inclauit. Nam si elasticitatis legem aliquam inter simpliciores tamquam datam assumimus, quod hucusque factum est; tunc id quod quærendum erat, supponitur, & hypothesis detorquenda est, me-

(*) Sino dall'anno 1720. il Conte Jacopo incominciò a lavorare intorno il presente Schediasma, come si raccoglie da una lettera scritta nel mese di Settembre al celebre Sig. Antonio Vallisnieri. Impariamo da due lettere del Sig. Niccolò Bernoulli all'Autore in data de' 24. Novembre, e de' 9. Dicembre 1721., ch'egli avea divisato di spedire una lettera al Sig. Giovanni Bernoulli Padre del Sig. Niccolò, una copia della quale si conserva fra i suoi manoscritti. Contiene questa un estratto dello Schediasma XXIII. Avendo l'Accademia di Bologna richiesta al Conte Jacopo una qualche Dissertazione, mandò egli la presente al Sig. Eustachio Manfredi, il quale con lettera de' 12. Ottobre 1723. ne accusa la ricevuta. Finalmente essa comparve al pubblico l'anno 1731. nel Tomo primo dei commentarj della mentovata Accademia.

ut omnibus phaenomenis satisfaciatur. Quod si inter infinitas unam; aut alteram attendendo eligimus, quae melius propositum praestet; etiam si, quod difficile est, veram fortuito assequamur, talem aggressionem geometra indignam existimo. Ex quibusdam igitur datis conditionibus, quas circumstantiae subministrant, vires elasticae sollicitantes, licet omnino ignota, inter se comparanda fuerint, ut deinde cum notis phaenomenis collatione facta, unica, & germana lex, qua natura utitur in huiusmodi motibus temperandis, tandem prodiret; quod an feliciter, & ex voto cesserit, clarissimorum Academiae Bononiensis sociorum iudicio relinquo.

sed altius contemplatio petenda est; & aliquot lemmata praemittenda.

LEMMA PRIMUM.

Sint duae figurae similes ACB, *acb* (Fig. 75.), & duo corpora B, *b*, quorum massa M, *m* ex punctis quietis B, *b* secundum directiones BA, *ba* moveantur, & sollicitentur a viribus acceleratricibus expositis per ordinatas curvarum AEC, *aec*: dico quod tempora, quibus linea BA, *ba*, vel earum partes similes percurreuntur, erunt in ratione dimidiata massarum.

Fiat BA: *ba*:: BD: *bd*, & in eadem proportionem sumantur fluxiones BF, *df*, ducanturque ordinatae DE, *de*.

Quoniam velocitates, quibus percurreuntur elementa DF, *df*, per ea, quae ab aliis demonstrata sunt, se habent in ratione dimidiata arearum BDEC, *bdec* directe, & in ratione pariter dimidiata massarum reciproce; huiusmodi autem velocitates sunt etiam directe ut spatia conficienda DF, *df*, & inverse ut tempora T, *t*, quibus haec spatia conficiuntur, atque insuper proportio dimidiata arearum BDEC, *bdec*, ob earum similitudinem est eadem, quae fluxionis DF ad fluxionem *df*; igitur $\frac{DF}{T} : \frac{df}{t} ::$

$\frac{DF}{\sqrt{M}} : \frac{df}{\sqrt{m}}$, hoc est T: *t*:: $\sqrt{M} : \sqrt{m}$; quod cum verificetur de temporibus per quascumque alias fluxiones similes, & similiter positis; sequitur tempora integra, quibus percurreuntur linea BA, *ba*, vel earum portiones quaelibet similes, esse in ratione massarum subduplicata Q.E.D.

COROLLARIUM.

Hinc si massae ponantur aequales, tempora quoque erunt aequalia: & si massae sint ut spatia percurrenda BA, *ba*, tempora erunt in dicto-

rum spatiorum proportionem dimidiata Quod si M: *m*:: $\overline{BA}^n : \overline{ba}^n$ hoc est

est massae se habeant; ut quaecumque spatiorum dignitates; tempora se habebunt ut $\overline{BA}^{\frac{n}{2}} : \overline{ba}^{\frac{n}{2}}$.

S C O L I O N.

Ex origine A (Fig. 76) circa communem axem AB describantur infinitae figurae similes AED, AGF, ACB &c.: linea recta, quae connectit puncta A, C, transibit per infinita puncta E, G &c.; sunt enim tam in figuris similibus, quam in triangulo ABC, AB: BC:: AF: FG:: AB: DE &c.; recta igitur AC est communis locus, in quem desinunt puncta extrema, & analogae omnium similium figurarum. Cum autem curva AHC ad libitum sumpta sit, nullaue tam ex analyticis, quam ex mechanicis a demonstrata proprietate excludatur; manifestum est inter ipsas locum etiam rectae lineae AEC concedendum. Si itaque triangulo ABC, & linea AF, vel AG pars lineae majoris AC. In hoc solo casu, reliquis omnibus exclusis, unica linea, hoc est recta AEC idem officium praestat, ac infinitae curvae similes. Porro ex praemisso lemmate, massis existentibus aequalibus, spatia BA, FA, DA &c. aequali tempore percurreuntur. Solum igitur triangulum pro scala virium sollicitantium habendum est, in qua motus a quiete incipientes in quocumque puncto axis, & desinentes in punctum A sint isochroni.

LEMMA SECUNDUM.

Iisdem positis, ut in antecedenti lemmate, hoc solum immutato; quod loco duarum curvarum similium, accipiantur duae curvae AEC, *aec*, (Fig. 77.) analogae ad ordinatas; in quibus scilicet sumptis abscissis aequalibus AD, *ad*, applicatae DE, *de* sint semper in costante ratione: dico tempora, quibus a mobilibus B, *b* conficiuntur spatia aequalia BA, *ba*, vel BD, *bd*, se habere in ratione directa subduplicata massarum, & inversa pariter subduplicata virium sollicitantium.

Velocitates, quibus percurreuntur spatia infinitesima aequalia DF, *df*, ex una parte sunt in ratione reciproca temporum, ex altera ut radices arearum BDEC, *bdec* divisae per radices massarum: sed areae sunt inter se ut ordinatae, seu vires accelerantes BC, *bc*; ergo tempora per DF, *df* sunt directe ut radices massarum, & inverse ut radices virium. Quod autem demonstratum est de fluxionibus DF, *df*, de quibuscumque aliis sub iisdem conditionibus verificatur; igitur eadem temporum proportio locum habet, etiam si conficiantur spatia finita BA, *ba*, vel BD, *bd*. Q. E. D.

COROLLARIA.

Massis existentibus æqualibus, tempora se habebunt in ratione inversa dimidiata virium, & si massæ sint ut vires, tempora utrobique erunt æqualia.

LEMMA TERTIUM.

Sint modo curvæ AEC, *aea* (Fig. 78.) ad abscissas analogæ, hoc est diviso utroque axe BA, *ba* proportionaliter in punctis D, *d*, ordinata DE alteri *de* sit semper æqualis: dico tempora per BA, *ba*, vel BD, *bd* esse in ratione composita ex dimidiata spatiorum BA, *ba*, & dimidiata massarum.

Velocitates per elementa proportionalia DF, *df* sunt ut ipsa elementa directe, & tempora, quibus percurruntur, inverse: & cum hujusmodi velocitates sint pariter in ratione subduplicata directa arcuum BDEC, *bdec*, & inversa subduplicata massarum; arcæ autem servant proportionem fluxionum DF, *df*, hoc est spatiorum BA, *ba*; igitur vocatis T, *t* temporibus per DF, *df*, habebimus $\frac{BA}{T} : \frac{ba}{t} :: \frac{\sqrt{BA}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{ba}}{\sqrt{m}}$.

quæ analogia alteram suppeditat $T : t :: \sqrt{BA} \cdot \sqrt{M} : \sqrt{ba} \cdot \sqrt{m}$. Existentibus porro temporibus per quascunque fluxiones proportionales, & proportionaliter refectas in ratione constante, eadem proportio manebit, dum corpora B, *b* feruntur per spatia finita proportionalia BD, *bd*, BA, *ba*. Q. E. D.

COROLLARIA.

Si massæ sunt æquales, tempora se habebunt in ratione dimidiata spatiorum; & si massæ sint ut spatia percurrentia, tempora quoque erunt ut ipsa spatia. Quod si massæ sint reciproce ut spatia, tempora utrobique erunt æqualia.

SCHOLIUM.

Dum vires sollicitantes quomodocumque per ordinatas alicujus curvæ exponuntur, qua ratione tractandæ sint, geometram latere non potest, postquam apud illustres mathematicos-canones generales passim demonstratos inveniet; at cum vires omnino ignotæ inter se comparandæ veniunt, tunc tria lemmata, quæ consulto præmissa sunt, latissime patent, & eximium præstant usum. Id pluribus in medium allatis exemplis evincere pos-

possem, sed instituti nostri ratio postulat, ut non nisi de lege distractionum in corporibus elasticis ad potentias distrahentes relata disseramus.

CANON PRIMUS

Ab experientia desumptus.

Fides sonoras ex eadem materia confectas aliquot præditas esse proprietatibus phisicos, & musicos longa experientia docuit. In primis certum est itus, & reditus ejusdem chordæ sub constante distractione ad instar oscillantis penduli eodem fere tempore perfici. Isochronismo locus esse nequit, ut in primo lemmate demonstratum est, nisi curva, seu scala tensionum sit linea recta, hoc est arithmetice crescentibus potentiis distrahentibus, distractiones eadem prorsus ratione augeantur, quod experientiæ non satisfacit. Quo longior chorda est, cæteris paribus, magis ab ista lege discedit, & inter massimas, & minimas ejusdem chordæ vibrationes, hoc est inter sonos his respondentes integri comatis differentiam audiri sepius expertus sum, & post alios testatur doctissimus Jesuita de Chales. Cum autem fides jam distractæ viribus minimis licet inæqualibus pulsantur, tunc vibrationes fieri æque-diuturnas ita demonstro.

Funis AB a pondere DC patiatu distentionem BC (Fig. 79.). Addatur pondus minimum IG, cui conveniat ulterior distractio CE, manifestum est chordam ab hoc onere superadjecto liberatam sese restituere per spatium EC. Rursus appendatur pondus majus, sed infinitesimum KH, quod efficiat distentionem CF, atque eo remoto, restitutio fiat per majus spatium FG; in utroque casu scala virium funem restituentium exponitur a minimis trilineis DGI, DHK, quorum ordinatæ repræsentant cum potentias distrahentes, tum chordæ tenacitates distractioni resistentes. Sed cum pars curvæ DK sit infinitesima, cum sua tangente confunditur, & ideo trilinea DHK, DGI triangulum rectilineum constituunt; igitur per scholium lemmatis primi utraque restitutio, quæ sit seorsim per spatia FC, EC, est isochrona. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Hoc verum est in rigore geometrico, dum chorda jam distenta a viribus æqualibus, vel ad æqualitatem proxime accedentibus, vel tandem a viribus infinitesimis quancumque rationem obtinentibus rursus sollicitatur. In cæteris casibus differentia exigua est, & plerumque sub sensum non cadit; cum virium restituentium scala paululum a triangulo aberret.

CANON SECUNDUS

Ab experientia desumptus.

Sumptis duobus nervis sola longitudine inæqualibus, qui ab eodem pondere distraherentur, & pulsantur ictibus æqualibus, tempora oscillationum sunt inter se, ut nervorum longitudines. Ex hoc canone nihil ad rem nostram colligi potest; locum enim invenit in quacumque hypothefi distractionum, quod sic ostendo.

Chordis AB breviori, & ab longiori (Fig. 79. aptetur idem pondus P, quod hinc inde producat distentiones BF, bf. Intelligantur descriptæ curvæ tensionum, quæcumque tandem sint BDK, bdk, quarum abscissæ designent distractiones, applicatæ vero potentias distrahentes. Huiusmodi curvæ semper erunt analogæ relatæ ad abscissas; ponderibus enim æqualibus respondent distensiones, chordarum longitudinibus proportionales, ut ex lemmate subiiciendo constabit. Sublato hinc inde pondere P, dum utraque chorda regreditur per spatia FB, fb eandem proportionem servantia, ac chordarum longitudines, sollicitatur a viribus, quarum scalæ sunt curvæ BDK, bdk. Porro cum massæ sint in nostra hypothefi ut spatia percurrenda FB, fb, vel ut chordarum longitudines AB, ab, tempora quoque restitutionum ex corollario lemmatis tertii se habebunt in eadem ratione. Q. E. D.

LEMMA QUARTUM.

Pendeant chordæ prædictæ AB, ab, duobis clavis A, a, & tendantur a ponderibus æqualibus: dico distentiones BF, bf esse inter se, ut chordarum longitudines.

Hæc propositio jam demonstrata fuit a summis Viris Galilæo, Borello, & Jacopo Bernoullio, sed alteram placet addere demonstrationem his, quæ dicenda sunt, magis accommodatam.

Sumatur ex chorda AB pars minima AL, cui in puncto L applicetur datum pondus P, quod distrahendo fibram AL, producat distentionem LM. Pariter ex altera chorda accipiat pars al = AL, & eodem aptato pondere in l, fiat distentio lm = LM. Punctum m figatur clavo, ut fibra am se contrahere non possit. Sumpta iterum ex eadem chorda portione mn = AL, agat rursus pondus P in fibram mn, & oriatur secunda distentio no = LM, punctumque o ut prius altero clavo firmetur. Sic repetita operatione ex ultima fibra, quam statuamus esse op, libere pendeat idem grave P, & sit pq = LM postrema distentio.

Cum duæ fibræ distractæ am, mo tentent ad consuetam longitudinem sese reducere, & alligatæ sint duobus clavis a, & o, manifestum est, quod clavus intermedius m trahitur sursum, & deorsum a viribus

bus æqualibus inter se æquilibrium constituentibus. Similiter duæ fibræ mo, oq sunt in æquilibrio respectu clavi o, prima namque eandem vim exercet in clavos m, o, ac secunda in clavum o, & onus suspensum ex puncto q, contrariis tamen directionibus; igitur remotis clavis intermediis m, & o, non destruitur æquilibrium, sed omnibus in eodem statu manentibus, grave P non ascendet, neque descendet; ex quo fit, quod tot erunt distentiones æquales, quot fibræ, & quod distractio totius chordæ ab, quæ æquivaleret omnibus suarum partium distractionibus, ad distractionem unius fibræ AL, vel omnium fibrarum componentium chordam AB se habebit, ut longitudo ad longitudinem. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Ad procurandas distentiones funium AB, ab requiruntur vires obtinentes proportionem longitudinum; vidimus enim pro numero fibrarum in utraque chorda multiplicandam fuisse actionem constantem ponderis P singulis partibus infinitesimis applicatam. Quod si potentia quomodocumque in funes agant, puta si pondera æqualia suspensa ex punctis B, b motu accelerato descendunt chordas secum traherent, & distenderent, tandemque post varias reciprocações in punctis F, f constituerent; evidens puto vires in distractiones insumptas in eadem ratione esse; cum causæ sint semper effectibus productis proportionales, & æqualibus effectibus æquales causæ respondere debeant.

COROLLARIUM II.

At distractione jam facta, ad impediendam restitutionem utriusque chordæ sufficiunt pondera æqualia, etiamsi chordæ sint longitudinis inæqualis. Hoc fortasse mirum alicui videbitur, sed phænomeni explicatio augebit admirationem. Dico igitur, quod grave applicatum chordæ in puncto infimo q sustinetur, & æquilibratur solummodo a dimidia vi ultimæ fibræ oq. Restitutis clavis in locis o, & m, patet fibram minimam op tendi a consueto pondere P, atque eodem tempore, dum nititur se se contrahere, non solum sustinere onus P, sed æquali vi deorsum urgere clavum o. Similiter fibra superior mn passa distractionem no pari vi sursum trahit clavum o, & deorsum clavum m, & sic successive; ergo dum singulæ fibræ virtutem contractionis directione opposita exercent, actio unius elidit actionem alterius, & pondus P non est in æquilibrio nisi cum dimidia resistentia inferioris fibræ oq. Dummodo fibræ sint in utraque chorda ejusdem tenacitatis, & resistentiæ, nihil facit ad hunc effectum explicandum longitudo chordæ, quamvis in infinitum excreset.

COROLLARIUM III.

Colligo ex dictis, vim gravitatis ponderis finiti P quiescentis esse infinitesimam, sustinetur siquidem a dimidia vi minima fibræ oq , quæ cum sit totius chordæ ab pars inassignabilis, necesse est ut agat inassignabili ratione. Equilibrium igitur a natura non instituitur, præterquam inter vires evanescentes, seu inter elementa, & fluxiones virium; supponamus enim vires in statu manente, & cum loco cujuscunque vis mortuæ pondus substitui possit, absque eo quod tollatur æquilibrium, vires autem ponderum quiescentium sint minimæ, liquet inter vires mortuas tantummodo æquipondium subsistere. Hinc nō fallor corrigendi veniunt nostrates Galilæus, & Borellus, qui animadvertentes vim percussionis ad vim gravitatis habere rationem quacunque data majorem, cum supposuissent vim gravitatis finitam esse, alteram percussionis infinitam fecere. Sed potius vis percussionis inter finitas collocanda erat, & vis gravitatis cum omnibus aliis viribus mortuis, quæ scilicet a motu non roborantur, ut vires elasticæ, pressiones &c. inter infinitesimas erant recensenda.

S C H O L I O N.

Fortasse ex proprietatibus chordarum elasticarum peti potest demonstratio principii fundamentalis Dynamices, quod scilicet vires vivæ corporum sint inter se, ut facta ex massis in velocitatum quadrata, non autem ut quantitates motus; quam legem tota fere Mathematica Republica reclamante, nulla licet demonstratione munitam, fanciendam tamen putavit incomparabilis Leibnitius.

T H E O R E M A

Vires ejusdem corporis sub diversis velocitatibus, non sunt ut velocitates.

Chordis AB , ab in punctis B , b aptentur pondera æqualia FK , fk . Descendat utrumque ad puncta F , f usquequo chordarum resistentiæ sint dictis ponderibus æquales, quod evenit, quando, descriptis curvis BDK , bdk , tenacitatum ultimæ ordinatæ KF , kf cum inter se, tum ponderibus sunt æquales, & abscissæ FB , fb se habent ut longitudines AB , ab .

Jam fingamus tam pondus BX , quam bx sollicitatum a naturali gravitate, & nullo modo impeditum a reactione chordarum descendere per spatia BF , bf : velocitates in punctis F , f erunt in ratione dimidiata spatiorum confectorum, aut rectangulorum XF , xf . Rursus descendant dicta pondera chordis appensa; vires acceleratrices in punctis analogis C , c erunt æquales, utpote quæ determinantur a vi constante ponderum ZC , zc , subductis viribus æqualibus resistentiarum utriusque chordæ DC , dc . Scalæ itaque virium sollicitantium pondera descendencia erunt curvæ BDK , bdk relatæ ad axes KX , kx , & velocitates in punctis F , f ut radi-

lices quadratæ arearum $BDKX$, $bdkx$; sed hujusmodi areæ sunt ut abscissæ KX , kx ; igitur velocitates in punctis F , f se habebunt in ratione dimidiata dictarum abscissarum.

His positis, animadvertendum est, gravitatem BX , vel bx comitantem utrumque pondus per spatia BF , bf passim agere extendendo chordas AB , ab , partim accelerando gravia descendencia usque ad terminos F , f : sed hujusmodi vis gravitatis continue applicata, & non impedita gignere posset velocitates in ratione dimidiata spatiorum hinc inde decursorum, atque impedita a tenacitate chordarum de facto velocitates utrinque producit in eadem proportionem; igitur si fieri potest, quod vires vivæ sint ut velocitates, deducendo velocitates, seu vires genitas a velocitatibus, seu viribus, quæ generari potuissent a ponderibus non impeditis, sequitur, quod reliqua pars virium, quæ ex utraque parte infumitur in chordarum distentionem, sit pariter in ratione dimidiata linearum BF , bf , vel longitudinum AB , ab , quod est absurdum, & contra corollarium primum nostri lemmatis; nam cum distentiones sint, ut vires tendentes, vis, quæ efficit distentionem BF , ad vim efficientem alteram distentionem bf se habet ut BF ad bf ; non vero ut $\sqrt{BF}$ ad $\sqrt{bf}$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

In idem absurdum incidimus ponendo vires vivas respondere cuiusque functioni celeritatum, unica tantum excepta, quod nempe vires sint in ratione velocitatum duplicata. Juxta hanc hypothesin gravitas non impedita agendo per spatia BF , bf producit vires vivas in ratione eorumdem spatiorum, ac insuper impedita a resistentia chordarum efficit vires dictis spatiis proportionales, & facta subtractione, ea vis, quæ erogatur in distentionem chordarum, servat pariter rationem distentionum, quod verum esse supra comprobatum est.

COROLLARIUM II.

Vires tendentes chordas, & inducentes distentiones BF , bf metiri debemus per áreas $BDKF$, $bdkf$, quæ in eadem proportionem inveniuntur cum longitudinibus chordarum; ordinatæ siquidem curvarum BDK , bdk expriment resistentias crescentes chordarum, ad quas vincendas in singulis punctis C , c adhibetur pars aliqua constantis gravitatis, quæ per easdem applicatas CD , cd exponitur. Quod si chorda ab in plures partes dividatur, & singulæ extendantur ab eodem pondere P , summa omnium virium partes diherentium est præcise æqualis vi, quæ in chorda ab efficit distractionem bf ; sicuti hæc distractio æqualis est omnium partium distractionibus. Mirabuntur fortasse hi, qui contrariam sententiam tuentur, & vires vivas corporum ex quantitate motus, hoc est ex facto massæ in velocitatem metiuntur, me in allata demonstratione nullam inire

rationem temporis; quod profecto elementum in huiusmodi disquisitionibus absque paralogismo omitti non debuit. Verum, nisi pessime fallor, certo certius est in ea re, de qua sermo est, temporis rationem nullo modo subducendam esse; cum enim funis elasticus brevior per violentam distractionem transit in longiorem, non mutatur ejus resistentia, seu longo, seu brevissimo tempore ad æqualem distentionem perveniat. Ad æqualem porro resistentiam vincendam eadem vis adhibetur, dum manu, vel lento motu, vel velociori funis ducitur:

CANON TERTIUS

Ab experientia desumptas.

Altera proprietas fidium nostrarum in hoc consistit. Si geminæ chordæ æquales ab inæqualibus ponderibus distrahantur, & ex his sumantur portiones æquales, quæ pari vi pulsantur, soni erunt inter se in subduplicata ratione ponderum tendentium, & tempora oscillationum in sonorum præportione reciproca. Superest inquirendam, quid ad rem, de qua sermo est, ex hoc canone deduci possit.

Ex funibus æqualibus AB, ab (Fig. 80.) suspendantur duo gravia inæqualia, quorum minus C efficiat distentionem minorem BC, majus vero c majorem bc. Fiat cg æqualis integræ CA, & punctum g clavo firmetur, ita ut pars superior ag ulterius tendi non possit; deinde punctis C, c aptentur duo alia pondera æqualia magnitudinis infinitesimæ, quibus convenient minimæ distentiones CD, ce. Sublatis hisce ponderibus a punctis extremis D, & c, tempora restitutionum per fluxiones DC, ec sunt in ratione composita tam dimidiata earumdem fluxionum, quam massarum CA, cg. Id patet ex lemmate tertio; nam portiones nascentes curvarum, sive arearum, quæ hinc inde sunt scalæ tenacitatum a triangulis non differunt, quorum bases æquales sunt ob æqualia pondera infinitesima superaddita; altitudines autem plerumque inæquales ob diversam funium inæqualiter tensorum resistentiam. Jam cum massa gc, ad massam ac, vel AC, sit ut recta gc, vel AC, ad rectam ac, si massa utriusque funis per unitatem exponatur, massa portionis gc exprimi poterit per magnitudinem $\frac{AC}{ac}$, igitur tempora restitutionum per DC, ec

se habebunt ut $\sqrt{DC} : \sqrt{ec} :: \sqrt{AC} : \sqrt{ac}$. Sed hæc tempora experientia do-

cente sunt etiam in ratione reciproca subduplicata ponderum inæqualium C, c; ergo $\sqrt{DC} : \sqrt{ec} :: \sqrt{AC} : \sqrt{ac} :: \frac{1}{\sqrt{ac}} : \frac{1}{\sqrt{c}}$, quæ analogia debi-

eis

tis operationibus institutis transit in sequentem $\frac{AC}{C} : \frac{ac}{c} :: DC : ec$, quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

Removeatur clavus g, & tunc onus infinitesimum, quod agendo in solam portionem cg producebat distentionem ce, sollicitando integram chordam ca, efficit distentionem cd, eritque ce, cd :: cg = CA : ca, ideoque $\frac{CA}{ca} \cdot ed = ce$, quo valore substituto in superiori analogismo

$$\frac{AC}{C} : \frac{ac}{c} :: DC : ec, \text{ alter oritur } \frac{AC^2}{C} : \frac{ac^2}{c} :: DC : dc.$$

SCHOLIUM.

Reponet fortasse aliquis, me in allata demonstratione computum non inire ponderum C, c, prima vice suspensorum, quorum massæ in restitutionibus per fluxiones DC, ec movendæ sunt: at hæc pondera consideranda non veniunt in casu nostro; sunt enim in æquilibrio cum tenacitatibus chordarum, a quibus sustinentur, & eorum actio a retro actione eliditur. Ut hoc evincam, rem ad absurdum deduco. Chordis sola longitudine inæqualibus AB, ab (Fig. 79.) aptentur duo pondera finita æqualia CD, cd efficientia distentiones BC, bc; subinde alia duo infinitesima æqualia HK, hk, quibus convenient ultiores distentiones CF, cf. His remotis, quadrata temporum restitutionum per FC, fc se habebunt ob vires sollicitantes æquales, ut spatia percursa FC, fc ducta in massas movendas, seu juxta hypothesim assumptam in massas chordarum, additis hinc inde ponderibus æqualibus DC, dc; igitur $\overline{T}^2 : \overline{t}^2$

FC. AB + DC : fc. ab + dc : est autem FC : fc :: AB : ab; ergo vocato

P pondere DC, vel dc, $\overline{T}^2 : \overline{t}^2 :: \overline{AB}^2 + AB \cdot P : \overline{ab}^2 + ab \cdot P$.

Interim cum pondus P ad pondera chordarum possit esse in ratione quacumque data, sequitur tempora restitutionum per FC, fc vergere ad æqualitatem, quod est absurdum; sunt enim semper inter se ut chordarum longitudines.

CANON QUARTUS.

Ab experientia desumptus.

Remanet postrema proprietas chordarum sola diametro differentium. Si fumantur ex his portiones æquales ab æqualibus ponderibus distractæ, quæ pulsantur viribus æqualibus, tempora vibrationum sunt ut diametri.

Sint hujusmodi chordæ AB, ab tensæ a gravibus æqualibus C, c, (Fig. 81.) & sit distractio BC chordæ subtilioris major distractione bc chordæ crassioris. Facta CG = ca, & fixo de more clavo in puncto G, addantur hinc inde duo pondera minima æqualia producentia distentiones inassignabiles CD, cd. Facile demonstrare possum, curvas nascentes in punctis C, c, seu scalas tenacitatum analogas esse, si referantur ad abscissas. Hinc per lemma tertium, dum chorda, remotis ponderibus infinitesimis, se contrahit per fluxiones DC, dc, tempora restitutionum se habebunt in ratione composita ex dimidiata massarum CG, ca, & ex dimidiata spatiorum confectorum DC, dc: Massa autem partis CG ad massam chordæ crassioris se habet in ratione composita longitudinis CG, vel ca ad longitudinem CA, & massæ chordæ subtilioris BA, ad massam crassioris ba; quæ massæ ob altitudines æquales sunt ut bases circulares in utraque chorda, vel ut quadrata diametrorum: hoc est vocando x diametrum funis AB, & y alteram diametrum funis ab, & sumendo massam chordæ crassioris pro unitate, massa CG exponitur per

$$\text{magnitudinem } \frac{ca \cdot x^2}{CA \cdot y^2}; \text{ igitur } T: t :: x \cdot \frac{\sqrt{DC} \cdot \sqrt{ca}}{y \cdot \sqrt{CA}} : \sqrt{dc}; \text{ sed prædi-}$$

cta tempora ex nostro canone sunt etiam ut diametri chordarum; ergo

$$x: y :: x \frac{\sqrt{DC} \cdot \sqrt{ca}}{y \sqrt{CA}} : \sqrt{dc}, \text{ ex qua analogia altera fuit } DC: dc :: CA:$$

ca. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

Auferatur clavus G, & tunc onus infinitesimum superadditum funem ulterius extendat usque ad punctum E: & cum distentiones sint ut chordarum longitudines, erit CG = ca: CA :: CD: CE, hoc est $\frac{ca \cdot CE}{CA} = CD$

= CD, quo valore ipsius CD substituto in superiori analogismo, alter

$$\text{oritur } EC: dc :: \frac{CA^2}{ca^2} :$$

SCHOLIUM I.

Simplices, & elegantes sunt explicatæ proprietates nervorum illorum, qui sola crassitudine differunt, & qui a ponderibus æqualibus arithmetice crescentibus extenduntur. Datis duabus chordarum jam distractarum longitudinibus AC, ac (Fig. 81.), reliquæ omnes a quibuscumque potentiis æqualibus provenientes tali pacto determinari possunt. Voco cognitæ AC, ac; m, n, binasque alias distracti funis longitudines AD, ad; x, y. Jam cum per corollarium superius ubique sit xv: y ::

$$dx: dy; \text{ ergo } -\frac{dx}{xx} = -\frac{dy}{yy}, \text{ \& integrando addita constante, } g \mp \frac{1}{x} =$$

$$\frac{1}{y}; \text{ sed eo casu, quo sit } x=m, \text{ altera indeterminata } y \text{ datæ } n \text{ æqua-}$$

$$\text{lis evadit; igitur constans } g = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \text{ \& æquatio curvæ quæsitæ tran-}$$

$$\text{sit in sequentem } \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mp \frac{1}{x} = \frac{1}{y}, \text{ vel } mxy - nxy \mp mny = mnx,$$

qui locus est ad hyperbolam vulgarem, cujus reductionem Analistis relinquo, solamque constructionem exhibeo.

Ponatur AC æqualis longitudini AC chordæ gracilioris (Fig. 82.) & Ca ipsi normalis æqualis longitudini chordæ crassioris. Abscindatur CB = CA, & fiat AB: AC :: CB: CD, actaque perpendiculari DQ, intra asymptotos DQ, DC describatur hyperbole, quæ transeat per punctum a. Producta Ca, sit Ce = CD & per punctum e agatur eH parallela asymptoto DR. Si sumatur eF = AC, hoc est longitudini m chordæ subtilioris jam distractæ, erit FG = Ca longitudo chordæ crassioris ab æquali pondere distractionem passæ. Inclinata porro eN ad angulum semirectum; ita ut abscissa eM sit æqualis MN, hæ lineæ nobis repræsentant longitudines æquales utriusque chordæ in statu naturali. Hinc si recta MK, vel MH exponit distractiones a quibuscumque ponderibus factas in chorda graciliori, correspondentes SL, TO exhibent distentiones, quas eadem potentia efficiunt in chorda crassiori. At ordinatæ, & abscissæ inter puncta e, & M ad compressiones pertinent. Existente MO compressione alicujus cylindri subtilioris, NI erit com-

pressio crassioris; dummodo inter bases cylindrorum sit eadem proportio, quæ inter bases chordarum. Compressio autem usque ad punctum *e* pervenire nequit, nisi cylindrus ita comprimi possit, ut ad altitudinem infinitesimam reducatur, quo in casu erit *ea* altitudo cylindri crassioris. Sed de compressionibus redibit sermo.

SCHOLIUM II

Nihil omnino actum puto, nisi ostendam canonem quartum a tertio dependere, ejusque esse consecutarium. Iisdem positis (Fig. 81.), accipiat altera chorda PQ ipsi AB æqualis tam diametro, quam longitudine. Fiat ut massa *ab* ad massam PQ; ita grave *c* ad aliud R suspendendum ex puncto Q, cui conveniat distantia QR = *bc* (tunc enim distantiones sunt æquales, dum funibus æque longis aptantur pondera in ratione crassitudinum, quod ab aliis demonstratum est) ex puncto R pendeat aliud grave infinitesimum æquale jam applicatis in punctis C, *c*, oriaturque nova distantia RT: manifestum est, quod hoc pondere diminuto in ratione massæ PQ ad massam *ab*, eo casu distenderet funem per solum spatium RS = *cd*, & tunc restitutiones per dicta spatia *dc*, SR eodem tempore fierent. Id constat ex lemmate secundo; sunt enim scalæ tenacitatum, seu virium sollicitantium analogæ ad ordinatas, & massæ movendæ in eadem ratione cum viribus. Verum cum pars curvæ distantionum respondens abscissæ evanescenti RT, a linea recta non aberraret per primum canonem, dum chorda resilit, plus temporis non insumit percurrendo spatium TR majus, quam SR minus, remotis scilicet ambobus ponderibus infinitesimis seorsim applicatis. Modò comparando funes æquales AB, PQ primum distentos a ponderibus inæqualibus C, & R, deinde ab æqualibus infinitesimis D, T, tempus restitutionis per DC, ad tempus restitutionis per TR, vel SR est in ratione reciproca dimidiata ponderis C, sive *c* ad pondus R ex canone tertio, hoc est in directa subduplicata massæ PQ, vel AB ad massam *ab*, aut sicut diameter chordæ AB ad diametrum chordæ *ab*: sed tempora per SR, & *dc* sunt æqualia; ergo tempora per DB, *dc* se habent ut diametri chordarum subtilioris, & crassioris Q. E. D.

Huc usque dicta, præmissis aliquibus corollariis, ad ulteriora viam aperiunt.

COROLLARIUM I.

Quoniam ex traditis canone tertio $\frac{AC^2}{C} : \frac{ac^2}{c} :: CD:cd$ (Fig. 80.)

quæ analogia, si sumatur ex chorda *ca* pars *cg* toti CA æqualis transsit in

in sequentem $\frac{AC}{C} : \frac{ac}{c} :: CD:ce$, sequitur, quod si differentia *ga* inter

funium longitudines sit inassignabilis; ita ut massa *cg* accipi possit tanquam æqualis utrique massæ *ce*, CA; tunc tertius prodit analogismus $\frac{1}{C} : \frac{1}{c} :: CD:ce$, in quo sola consideratur tenacitas, & vis elastica fibrarum.

COROLLARIUM II.

Verum dum chordæ æquales inæqualiter distractæ ulterius distrahantur, tria elementa distinguenda veniunt.

Primo quo magis fibræ tenduntur, eo magis distantiori resistunt vi propria tenacitatis.

Secundo quo funis magis tenditur, eo magis in longitudinem excrescit, & ex hoc capite minus resistit ulteriori distantioni.

Tertio minuitur resistentia ex alio capite; fit enim chorda subtilior, quo magis in longum deducitur. Ex tribus hisce elementis, quorum duo alteri contraria sunt, ejusque actionem limitant, semper oritur compensatio, & fieri potest, ut secunda distractio CD sit major, minor, & æqualis, si cum analogâ *cd* comparetur, quod ex formula manifestum est.

COROLLARIUM III.

Oppositum contingit in compressione, cujus elementa sunt conspirantia. Cylindrus compressus resistit ulteriori compressioni, non solum ob fibrarum majorem rigiditatem, sed insuper quia fit brevior, & crassior.

SCHOLIUM.

Fortasse minus veritati consonat, quod docuit in Actis Academiae Regiæ Parisiensis anni 1705. Summus Vir Jacobus Bernoullius, distractionem nihil aliud esse, quam negativam compressionem; & semper contingere, ut crescentibus arithmetice ponderibus, distractiones decreverant. Id vero equidem experimento, sed unico confirmat; quod si in multis chordis ex diversa materia confectis, & variæ longitudinis periculum fecisset, miram in distantionibus observasset irregularitatem. Iterum verosimile putat, legem distractionum variam esse pro varia in diversis corporibus fibrarum structura: at mutata chordarum materia, soni sunt quidem graviore, vel acutiores, constante tamen manente inter sonos assignata proportione. Neque melior est Hirii senioris sententia

254
affluentis tensionem sequi proportionem directam virium tendentium;
compressionem vero reciprocam comprimentium.

PROBLEMA PRIMUM.

*Ponderibus arithmetice crescentibus, determinare in eadem chorda scalam,
seu curvam tenacitatum.*

Pono (Fig. So.) constantem $\frac{AC^2}{C} =$, elementum $CD = du$ quod

statuo æquale differentiis singulis ponderum crescentium in proportione
Arithmetica. Sit pondus variabile $c = u$, $ac = x$, $cd = \pm dx$ (signum
affirmativum locum habet in distractionibus, & negativum in compres-

sionibus) & cum sit $\frac{AC^2}{C} = \frac{ac^2}{c} :: DC : dc$, habebimus, $\frac{xx}{u} :: du : \pm$

dx , hoc est $\frac{du}{u} = \pm \frac{dx}{xx}$, quæ æquatio integrata dat sequentem con-

structionem.

Lineæ Af, MO (Fig. 83.) normaliter se intersecant in puncto R. Ipsi
Af citra, & ultra punctum R insistant perpendiculares AB, ab æquales lon-
gitudini corporis distrahendi, & comprimendi, & hinc inde intra asympto-
tos jam designatas deferbantur hyperbolæ vulgares BEH, *beh* transeun-
tes per puncta B, b. Replicentur AB, ab in CD, cd, & distractio DE
referatur ad potentiam CK, compressio vero de ad potentiam ck. Tum
ex origine R gemina intelligatur descripta logarithmica scilicet MKI
transiens per punctum K, cujus ordinatæ decrevant, & altera mik tran-
sians per punctum k, cujus ordinatæ crescant: patet, quod si chordæ CD
solicitatæ a pondere CK debetur distensio DE, grave FL agens in
eamdem CD, vel FG efficit distentionem GH. Sic si potentia ck agens
in cylindrum ba, vel dc producit compressionem de, altera potentia fl
gignet compressionem gb.

SCHOLIUM I.

Quod caput rei est in hoc situm puto, absurdum primo aspectu vi-
deri, quod chordæ AB nulli adhuc distractioni obnoxia respondeat po-
tentia finita AI nullum producat effectum. Ni fallor arcani quid latet
in constructione, & ipsa geometrica effectio, quod mirum profecto est,
physicam proprietatem nos docet.

Vim

255
Vim elasticam intra certos terminos contineri experimentis didicit
solertissimus Grævesandus, quibus & nostræ consonant observationes. Is
igitur suorum elementorum lib. 1. cap. 26. ubi agit de legibus elasticis
fibræ, inquit, nullam habent elasticitatem, nisi certa cum vi tensa sint,
ut patet in chordis parum tensis, & quarum extremitates fixæ sunt,
quæ si a situ paululum removeantur, ad illum non redeunt. Quisnam
vero sit gradus tensionis, a quo elasticitas inchoetur, experimentis nondum
fuit determinatum. Quando nimia cum vi fibra tenditur, elasticitatem
amittit, & neque gradus hic tensionis notus est: illud constat, tensio-
nem fibrarum, quæ elasticitatem constituit, certis limitibus terminari.

Observabam ego aurum, quod per exigua foramina veluti netur,
& in longum filum extenditur, magnam acquirere elasticitatem ex par-
tium constipatione: at dum igne candescit, & rarefit, ita elasticitatem
amittit, ut quasi linum illud trahere possis, & ducere, atque in tenuis-
simum filum extendere.

Mirum igitur non est, si nostra constructio pondus AI designet,
quod quidem chordam distrahat, sed adhuc inertem, & nondum elasti-
cam. Porro linea AB non exprimit veram, & naturalem funis longitu-
dinem, sed potius eam, quam acquirere debet, ut elasticus fieri incipiat,
& ut fibræ debita rigiditas inducatur, qua valeant se restituere. Quod
dictum est de distractionibus, dicendum pariter de compressionibus.

SCHOLIUM II.

Alterum inconveniens ex nostra constructione sequi videtur, quod
nempe potentiæ finitæ RM conveniat infinita distensio; sed præter id,
quod funis nimis distensus elasticitatem amittit; natura ipsa huic diffi-
cultati occurrit funem rumpendo, ejusque fibras a se invicem divellendo.

SCHOLIUM III.

Nostra æquatio $\frac{du}{u} = \pm \frac{dx}{xx}$. Geometris ignota non est. Si enim

proponatur determinanda densitas aeris a solo proprio pondere compressi
in duplici hypothesi, quod scilicet densitas sit oneri imposito propor-
tionalis, & gravitas aeris sit in ratione reciproca duplicata distantia a
centro telluris, formula nostra satisfacit, ut videre est apud Taylorum,
& Varignonium. Sed data occasione de fluidis elasticis agamus.

PRO-

PROBLEMA SECUNDUM.

Investigare legem compressionis in fluidis elasticis relata ad potentias comprimentes.

Sint duo tubi vitrei ab , AB æquales (Fig. 84), & æqualem aeris quantitatem continentes, qui ut præscindere possimus ab aeris gravitate, disponantur in situ horizontali. Aer AB cogatur a data vi V in spatium quodcumque AC , atque aer ab a vi majori u redigatur in spatium minus ac . Deinde vires hinc inde infinitesimæ æquales superadditæ efficiant ultteriores compressiones CD , cd , quæ ex nostris principiis, hoc est Canone tertio, erunt in ratione composita inversa virium V , u , & directæ longitudinum CE , ce , videlicet $\frac{CE}{V} : \frac{ce}{u} :: DC : dc$, vel

denominando constantes $\frac{CE}{V} = a$, $DC = du$, & variables $ce = x$;

$dc = -dx$ (crescente enim potentia arithmetice per infinitesimam du ; quam constanti DC æqualem possum statuere, ipsa ce decrescit) habebimus $-dx = \frac{x du}{u}$, quæ æquatio differentialis est ad hyperbolam Apollonianam.

Curva itaque intra Asymptotos eb , eg descripta, & exprimentibus ch , di potentias comprimentes, abscissæ ce , de designabunt spatia decrescentia ab aere semper magis compresso occupata: sed densitas aeris sub altitudine ed ad ejusdem densitatem sub altitudine ec se habet inverse, ut $ed : ec$, hoc est directe ut $di : ch$; igitur densitates aeris sunt viribus comprimentibus proportionales. Q. E. I.

S C H O L I U M.

Hæc lex vera est tam in aere humili, quam sublimi, ut amicus meus didicit experimentis seorsim in utroque institutis. Verum quidem est, quod si comparentur utriusque densitates, ut ab Academicis Parisiensibus factum lego, huic canonis nullo modo respondent: verum si fallor caloris habenda ratio est; constat enim aerem telluris superficiæ proximum calidiorem esse, quam remotum, & montanum, & ex hoc capite magis pro sua densitate rarefcere inferiorem, quam superiorem, quod Gallorum observationibus optime congruit, & sancitam legem tot experimentis comprobata potius confirmat, quam evertit.

Interim illustri Nevvtonus hanc notissimam fluidorum elasticorum affectionem ostendit, supponendo particulas aeris vi aliqua prædita esse, qua se invicem repellant, & hanc vim decrescere statuit ea pro-

portione, qua inter easdem particulas distantia crescit. Verum nostra demonstratio nihil assumit, & ex phænomenis, atque principiis virium elasticarum, quod præpositum erat deducit.

PROBLEMA TERTIUM.

Invenire proportionem inter vires elasticas duorum corporum ex diversa materia confectorum.

Sint geminæ chordæ AB , ab ejusdem longitudinis, & crassitudinis, quæ materia differant (Fig. 80.) Earum tenacitatem, seu vim elasticam aliter metiri non possumus, quam per potentias, quas adhibere oportet, ut prædictæ chordæ acquirant distentiones æquales BD , bd . Jam ex Lemmate secundo cum schalæ tenacitatum in hac hypothefi sint analogæ ad abscissas, facile inferitur temporæ restitutionum esse inter se in ratione dimidiata directæ massarum, & inversa pariter dimidiata potentiarum tendentium: ex quo fit, quod potentiæ tendentes, seu ob legem actionum, & retroactionum, resistentiæ, seu tenacitates, & elasticitates chordarum servant proportionem compositam ex inversa quadratorum temporum restitutionis, & ex directæ massarum, seu specificarum gravitatum. Q. E. I.

S C H O L I U M.

Experimentum facilius sumitur in corporibus similibus, puta sphaeris. Sit e.g. altera sphaera vitrea, & altera eburnea, quarum gravitates specificæ g , G notæ sint ex regulis hydrostaticis. Investigetur ratio diametrorum a , A vel circino, vel melius ex sphaerarum ponderibus in aere, & tempora restitutionum, seu tremitus ex sonis determinetur. Jam finge sphaeram ex eboe ejusdem diametri cum sphaera vitrea, hæc se restituet tempore $\frac{aT}{A}$;

nam hujusmodi tempora in sphaeris ejusdem materiæ sunt ut diametri ex doctissimi Carrè observationibus; igitur vires elasticæ vitri, & eboris erunt inter se, ut $\frac{gaa}{tt} : \frac{GAA}{TT}$.

Ex allatis principiis methodo synthetica omnia demonstrari possunt, quæ ad vires elasticas pertinent, sive agatur de nervorum oscillationibus, aut de tremitibus corporum solidorum, vel de curvatura funium, & laminarum elasticarum: sed modo elementa solum, & principes proprietates harum virium prosecutus sum, cætera in aliud tempus rejicio.

ANNOTAZIONE DELL' EDITORE.

I. **N**EL sovrapposto Schediasma suppone il Conte Jacopo, che leggi simili diano norma e alla consuete vibrazioni delle corde, che oscillano di traverso a due scannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oscillano per lungo, mentre il peso tendente a vicenda ascende, o discende. La prima supposizione ne chiama due altre, cioè che le corde sieno prive di naturale rigidità, e che il peso stirante sia minimo in relazione alle masse delle corde; ammesse le quali circostanze, osserveremo in progresso, che da canoni analoghi vengono regolati i due descritti generi di vibrazioni. Due rigidità vogliono nelle corde distinguersi: l'una, che chiamiamo naturale, consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi allungare anche prima, che le venga applicata veruna forza tendente; l'altra, che chiamiamo artificiale, s'eguaglia all'accrescimento di ripugnanza per essere ulteriormente distesa, che dalla forza, o peso tendente nella corda proviene. Le due rigidità si possono parimente nominare intrinseca, ed estrinseca; dipendendo quella da cagione interna, cioè a dire dalla struttura della corda, e dallo intralciamento delle sue fibre, e questa da cagione esterna, cioè a dire dalla forza stirante. Conciossiachè ella è considerazione anzi geometrica, che fisica l'assumere corde solide prive di naturale rigidità, stimiamo opportuno, accostandosi più alla Natura, di mettere a compimento il detto elemento nella soluzione del seguente Problema, e di supporre altresì finita la proporzione fra le masse delle corde, ed i pesi tendenti.

Trovare la proporzione fra gli allungamenti delle corde, ed i pesi o forze, che li producono.

II. Prima di tutto egli è necessario di porre in chiaro, quali sieno quelle forze, o pesi, che producono gli allungamenti nelle corde.

Sia la corda AB (Fig. 85.) tesa del peso P, con cui stia in equilibrio; egli è certo, che per allungarla farà d'uopo aggiungere al peso P un nuovo peso per esempio p. Si ponga in B un impedimento NO, il quale non permetta, che il punto B della funicella AB possa muoversi da B verso A, e levato poscia il peso P, la corda AB eserciterà contro l'impedimento NO quello stesso sforzo, che esercitava contro del peso P. Se torneremo ad attaccare alla corda un peso o minore, o eguale a P, non cagionerà questo veruna distensione, impiegandosi tutta la sua energia o a minorare, o a togliere interamente di mezzo il contrasto dell'impedimento NO colla corda AB, il quale tornato ad appendere alla stessa il peso P, non sostiene più veruna fatica. Chi vorrà dunque allungare la corda AB, dovrà applicarle un peso $P+p$ maggiore di P, ed il peso p aggiunto al dato P farà quello, che produrrà in essa la distensione.

III. Di-

III. Dilucidato un tal punto a solo fine di evitare gli sbagli, avanziamoci a ricercare l'allungamento inassegnabile *dl* operato nella corda qualunque AB, la cui lunghezza $L+l$, dalla forza minima *dp* aggiunta alla forza, o peso finito $P+p$ stirante la corda stessa. Avvertasi, che per L s'intende la lunghezza della corda corrispondente al peso conosciuto P, e per la distensione cagionata dal peso variabile p. Più elementi possono influire nel mentovato allungamento, la forza *dp*, la lunghezza della corda $AB = L+l$, il peso tendente $P+p$, la rigidità naturale *r* della corda, la grossezza della corda.

CANONE I.

Essendo tutti gli altri elementi pari, la distensione *dl* è come la forza minima *dp*, che la genera.

CANONE II.

Essendo gli altri elementi dati, la distensione *dl* è come la lunghezza $L+l$, della corda AB.

Veggansi le dimostrazioni di questi due canoni nello Schediasma dell'Autore.

CANONE III.

Posti costanti tutti gli altri elementi, e nulla la rigidità naturale della corda, la distensione *dl* è inversamente come il peso $P+p$ tendente la corda.

Supponendosi nulla la rigidità naturale della corda, la forza $P+p$ s'eguaglia alla rigidità artificiale d'essa corda, con cui stia in equilibrio. Un peso adunque minimo proporzionale a $P+p$ produce un allungamento costante, e per conseguenza, fatto uso del primo canone, un peso costante *dp* genera un allungamento in ragione inversa del peso tendente $P+p$.

CANONE IV.

Posti tutti gli altri elementi pari, e nullo il peso tendente la corda, l'allungamento *dl* sta in ragione reciproca della rigidità naturale *r* della corda.

La dimostrazione di questo canone è affatto simile a quella del canone precedente.

CANONE V.

Se due corde non differiscono, salvo che nella rigidità, e nel peso tendente, la distensione dl cagionata dalla stessa forza minima dp , è in ragione inversa della somma $r + P + p$ della rigidità, e del peso tendente, cioè a dire dl come $\frac{1}{r + P + p}$. Abbiamo detto della somma,

e non del prodotto, perchè se fosse dl come $\frac{1}{r \cdot P + p}$, s'incontrerebbe

nell'assurdo, che supposto uguale a nulla il peso tendente $P + p$ la distensione dl si scoprirebbe infinita.

Questo canone non è, che una conseguenza dei canoni terzo, e quarto assieme combinati.

CANONE VI.

Se gli altri elementi tutti saranno costanti, nulla la naturale rigidità di due corde, ed ineguali solamente le basi, un pari allungamento dl verrà prodotto dalla forza minima data dp .

Si considerino le due corde come fasci ineguali di funicelle di pari diametro. Il numero delle funicelle d'un fascio al numero delle funicelle dell'altro fascio starà come la base d'una corda a quella dell'altra. Tanto nel fascio piccolo, quanto nel grande si concepiscano e il peso tendente $P + p$, e la forza minima dp divisi in tanto numero di parti eguali, quante sono le funicelle componenti un fascio, e si scoprirà, che a due funicelle a diversi fasci appartenenti toccano e pesi tendenti, e forze minime, che si corrispondono in ragione inversa delle basi delle corde. Essendo dunque nelle dette funicelle le forze minime come i pesi tendenti, combinati i canoni primo, e terzo, si troverà costante la distensione dl in ambe le funicelle. Quello, che s'è detto d'una funicella, si può applicare a tutte l'altre componenti la stessa corda, ed indi cavare la conseguenza, che sono eguali le distensioni di due corde, la cui rigidità naturale sia nulla, ed in cui tutti gli altri elementi, a riserva delle basi, sieno comuni. Questo sesto canone s'uniforma col terzo, il quale considerate due corde, in cui l'unico elemento variabile sia il peso tendente $P + p$ e la rigidità naturale eguale a nulla, stabilisce la distensione dl in ragione inversa del peso tendente, o sia come $\frac{1}{P + p}$. Supposto costante $P + p$, si trova pure costante l'allungamento

dl , come vuole il sesto canone. Quindi i canoni terzo, e sesto s'uniscono in un solo, nè trattandosi di corde, la cui rigidità naturale sia nul-

la, importa in riguardo alle distensioni considerare l'elemento della varia grossezza,

CANONE VIII.

Essendo costanti tutti gli altri elementi, e nullo il peso tendente, le distensioni di due corde differenti di grossezza serberanno la ragione inversa delle naturali rigidità, e si verificherà essere dl come $\frac{1}{r}$.

Avvertasi, che il quarto, ed il settimo canone sono una cosa stessa. Amendue suppongono nullo il peso tendente, e variabile la rigidità: quello vuole la grossezza costante, e questo variabile. Se due corde differentemente grosse saranno della stessa materia, si ritroveranno le rigidità, come le basi, o grossezze, cioè r come g , ed in virtù della stessa forza minima dp ne risulteranno allungamenti in ragione inversa delle grossezze, ch'è quanto dire dl come $\frac{1}{g}$.

Paragonate assieme due corde di grossezza, e di materia differente, e posto che la specie h esprima la rigidità variabile di corde dello stesso diametro, ne proviene la totale rigidità r come hg , e dl come $\frac{1}{g}$.

come $\frac{1}{hg}$.

La dimostrazione del presente canone riesce semplicissima. Se fosse dp come r , l'allungamento dl si scoprirebbe costante; dunque supponendosi dp costante, il detto allungamento per il primo canone è come $\frac{1}{r}$.

come $\frac{1}{hg}$.

Non si trascuri il corollario, che in riguardo a corde fornite di finita naturale rigidità, l'elemento della varia grossezza serve a determinare la misura d'essa rigidità.

CANONE VIII.

Se gli unici elementi variabili sieno la grossezza, e la rigidità si avrà dl come $\frac{1}{P + p + r}$, vale a dire le minime distensioni inver-

samente come l'aggregato del peso tirante $P + p$, e della rigidità r .

Quir-

Questo canone nascente dalla combinazione del sesto, e del settimo; non è che una replica del canone quinto.

IV. I canoni fra loro diversi sono il primo, che vuole dl come dp , il secondo, che vuole dl come $L + l$, il quinto, che vuole dl come $\frac{1}{r + P + p}$. Gli altri tutti s' uniformano con il quinto, usato al più $r + P + p$

L'artificio di supporre o la rigidità, o il peso tendente eguale a nulla. Combinati per tanto assieme i tre diversi canoni, si trova essere dl come $\frac{L + l}{r + P + p} dp$, o sia $bdl = \frac{L + l}{r + P + p} dp$, ch'è quanto a dire le mi-

nime distensioni in ragione composta diretta delle lunghezze delle corde, e della forza minima producente esse distensioni, ed inversa della somma della rigidità naturale delle corde, e del peso tendente.

V. Si vuole osservare, che nella stessa corda la rigidità r non è costante; imperciocchè quanto più in vigore dei pesi aggiunti p cresce la lunghezza $L + l$, altrettanto cala la base, a cui è proporzionale la rigidità. Chiamata adunque b la rigidità della corda corrispondente alla lunghezza L , ed al peso tirante P , avremo generalmente $r = \frac{bL}{L + l}$.

La quantità $\frac{L}{L + l}$ è proporzionale alla base variabile della corda, la

quale moltiplicata per la lunghezza variabile $L + l$, mi dà il prodotto costante L , indice della massa, che nella corda più, o meno allungata resta sempre la stessa. L'espressione $r = \frac{bL}{L + l}$ s'adatta anche a corde

diverse, purchè per b s'intenda quella rigidità, che in esse corde corrisponde alla lunghezza L , ed al peso tendente P amendue dati. Per computare la spezie b , bisogna aver riguardo alla rigidità della materia, onde è formata la corda, ed alla base della stessa corda tesa dal peso P . Le basi si ritrovano esattamente col pesare le corde, e coll'avvertire, ch'esse basi sono proporzionali ai pesi divisi per le lunghezze.

Sostituito nella formula superiormente trovata in cambio di r il suo valore $\frac{bL}{L + l}$, ci si presenterà l'equazione differenziale $bdl = \frac{L + l}{L + l} dp$

$\frac{L + l}{L + l} dp$, che generalmente esprime la relazione fra gli allunga-

menti delle corde, e le forze, o pesi, che li producono.

VI. Si

VI. Si metterà in maggior lume la verità della nostra formula, avvertendo dedursi da essa il noto canone, che se a due corde della stessa materia, pari in lunghezza, differenti di base, e tese da pesi alle basi proporzionali, genereranno questi distensioni minime eguali.

Sia L la lunghezza della corda corrispondente al peso tendente P ; ed aggiunto il peso minimo dp , si avrà l'espressione $bdl = \frac{Ldp}{b + P}$. Per

le cose dette nel canone settimo la rigidità b di corde della stessa materia, ma di base differente è proporzionale alla base: ma anche il peso P si vuole proporzionale alla base; dunque la somma $b + P$ sta come la base, e supponendosi pure come la base il peso aggiunto dp , e costante la lunghezza L ; ne segue, che relativamente alla corde, di cui parliamo, si troverà costante il prodotto $\frac{Ldp}{b + P}$, e conseguentemente l'allungamento

minimo dl ad esso prodotto proporzionale; il che ec.

Egli è da notarsi per altro, che non tutte le materie, che collo stesso nome si chiamano, sono del pari rigide. Tutti gli ottoni per esempio non saranno dotati della stessa rigidità, ed oltre a ciò rendendosi una corda vie più sottile, col seguir a passare per trafil, la quale sempre più la costringe; paragonate assieme due corde della stessa materia una sottile, e l'altra grossa, si troverà la prima alquanto più rigida di quello porti la proporzione della base, ciò che è stato da noi confermato colla esperienza. Nella addotta dimostrazione si prescinde da sì fatti elementi.

VII. Col mezzo della formula $bdl = \frac{Ldp}{b + P}$ si troverà il tempo,

in cui una corda AB si vibra per lungo. Si tolga al peso tendente P una minima porzione f , acciocchè rotto l'equilibrio, la corda si metta in oscillazione. E qui ci dichiariamo di supporre, che nello stesso stante si comincino ad accorciare le fibre tutte componenti la corda, e le più vicine, e le più remote dal peso P ; il che si verificherà almeno fisicamente, trattandosi di corde, la cui lunghezza sia moderata. Sia $BF = f$ (Fig. 86.) la forza minima iniziale, che sollecita al moto il punto estremo B della corda AB , e Bb sia lo spazio in fine del quale la forza sollecitante è nulla. Eguagliandosi il detto spazio alla somma degli accorciamenti delle fibre tutte, onde è formata la corda AB ; egli è facile da capire, che l'area triangolare bBF pareggia l'intera azione delle forze sollecitanti. Ora a questa azione s'eguaglia l'aggregato delle forze vive acquistate e dal peso tirante P , e da tutte le menome particole, che compongono la corda, per ritrovare il quale ci serviamo del seguente artificio. La lunghezza AB (Fig. 87.) della corda rappresenti la sua massa m , ed istituita l'analogia $m : P :: AB : BH$, una

una tal linea rappresenterà la massa del peso P tendente la corda. Le due linee bD , bG normali tra loro, e con l' Ab s'eguolino alla velocità massima u del punto B nel sito b , e del peso tendente P , onde sia $DG = u^2$, ed agevolmente si scoprirà, che la forza viva del peso P giunto in b è proporzionale al parallelepipedo $BK = Pu^2$. In riguardo alla forza viva acquistata dalla corda AB , si compia la piramide ABE , e fatta la riflessione, che le velocità massime di due particole bB , cC stanno fra loro come gli spazi trascorsi nello stesso tempicello, i quali serbano la ragione delle distanze AB , AC dal punto fisso A ; deducasi, che se bG esprime la massima velocità della particola bB , la linea cI dinoterà la velocità massima della particola cC , ed il quadrato NI , il quadrato d'essa velocità. Quindi i due solidi bE , cO espongono le forze vive delle due fibre bB , cC . Ma da tutti i solidi bE , cO cc. dinotanti le forze vive delle corrispondenti particelle viene formata la piramide $ABE = \frac{mu^2}{3}$; dunque la stessa è proporzionale alla somma

delle forze vive di tutte le fibre componenti la corda AB .

VIII. Ciò dimostrato riflettasi, che se si desse una corda matematica AB (Fig. 86.) sollecitata dalla scala di forze bBF , tesa dallo stesso peso P , e in questo solo differente dalla corda fisica AB , che la sua massa m fosse tutta unita nel punto B , acquisterebbe essa la medesima

forza viva. Essendo perciò nell'uno, e nell'altro caso il punto estremo B delle due corde fisica, e matematica dotato in siti analoghi della stessa velocità, e scorrendosi lo stesso spazio Bb ; egli è evidente, che la corda matematica sarebbe isocrona alla fisica. Trovato per tanto il numero di vibrazioni, che farebbe la corda matematica in un minuto secondo, si caverà la conseguenza, che un pari numero di oscillazioni fa nello stesso tempo la corda fisica.

IX. Rivolgendosi alla corda matematica AB , la cui massa eguale alla terza parte di quella, onde è fornita la corda fisica di pari lunghezza L , sia tutta concentrata nel punto B ; supponiamo, che il detto punto seguitando dal peso P sia giunto nel sito C , e che indi muova un menomissimo passo Cc . Si tiri l'ordinata $CD = p$, e denominata $bC = l$; farà la infinitesima $Cc = -dl$, e per le note formole si avrà

$$-pdl = \frac{m}{3} P. u du. \text{ Ma conforme s'è determinato superiormente,}$$

$$bdl = \frac{Ldp}{b \cdot \frac{1}{3}P}; \text{ dunque fatta la sostituzione,}$$

L

$$\frac{L}{b \cdot \frac{1}{3}P} = pdp = \frac{m}{3} P. u du, \text{ ed integrando;}$$

$$f^2 - p^2 = b \cdot \frac{1}{3}P \cdot \frac{\frac{m}{3}P}{L} \cdot u^2. \text{ S'aggiunge la costante } f^2; \text{ perchè nel}$$

principio del moto, quando la velocità $u = 0$, la forza sollecitante s'eguaglia ad f peso minimo detratto dal finito P . E fatta l'estrazione della

$$\text{radice } \sqrt{f^2 - p^2} = \sqrt{b \cdot \frac{1}{3}P \cdot \frac{\frac{m}{3}P}{L} \cdot u^2}. \text{ Ma } u = -\frac{dl}{dt}, \text{ e}$$

$$dl = \frac{Ldp}{b \cdot \frac{1}{3}P}; \text{ dunque } u = -\frac{Ldp}{b \cdot \frac{1}{3}P \cdot dt}; \text{ e per conseguenza esse:}$$

guita la sostituzione, dopo le debite operazioni,

$$dt = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{m}{3}P} \cdot -dp}{\sqrt{f^2 - p^2}};$$

L'integrale di $\frac{-dp}{\sqrt{f^2 - p^2}}$; quando il punto B , compiuta una semivibrazione,

ne, sia giunto in b , s'eguaglia al quadrante diviso per il raggio, o sia prossimamente alla frazione $\frac{355}{226}$, e perciò integrando,

$$t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m \cdot \frac{1}{3}P} \cdot \frac{355}{226}}{\sqrt{b \cdot \frac{1}{3}P}}; \text{ ed il tempo d'una intera vibrazione del}$$

punto B, o sia della corda AB $t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3} m + P} \cdot \frac{355}{113}}{\sqrt{b \cdot \frac{1}{3} P}}$.

E giacchè scopriremo in progresso essere

$$b = 1, t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3} m + P} \cdot \frac{355}{113}}{\sqrt{b \cdot \frac{1}{3} P}}, \text{ il che ec.}$$

X. Si troverà il valore del tempo t espresso per esempio in secondi, paragonando la corda AB con un pendolo a cicloide, il tempo d'una vibrazione del quale generalmente si espone per la frazione $\frac{355}{413}$ multi-

plicata nella radice della lunghezza. Vn pendolo lungo oncie $36 \frac{17}{24}$

pie di Parigi fa una vibrazione per secondo; dunque istituita l'ana-

$$\text{logia } t : \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3} m + P} \cdot \frac{355}{113}}{\sqrt{b \cdot \frac{1}{3} P}} :: 1 : \sqrt{36 \frac{17}{24} \cdot \frac{355}{113}}, \text{ scopriremo}$$

$$t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3} m + P}}{\sqrt{b \cdot \frac{1}{3} P} \cdot 36 \frac{17}{24}}; \text{ valore del tempo d'una vibrazione per lungo}$$

della corda matematica isocrona alla fisica AB contrassegnato in secondi.

XI. Egli è noto, che oscillando di traverso la corda AB appoggiata a due scannelli, e tesa da una forza equivalente al peso P , e chiamato T il tempo d'una sua vibrazione, preso un secondo per unità, si ha

ha l'equazione $T = \frac{\sqrt{Lm} \cdot \frac{113}{355}}{\sqrt{P \cdot 36 \frac{17}{24}}}$. Osservi che legge quanto sieno

differenti i tempi T, t di due oscillazioni della stessa corda, una per lungo, e l'altra per traverso, rispondendosi essi nella proporzione di

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3} m + P}}{\sqrt{b \cdot \frac{1}{3} P}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{P}} \cdot \frac{113}{355}, \text{ la quale non può essere di egualità se non}$$

nel caso particolare, che sia la rigidità

$$b = \frac{\frac{1}{3} m P + P^2}{m} \cdot \frac{355^2}{113^2} = P. \text{ Nella corda, che si vibra per lun-$$

go, si pongono in moto la massa della corda, ed il peso tendente P : nella corda, che oscilla di traverso, la sola massa posta in moto si è quella della corda. Trattandosi delle oscillazioni per lungo, va messa in computo la rigidità naturale b della corda, la quale nulla altera le vibrazioni trasversali della corda medesima.

XII. Fra le molte ipotesi, che potrebbero considerarsi, ci restringeremo alle due sole abbracciate dal Conte Jacopo, che le corde sieno prive di naturale rigidità, onde s'eguagli a nulla la specie b , e che il peso stirante P sia minimo relativamente alla massa m della corda. Modificata la formola del tempo d'una vibrazione per lungo a norma di

$$\text{queste supposizioni, prende il seguente aspetto } t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3} m} \cdot \frac{355}{113}}{\sqrt{P}}$$

Fatta la divisione per la quantità costante $\frac{355}{113} \cdot \frac{\sqrt{1}}{3}$, si trova t come

$$\frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P}}, \text{ legge simile a quella, che regola le oscillazioni trasversali delle}$$

corde.

XIII. Torniamo a prender per mano l'equazione differenziale del numero V., cioè $bdl = \frac{L+l}{L+l} \cdot dp$, da cui generalmente s'esprime

$$\frac{bL}{L+l} + P + p$$

la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze, o pesi, che li producono. Si moltiplichì per $\frac{bL}{L+l} + P + p$, e trasportato un ter-

mine da una parte all'altra, mutato il segno, troveremo

$$\frac{bbLdl}{L+l} = \frac{L+l}{L+l} \cdot dp - P - bdl. \text{ Dividansi tutti i termini per } \frac{L+l}{L+l}.$$

$$\frac{L+l}{L+l}^{b+1}, \text{ ed avremo } \frac{bbLdl}{L+l} = \frac{L+l}{L+l} \cdot dp - \frac{P-p}{L+l} \cdot bdl, \text{ ed integran-}$$

do, non ometta l'aggiunta della costante,

$$c - \frac{bbL}{b+1 \cdot L+l} = \frac{P+p}{L+l}. \text{ Si determina il valore della costante } c$$

ponendo il peso aggiunto $p=0$, nel qual caso è parimente $l=0$, onde abbiassi $c = \frac{bb}{b+1} \cdot \frac{P}{L^b}$. Si sostituiscia un tal valore, e si troverà

$$\frac{bb}{b+1 \cdot L} + \frac{P}{L^b} - \frac{bbL}{b+1 \cdot L+l} = \frac{P+p}{L+l}; \text{ o sia moltiplicando per } \frac{L+l}{L+l}$$

$$\frac{L+l}{L+l}^b, \frac{bb+P}{b+1} \cdot \frac{L+l}{L^b} - \frac{bb}{b+1} \cdot \frac{L}{L+l} = P+p; \text{ equazione finita}$$

esprimente la relazione fra le distensioni l , ed i pesi, o forze p , dai quali vengono cagionate.

XIV.

XIV. Abbiamo promesso di provare essere il coefficiente $b=1$. Otterremo ciò, considerando le compressioni dell'aria, la quale ha la proprietà, che le sue densità sono proporzionali ai pesi comprimenti. Osserviamo nell'ultima premessa formola, che posta la rigidità $b=0$, ne risulta $P \cdot \frac{L+l}{L^b} = P+p$, espressione, da cui si deduce, che al peso

tendente $P+p=0$ corrisponderebbe la lunghezza $L+l=0$ della corda, che non fosse dotata di veruna naturale rigidità.

Passando dalle corde, che si rendono elastiche per via di stiramento, a quelle, che divengono elastiche per via di compressione, si cavi la conseguenza, che levato qualsiasi peso comprimente ad una corda, o elastro, la cui rigidità naturale sia nulla, si dilaterà esso infinitamente. Ora ella è tale la proprietà dell'aria, la quale minorandosi sempre più il peso comprimente, è capace d'una indefinita rarefazione. Relativamente dunque all'aria la specie b s'eguaglia a nulla almeno fisicamente.

Sia un tubo cilindrico AF (Fig. 88.) ripieno d'aria compressa dal peso P , e sia la lunghezza AB d'esso tubo uguale ad L . Al peso P aggiungasi il peso p , che generi la compressione $AC=l$, onde la nostra corda si scorti, e si riduca alla lunghezza $BC=L-l$. Il peso comprimente $P+p$ accrescasi di nuovo per una flussione infinitesima dp , a cui corrisponda la minima compressione $Cc=dl$, e fatto uso degli stessi canoni come nelle corde solide, che si stirano, col solo divario, che sia $b=0$, scopriremo $bdl = \frac{L-l}{P+p} \cdot dp$, equazione differen-

ziale esprimente la relazione fra le compressioni dell'aria, ed i pesi, che le producono.

Dividansi ambi i membri dell'equazione per $L-l$, ed avremo $\frac{bdl}{L-l} = \frac{dp}{P+p}$, o pure $0 = \frac{dp}{P+p} - \frac{bdl}{L-l}$, ed integrando, presi i logaritmi

nella Logistica della sottotangente 1, $\log. c = \log. P+p+l$.

$\log. L-l$, e passando dai logaritmi alle quantità ordinarie, $c =$

$$\frac{P+p}{L-l} \cdot \frac{L^b}{L-l}$$

Si stabilisce il valore della costante c ponendo $p=0$, nel qual incontro è pure $l=0$, e per conseguenza $c=P \cdot L^b$. Adempiuta la fo-

stituzione nell'ultima sovrapposta formola, troveremo $P \cdot L^b = \overline{P+p} \cdot \overline{L-l}^b$.

Ora essendo, conforme vuol l'esperienza, le densità d , D dell'aria come i pesi comprimenti P , $P+p$, e deducendosi dalla ritrovata equazione l'analogia $P : P+p :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{L-l}^b$, avremo $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{L-l}^b$.

$\frac{1}{L-l}^b$. Ma le densità, che generalmente serbano la ragione compo-

sta, diretta delle masse, ed inversa dei volumi, nel nostro caso, in cui la massa è sempre costante, sono inversamente come i volumi, ed i volumi dei cilindri FA , FC , che hanno comune la base, sono come le lunghezze $BA = L$, $BC = L-l$; dunque $d : D :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$.

Ma abbiamo pure scoperto essere $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{L-l}^b$; dunque

$\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l} :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{L-l}^b$; e perciò $\overline{L-l}^{b-1} = L^{b-1}$; il che non

può mai verificarsi, se non posto $b=1$.

Se $b=1$ nelle compressioni, deve avere lo stesso valore anche negli stiramenti, servendo all'una, ed agli altri la stessa formola differenziale

$bdl = \frac{L-l \cdot dp}{bL + P+p}$, ed essendo la Natura costante nelle sue leggi:

Ciò, come vedremo, viene esattamente confermato dalla esperienza.

XV.

XV. La formola adunque del numero XIII., cioè

$$\frac{bb+p \cdot \overline{L+l}^b}{b+1} - \frac{bb}{b+1} \cdot \frac{L}{L+l} = P+p, \text{ sostituita in cambio di } b \text{ l'ue-}$$

rità, ci si presenta sotto la forma seguente

$$\frac{1}{2} b + p \cdot \frac{\overline{L+l}}{L} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{L}{L+l} = P+p. \text{ Nell'asse } AD \text{ (Fig. 89.) se}$$

gnifi $AB = L$, ed indi a squadra conducansi AK , e $BF = P + \frac{1}{2} b$:

Congiunti con una linea, che si proroghi indefinitamente, i punti A , F , si segni $BH = P$, onde resti $HF = \frac{1}{2} b$, e fra gli assintoti AK ,

AG descrivasi l'iperbola comune CHI , la quale passi per il punto H ; affermiamo, che posta l'assisa $AD = L+l$, farà l'ordinata $DI = P+p$, peso tendente, atto a ridurre la corda alla lunghezza AD .

Per la natura dell'iperbola CHI abbiamo $\frac{FH \cdot AF}{AG} = GI$. Ma

stante la similitudine dei triangoli ABF , ADG , $\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AD}$; dunque

$\frac{FH \cdot AB}{AD} = GI$, o sia analiticamente $\frac{1}{2} bL = GI$, linea esprimente la

metà della rigidità naturale della corda, mentre il peso tendente l'ha ridotta alla lunghezza $AD = L+l$. Ad AD infinita corrisponderebbe GI infinitesima, e minima conseguentemente farebbe in tal incontro la rigidità naturale della corda divenuta infinitamente sottile. I mentovati triangoli ABF , ADG ci suggeriscono l'analogia.

$$AB : BF :: AD : DG$$

$$L : P + \frac{1}{2} b :: L+l : \frac{P + \frac{1}{2} b \cdot \overline{L+l}}{L}$$

da

da cui si deduce il valore di DG. Essendo pertanto

$$DG = \frac{P + \frac{1}{2}b}{L} \cdot \frac{L+l}{2}, \quad GI = \frac{1}{2}bL, \text{ ne risulta}$$

$$DI = DG - GI = \frac{P + \frac{1}{2}b}{L} \cdot \frac{L+l}{2} - \frac{1}{2}bL : \text{Ma per la nostra equa-}$$

$$\text{zione } \frac{P + \frac{1}{2}b}{L} \cdot \frac{L+l}{2} - \frac{1}{2}bL = P + p; \text{ dunque presa } AD = L + l;$$

sarà la corrispondente ordinata $DI = P + p$; il che ec.

XVI. Alla lunghezza della corda $AB = L$ corrisponde per la costruzione il peso dato $BH = P$, e perciò condotta per il punto H la linea mHM parallela ad AD , si scoprirà $MI = p$, peso aggiunto, da cui è stata prodotta la distensione BD .

Nel punto C, in cui si tagliano la linea AD , e l'iperbola $iCHI$; il peso tendente s'eguaglia a nulla, e per conseguenza AC si è la lunghezza naturale della corda non istirata da peso alcuno. Il doppio della linea CE dinota la rigidità naturale della corda, mentre è nullo il peso tendente. Per ritrovare il valore di $AC = L + l$, si ponga nella nostra formola $P + p = 0$, e fatti i dovuti computi, scopriremo la lunghezza

naturale della corda $AC = L + l = L \cdot \sqrt{\frac{b}{b + 2P}}$. In questa circostanza

$$l = BC \text{ è quantità negativa} = L \cdot \sqrt{\frac{b}{b + 2P}} - L, \text{ la quale ci manifesta}$$

sta, che levato il peso tendente $BH = P$, la corda si scorta per la porzione BC . La linea CB adunque eguale ad $L - L \sqrt{\frac{b}{b + 2P}}$ misura

l'allungamento cagionato dal peso $BH = P$. Si troverà il valore di $CE = \frac{1}{2}bL$, surrogando in vece di $L + l$ la rinvenuta pari grandezza

$$\frac{L + l}{2}$$

L

$L \sqrt{\frac{b}{b + 2P}}$, onde abbiassi, adempiuti i calcoli necessari

$$CE = \sqrt{\frac{b^2 + 2bP}{4}}, \text{ e conseguentemente } 2CE = \sqrt{b^2 + 2bP}, \text{ rigidità}$$

naturale della corda non istirata da peso alcuno.

Posta la lunghezza AD infinita, farà parimente infinito il peso tendente DI uguale adeguatamente a DG ordinata al triangolo ADG ; giacchè in tale ipotesi è infinitamente picciola l'ordinata GI all'iperbola. Per allungare adunque immensamente una corda, non ci vuol mena d'un peso infinito. In fatto però questo allungamento infinito non segue. La tenacità, che connette l'una con l'altra le particole componenti la corda, è finita, e quindi accresciuto il peso tendente fino ad una data misura, la tenacità resta superata dalla forza del peso, e la corda si spezza. Ha sperimentato M. Saureur, che una corda d'acciajo si rompe, quando è tirata da un peso, che sia all'in circa 12000. volte maggiore del peso di 40. oncie del piede di Parigi di detta corda: che per ispezare una corda d'ottone, ci vuol un peso 9000. volte più grande del peso di 40. oncie d'essa corda: e per rompere una corda di rame, un peso 5000. volte maggiore del nominato peso di oncie 40.

XVII. Esaminata quanto basta la premessa costruzione relativamente agli allungamenti della corda AC , resta che si dicano alquanto parole di quella porzione di curva da C verso A , in cui divenendo negativo il peso tendente, cioè a dire cangiandosi di stirante in premente, ci si presenta agli occhi una legge matematica, ma non fisica di compressioni della corda AC . Per vedere come nelle compressioni si modifichi la formola del numero XV, il peso premente $mi = p$ abbia cagionato nella corda $AB = L$ tesa dal peso $P = dm$ l'accorciamento $Bd = l$, onde alla corda resti la lunghezza $Ad = L - l$, ed avremo per l'equazione al trian-

$$\text{golo } ADG \quad dg = \frac{1}{2} \frac{b + P}{L} \cdot \frac{L - l}{L}, \text{ e per l'equazione all'iperbola,}$$

$$gi = \frac{1}{2}bL, \text{ e conseguentemente, giacchè } di = mi - md = p - P, \text{ si ha}$$

$$dg = di = p - P = \frac{1}{2}bL - \frac{1}{2}b - P \cdot \frac{L - l}{L}. \text{ Questa formola tira l'origine}$$

dalla espressione differenziale $dl = \frac{L-l}{bL + P-p} \cdot dp$, la quale suppone, che

la minima compressione dl sia in ragione composta, diretta della forza inassegnabile dp , che la produce, e della lunghezza $L-l$ della corda, ed inversa della differenza $bL + P-p$ fra la rigidità naturale della corda

$\frac{bL}{L-l}$, ed il peso $p = P - di$, che nella corda AC non istirata da forza al-

cuna ha cagionata la compressione Cd .

Ora essendo il resto pari, le minime compressioni fisiche stanno in proporzione reciproca della somma, e non della differenza della rigidità, e del peso premente, riuscendo tanto più piccole, quanto è maggiore l'aggregato della rigidità, e del peso, che preme.

Se L sarà la lunghezza d'un cilindro, ed b la rigidità naturale corrispondente a un dato peso premente P , e che inoltre sia $L-l$ la lunghezza, a cui si riduce il cilindro presso dal peso $P+p$, nel quale stato la rigidità naturale s'esprime per $\frac{bL}{L-l}$; si verificherà la seguente formola

differenziale $dl = \frac{L-l}{bL + P+p} \cdot dp$; la quale essendo un dato corpo privo

di qualunque rigidità naturale, si riduce alla qui sottoscritta

$dl = \frac{L-l}{P+p} \cdot dp$, ch'è quella stessa da noi ritrovata (numero XIV) re-

lativamente all'aria. La nostra costruzione pertanto non dà la norma alle compressioni fisiche dei corpi.

XVIII. Resta, che la legge delle distensioni delle corde contraffe-

gnata dalla equazione $\frac{1}{2} bL + P \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{1}{2} bL = P+p$ si confermi

solla esperienza. Dalla premessa formola si deduce esserè

$$b =$$

$$b = \frac{2pL - 2Pl \cdot L + l}{2L + l \cdot l} \quad (1)$$

$$L + l = \frac{L}{b + 2P} \cdot P + p + \sqrt{P + p^2 + b^2 + 2bP} \quad (2)$$

Amendue queste espressioni verranno a festa per confrontare colla teorica alcuni esperimenti, che siamo per riferire. Furono questi fatti con somma diligenza molti anni fa nella occasione di esaminare una legge, che appunto essi esperimenti fecero riconoscere per falsa. Raccomandata una corda d'ottone al chiodo A (Fig. 90.), il quale era distante dallo scannello NO oncie $32 \frac{1}{2}$ del piede di Parigi, equivalenti a linee 390, s'at-

taccò primieramente ad essa corda il peso P di libbre 2, e segnossi con inchiostro il punto B, in cui la corda toccava lo scannello NO. S'applicò poscia alla corda il peso $P+p$ eguale a libbre $2 + 4 = 6$, ed osservossi, che il punto B era disceso sotto dello scannello NO linee $1 \frac{1}{8}$.

Aggiunto poi al peso $P = 2$ il peso $p = 8$, onde il peso totale $P+p$ fosse di libbre 10, cagionò esso peso aggiunto 8 la distensione di linee $2 \frac{1}{4}$, la quale era doppia di quella prodotta dal peso aggiunto 4. Nell'equazione segnata (1) si faccia $L = 390$, $P = 2$, $l = 1 \frac{1}{8}$, $p = 4$, dati

somministratici dalla prima esperienza, e troveremo il valore della rigidità della corda tesa dal peso $P = 2$, cioè a dire $b = 1134 + \frac{37022}{68761} = 1134 + \frac{7}{13}$. Dopo ciò nella equazione segnata

(2) si ponga in cambio di b il ritrovato valore $L = 390$, $P = 2$, $p = 8$ peso aggiunto adoprato nella seconda esperienza, e si scoprirà l'allungamento generato dal peso $p = 8$, vale a dire $l = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{207}$. Avendo

coll'esperienza rinvenuto $l = 2 + \frac{3}{4}$, giudichi il Lettore, se si può spe-

rare maggiore accordo fra il nostro canone, e l'esperimento, consistendo tutto il divario in $\frac{1}{207}$ di linea, minuzia totalmente inosservabile.

XIX. Merita riflessione la rigidità grande delle corde di metallo. La rigidità della nostra corda d'ottone equivale a libbre $1134 \frac{7}{13}$.

La maniera, con cui si lavorano le corde sonore, aumenta moltissimo la loro rigidità. Diventano esse così sottili, passando innumerabili volte per trafilà, che sempre più le costringe, ed irrigidisce.

L'essere la rigidità b assai grande in relazione ai pesi adoprati nelle due esperienze, si è il motivo, per cui le distensioni $1 \frac{1}{8}, 2 \frac{1}{4}, 3 \frac{1}{2}, 4 \frac{1}{2}$

sono adeguatamente come i pesi aggiunti 4., 8. Fingasi b infinita, nel qual caso farà infinitesimo l'allungamento l prodotto dal peso aggiunto p , che si suppone finito. Nell'equazione (1) si cancellino tutti i termini relativamente nulli, e resterà $b = \frac{pL}{l}$, e conseguentemente $l =$

$\frac{Lp}{b}$, da cui si deduce, che essendo L quantità costante, le distensioni Lb

l stanno sempre come i pesi aggiunti p . Or ecco la ragione, per cui essendo la rigidità b assai grande in riguardo ai pesi usati nelle esperienze, si sono trovati gli allungamenti nella stessa adeguata proporzione dei pesi aggiunti.

SCHEDIASMA XXIV. (*)

Sopra alcune proprietà delle corde elastiche.

IN certa opera, che manoscritta va per le mani degl'Intendenti, un Dotto Matematico, il quale non stima per anco bene di esporri in pubblico, impugna una mia Proposizione, che si legge nella Dissertazione intorno la vera misura delle forze elastiche inserita negli Atti dell'Accademia di Bologna. Ho detto nel Corollario primo del Lemma quarto, che date due funicelle elastiche in tutto pari, fuorchè nella lunghezza, per istenderle proporzionalmente, di modo che soffrano gli stiramenti in ragione delle lunghezze, ci vogliono forze tali, che serbino fra loro la medesima proporzione.

Mi

(*) Questo Schediasma, e il seguente furono composti nell'anno 1734., come si ricava da una lettera del Co. Giovanni Rizzetti 20. Marzo 1734., dalla risposta del C. J., e da una Scrittura dello stesso Conte Rizzetti.

Mi sono ingegnato di addurre nel Lemma suddetto una chiara dimostrazione: sebbene questa verità può prendersi per un assioma. In fatti se i due nervi si suppongono della stessa materia, e della stessa grossezza, i numeri delle fibre, che li compongono, faranno come le lunghezze: ma per istendere ugualmente due minime fibre uguali, si richiedono forze pari; non essendoci ragione, per cui abbia ad impiegarsi maggior forza piuttosto contro l'una, che contro l'altra; dunque per allungare due aggregati pari di fibre, ci vorranno due aggregati pari di forze: e se faranno ineguali, come nella nostra ipotesi, i numeri delle fibrille, bisognerà moltiplicare le due minime forze uguali, che stendono ugualmente due fibre uguali per i predetti numeri, altrimenti la forza medesima, che si spende contro una sola fibra, sarà sufficiente, restando avvalorata non si fa come, a stenderne infinite. Perciò le forze totali consumate contro le due funi saranno come le loro lunghezze, o come le loro distensioni.

A questa maniera di dimostrare non saprei qual eccezione avesse ad opporsi, senza distruggere da capo a fondo i principj dell'umano discorso. S'io mi fo a provare, che le forze vive di due corpi moventesi con pari velocità sono proporzionali alle masse, d'altro raziocinio non posso valermi, che d'un similissimo al già proposto, dividendo cioè colla mente ambo i corpi in minimi elementi uguali, ed assumendo, che sia pari la forza viva di due particelle eguali di massa, e che camminano con eguale velocità, indi passando a conchiudere, che a proporzione della quantità delle parti elementari si moltiplica nell'uno, e nell'altro corpo la forza viva. E se in questo caso l'argomento si è bello, e buono, ne c'è chi contraddica; io dimando per qual cagione lo stesso giro di discorso applicato alle nostre funi prenda faccia di paralogsimo.

Il mentovato Geometra si fa forte sulla sperienza, che ci fa vedere, qualmente appesi due gravi eguali alli punti B, b (Fig. 91.) delle due funicelle AB, ab pari in tutto il rimanente, salvo che nelle lunghezze, dopo essere questi discesi, e fatte alquanto reciprocazioni di calare abbasso, e di salire in alto, finalmente si fermano nei punti C, c , ed in essi s'equilibrano colle tenacità delle corde. Quindi si è dato a credere, che le distensioni BC, bc quantunque ineguali, e proporzionali alle lunghezze AB, ab possano essere prodotte da forze pari vale a dire dall'innata gravità, che risiede nei due pesi eguali applicati alle due corde. Se la conseguenza regga, lo vedremo a suo luogo e tempo, e frattanto in grazia dell'Oppositore daremo di penna a quel celebre assioma, che gli effetti prodotti sono in qualunque incontro proporzionali alle loro cagioni, mentre esse in generarli intieramente si consumano; atteso che solamente nel caso nostro particolare abbiamo due cause uguali, cioè i momenti di due pesi uguali, da cui vengono prodotti effetti ineguali, ed in qualunque ragione, siccome certamente lo sono i due diversi stiramenti BC, bc .

Ma

Ma non tanto per rispondere alle difficoltà mosse dal mio erudito Avversario, quanto per dilucidare la presente materia, mi metto ad investigare alquanto prime originali proprietà delle funi elastiche.

Sia la corda AB nel suo stato naturale, a cui si attacchi nel punto infimo B un dato peso, la massa, e la gravità del quale si esprima per la retta BE: allungherà questo la fune, discendendo per la verticale BCD, prima con moto accelerato da B sino in C, indi per vigore dell'impeto concepito con moto ritardato da C sino in D, dove si ridurrà alla quiete. Prevalendo allora l'energia della corda, che tenta di rimettersi alla sua primitiva dimensione, farà obbligato il corpo D ad ascendere tirato all'insù contro la sua naturale inclinazione, accelerando il suo moto fra li due termini già segnati D, C, e ritardandolo fra gli altri due C, B. Così continuerebbe a reciprocare all'infinito a guisa d'un pendolo, senza mai fermarsi, se il nervo AB fosse perfettamente elastico, e se il giuoco si facesse in uno spazio vano. Ma perchè la prima condizione non si verifica, e la resistenza dell'aere debilita a poco a poco, e finalmente estingue affatto l'impeto impresso; interverrà, che dopo parecchie oscillazioni si fermi il peso immoto nel punto C, e mantenga stirata la fune per tutto il tratto BC.

Ciò dall'esperienza ci viene messo sotto gli occhi, ma non è così facile a scoprirsi, come in tale incontro operi la Natura. Fingasi, che il grave D, senza essere sospeso dalla corda, percorra liberamente lo spazio BD sollecitato dalla gravità costante BE: egli è certo per le cose dimostrate dal Galileo, che la scala delle velocità crescenti riferite agli spazj passati sarà la parabola BKL. Ognuno s'accorge, ch'io non metto in conto il contrasto dell'aria, che nel caso nostro appena è assegnabile, e può trascurarsi.

Supponiamo in oltre, che la curva BFH colle sue applicate ci rappresenti le tenacità crescenti della funicella AB. Non occorre presentemente investigar l'indole di questa curva, e ci basti il sapere, che nel vertice B non avendo per anco la corda sofferto stiramento di sorta alcuna, essendo la sua resistenza inassegnabile, la curva nell'apice B con l'asse si congiunge: ma perchè quanto il nervo è più stirato, tanto più le ordinate esprimenti le tenacità vanno aumentandosi; ne siegue, che la curva si discosterebbe all'infinito dall'asse, se le fibre, le quali non anno fra loro una infinita connessione, finalmente non si staccassero, e la corda non si rompesse.

Egli è per tanto manifesto, che crescendo sempre più la lunghezza della fune, mentre non resti spezzata dal peso, può giungere la sua tenacità a pareggiare il momento BE del grave, come accade per cagion d'esempio nel punto C, ed anche a superarlo, come in tutti i punti inferiori.

Posto il peso nel sito B, la sua gravità BE opera senz'alcuna diminuzione, e s'impiega tutta a produrre nella massa D il primo grado di moto: ma giunto che sia al punto O, dall'azione costante della gra-

vi-

vità MO fa di mestieri sottrarre la reazione NO dell'elastro; così che la forza della gravità in due si divide: una parte NO se ne spende contro la tenacità della fune, e l'altra sovrabbondante MN in accelerare il moto del corpo D, che discende.

Pervenuto il peso al punto C, essendo ivi pari l'azione della gravità, e la reazione della corda, espresse entrambe dall'ordinata FC, la celerità d'esso mobile nè accresciuta nè diminuita lo fa trascorrere uno spazio infinitesimo con moto equabile. Nei punti poscia più bassi, come nel sito K, la tenacità PR dell'elastro supera la gravità costante QR, e succede, ch'essendo maggiore la resistenza ritardante della forza accelerante, una porzione, vale a dire PQ, se ne spende a distruggere l'impeto impresso, che il grave discendendo s'aveva acquistato, finattantochè viene totalmente estinto nel punto D dalle innumerabili resistenze crescenti, delle quali è scala il trilineo FHG.

Non è difficile a concepirsi, qualmente dopo la discesa segua l'ascendimento della palla D; conciossiachè costituita questa in riposo nel luogo D, viene spinta abbasso dalla forza più debole DG, e tirata all'insù dalla più gagliarda DH, con cui la corda procura di restituirla. La porzione dunque HG purgata da ogni contrasto di reazione contraria è quella, che principia a comunicare il moto alla sfera verso B, il quale viene accelerato per tutto il tratto DC dalle sollecitazioni espresse dalle ordinate PQ ec. che tutte insieme formano l'area FHG. Ma l'impeto acquistato viene poi estenuato dalle iterate azioni della gravità, che fra li punti C, B è sempre maggiore della forza, per cui la fune si accorcia; di modo che prescindendo dall'imperfezione dell'elastro, e dalla resistenza dell'aria, rimonterebbe il globo fino al punto B, ed ivi si troverebbe di bel nuovo posto in quiete, per tornar a discendere, e continuare all'infinito le reciprocazioni.

Io giudico, che la materia, su cui versiamo, sia oltre ogni credere delicata, e perplesso; laonde chi non ista bene attento cade facilmente in qualche equivocazione. Andrò dimostrando alcuni Teoremi, che serviranno a liberarci dai pregiudizj.

TEOREMA I.

Pervenuto che sia il peso B al sito D, dove cessata la discesa comincia esso a disporfi alla salita; io dico, che il rettangolo BEGD è precisamente uguale all'area BFHD.

La gravità costante BE con impressioni uniformi accompagna il globo B per tutto lo spazio BD, e perciò la somma di tutte queste sollecitazioni ci viene rappresentata dal predetto rettangolo BG: ma nella massa B ridotta allo stato di quiete nel punto D non si ravvifa alcun effetto cagionato dal cumulo delle mentovate impressioni; dunque egli è d'uopo che sieno state distrutte dalle replicate resistenze, con cui vi si ha opposto la tenacità della fune. Frattanto le resistenze crescenti ci vengono espresse dalle ordinate della curva BFH, e la loro

som-

280
 somma dall' area della curva medesima; per la qual cosa essendo l'aggregato delle azioni eguale, e contrario all' aggregato delle reazioni, si raccoglie, che il rettangolo BEGD è uguale all' area BFHD. lo che ec.

Facendo uso del computo per confermare l' addotta verità, pongasi la gravità costante $BE = g$, la tenacità variabile della corda $= t$, gli spazi crescenti $BO, BD = s$, le loro flussioni $= ds$, le velocità del globo per esempio in O, ed $R = u$, e le loro differenze du . Per i noti canoni delle forze continuamente applicate avremo $gds = tds = mudu$,

e sommando $gs = \int tds = \frac{mu^2}{2}$: ma nel punto D per l' ipotesi è la

velocità $u = 0$; dunque $gs = \int tds$. In questo mentre essendo nel caso nostro $s = BD$, col prodotto gs si esprime il rettangolo BG; e coll' integrale $\int tds$ la intiera area BFHD; per ciò sono fra loro eguali le due menzionate superficie.

COROLLARIO I.

Saranno similmente uguali i due trilinei BEF, FHG; laonde rappresentandoci il primo la scala di tutte quelle forze derivate dalla gravità costante, che libere dalle resistenze accelerano il globo B per lo spazio BC, ed il secondo la scala delle sollecitazioni negative, che estinguono l' impeto concepito, s' inferisca, che l' aggregato delle impressioni, per cui si comunica ad un mobile una data celerità, come CI, è uguale alla somma di tutti gl' impulsi contrarij, da quali essa velocità resta distrutta.

COROLLARIO II.

Pongasi, che il grave sia disceso per lo spazio BO, in tal caso dal rettangolo BM si rappresenta la somma di tutte le impressioni uniformi partecipare dalla gravità, dalle quali sottratte le resistenze, che sono tutte contenute nel trilineo BNO, resta il trapezio misto BEMN, che ci dinota l' aggregato di tutte quelle sollecitazioni, dalle quali viene accelerato il globo B per il tratto BO; così che il quadrato della velocità OS acquistata nel punto O, si trova essere in data ragione all' area BEMN.

Similmente il quadrato della celerità, da cui resta affetto il mobile nel punto R fra li due termini C, e D, è in data proporzione alla differenza, che passa fra i due trilinei BEF, FPQ, cioè a dire all' area del mistilineo QPHG.

CO-

COROLLARIO III.

Le forze morte sollecitanti il peso B per l' abscissa BC purgate dalle resistenze sono contenute nel trilineo BEF, ed operano in maniera tale, come se la suddetta massa B piombando liberamente nel vano, venisse successivamente accelerata dalla stessa scala d' impressioni, mentre nell' uno, e nell' altro caso, dopo trascorsi eguali spazi si troverebbe affetta dalla medesima velocità.

COROLLARIO IV.

La curva, che colle sue applicate ci mette sotto gli occhi le velocità del grave B, il quale cala abbasso per lo spazio ED, è una spezie d' ellissoide BID. La celerità, che nel punto B è nulla, vassi aumentando fino al punto C, a cui corrisponde la massima CI. Quindi di mano in mano si fa minore, fino a ridursi a nulla nel punto D. E si noti, che la medesima curva, la quale serve per la discesa, prescende le abscisse al rovescio principiando dal punto D, ci rappresenta altresì le velocità acquistate nella salita.

TEOREMA II.

Prendasi per mano un' altra funicella più corta ab , che dalla prima AB non sia differente in conto alcuno, salvo che nella diversa lunghezza; io dico, che per istirare ambe esse corde proporzionatamente, così che sieno le distensioni BC, bc in ragione delle lunghezze AB, ab , ci vogliono somme tali di forze morte, che serbino fra loro la medesima proporzione.

Col premesso giro di discorso proverò, che la distensione bc equivale a tutti gl' impulsi della gravità contenuti nel trilineo $bnfe$: ma questo all' altro BNFE sta come bc : BC, o come ab : AB, conforme ho dimostrato altrove; dunque per avere gli stiramenti bc , BC proporzionali alle lunghezze delle corde, si richiedono aggregati tali di forze sollecitanti, che sieno nella stessa ragione: il che ec.

COROLLARIO I.

La distensione BC non dipende dalla velocità CI, da cui si trova animato il grave B nel punto C; ma bensì da quella forza, che avrebbe aggiunta al mobile B la celerità IK, quand' esso fosse liberamente disceso, e ch' è stata consumata contro la tenacità della fune, appunto per ciò, che allo stesso grave non è stata comunicata. La cosa mi sembra evidente; imperciocchè se la gravità costante BE non fosse stata impedita, accelerando il globo B per lo spazio verticale BC, avrebbe

Opera Ricc. T. III.

N n

in

in esso certamente impressa la celerità CK, il cui quadrato si trova proporzionale al rettangolo BEFC: ma realmente nel punto C il peso non cammina, salvo che colla velocità CI, il cui quadrato sta in data ragione al trilineo BNFE; dunque la restante azione della gravità esposta dall'area BNFC, o dalla differenza fra i due quadrati CI, CK s'è consumata nello stiramento della corda elastica.

COROLLARIO II.

Stando il grave immoto sospeso nel punto C, allora si fa l'equilibrio tra la tenacità della corda, ed il peso B, venendo ambe queste forze morte esposte per la medesima ordinata CF. Ogni qual volta la fune liberata dal grave B principia a restituirsi, altrà forza nel primo istante non può impiegarsi, fuorchè la morta CF: ma con eguale forza morta il corpo B viene stimolato alla discesa; dunque niuna di queste potenze prevalerà; non essendoci motivo, per cui prevaglia piuttosto l'una che l'altra. Il lodato Signore tira una precipitosa conseguenza, ed è, che alla forza morta del peso B non avvalorata in conto alcuno dal moto debba attribuirsi il totale effetto dello stiramento BC; quasi che la gravità non abbia operato in tutti i punti di mezzo per esempio in O, in cui ci ha spesa una parte del suo vigore espresso per ON.

COROLLARIO III.

S'aggiunge inconveniente ad inconveniente; attesochè malamente dal mio riverito Avversario si confondono le forze vive, e le morte, e l'energia della percossa coll'azione semplice della gravità. E' manifesto, che senza moto non può mai allungarsi la corda AB; dunque per far l'effetto ci vuole una forza viva, o sia una morta nel caso nostro variabile infinite volte replicata: e se così è, come mai può paragonarsi questa forza con una sola sollecitazione del grave B, la quale si sa essere infinitamente più picciola, esprimendosi la prima per l'area BNFC, e la seconda per un elemento infinitesimo dell'area stessa?

S C O L I O.

Per maggiormente dilucidare la materia, e toglier di mezzo ogni ambiguità, dispongo le predette funi AB, ab (Fig. 92.) in sito parallelo all'Orizzonte, colla condizione, che i punti A, a sieno fermamente raccomandati a due chiodi, e gli altri B, b sieno liberi. Alla estremità b della più corta ab attacco il corpo (m) animato dalla velocità (a), il quale camminando per un piano orizzontale perfettamente liscio, impieghi tutta la sua forza impressa in distendere la corda sino al punto c, ove pervenuto si ritrovi in quiete.

E

E' cosa manifesta, che giunta a tal termine la massa (m), quella forza viva, che in essa risiedeva, s'è interamente consumata nello stiramento; e perciò se l'azione è uguale alla reazione, e la causa produttrice all'effetto prodotto; dee si conchiudere, che tutte le resistenze della funicella sieno equivalenti all'energia del corpo (m), la quale da esse viene successivamente per così dire assorbita.

Ed in fatti la corda ab col rimettersi in virtù della sua molla, restituisce alla palla (m) ritornata in b la sua primiera velocità, di maniera che nel primo caso la massa in moto fa la figura di cagione agente, e la tenacità di effetto resistente; e nel secondo l'azione sta dalla parte della fune elastica, e la reazione dalla parte della massa (m), che cangiando stato passa dalla quiete al moto.

Ora se per allungare proporzionalmente amendue i nervi, anno ad impiegarsi forze uguali, conforme l'opinione, che da me si combatte, basterà applicare al punto estremo B della corda più lunga AB la stessa massa (m) fornita della medesima velocità (a), onde per questo mezzo s'ottenga la distensione BC proporzionale alla maggiore lunghezza AB. Che ciò possa mai succedere, io per me nol credo, nè mi persuado, che il mio dotto Avversario sel creda.

Descritte le due scale delle tenacità crescenti bnf, BNF anno esse la proprietà, che partite l'abscisse bc, BC in data ragione nei punti analoghi o, O, sieno eguali le ordinate on, ON, le quali ci rappresentano tanto le tenacità delle corde nei siti o, O, quanto i pesi, che ci vogliono per mantenerle stirate, e far sì, che non comincino a ricuperare le loro primiere dimensioni.

Ricorriamo in questo mentre alle comuni formole da tutti i Geometri ricevute, ed avremo per una parte $rds = mudu$, e per l'altra $RdS = MVDV$, e sommando, non ommessa l'aggiunta della costante,

$$c = \int rds = \frac{mu^2}{2}, C = \int RdS = \frac{MV^2}{2} \text{ ma nei punti } b, B \text{ le}$$

due quantità integrali $\int rds, \int RdS$ si trovano $= 0$, e di più $u = a$ ed $V = A$; dunque le costanti, che nella doppia integrazione debbono aggiungersi, sono $c = \frac{ma^2}{2}$, e $C = \frac{MA^2}{2}$. All'incontro essendo per l'i-

potesi ambe le velocità u, V affatto estinte nei punti c, C ci si presenteranno due altre equazioni $ma^2 = 2 \int rds$; $MA^2 = 2 \int RdS$: e giacchè $r = R$, e come bc: BC, o come ab: AB, così ds: dS; avrà luogo anche il seguente analogismo ab: AB:: ma^2 : MA^2 .

N n 2

Quindi

Quindi per fare, che le funi ab , AB . soffrano le distensioni bc ; BC proporzionali alle loro lunghezze, prese ad arbitrio le masse (m), (M), debbono ad esse comunicarsi velocità tali (a), (A), che i prodotti (ma^2) (MA^2) sieno fra loro in ragione delle lunghezze medesime. Ciò supposto, chi mi contende, che per avere i divisi effetti non possa io mettere in opera due masse, le quali si rispondano in proporzione di $ab:AB$? ed in tal caso farà di mestieri, che le menzionate masse vengano animate da pari celerità, onde sia $a=A$. Appresso è cosa manifesta, che le forze vive di due corpi, i quali camminano con eguali velocità, sono proporzionali alle masse; dunque resta evidentemente conchiuso, che per allungare proporzionalmente le nostre due corde, si richiedono due forze vive, che fra loro si corrispondano in ragione delle lunghezze.

Assunte poi eguali le masse (m) (M), egli è d'uopo per le premesse formule, che si rinvenivano in proporzione delle lunghezze ab , AB , non già le velocità semplici (a), (A), ma bensì i loro quadrati (a^2) (A^2). Frattanto le forze vive, che debbono adattarsi alle corde, si sono già dimostrate almeno in un caso particolare proporzionali alle predette lunghezze; dunque generalmente, ed in tutti gl'incontri esse forze vive si trovano essere in ragione composta semplice delle masse, e duplicata delle velocità, o come i quadrati delle celerità, se sono uguali le masse.

Sarebbe una specie di paradosso, che per ottenere i medesimi effetti, avessero ad applicarsi forze tali, che serbassero ora una proporzione, ed ora un'altra; quasi che la reazione d'un nervo elastico, che sempre persevera la stessa, dovesse stare in guardia, e discernere da qual sorta di forza ad un pari stiramento viene ridotta, per opporsi secondo le regole dei Cartesiani una volta con maggiore, e l'altra con minore contrasto.

SCHEDIASMA XXV.

Confutazione dell'ipotesi, che due corpi dotati di eguali quantità di moto urtando in due corde del tutto eguali le ripieghino per eguali saette.

Sieno due funi elastiche fg , FG (Fig. 93.) della stessa materia di pari lunghezza, e grossezza, ed ugualmente stirate, sopra le quali cadano le palle a , A da sublimità tali ab , AB , che giunte in b , B abbiano acquistata una pari quantità di moto; onde le masse a , A si rispondano in proporzione inversa delle velocità in b , B , ch'io chiamerò u , U . Fingasi, che dall'azione d'esse sfere si pieghino le corde ugualmente, e dopo estinto da una parte, e dall'altra tutto il moto, si riducano alle posture simili, ed uguali fdg , FDG : si proponga d'investigare, quali conclusioni nascano dalla premessa ipotesi.

1. Siano pervenuti i due globi alli punti c , C ; così che si dia uguaglianza fra le saette bc , BC : parmi cosa chiara, ch'essi avranno perdute quantità di moto, per produrre i restanti effetti uguali, e far passare le corde delle distensioni uguali feg , FCG alle maggiori, ma uguali fdg , FDC . In fatti se le predette funicelle fossero disposte in sito orizzontale, e ridotte alle lunghezze pari feg , FCG , per incurvarle quanto portano le saette uguali cd , CD , sarebbe d'uopo giusta la nostra ipotesi, che fossero investite dalle palle a , A , in cui risiedessero quantità di moto minori bensì delle prime, ma però eguali.

2. Quindi ne siegue, che chiamate nu , mU le velocità residue in c , C , avremo $anu = AmU$: ma $au = AU$; dunque $n = m$, e conseguentemente le velocità costanti nu , nU come le primitive u , U .

3. Seguitino ad operare i nostri globi per gli spazj uguali, ed infinitesimi ce , CE , ed essendo le velocità restanti ne' punti e , E (n. 2.º) in proporzione costante, cioè $nu - ndu : nU - n dU :: u : U$; dunque posti eguali, ed ugualmente distanti dalli punti b , B gli elementi ce , CE delle abscisse, avremo le flussioni negative delle ordinate alle curve delle velocità decrefcenti in data ragione di $u : U$.

4. I tempi impiegati dalle sfere a , A in istendere ugualmente le due funi sono direttamente come le masse a , A . Nel camminare che fanno le palle per gli spazj uguali, ed elementari ce , CE ci spendano i tempi minimi dt , dT , i quali sono in ragione composta, diretta degli spazj ce , CE , ed inversa delle velocità nu , nU , da cui restano affette le masse ne' punti c , C : ma le masse, che sono per l'ipotesi in proporzione reciproca delle celerità primitive u , U , si trovano essere altresì nella medesima ragione (n. 2.º) colle residue nu , nU ; dunque $a : A :: dt : dT :: Ndt : NdT$: la qual analogia verificandosi sempre, sia N numero finito, o infinito (perchè un pari numero d'elementi uguali ce , CE si contiene tanto in bd , quanto in BD) ne siegue, che siccome $a : A :: t : T$.

5. In questo mentre le resistenze r , R ; che si oppongono al moto dei globi nei punti c , C moltiplicate rispettivamente ne' tempi elementari mentovati dt , dT , che si spendono in percorrere gli spazj minimi, ed uguali ce , CE , sono per i principj del Galileo eguali alle flussioni delle quantità del moto, che per una parte, e per l'altra si perdono dalle due sfere, nel ridurre le corde dagli stiramenti uguali feg , FCG agli altri uguali feg , FEG ; dunque $rdt = - andu$, ed $RdT = - AndU$, cioè $rdt : RT :: andu : AndU$: ma $dt : dT :: a : A$ (n. 4.º), ed $ndu : n dU :: u : U :: \frac{1}{a} : \frac{1}{A}$ (n. 3.º); dunque $ra : RA :: au : AU :: \frac{1}{a} : \frac{1}{A}$.

3, ed in conseguenza $r : R :: u : U :: \frac{1}{a} : \frac{1}{A}$.

6. Nella ipotesi pertanto, che da me si va esaminando, non solamente le resistenze delle due corde ridotte alle distensioni pari feg , FCG

FCG non farebbono uguali, siccome vuole la ragione; non sapendosi assegnare il perchè l'una sia dell'altra maggiore; ma quello ch'è peggio, si potrebbero fissare in qualunque ragione, che più ci piacesse d'eleggere. In fatto potendo io assumere le masse in qualsivoglia proporzione ad arbitrio, e non ostante ciò lasciarle cadere da tali altezze, che comincino ad agire contro ambo le corde con una quantità di moto costante, ed $= au$, o sia AU ; accaderà, che in differenti supposizioni le resistenze r , R si risponderanno con relazioni affatto diverse; tutto che le distensioni sieno pari: non già perchè si mutino le forze, alle quali le nostre funi fanno contrasto, ma perchè stando ferme le medesime forze, si vanno cangiando le masse, e le velocità.

7. E se così è, le quantità del moto eguali au , AU non producono effetti pari consumandosi intieramente. Sarebbono questi uguali, ogni qual volta l'aggregato di tutte le resistenze della corda fg fosse uguale all'aggregato di tutte le resistenze dell'altra corda FG : ma presi ad arbitrio i due punti c , C corrispondenti alle saette uguali bc , BC , e lo stesso dicasi di tutti gli altri, la resistenza della prima in c a quella della seconda in C sta come $\frac{1}{a} : \frac{1}{A}$ (n. 5.); dunque tutte le resisten-

ze della prima a tutte della seconda sono nella stessa ragione di $\frac{1}{a} : \frac{1}{A}$.

ed essendo per la supposizione a minore di A ; il cumulo delle resistenze della fune fg è maggiore del cumulo delle resistenze della fune FG ; dunque la forza della palla a , che supera un maggior contrasto, è più grande di quella dell'altra palla A , con che si distrugge totalmente l'ipotesi.

8. Ma quando s'abbia l'egualità $au^2 = AU^2$ giusta il canone Leibniziano, non s'incontrano assurdi. In questa sentenza le velocità restanti in c , C sono in ragion inversa dimidiata delle masse, cioè $nu : nU :: ndu : nU :: \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{A}}$, i tempi del moto per eguali spazj ce , CE

in ragione subduplicata delle masse medesime $dt : dT :: t : T :: \sqrt{a} : \sqrt{A}$, e finalmente nell'equazioni $rdt = - andu$, $RdT = - AndU$, o sia nell'analogismo $rdt : RdT :: adu : AdU$, surrogati i valori già trovati, $r\sqrt{a} : R\sqrt{A} :: a : A$, cioè $r : R :: \frac{a}{\sqrt{a}} : \frac{A}{\sqrt{A}}$. In ordine a ciò si

scoprono uguali le resistenze r , R , come esser debbono.

9. In poche parole dimostro per altra strada il principio Leibniziano. Giacchè le due resistenze uguali in c , C moltiplicate nelle differenze uguali degli spazj ce , CE sono per il canone noto uguali ai momenti delle velocità, ch'io chiamerò x , y , dalle quali restano affette le

le palle a , A ne' punti c , C ; moltiplicati essi momenti per le masse corrispondenti, avremo $rdS = - axdx$, ed $RdS = - Aydy$, ed integrando non ommessa l'aggiunta delle necessarie costanti, $\int rds = p - \frac{ax^2}{2}$,

$\int RdS = p - \frac{Ay^2}{2}$: ma nei punti b , B , mentre le saette s sono $= 0$,

le velocità residue x , y non sono diverse dalle primitive u , U ; Regolate pertanto le due formule, sarà $\int rds = \frac{au^2}{2} - \frac{ax^2}{2}$,

$\int RdS = \frac{AUU}{2} - \frac{Ay^2}{2}$: ma nel fine del moto, vale a dire ne' punti

d , D , sono le velocità variabili x , ed y ambe $= 0$; dunque in tale circostanza, dappoichè s'è consumata nel produrre l'effetto tutta l'energia di ciascuna palla, avrassi $\int rds = \frac{auu}{2}$, $\int RdS = \frac{AUU}{2}$: ma

$\int rds = \int RdS$ per l'uguaglianza, che passa fra gli aggregati delle resistenze r , R ; dunque $auu = AUU$, conforme richiede la regola del Leibnizio.

SCHEDIASMA XXVI. (*)

Della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte.

CHI si farebbe mai dato a credere poter le scienze Matematiche poggiar tant'alto, che giungano sino a misurare le interne sensazioni della nostr' Anima? Ma se si rifletterà trovarsi in queste il più, ed il meno, e restar conseguentemente abbracciate dall'idea generale della quantità; si scoprirà, che con profitto può la Geomtria applicarci le sue figure; e l'Analisi i suoi canoni.

Pri-

(*) Questo Schediasma assieme coll'Annotazione del Sig. Ab. Co. Girolamo Lioni uscì alle stampe l'anno 1722. nel primo Tomo de' Supplementi al Giornale de' Letterati d'Italia.

Prima di tutto mi pongo a considerare una delle nostre fibre destinate dalla Natura a ricevere le impressioni delle cose esterne; e perchè è stata disposta, e collocata in maniera, che di traverso, ed in tutti i punti di sua lunghezza viene pressa, e sollecitata da forze assolute uguali, dovrà inarcarsi, e piegarsi in una curva del genere dell'elastiche. Il dottissimo Inglese Taylor parlando delle corde sonore, che percosse tremano, ed oscillano, s'è preso il pensiero d'investigare l'indole, e le proprietà: supponendosi però, che sia inassegnabile il massimo allontanamento della corda dall'asse del moto, di modo che non si muti la forza della tensione con accrescere la lunghezza del nervo teso, riesce la sua soluzione talmente limitata, e ristretta, che mal può adattarsi al nostro disegno.

Nella materia, su cui pretendo di versare, sono, s'io non m'inganno, superflue queste analitiche sottigliezze, mentre per una parte ci fanno entrare in un laberinto di computi, e per l'altra la curva cercata, senza l'aiuto di qualche arbitraria limitazione, è difficilissima a determinarsi. Siam dunque concesso il battere la strada più piana, e procedere con una Geometrica semplicità. In fatti le fibre de' nostri organi non sono elleno fisicamente minime? e quando sono obbligate dall'azione degli obbietti esterni a cangiarsi di rette in curve, non è forse ugualmente impercettibile la differenza, che passa tra l'arco della curva, e le due toccanti, che lo stringono, e con seco si confondono? Ora se la piccola fibra AB (Fig. 94.) ricevendo in ogni suo punto le impressioni della forza agente, viene altrettanto a prendere pressimamente la figura inflessa ADB; lo stesso effetto potrebbe prodursi da un impulso determinato, che tutto raccolto nel mezzo, contro il solo punto C esercitasse la sua azione.

S'esprima questa forza per la retta DH, e prolungata la metà della fibra BD verso I, si tiri la retta HI parallela all'altra metà DA; onde si formi il triangolo isoscele DIH, dal cui vertice I si lasci cadere sopra la DH la perpendicolare IG. Quindi dal centro B all'intervallo BC si descriva l'arco di cerchio CE, il di cui seno retto sia CF normale alla secante BD.

Fatta questa preparazione, egli è certo, che la forza rappresentata per la retta DH si risolve nelle due forze collaterali DI, IH, la prima delle quali tirando la metà BE della fibra con la direzione BDI cagiona la distensione ED, e la seconda, essendo parallela all'altra metà AL, produce con pari forza la distrazione uguale LD. Ora per abbracciare sotto una sola formula tutti i casi, è noto in primo luogo, che tese due fibre in tutto eguali, fuorchè nella lunghezza, da potenze uguali, le distensioni saranno come le lunghezze. 2. Che stirate ugualmente due fibre pari in lunghezza, ma di diverso diametro, le forze applicate saranno in ragion duplicata de' diametri stessi. 3. Che tese due fibre perfettamente uguali secondo la direzione delle fibre medesime da due potenze differenti, non c'è noto con qual legge rispondano le forze alle distensioni; onde si dovrebbe supporre con una ge-

ne.

nerale espressione la distensione data per una funzione indeterminata della potenza. Ma perchè in qualunque modo l'accennata relazione si esprima, cioè per le ascisse, e per le ordinate di qualsivoglia curva, almeno, quando le distensioni saranno minime, la proporzione nascente della curva locale non farà sensibilmente diversa dalla sua tangente; ne segue, che per le conseguenze fisiche da dedursi in progresso, cioè per il prossimo, se non per l'esatto, potremo valerci dell'ipotesi semplicissima, che le distensioni s'erbino sempre la ragione delle potenze.

Se ne può addurre in prova l'esperienza delle corde sonore, le quali battute o leggermente, o con violenza, appena mutano tuono: segno manifesto, che tutte le loro oscillazioni si fanno in tempo eguale; essendo proposizione notissima, e già dimostrata, che l'isocronismo intanto può aver luogo, in quanto si verifica il canone, che le forze tendenti sieno proporzionali alle distensioni. Se dunque negli strumenti da suono s'ammette la legge come vera, ed un orecchio musico fra le massime, e minime vibrazioni di una stessa corda a gran pena può discernere la differenza d'un coma; non so vedere, perchè abbia a rigettarsi, quando si tratta delle sensazioni dipendenti dalle distrazioni delle nostre fibre, che quanto sono più piccole, tanto meno dall'addotta legge si discostano.

Premesso ciò, combinando insieme le mentovate proporzioni nelle fibre della stessa materia, le distensioni saranno in ragion composta, diretta delle potenze tendenti, e delle lunghezze, e reciproca delle grossezze. Nel caso dunque nostro la distrazione DE sarà come il prodotto ID. CB diviso per la grossezza della fibra, che io chiamerò g : ed essendo che l'angolo CBD si suppone minimo, l'intercetta DE si trova uguale al seno verso EF, com'è facile a dimostrarsi; dunque DE, o pure DF doppia di DE farà come la quantità $\frac{ID \cdot BC}{g}$:

q

militudine de' triangoli IDG, CDF, avremo $ID : DG :: CD : DF$, la qual analogia ci darà l'equazione $\frac{ID \cdot DF}{CD} = DG$, o surrogata in

cambio della ID la grandezza equivalente $\frac{g \cdot DF}{BC}$, farà DG come $\frac{g \cdot DF^2}{CD \cdot BC}$:

ma il rettangolo BDF è sempre uguale al quadrato della saetta DC, cosichè $BD \cdot DF$, o per essere DE minima, $CB \cdot DF = CD^2$; dunque sostituiti opportunamente i valori, $\frac{g \cdot DC^2}{CB^2}$ come DG, o pure DH: ed

290
in conseguenza la potenza ID, o la distensione DE come la quantità

$$\frac{2}{DH} \cdot CB, \text{ il che ec.}$$

$$\frac{2}{83}$$

Limitando l'espressione alla sola corda, o fibra AB inflessa dalla potenza DH supposta variabile, troveremo essere la facetta CD, come la radice quadrata della forza relativa ID, o della distensione DE, o pure come la radice cubica della forza assoluta DH, e conseguentemente il quadrato DH come il cubo ID, o sia DE. Se ci fosse frattanto chi bramasse una formula più rigorosa, e precisa, sebbene meno elegante, per le distensioni della stessa fibra; proceda col seguente metodo, che agevolmente può estendersi a tutti i casi, e rendersi universale. Ponga $DI = x$, $IG = z$, $DG = y$, e $CB = a$ unità, e stabilita la distensione $DE = u$ data in qualsivoglia modo per la forza DI. o sia x applicata direttamente, osservi, che per la similitudine de' due triangoli DIG, DBC si verificherà la seguente analogia $DI, x \text{ IG}, z :: DB,$

$$a \div u : BC, a; \text{ dunque } \frac{ax}{a \div u} = z, \text{ ovvero } \frac{xx}{\frac{a \div u}{a \div u}} = zx = xx - yy, \text{ e}$$

$$\text{conseguentemente } yy = xx - \frac{xx}{\frac{a \div u}{a \div u}} = \frac{2uxx \div uuxx}{a \div 2u \div uu}, \text{ il che ec.}$$

Si noti, che supponendosi minima la $u = DE$, svaniranno nell' omogeneo di comparazione della nostra equazione i seguenti termini, cioè nel numeratore il termine $uuxx$, ch'è infinitamente minore dell'altro $2uxx^2$, e nel denominatore i due membri $2u, uu$, che comparati colla quantità costante a sono inassegnabili. Resterà pertanto yy ad uxx in data proporzione, e adottando l'ipotesi, che le distensioni u sieno come le forze x , avremo $y^2; ax^3$ in ragione costante, come nella prima formula.

L'esperienza s'accorda prossimamente, e quanto basta col nostro canone; imperocchè avendo io tesa con forza orizzontalmente una breve corda di metallo, e legatala strettamente a due punti immobili, adattai al punto di mezzo un grave pendente da un sottilissimo filo, che piegasse la corda, e formasse la facetta non maggiore d'un dito; per ottenere una facetta doppia, era d'uopo, che ci applicassi un peso otto volte più grande.

Dalla formula ritrovata, quantunque semplicissima, m'ingegnerò di dedurre alcune verità importanti per la Fisica, che riusciranno forse nuove, ed inaspettate. Primo bramerei pure d'introdurre nella scienza delle

291
cose naturali un gran principio; che mi verrà facilmente ammesso da quelli, che si sono presi il pensiero d'unir la Fisica alla Geometria; e consiste in ciò, che la Natura, o per dir meglio, il suo sapientissimo Autore fa sempre tutto ciò, che sta ben fatto, e che attese le circostanze, far meglio non si potrebbe: dal qual assioma, che si vede messo in pratica in quel poco, che con l'aiuto delle Matematiche potiamo capire intorno il mirabile meccanismo delle cose naturali, e che si dee giudicare aver luogo anche in quel molto, per non dirlo infinito, che supera la nostra capacità; io tiro una evidente dimostrazione dell'esistenza d'una mente infinita, che tutto opera, e tutto dispone, contro la greggia de' seguaci d'Epicuro, e di Stratone.

Applicando al nostro caso il principio, era di necessità, che l'Anima unita al corpo, e col suo mezzo a tutto il mondo materiale, venisse ammonita di tutto ciò, che si fa al di fuori, e formasse almeno un giudizio confuso delle impressioni più fiacche, e più robuste, che passano a lei per lo canale de' sensi. Il criterio non poteva essere esquisitamente distinto, perchè non c'è vera proporzione fra l'esterne operazioni degli obbietti, e gl'interni sentimenti della mente. Negli obbietti non c'è, che materia, forza, e moto; negli organi, che tensione, e resistenza; nell'anima poi tutto è affezione, tutto senso, tutto coscienza, che si chiama, secondo la varietà de' membri del nostro corpo, che ne ricevono l'impressione, o luce, o suono, o dolore, o che so io, come prima d'ognuno, ed anche dello stesso Cartesio, ha notato nel suo Saggiatore l'incomparabile Galileo. Non ostante ciò le nostre sensazioni, quantunque d'una sfera superiore ai sintomi della materia, doveano da questi prender norma, e crescere, o sminuirsi a misura non già della maggiore, o minore attività degli oggetti, ma bensì dell'impressione più debole, o più forte, che si riceve negli organi. Questo canone debbe ammetterli per incontrastabile in ogni sistema, tanto nell'antico, e comune, quanto ne' moderni delle cagioni occasionali, o dell'armonia prestabilita; mentre quand'avesse luogo una diversa proporzione, la legge, con cui si lega l'anima al corpo, sarebbe affatto arbitraria, e nulla avrebbe che fare il senso col sensorio.

Ed in vero essendo le fibre de' nostri sensi un non so che di mezzo fra gl'impulsi esterni, e le interne affezioni, ed essendo ugualmente esposte all'azione degli obbietti fiacchi, e vigorosi, se venissero o compresse, o stirate direttamente, di modo che le sensazioni corrispondessero in proporzione all'energia degli agenti estrinseci; accaderebbe, che la Natura o le avrebbe formate molli, delicate, e capaci di risentirsi ad ogni debole impressione, ed in tal caso non avrebbero potuto reggere agli urti gagliardi; o pure lavorandole robuste, e forti sarebbero state insensibili a' tocchi più languidi.

Venendo poi destinate all'uno, ed all'altro uffizio, come richiedeva alla nostra conservazione, ed alla nostra maggior perfezione, era necessario, che la Natura le disponesse in maniera, che ricevessero non direttamente, ma di traverso gl'impulsi degli oggetti; onde stabilito

prima un giusto equilibrio tra l'impeto esterno, e la resistenza interna del sensorio, in virtù del canone generalissimo delle forze composte, quanto più fosse vigoroso l'agente, altrettanto nell'applicare obliquamente la sua azione perdesse di vigore, e quanto fosse più fiacco, altrettanto a proporzione della propria forza operasse con maggiore energia.

E qui si noti per togliere di mezzo ogni ambiguità, che mentre non si adatti la forza esterna a stirare direttamente le fibre, come talvolta può succedere, la sua virtù dall'applicazione obliqua viene sempre avvalorata; essendo in ogni incontro le due forze laterali DI , IH maggiori della Diagonale DH , a cui si vanno sempre più accostando, quanto essa va più crescendo, senza però mai potersi pervenire ad una perfetta egualità, se non in caso, che la forza DH diventasse infinita, e la fibra fosse per impossibile capace d'una infinita distrazione. La maggior parte dunque degli obbietti farebbono poca impressione ne' nostri sensi, se non venisse accresciuta la loro azione, con le leggi però, e dentro i limiti, che si anderanno spiegando.

Per mettere in tutto il suo lume la verità, si replichi la fibra AB in ab (Fig. 94. 95.), e fingasi, che dalla forza db minore di DH , venga piegata fino in d ; onde abbiassi la nuova fetta ed , e la distensione de . Fatta la preparazione come sopra, dalla risoluzione della forza db risulterà la forza id , che tirando direttamente la semifibra be , cagionerà la distensione ed . Quindi essendo la tangente cd minore di CD , farà l'angolo cdl , o l'opposto al vertice idg , maggiore del corrispondente CDB , o pure IDG . Facciassi l'angolo kdg uguale all'altro IDG , e per la similitudine de' due triangoli rettangoli IDG kdg avrassi l'analogia $kd : dg :: ID : DG$, ed in conseguenza $DG : dg$, o sia $DH : db$ avrà maggior proporzione di $ID : id$, oppure di $De : de$. La forza pertanto minore db , che si risolve nelle due laterali id , ih , operando con la forza id , cagiona a proporzione maggior distrazione nella mezza fibra be , di quello faccia la forza più grande DH , che agisce con la forza ID contro la metà della fibra uguale BE .

Presa di bel nuovo per mano la nostra generale espressione, sia $DH : db :: 8 : 1$, e sarà $ID : id :: DE : de :: 4 : 1$, di modo che fissate le forze degli oggetti in proporzione ottupla, le sensazioni si corrisponderanno in ragione quadrupla, e chi volesse una sensazione ottupla dell'altra bisognerebbe, che la virtù dell'oggetto più forte fosse ventidue volte maggiore di quella del più debole.

2. Con un solo artificio però non ottiene la Natura un sol fine; ma molti, ed ugualmente mirabili. Avendo ella esposte obliquamente le nostre fibre all'azione degli oggetti, che sono fuori di noi, ottiene, che non solamente raffrena la gagliardia de' più robusti, ma acquiesce la debolezza de' più fiacchi, e fa che si senta, per dir così, l'insensibile.

Si danno alcuni suoni, o per favellare esattamente, certi tremori dell'aere così languidi, che nelle nostre orecchie non producono suono. Si danno certe pressioni dell'etere, o certi tocchi di luce tanto delicati, che nel fondo de' nostri occhi non formano senso di luce; e la ragione si è, perchè la sollecitazione delle fibre è sì fattamente minima, che riesce totalmente impercettibile. La Natura però ha corretto il disordine, se non quanto vorrebbe la nostra curiosità, almeno quanto richiede la nostra conservazione; e se certi impulsi deboli non si distinguono, segno è, che non ponno recare a noi nè profitto, nè nocumento. Frattanto i nostri sensi ricevono perfezione da ciò, che le loro fibre vengono di traverso spinte, e percosse. Supponiamo, che la distensione d'una fibra non si renda sensibile, se non allora quando arriva ad essere, per esempio, una parte determinata di tutta la sua lunghezza, e collocata la fibra ab nel sito verticale VX . (fig. 95., 96.), la distensione XY , che si finge la più picciola fra le sensibili, sia effetto della potenza YZ , che tira direttamente. Egli è certo per l'ipotesi, che sminuita la forza YZ , succederebbe bensì qualche distrazione, ma della linea delle impercettibili: sicchè dunque tutti gli agenti men vigorosi non farebbero soggetti alla giurisdizione del nostro sensorio. Che se la fibra si trova orizzontalmente disposta in ab , o in qualsivoglia altra positura, di modo che sia voltata verso l'oggetto, viene in tal caso a dilatarsi la sfera del sensibile, ed una impressione molto più debole della già determinata YZ , acquistando forza, giugne a farsi sentire. Si applichi alla suddetta fibra ab la potenza db , che formi la distensione de uguale alla metà di XY , ed avremo id uguale a YZ , e per la similitudine de' due triangoli idg , bdc , come $bd : dc$ così $id : dg$, o pure $id = YZ$ $db :: bd : 2dc$; così che supposte le due fibre ab , UX ugualmente stirate, saranno le potenze YZ , db in ragione della secante bd alla doppia tangente dc .

S'intenda ab , o UX divisa in parti 200., e sia $XY = ed + dl = 2$ (ipotesi, in cui s'assume farsi allora la minima delle sensazioni, quando la fibra cresce per la centesima parte della sua lunghezza) la tangente dc sarà prossimamente diece; dunque $YZ : db :: 100 : 20$: dal che si deduce, che se per fare una impressione sensibile nella fibra verticale VX vi si richiede la forza YZ , basterà una sola quinta parte di essa nell'esempio addotto per distendere ugualmente una fibra situata di traverso, e per produrre una sensazione.

3. Non debbo tralasciare un'altra curiosa osservazione. Supponiamo, che la minima distrazione d'una fibrella, di cui potiamo esser consapevoli, di modo che sarebbe a noi totalmente insensibile, se fosse più picciola, s'esprima con l'unità; e supponiamo in oltre, che ad una distensione centupla non possa la fibra senza suo nocumento resistere: egli è chiaro, che fra la minima, e la massima sensazione della medesima spezie passerà la proporzione come cento ad uno. Se le sensazioni rispondessero esattamente alla forza degli obbietti, ne seguirebbe, che nell'addotta ipotesi tutto il sensibile resterebbe ristretto fra

que-

294
 questi due limiti cento, ed unità. La Natura però non rinchiede fra così angusti termini la sfera delle cose sensibili; imperocchè essendo le distrazioni delle fibre, e conseguentemente le sensazioni come le radici cubiche de' quadrati delle forze estrinseche, accadrà, che limitate le sensazioni, per esempio come uno a cento, s'amplicherà la linea del sensibile come uno a mille. Quindi sperimentiamo, che il nostro udito si risente ad un legger sibilo, e tollera i rimbombi de' tuoni, e delle bombarde; e la nostra vista sensibile ad un barlume riflesso, sopporta senza suo danno la luce d'un grand' incendio, nè si dà per vinta, se non allo sfrenato splendore del Sole.

4. Io non voglio internarmi a quistionare cosa sia quella molesta sensazione, che dolore s'appella, e che fu definita ottimamente dal grande Sant'Agostino *compassio mentis ex corpore, & in corpore*. Consista pure o nella soluzione del continuo, o nel moto disordinato degli spiriti animali, o nel violento stiramento delle fibre; egli è manifesto, che quando gli organi dalla forza d'un agente troppo gagliardo mal si difendono, e tesi oltre il dovere o si rompono, o corrono rischio di rompersi, si sente certamente il dolore. E' manifesto altresì, secondo l'opinione dell'ingegnosissimo Borelli, che i fughi spiritosi dimoranti nel midollo de' nervi ponno facilmente essere irritati, in quanto agitati da un moto perturbato, ed irregolare si portano a scuotere con disordine le fibre delicatissime del cervello, onde nasce la passione convulsiva, cui diamo nome di dolore. Comunque vada la faccenda, io dico, che la Natura ha procurato di risparmiarci al possibile un sentimento, quanto necessario alla nostra conservazione, perchè ci ammonisce di ciò, che fuggir si debbe; altrettanto molesto, perchè non potiamo sottrarci ad un male, senza sperimentarne un'altro. Ha fatto ciò col metter freno agli oggetti oltre modo robusti, e col diminuire la loro energia, alle nostre fibre obliquamente applicandoli.

Ripigliando l'ipotesi altre volte fatta, il vigore esterno può crescere dall'unità fino al mille senza nocimento dell'organo, in cui le distensioni crescono con altra legge dall'unità fino al cento, e quando queste crescessero a proporzione degli agenti esterni, una forza poco più maggiore della centupla sarebbe sufficiente a guastare, ed a rendere inutile il sensorio.

5. Con le dottrine premesse rendo facilmente ragione d'alcuni fenomeni naturali. Usciti noi di notte tempo da una camera ben illuminata all'aria poco meno che oscura, e tenebrosa, restiamo per qualche spazio privi dell'uso della vista, finattanto che l'occhio assuefatto a quel debole barlume ritorna a far il suo ufficio, ed a distinguer gli obbietti. Dagli Ottici se ne ascrive comunemente la causa alla variazione del diametro della pupilla, che in passando dalla luce più forte ad una più debole, vassi a poco a poco dilatando. La ragione è buona, ma non la giudico sufficiente. Direi di vantaggio, che durante l'impulso del lume maggiore, di cui s'era imbevuto l'occhio, e per cui nelle fibre della retina s'era fatta una certa distensione; prima che que-

295
 questa si restituiva interamente, il barlume languido della notte non fa impressione sensibile. Si può confermare il detto con una sperienza rapportata dal Signor della Hire il Giovine, ed accennata in simil proposito anche dal Sig. Abate Girolamo Lioni nella vita di Monsignor del Torre pag. 65. 66. Introdotto questi di giorno in una camera oscura, in cui conservava un barometro luminoso, nello scuoterlo, ch'egli fece, non vide lume di sorta alcuna, e sospettò, che l'effetto avesse solamente a succedere di notte; ma fermatosi per qualche spazio di tempo nella camera, e sollecitato di bel nuovo lo stromento, vide a comparire il consueto chiarore, e conchiuse, che l'impressione della luce diurna, che rimosso l'oggetto si mantiene nell'organo, era stata la cagione, per cui non avea da principio potuto distinguere la luce languidissima, che si genera da bilanciamenti dell'argento vivo, e forma un delicatissimo Fosforo.

Sieno per esempio due luci in ragione come uno ad otto: quando agiscano separatamente, le sensazioni, che per la nostra regola saranno come uno a quattro, corrisponderanno fra loro con una proporzione sensibile. Uniscansi le predette due luci, e si faccia un lume come nove, la sensazione, che ne risulterà, sarà ella maggiore delle due come tredici a dodici prossimamente, ed appena l'una dall'altra potrà distinguerli.

Per lo motivo addotto succede, che svanisca agli occhi nostri il lume d'una face' alla presenza del Sole; che ingombrata l'orecchia da un grave rimbombo non s'odano i suoni fievoli; che reso stupido un membro, senta meno il dolore. Accade all'opposto, che la mano troppo riscaldata giudica fredde le cose tepide, ed intirizzata dal freddo sente con rincrescimento un calor blando; a' quali fenomeni altri se ne potrebbero aggiugnere, che col mezzo degli accennati principj felicemente si spiegano.

6. Ne' Fanciulli le fibre sono più picciole, e più molli. Per quello riguarda la grandezza, se fossero proporzionali alla mole del corpo, ed in conseguenza simili a quelle degli uomini, richiamata a memoria la nostra formula $gDC^3: DH$ (Fig. 94.) sarebbe g come CB^2 cioè la

grossezza come il quadrato della lunghezza; e perchè la forza DH sta come la sezione delle fibre medesime, o come il rettangolo della lunghezza nel diametro della fibra; stante che a misura di queste due dimensioni ricevono l'impressione dagli oggetti esterni, avremo sempre $DC^3: CB: DH :: DC^3: CB^3$, o pure $DC^2: CB^2$ in ragione costante: ma $DC^2 = BC \cdot DF$; dunque costante altresì sarà la proporzione di DF , o DE a BC ; laonde le distensioni saranno come le lunghezze. Per questo capo dunque le sensazioni d'un Fanciullo non saranno differenti da quelle d'un uomo: ma fatta la riflessione essere le fibre d'un Fanciullo più delicate, e più capaci di distensione, ed oltre di ciò, che il capo con tutti i suoi organi, a proporzione dell'altre membra, è più grande ne' giovanetti che negli adulti; si conchiuderà, che le

le sensazioni de' fanciulli sono più vive di quelle degli uomini: anzi negli uomini stessi in quella guisa, che di rado si trovano due volti affatto simili, si dee credere, che per lo più le loro fibre sieno di differente struttura, e che ognuno abbia, al pari della Fisonomia, le sue particolari sensazioni. Io ne ho in me medesimo la prova, mentre la Natura mi ha posto in fronte due occhi dissimili, come altre volte ha fatto col celebre Pietro Gassendo; il destro de' quali è ben conformato, e perfetto, ed il sinistro vizioso, e presbite. Con questo vedo gli oggetti non solo più rimoti, più piccioli, e manco distinti, ma di più la luce stessa, il che fa a nostro proposito, mi comparisce alquanto più smorta, ed i colori più languidi, e più diluti. Correggo ad arbitrio il difetto della grandezza, e della confusione con l'uso d'una lente convessa; ma per questo nè la luce si fa più viva, nè il colore più florido, indizio manifesto esserci fra le fibre dell'uno, e dell'altro occhio una diversità organica.

7. In passando dalla gioventù alla vecchiezza, le fibre non si mutano di grandezza, acquistano però una certa rigidità, che le rende meno atte alla distensione. La rigidità di due fibre per altro eguali in mole, ed in gravità specifica, o la loro resistenza ad esser distratte, altronde non può misurarsi, che dalla forza, cui si richiede per prodursi in essa una pari distrazione.

Sia per tanto AB (Fig. 94., 97.) la fibra d'un'uomo giovane, e quella d'un vecchio egualmente lunga, grossa, e pesante, ma più indurata, e meno flessibile. S'adatti ad ambe la stessa potenza DH, e si pieghi la prima sino in D, e la seconda sino in Q; onde sia la facetta CD maggiore della facetta OQ, e la distensione DE maggiore della distensione QP. Vada crescendo la forza DH applicata alla fibra MN sino a diventare RT; di modo che si facciano eguali le facette RO, DC, e le distrazioni RS, DE. Supposta la solita preparazione, essendo simili due triangoli isosceli DIH, RUT, avremo l'analogia $TR:HD::VR:ID$, vale a dire come le forze assolute, così le collaterali direttamente applicate a stendere ambedue le fibre; dunque come le potenze TR, HD, così la rigidità delle fibre medesime: ma come il quadrato della potenza TR al quadrato della potenza HD, così il cubo della distensione $RS = DE$ al cubo della distensione QP; dunque supponendo, che gli oggetti esterni agiscano contro le fibre AB, MN con egual forza, come la rigidità della fibra MN a quella della fibra AB, così reciprocamente $DE:\sqrt{DE}:QP.\sqrt{QP}$, cioè i quadrati della rigidità saranno in proporzione inversa de' cubi delle distensioni.

Le durezza pertanto delle fibre, o la loro resistenza alla distrazione ricrescono con una legge, e le distensioni e le sensazioni decrescono con un'altra; così che più aumentano le rigidità di quello calano le sensazioni, e con un mirabile artificio della Natura meno si perde nel senso, che nel sensorio. Il senso de' vecchi si fa di giorno in giorno più ottuso, ma non quanto richiederebbe la rigidità delle lor fibre, che sebbene s'indurano, non lasciano però d'essere più sensibili di quello si converreb-

be

be alla lor durezza. Se farémò poi osservazione; per quello particolarmente riguarda il senso della vista, che gli occhi de' vecchi diventano presbiteri, onde gli oggetti appariscono minori in vecchiezza, che in gioventù, e che parimente le impressioni della luce, e de' colori, a causa dell'induramento delle fibre, si fan più languide; termineremo questa Fisco-Matematica ricerca con una riflessione morale, ed è, che invecchiando noi, il mondo sensibile si va per noi successivamente, ed insensibilmente perdendo.

ANNOTAZIONE

Del Sig. Abate Conte

GIROLAMO LIONI.

IL Sig. Conte Jacopo Riccati nella sua dissertazione della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti, accennò aver notato l'incomparabile Galileo nel suo Saggiatore avanti il Cartesio, che negli obbietti v'è solo materia, forza, e moto, e che le affezioni sensibili riseggon nell'anima con vario nome di luce, di suono, ec., secondo la varietà de' membri del nostro corpo, che ne ricevono l'impressione. In prova dunque d'una tale verità, ed acciocchè alcuno non creda doversi al Cartesio, come pur troppo è invalso, la lode di aver tirata la prima linea in una tale speculazione, più precisamente diciamo averci chiaramente il detto Galileo nel Libro di sopra riferito insegnato, che i Sapor, Odori, Colori ec. per la parte del soggetto; nel quale par, che riseggano, non sono altro, che puri nomi, ma tengono lor residenza solamente nel corpo sensitivo; sicchè rimosso l'animale, sieno levate, ed annichilate tutte quelle qualità. E' così mirabile in via di metodo la spiegazione, che fa l'Autore del suo concetto, che si possono riscaldare (come si suol dire) queste vivande, e sperare, che riscaldate conferiscano più che mai allo stomaco de' Filosofi.

Comincia egli da un'affezione, la quale per essere la più materiale, si può dire, che si tocca con le mani. Muove la sua destra ora sopra una statua di marmo, ora sopra un uomo vivo: dipoi osserva, che essendo l'azione rispetto alla mano la medesima sopra l'uno, e sopra l'altro soggetto, se l'affezione fosse della mano, essa sarebbe all'uno e all'altro comune. Ma perchè vede star ferma la statua, e risentirsi a quel toccamento l'uomo, conchiude essere l'affezione tutta dell'uomo, e niente della mano.

Da questa sensazione più materiale passa ad un'altra un poco più delicata. Con la mano va leggermente toccando un uomo vivo ora in una parte del corpo, ora in un'altra. Osservando, poi che l'uomo toc-

Opere Ricc. T. III.

P p

co

co in alcune parti del corpo sente solo il comun toccamento, e tocco in alcune altre, per esempio sotto le ascelle, sente un'altra affezione chiamata solletico, la discorre così. Se oltre il moto avesse la mano in se un'altra facoltà, cioè il solleticare, si sentirebbe questa affezione in qualunque parte del corpo si movesse la mano. Ma perchè si sente il solletico in una parte, e non si sente nell'altra, ne ricava la medesima conclusione di prima.

Seguitando poi sempre a passare dal più materiale al più delicato, una penna, dic' egli, leggermente fregata sopra il nostro corpo, fa quanto a se da per tutto la medesima operazione; e pure in noi toccando sotto le narici eccita una titillazione quasi intollerabile, ed in altra parte appena si fa sentire. Onde rinnovato l'argomento conchiude essere quella titillazione tutta di noi, e non della penna.

Dall'esempio del nostro Autore potiamo dunque imparare il vero metodo di filosofare. Ci fa egli prima toccar con le mani, che è tutta ne' corpi animati l'affezione chiamata tatto, indi passando sempre dal più semplice al più composto, s'avvicina a poco a poco, e quasi per gradi a' sensi più delicati. Il tatto (seguita egli) fatto dalla solidità della materia, par, che abbia riguardo all'elemento della Terra. E perchè alcuni corpi di questa si vanno continuamente risolvendo in particelle minime, delle quali altre, come più gravi dell'aria, scendono al basso, ed altre più leggeri salgono all'alto, di qui nascono due altri sensi; mentre quelle vanno a ferire due parti del corpo assai più sensitive della pelle, che non sente l'incurfione di materie così sottili. Que' minimi dunque, che scendono, ricevuti sopra la parte superiore della lingua arrecano i sapori, gli altri, che ascendono, entrando per le narici vanno a ferire certe mammillule, che fanno sentire gli odori. E ben si veggono providamente disposti, quanto al sito, la lingua, ed i canali del naso; quella distesa di sotto per ricevere l'incurfione, che scendono; e questi accomodati per quelle, che salgono. Da questi sensi, che riguardano l'elemento della terra, passa col metodo di sopra indicato al senso de' suoni, che pare di maggiore delicatezza, giacchè riguarda l'elemento dell'aria, quando da frequente tremore in minutissime onde increfpata muove certa cartilagine del timpano, che è nell'orecchio.

Quindi conclude, che ne' corpi esterni per eccitare in noi i sapori, gli odori, e i suoni, si richieggano bensì grandezze, figure, molitudini, e movimenti, ma tolti via gli orecchi, le lingue, e i nasi, restino le figure, i numeri, e i moti, non gli odori, nè i sapori, nè i suoni; i quali perciò fuori dell'animale vivente non sono altro, che nomi; come pure altro, che nome, non è il solletico, e la titillazione, rimosse le ascelle, e la pelle del naso.

Finalmente viene alla Vista, senso il più delicato degli altri, e mediante il suo metodo arriva a capire in un certo modo gli effetti, e le cause, non ostante che se ne intenda poco de' mezzi. In fatti della sensazione della vista, e delle cose attenenti ad essa, confessa d'in-

ten-

tendersene poco; ma ad ogni modo capisce, che nell'occhio la luce fa con la debita proporzione come nella lingua, e nel naso que' minimi, i quali eccitano i sapori, e gli odori, e come nell'orecchio l'aria ondeggiante, la quale eccita i suoni. Capito questo, il resto pone in silenzio, mostrando in questa parte il nostro Autore un carattere molto diverso da quello del Cartesio, mentre in vece d'ingombrare i libri con ipotesi dubbie, c'insegna più tosto a tacere. Di ciò, che tace il Galileo, si credeva, che avesse abbastanza parlato il Signor Nevvton nel suo famoso libro della Generazione dei Colori, ma giacchè dalla Lettera Diottrica del Signor Giovanni Rizzetto qui dietro stampata, vengono a quest'Autore chiuse le parole in bocca, noi ne restiamo ancora a digiuno. Solamente ci va lusingando la notizia, che in detta Lettera abbiamo, d'esserfi fatta la scoperta della generazione de' Colori apparenti; onde speriamo di veder in breve rivelata la generazione anche degli altri colori, che si chiamano permanenti. Intanto ritornando al nostro primo proposito, avremo con quest'Annotazione evidentemente dimostrato, che la sentenza tanto decantata, e comunemente attribuita al Cartesio intorno alle affezioni sensibili, che riseggon nella nostra anima, è nata prima in Italia, ed è stata pubblicata dal Galileo nel suo Saggiatore.

ANNOTAZIONE DELL'EDITORE.

I. SI restringe l'Autore a vane ipotesi nel premesso Schediasma, e primieramente suppone, che la forza $DH = f$ (Fig. 94.) dell'obbietto esterno agisca tutta raccolta nel punto medio C della fibra $AB = 2L$, di modo che essa fibra in virtù dell'azione della forza DH prenda la figura triangolare ADB . Suppone in secondo luogo, che essendo nulla la forza P tendente la fibra nella sua naturale positura ACB , la distensione $ED = l$ sia prodotta dalla forza DI nascente dalla nota risoluzione della forza DH . Suppone finalmente, che gli allungamenti $ED = l$ serbino sempre la ragione delle potenze DI . Ora giacchè ci è riuscito nell'Annotazione allo Schediasma XXIII. di scoprire le vere relazioni fra le distensioni $ED = l$, e le forze, che direttamente le generano; abbiamo presa risoluzione di maneggiare la cosa con maggior generalità, non ritenendo, salvo che la prima fra le tre supposizioni del Conte Jacopo.

Trovare la proporzione fra le saette, e le forze applicate a Squadra alla metà delle corde appoggiate a due scannelli, e raccomandate a due chiodi immobili.

II. Al punto di mezzo C della corda $AB = 2L$ raccomandata a due chiodi immobili A, B, e tesa da una forza equivalente al peso d to P s'applichi con direzione normale ad AB la forza $DH = f$ la quale produca la saetta $CD = s$; si cerca la relazione fra la forza f , e la saetta s .

Tolta in prestanza la preparazione dal nostro Autore, riflettiamo, che la semicorda $BD = BE + ED = L + l$ è tesa nella positura ADB da una forza, o peso $DI = P + p$ maggiore di quello eguale a P, che la stirava nella situazione ACB, per la quantità accresciuta p , da cui, conforme a ciò che abbiamo spiegato nella citata Annotazione, è stato prodotto l'allungamento ED. Chiamisi b la rigidità naturale della corda nel sito ACB, e la mentovata Annotazione c' insegna

effere $\frac{1}{2} \frac{b+2P}{L} \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{1}{2} \frac{bL}{L} = P+p$ (1). La similitudine dei tri-

angoli BDC, IDG suggerisce l'analogia $DG : DI :: DC : BD$;

$$\frac{1}{2} f : P+p :: s : L+l$$

da cui deducesi l'equazione $\frac{P+p}{L+l} \cdot s = \frac{1}{2} f$. (2). Finalmente il trian-

golo rettangolo BCD ci somministra la formola

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$$

$$L+l = \sqrt{L^2 + s^2} \quad (3)$$

Nella equazione (2) in cambio di $P+p$ si sostituisca il suo valore preso dalla equazione (1), e si avrà, adempiuti i necessarij calcoli,

$$\frac{b+2P}{L} \cdot \frac{s}{L+l} - \frac{bL}{L+l} = f. \text{ In vece di } L+l \text{ pongasi il suo valore}$$

contenuto nella equazione (3), e si scoprirà

$$b + \frac{2P}{L} \cdot \frac{s}{\sqrt{L^2 + s^2}} - \frac{bL}{\sqrt{L^2 + s^2}} = f$$

$$\frac{b+2P}{L} \cdot \frac{s}{L+l} - \frac{bL}{L+l} = f \quad (4), \text{ formola, che esprime}$$

la relazione cercata fra le saette s , e le forze f , che le producono.

III. Per maggiormente confermare la verità della nostra formola poniamola al cimento dell'esperienza. Da essa formola si deduce quest'altra $b = \frac{L^2 f + L f s^2 - 2 P L^2 S - 2 P S^3}{S^3}$ (5); Ora perchè qualunque

benchè menomo sbaglio, che si commetta nel misurare la saetta s , porta grandissimo divario nel valore della naturale rigidità b della corda ACB, tesa dalla forza equivalente al peso P; fa d'uopo rettificare il valore della saetta s prodotta dalla forza f , paragonando assieme i suoni delle due semicorde CB, DB. Il suono, o numero n di vibrazioni, che fa la corda CB per esempio in un secondo, s'eguaglia all'unità divisa per il tempo t , durata d'una d'esse vibrazioni espressa in parti di secondo, onde abbiassi l'equazione $n = \frac{1}{t}$. Ma nelle cor-

de fisiche di massa m , che si vibrano di traverso;

$$f = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P, \frac{36}{24} \frac{17}{24}}} \cdot \frac{113}{355}, \text{ dinotando le quantità } \frac{36}{24} \frac{17}{24} \text{ la lunghezza}$$

d'un pendolo a secondi, e $\frac{113}{355}$ la proporzione del diametro al circolo;

$$\text{dunque } n = \frac{\sqrt{P, \frac{36}{24} \frac{17}{24}} \cdot \frac{355}{113}}{\sqrt{Lm}}. \text{ Ed essendo che relativamente a qua-}$$

unque corda le grandezze $\frac{36}{24} \frac{17}{24} \frac{355}{113}$ sono sempre costanti; ne se-

gue che generalmente il suono n come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Lm}}$. Se il peso, o forza ten-

dente P si mantiene costante, e la massa m della corda sta come la lun-

ghez-

ghezza L , ciò che interviene in corde, che non differiscono, salvo che nella lunghezza, allora si trova n come $\frac{1}{L}$, o sia il suono in ragione

inversa della lunghezza della corda. Se la massa m non si diversifica, ciò che succede nelle semicorde CB , DB , in tal caso si scopre n co-

me $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}}$, cioè in ragione composta, diretta dimezzata della forza ten-

dente P , ed inversa parimente dimezzata della lunghezza L . Abbiamo notate queste due circostanze; perchè verranno a festa nelle nostre esperienze.

IV. Si determinerà la proporzione fra i suoni n , N delle corde CB , BD col seguente metodo. Si prenda una corda acb (Fig. 98.) unisona alla ACB , si sottoponga ad essa uno scannello d in sito tale, che le corde db , DB si corrispondano all'unifono, e ne seguirà, che i suoni n , N staranno fra loro in ragione inversa di $cbadb$, onde si verifichi l'analogia $n : N :: db : cb$.

La dimostrazione è semplicissima. I suoni delle due corde cb , db tese dallo stesso peso, e che non differiscono, salvo che in lunghezza, serbano la ragione inversa delle lunghezze cb , db , ch'è quanto dire si corrispondono nella proporzione $db : cb$: ma le corde cb , db sono unisone alle corrispondenti CB , DB ; dunque i suoni n , N di queste ultime stanno come $db : cb$; il che ec.

V. Insegnata la maniera di scoprire la proporzione fra i suoni n , N , c'innoltriamo ad indagare, come per le spezie n , N , e per le altre quantità date si possa esprimere il valore della faetta $CD = s$. Essendo pari la massa delle corde CB , BD , le lunghezze come $L : L + l$, i pesi tendenti come $P : P + p$, avremo per le cose dette nel numero

$$\text{III } n : N :: \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{P+p}}{\sqrt{L+l}}, \text{ o sia } n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{P+p}{L+l} : \text{ ma con-}$$

forme si è fatto vedere superiormente (num.II.), $\frac{P+p}{L+l} = \frac{1}{2} \frac{f}{S}$; dunque

sostituito questo valore in cambio di $\frac{P+p}{L+l}$ nella sovrapposta analogia, si

avrà

$$\text{avrà } n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{1}{2} \frac{f}{S}, \text{ e conseguentemente l'equazione } \frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S \quad (6)$$

VI. Al punto medio C della corda d'ottone AB situata orizzontalmente, la cui semilunghezza $CB = 30$ mezz'oncie, e la forza tendente P equivalente ad oncie 140., attecchiamo il peso, o forza $DH = f = 4$, la quale produsse la faetta $CD = s$, che con diligente misura trovammo eguale a $\frac{3}{7}$. I suoni n , N delle semicorde CB , DB ,

usato il metodo esposto al numero IV. li ritrovammo corrispondersi nella ragione 119. 120. Quindi si verificava essere $n^2 : N^2 ::$

$$\frac{119^2}{120^2}, \text{ o sia prossimamente } 118 : 120 :: 59 : 60., \text{ e passando all'equazione, } \frac{n^2}{N^2} = \frac{59}{60}.$$

te $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S$ in vece di $\frac{n^2}{N^2}$, di f , di L , e di $2P$ i valori sommi-

$$\text{nistratici dalla esperienza, avremo } S = \frac{59 \cdot 4 \cdot 30}{60 \cdot 2 \cdot 140} = \frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$$

La frazione $\frac{1}{140}$, per cui la faetta rettificata differisce da quella, che

s'è scoperta colla misura, sfugge la più scrupolosa diligenza da chi sperimenta, consistendo in $\frac{1}{24}$ di linea. Fatto uso del valore purificato

$$\text{della faetta } CD = S = \frac{59}{140} \text{ nella formola (5), si troverà dopo i ne-}$$

$$\text{cessarij computi } b = \text{ad oncie } 24054 = \text{a libbre } 2004 \frac{1}{2}, \text{ valore della}$$

rigidità naturale della corda ACB corrispondente al peso, o forza tendente $P = \text{ad oncie } 140.$

VII. Applicammo al punto medio C della corda ACB la forza $f = 15 \frac{3}{5} = 78$, la quale cagionò la faetta $CD = S$, che

accu-

accuratamente misurata si trovò eguale a $\frac{7}{5}$. I suoni n , N delle due

femicorde CB, DB serbavano la proporzione 11 : 12. Se per mezzo della relazione de' suoni cercheremo il valore della faetta, scopriremo $CD = S = \frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{224}$. La differenza $\frac{1}{224}$ si sottragge alla at-

tenzione de' più circospetti osservatori. Sostituisca nella formola (5) in cambio di b il valore determinato nel numero superiore, ed in vece di L , f , P le grandezze 30, $\frac{78}{5}$, 140 a norma della presente espe-

rienza, e poste in opera le regole per sciogliere le equazioni cubiche, ei si presenterà $S = \frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$. La $\frac{1}{150}$ parte di mezz'on-

cia consiste in $\frac{1}{26}$ di linea, divario totalmente inosservabile. Molto mi-

minore si è la differenza fra i due valori

$\frac{211}{150} = \frac{7}{5} + \frac{1}{150}$, $\frac{1573}{1120} = \frac{7}{5} + \frac{1}{124}$, il primo somministratoci dalla

nostra equazione, ed il secondo ricavato dalla proporzione fra i suoni delle due femicorde CB, DB. Chi volesse schivare l'imbroglione di disciferare la sovrapposta equazione (5) cubica, tenga un metodo inverso, e supposta $S = \frac{211}{150}$, cerchi il valore della rigidità b , che troverà

eguale ad oncie 24013, e pochissimo differente dall'altro determinato nel numero precedente eguale ad oncie 24054. La cagione di questa diversità dipende da qualche piccola adeguazione usata nello stabilire la grandezza della faetta $S = \frac{211}{150}$.

VIII. Quanto inosservabile è la differenza fra la faetta scoperta colla misura, e quella, che abbiamo ricavata dalla nostra equazione, altrettanto riesce menomissima l'alterazione, che la faetta $S = \frac{211}{150}$ in-

tro-

roduce nella proporzione dei suoni n : N , che s'è rinvenuta come 11. 12. Giacchè nel numero (V) abbiamo dimostrato essere $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = S$,

avremo per conseguenza $\frac{n^2}{N^2} = \frac{2PS}{fL}$, e fatti $P = 140$, $S = \frac{211}{150}$, si

troverà $\frac{n^2}{N^2} = \frac{1477}{1755}$. La differenza fra le ragio-

ni $\frac{1477}{1755}$, $\frac{121}{144}$ somministratici, quella dalla nostra formola, e questa

dalla osservazione, consiste nella frazione $\frac{212688}{212355}$, che prossimamente

equivale alle seguenti $\frac{639}{638}$. Se dunque fra le proporzioni dei quadrati

dei suoni n^2 , N^2 o ricavate dalla formola, o scoperte colla esperienza c'è il divario $\frac{639}{638}$; fra le ragioni dei suoni n , N passerà la diffe-

renza $\frac{638}{638} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1277}{1276}$, la quale, adempiuti i dovuti calcoli, si trova

equivale alla decimasesta parte d'un coma, minuzia, di cui l'orecchio non se ne accorge.

IX. Si conchiuda, che l'esperienza conferma la verità della nostra teorica, andando esse d'accordo con quella maggiore fisica adeguazione, che in così fatte indagini può mai sperarsi. Notiamo per altro, che se alla metà della corda AB si applicassero forze notabilmente maggiori della adoperata nell'esperimento secondo, ne risulterebbero faette alquanto più piccole di quelle richiede il nostro canone, perchè in esso s'è trascurata la resistenza, che patisce la corda ripiegandosi nei fitti A, D, B.

X. Affine d'internarci più a fondo nel magistero della Natura, la quale ha collocato le fibre in maniera, che ricevano di traverso le impressioni degli obbietti esterni, daremo prima la costruzione della for-

mola (4) $\frac{2P + b}{L} \cdot S = \frac{bLS}{L^2 + S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{bS^2}{L^2 + S^2} = f$, e fatte le do-

vute considerazioni sopra la relazione fra le faette S , e le forze f , che le producono, indagheremo quali conseguenze derivino dalla varia modificazione delle costanti P , b , L , che contrassegnano la tensione, la rigidità, e la lunghezza della fibra AB , mentre si trova in linea retta. C' inoltreremo poscia ad esaminare con simil metodo la proporzione fra le forze f , e le aumentazioni di tensione p da esse cagionate nella fibra AB .

XI. Segnate a Squadra (Fig. 100.) le linee $CF = L$, $FK = 2P + b$, per i punti C , K si tiri la linea CK , che si continui indefinitamente, ed a questa faccia perpendicolare KT , che taglia la linea CF prodotta nel punto T . Col vertice C , parametro CT , e colla condizione che le coordinate formino l'angolo CKF , descrivasi la parabola Apolloniana CQV . Si segni arbitrariamente l'assissa CG , e condotta l'ordinata GQ , che si continui in D , si delinei $CB = L$ parallela a DG , e congiungansi con una linea i due punti B , Q . Si tagli $FA = 2P$, onde resti $AK = b$, e si tiri AX normale KT . Determinata $CR = KX$, e descritta RZ parallela a BQ , faccia $HG = CZ$, ed il punto H apparterrà alla curva CHE , che si vuol descrivere, le cui assisse $CD = S$, e le ordinate $DH = f$. Per il punto B si meni BP parallela a CK , e si continui DG fino in P .

Per la proprietà della parabola CQU si verifica l'equazione $\frac{CG^2}{CT} = GQ$.

La somiglianza dei triangoli CDG , CFK , CKT ci somministra le analogie $CD : CF :: CG : CK$, $CD : CK :: CG : CT$. Dalla prima ricaviamo essere $CD : CK :: CD^2 : CF \cdot CG$, e quindi

la seconda prende il seguente aspetto $\frac{CD^2}{CF} : CF \cdot CG :: CG : CT$,

e ci dà l'equazione $\frac{CD^2}{CF} = \frac{CD^2}{CT}$. Avremo dunque $GQ = \frac{CD^2}{CF} = \frac{S^2}{L}$.

Aggiunta $GP = L$, si forma $PQ = L + \frac{S^2}{L} = \frac{L^2 + S^2}{L}$. I triangoli

simili QPB , RCZ suggeriscono l'analogismo

$PQ : PB :: GG : RC = KX : CZ$, da cui deducesi l'equazione $\frac{CZ}{PQ} = \frac{CG}{KX}$. Ma stante la similitudine dei triangoli CDG , KXA ,

abbiamo $CD : CG :: KX : AK$, e conseguentemente $\frac{CG}{KX} = \frac{CD}{AK}$; dunque $CZ = HG = \frac{CD \cdot AK}{PQ}$, o sia analiticamente $CZ =$

HG

$HG = \frac{bLS}{L^2 + S^2}$. Finalmente l'analogia, che ci vien additata dai tri.

angoli simili CDG , CFK , cioè a dire $CF : FK :: CD : DG$,
 $L : 2P + b :: S : \frac{2P + b \cdot S}{L}$

determina il valore di $DG = \frac{2P + b \cdot S}{L}$. Avremo pertanto $DH =$

$DG - HG = \frac{2P + b \cdot S}{L} - \frac{bLS}{L^2 + S^2}$; ma $\frac{2P + b \cdot S}{L} = \frac{bLS}{L^2 + S^2}$

f ; dunque posta $CD = S$, farà la corrispondente ordinata $DH = f$, il che ec.

XII. La nostra curva è fornita d'un altro ramo simile al CHE , nel quale tanto le faette S , quanto le forze f sono negative. Questo ramo serve per le faette Cd (Fig. 94) della corda AB . La linea $HG = \frac{bLS}{L^2 + S^2}$ (Fig. 100.) ha un massimo valore $KE = \frac{1}{2} b$ corrispondente

a $CD = S = CF = L$. In tale incontro la linea BQ tocca la parabola CQU nel punto U , e l'angolo CBQ , come altresì l'eguale CRZ ascende al massimo, e massima conseguentemente diviene la grandezza di $CZ = HG$.

Conciosiachè $DH = f = \frac{2P + b \cdot S}{L} - \frac{bLS}{L^2 + S^2} = \frac{2PS}{L} + \frac{bS^3}{L^3 + LS^2}$

e $DY = \frac{2PS}{L}$, formola nascente dall'analogia $CF : CD :: FA : DY$,
 $L : S :: 2P : \frac{2PS}{L}$

ne risulta $YH = \frac{bS^3}{L^3 + LS^2}$, valore della intercetta fra l'inclinata CA ,

e la curva CHE .

Quando le faette S sono minime, l'intercetta $YH = \frac{bS^3}{L^3 + LS^2}$ sco-

presi infinitesima del terzo grado, ed incomparabile con $DY = \frac{2PS}{L}$

Q q 2

inf:

infinitesima del primo grado. Cancellato adunque il termine relativamente nullo, ci si presenta $DH = DY = f = \frac{2PS}{L}$, ed in questo ca-

so le faette sono come le forze, verificandosi la proporzione $L : 2P :: S : f$. Non trascuriamo di avvertire, che la linea CA tocca la curva CHE nel punto C.

Se le faette divenissero infinite, ipotesi per altro, che non è fisica, trascurato il termine infinitamente picciolo $\frac{bLS}{L^2 + S^2} = HG$, si trovereb-

be $DH = DG = \frac{2P + b \cdot S}{L} = f$; espressione, da cui dedurrebbesi

l'analogia $L : 2P + b : S : f$, la quale c' insegnerebbe, che anche in tal circostanza le faette serberebbero la ragione delle forze. Egli è facile da scoprire, che la linea CK serve di asintoto alla curva CHEb, la quale giace tutta dentro l'angolo KCA.

XIII. Nei casi intermezzi, mentre cioè le faette sono finite, meno crescono, o scemano le faette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono, dovendosi per gradi passare dalla ragione $L : 2P$ alla più rimota $L : 2P + b$.

Per ciò dimostrare rigorosamente, sia $CD = S$, e conseguentemente $DH = f = \frac{2PS}{L} + \frac{bS^2}{L^2 + LS^2}$, Si segni $Cd = nS$, vale a dire im-

qualunque proporzione con CD , e si avrà $dh = F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + Ln^2S^2}$. Se le forze serbassero la ragione delle faette dovreb-

be essere $nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + LS^2} = F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + Ln^2S^2}$. Ora diciamo;

che posto $n > 1$, e per conseguenza $nS > S$, è parimente $F > nf$, e posto $nS < S$, è parimente $F < nf$, laonde meno crescono, o scemano le faette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono. Cominciamo dal provare, che ad $n > 1$ corrisponde F

$= \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + Ln^2S^2} > nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + LS^2}$. Se così è, tolto di

mezzo il termine comune $\frac{2PnS}{L}$, resterà $\frac{bn^2S^2}{L^2 + Ln^2S^2} > \frac{bn^2S^2}{L^2 + LS^2}$, e divi-

dendo per $\frac{bn^2S^2}{L^2 + Ln^2S^2} > \frac{1}{L^2 + S^2}$. Moltiplichiamo ambi i membri

per $L^2 + n^2S^2$. $L^2 + S^2$, e ci si presenta $n^2L^2 + n^2S^2 > L^2 + n^2S^2$; e sottratta la quantità comune n^2S^2 , $n^2L^2 > L^2$, o $n > 1$, conseguenza vera, e conforme all'ipotesi stabilita. Se si supponrà $n < 1$, ne seguirà essere $n^2L^2 < L^2$, ed indi tornando indietro per la strada ora calcata, si scoprirà $F = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + Ln^2S^2} < nf = \frac{2PnS}{L} + \frac{bn^2S^2}{L^2 + LS^2}$

XIV. Egli è per tanto manifesto, che stando dentro i limiti delle quantità finite, meno crescono, o scemano le faette, di quello crescano, o scemino le forze, che le producono: verità, che ottimamente si accorda colla esperienza. In fatti c' insegna l'esperimento sopra riferito al numero VI, che applicata al punto medio d'una corda, la cui semilunghezza $L = 30$, la forza $f = 4$, produsse questa una faetta, che con diligente misura si trovò eguale a $\frac{3}{7}$. Col mezzo della proporzione fra

i suoni della corda, mentre dimora in linea retta, e mentre sta in equilibrio colla forza f , la stessa faetta si scoprì eguale a

$\frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$, e questo valore s' è stabilito fisicamente giusto. Se

le faette crescessero in proporzione delle forze, si determinerebbe la faetta S generata dalla forza $F = \frac{78}{5}$ colla seguente analogia

$4 : \frac{59}{140} :: \frac{78}{5} : S = \frac{2301}{1400} = 8 + \frac{61}{280}$. Ricorrendo all'esperimento

descritto al numero VII. osserviamo, che la forza $\frac{78}{5}$ cagionò una fa-

etta, che o sia eguale a $\frac{7}{5}$, come si rinvenne colla misura, o a

$\frac{7}{5} + \frac{1}{224}$, come si trovò col mezzo della proporzione dei suoni, è

sempre notabilmente minore di $8 + \frac{61}{280}$. Con ragione adunque ab-

$$\frac{280}{5}$$

biamo poco fa asserito uniformarsi colla esperienza la legge, che non oltre passando i termini delle grandezze finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, onde vengono generate.

XV. Innoltriamoci alle conseguenze fisiche, e notiamo, che mentre le forze sono minime anche fisicamente, producono saette a se stesse proporzionali, e mantenendosi, come in progresso vedremo, adeguatamente costante la naturale tensione della fibra, fa questa le sue vibrazioni più, e meno estese nel tempo stesso, le quali risvegliano nell'anima sensazioni più, o meno forti, ma tutte aggradevoli. Che se la forza si aumenta soverchiamente, allora la fibra troppo si tira, e corre rischio di patir danno. Ad un tale inconveniente mette in parte riparo la legge, che mentre le forze non sono minime, più crescano le forze delle saette. La forza f generi la saetta S . Sia $2 \cdot S$ quella saetta, che comincia a danneggiare l'organo, e conforme che ci vuole una forza maggiore di $2f$ per produrre la saetta $2S$, ne segue, che la forza xf si dee contare nel numero di quelle, che non molestano la fibra.

XVI. Consideriamo presentemente le alterazioni, che cagiona nelle saette S la varia grandezza della rigidità b . Presa nuovamente per mano la formola $\frac{2PS}{L} + \frac{bS^2}{L^2 + LS^2} = f$, riflettasi, che posta la saetta S infinitesi-

ma, e stando la rigidità b dentro i termini del finito, la linea $YH = \frac{bS^2}{L^2 + LS^2}$ è incomparabile colla linea $DY = \frac{2PS}{L}$. Quindi in tale ipotesi,

qualunque sia il valore finito della rigidità b , la forza $f = DH = DY$ produrrà sempre la saetta costante $S = CD$.

Si fingano infinite le saette S , e allora si troverà $DH = DG = f = \frac{2P + b}{L} \cdot S$: formola, da cui si ricava, che nella detta circostanza

più cresce, o cala la rigidità b , di quello che all'incontro calino, o crescano le saette S generate dalla forza invariabile f . Ciò tanto maggiormente si verifica, mentre si tratti di saette finite.

Che

Che se queste si assumano minime fisicamente, quali sono, relativamente alla lunghezza delle fibre, le saette in esse operate dalle forze non nocive degli oggetti esterni; si cavi la conseguenza, che per diversificare notabilmente le saette prodotte da una forza data, bisogna, che le rigidità sieno fra loro in una proporzione molto lontana. L'esperienza c'insegna, che le sensazioni d'un uomo adulto sono più vive di quelle d'un vecchio, e meno vive di quelle d'un giovane. S'infersca adunque, che gran diversità ci ha da essere fra le rigidità delle fibre d'un adulto, d'un vecchio, e di un giovane, e si ammiri l'artificio dell'Autore della Natura, che ciò non ostante le sensazioni per una parte non s'ivaniscano, e per l'altra non divengano moleste. Merita d'essere distintamente avvertita la bellissima proprietà, che i discipoli dell'organo superano di gran lunga quei delle sensazioni.

XVII. Sia S la minima saetta, sino a cui faccia d'uopo incurvare una fibra di data massa, tensione, e lunghezza, perchè vibrandosi risvegli nell'anima una distinta sensazione. La forza f operi questa saetta nella fibra d'un uomo adulto, la cui rigidità b . Per produrre la stessa saetta nella fibra d'un uomo vecchio fornita di maggiore rigidità H , ci vorrà una forza più grande F . Quindi la forza primiera f genererà nella fibra del vecchio una saetta minore di S , a cui non corrisponderà sensazione distinta. In fatti osserviamo, che per farci intender dai vecchi bisogna alzare la voce, e che a quel lume fiacco, a cui legge un adulto, non legge un vecchio. Per la stessa ragione un lume ancora più tenue basterà a un giovane, e non ad un uomo adulto.

Ma questo vantaggio, che le fibre d'un giovane sieno più pieghevoli di quelle d'un adulto, viene compensato dal maggior pericolo, che dalla troppa azione delle forze esterne restino danneggiate. Suppongasì S la massima saetta, che non porta pregiudizio a una fibra. Venga questa prodotta dalla forza f nella fibra d'un adulto, la cui rigidità b . Egli è chiaro, che la stessa forza, innocente in riguardo all'adulto, recherà nocimento alla fibra più molle dell'uomo giovane, cagionando in essa una saetta maggiore di S , che si suppone la massima fra quelle, che all'organo non son nocive. Anno sperimentato in Bologna, che l'empito della materia elettrica, che per lo più non apporta danno agli uomini di età consistente, riesce ai giovanetti sommamente pregiudiziale.

Le fibre degli uomini sani, ed adulti sono nell'ottimo stato di perfezione. Le ha il Sapientissimo Iddio dotate di quella rigidità conveniente, onde faccia in loro una impressione sensibile, ma non nociva, la forza ordinaria di quegli oggetti esterni, con cui siamo in commercio, e dei quali importa alla nostra conservazione, ed al nostro ben essere, che ci accorgiamo. Prima di giugnere alla virilità, le fibre non sono ancora quanto basta robuste, per resistere a certe forze più vigorose. Quando poi c'incamminiamo dalla virilità alla vecchiezza, il mondo sensibile (per valerci d'una espressione, con cui da fine il nostro

Au-

Autore alla sua dissertazione) si va per noi successivamente, ed insensibilmente perdendo.

XVIII. Agli ammalati danno fastidio quegli oggetti, che in tempo di sanità riuscivano loro gratissimi. Nelle stanze degli infermi bisogna chiudere le finestre, parlar sottovoce, perchè la forza anche moderata della luce, e del suono gli offende. Questi effetti crediamo, che poco, o nulla dipendendo dalla rigidità, che nelle fibre degli uomini infermi si scemi, traggano principalmente l'origine dal minoramento della forza de' muscoli, che pongono in tensione le fibre, la quale forza da noi s'esprime per la lettera P. Disponiamoci adunque a far vedere a chi legge, quanto influisca nelle sensazioni l'alterazione di un sì fatto elemento.

XIX. Supposta nulla la forza P, che tira la fibra, mentre si trova in linea retta, svanisce nella Fig. 100. la linea FA = 2P, e la linea CA cade sopra la CF. Perciò in tale ipotesi avremo $YH = f = \frac{bS^2}{L^3 + LS^2}$,

e mentre S sia minima relativamente ad L, $YH = f = \frac{bS^2}{L^3}$, conforme

ha trovato il Conte Jacopo nel suo Schediasma.

Più conseguenze si possono dedurre dalla premessa formola, e primieramente per cagionare eguali saette in fibre di pari lunghezza, ci vorrebbero forze proporzionali alle rigidità. Che se la forza esteriore fosse costante, le saette starebbero inversamente come le radici cubiche delle rigidità. Quindi si scopre, quanto giovi alla buona economia delle sensazioni, che le fibre sien poste in tensione, avendo non ha molto osservato, che la diversa misura della rigidità altera pochissimo le piccole saette, che dalle fibre tese nell'oscillare si scorrono.

Serbando le forze la ragione dei cubi delle saette, non si compierebbero in pari tempo le vibrazioni più, o meno dilatate della stessa fibra; imperciocchè richiede necessariamente l'isocronismo, che le forze stieno come le saette, o come gli spazi da passarsi.

Finalmente le fibre non istirate riuscirebbero inettissime per oscillare, perchè in una vibrazione c'impiegherebbero un tempo infinito. Fingasi tutta raccolta nel punto D la massa della corda ADB (fig. 99.) ciò che non turba l'essenziale delle deduzioni. La scala delle forze sollecitanti riferite alle saette, o sia agli spazi da percorrersi sarebbe la parabola cubica CnN corrispondente all'equazione $\frac{L^3}{b} \cdot f = S^3$, le cui

ordinate DN, dn esprimono le forze, e le assisse DC, dc le saette. Sanno i Geometri, che la forza viva acquistata dalla corda AB, quando è ritornata nella positura ACB s'eguaglia all'area CDNnC, la quale è

le è proporzionale a DC^3 , ch'è quanto a dire ad una flussione infinitesima del quarto grado. Essendo finita la massa della corda concentrata in D, ne segue, che il quadrato della velocità nel sito C deve ascriversi al quarto ordine delle quantità minime, e che per conseguenza la detta velocità spetta al secondo grado degli infinitamente piccioli. Ora con una velocità, che al più giunge ad essere infinitesima dell'ordine secondo, non si può passare lo spazio DC minimo del primo grado, salvo che in tempo infinito. Se alle saette infinitesime si sostituiranno le fisicamente minime, agevolmente ci accorgeremo, che rimossa dalla linea retta ACB una fibra priva di tensione, si fermerebbe senza restituirsi nella situazione ADB.

XX. Abbandonata un'ipotesi non accettata dalla Natura, consideriamo variabile sì, ma sempre finita la forza tendente P. Mentre le saette sien minime, la formola $\frac{2PS}{L} = f$ m'insegna, che prese come

costanti la forza estrinseca f, e la lunghezza L della fibra, le saette S stannò reciprocamente come le forze tendenti P.

Supponendo infinite le saette, si verifica l'equazione $\frac{2P + b \cdot S}{L}$

$= f$, da cui possiam ricavare, che essendo date le quantità b, f, L, le saette S abbracciano la ragione inversa della somma della doppia forza tendente P, e della rigidità b. In tale circostanza meno crescono, o calano le saette, di quello che all'incontro calino, o crescano le forze tendenti. Le saette frattanto, per cui si ripiegano le fibre, s'accostano molto più al minimo, che all'infinito, e perciò quasi colla stessa proporzione, onde si minorano, o s'aumentano le tensioni, tutto al rovescio s'aumentano, o si minorano le saette. Quindi fondatamente abbiamo asserito al numero XVIII., che quel fastidio, che recano agli ammalati certi oggetti loro aggradevoli in tempo di sanità, dipende principalmente dal decrescimento della forza tendente.

Se la tensione s'ingrandisce smoderatamente (messo da parte il danno, che potrebbe patir la fibra) l'impressione della forza f scemerebbe talmente, che o lievissime, o nulle si risveglierebbero le sensazioni nell'anima.

Non tralasciamo d'avvertire, che se alquanto meno crescono, o calano le saette, di quello che al contrario calano, o crescono le tensioni, egli è tutto frutto della rigidità delle fibre, tolta di mezzo la quale, svanirebbe nell'equazione $\frac{2PS}{L} + \frac{bS^2}{L^3 + kS^2} = f$ il termine $\frac{bS^2}{L^3 + kS^2}$,

e le faette seguirebbero esattamente la proporzione reciproca delle forze tendenti.

XXI. I tempi delle vibrazioni di due corde egualmente lunghe, e di pari massa stanno inversamente come le radici delle forze tendenti. A norma di ciò se decreverà notabilmente la tensione delle fibre, oscilleranno queste più lentamente. Da un tale principio pensiamo, che proceda quella languidezza, che si osserva negli occhi de' moribondi.

XXII. Se le fibre sien simili, tese da forze proporzionali alle loro basi, composte di materia egualmente rigida, e fornite di massa proporzionale a quella degli organi, a cui devono partecipare il moto; l'elemento della varia lunghezza nulla influisce nella vivacità delle sensazioni. Le masse delle nostre fibre si corrispondono nella proporzione dei quadrati. Ed essendo che le tensioni P , e le rigidità h stanno come le basi; ne segue, che da loro la ragione dei quadrati L^2 delle lunghezze viene abbracciata. Nella stessa proporzione si riferiscono pure le forze esterne; stante che a misura delle superficie ricevono le fibre l'impressione degli oggetti, conforme al numero VI. riflette ottimamente l'Autore.

Ciò premesso diciamo, che le faette serbano la ragione delle lunghezze. In grazia della semplicità ci serviamo d'una dimostrazione indiretta. Sia adunque $S = nL$, cioè le faette come le lunghezze, e sostituito questo valore nella formola $\frac{2PS}{L} + \frac{bS^2}{L^3 + LS^2} = f$, troveremo $2n$.

$P + \frac{n^3}{1+n^2} \cdot b = f$. Ma i coefficienti $2n$, $\frac{n^3}{1+n^2}$ sono quantità costanti;

e tanto le tensioni P , quanto le rigidità h stanno come L^2 ; dunque f come L^2 : conseguenza, che va d'accordo col vero.

Si potrebbe agevolmente provare, che i tempi delle vibrazioni delle nostre fibre, anche per faette, che non sien minime, accettano la ragione delle lunghezze d'esse fibre, e si caverebbe poscia la conseguenza, ch'essendo i tempi proporzionali agli spazi, che si scorrono, e crescendo, o calando le velocità con pari legge, si trovano queste eguali in siti analoghi, di modo che le forze vive acquistate dalle fibre seguitano la proporzione delle loro masse. Ora dovendosi comunicare il moto ad organi, la cui massa è proporzionale a quella delle fibre, acquisteranno essi pari velocità, alle quali corrisponderanno sensazioni egualmente spiritose.

XXIII. Se le stabilite misure delle forze tiranti, e della rigidità si suppongono variate, vagliono le stesse conseguenze per noi dedotte, mentre abbiamo trattato delle fibre di eguale massa, e lunghezza, ma diversamente rigide, e diversamente tese. Fatta la riflessione, che la materia componente le fibre dei fanciulli è più molle di quella, onde consta.

stano le fibre degli adulti, si conchiuderà, che le sensazioni dei primi sono più vive di quelle dei secondi.

XXIV. Ne risulterebbero sensazioni diversamente vivaci, quando le masse delle fibre simili, rigide, e tese proporzionatamente, non si corrispondessero come le masse degli organi, a cui deve passare il tremito. Le fibre di maggiore, o di minor massa relativa sveglierebbero più, o meno brillanti le sensazioni.

XXV. Resta, che si dica qualche cosa delle fibre dissimili. Considerando la dissomiglianza nelle basi o troppo grandi, o troppo piccole, le quali anno parte nella determinazione della rigidità, egli è facile lo stabilire la proporzione delle forze esterne, e delle faette. Bisognerebbe poscia computare le forze vive guadagnate dalle fibre, e paragonarle colle masse degli organi, ai quali devono partecipare il moto, per dedurre la relazione fra l'energia delle sensazioni. Frattanto ci contenteremo di notare col Conte Jacopo, che in quella guisa, che negli uomini di rado si trovano due volti affatto simili, si dee credere, che per lo più le loro fibre sieno di differente struttura, e che ognuno abbia al pari della fisionomia le sue particolari sensazioni.

XXVI. Esaminata quanto basta la proporzione fra le forze f , e le faette S , ci accingiamo a confrontare colle stesse forze gli accrescimenti di tensione p , ch'esse producono nelle fibre. Gioverà questo paragone per indagare la fatica, che soffre l'organo, la quale sta in ragione composta, diretta delle aumentazioni di tensione p , ed inversa della forza P dei muscoli tiranti le fibre, cioè a dire come $\frac{p}{P}$.

Trovare la relazione tra le forze applicate a squadra al punto medio d'una fibra, e gli accrescimenti di tensione, ch'esse nella detta fibra cagionano.

Ripetuta la curva $CHEb$ (Fig. 101.), le cui assisse $CD = S$, e le ordinate $DH = f$, tiriamo a squadra di CD , e parallela a DH la linea $CB = L$. Condotta poscia la diagonale BD , e segnata $CN = \frac{1}{2}DH =$

$\frac{1}{2}f$, descriviamo NO parallela a DB . Nella HD prorogata tagliamo

$DI = NO$, e per il punto I , e per altri similmente determinati fatta passare la curva MIi , diciamo, che l'ordinata DI esprime l'intera tensione $P + p$, che patisce la corda CB , dopo che la forza DH ha in essa operato la faetta CD ; e che per conseguenza, sottratta $DR = P$, e deli-

R 2 nea-

neata MRr parallela a CD, il residuo RI s'eguaglia all'accrescimento di tensione p causato nella mentovata corda dalla forza DH.

Dai triangoli simili CDB, CNO si ricava l'analogia

$$CD : DB :: CN = \frac{1}{2} DH : NO = DI$$

$$S : L + l :: \frac{1}{2} f : \frac{\frac{1}{2} f \cdot L + l}{S}, \text{ che ci addita il valore}$$

$$\text{di } DI = \frac{\frac{1}{2} f \cdot L + l}{S}. \text{ Ma per l'equazione (2) contenuta nel numero II,}$$

$$\frac{P + p \cdot S}{L + l} = \frac{1}{2} f, \text{ o sia } \frac{1}{2} f \cdot L + l = P + p; \text{ dunque } DI = P + p;$$

il che ec.

XXVII. Egli è chiaro in primo luogo, che quando s'eguagliano a nulla la forza DH, e la saetta CD, è nullo parimente l'accrescimento di tensione RI, e perciò la nostra curva passa per il punto M.

In grazia delle conseguenze stimiamo opportuno di porre sotto gli occhi di chi legge la formola, in cui non si contengono, salvo che le due incognite f, p . Nell'ultima equazione si collochi in cambio di S

$$\text{il suo valore } \sqrt{2Ll + l^2}, \text{ onde s'abbia } \frac{1}{2} f \cdot \frac{L + l}{\sqrt{2Ll + l^2}} = P + p. \text{ Maneg}$$

$$\text{giata questa a dovere, si troverà } L + l = \frac{L \cdot P + p}{\sqrt{P + p - \frac{1}{4} f^2}} \quad (7)$$

Una tale espressione di $L + l$ si sostituisca nella formola

$$(1) \frac{1}{2} b + P \cdot \frac{L + l}{L} - \frac{1}{2} bL = P + p, \text{ della quale abbiamo fatto uso}$$

nel

$$\text{nel numero II, e ne risulterà } \frac{1}{2} b + P \cdot \frac{P + p}{\sqrt{P + p - \frac{1}{4} f^2}} - \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{P + p - \frac{1}{4} f^2}{P + p}} =$$

$$= P + p, \text{ ed adempiuti i necessari calcoli, } \frac{P + b f^2}{8 \cdot P + p} =$$

$$\sqrt{P + p - \frac{1}{4} f^2} = CO \quad (8)$$

A buon conto si noti, che restando esclusa dalla formola la specie L , la varia lunghezza della fibra non ha per se stessa luogo nel determinare l'accrescimento di tensione p , il quale, essendo il resto pari, si scoprirà sempre costante, qualunque sia la lunghezza della fibra. Abbiamo detto per se stessa, perchè, conforme si è veduto nel num. XXII, la lunghezza delle fibre c'entra nello stabilire la misura della forza esteriore f .

Quando è minima la forza f , si trova

$$\sqrt{P + p - \frac{1}{4} f^2} = P + p - \frac{1}{8} f^2. \text{ Avremo per tanto}$$

$$\frac{P + b f^2}{8 \cdot P + p} = P + p - \frac{f^2}{8}, \text{ o sia } \frac{b + P + p \cdot f^2}{8 \cdot P + p} = P, \text{ e cancellate}$$

$$\text{le quantità relativamente nulle, } \frac{b + P \cdot f^2}{8 \cdot P^2} = p. \text{ Supponendosi data la}$$

$$\text{grandezza } \frac{b + P}{8 P^2}, \text{ ne segue, che le aumentazioni di tensione } p \text{ stanno}$$

come i quadrati f^2 delle forze minime, onde vengono prodotte, e che conseguentemente appartengono al secondo ordine degli infinitamente piccoli.

Su-

Superiormente abbiamo avvertito essere la forza infinitesima

$$f = \frac{2PS}{L}, \text{ e quindi dedurremo } \frac{b + P}{8P^2} \cdot f^2 = \frac{b + P}{2L} \cdot S^2 = p. \text{ Impariam}$$

mo da questa formola, che a $CD = S$ minima corrisponde $RI = p$ infinitesima del secondo grado, che la linea MR tocca la curva MI nel punto m , e che la detta curva verrebbe combacciata nel nominato punto da una Parabola Apolloniana, il cui vertice m , ed il parametro $\frac{2L}{b+P}$.

Immaginiamoci infinita la forza f , e dalla sola considerazione della figura ricaveremo, che siccome in tal caso $CD = S$ eguaglia adeguatamente $DB = L + l$, non altrimenti $CN = NQ$, ovvero analiticamente $\frac{1}{2}f = P + p$, e trascurata, se così piace, la quantità incomparabile

$P, \frac{1}{2}f = p$, cioè a dire gli accrescimenti di tensione p come le forze infinite f , da cui sono cagionati. Il valore di $p = \frac{1}{2}f$ non resta in conto

alcuno alterato, dalla diversa misura della rigidità b , e della forza tendente P .

Nella supposizione, che abbiain per le mani, è $CO = \frac{1}{2}b + P$.

E vaglia il vero, giacchè per l'equazione (8) $CO = \frac{P + hf^2}{8 \cdot P + p^2} =$

$$\sqrt{\frac{P + p^2}{P + p^2} - \frac{1}{4}f^2}, \text{ ne risulta } \frac{1}{2}b + P = \frac{P + hf^2}{8 \cdot P + p^2}, \text{ e conseguente}$$

mente $\frac{1}{2}f = P + p$. pongasi in vece di $P + p$ il suo valore $\frac{1}{2}f$ nella

formola $CO = \frac{P + hf^2}{8 \cdot P + p^2}$, e ne provverà $CO = P + \frac{1}{2}b$, conforme

si dovea ritrovare.

L'ac-

L' analogia $\frac{CB}{L} : \frac{CD}{S} :: \frac{CO}{P + \frac{1}{2}b} : \frac{CN}{\frac{1}{2}f}$ somministra l'equazione

superiormente scoperta nel numero XII. conveniente alle forze infinite

$$\frac{P + \frac{1}{2}b}{L} \cdot S = \frac{1}{2}f. \text{ Sostituito in cambio di } \frac{1}{2}f \text{ il suo valore } P + p, \text{ ci}$$

presenta $\frac{P + \frac{1}{2}b}{L} \cdot S = P + p$: espressione, da cui si raccoglie, che

segnata $FQ = \frac{FK}{2} = P + \frac{1}{2}b$, e congiunti i punti C, Q con una linea,

che si continui all'infinito, servirà questa d'asintoto alla curva MI .

XXVIII. Avendo osservato, che posta f minima, la tensione aggiunta p è immensamente più picciola, e che dividendo f infinita, $p = \frac{1}{2}f$; ne dedurremo, che stando nei confini del finito, l'accresci-

mento di tensione p è sempre minore della metà della forza f . Questa riflessione ci addita il magistero ammirabile della Natura, la quale ha disposto, che le forze esterne agiscano trasversalmente, e non direttamente nelle fibre degli organi. Se agissero direttamente, s'aumenterebbe la tensione per la intiera forza f . Operando le forze esteriori di traverso, s'accresce la tensione per la quantità p , che quando le fibre non restano molestate, è assai meno minore di f , e che mentre f sia molto grande, non può mai giungere a pareggiarne la metà. Con sì stupendo artificio si mettono le fibre in una agitazione spiritosa, atta a risvegliare nell'anima le sensazioni con pochissima alterazione della loro consueta tensione.

XXIX. Conciossiachè in un caso estremo sta p come f^2 , e nell'altro p come f , s'inferisca, che più crescono, o scemano le aumentazioni di tensione p , di quello che parimente crescano, o scemino le forze finite trasversali.

Più conseguenze fisiche possono ricavarfi. E primieramente aumentando la forza esteriore, cresce, e con maggior proporzione la fatica dell'organo; e perciò quando la mentovata forza è troppo grande, e continuata, l'organo facilmente si stanca. L'affidua contemplazione dei luminosi corpi celesti affatica talmente gli occhi degli Astronomi, che a più d'uno è accaduto di rimaner privo della vista in tempo della vecchiaja.

Age-

Agevolmente si passa dall'insensibile al sensibile; o al rovescio; dal piacevole al disgustoso, o al rovescio. All'accrescimento di tensione p non corrisponda sensazione. Se per eccitarla faccia bisogno l'ingrandimento di tensione $4p$; s'otterrà questo effetto con aumentare la forza trasversale f pochissimo più del doppio.

Nell'organo delicatissimo della vista, che ricoprendolo colle palpebre, o colle mani, o volgendo altrove la faccia si difende dall'empito d'una luce troppo violenta, la Natura si serve d'una bellissima industria, perchè non si passi con tanta facilità dal sensibile all'insensibile, dal grato all'ingrato. Consiste questa nel poterli allargare, o restringere il diametro della pupilla. Le dilatazioni, e i restringimenti si osservano grandissimi in quegli animali, che sono destinati a vedere di giorno, e di notte. Se il lume infiacchisce, s'allarga assai la pupilla, con che molto lume debole fa la stessa impressione, come un lume mediocre e di forza, e di quantità. Accrescendosi il vigore della luce, si restringe la pupilla, e la minore quantità compensa la forza maggiore. Anche gli altri organi avranno forse degli equivalenti artificj, che non ci sono per anco noti.

XXX. Faccioci ora a ponderare qual parte possa avere la diversa rigidità b delle fibre nella fatica degli organi, la quale, supponendosi costante la forza tendente P , serba la ragione degli accrescimenti di stiramento p .

La formula propria delle forze minime $\frac{b+P}{8P^2} \cdot f^2 = p$ ci manifesta,

che assumendosi siccome dato il coefficiente $\frac{f^2}{8P^2}$, le aumentazioni

di tensione p , mentre la forza f sia picciolissima, stanno come la somma $b+P$ della rigidità, e della forza tirante. In tale circostanza adunque la fatica dell'organo s' aumenta, o si minora proporzionalmente meno di quello cresca, o si diminuisca la rigidità.

S'è già avvertito al numero XXVII., che essendo infinita la forza f , la varia rigidità b delle fibre nulla influisce nella misura dell'aumento di tensione $p = \frac{1}{2} f$.

Quindi una forza finita cagionerà incrementi di tensione, che all'ingrandire, o all'impicciolire della rigidità si troveranno meno diversi di ciò, che richiede la legge delle forze minime.

Dalle premesse verità si deduce la ragione, per cui un'adulto più d'un giovane, ed un vecchio più d'un adulto è soggetto a stancarsi. Un adulto per modo d'esempio non durerà tanto a leggere quanto un giovane, nè un vecchio quanto un adulto.

Per

Per risparmiare frattanto più che fosse possibile agli organi la fatica, ha il Sapientissimo Iddio providamente ordinato, che gli accrescimenti di questa riescano a proporzione minori di quelli della rigidità.

XXXI. Di maggiore rilievo sono le conseguenze, che derivano dall'alterazione della forza tendente P .

Impariamo dalla formola spettante alle forze infinitamente picciole

$$\frac{b+P}{8P^2} \cdot f^2 = p, \text{ che le aumentazioni di tensione crescono, o calano con}$$

proporzione più rimota di quella, onde all'incontro calano, o crescono le forze tendenti P . In fatti se b variasse nella stessa ragione di P , si troverebbe $\frac{b+P}{8P^2}$ come $\frac{1}{P}$, e l'accrescimento di tensione p starebbe in-

versamente come la forza tirante P . Ma supponendosi la rigidità b costante, ne segue, che se cala la forza tendente P , la somma $b+P$ è proporzionalmente maggiore di P , e se la detta forza ingrandisce, la quantità $b+P$ è a proporzione minore di P . Perciò rettamente abbiamo asserito, che gli accrescimenti di tensione si corrispondono in una relazione più lontana della reciproca delle forze tendenti. E giacchè la fatica dell'organo sta come $\frac{p}{P}$, si conchiuda, che essendo minima la

forza esteriore, più si aumenta, o si minora la fatica dell'organo di quello ricerca la ragione inversa duplicata delle forze tendenti.

Rivolgiamoci all'opposto limite della forza f infinita, e supponendosi, che questa non patisca alterazione, troviamo costante l'incremento di tensione $p = \frac{1}{2} f$. A norma di ciò la fatica dell'organo $\frac{p}{P}$ fer-

berà la ragione reciproca delle forze tendenti P .

Quindi possiamo sicuramente affermare, che quando è finita la forza f , la fatica dell'organo prende regola da una proporzione più lontana della inversa delle forze tiranti.

Ora si capirà la ragione, per cui alle donne infievolite dal parto recente, nelle quali s'è scemata la tensione delle fibre, cagioni stanchezza, e fastidio la forza quantunque moderata del lume, del suono, e degli odori. Gioverà pure a coloro, che si fan cavar sangue, il riparare gli occhi dalla luce soverchia, potendo questa produrre nelle fibre meno tese dell'organo della vista una impressione troppo grande, e nociva.

XXXII. Conchiuderemo questa Annotazione coll'indagare, se la varia lunghezza delle fibre rechi modificazione veruna alla fatica degli organi. Mentre le fibre sieno simili di figura, stirate da forze propor-

322
 zionali alle loro basi, formate di materia egualmente rigida; le forze tendenti P , le rigidità b , e le impressioni f delle forze esterne stanno come L^2 . Aggiungiamo, che ancora gli accrescimenti di tensione p abbracciano la medesima ragione. Ci serviamo qui pure, come altrove abbiamo praticato, d'una dimostrazione indiretta. Supposti b , f , e $P+p$ come L^2 , cerchiamo la proporzione di P , e trovandola anch'essa come L^2 , inferiamo, che se P serberà la ragione di L^2 , verrà pure questa accettata da $P+p$, e conseguentemente ancora da p . Presa per mano

la formula (8) $\frac{P+p}{8 \cdot P+p} = \frac{\sqrt{P^2 + p^2} - \frac{1}{4} f^2}{4}$ osserviamo che nella ad-

dotta supposizione ciascuno dei due termini $\frac{bf^2}{8 \cdot P+p}$, $\frac{\sqrt{P^2 + p^2} - \frac{1}{4} f^2}{4}$

sta come L^2 , e perciò P , che s'eguaglia alla differenza dei termini stessi, si scopre proporzionale ad L^2 , il che ec.

Venendo la fatica dell'organo contrassegnata dalla frazione $\frac{p}{P}$, ed

essendo nel nostro caso tanto il numeratore, quanto il denominatore come L^2 ; si raccoglie, che gli organi e grandi, e piccioli forniti delle descritte proprietà sostterrebbero una pari fatica.

XXXIII. Che se le forze tendenti, e le rigidità non si corrispondono nella ragione delle basi delle fibre simili, si verificano le medesime conseguenze, che abbiamo ricavate trattando delle fibre egualmente lunghe, e grosse, ma diversamente rigide, e tese. Essendo le fibre dei fanciulli proporzionatamente più molli di quelle degli uomini fatti, si capisce il perchè l'organo per esempio della vista si stanchi più facilmente in questi, che in quelli.

XXXIV. Relativamente a due fibre varie solo nella lunghezza; l'impressione f delle forze esterne sta come L . Le cose dette nel numero XXIX. ci ammoniscono, che gli accrescimenti di tensione p proporzionali alla fatica del sensorio $\frac{p}{P}$ nella presente supposizione di P co-

stante, abbracciano una ragione media tra f^2 , ed f . Ma le forze f serbano la relazione della lunghezza L ; dunque la fatica dell'organo seguirà una proporzione di mezzo fra L^2 , ed L .

A norma di ciò paragonati assieme due sensorj composti di fibre del pari grosse, rigide, e tese, e diverse solamente nella lunghezza; quello sostterrà maggiore fatica, che sarà fornito di fibre più lunghe. Finiamo colla riflessione, che dipendendo la fatica dell'organo dalla combinazione di più elementi, non ci dobbiamo maravigliare, se l'azione del

323
 del medesimo obbietto esterno affatichi diversamente gli organi d'uomini, quantunque sani, e che nel fiore dell'età si ritrovano.

SCHEDIASMA XXVII. (*)

Delle Resistenze.

L A materia, sopra cui io mi sono proposto di ragionare, è circondata per tutti i versi da un numero così grande di difficoltà, che non so, se mi verrà fatto di stabilire una teorica, la quale risponda se non esattamente, almeno prossimamente ai fenomeni. Troveremo per istrada alcune verità, che almeno in apparenza vicendevolmente si distruggono, e vedremo talmente moltiplicarsi, e confondersi i dati, e le circostanze, che faremo assai, se ci riuscirà di fissare talora i limiti, da cui vengono circoscritte le leggi della Natura, ed oltre i quali non può essa trascorrere; quantunque dentro questi confini la sue operazioni, secondo i casi, in maniere infinite vada variando.

Per coloro, che vogliono assumere il malagevole impaccio d'applicare alla Fisica la Geometria, parmi s'io non prendo errore, che abbia a farsi gran conto del metodo dei limiti, conciossiachè non può abbastanza mettersi in chiaro, quanto sia differente la Geometria della Natura da quella degli Uomini. Essa, che istituisce i suoi computi col fatto, non resta punto imbarazzata nè dalla diversità dei Canoni, nè dall'accoppiamento degli elementi: laddove l'intelletto umano nè per via di naturale discorso, nè con l'ajuto de' metodi, che spesso fiate ci

Ss 2

ab-

(*) Non è finito il presente Schediasma; imperciocchè promettendo l'Autore di parlare delle resistenze, che dipendono dalla costipazione delle parti, dalla tenacità, dal fregamento, e dalla inerzia della materia; non si veggono trattati, salvo che i due primi punti. Quantunque il Conte Jacopo abbia maneggiata compiutamente questa materia nel Saggio intorno il sistema dell'universo, libro primo, capitolo sesto; ciò non ostante s'è stimato bene di non omettere lo Schediasma XXVII. contenendosi in esso varie avvertenze, che meritano d'esser lette. Impariamo da una lettera dell'Autore al Sig. Abate Giuseppe Suzzani scritta l'anno 1732., che gli era riuscito di scoprire, che le resistenze dipendenti dalla inerzia della materia stanno tra il quadrato, ed il cubo della velocità. Poco tempo dopo una tale invenzione ha il Conte Jacopo composto il presente Schediasma, e forse lo scriveva nel Febbrajo del 1733., come si conghietture da una lettera all'Autore del Sig. Conte Giovanni Rizzetti, il quale molto comenda la scoperta del metodo dei limiti, di cui nel principio dello Schediasma mostra il Conte Jacopo di compiacersi.

abbandonano, può reggere allo scioglimento di certe quistioni, nelle quali c'entrano parecchi dati sì fattamente misti, e modificati, che in alcune congiunture o si rendono del tutto ignoti, o per lo meno difficilissimi a maneggiarsi.

In questa postura di cose io non so, e me ne rimetto all'altrui giudizio, se debba compiacermi meco medesimo della maniera, con cui soglio farmi strada a sì fatte speculazioni. Il mio artificio consiste in mettermi a considerare il lavoro della Natura, quand'essa in certi particolari incontri si trova, per così dire, obbligata ad operare colla maggiore semplicità, mentre facendosi il transito a poco a poco da una legge all'altra, secondo che si vanno alterando le circostanze, regolarmente negli estremi si rinvencono i Canoni meno composti: ma nei casi di mezzo, a causa della mistione, e combinamento degli elementi, per lo più la cosa si riduce a tale, che bene spesso riesce malagevole, e talvolta impossibile venirne a capo. Se ciò succede, come suole frequentemente succedere, egli è manifesto, che altro partito non ci rimane a prendere, fuorchè porsi ad investigare le due leggi dei limiti, e con l'aiuto d'esse andare in traccia delle intermedie, le quali se ci verrà fatto di scoprire, avremo conseguito l'intento; e quando no, ci sarà almeno concesso di far uso d'una discreta approssimazione dentro a quei termini, fuori de' quali siamo sicuri, che la Natura operando non esce; e si escluderanno altresì tutte quelle leggi, che per via d'una qualche arbitraria ipotesi ad essa si sogliono attribuire.

Ho dato un saggio di questo metodo in parlando generalmente dei Canoni, per cui si regolano le comunicazioni dei moti, tanto fra i corpi molli, ed inerti, quanto fra quelli, che sono dotati di un qualche grado di forza elastica; ed ora ne aggiungerò un altro esempio tolto da quel genere di resistenze, che dipendono dall'inerzia della materia, e nel tempo stesso farò vedere, che dandosi mano una verità con l'altra, dalla teorica della comunicazione dei moti si caveranno i canoni, ed i limiti delle mentovate resistenze.

Prima però d'entrare in materia, piaciemi d' esporre brevemente tutto ciò, che in tal proposito è stato pubblicato. Al Galileo si debbe la lode d'averci, per dir così, aperte le porte della Fisica, col metterli avanti d'ogni altro a riflettere seriamente sulle leggi del moto: e quantunque egli non ignorasse, che le sue regole venivano sensibilmente alterate dagli ostacoli delle resistenze; ad ogni modo non si prese la cura di ridurli a computo, perchè la Geometria a' suoi tempi non aveva fatti tali progressi, che potesse a lui servire di scorta in ricerche tanto difficili, e delicate. Mancò dunque a questo grand'uomo il metodo, e non l'ingegno: ed in fatti non molto dopo il celebre Inglese VVallis osservò, che col mezzo delle sue serie interpolate, quando la resistenza del mezzo fluido si stabilisce in ogni punto dello spazio trascorso proporzionale alla velocità attuale del mobile, si poteva rinvenire di passo in passo la giusta misura della velocità decrescente. Nè credo già, ch'egli si persuadesse d'aver a prima vista scoperta la vera legge della

Na-

Natura: ma facendo uso delle sue progressioni in quella arbitraria supposizione, a cui adattar si potevano, diede altrui motivo di pigliar per mano la materia, e di condurla a qualche maggior perfezione.

Alcune sperienze fatte colla possibile accuratezza anno insegnato al Sig. Mariotte, che il contrasto fatto da un fluido ad un corpo solido non seguita la ragione della velocità semplice, ma piuttosto della duplicata, e pareva, che le osservazioni venissero confermate dal seguente raziocinio. Conciosiachè quanto il mobile più velocemente cammina, altrettanto caccia dal suo luogo una maggior copia di fluido, e con maggiore celerità; dunque la resistenza sta in ragione composta della materia fluida messa in moto, e della velocità del solido, da cui resta determinata quella del fluido: ma alla predetta celerità è sempre proporzionale la quantità del liquido, che di passo in passo viene spinta fuori di luogo; dunque la resistenza si trova essere in ragione duplicata, o come il quadrato di quella velocità, con cui il corpo duro attualmente si fa strada a traverso del mezzo resistente.

Questa determinazione avvalorata degli esperimenti, e dalla ragione fu concordemente abbracciata dai Matematici, finattantochè l'incomparabile Cavalier Nevvton nelle prime edizioni de' suoi Principj s'ingegnò di conciliare insieme le due differenti sentenze. Si diede egli a credere, che se un solido procede a passo lento per un mezzo viscido, e ténente, la resistenza sia in ragione della velocità, e che s'alzi al quadrato della velocità stessa, ogni qual volta le particelle componenti la massa liquida non sono fra loro congiunte con sensibile adesione. E perchè forse non si da fluido, i di cui elementi non si trovino legati insieme da qualche tenacità, onde per separarli, e distinguerli ci voglia una forza ora minore, ed ora maggiore secondo le circostanze; si fece a conchiudere, che gl'impedimenti, da' quali il moto a poco a poco s'estingue, anno ad esprimersi per la velocità semplice con l'aggiunta del suo quadrato, di modo che sia $R = au + buu$.

Nell'ultima ristampa poi del citato libro, qualunque se ne fosse la cagione, quest' Uomo illustre cangiò ipotesi; e fattosi a considerare tre essere gl'intoppi, che ritardano il moto dei solidi, mentre oltre l'energia della materia fluida, ed oltre la viscosità, ponno le minime particole far contrasto colla loro asprezza, ed opporsi con una specie di fregamento, a tutti e tre questi diversi elementi assegnò le proprie leggi. Fece dunque costante l'ostacolo, che procede dalla tenacità, e variabili gli altri due, vale a dire quello, che nasce dalla frizione proporzionale alla velocità, ed il principale cagionato dall'inerzia in ragione duplicata della velocità medesima. Così avrassi l'intera resistenza $R = c + au + buu$.

Delle affezioni del moto, e delle conseguenze, che derivansi da premessi canoni, parecchi valent'Uomini anno fatto parola, ed oltre il lodato Cavalier Nevvton, ci si sono impiegati di proposito li Signori Leibnizio, Varignone, ed Ermanno, i quali nulla anno trascurato di ciò, che alla Geometria, ed all'Analisi s'appartiene: ma quanto a me

desi-

326 desidererei, che avessero data di tempo in tempo una qualche occhiata alla Fisica, e si fossero consigliati colla Natura, perchè il trattenerli su certe leggi non dimostrate, e scelte non per altra ragione, se non per essere le più semplici, serve bensì allo scioglimento d'alquante delle più ardue quistioni, ed all'ampliamento dei metodi: ma nulla giova alla spiegazione dei fenomeni, ed all'avanzamento della scienza naturale.

Ho pertanto meco stesso deliberato di non lasciarmi trasportare dalla corrente, ed aprirmi un nuovo sentiero, raccogliendo alcune fondamentali incontrastabili osservazioni, e mettendomi anzi gli occhi ora l'una, ed ora l'altra a' suo luogo e tempo, per vedere quali necessarie illazioni abbiano immediatamente a dedursene. Procurerò poscia accoppiando insieme i fenomeni, e le conseguenze, di scoprire le vere leggi, o almeno di restringerle fra loro confini, e mostrare fin dove o per un verso, o per l'altro può giungere la Natura.

Parlerò in primo luogo delle resistenze di que' corpi, che stanno di mezzo tra i duri, e i fluidi, ed in un medesimo tratto anche dei solidi, facendomi a considerare la coesione delle parti, le ammaccature, la tenacità, ed il fregamento. Quindi passerò ad investigare in qual maniera i due ultimi assegnati elementi possano operare nei mezzi fluidi, e finalmente mi fermerò a stabilire le regole di quella sorta d'ostacoli, che dipendono dalla semplice inerzia della materia.

Delle resistenze, che principalmente dipendono dalla coesione delle parti.

ESPERIENZA.

Siamo debitori della seguente esperienza ammessa per bella, e per buona da tutti i Geometri alla sagacità del Sig. Marchese Giovanni Poleni pubblico Professore delle Scienze Matematiche nella Università di Padova. Fatta egli fare una cassetta collo sponde alte a misura del bisogno, la riempì tutta di fevo gelato, e ne spianò accuratamente la superficie; indi preparò due palle di pari diametro ben tornite, e ben lisciate, e dello stesso metallo per esempio di ottone, una piena, e l'altra vuota. Questa ultima divisa in due emisferi si apriva, e si chiudeva con una spira, per poterci introdurre nel corpo vano alcuni pezzetti di piombo secondo le occorrenze, ed in tal guisa ridurre il peso della prima a quello della seconda in data proporzione.

Poscia lasciata cadere da una determinata altezza la sfera solida sul piano orizzontale del fevo, penetrava essa fino ad un certo segno la materia molle, e cedente, formando la sua buca, di cui si misurava attentamente la profondità. Ma per ottenere, che il globo vuoto escavasse parimente la propria fossa di fatta eguale alla già escavata, si osservava

327 essere necessario il farlo discendere da sublimità tale, che all'altra già fissata fosse in ragione reciproca dei pesi delle due palle.

Replicata l'esperienza in molte, e diverse maniere, ora mutando l'altezza, da cui piombava la sfera solida, ed ora variando la gravità della vuota, il fatto ci fa vedere, che in qualunque incontro ha luogo il canone assegnato con tanta aggiustatezza, quanta mai se ne può sperare dalle osservazioni. E giacchè le velocità acquistate dai gravi cadenti sono in ragione dimidiata delle altezze verticali, da cui discendono, cioè come le predette altezze, così i quadrati delle velocità; ne segue, che per avere due fosse ugualmente profonde, fa di mestieri, che le due palle, quando arrivano a toccare la superficie del fevo, sieno dotate di pari forza computata alla Leibniziana, vale a dire, che sieno uguali i due prodotti delle masse, ovvero dei pesi moltiplicati nei quadrati delle rispettive celerità.

Sembra, che possa assumersi come un assioma, che due buche uguali escavate in una materia omogenea abbiano a prendersi per due effetti uguali: ed essendo altresì un primo incontrastabile principio, che due effetti eguali vengano generati da cause uguali, mentre ambedue nel produrli tutte s'impiegano, e si consumano, conchiude il lodato Signor Poleni, che mal corrispondendo gli effetti pari alla disuguaglianza, che passa fra le forze vive, mentre queste si misurino dalla quantità del moto, debba riceverli per vera la sentenza dell'incomparabile Leibnizio, per cui le forze de' corpi in moto restano determinate dalle masse moltiplicate non già nella velocità semplice, ma nella duplicata.

Prima di passar oltre, e farmi ad esaminare le risposte, colle quali i Cartesiani anno tentato di deludere una speranza così palpabile; non farà fuori di proposito, ch'io da essa ricavi alcune fondamentali conseguenze.

PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

Premesso lo sperimento del Signor Poleni, suppongo, che la palla A (Fig. 102.) cadente dall'altezza AC fatta abbia la minima fossa in C tinta di nero; egli è certo, che nel correre lo spazio infinitesimo eguale alla fatta della fossa medesima, non perde essa palla, se non una parte inassegnabile di quella finita velocità, che nella discesa per AC si aveva acquistata; dunque camminerà per detto spazio con eguale velocità: ma il tempo, in cui si compie il cammino, sta come lo spazio diviso per la celerità; dunque $dS = dT \cdot V$. Fatto un simile discorso

so intorno la sfera B, che caduta dalla sublimità BD escava in D la sua picciola fossa contraddistinta con l'inchiostro eguale alla già escavata in

ta in C, avremo $\frac{ds}{u} = dt$: ma le faettè espresse per ds , ds sono egua-

li per l'ipotesi, e le due velocità V , u sono in proporzione dimidiata di AC: BD; le quali altezze sono per le condizioni della speriencia in ragione inverfa delle masse A: B; dunque $\sqrt{A} : dT :: \sqrt{B} : dt$,

o sia $\sqrt{A} : \sqrt{B} :: dT : dt$; e perciò le minime fosse uguali in C, e D si fanno dalle palle A, B in tempi tali, che si trovano essere in ragione sudduplicata delle masse A. B.

Ora è cosa facile a dimostrarsi, che le velocità perdute da ambe le palle nel formare le fosse uguali sono nella medesima proporzione, in cui si rinvencono le celerità U , u ; conciossiachè essendo per i moti canonici delle forze continuamente applicate $rdT = -AdU$, ed

$rdt = -Bdu$, e per le cose dette di sopra $dT : dt :: \sqrt{A} : \sqrt{B}$,

farà altresì $\frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} :: -dU : -du$; ma le radici delle masse sono

in ragione reciproca delle velocità in C, e D; dunque $U : u :: -dU : -du$ e conseguentemente faranno nella medesima proporzione le velocità restanti $U - dU$, $u - du$.

Proseguiscano i due globi A, B la loro operazione, penetrando per altri due spazj uguali contrassegnati coi punti: e perchè i tempi s'esprimono per le velocità applicate agli spazj trascorsi, avraffi

$\frac{dS}{U-dU} : \frac{dS}{u-du} :: dT : dt$; ma gli spazj per la ipotesi sono uguali, e le

velocità residue serbano la ragione reciproca dimidiata delle masse, co-

me si è dimostrato; dunque $\sqrt{A} : \sqrt{B} :: dT : dt$. Quindi si proverà, che le celerità restanti dopo fatte le seconde fosse, faranno in ragione delle primitive U , u ; e così di mano in mano collo stesso metodo si metterà in chiaro, che facendosi le terze, e le quarte fosse uguali, e procedendosi in simil maniera all'infinito, gli elementi del tempo si troveranno sempre come le radici delle masse; laonde i tempi inferiori impiegati nello scavare le buche CE, DF faranno in proporzione sudduplicata delle medesime masse A, B, lo che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

Dal progresso della nostra dimostrazione si raccoglie, che presi ad arbitrio i due punti G, H egualmente distanti dalla superficie del sevo segnati nell'asse delle due fosse, quando le sfere A, B faranno pervenute ai predetti punti, conserveranno in se stesse velocità tali, che faranno fra loro in ragione, come le velocità primitive U , u , o pure in proporzione inverfa sudduplicata delle masse A, B; conciossiachè i minimi strati eguali in G, ed H oppongono alla discesa delle palle una pari resistenza, essendo composti della stessa materia, e nei predetti siti egualmente compressa, e costipata. Perciò le due scale, o curve delle celerità decrescenti, che principiano nei punti C, D, e terminano coi loro vertici in E, ed F, avranno le ordinate, che corrispondono a due abscisse uguali, in data ragione costante.

S C O L I O.

Se vero fosse, che due piccioli strati di sevo egualmente grossi (Fig. 193.) Gg, Ii presi in diverse distanze dalla superficie, avessero una pari densità, e consistenza; accaderebbe, ch'essendo in ogni punto dell'asse CE costante l'opposizione del corpo cedente, e viscoso, il quale va di passo in passo estinguendo l'impeto della palla; s'avrebbe per iscala delle velocità decrescenti la parabola Apolloniana ELK, e descritta come nella figura.

Ma perchè quanto più la sfera si profonda nel sevo, tanto più lo va comprimendo; s'aumenta per questo capo la resistenza dei strati inferiori più densi, e più costipati relativamente ai superiori. Bisognerebbe per tanto farsi a cercare la legge di questo accrescimento, per poter determinare la scala delle resistenze, la quale in vece d'essere una linea retta parallela all'asse CE, degenererebbe in una curva, le di cui applicate principiano da una costante rispondente al punto C, anderebbono sempre crescendo sino alla massima, che al punto E apparterrebbe.

Io confesso di non avere sufficienti dati per una tale investigazione, e perciò altro non rimane, fuorchè appigliarsi o all'uno, o all'altro de' due partiti; cioè o prendere la cosa generalmente in qualsivoglia ipotesi delle resistenze variabili, salva però la condizione, e l'andamento della curva locale di sopra avvertito, o pure scegliere la supposizione più semplice delle resistenze costanti, trascurando le picciole aumentazioni nascenti dalla maggiore costipazione. Oltrechè le osservazioni ci mostrano, che il canone dal fatto insensibilmente discorda; le verità, che si anderanno scoprendo, ci serviranno, per metterle in chiaro un'altro esperimento da soggiungerli in appresso, in cui il condensamento colla tenacità non si accoppia.

PROPOSIZIONE SECONDA.

TEOREMA.

Nella posizione delle resistenze costanti (Fig. 102.) le due sfere A, B di ugual diametro cadenti dalle sublimità AC, BD sopra materie di differente consistenza escavino le buche CE, DF.

Dico in primo luogo, che le profondità di esse buche sono in proporzione diretta delle forze vive AV^2 , BU^2 , e reciproca delle resistenze R , r . Chiamati S , s gli spazj passati CG, DH, ed u , v le velocità restanti nei punti G, H, avremo per i canoni già dimostrati $-RdS = Audu$; $-rds = Bvdv$. Quindi integrando coll'aggiunta delle costanti, $g - RS = \frac{Au^2}{2}$; $h - rs = \frac{Bv^2}{2}$: ma quando nel principio

della immersione sono uguali a zero gli spazj S , s , scopresi $g = \frac{AV^2}{2}$,

ed $h = \frac{BU^2}{2}$; dunque $\frac{AU^2}{2} - RS = \frac{Au^2}{2}$, e $\frac{BU^2}{2} - rs = \frac{Bv^2}{2}$. Com-

piute poi che sieno le fosse CE, DF, diventano nulle le velocità costanti u , v ; dunque $AV^2 = 2RS$; $BU^2 = 2rs$, e conseguentemente

$S : s :: CE : DF :: \frac{AU^2}{R} : \frac{BU^2}{r}$; il che doveva dimostrarfi.

Dico in secondo luogo essere i tempi T , t , in cui si formano le suddette fosse CE, DF, come le quantità del moto AU , BU divise per le rispettive resistenze R , r . Già si fa, che $-RdT = Adu$, e $-rdt = Bdv$; dunque sommando, non ommesse le necessarie costanti, $AV - RT = Au$, e $BU - rt = Bv$: ma terminate le buche, le velocità u , v sono $= 0$; perciò $AV = RT$, e $BU = rt$; laonde

$T : t :: \frac{AV}{R} : \frac{BU}{r}$; il che ee.

COROLLARIO.

Se alle due proporzioni $T : t :: \frac{AV}{R} : \frac{BU}{r}$; $S : s :: \frac{AV^2}{R} : \frac{BU^2}{r}$ s'ag-

giungerà la terza $T^2 : t^2 :: \frac{AS}{R} : \frac{RS}{r}$, che dalle prime combinate insie-

me si deriva, e queste analogie si metteranno a confronto, facendo eguali ora i tempi, ora le resistenze, ora le profondità delle fosse, ora le quantità del moto, ed ora le forze misurate alla maniera del Leibnizio; si scopriranno parecchi Teoremi, che per brevità tralascio, riservandomi di farne uso secondo le congiunture.

S C O L I O I.

Nello sperimento del Sig. Poleni, in cui s'è adoprato il fevo, e poteva sostituirsi con pari successo la creta molle, il mele, ed ogni altra materia cedente, e viscosa, nasce la resistenza da varj elementi, ed in particolare dall'inerzia del corpo semifluido cacciato di luogo, dalla costipazione delle parti, e dalla loro tenacità. Ma messa in cambio l'arena sottile, o qualche polvere ben macinata, come ha fatto il dottissimo Gravesande, non si diversificano le leggi della Natura; non ostante che tolta affatto di mezzo la tenacità, predomini la costipazione con l'aggiunta di qualche picciolo fregamento.

S C O L I O II.

Nei corpi duri dall'energia della percossa si produce la contusione, che nell'inerti si conserva, e si restituisce o in tutto, o in parte negli elastici: ed è cosa certa, che se la materia, la quale riceve in se stessa l'impeto, persisterà immobile; allora le ammaccature saranno pari, quando si troveranno eguali le forze delle percosse computate alla Leibniziana. Nè dee esser avere alcun riguardo alla varia figura dei corpi agenti, da cui viene regolata quella delle contusioni; perchè non ostante qualunque vestigio, che resti nella materia paziente, essendo uguali i colpi, saranno altresì, se non eguali, almeno equivalenti le impressioni: dal qual principio ci si apre la strada di misurare le resistenze di varj corpi differenti fra loro, o per la materia, o per la figura.

Delle resistenze procedenti dalla sola tenacità.

ESPERIENZA.

Per camminare con passo fermo nella presente ricerca, fa di mestieri lo scegliere alcune sperienze semplici, e per quanto si può esatte, nelle quali, esclusi gli altri elementi, c'entri la sola tenacità. Abbiamo certi corpi pieghevoli, che stanno di mezzo fra i duri, e i molli, composti di fibre talmente intralciate, che agevolmente si divellono, fra quali il celebre Inglese Sig. Defaguliers ha prescelti alquanti fogli di carta disposti orizzontalmente in picciole, ed uguali distanze, e quanto basta egualmente strati.

Sieno essi fogli collocati, come nella Fig. 104., e facciasi, che la palla A cadente da varie sublimità nel mezzo de' predetti strati di carta orizzontali, ne rompa ora più, ed ora meno a misura della propria forza: ha osservato l'Autore, che il numero dei fogli lacerati è proporzionale prossimamente all'altezza della discesa. Per cagion d'esempio il globo A piombando da uno spazio espresso per l'unità abbia vigore abbastanza di spezzare tre fogli, e sul quarto si fermi; accaderà, che discendendo da una doppia altezza, ne rompa sei, e da una tripla nove, e così di mano in mano.

Ben è vero, che lo sperimento in tutti gl'incontri non risponde precisamente alla regola; e ciò, perchè nè i fogli sono egualmente crassi, nè ugualmente tesi, ed in oltre perchè la forza della palla negli intervalli fra strato e strato viene avvalorata dalla gravità, che non manca di esercitare la sua azione, la quale però si rende tanto più fiave, quanto i fogli sono fra loro meno lontani.

Non ostante ciò lo stesso Sig. Defaguliers ingenuamente confessa, che il successo della osservazione è favorevole al Leibnizio; accostandosi affai da presso i due numeri dei fogli spezzati a quella proporzione, che passa fra i quadrati delle velocità acquistate dalla palla A in discendendo da due diverse sublimità: laddove non anno che fare nè punto, nè poco colle due differenti quantità del moto, o sia colle forze misurate alla Cartesiana. In fatti poste le altezze in ragione tripla, e posto che la sfera cadendo dalla smpia laceri tre fogli di carta, piombando essa dalla tripla, giusto l'accennata comune opinione, non potrebbe rompere più di cinque fogli, e sul sesto si fermerebbe; essendo

come $1 : \sqrt{3} :: 3 : \sqrt{27} = \frac{5}{1}$ prossimamente; e pure l'esperienza

ci fa vedere, che ordinariamente ne spezza nove, ed al decimo s'appoggia.

Lo

Lo Scrittore Inglese per tirarsi d'impaccio, e soddisfare in qualche maniera alla difficoltà nascente dal fatto ricorre opportunamente al tempo, rendendoci avvertiti, che quanto la palla cammina più celere; altrettanto nel farsi strada a traverso d'un foglio tempo minore ci spende. Di questa eccezione, o piuttosto pregiudizio ci occorrerà di ragionare a suo luogo: intanto io noto, che non tutta l'energia della sfera A s'impiega a rompere i fogli, ma una porzione se ne dee spendere nello strare quelle fibre, che lacerate non vengono, e che sono tanto manco soggette all'azione, quanto più si discostano dal sito di mezzo, in cui si fa la percossa. Da sì fatta distribuzione però non resta punto turbata l'esperienza; attesochè sebbene l'azione si divide in due parti, una delle quali si consuma in rompere parecchie fibre, e l'altra in istendere il rimanente, ad ogni modo nell'uno, e nell'altro effetto s'impegnano forze tali, che serbano fra loro una ragione costante, ed è sempre pari la resistenza, per cui ognuno dei fogli al vigore dell'azione fa contrasto.

PROPOSIZIONE TERZA.

PROBLEMA.

Trovarè le velocità decrescenti d'una palla, la quale discendendo da una determinata altezza rompa un dato numero di fogli.

La sfera A cadente dalla sublimità AE abbia tanto vigore, quanto basti a rompere li quattro fogli di carta contrassegnati nella Figura 105. colli numeri 1, 2, 3, 4, compiuto il qual'effetto, perda essa tutto il suo moto. Colla retta orizzontale Aa si esponga la velocità della palla nel punto E, in cui giunge a toccare il primo strato, senza peranco aver esercitata alcuna azione, e dividasi in quattro parti eguali la verticale AE.

Perchè il globo A, dopo lacerato il primo foglio, conserva una forza sufficiente per romperne altri tre, agirà contro il secondo con tanta velocità, come se fosse disceso dall'altezza BE. S'esprima questa velocità per la retta Bb, ed essendo le predette celerità Aa, Bb in ragione sudduplicata degli spazj passati AE, BE, ne siegue, che il punto b farà ad una parabola, che abbia il suo vertice in E, e passi per il punto a.

Similmente dopo rotto il secondo foglio, mantiene in se la sfera A il vigore di spezzarne altri due, e perciò eserciterà la sua azione contro il terzo, come se fosse caduta dalla sublimità CE, e conseguentemente questa celerità ci verrà rappresentata dalla ordinata Cc appartenente alla parabola già descritta. Camminando in tal guisa la faccenda, avremo per iscala delle velocità decrescenti nel rompere, che fa la palla successivamente alquanti fogli di carta, una curva parabolica Apolloniana, lo che ec.

CO.

COROLLARIO I.

Tirate le linee *bf*, *cg*, *db* parallele all'asse *AE*, determineremo la velocità *af* perduta dalla sfera nel rompere il primo foglio, la *bg* similmente perduta nel rompere il secondo, e così di mano in mano; ma per la natura della parabola si fa essere *af* minore di *bg*, e *bg* minore di *ch*; dunque quanto la palla cammina con maggiore celerità, tanto meno ne perde in lacerando i fogli disposti in serie, e producendo effetti pari. Tutto all'opposto interviene in quella sorta di resistenze, che dipendono dall'inerzia della materia, come a suo luogo dimostreremo.

COROLLARIO II.

Perciò la forza viva della sfera *A* computata alla Leibniziana, la quale si trova essere come i quadrati delle applicate *Aa*, *Bb*, *Cc*, ec. decresce aritmeticamente, come altresì nella medesima progressione va ricrescendo la forza di passo in passo perduta. Ora perchè un foglio mai non si spezza, se prima le sue fibre non sono ridotte ad un certo stato di stiramento, per il qual effetto ci vogliono forze uguali; è cosa chiara, che il corpo *A* nel rompere parecchi fogli un dopo l'altro, perde in ciascheduna azione un pari grado della propria forza, ed in conseguenza si esperimenta sempre uguale la resistenza, che procede dalla tenacità dei fogli supposti della stessa materia, e di pari crassizie, qualunque possa essere la massa, la figura, e la velocità del mobile.

COROLLARIO III.

I tempi seguitano la proporzione della velocità perduta; di maniera che, se dalla intercetta *fa* ci viene rappresentato il tempo, in cui si rompe il primo foglio, le altre *gb*, *hc*, ec. ci determinano i tempi impiegati a spezzare il secondo, ed il terzo strato. Quindi i tempi consumati in produrre il totale effetto restano espressi dalle applicate *Aa*, *Bb*, *Cc*. mentre però la massa del globo *A* non patisca alterazione.

COROLLARIO IV.

Considerata la cosa più generalmente, se prenderemo due sfere di ugual volume, e di differente peso, e le lasceremo cadere da varie altezze, chiamate le masse *M*, *m*, le sublimità *S*, *s*, i numeri dei

fo-

fogli rotti *N*, *n*, i tempi spesi nel produrre gli effetti intieri *T*, *t* (con questo però, che le palle, compiute le loro operazioni, restino affatto prive di forza, e non si mettano in conto i tempi impiegati nello scorrere con celerità prossimamente equabile ognuno de' piccioli intervalli tra foglio, e foglio) avremo le seguenti analogie

$N : n :: MU^2 : mU^2 :: MS : ms$ con parecchie altre, che dal

$T : t :: MU : mU :: \sqrt{MN} : \sqrt{mn}$

combinamento delle accennate possono agevolmente dedursi.

ANNOTAZIONE PRIMA.

Da quanto sin ora s'è detto, e dimostrato, haffi secondo me a cavare una conclusione principale, ed è, che nell'una, e nell'altra esperienza gli effetti generati mal corrispondono alle forze vive acquistate dalle palle cadenti, se queste forze si misurano dalle quantità del moto, o dalle masse moltiplicate nelle velocità. E se così va la faccenda, fa di mestieri ricorrere al sutterfugio del tempo, e sopra di ciò farsi ad ascoltare con attenzione le sottigliezze, con cui i Cartesiani, ed i Nevvtoniani tentano di soddisfare alla opposizione.

Pensano, che la forza viva abbia a distinguersi dall'azione, intendendo per forza quella quantità di moto, che nel mobile attualmente risiede, e per azione la forza medesima modificata dal tempo consumato in produrre l'effetto intiero. Alla sola forza non debbe attribuirsi l'operazione; ma bensì alla forza congiunta col tempo, venendo dal combinamento di questi elementi determinata l'energia dell'azione, e conseguentemente la quantità dell'effetto, che ad essa in ogn'incontro si trova essere proporzionale. E qui come se la loro ingegnosa specolazione dovesse essere ricevuta per un primo principio, o per una verità chiaramente dimostrata, fanno le maraviglie, come mai il dottissimo Leibnizio abbia potuto trascurare la considerazione dei tempi, e sia caduto in un errore sì manifesto, che non ammette nè difesa, nè scusa.

ANNOTAZIONE SECONDA.

Il celebre Sig. Croufaz si è il primo, che sia pervenuto a mia notizia, il quale per mettere a coperto la sentenza dei Cartesiani, e nel tempo medesimo salvare la debita analogia tra la cagione, e l'effetto, s'è ingegnato di spiegare lo sperimento del Signor Poleni nella seguente maniera.

Voleva egli, che la sfera *A* più pesante (Fig. 102.) impiegasse minor tempo nell'escavare la sua fossa, di quello facesse l'altra più leggiera *B* nel profundare la propria buca, e che questi tempi serbassero la proporzione delle velocità acquistate nei punti *C*, *D*, e fossero in ragione inversa dimidiata delle masse *A*, *B*. La cosa sta tutto al ro-

ve-

vefcio, come ho fatto chiaramente vedere nella Propofizione feconda: nè credo, che molto ci voglia a capire, anche fenza l'ajuto della Geometria, che di due palle atte ad efcafare due fosse uguali, quella ci spenderà minor tempo, che principia ad internarli nella materia cedente con maggiore celerità.

Mifurando per tanto il citato Sig. Croufaz ambe le azioni colle mafse moltiplicate prima nelle velocità acquisite, indi ne' tempi consumati nel formare le buche, i quali tempi a parer suo sono proporzionali a quelli delle cadute, efprime malamente il vigore d' ambe effe azioni per i prodotti AV , BU , che fuppone fra loro eguali, e confequentemente capaci di generare effetti pari, quantunque fieno quefti fenza fallo in ragione delle mafse A , B ; ftantechè le celerità V , U nel cafo noftro sono reciprocamente come i tempi T , t . Toccherà dunque a lui lo fpiegare, qualmente due azioni, che ponno determinarfì in qualivoglia proporzione, producano due fosse, o due effetti uguali, e come fuffifta la neceffaria corrifpondenza, che dee paffare fra la cagione generatrice, e l'effetto generato.

ANNOTAZIONE TERZA.

Ma fe applicando il tempo alla maniera del Sig. Croufaz nell'esempio, che abbiám per le mani, in vece di toglierfi, s'accrefce l'inconveniente; veggiamo, fe poffa riuſcir meglio la cofa, adattandolo in un modo diverfo conforme il ſentimento degl' Ingleſi.

Atteſo che le velocità V , U ſi ſcoprono eſſere reciprocamente come $\sqrt{A} : \sqrt{B}$; le quantità del moto, o le forze Cartefiane faranno direttamente nella medefima proporzione. Ma gli effetti generati, o ſieno le fosse efcauate ſi trovano uguali, dunque fa di meſtieri modificare in maniera per mezzo dei tempi, o per qualche altra ſtrada le predette quantità del moto, che ſi riducano all'egualità; acciocchè la ragione ſerbi coll'effetto la debita analogia. Può farſi ciò in due modi, o moltiplicandole nelle velocità, o dividendole per i tempi; eſſendofi dimoſtrato, che queſti ſono in ragione diretta dimidiata delle mafse. Nel primo caſo abbiám i prodotti uguali AV^2 , BU^2 , e confequentemente le forze vive miſurate giuſta la ſentenza del Leibnizio, e come richiede lo ſperimento. Nel ſecondo c'è l'uguaglianza fra le due frazioni $\frac{AV}{T}$, $\frac{BU}{t}$, e di queſta ipotefi ſi vale l'acutiſſimo Signor Pem-

berton, per render qualche ragione del Fenomeno, intorno cui ſi fa parola.

Parmi, che il Sig. Croufaz, ſebbene prendeva un graviffimo ſbaglio nella determinazione dei tempi, ciò non oſtante la diſcorreſſe affai più coerentemente ai principj della ſua ſcuola, in ſupponendo, che quanto più dura l'azione, tanto più la forza agente venga avvalorata dal

tempo: tutto all'oppoſto dell'Autore Ingleſe, il quale per adattarſi piuttosto al biſogno, che alla verità, penſa, che quanto è più lungo il tempo dell'azione, altrettanto ſi diminuiſca l'effetto prodotto dalla forza agente; coſicchè i tempi abbiám ad ajutare non già la forza viva operante, ma la morta reſiſtente. Perciò poſte uguali dall'una, e dall'altra parte le reſiſtenze, eſſendo come $RT : Rt :: AV : BU$, ſi pretende, che ſi generino effetti pari, e ſi formino fosse uguali; perchè le reſiſtenze corroborate dai tempi, nel mentre che ſi percorrono ſpazj eguali nella materia tenace, diſtruggono quantità di moto ad effe proporzionali.

Il diviſamento di avvalorare colla durata del tempo la reazione in cambio dell'azione, rieſce per mera fortuna nel caſo noſtro: ma in altri incontri va a terminare in aſſurdi manifeſti. E per metterne ſotto gli occhi un eſempio, diceva il Leibnizio, che tanta forza ci vuole per far ſalire la maſſa quattro ad un'altezza eſpreſſa per l'unità, quanta ſe ne richiede per far aſcendere la maſſa $= 1$ all'altezza quattro: ma ſpiegando io in alto la maſſa quattro colla velocità $= 1$, monta eſſa alla ſublimità ſimpla, e gittando in ſu la maſſa $= 1$ colla velocità $= 2$, ſale eſſa all'altezza quadrupla; dunque ſono dotati di egual forza due gravi, le mafse de' quali ſtanno in ragione come $1 : 4$, e le velocità all'incontro come $2 : 1$; ma l'uguaglianza non può conſeguirſi, ſe le forze non ſono fra loro in proporzione compoſta, ſemplice delle mafse, e duplicata delle velocità; dunque le forze vive ſi miſurano per i quadrati delle velocità moltiplicati nelle mafse.

Alla premefſa riſſeſſione del Leibnizio coſa riſpondono concordemente i ſuoi Avverſarij? Non negano, che l'effetto delle due differenti ſalite, cioè della maſſa m alla ſublimità $\frac{1}{m}$, e della maſſa 1 all'altezza $\frac{1}{m}$

m ſia un effetto pari, in cui debba egual vigore impiegarſi: ſoggiungono beſſi baſtare, che la velocità del grave, il quale comincia ad aſcendere più celere, ſia appunto alla velocità del più lento come

$\sqrt{m} : \frac{1}{\sqrt{m}}$ e ciò perchè oltre le mafse, e le celerità, anno anche a com-

putarſi i tempi delle ſalite. La maſſa m s'eſtolle alla ſublimità $\frac{1}{m}$, prin-

ciando ad aſcendere colla velocità $\frac{1}{\sqrt{m}}$, e compiendo la ſalita nel

tempo $\frac{1}{\sqrt{m}}$: laddovè all'incontro la maſſa $\frac{1}{m}$ comincia il ſuo moto colla

celerità $\sqrt{m}$, ed impiegandoci il tempo espresso per $\sqrt{m}$ monta alla sublimità m . Ora moltiplicando ambo le masse rispettivamente nelle ve-

locità impresse, e nei tempi dell' azioni, cioè $m \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$, e

$\frac{1}{m} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{m}$, avremo prodotti, e conseguentemente effetti eguali.

Io non mi fermo ad esaminare il valore della risposta, che dai Cartesiani si adatta agli elasti del Sig. Giovanni Bernoulli, ed a cento altri casi simili: mi fo semplicemente ad avvertire, che nella sferenza del Sig. Poleni la maggior forza produce un effetto pari a quello della minore non per altra ragione, se non perchè ci consuma più tempo a produrlo. Tutto al rovescio nell'esempio del Leibnizio la forza più debole per lo medesimo motivo, che più tempo c'impiega, genera un effetto eguale a quello della più robusta.

Per sostenere in qualche modo la comune opinione, bisogna necessariamente dire, che nel primo caso il tempo più lungo avvalori la resistenza del fevo, e stia dalla parte della reazione; e nel secondo, che in vece di avvalorare la reazione della gravità, la quale come fa la tenacità del fevo, va anch'essa estinguendo la forza del grave ascendente, si disponga non si fa come a corroborare l'azione del mobile.

Forse è d'uopo aver riguardo non mica alla maggiore, o minor forza, che nel corpo agente risiede, ma piuttosto a qualche altra ignota circostanza, per distinguere qual parte venga favorita dal tempo, e per sapere s'esso computar si debba in ajuto dell'azione, o della reazione: ed io intanto aspetterò, che dagli Avversarij del Leibnizio, per non incorrere in qualche equivocazione, me ne venga assegnato il generale, e vero criterio.

ANNOTAZIONE QUARTA.

Questa incostanza di operare mi ha fatto cadere in sospetto esserci in sì fatte ricerche nascosta una qualche grande ambiguità: sebbene essa non è tanto occulta, che un occhio alquanto attento non giunga facilmente a scoprirla. L'equivoco consiste in ciò, che il tempo non ci ha punto che fare, o se pure c'entra, ha egli da entrarci tanto dalla parte dell'azione, quanto della reazione, il che è lo stesso, come se nè per l'una, nè per l'altra parte c'entrasse.

E' cosa manifesta, che le due palle A, B (Fig. 101.) perdono tutte le loro forze acquistate nelle discese, in formando le due fosse uguali CE, DF; mentre la materia cedente a poco a poco va estenuando le suddette forze, fino ad estinguerle intieramente. Ben è vero, che la sfera A consuma più tempo in escavar la sua buca, di quello faccia la palla B,

c

e questi tempi sono in ragione dimidiata delle masse: ma è altrettanto vero, che la resistenza del fevo contenuto nella fossa CE fa per più tempo contrasto all'azione della palla A, ed il fevo della buca DF per minor tempo si oppone all'azione della sfera B; dunque s'io metto in conto la durata dell'azione, non debbo omettere quella della reazione; e se la prima avvalorà la forza agente, la seconda del pari avvalorà la resistente.

Egli è un assioma ricevuto da tutti i Fisici, e Matematici, che l'azione è sempre uguale, e contraria alla reazione; dunque ciò si verifica in qualunque elemento di tempo; dunque anche nei tempi intieri, ne quali l'azione, e la reazione si compie, ha luogo lo stesso canone. Quindi se per cagion d'esempio la forza F si equilibra colla resistenza R in qualunque tempo T, dico, che un'altra forza eguale in qualsivoglia altro tempo t vincerà un'altra resistenza equivalente, nè potrà mai superarne una maggiore, nè lasciarsi estinguere da una minore.

ANNOTAZIONE QUINTA.

Se la presente materia avesse bisogno d'una più chiara dilucidazione; facciassi, che le tante volte nominate due sfere A, B abbiano in discendendo acquistate due quantità di moto ad arbitrio AV, BU: e giacchè i tempi spesi nella escavazione delle due buche seguitano la proporzione delle quantità stesse; ne siegue, che fatto uso dei tempi giusta l'ipotesi del Sig. Croufaz, le azioni, e conseguentemente gli effetti prodotti, o sia le profondità delle fosse avrebbero ad essere in ragione composta, duplicata delle masse, ed altresì duplicata delle velocità, cioè come AVT: BUt, ovvero come A^2V^2 : B^2U^2 : lo che non può mai verificarsi, fuorchè nell'unico caso, in cui sieno eguali le masse; mentre allora lo sperimento non discordando dalla teorica, ci fa vedere, che le fatte delle buche sono proporzionali ai quadrati delle celerità.

All'opposto se il tempo s'applica ad avvalorare le resistenze; seguitando le vestigia del Sig. Pemberton, scopriremo una generale uguaglianza fra le due frazioni $\frac{AV}{T}$, $\frac{BU}{t}$, ed in ordine a ciò dovrebbero

essere uguali tutti gli effetti; cosicchè due palle di pari diametro o gravi, o leggiere, e cadenti da qualsivoglia altezza avrebbero sempre ad internarsi egualmente nel fevo, e formare due fosse ugualmente cupe. E pure la ragione c'insegna essere questo un manifestissimo assurdo, e l'osservazione ci ammonisce ciò non aver luogo, se non nell'unico incontro, che i quadrati delle velocità sieno in ragione inversa delle masse. L'equivocazione dello Scrittore Inglese è nata dal non aver egli esteso il suo computo a tutti i casi, ma solamente a quell'unico, in cui per mera fortuna l'esperienza non era ripugnante alla sua conclusione.

Supponiamo, che sieno eguali le quantità del moto AV, BU, e conseguentemente anche i tempi T, t, ne quali si escavano le due fosse CE, DF: ma le profondità delle fosse stesse faranno ineguali, ed in proporzione come le velocità V, U, ovvero reciprocamente come le masse A, B, la qual ragione può determinarsi a piacere.

Ora io dimando in che modo possa mai succedere, che due forze eguali in sentenza degli Avversarij, operanti in tempi parimente uguali producano effetti tanto diversi; perchè il senso comune m'insegna, che stando tutte le cose pari, maggior forza ci voglia ad escavare una buca, quanto essa è più profonda. Nè giova in tale incontro ricorrere ai tempi; conciosiachè adattandoli alle forze agenti, o alle resistenti, stante l'uguaglianza notata, niun profitto se ne ritragge, e questa egualità si mantiene sempre la stessa non solo fra i tempi intieri, ma di più fra le loro flussioni. Altro dunque non rimane, se non valersi della regola Leibniziana; mentre così troveremo le fatte delle buche proporzionali alle forze vive, ed all'energia delle cause rispondere ottimamente gli effetti.

ANNO TAZIONE SESTA.

Credeva il Sig. Desaguliers, che la esperienza dei fogli di carta da lui tentata per contrapporla a quella del Sig. Poleni, veduto il successo mal corrispondere all'impegno, e all'aspettazione, dovesse col solito futterfugio del tempo accomodarsi all'ipotesi Cartesiana. Ma sembra a me non esserci forse sperimento, che più di questo mostri gli assurdi, che in via di conseguenze si deducono dalla comune sentenza. Veggiamolo in una particolare supposizione.

Prendasi la palla A (Fig. 106.) la di cui massa sia M, e si lasci cadere dall'altezza Aa esposta per l'unità, onde sia parimente M il numero dei fogli rotti. Abbiassi la seconda sfera B più leggiera di massa m, ed istituita l'analogia m: M:: Aa: Bb, discenda questa dalla sublimità Bb, nel qual caso per le cose dette di sopra romperanno esse palle un numero pari di fogli. Pongo in uso il terzo globo C uguale in massa al globo A, ma che cada dall'altezza Cc = Cb; cosicchè il numero de' fogli rotti rispetto agli altri lacerati dalla palla A, ovvero B stia in ragione, come gli spazj trascorsi Cc. Aa.

Fatta questa preparazione, mi metto a confrontare le azioni delle due sfere A, B, delle quali sono pari gli effetti. La sublimità Bb ci viene espressa dalla frazione $\frac{M}{m}$, la velocità del corpo B nel punto b

per $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}$, la sua quantità di moto per m $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} = \sqrt{M}m$, alla qual

grazie

grandezza è sempre proporzionale il tempo speso nella rottura dei fogli. All'incontro abbiamo nella palla A tanto la quantità del moto, quanto il tempo dell'effetto intiero esposto egualmente per M.

Ora perchè l'esperienza ci fa vedere, che le predette due sfere A, B acquistano in virtù delle discese tanta energia, quanta basta a lacerare un numero eguale di fogli; se deesi aver riguardo alla corrispondenza fra la cagione, e l'effetto, abbiamo a concludere, che se non sono eguali le forze vive, lo sieno almanco le azioni. Ma nella nostra posizione le quantità del moto si rispondono in ragione dimidiata delle masse, come altresì i tempi, ne quali gli effetti si compiono; dunque se dietro le vestigia del Sig. Croufaz, e degli altri Cartesiani io moltiplico le forze vive nei tempi, mi si presentano le azioni in proporzione semplice delle masse, alla quale non adattandosi in conto alcuno gli effetti prodotti, è d'uopo, che per non urtare nell'assurdo, mi disponga ad abbracciare il parere del Sig. Pemberton, dividendo le quantità del moto per i tempi, e facendo, che i tempi medesimi in cambio delle forze vive avvalorino le resistenze. Così essendo

$$\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}}, \text{ ed eguali in conseguenza le azioni, si manterrà ferma } \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}}$$

l'analogia fra le cagioni, e gli effetti.

In tal maniera cammina la faccenda nel caso proposto. Frattanto s'io mi volgo a paragonare insieme gli sforzi delle due palle A, C trovo, che per essere elleno di pari massa, il numero dei fogli spezzati è proporzionale alle sublimità Aa, Cc, e che le quantità del moto, ed i tempi sono in ragione sudduplicata delle stesse sublimità, o come

$$me 1: \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}. \text{ S'io mi servo dell'artificio adoperato nell'esempio ante-}$$

cedente, e che divido giusta il metodo del Sig. Pemberton le forze vive Cartesiane per i tempi corrispondenti, computandoli dalla parte delle resistenze; le azioni, che in tal modo diventano eguali, avrebbero a produrre effetti uguali, e non mai proporzionali alle altezze delle cadute, conforme l'esperienza c'insegna. Ed ecco che per iscanfare l'inconveniente, fa di mestieri, ch'io mi dichiari del partito del Sig. Croufaz, corroborando le quantità del moto, o le forze agenti con l'ajuto dei tempi; mentr'essendo allora le azioni, ed in conseguenza gli

$$\text{effetti in ragione duplicata di } 1: \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}, \text{ o come } 1: \frac{M}{m}, \text{ avremo i nu-}$$

meri

342
meri degli strati rotti proporzionali alle sublimità, e la teorica s'accorderà coll'osservazione.

A questo passo ho ben giusto motivo di maravigliarmi, e di mettere in considerazione il gran giudizio, ed il discernimento, di cui debbe essere dotato il tempo, che accompagna l'azione della sfera A; conciossiachè, se mettesi a confronto il suo effetto con quello della palla B, è necessario, che il tempo abbia tanta discrezione di avvalorare la resistenza, udita però prima, e ben imparata la lezione del Signor Pemberton. Quando poi si tratta di far paragone tra le azioni, e gli effetti de' due globi A, C, bisogna, che il tempo muti opinione, secondo la massima del Sig. Croufaz si disponga a mettersi dalla parte della forza agente, e s'ingegni a tutto potere di corroborarla, perchè non nasca un qualche mostro in Natura.

Il peggio si è, che spesso siate il tempo non sa che partito prendere, come chiaramente appare in paragonando gli sforzi, e gli effetti delle palle B, C; attesochè essendo eguali le altezze Cc, Bb, e conseguentemente le velocità V, U, accade, che le forze vive seguivano la proporzione delle masse in qualunque ipotesi, nella qual ragione si trovano essere anche i tempi, e gli effetti. Non ponno dunque i tempi applicarsi nè alle forze vive agenti, nè alle morte resistenti; perchè nel primo caso le azioni, e gli effetti, che ad esse rispondono, farebbono come i quadrati delle masse, e nel secondo eguali: all'una, e all'altra delle quali conclusioni manifestamente ripugna l'esperienza.

Nè giova il far passaggio dalle quantità finite alle infinitamente piccole; mentre ci si fanno incontro i medesimi inconvenienti, come ne resterà pienamente convinto, chi si prenderà la briga di farne il calcolo. Resta per tanto, che si torni ad inculcare ciò, che altre volte s'è insinuato, che non potendosi far uso del tempo, se non si adatta egualmente all'azione, ed alla reazione, senza incorrere in paralogismo, siamo in piena libertà di trascurare questo elemento in qualunque incontro; purchè non si prenda errore nella estimazione delle forze vive, che sono sempre come le masse moltiplicate nei quadrati delle attuali velocità.

SCHIE-

343
SCHEDIASMA XXVIII.

Della Forza, colla quale i corpi fluidi urtano nei solidi, o sia della Resistenza, con cui i mezzi fluidi s'oppongono al moto dei solidi.

Non è egli una cosa stravagante, che i Cartesiani, e i Leibniziani, i quali sono fra loro tanto discordi nel determinare la vera misura delle forze vive, facendola i primi in ragione semplice delle velocità, ed i secondi in duplicata; non ostante ciò talvolta si porgono amichevolmente la mano, e convengono in parecchie conclusioni, che siccome dipendono certamente dai loro principj, così con differenti mezzi dovrebbero essere dimostrate? Io per me credo, e ne sono rimasto appieno convinto in leggendo alcune Dissertazioni uscite alla luce in questi ultimi tempi, che i Fautori della sentenza Leibniziana non abbiano bene scandagliato il fondo della materia, e che nelle loro posizioni frequentemente si contraddicano, con che a taluno anno fatto credere, che la Natura in differenti casi metta in opera leggi diverse, ed in questo solo incontro si dimentichi della sua costanza, e della sua semplicità.

Per cagion d'esempio tutti questi Signori dimostrano le leggi della comunicazione del moto fra i corpi molli, ed inerti, o per via del centro di gravità, che non muta nè velocità, nè direzione, o assumendo, che tanto avanti, quanto dopo l'urto la stessa quantità di moto si conservi, senza mai far parola delle forze vive proporzionali, secondo la loro opinione, ai quadrati delle velocità. Niuno (trattone il Sig. Gravesande, il quale però non ha messo in chiaro la faccenda quanto basta) mette in considerazione quella porzione di forza viva, che nella collisione dei corpi molli in tutto, o in parte s'estingue, impiegandosi nelle mutue contusioni, e nell'alterar la figura dei corpi medesimi, passando in questa guisa ad essere forza morta, la quale se allora viene per così dire a risuscitare, come accade nei corpi elastici, ci fa chiaramente comprendere verificarsi nell'uno, e nell'altro caso il canone del Leibnizio.

A di-

(*) Fu composto questo Schediasma l'anno 1730., come chiaramente apparisce da una lettera dell'Autore al Sig. Abate Giuseppe Suzzani, e da varie risposte dello stesso Sig. Abate. Il Padre Vincenzo Riccati lo ha inserito nel suo Dialogo sopra le forze vive, e sopra le azioni delle forze morte stampato in Bologna l'anno 1749. Così parla l'Interlocutor Zelio alla pagina 386. „ Non devo ricevere quella lode, che non è „ mia. Tutta questa speculazione m'è stata suggerita, e privatamen- „ te comunicata dal Conte Jacopo Riccati.

A disegno io mi servo di questo esempio, dipendendo da esso una buona parte di ciò, che sono per dire. Tutti i Matematici concordano, che l'azione d'un fluido contro un corpo duro abbia a misurarsi colla massa del fluido stesso moltiplicata nel quadrato della velocità. Tutti altresì confessano succedere lo stesso effetto, o che il fluido percuota il corpo duro, o che il corpo cammini con pari celerità per lo fluido stagnante. Quanto alla seconda proposizione può essa passare per un assioma, ma della prima non è stata data fin ora una compiuta dimostrazione.

Il Sig. Mariotte la discorreva nella seguente maniera. La forza d'un fluido è tanto maggiore, quanto è più grande la velocità, con cui le sue particelle si muovono; dunque da un canto questa forza è proporzionale alla velocità medesima: ma dall'altro canto se nel fluido viene accresciuta la celerità, con un maggior numero delle sue parti in un dato tempo percuote il solido, e questo numero di parti percotenti serba la ragione della velocità stessa; dunque considerati i due elementi, l'azione intera del fluido sarà in proporzione composta della sua velocità, e del numero delle parti, che agiscono nel tempo dato, vale a dire in ragione duplicata della velocità medesima.

Pare, che i Leibniziani non dovessero ammettere l'addotta dimostrazione, e taluno potrebbe persuadersi, che a norma dei loro principj s'avesse piuttosto a discorrere così. L'azione del fluido si misura dalla forza della percossa, e dal numero delle particelle, dalle quali in un dato tempo il corpo duro viene percosso: ma questo numero sta in ragione della velocità stessa; dunque l'intera azione del fluido è proporzionale al cubo, e non al quadrato della velocità.

Chi in tal guisa pensasse, andrebbe errato di lunga mano; ma per soddisfare alla difficoltà, che sembra a prima vista insuperabile, è d'uopo dimostrare il seguente

TEOREMA.

Le azioni d'un fluido, che urta in un corpo duro con differenti velocità, o quelle d'un solido, che cammina con velocità diverse per un fluido quieto, sono in ragione dei quadrati delle velocità stesse.

Sia il parallelepipedo ABC (Fig. 107.), il quale cominci a muoversi con una data velocità per un fluido stagnante, ed avanzi cammino per lo spazio infinitamente piccolo BE: egli è certo, che in virtù di questo moto viene cacciato di luogo il fluido contenuto nel sito BH, e viene spinto innanzi colla stessa velocità, con cui il solido di passo in passo cammina, non essendoci altra differenza fra la velocità del solido prima dell'urto, e quella del solido, e del fluido insieme dopo l'urto, se non d'una quantità infinitesima, stante l'ipotesi assunta. Se dunque il solido perde di velocità, mentre il fluido a poco a poco ne va acquistando, siamo nel caso, in cui deono necessariamente aver luogo le leggi delle comunicazioni dei moti.

Sup-

Supponiamo primieramente, che la predetta comunicazione si faccia colle regole già note dei corpi molli. E giacchè le masse del solido ABC, e del fluido BH, stante che essi corpi anno per base comune il rettangolo EH, sono in ragione composta dell'altezza AB all'altezza BE, e della gravità specifica del solido a quella del fluido; ponendo $AB = a$, $BE = s$, la gravità specifica del solido $= m$, quella del fluido $= n$, avremo la massa solida $ABC = am$, e la fluida $BH = ns$. Pongasi in oltre $= u$ la velocità, che si concepisce nel solido, prima ch'esso s'avanzi per lo spazio minimo BE, e dopo fatto questo passo, e spinto fuori di luogo il fluido BH, la sua velocità sarà

$= \frac{am u}{am + ns}$, come si rende manifesto, adattando al nostro caso i cano-

ni della comunicazione del moto fra i corpi inerti; ma la predetta velocità è parimente uguale alla velocità u meno la porzione infinitesima du , che si perde dal solido in esercitando la sua azione contro del fluido; dunque siamo pervenuti alla equazione $\frac{am u}{am + ns} = u - du$, e ri-

$\frac{am + ns}{am + ns}$

dotta l'equazione, $ns = am du + ns du$. Ma nella nostra supposizione essendosi preso per infinitesimo lo spazio $BE = s$, che equivale alla flussione $= ds$, avremo $ns ds = am du + ns du$, o pure $\frac{ns ds}{am} = du$

e moltiplicando ambi i membri per n , $= \frac{N n^2 ds}{am} = n du$. Essendo in

oltre cosa certa, che la resistenza del fluido moltiplicata nell'elemento negativo dello spazio è uguale al momento della velocità, cioè a dire $= R ds = n du$; dunque $\frac{N n^2 ds}{am} = n du = - R ds$, ed in conse-

guenza $\frac{N n^2}{am} = R$. Quindi tanto l'azione del solido, quanto la reazio-

ne del fluido, che sono sempre uguali, e contrarie, s'esprimono per quantità $\frac{N n^2}{am}$, lo che ec.

Supponiamo in secondo luogo, che la comunicazione del moto nel nostro caso si faccia colle regole dei corpi elastici. In tale ipotesi avanzato che sia il solido per lo spazio minimo BE, la sua velocità sarà

Opere Ricc. Tom. III.

X x

am u

$\frac{amu}{am} - \frac{nus}{ns} = u - du$, e riducendo l'equazione col metodo di sopra

espresso, $-\frac{2nuds}{am} = du$, o sia $-\frac{2nu^2ds}{am} = udu = -Rds$; dunque

$$R = \frac{2nu^2}{am}$$

COROLLARIO I.

E' cosa degna da essere avvertita, che si comunichi il moto dal solido al fluido o colle leggi dei corpi molli, o con quelle degli elastici, la resistenza e nell'una, e nell'altra supposizione è sempre proporzionale al quadrato della velocità, con questa sola diversità, che la resistenza nel primo caso è minore per metà paragonata con quella, che ha luogo nel secondo caso.

S. C. O. L. I. O.

In passando dalla Geometria alla Fisica, resta a vedersi quale delle due accennate leggi sia più conforme al modo di operare della Natura.

Da un canto io noto, che muovendosi un corpo solido per un mezzo fluido, non succede ciò, che si osserva nell'urto dei corpi elastici, i quali dopo la percossa l'uno dall'altro si staccano. Non così fa il fluido cacciato di luogo dal solido; conciossiachè incontrando nell'atto di muoversi l'intoppo del fluido contiguo, e replicandosi di passo in passo gli ostacoli, è d'uopo, che il fluido o patisca qualche condensazione, mentre sia elastico, o almeno in qualunque caso dia transito al corpo duro muovendosi in giro, come l'esperienza ci dimostra. In oltre noi veggiamo, che i corpi duri, e massicci restano col tempo corrotti dall'urto de' fluidi anche più sottili, e per tacere degli effetti dell'acque correnti, l'aere medesimo, ch'è così raro, altera, e scioglie insensibilmente tutti i misti, facendo forza di mestruo universale. Una parte dunque della forza della percossa si consuma in agire contro la superficie dei solidi.

Dall'altro canto non c'è fluido, che di qualche forza elastica non sia dotato. Dell'aria la cosa è chiara, e gli altri fluidi, che di compressione non son capaci, mentre sieno chiusi in un vaso, spruzzati violentemente contro un corpo duro patiscono riflessione. Il punto sta, se questa forza di molla si ponga in azione, allora quando i solidi a traverso de' fluidi si fanno strada. Pare, che sia legge stabile della Natura, che insinuandosi un corpo, ed aprendosi il passaggio per mezzo un

al.

altro o solido, o fluido, la comunicazione del moto si faccia con i canoni dei corpi molli, ed inerti. Ne abbiamo un indicio nella luce, la quale, sebbene è dotata d'una perfetta virtù elastica, non ostante ciò in penetrando un qualche mezzo diafano o liquido, o consistente, ci fa chiaramente comprendere, che le sue refrazioni prendono regola dall'accennata legge dell'urto dei corpi molli, come all'opposto le sue riflessioni dall'altra legge dell'urto dei corpi elastici manifestamente dipendono.

Ma perchè c'insegua l'esperienza non andar mai disgiunta la refrazione dalla riflessione, e che lo stesso diafano in parte permette il passaggio al lume, che si refrange, ed in parte riflettendolo vi si oppone; dobbiam concludere, che avendosi a computare l'intera resistenza, con cui il diafano fa contrasto all'azione della luce, è d'uopo l'unire insieme ambe le leggi delle comunicazioni del moto, e stabilirne una terza. Anche sulla materia, di cui trattiamo, non essendoci in Natura nè corpi perfettamente molli ed inerti, nè (trattane forse la luce) corpi isquisitamente elastici, i primi de' quali non sieno dotati di qualche minimo grado di forza elastica, come si ricava dal suono muto, ed ottuso, che si sente nell'atto della percossa; ed i secondi non sieno soggetti a qualche piccola contusione, o almeno non trattengano in se stessi a causa del tremito, che dura dopo l'urto, una qualche porzione di forza; è cosa chiara, che parte della forza viva si cambia in molla, spendendosi in ammaccare, ed in agire contro la superficie del solido, e parte si conserva in passando da un corpo all'altro, o in facendo, che il fluido si rifletta, e si pieghi in varj moti irregolari, e tortuosi.

Quindi io son di parere, che niuna delle due leggi accennate abbia luogo in Natura, ma che in maniera si contemperino, che ne nasca in fra due una di mezzo, e che la resistenza sia maggiore di quella, che richiedono i corpi perfettamente molli, e minore dell'altra, ch'è propria dei corpi perfettamente elastici. Tutta dunque l'alterazione consisterà nel modificare il coefficiente $\frac{n}{am}$, che dovrà moltiplicarsi

per un numero rotto maggiore dell'unità, e minore del binario.

Crederei, che con qualche accurata esperienza si potesse trovare il prossimo, se non il preciso: ma alla resistenza, che nasce dall'inerzia della materia, e su cui abbiamo fin'ora versato, dee aggiungersi l'altra nascente dalla tenacità, la quale io so, e ne ho una dimostrazione, che sebbene in qualsivoglia fluido è sempre diversa, è però nello stesso mezzo sempre costante, qualunque si finga essere la velocità.

COROLLARIO II.

Non farà fuori di proposito l'avvertire, che sul principio del moto il solido urta nel fluido quieto, ma nel progresso cacciando di luogo le particelle fluide, e queste comunicando il moto alle più vicine, e di mano in mano alle più lontane, viene a camminare per un mezzo, che si muove anch'esso con qualche celerità per la medesima direzione. In questa guisa si sminuisce bensì alquanto la resistenza, ma non si muta la legge, avendosi a far il computo sulla velocità relativa del solido rispetto a quella del fluido, succedendo lo stesso, come se il corpo duro camminasse con una celerità minore di quello, che in fatti ha, e con essa si aprisse la strada per mezzo un liquido quieto, e stagnante.

COROLLARIO III.

In qualunque modo, e per qualsivoglia dei canoni già messi in considerazione facciasi la comunicazione dei moti tra il solido, e il fluido, resta s'io non m'inganno, confermata la legge Leibniziana intorno le forze vive. E la ragione si è, perchè se nelle leggi della comunicazione del moto tanto fra corpi molli, quanto fra gli elastici, senza ricorrere alla sentenza del Leibnizio, non ponno salvarsi i Fenomeni, nè si può spiegare, onde nasca la contusione nei primi, nè l'accrescimento di forza, che succede talvolta nell'urto dei secondi; egli è manifesto, che la stessa opinione dee aver luogo anche nell'azioni del fluido contro il solido, o nelle resistenze, con cui ai solidi s'oppongono i fluidi; stante che dipendono queste necessariamente, come s'è fatto vedere, dai Canoni della comunicazione dei moti.

SCHEDIASMA XXIX. (a)

PROBLEMA.

Data in qualsivoglia modo la forza centripeta per la distanza dal centro, e messa la resistenza in ragione composta della velocità attuale duplicata, e della densità del fluido, investigare le leggi della discesa d'un grave.

Stando ferme le condizioni del quisito, ci si presenta la formola generale $-fds = cu^2 \Delta ds = udu$, in cui f ci espone la forza centripeta, S lo spazio da trascorrersi fino al centro, Δ la densità del mezzo, ed u la velocità attuale. Per separare le incognite, preparata la formola giusta il metodo a me familiare, farò $-fds = u^2 \cdot \frac{du}{u} = c\Delta ds$.

Faccio $c\Delta ds = \frac{dz}{z}$, onde essendo Δ dato per s , sia data altresì per s la specie z , ed avrò $-fds = u^2 \cdot \frac{du}{u} = \frac{dz}{z}$. Metto poi $\frac{du}{u} = \frac{dz}{z} = \frac{dp}{p}$

ed integrando, $lu - lz = lp$, e passando dalle quantità logaritmiche alle comuni, $u = zp$, ed $u^2 = z^2 p^2$. Quindi fatte le opportune sottruzioni, $-fds = \frac{u^2 dp}{p} = \frac{z^2 p^2 dp}{p}$, o pure $-\frac{fds}{z^2} = p dp$, e sommando,

$$2 \int -\frac{fds}{z^2} = p^2 + g: \text{ ma } p^2 = \frac{u^2}{z^2}; \text{ dunque } 2z^2 \int -\frac{fds}{z^2} = u^2 + gz^2.$$

La costruzione dipende generalmente dai logaritmi, e dalle quadrature, e se la densità si finge costante, ciò non altera punto l'operazione: come altresì per i varj casi di ascesa, e di discesa basta mutare i segni del più, e del meno. Appresso la soluzione serve a misurare il moto del pen-

(a) Si ricava da una lettera 23. Luglio 1738. del Co. Giordano Riccati al Padre D. Ramiro Rampinelli, che in quel tempo era stato dall'Autore scritto il presente Schediasma.

pendoli in qualunque curva, e specialmente nella Cicloide; sopra di che ho fatto alcune scoperte fin ora non osservate.

E perchè negl'incontri particolari si facilita l'effezione geometrica, ne prendo per mano un esempio. Cada il grave per una verticale verso il proprio centro, e sia la densità del mezzo in proporzione reciproca della lontananza dal centro medesimo, cioè $\Delta = \frac{n}{s}$, e di più la

gravità accelerante come qualsivoglia dignità della menzionata distanza; ovvero $f = as^m$. Regolando su tali dati la formula, trovo $c\Delta ds =$

$$\frac{cnds}{s} = \frac{dx}{x}; \text{ dunque } s^{nc} = x, s^{2nc} = x^2, \text{ e perciò}$$

$$2s^{2nc} \int -\frac{as^m ds}{s^{2nc}} = n^2 + gs^{2nc}. \text{ In questo mentre si rinviene la quan-}$$

$$\text{tità } \int -\frac{as^m ds}{s^{2nc}} = -\frac{as^{m-2cn+1}}{m-2cn+1}; \text{ dunque } -\frac{2as^{m+1}}{m-2cn+1} = nu + gs^{2nc}. \text{ Ora}$$

fa d'uopo determinare la costante aggiunta g . Quando il grave comincia a discendere, si trova rimoto dal centro per la linea data b , ed allora $u = 0$, con che l'equazione si riduce a $-\frac{2ab^{m+1}}{m-2cn+1} = g b^{2nc}$, ov-

vero $-\frac{2ab^{m-2cn+1}}{m-2cn+1} = g$; laonde l'espressione principale piglia la seguen-

$$\text{te forma } \frac{2ab^{m-2cn+1} s^{2nc} - 2a s^{m+1}}{m-2cn+1} = u^2.$$

Qui non vogliono trascurarsi alquante determinazioni. Prima di tutto stabilisco l'esponente $m=0$, onde la gravità si assuma come costante, e si modifichi l'equazione come segue $\frac{2ab^{-2cn+1} s^{2nc} - 2as}{-2cn+1} = u^2$.

Se farà $c=1, n=1$, avremo $\frac{2as-2as^2}{b} = u^2$, il qual luogo è all'ellissi

ordinaria. Cominciando pertanto il moto alla distanza del centro segnata b , passa dalla celerità nulla alla massima corrispondente alla metà del suo viaggio $= \frac{b}{2}$, indi perdendo il mobile a poco a poco la

ve-

velocità acquistata, giunto al suo centro si ravvifa in istato di quiete. Similmente stando intatta la resistenza proveniente dal quadrato della velocità, e la coefficiente $c=1$, se si muta la densità del mezzo, e sia n un qualunque numero intero, ed affermativo (conciossiachè ripugna, che si assuma negativo) egli è evidente, che farà negativo il binomio $-2n+1$, e che l'equazione piglierà l'aspetto $b^{2n-1} s^{-2n}$

$$= \frac{2n-1}{2a} \cdot b^{2n-1} u^2. \text{ Anche qui, la velocità è nulla in due casi,}$$

vale a dire nel cominciamento del moto, quando $s=b$, e nel fine, mentre il mobile giunge al centro, ed è $s=0$. Per rinvenire poi la massima ordinata delle infinite curve locali, prese le differenze nell'ultima espressione, e fatta la flussione $du=0$, nascerà l'equazione

$$b^{2n-1} ds = 2ns^{2n-1} ds, \text{ o pure } \frac{b}{2n} = s, \text{ assillà, a cui risponde}$$

$$\frac{1}{2n}.$$

la massima applicata, o la massima velocità.

Si noti, che quanto è più grande la quantità $2n$, altrettanto vaffi

impicciolendo la grandezza $\frac{1}{2n}$, ch'è il denominatore della frazione

$$\frac{b}{2n}, \text{ discostandosi sempre più da } \frac{b}{2}, \text{ ed avvicinandosi a } \frac{b}{1}, \text{ per}$$

$$\frac{1}{2n-1}.$$

la qual causa lasciato cadere il peso dalla sublimità b , può intervenire, che trascorso qualsivoglia minimo spazio, acquisti esso la velocità massima, la quale totalmente non perda, se non se pervenuto che sia al proprio centro, e compiuto un lunghissimo viaggio. Ma assunta la $2n$ minore

dell'unità, quanto il predetto denominatore $2n$ farà più grande, altrettanto farà più piccola la frazione $\frac{b}{2n} = s$, e conseguente-

mente si accosterà al centro la massima celerità; di modo che potrà venir guadagnata dal grave nello scorrere per un lunghissimo tratto, e poi

352
poi perduta nell'avanzar cammino per un quanto si voglia minimo spazio. In questo mentre fatta infinitesima la coefficiente n , la velocità massima corrisponderà al centro verificandosi allora l'espressione

2a. $b-s=n^2$, e la scala delle celerità crescenti acquistate da un peso libero da ogni resistenza sarà la parabola Apolloniana, conforme la dottrina del Galileo.

Non debbo trascurare l'ipotesi di $n=\frac{1}{2}$. Ripetuta la formola

generale $\frac{2ab^{-2n+1} s^{2n} - 2as}{-2n+1} = n^2$, e surrogata in iscambio di $2n$ l'u-

nità, la cosa si riduce a $\frac{0}{0} = n^2$. In tale incontro egli è d'uopo ri-

correre ai logaritmi, ed ommessa l'Analisi, metto anzi gli occhi la costruzione. Sia (Fig. 108.) A il centro, AB la sublimità, B il principio della discesa, per il qual punto passi il ramo d'una logaritmica decresciente BDF, la di cui tangente sia $=a$ indice della gravità costante: dico, che il rettangolo ACD è sempre uguale al semiquadrato della velocità, dalla quale resta affetto il mobile nel punto C, dopo aver percorso lo spazio BC. Anche nella supposizione, che abbi- am per le mani, la velocità oltre l'esser zero nel punto B, tale sarà altresì nel centro A; perchè assunta Ac inassegnabile, il rettangolo di Ac nell'asintoto infinito AG è una grandezza minore di qualsivisa data.

Per ben concepire l'economia di questi moti, fa di mestieri determinare le scale delle forze attualmente acceleranti, e ritardanti, il che si consegue col prendere la gravità costante espurgata dalle resistenze, e col descrivere le scale stesse, che farebbono discendere il grave colle medesime leggi di celerità nel vano. L'impulso vero sollecitante si misura dall'apotome $a = \frac{n^2 n}{s}$, la quale moltiplicata nell'elemento

$-ds$ dello spazio decresciente ci dà il momento della velocità ndu .

Ora per le nostre formole si ha $\frac{2ab^{-2n+1} s^{2n} - 2as}{-2n+1} = n^2$; dunque nel-

la suddetta apotome sostituito in iscambio di n^2 , il suo valore, si trova $a = \frac{2anb^{-2n+1} s^{2n+1} + 2an}{-2n+1} = F$, impressione variabile, che real-

mente accelera, e poscia ritarda il grave per tutto il corso della c
du-2-

353
dura, ovvero $\frac{a}{-2n+1} = \frac{2anb^{-2n+1} s^{2n+1}}{-2n+1} = F$. A questo passo anno a

distinguerli due casi, secondo che la coefficiente $2n$ è maggiore, o minore dell'unità; perchè se si desse uguaglianza, bisogna come ho detto valersi dei logaritmi.

Nel primo caso essendo negativa la quantità $-2n+1$, ci si presenta l'espressione $\frac{2ans^{2n-1}}{2n+1} = \frac{a}{2n-1} = F$. Sia pertanto (Fig. 109.)

A il centro, AB la sublimità $=b$, e col vertice A intorno l'asse AB s'intenda descritta la parabola ADC, che soddisfaccia all'equazione

$\frac{2ans^{2n-1}}{2n-1} = y$. Pongasi $BE = \frac{a}{2n-1}$, e dal punto E si tiri la retta

EF parallela alla verticale BA, che tagli la curva nel punto D, indi conducansi a BA le normali DG, FA parallele all'applicata CB. Nel principio della caduta si ha la forza centrale $EC=a$, gravità costante, che poi dall'ostacolo delle resistenze si va minorando; così che nel punto D la forza agente si pareggia colla resistente, e diventa nulla. Ivi cessando l'accelerazione, si rinviene la massima velocità, ed in progresso cominciando il ritardamento cagionato dalle impressioni negative contenute nel trilineo DFA, si perde passo passo la celerità acquistata, che s'uguaglia a zero nel centro A, purchè, come succede nella nostra ipotesi, la somma delle forze positive esposta dall'area DEC sia pari a quella delle negative espressa per l'area DFA.

Ciò si verifica ogni qual volta l'area parabolica ABC si eguaglia al rettangolo AE; conciossiachè detratto dall'una parte, e dall'altra il comune trapezio misto compreso dalle tre rette DE, EB, BA, e dalla curva DA, rimangono eguali fra loro i due trilinei DEC, DFA. Ora abbiamo l'elemento dell'area parabolica $\frac{2ans^{2n-1} ds}{-2n+1} = yds$, ed inte-

grando, $\frac{as^{2n}}{-2n+1} = \int yds$, e posta $s=b$, ABC spazio parabolico $=$

$\frac{ab}{-2n+1}$; ma anco il rettangolo AE si misura col prodotto $\frac{a}{-2n+1} \cdot b$; dun-

que s'è provata l'uguaglianza del rettangolo AE con l'area ABCD, e conseguentemente dei due trilinei DEC, DFA.

Facendomi strada al secondo caso, cioè a dire quando la spezie $2n$ è minore dell'unità, ed è positivo il binomio $-2n+1$, mi si presenta la forza variabile $F = \frac{a}{1-2n} - \frac{2anb^{1-2n} s^{2n-1}}{1-2n}$, ed atteso che

l'esponente $2n-1$ è negativo, la curva locale nascente dalla equazione seguente $\frac{2anb^{1-2n} s^{2n-1}}{1-2n} = y$ farà una iperboloido, ch'io suppongo

delineata (Fig. 110.) dentro gli assintoti BA, AH. Metto poscia BE $= \frac{a}{2-2n}$, e tiro la normale EF intersecante la curva nel punto D.

Ad esso, o sia a G corrisponde la massima celerità, e l'aggregato di tutte le impressioni positive, ed acceleranti è compreso dallo spazio CED; siccome quello delle ritardanti, e negative dall'area estesa all'infinito IDFH, le quali due superficie sono fra loro eguali.

Spesse volte le verità dimostrate ci compariscono innanzi sotto l'aspetto di paradossi. Primieramente la scala delle forze centrali acceleranti si esponga (Fig. 111.) per la retta CD parallela alla linea BA della caduta, e colle ordinate all'iperbola volgare EF descritta fra gli assintoti BA, AG s'esprimano le densità variabili del mezzo, onde la resistenza in qualunque punto H s'abbia moltiplicando l'applicata HF nel quadrato della velocità acquistata dal mobile nel sito H. Io voglio supporre, che in tali circostanze il grave pervenuto al centro A si trovi in istato di quiete. Ora minorata a mio piacimento la densità del mezzo, onde mi venga rappresentata dalla iperbola analoga ef, male la discorrerei, s'io dicessi, che non alterandosi nè punto nè poco l'impressione sollecitante BC, mentre la densità più grande del fluido fa, che il corpo pesante si riduca alla quiete nel centro A, la indefinitamente più picciola si comporterà in maniera, che lo stesso corpo giunto in A farà fornito d'un qualche grado di velocità finita. La dimostrazione mi ammonisce, che non debbo fidarmi di questo raziocinio, quantunque a prima vista plausibile.

Secondariamente tengo ferma la scala EF delle densità, ed altresì quella della gravità costante CD, e posto che in sì fatta posizione perda il mobile nel centro A tutta la velocità guadagnata colla caduta, parrebbe, che accresciuto l'impulso accelerante, mettendo la gravità costante multipla di a , o di BC, si avesse ad ottenere, che in A camminasse il grave con una data celerità. E pure la cosa non è così; perchè aumentata sempre più la gravità, tanto e tanto il peso non si avvanzerà mai a scorrere qualsivoglia minimo spazio al disotto del centro A.

Ap-

Appresso si determini la sublimità AB o più lunga, o più corta, ed anche o massima, o minima fisicamente, avranno sempre luogo le verità enunziate.

In terzo luogo posso fingermi estenuata quanto mi piace la densità del fluido resistente, che non ostante ciò, arrivato che sia il grave al centro A, farà privo affatto di moto. Che se la densità stessa diventerà infinitesima, allora il mobile resterà affetto da una velocità finita e

sposta per $\sqrt{2ab}$. Ecco dunque una spezie di salto, per cui si passa da una grandezza nulla ad una determinata. Trovo l'ipotesi, che fa la ve-

locità $= \sqrt{2ab}$, mettendo $n = 0$, e trovo l'altra, che stabilisce la velocità $= 0$, ponendo n uguale a qualunque quantità finita o grande, o picciola: ma cerco indarno la supposizione, che mi dia nel centro

una celerità minore di $\sqrt{2ab}$. Svanisce il paradosso, ogni qual volta si riflette, che allo sminuirsi della spezie n , o della densità del mezzo, ne nasce un doppio effetto, cioè a dire, che la velocità massima ricresce accostandosi sempre più rispetto alla sua grandezza a quella, che

ha luogo nel vuoto, e si esprime per $\sqrt{2ab}$; ed in oltre, ch'essa velocità massima va sempre più avvicinandosi al centro. Prefa pertanto l'abscissa variabile AG (Fig. 112.) nell'ipotesi, che al punto G corrisponda la massima velocità, per le cose dette di sopra ci si presenta l'equazione locale $\frac{b}{2n} = S$, curva appartenente al genere delle

$$\frac{x}{2n} = \frac{x}{2n-2}$$

percorrenti, o esponenziali, per costituire la quale si dee ricorrere ai logaritmi. Noto però, che fatta $n = 0$, anche S diventa zero, e posta n infinita, si trova $s = b$; e la ragione si è, perchè la quantità

$$\frac{x}{2n} = \frac{x}{2n-2}, \text{ ovvero } \frac{x}{2n} = \sqrt{2n} \text{ s'eguaglia all'unità. Principia dunque}$$

la curva dal punto A, ed è assintotica rispetto all'orizzontale BC, come la delineata ADE. In questo mentre essendo $n = \infty$, la velocità massima si rinviene nulla nel punto B, e mentre sia $n = 0$, essa massima celerità rispondente al centro A si misura dal prodotto $\sqrt{2ab}$. Per la qual causa ne'punti intermedj, per esempio G, giacchè n si fa uguale ad una quantità data, la predetta velocità massima GF spettante al punto G starà dentro i limiti stabiliti.

Le conclusioni sin qui rapportate anno luogo con le debite modificazioni in infinite ipotesi differenti, e specialmente in quella, nella quale

Y y 2

quale la forza centripeta si assume proporzionale alla distanza dal centro, onde sia $m=1$, e la formola generale $\frac{2ab^{m-2n} s^{2n} - 2as^{m+1}}{m-2n+1} = nu$

si tramuti nella particolare $\frac{2ab^{2-2n} s^{2n} - 2as^2}{2-2n} = u^2$. In due incontri si

trova nulla la velocità, e messa $s=b$, e qualora nel centro diventa $S=0$. Fatta $2n=1$, si scopre l'equazione $2as = \frac{2as^2}{b} = \frac{u^2}{b}$, simi-

lissima a quella, che ci si è affacciata nella antecedente supposizione della gravità costante, posta ivi però la grandezza $2n=2$, e mentre la sublimità b nell'uno, e nell'altro caso faccia figura d'unità. Cosa curiosa si è, che presa la gravità o costante, o pure variabile in ragione delle lontananze dal centro, se nella prima supposizione la resistenza si espone per $u^2 \cdot \frac{1}{s}$, e nella seconda per $\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{s}$, la scala delle celerità

può essere la medesima. Ora altronde io so, che non variata punto la densità del mezzo $= \frac{1}{s}$, la resistenza dipendente dall'inerzia della ma-

teria, se ne fluidi elastici s'espone per u^2 , in quelli, che sono privi d'elasticità, debbe esprimersi per $\frac{u^2}{2}$.

Ho soddisfatto al Problema proposto, calcando le vestigia impresse da Geometri di prima linea: ma per dir il vero si racchiude nel progresso dell'analisi una tacita supposizione, e consiste nel fingere, che il mezzo fluido resistente al moto del solido sia affatto spogliato di gravità, e che tutto l'intoppo derivi solamente dalla densità, e dall'inerzia. Mentre non si ammetta in Natura la materia sottile del Cartesio, egli è manifesto, che l'ipotesi mal si accorda colla Fisica. Dove poi ci guidi la correzione di sì fatta licenza, io per ora non prendo la briga d'investigarlo.

SHE-

SCHEDIASMA XXX. (*)

PROBLEMA.

Del moto dei pendoli a Cicloide, posta la resistenza del mezzo in ragione duplicata dell'attuale velocità.

Discenda la ghianda del pendolo dal punto di quiete B (fig. 113.); e vada accelerandosi il moto per gli archi crescenti BD della Cicloide: egli è certo, che s'io esporrò il peso assoluto della predetta ghianda, o per dir meglio (quando essa è collocata in un fluido dotato di gravità) il suo peso specifico, e relativo per il doppio diametro del cerchio governatore della curva, la forza tangenziale sollecitante il mobile in qualsivoglia punto, per esempio D, mi verrà rappresentata dall'arco DC, che va a terminare nel punto infimo della Cicloide: dalla qual forza continuamente applicata dee sottrarsi quella della resistenza, che nella nostra ipotesi è proporzionale al quadrato della attuale velocità, e per il prodotto nu^2 generalmente si espone. Quindi chiamati S gli spazj trascorsi come BD, ed a l'arco intiero CB, avremo la formola fondamentale (1^a) $ads - sds - nu^2 ds = udu$.

E qui prima di passar oltre non voglio lasciar d'avvertire, che mentre il pendolo dopo esser disceso per l'arco BC è obbligato a salire per l'arco BE, la nostra espressione differenziale, che serve per la discesa, non patisce alcuna alterazione nel caso della salita. La ghianda monta in virtù dell'impeto impresso, e vi si oppone tanto la sollecitazione della gravità, quanto la resistenza del mezzo. La prima in qualunque punto E è uguale all'arco CE, e si esprime per $s-a$, e la seconda per nu^2 ; dunque moltiplicando ambo queste quantità per l'elemento crescente dello spazio $\frac{1}{2} ds$, e poscia uguagliandole al momento decrescente della velocità $-udu$, troveremo $sds - ads + \frac{1}{2} nu^2 ds = -udu$, o sia $ads - sds - nu^2 ds = udu$.

Per separar le variabili nella equazione (1^a) miste, e confuse, metto in opera i miei soliti artifizj. Prima d'ogni altra cosa faccio $s = \log. x$, e differenziando, $ds = \frac{dx}{x}$, e dopo questa surrogazione preparo l'e-

quazione nella seguente maniera.

(2^a)

(*) Con lettera in data de' 5. Marzo dell'anno 1732. comunicò il Conte Jacopo al Sig. Abate Suzzani la soluzione del presente Problema.