generica di $|iC|$; la detta serie ha l'ordine $2i^2(\pi - 1)$, ed è certo non speciale perchè il genere della curva a cui appartiene vale

$$i(\pi - 1) + \frac{i(i-1)}{2}\, n + 1 < i^2(\pi - 1) + 1 \qquad (n < 2\pi - 2,\ \ i > 1).$$

Segue che la dimensione della serie stessa sarà

$$\varrho_i \leqslant i(2i-1)(\pi - 1) - \frac{i(i-1)}{2}\, n - 1\,.$$

Dunque finalmente la dimensione del sistema $|K^i| = |iC' - iC|$ verrà data da

$$R_i = r'_i - \varrho_i - 1 \geqslant p_a + \frac{i(i-1)}{2}\,(n + \pi' - 3\pi + 2)\,.$$

Ora il numero $R_i + 1$ delle curve K^i linearmente indipendenti è, per definizione, lo i-genere P_i della superficie; si arriva così, tenendo conto inoltre della definizione di ω, alla formola richiesta

$$(1) \qquad P_i \geqslant p_a + \frac{i(i-1)}{2}\,(\omega - 1) + 1 \qquad (n < 2\pi - 2,\ \ i > 1).$$

È qui da osservare che la (1) vale anche nella ipotesi $n = 2\pi - 2$, purchè allora si sappia che la serie segata dal sistema $|iC'|$ sopra una curva generica di $|C|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale, occorrerebbe modificar la (1) diminuendo di una unità il secondo membro. In ogni caso ($n \leqslant 2\pi - 2$) si trova che il genere (virtuale) Π_i e il grado (virtuale) N_i del sistema $|K^i|$ sono espressi da

$$(2) \qquad \Pi_i = \frac{i(i+1)}{2}\,(\omega - 1) + 1\,, \qquad N_i = i^2(\omega - 1)\,.$$

Noi siamo partiti dalla ipotesi che il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F abbia $n \leqslant 2\pi - 2$; se invece sussistesse la disuguaglianza contraria $n > 2\pi - 2$, o la $\pi > \pi'$ in qualche modo equivalente alla precedente, allora non esisterebbe certo il sistema $|K^i| = |iC' - iC|$, ma potrebbe esistere il sistema $|K^{-i}| = |iC - iC'|$. Del detto sistema si calcolano facilmente la dimensione R_{-i}, il grado N_{-i} e il genere Π_{-i} ($i \geqslant 1$) seguendo una via perfettamente analoga a quella sopra indicata. Si trova precisamente, se $\pi > \pi'$,

$$(1') \qquad R_{-i} \geqslant p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\omega - 1),$$

$$(2') \qquad \Pi_{-i} = \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1, \qquad N_{-i} = i^2(\omega - 1).$$

Ma il sistema $|K^{-i}|$ non offre grande interesse, perchè, come vedremo, esso non può presentarsi che sopra le superficie razionali o rigate.

6. – Un *secondo invariante relativo* della superficie F, si ottiene nel modo seguente:

Si consideri sopra F un fascio lineare di curve irriducibili, di genere $\pi > 0$, avente n punti base (considerando ora come punto base *assegnato*, *ogni* punto comune alle curve del fascio), e si designi con δ il numero delle curve del fascio dotate di un punto doppio; *l'espressione*

$$I = \delta - n - 4\pi,$$

non dipende dalla scelta arbitraria del fascio, e costituisce perciò un invariante relativo della superficie ([18]).

Questo carattere varia, come ω, ma in senso opposto, nelle trasformazioni che introducono nuove curve eccezionali, o al contrario ne fanno scomparire.

Riproduciamo brevemente, per chiarezza, la dimostrazione che di queste proprietà dà il sig. SEGRE, rimandando il lettore, desideroso di maggiori particolari, alla Memoria originale citata.

Siano $|C|$, $|C_1|$ due fasci lineari situati sulla nostra superficie, fasci che possiamo supporre del tutto indipendenti tra loro; indichiamo con π, π_1 i generi delle curve C, C_1, con n, n_1 i numeri dei punti base dei due fasci, con s il numero dei punti comuni a due curve generiche C, C_1. Fissiamo la nostra attenzione sulla curva T luogo dei punti di contatto di una C con una C_1; ed esaminiamo in quanti punti la T sia segata da una C e da una C_1, fuori dei punti base dei due fasci. I punti comuni

---

([18]) Cfr. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie ...*, « Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino », 1896. L'espressione I per un fascio di sezioni piane di una superficie (dello spazio S_3) fu considerata dapprima dal Sig. ZEUTHEN, che ne mise in luce il carattere invariante sotto una forma un po' diversa (vedi il n. 24 delle *Études géométriques ...*, « Mathem. Annalen », IV, 1871), e più tardi dal Sig. NOETHER (*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens ...*, « Mathem. Annalen », VIII, 1874, pag. 526), il quale ne diede l'espressione per mezzo dei due generi p_a, $p^{(1)}$ della superficie, come sarà indicato nel seguito.