510.8 S438 (2)

FRANCESCO SEVERI

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE

A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume secondo

1909-1917

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1974



L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI

ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

ROMA, 1974 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei

XLII.

SUR LES INTÉGRALES DOUBLES DE PREMIÈRE ESPÈCE ATTACHÉES À UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *148*$_1$ (1909), pp. 80–81.

On a épuisé désormais la recherche du nombre des intégrales simples de première espèce attachées à une surface ou plus généralement à une variété algébrique. Je me propose de trouver ici les conditions pour qu'une variété à trois dimensions

$$f(x, y, z, t) = 0$$

possède des intégrales doubles de première espèce.

D'après M. Poincaré, la variété f possède autant de cycles distincts à quatre dimensions que de cycles distincts à deux dimensions. Soit R le nombre de ces cycles.

On démontre alors aisément que l'on peut obtenir sur une surface

$$f(x, y, \bar{z}, t) = 0 \qquad (\bar{z}, \text{ paramètre})$$

R cycles *distincts* à deux dimensions, en coupant R cycles distincts à quatre dimensions de la variété, avec l'espace $z = \bar{z}$. Il va sans dire qu'un de ces cycles pourra donner sur la surface $f(x, y, \bar{z}, t) = 0$ deux ou plusieurs cycles séparés; mais en ce cas on formera la *somme* de ces cycles en les réunissant par des petites surfaces cylindriques.

Après une circulation de $\bar{z}$, les R cycles ainsi obtenus reviennent en eux-mêmes: on les nommera par suite des *cycles invariants*.

Ceci posé, envisageons une intégrale du type

$$\iint \frac{\varphi(x, y, \bar{z}, t)}{f'_t}\, dx\, dy, \tag{1}$$

$\varphi(x, y, z, t)$ étant un polynome d'ordre $m - 4$, adjoint à la variété f d'ordre m.

Les périodes de (1), le long des cycles invariants, sont des fonctions uniformes partout finies de $\bar{z}$, et par suite elles se réduisent à des constantes.

En développant ces périodes dans le domaine de $\bar{z} = \infty$, comme le fait M. Picard dans un cas analogue, on trouve que les constantes susdites sont nulles.

D'où l'on tire qu'une intégrale double de première espèce I, attachée à notre variété, ne peut pas donner sur la surface $f(x, y, \bar{z}, t) = 0$ une

intégrale du type (1). En effet, dans l'hypothèse contraire, toute période de I, étant une combinaison des périodes relatives aux cycles invariants, serait nulle. On arrive, par suite, à la conclusion que *le nombre Q des intégrales doubles de première espèce attachées à la variété f ne peut pas surpasser le défaut du système linéaire coupé sur un espace* $z = \bar{z}$ *par les variétés d'ordre* $m - 4$ *adjointes à f.*

J'en déduis l'inégalité

$$Q \leq q_1 + q_2, \tag{2}$$

q_1 étant la différence $p_g - p_a$ entre les genres d'une section $z = \bar{z}$ et q_2 la différence $P_g - P_a$ entre les genres de la variété f elle–même.

Peut–on transformer (2) en une égalité, comme il arrive dans beaucoup de cas particuliers? Voilà une question très difficile qui demeure en suspens.

XLIII.

FONDAMENTI PER LA GEOMETRIA SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE [1].

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 28_2 (1909), pp. 33–87.

Tra le proprietà delle funzioni algebriche di 2 variabili, quelle che s'ottengono per immediata estensione da analoghe proprietà delle funzioni d'una variabile, dànno in complesso una conoscenza assai scarsa della geometria sopra una superficie.

E invero, le proposizioni essenziali di questa teoria sono state ottenute soltanto attraverso difficoltà non lievi, coll'aiuto di concetti o di procedimenti nuovi.

Lo stesso fatto sembra debba verificarsi nel trapasso dalle superficie alle varietà a tre e a più dimensioni. Non parrà pertanto fuor di luogo lo studio da me intrapreso, anche se, lumeggiando soltanto alcune tra le proprietà generali, esso ne lasci in ombra moltissime altre e di capitale importanza.

Dopo i lavori classici in cui il Noether stabilì i primi concetti della teoria, pochissimi sono stati i contributi portati in questo ordine di studi, e, se non erro, essi toccarono sempre classi particolari di varietà. Gli è che, pur limitando il campo delle indagini, si presentano in questo indirizzo questioni importanti e difficili. Basti a tal proposito citare il problema che concerne la razionalità o meno della varietà cubica generale dello spazio S_4, attorno al quale i geometri si affaticano indarno da tempo [2].

Darò qui un cenno dei risultati che mi sembrano di maggior rilievo nel presente lavoro.

Cito anzitutto la relazione fondamentale

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$

che passa tra il genere aritmetico P_a di una varietà V a tre dimensioni e i caratteri virtuali Ω_0, Ω_1, Ω_2 – grado, genere curvilineo, genere aritmetico –

(1) Un riassunto di alcune parti della presente Memoria trovasi nella mia Nota: *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche*, Rendic. della R. Acc. dei Lincei, (5) *16* (1907), pp. 337–344 [Nota XXXIV, vol. I, p. 421; N.d.R.].

(2) Il fatto che questi sforzi non sieno stati ancora coronati da successo, fa dubitare che si tratti di una varietà irrazionale; tanto più che or ora il Fano è riuscito a dare esempi di varietà irrazionali con tutti i generi nulli! Cfr. G. FANO, *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, *43* (1907–1908), pp. 973–984.

del relativo sistema canonico (eventualmente virtuale). La dimostrazione è assai laboriosa e non mi nascondo che si potrà forse semplificarla, eliminandone alcuni elementi che a priori non sembrano strettamente essenziali, per la natura del risultato cui si vuol giungere.

Senza dubbio il procedimento numerativo apparirebbe come la via maestra e più elementare, trattandosi di stabilire una relazione che in fondo è numerativa; ma non sembra d'altronde ch'esso conduca al risultato per la via preferibile, data la lunghezza e la minuzia dei calcoli necessari.

La relazione fondamentale non ha la sua analoga sulle superficie, giacchè su queste il genere aritmetico è indipendente dal grado e dal genere del sistema canonico.

Per le varietà a tre dimensioni si presentano due irregolarità: l'*irregolarità superficiale*, cioè l'irregolarità, costante sotto certe ipotesi (Castelnuovo–Enriques), di una superficie appartenente a V, e l'*irregolarità tridimensionale*, che è la differenza tra il genere geometrico P_g ed il genere aritmetico P_a della varietà. Quest'ultima irregolarità può anch'essere negativa!

La somma delle due irregolarità viene ad esser legata, sia alla deficienza del sistema staccato sopra una superficie F dal proprio sistema aggiunto $|F'|$ (Teorema X), sia alle deficienze della serie lineare segata sopra una curva caratteristica C di F, dal sistema $|2C|$, e del sistema lineare staccato su F dalle superficie canoniche di V (Teorema XV).

Il primo legame dà anzi modo di stabilire così l'invarianza assoluta del genere aritmetico P_a come il teorema di Riemann–Roch pei sistemi lineari di superficie che si posson considerare come aggiunti di altri (Teoremi XI, XII). Quanto al secondo legame – la cui dimostrazione è alquanto laboriosa – converrà forse cercare di sfruttarlo per studiare più intimamente l'irregolarità tridimensionale.

Da che le condizioni d'esistenza su V d'integrali semplici e tripli di 1ª specie son completamente note, io mi son proposto di studiare, almeno dal lato qualitativo, le condizioni d'esistenza di integrali doppi di 1ª specie [3]. E son riuscito a dimostrare, con un ragionamento abbastanza semplice (che è applicabile anche per la ricerca analoga degl'integrali picardiani d'una superficie), che *il numero degl'integrali doppi di 1ª specie appartenenti a V, non supera la somma delle due irregolarità*. Quello che ne segue di impreveduto, è che la varietà possa avere le due irregolarità non nulle (uguali in valore, ma opposte di segno), senza che tuttavia essa possegga integrali doppi di 1ª specie.

Termino il lavoro con pochi cenni d'estensioni alle varietà superiori, per le quali scrivo la relazione fondamentale. Questa relazione lega il genere aritmetico ai caratteri del sistema canonico, soltanto nel caso di varietà di dimensione dispari.

(3) Ho comunicato il risultato alla sezione matematica del Congresso tenutosi a Firenze, nell'ottobre 1908, dalla Società Italiana pel Progresso delle Scienze [ved. F. SEVERI, *Sugli integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una varietà algebrica a tre dimensioni*, Atti Soc. Ital. Progr. Scienze (1909), pp. 311–312].

Considerazioni generali sulle varietà algebriche.

1. *Generalità. Sistemi lineari sopra una varietà algebrica* V_d. – I primi concetti sui sistemi lineari di varietà a $d-1$ dimensioni appartenenti ad una V_d (irriducibile), sono da riguardarsi come noti, perché possono stabilirsi come estensioni immediate delle analoghe nozioni relative a curve e superficie.

I concetti ai quali alludiamo si riferiscono segnatamente all'unicità del sistema lineare completo cui appartiene una data varietà a $d-1$ dimensioni (con un assegnato gruppo base), alle operazioni di somma e sottrazione tra i sistemi lineari appartenenti a V_d, alla definizione e alle proprietà del sistema aggiunto di un dato; ecc.

Si può anche dimostrare, coll'aiuto di un'estensione ormai nota del teorema di Noether $Af + B\varphi$, che *sopra una forma (ipersuperficie) V dello spazio S_{d+1}, dotata di una varietà doppia ordinaria M, a $d-1$ dimensioni, le forme aggiunte, cioè quelle che passano per M, segnano ulteriormente un sistema lineare completo* [4].

Non tralascierò di esporre una semplice dimostrazione di questo teorema, la quale può fondarsi sopra una proposizione stabilita dal prof. Bertini in una lettera a me diretta [5].

Si vuol provare che le aggiunte d'un ordine assegnato l, segnano su V, fuori di M, un sistema completo. A tal uopo consideriamo $d-1$ forme generiche $F_1, \cdots, F_{d-1}$, di ordini abbastanza alti – nel senso che verrà tosto precisato – e indichiamo con C la curva comune a V e alle F, la quale avrà altrettanti nodi nel gruppo G dei punti in cui essa appoggiasi ad M. Si denoti inoltre con $|H|$ il sistema completo che contiene (o coincide con) quello staccato su V dalle aggiunte d'ordine l.

Gli ordini delle F possono supporsi così elevati che:

1) Ogni forma d'ordine l passante pel gruppo G contenga di conseguenza la M. Si cominci infatti a scegliere una F_1 d'ordine maggiore di l, non contenente alcuna parte di M: allora ogni forma d'ordine l contenente la intersezione $M^{(1)}$ di F_1 e di M, contiene di conseguenza M.

Si scelga poi una F_2 d'ordine maggiore di l, che non contenga alcuna parte di $M^{(1)}$: allora ogni forma d'ordine l contenente la intersezione $M^{(2)}$ di F_2 e di $M^{(1)}$, contiene $M^{(1)}$ e quindi M. Così continuando si perviene ad un gruppo di punti $G \equiv M^{(d-1)}$ tale che ogni forma d'ordine l contenente $M^{(d-1)}$, conterrà $M^{(d-2)}$ e quini $M^{(d-3)}, \cdots$, e infine M.

(4) L'estensione cui si allude è contenuta in una mia Nota: *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, Rendic. della R. Acc. dei Lincei, (5) 9 (1902), pp. 105–113. Per altre estensioni, cui convien ricorrere quando la forma data nello S_{d+1} possegga varietà più che doppie, veggasi F. Severi, *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, *41* (1905–1906), pp. 205–223 e R. Torelli, *Sopra certe estensioni del teorema di Noether $Af + B\varphi$*, Ibid. id., pp. 224–234.

(5) E. Bertini, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* (Lettera al Prof. F. Severi), Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, *43* (1907–1908), pp. 847–852.

2) Non esistano varietà H passanti per C. Si scelga infatti la F_1 d'ordine sì alto, che essa stacchi su V una varietà $V^{(1)}$ irriducibile, d'ordine maggiore di quello di H: non vi saranno allora varietà H per $V^{(1)}$. Dicasi $H^{(1)}$ la intersezione di H e di $V^{(1)}$, e si scelga la F_2 in guisa ch'essa stacchi su $V^{(1)}$ una varietà $V^{(2)}$ irriducibile, d'ordine maggiore di quello di $H^{(1)}$: non vi saranno allora varietà $H^{(1)}$ per $V^{(2)}$, né, quindi, varietà H per $V^{(2)}$.

Così proseguendo si giunge alla curva $C \equiv V^{(d-1)}$ tale che non esistono varietà H passanti per essa.

È chiaro che le due condizioni 1) e 2) posson esser soddisfatte simultaneamente.

Ciò posto, si applichi la proposizione del Bertini, che cioè le forme d'ordine arbitrario, e in particolare quella d'ordine l, uscenti da G, segnano su C, fuori di G, una serie completa. Se ne trarrà, in virtù della proprietà 1), che il sistema segnato su V, fuori di M, dalle forme aggiunte d'ordine l, stacca su C una serie completa: la medesima serie sarà pertanto staccata su C dal sistema completo $|H|$.

D'altronde, in virtù della proprietà 2), la dimensione di $|H|$ e così pure la dimensione del sistema segnato su V dalle aggiunte, uguagliano la dimensione della serie staccata su C: dunque i due sistemi coincidono, cioè il sistema segnato dalle aggiunte è completo. c.d.d.

Quando V_d appartiene allo S_r ed è priva di singolarità, come forme aggiunte a V, con cui segare i sistemi lineari completi esistenti sulla data varietà, si possono assumere le forme passanti per la varietà V'_d ulteriormente comune ad $r - d$ forme condotte in modo generico per V. La dimostrazione che ho esposto altrove [6] pel caso delle curve e delle superficie, vale con opportuni cambiamenti di linguaggio, anche per varietà qualunque [7].

2. Una prima conseguenza di quest'ultimo teorema è che:

Sopra una varietà V_d, priva di punti multipli, le forme d'un ordine abbastanza alto segnano un sistema lineare completo.

Ammesso il teorema per le varietà a $d - 1$ dimensioni, lo si deduce per le varietà a d dimensioni.

Infatti la varietà Φ_{d-1} comune alle V, V', di cui alla fine del n. precedente, a causa della genericità delle $r - d$ forme $F_1, F_2, \cdots, F_{r-d}$ condotte per V, può supporsi irriducibile e priva di punti multipli. Per convincersene basta far variare le F, tenendo però fissi i loro ordini. La Φ varia allora su V in un sistema lineare, il quale:

a) non ha parti fisse, perché altrimenti comunque si conducessero le F, in certi punti fissi di V i relativi iperpiani tangenti sarebbero dipendenti,

(6) F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, *17* (1903), pp. 73–103; §§ 2, 4 [Memoria XIII, vol. I, p. 132; N.d.R.].

(7) Pel caso di varietà con punti multipli veggasi: F. SEVERI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* (Lettera al Prof. E. BERTINI), cit. in (5).

mentre scelto un punto *qualunque* P di V, si posson sempre costruire $r-d$ forme–coni proiettanti V, i cui iperpiani tangenti riescano indipendenti in P;

b) è irriducibile, perché gli ordini delle F posson supporsi così elevati che il sistema $|\Phi|$ contenga parzialmente le sezioni iperpiane di V; donde segue che $|\Phi|$ non può esser composto con un fascio.

Ciò premesso, dicasi $|A|$ il sistema lineare, di dimensione s, staccato su V dalle forme d'un ordine l così elevato, che il sistema, di dimensione t, da esse segnato su Φ sia completo; e s'indichi con $|B|$ il sistema segato su V, fuori di Φ, dalle forme d'ordine l passanti per Φ.

Il sistema lineare $|A|$ e il sistema completo di dimensione $s+\delta$ ($\delta \geq 0$) che lo contiene totalmente, segnano su Φ lo stesso sistema lineare (completo), di guisa che la dimensione del sistema completo individuato da una B risulta uguale ad $s+\delta-t-1$. D'altronde, pel teorema enunciato alla fine del n. precedente, il sistema $|B|$, di dimensione $s-t-1$, è esso medesimo completo, dunque risulta $\delta = 0$.

Il teorema essendo vero per le curve (Castelnuovo), resta così dimostrato per varietà qualunque.

Osservazione I. – Quando V sia completa intersezione di forme (e sempre priva di punti multipli) il teorema vale per le forme d'ordine arbitrario.

Osservazione II. – Si noti che il semplice ragionamento sopra esposto prova in sostanza che « quando si ha su V_d un sistema lineare $|A|$, il quale soddisfaccia alle due condizioni:

1) di segare su una Φ_{d-1} appartenente a V_d un sistema completo;

2) di dar luogo ad un residuo completo $|A-\Phi|$;

si può affermare che $|A|$ è esso pure completo ».

Rileviamo ciò in modo esplicito, per poter più tardi esimerci con un richiamo, da una più lunga considerazione.

Osservazione III. – Ci occorrerà anche in seguito di aver notato che « sopra la varietà V_d le varietà a $d-1$ dimensioni di un sistema lineare $|M|$, offrono la stessa postulazione alle forme d'ordine l abbastanza alto ».

Dicasi $|A|$ il sistema (completo) segnato su V dalle forme d'ordine l assai alto. Risulterà completo anche il residuo $|N| = |A-M|$, e quindi la dimensione di $|N|$ resterà costante al variare di M entro al proprio sistema lineare.

D'altra parte

$$\text{dimensione } |N| = \text{postulazione } V - \text{postulazione } M - 1,$$

dunque risulta costante la postulazione di M.

3. *Legame tra la postulazione di una varietà spezzata in più parti e le postulazioni delle singole parti.* – È noto che il numero delle condizioni che un gruppo–base di dimensione d (cioè tale che d sia la massima dimensione delle varietà che lo costituiscono), presenta alle forme d'ordine l, abbastanza

alto, dello S_r, è espresso dalla formola (di postulazione):

$$\sum_{i=0}^{d} k_i \binom{l+d-i}{d-i},$$

ove le k_i son numeri caratteristici del gruppo base. Anzi le $k_0, k_1, \cdots, k_{d-1}$ sono i coefficienti della formola di postulazione relativa al gruppo–base che s'ottiene tagliando con un iperpiano generico il gruppo–base dato [8].

Nel seguito parlando di forme d'ordine l, in relazione ad una data varietà V, supporremo sempre l così grande, che la formola di postulazione di V sia applicabile per calcolare il numero effettivo delle condizioni che V presenta alle forme di quell'ordine; e indicheremo in modo generale con $v(l)$ la formola di postulazione stessa, usando la lettera minuscola corrispondente a quella, majuscola, adoperata per designare la varietà.

Ci proponiamo anzitutto di stabilire i seguenti teoremi:

I) *Sia W_{d-1} l'intersezione di una varietà V_d con una forma F, d'ordine q, che non contenga alcuna parte di V: allora tra le formole di postulazione delle V, W passa la relazione*

$$v(l+q) = v(l) + w(l+q).$$

II) *Sia Y una varietà formata da due varietà irriducibili $V_d, V_{d'}$ $(d \leq d')$ che si taglino secondo una varietà X_{d-1}: allora tra le formole di postulazione delle varietà nominate, passa la relazione*

$$v(l) + v'(l) = x(l) + y(l).$$

Nella Memoria del LASKER, *Zur Theorie der Moduln und Ideale* [9] si trova (n. 20) un teorema che ha molta analogìa col Teorema I. Là si parla di un modulo (V) e di una forma (F), e si considera il massimo comun divisore dei due moduli (V) ed (F): tra le *formole caratteristiche* $v(l)$ e $w(l)$ del modulo (V) e del massimo comun divisore di (V) ed (F) passa allora la relazione sopra scritta.

Il nostro Teorema I esprime però qualcosa di sostanzialmente diverso, perché non si può affermare che il massimo comun divisore dei due moduli (V) ed (F) sia costituito da *tutte* le forme che passano per la varietà W comune a V e ad F [10].

(8) Vedi E. BERTINI, *Lezioni sulla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), Cap. XI.

(9) Mathematische Annalen, *60* (1905), pp. 20–116.

(10) Tanto varrebbe riguardare come evidente il fatto che il sistema lineare *congiungente* dei sistemi costituiti dalle forme d'ordine l per V e dalle forme d'ordine l che contengono come parte F, è il sistema delle forme d'ordine l per W, Il Teorema I afferma in sostanza che ciò è vero (ma soltanto per l assai grande). Il teorema stesso può quindi enunciarsi dicendo che ogni forma d'ordine l assai grande che passi per W, appartiene al massimo comun divisore dei due moduli (V) ed (F). — *Non si può insomma affermare che il massimo comun divisore dei moduli definiti da due varietà, sia il modulo definito dalla loro intersezione.* Si dànno anzi facilmente esempi in contrario. Basta considerare nello spazio ordinario i moduli definiti da una quartica di 2ª specie e da un piano.

Per la stessa ragione il Teorema II non può considerarsi come una forma diversa della nota relazione di Hilbert, tra le funzioni caratteristiche di due moduli e le funzioni caratteristiche del loro massimo comun divisore e dei loro minimo comun multiplo (11).

La dimostrazione dei Teoremi I, II si farà simultaneamente per induzione.

Supponiamo dimostrato il Teorema II per le varietà composte da una $V'_{d'}$ di dimensione d' qualunque, e da una varietà di dimensione $< d$. In quest'ipotesi dimostriamo il Teorema I.

Indichiamo con S_r lo spazio ambiente e con T la sezione iperpiana generica di V. Dalla relazione che passa tra le dimensioni dei sistemi lineari Σ, Σ' costituiti dalle forme degli ordini l, $l+1$ per V, e del sistema lineare staccato da Σ' sull'iperpiano contenente T, si trae

$$v(l+1) = v(l) + t(l+1). \tag{1}$$

Applicando successivamente questa relazione da $l+1$ ad $l+q$ e sommando quindi membro a membro le uguaglianze ottenute, viene

$$v(l+q) = v(l) + t(l+1) + t(l+2) + \cdots + t(l+q). \tag{2}$$

Ciò posto, si osservi che la postulazione della sezione T_2 di V con una quadrica, può ottenersi considerando in particolare una quadrica spezzata in due iperpiani (n. 2, Osservazione III). D'altra parte, per calcolare la postulazione della varietà insieme di due sezioni iperpiane (che hanno la dimensione $d-1$), si può applicare il Teorema II. Ne deriva che

$$t_2(l+2) = 2t(l+2) - u(l+2), \tag{3}$$

ove U denota la sezione di V con un S_{r-2}.

Il procedimento stesso con cui si perviene alla (1), applicato alla sezione iperpiana di V, dà

$$t(l+2) = t(l+1) + u(l+2),$$

onde la (3) diviene

$$t_2(l+2) = t(l+1) + t(l+2).$$

Così continuando si trova

$$w(l+q) = t_q(l+q) = t(l+1) + t(l+2) + \cdots + t(l+q).$$

La (2) riducesi perciò alla relazione che volevasi dimostrare.

Passiamo ora a stabilire il Teorema II per le varietà composte da una $V'_{d'}$ e da una V_d, supponendolo sempre già dimostrato per le varietà composte da una $V'_{d'}$ e da una varietà di dimensione $< d$.

(11) D. HILBERT, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann., *36* (1890), pp. 473-534; p. 517.

Per V' conduciamo una forma F d'ordine q, che non contenga V, e indichiamo con Z_{d-1} la varietà intersezione di F e V, fuori di X; indichiamo inoltre con H_{d-2} la varietà comune ad X, Z od anche a V', Z.

Le forme d'ordine $l+q$ passanti per la varietà $V'+Z$, segnano su V, fuori di $X+Z$, un sistema lineare Σ che contiene totalmente quello segnato su V dalle forme d'ordine l; e poiché quest'ultimo sistema ha la dimensione $v(l)-1$, si avrà intanto

$$\dim \Sigma \geq v(l) - 1. \tag{4}$$

D'altra parte, per l assai grande la varietà Z imporrà

$$z(l+q) - h(l+q) \tag{5}$$

condizioni alle forme d'ordine $l+q$ già passanti per V', come si vede applicando il Teorema II alla varietà composta $V'+Z$ (il che, per l'ipotesi fatta, è lecito). Si può dire, in altri termini, che (5) esprime pure il numero delle condizioni che Z presenta alle varietà del sistema lineare Σ' staccato su V, fuori di X, dalle forme d'ordine $l+q$ per V'. Onde risulterà

$$\dim \Sigma' = z(l+q) - h(l+q) + \dim \Sigma \geq z(l+q) - h(l+q) + v(l) - 1.$$

Alla varietà composta $W = X + Z$ si può applicare il Teorema II, perché essa consta di due parti di dimensione $d-1$: si ottiene in tal modo la relazione

$$w(l+q) = x(l+q) + z(l+q) - h(l+q).$$

D'altronde pel Teorema I

$$v(l+q) = v(l) + w(l+q),$$

dunque

$$\dim \Sigma' \geq v(l+q) - x(l+q) - 1. \tag{6}$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza esprime la dimensione del sistema lineare Σ'' segnato su V, fuori di X, dalle forme d'ordine $l+q$ per X. Poiché il sistema Σ'' contiene totalmente Σ', nella (6) dovrà valere il segno $=$.

Se si osserva ora che la dimensione di Σ' è pure espressa da

$$y(l+q) - v'(l+q) - 1,$$

ove si è posto $Y = V + V'$, confrontando colla (6), che è ormai ridotta ad un'uguaglianza, si perviene alla relazione da dimostrarsi

$$v(l+q) + v'(l+q) = x(l+q) + y(l+q).$$

Poiché questa relazione è evidentemente vera allorquando la varietà Y si componga di una $V'_{d'}$ e di un gruppo V di punti ($d = 0$), il Teorema II resta dimostrato in ogni caso e risulta così completa anche la dimostrazione del Teorema I.

Osservazione. – Si noti che pel ragionamento precedente occorre soltanto la irriducibilità della varietà V su cui si considerano i sistemi lineari Σ, Σ', Σ''; ma non la irriducibilità della varietà V'. Ciò dà modo di estendere il Teorema II ad ogni varietà composta di un numero qualunque di varietà irriducibili.

4. *Genere aritmetico d'una varietà qualunque.* – Nello S_r sia V_d una varietà algebrica, irriducibile o no, priva di varietà multiple della sua stessa dimensione, e sia

$$(7) \qquad v(l) = k_0\binom{l+d}{d} + k_1\binom{l+d-1}{d-1} + \cdots + k_{d-1}(l+1) + k_d$$

la formola di postulazione ad essa relativa.

Il significato dei coefficienti $k_0, k_1, \cdots, k_d$ è noto quando $d = 0, 1, 2$. Nel caso $d = 0$, il coefficiente k_0 non è altro che il numero dei punti del gruppo; nel caso di una curva irriducibile, senza singolarità, d'ordine $p_0 + 1$, e genere p_1, si ha (Cayley, Noether, Castelnuovo)

$$k_0 = p_0 + 1, \qquad k_1 = -(p_0 + p_1);$$

nel caso di una superficie, senza singolarità, di genere aritmetico p_2, la cui sezione iperpiana abbia l'ordine $p_0 + 1$ e il genere p_1, si ha:

$$k_0 = p_0 + 1, \qquad k_1 = -(p_0 + p_1), \qquad k_2 = p_1 + p_2 \text{ (12)}.$$

Sicché nel caso d'una curva risulta

$$p_1 = -(k_0 + k_1 - 1);$$

e nel caso d'una superficie

$$p_2 = k_0 + k_1 + k_2 - 1.$$

Ciò premesso, per una qualunque V_d si affaccia subito l'idea di definire il *genere aritmetico virtuale* mediante la formola

$$p_d = (-1)^d (k_0 + k_1 + \cdots + k_d - 1).$$

Dopo ciò *la formola di postulazione d'una varietà V_d qualunque potrà scriversi così*

$$(8) \qquad \begin{cases} v(l) = (p_0+1)\binom{l+d}{d} - (p_0+p_1)\binom{l+d-1}{d-1} + \cdots \\ \cdots + (-1)^{d-1}(p_{d-2}+p_{d-1})(l+1) + (-1)^d(p_{d-1}+p_d), \end{cases}$$

ove $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_d$ *sono i generi aritmetici virtuali delle sezioni di V rispettivamente cogli spazi* $S_{r-d}, S_{r-d+1}, S_{r-d+2}, \cdots, S_r$,

Quando la V_d sia irriducibile e priva di singolarità, il numero p_d si chiamerà *genere aritmetico effettivo* o semplicemente *genere aritmetico.*

(12) F. SEVERI, *loc. cit.* (6), n. 26.

Ma *la* (8) *resterebbe un'inutile trasformazione formale della* (7), qualora non si stabilisse che, nel caso di varietà irriducibili, i generi aritmetici sono caratteri invarianti di fronte alle trasformazioni birazionali.

Il fatto è ormai classico per le curve e le superficie. Sfortunatamente per le varietà superiori la dimostrazione si presenta tutt'altro che agevole [13]: in questo lavoro si troverà stabilita in modo completo soltanto per le varietà a tre dimensioni e accennata per le varietà di dimensione maggiore.

5. *Legame tra il genere aritmetico virtuale d'una varietà spezzata e i generi aritmetici delle singole parti.* – Dimostriamo il teorema seguente:

III) *Se la varietà* V_d *di genere aritmetico virtuale* p_d, *è composta di due parti* V'_d, V''_d, *di generi rispettivi* p'_d, p''_d, *le quali si taglino secondo una varietà* X_{d-1}, *di genere* q_{d-1}, *sussiste la relazione*

$$p_d = p'_d + p''_d + q_{d-1}.$$

Il teorema è noto nel caso delle curve (Noether); tuttavia, volendo procedere per induzione, ci rifaremo da questo caso.

Sieno

$$v(l) = (p_0 + 1)(l+1) - (p_0 + p_1), \qquad v'(l) = (p'_0 + 1)(l+1) - (p'_0 + p'_1),$$

$$v''(l) = (p''_0 + 1)(l+1) - (p''_0 + p''_1), \qquad x(l) = q_0 + 1,$$

le formole di postulazione relative alle curve V, V', V'' e al gruppo di punti X.

È chiaro che il teorema sarà stabilito in generale, quando lo avremo dimostrato nel caso in cui una delle due varietà V', V'' sia irriducibile.

In quest'ipotesi si può applicare il Teorema II e scrivere

$$v(l) + x(l) = v'(l) + v''(l). \tag{9}$$

Poiché tra gli ordini $p_0 + 1$, $p'_0 + 1$, $p''_0 + 1$ delle V, V', V'', si ha evidentemente la relazione

$$p_0 = p'_0 + p''_0 + 1,$$

la (9) riducesi immediatamente a

$$p_1 = p'_1 + p''_1 + q_0.$$

(13) A pag. 520 della Memoria citata, (11), il sig. Hilbert scrive le parole seguenti: « ... während die ubrigen Coefficienten (della formola caratteristica) mit den von M. Noether definirten und behandelten Geschlechtzahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen. Der allgemeine Beweis hierfür beruht auf dem Schlusse von $n-1$ auf n Veränderliche. Wie man sieht finden sich die eben angegebenen Sätze in dem Falle der Curve im dreidimensionalen Raume in der That bestätigt ». Queste parole debbono riguardarsi piuttosto come un accenno ad un problema da risolversi, che ad una facile risoluzione della questione stessa; tanto più che i coefficienti k_i non potrebbero in generale esprimersi mediante i generi *geometrici* introdotti da Noether.

Passiamo al caso generale, supponendo già acquisito il teorema per le varietà di dimensione $< d$. Si hanno le formole di postulazione

$$v(l) = \sum (-1)^i (p_{i-1} + p_i) \binom{l+d-i}{d-i}, \qquad v'(l) = \sum (-1)^i (p'_{i-1} + p'_i) \binom{l+d-i}{d-i},$$

$$v''(l) = \sum (-1)^i (p''_{i-1} + p''_i) \binom{l+d-i}{d-i}, \qquad x(l) = \sum (-1)^i (q_{i-1} + q_i) \binom{l+d-i-1}{d-i-1},$$

tra le quali, in virtù del Teorema II, passa la relazione (9).

Per ipotesi sussistono le uguaglianze

$$p_i = p'_i + p''_i + q_{i-1} \qquad (i = 0, 1, \cdots, d-1 ; q_{-1} = 1),$$

mediante le quali la (9) riducesi alla relazione da dimostrarsi.

Osservazione I^a. – L'applicazione replicata del teorema permette di calcolare il genere aritmetico virtuale d'una varietà V_d composta di più parti, le quali si possano ordinare in tal guisa che ciascuna abbia a comune colla successiva una varietà di dimensione $d-1$.

Osservazione II^a. – Quando le due parti V'_d, V''_d di cui consta la V_d non hanno punti comuni, risulta

(10) postulazione V = postulazione V' + postulazione V''.

Ciò si dimostra collo stesso ragionamento col quale arrivammo al Teorema II: basta supporre che manchi la varietà che là indicavamo con X.

Dalla (10) si trae per induzione

$$p_d = p'_d + p''_d - 1,$$

p_d, p'_d, p''_d denotando i generi di V, V', V''.

6. *Caratteri numerativi d'una varietà.* – Nella mia Memoria «*Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*» (14) ho definito i *caratteri proiettivi* di una varietà algebrica V_d, nel modo seguente:

Fissata nello spazio ambiente S_r una figura fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_d]$, cioè l'insieme degli S_d che hanno un punto comune con un dato S_{a_0}, una retta comune con un dato $S_{a_1}, \cdots$, un S_i comune con un dato S_{a_i}, e che giacciono in un dato S_{a_d}, verificandosi per ogni valor di i il fatto che lo $S_{a_{i+1}}$ dato passa pel dato S_{a_i}, si considerino gli S_d tangenti a V e appartenenti a quella figura fondamentale. Perché ne esistano occorre che sia

$$(11) \qquad k = \sum_0^d a_i + \frac{1}{2} d(d+3) - (d+1) r \geq 0;$$

ed allora, se la figura è generica, il luogo dei punti di contatto costituisce una varietà a k dimensioni, il cui ordine dà un carattere proiettivo di V. Si otten-

(14) F. SEVERI, Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) *52* (1902), pp. 61–118 [Memoria VIII, vol. I, p. 33; N.d.R.].

gono così tanti caratteri, che s'indicano coi simboli $(a_0\, a_1 \cdots a_d)$ corrispondenti alle figure fondamentali costruibili sotto la condizione (11).

La soluzione del *problema delle caratteristiche* per le varietà di spazi lineari, data prima da Schubert e ritrovata altrimenti da me [15], giustifica ampiamente la opportunità della suddetta definizione e mostra l'importanza dei caratteri $(a_0\,, a_1\,, \cdots, a_d)$.

Infatti essi dànno *tutte le caratteristiche* della varietà formata dagli S_d tangenti alla data V_d, nel senso che *il numero degli spazi tangenti a V che soddisfano ad una qualunque condizione algebrica, si esprime mediante una combinazione lineare dei caratteri proiettivi di V, i cui coefficienti dipendono soltanto dalla assegnata condizione.*

Poiché ogni condizione algebrica imposta ai *punti* di V si traduce in una condizione imposta alle varietà degli S_d tangenti, i caratteri $(a_0\, a_1 \cdots a_d)$ permettono in definitiva di esprimere il numero delle soluzioni di ogni problema numerativo che si riferisca alla varietà V.

Non va però taciuta, a scanso di malintesi, un'osservazione che si riferisce al caso in cui V possieda punti multipli.

Quando per una tale varietà si domanda il numero degli S_d tangenti che soddisfano ad una determinata condizione, e si cerca di esprimere questo numero in funzione dei caratteri proiettivi sopra definiti, si trovano incluse, nel numero stesso, delle *soluzioni improprie* che prendono appunto origine dalle singolarità di V.

Così per esempio per una curva piana dotata di punti multipli, le soluzioni dei problemi numerativi si potranno esprimere mediante l'ordine della curva e la classe dell'inviluppo formato dalle sue tangenti, soltanto qualora s'includano in questo inviluppo i fasci di rette che hanno per centri i punti multipli, contati ciascuno un conveniente numero di volte.

Volendo depurare il numero ottenuto, dalle soluzioni improprie, occorrerà aggiungere alle caratteristiche di V i caratteri proiettivi delle sue varietà multiple, ed eventualmente, quando si tratti di singolarità straordinarie, anche i caratteri di composizione di queste singolarità.

Qualora si ammetta che « ogni varietà V' dotata di singolarità arbitrarie, sia proiezione d'una V senza punti multipli », si vede che nella proiezione alcuni caratteri proiettivi di V si mutano in caratteri proiettivi di V', mentre altri caratteri di V si mutano in caratteri delle varietà multiple che V' viene ad acquistare. Così per esempio quando si passa con una proiezione da una superficie V dello spazio S_4, ad una V' dello spazio ordinario, tre dei quattro caratteri di V si rispecchiano in caratteri proiettivi di V', mentre il numero dei piani tangenti a V, che escono da un punto dello spazio S_4, si rispecchia

(15) H. SCHUBERT, *Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension*, Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg, 1 (1886), pp. 134–155; F. SEVERI, *Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni*, Rend. R. Acc. Lincei, (5) 9_2 (1900), pp. 321–326.

nel numero dei punti cuspidali (pinch–points) della superficie V'. Ond'è che il numero di tali punti va considerato tra le caratteristiche di V'.

Noi nel seguito ci limiteremo a considerare varietà dotate di singolarità ordinarie, ottenibili cioè mediante proiezioni generiche di varietà prive di punti multipli. Con ciò la generalità dei nostri risultati resterà subordinata alla possibilità di risolvere in singolarità ordinarie, mediante trasformazioni birazionali, le singolarità di una varietà qualunque. Questa possibilità, com'è ben noto, è stata dimostrata soltanto per le curve e le superficie ed è desiderabile che possa venir presto stabilita, con una trovata geniale, per varietà qualunque.

Chiameremo *caratteri numerativi* di una varietà V, quelli che sono esprimibili mediante i caratteri proiettivi di V e delle sue varietà multiple.

Il genere di una curva, il genere lineare e il genere aritmetico di una superficie, sono altrettanti caratteri numerativi.

Ciò dà la ragione dell'attributo « aritmetico » o « numerico » che si usa per distinguere il genere superficiale considerato da Cayley, Zeuthen, Noether e la cui teoria completa è dovuta ad Enriques, dal genere « geometrico » definito da Clebsch e da Noether.

Quanto ai caratteri rimanenti (non numerativi) di una varietà, vi sarebbe da precisare bene la distinzione tra i *caratteri geometrici* (come il genere di Clebsch–Noether) e i *caratteri aritmetici* (come il numero–base di una superficie); ma su ciò non ci tratteniamo, perché tale distinzione non ci occorrerà nel seguito.

7. Dimostriamo ora il teorema seguente:

IV) *Il genere aritmetico di una varietà è un carattere numerativo.*

Supponiamo dimostrato il teorema per le varietà a $d' \leq d - 1$ dimensioni – giacché lo sappiamo valido nel caso delle curve e delle superficie – e deduciamolo per le varietà a d dimensioni.

L'ipotesi fatta equivale ad affermare che i coefficienti della formola di postulazione relativa ad una qualunque varietà a $d - 1$ dimensioni, sono altrettanti caratteri numerativi della varietà stessa.

Consideriamo una varietà irriducibile a d dimensioni V, priva di singolarità e appartenente ad uno spazio S_r. Proiettiamo V sopra un S_{d+1} da un S_{r-d-2} generico O, e diciamo V' la varietà proiezione, la quale verrà ad avere una varietà doppia $M^{(1)}$ a $d - 1$ dimensioni; una varietà $M^{(2)}$ a $d - 2$ dimensioni, tripla per V e per $M^{(1)}$; una varietà $M^{(2)}$, a $d - 3$ dimensioni, quadrupla per V, sestupla per $M^{(1)}$ e quadrupla per $M^{(2)}$; etc.

I caratteri proiettivi delle varietà $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}, \cdots$, corrispondono ad altrettanti caratteri proiettivi di V; onde i coefficienti della formula di postulazione relativa alla varietà doppia $M^{(1)}$, riescono in definitiva caratteri numerativi di V.

La dimensione del sistema delle forme aggiunte a V', d'ordine l abbastanza alto, e la dimensione δ_l del sistema lineare (completo) da esse staccato su

V', fuori di $M^{(1)}$, risultano perciò polinomii in l a coefficienti esprimibili mediante i caratteri di V.

Denotando ora con M la varietà a $d-1$ dimensioni luogo dei punti d'appoggio delle corde di V incidenti ad O, risulta facilmente

$$\text{postulazione } V = \text{postulazione } M + \delta_l + 1.$$

Poiché i caratteri di M si esprimono mediante i caratteri di V, i coefficienti della formola di postulazione relativa a V, risulteranno caratteri numerativi della varietà stessa.

Per estendere la conclusione alle varietà dotate di punti multipli – il che è necessario, perché nel ragionamento precedente occorre il teorema per le varietà a $d-1$ dimensioni dotate di singolarità – *ammetteremo* che « ogni varietà dotata di punti multipli, si possa considerare come limite di una senza singolarità, appartenente allo stesso spazio ». Nel passaggio continuo dalla varietà V_d, priva di punti multipli, alla varietà W_d data, alcuni caratteri proiettivi di V si convertono in somme di caratteri proiettivi di W e delle sue varietà multiple; e siccome nella variazione continua i coefficienti della formola di postulazione si conservano costanti, si conclude ch'essi possono esprimersi mediante i caratteri proiettivi di W e delle sue varietà multiple.

Osservazione I^a. – Del teorema ora dimostrato ci gioveremo alla fine della presente memoria, in un rapido cenno di estensione alle varietà superiori, di alcune proprietà che stabiliremo con tutto il rigore necessario, soltanto nel caso di varietà a tre dimensioni. È appunto perciò che, durante il corso della dimostrazione, non abbiamo esitato a far uso di un postulato, che in realtà un esame più minuto della questione avrebbe consentito di evitare.

Osservazione II^a. – Il Teorema IV si trasporta pure alle varietà riducibili: in tal caso si debbono includere tra le caratteristiche della varietà anche quelle spettanti alle varietà comuni alle singole parti componenti.

La relazione fondamentale tra gl'invarianti Ω e il genere aritmetico d'una varietà a tre dimensioni.

8. *Un'altra definizione del genere aritmetico.* – Consideriamo nello S_4 una forma V, d'ordine n, dotata di singolarità ordinarie, e indichiamo con D la sua superficie doppia [e quindi con $d(l)$ la formola di postulazione relativa a D].

Chiameremo *genere aritmetico* di V il « numero virtuale » delle forme d'ordine $n-5$ aggiunte a V; numero calcolato nell'ipotesi che la formola $d(l)$ esprima la postulazione di D anche per $l = n-5$.

Denotando con P_a il genere definito, avremo pertanto

$$P_a = \binom{n-1}{4} - d(n-5). \tag{12}$$

Questa definizione è applicabile anche al caso in cui si riguardi come virtualmente inesistente la D od una sua parte (qualora D sia riducibile). Cambierà allora il significato di $d(n-5)$ e si avrà in corrispondenza il genere aritmetico « virtuale » di V.

Si può considerare tale genere anche per una varietà riducibile, riguardando come singolarità inesistenti alcune superficie (doppie) comuni alle varie parti.

Il *genere geometrico* P_g della V è invece il numero « effettivo » delle forme aggiunte d'ordine $n-5$ (Noether), cioè il numero delle superficie linearmente indipendenti, che costituiscono il sistema canonico di V.

Pel teorema fondamentale dell'aggiunzione (Enriques), P_g è un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali.

Supponiamo che la V sia proiezione generica di una varietà W priva di punti multipli di uno spazio S_r, e sia p_3 il carattere di W definito al n. 4 come genere aritmetico della varietà. Nulla ci autorizza ad affermare a priori che i due numeri P_a e p_3 sieno eguali: ciò però sarà dimostrato in seguito (n. 16). Provvisoriamente li continueremo a distinguere colle lettere P_a, p_3.

9. *Dimensione del sistema aggiunto ad un multiplo abbastanza alto di una sezione iperpiana.* – Cerchiamo di esprimere la dimensione ϱ_h del sistema (completo) $|A|$ segato su V, fuori di D, dalle forme aggiunte d'ordine $l = n-5+h$, cioè del sistema aggiunto al sistema $|hC|$, ove $|C|$ denoti il sistema delle sezioni iperpiane di V, ed h un intero positivo abbastanza alto. Poichè

$$d(l) = d(l-1) + k_0 l + k_1,$$

ove $k_0 l + k$ è la formola di postulazione relativa alla curva sezione iperpiana della D, scrivendo questa relazione da $l = n-4$ fino ad un valore di l per cui la formola $d(l)$ sia applicabile, e sommando membro a membro le diverse uguaglianze che così si ottengono, si perviene alla

$$d(l) = d(n-5) + k_0\left[\binom{l+1}{2} - \binom{n-4}{2}\right] + hk_1 \qquad (l = n-5+h),$$

ossia, in virtù della (12),

$$d(l) = \binom{n-1}{4} - P_a + k_0\left[\binom{n-4+h}{2} - \binom{n-4}{2}\right] + hk_1 .$$

Se ne rileva

$$\varrho_h = \binom{n-1+h}{4} - \binom{h-1}{4} - \binom{n-1}{4} + \tag{13}$$

$$+ P_a - k_0\left[\binom{n-4+h}{2} - \binom{n-4}{2}\right] - hk_1 - 1.$$

Ora si osservi che il genere aritmetico p_a di C è espresso dalla formola

$$p_a = \binom{n-1}{3} - k_0 (n-4) - k_1, \tag{14}$$

dalla quale deducesi l'espressione del genere aritmetico $p_a^{(h)}$ di hC, mediante la formula che dà il genere aritmetico virtuale di una superficie spezzata in più parti (n. 5). Si trova così:

$$p_a^{(h)} = \binom{h}{3}(n-1) + \binom{h}{2}\pi + hp_a + \binom{h-1}{3},$$

ove π denota il genere della sezione iperpiana di C. Tenendo presente la (14) e la formola

$$\pi = \binom{n-1}{2} - k_0,$$

si ottiene per $p_a^{(h)}$ un'espressione dipendente soltanto da n , k_0 , k_1 , h; confrontando quest'espressione colla (13), si perviene infine alla semplice relazione

$$\varrho_h = p_a^{(h)} - 1 + P_a. \tag{15}$$

10. In altro modo possiamo calcolare la dimensione ϱ_h, giungendo così ad una nuova espressione di P_a, che ci sarà tosto utile.

Per la W – nello S_r – conduciamo $r-3$ forme generiche di ordini n_1 , n_2 , $\cdots$, n_{r-3}, che si seghino ulteriormente secondo una varietà W', avente a comune con W una superficie Φ (irriducibile e priva di punti multipli – n. 2).

Se si pone $s = \sum_{i=1}^{i=r-3} n_i - r - 1$, il sistema completo $|(hC)'|$ sarà segnato su W dalle forme d'ordine $s+h$ per W' (o per Φ) [16]. Supporremo di aver scelto gli ordini n così alti, che la formula di postulazione $w(l)$ relativa a W, sia applicabile per $l \geq s$.

Se h è così elevato che la formula di postulazione $\varphi(l)$, relativa a Φ, sia applicabile per $l = s+h$, avremo:

$$\varrho_h = \binom{s+h+r}{r} - 1 - \varphi(s+h) - \left[\binom{s+h+r}{r} - 1 - w(s+h)\right] - 1 = \tag{16}$$

$$= w(s+h) - \varphi(s+h) - 1.$$

Ora indicando con $c(l)$ la postulazione della sezione iperpiana C di W, si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} w(s+1) &= w(s) + c(s+1) \\ w(s+2) &= w(s+1) + c(s+2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w(s+h) &= w(s+h-1) + c(s+h), \end{aligned}$$

(16) F. SEVERI, *loc. cit.* (6), n. 26.

donde

$$w(s+h) = w(s) + \sum_{i=1}^{h} c(s+i).$$

Quanto a $\varphi(s+h)$, dal momento che le forme d'ordine s segnano su W il sistema completo aggiunto a Φ, e quindi su Φ il (o un) sistema canonico (non depurato dalle eventuali curve eccezionali), le forme d'ordine $s+h$ staccheranno su Φ il sistema (completo), aggiunto ad $|hE|$, E denotando la curva sezione iperpiana di Φ. Avremo pertanto

$$\varphi(s+h) = p_h + \bar{\omega}_a,$$

ove p_h è il genere di una hE ed $\bar{\omega}_a$ il genere aritmetico di Φ.

La (16) si trasforma nella:

$$\varrho_n = w(s) - \bar{\omega}_a + \sum_{i=1}^{h} c(s+i) - p_h - 1. \tag{17}$$

Ora

$$c(s+i) = n\binom{s+i+1}{2} - (s+i)(\pi-1) + p_a + 1 \ ^{(17)}$$

$$\text{genere} \quad E = n\binom{s+2}{2} - (s+1)(\pi-1) + 1 \ ^{(17)}$$

$$\text{ordine} \quad E = n(s+2) - 2(\pi-1) \ ^{(17)};$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{h} c(s+i) = n\left[\binom{s+h+2}{2} - \binom{s+2}{3}\right] -$$

$$-(\pi-1)\left[\binom{s+h+1}{2} - \binom{s+1}{2}\right] + hp_a + h,$$

$$p_h = nh\binom{s+2}{2} - h(\pi-1)(s+1) + \binom{h}{2} n(s+2) - 2\binom{h}{2}(\pi-1) + 1;$$

onde risulta:

$$\sum_{i=1}^{h} c(s+i) - p_h = \binom{h}{3}(n-1) + \binom{h}{2}\pi + hp_a + \binom{h-1}{3} = p_a^{(h)}.$$

Si ottiene pertanto dalla (17):

$$\varrho_h = p_a^{(h)} - 1 + w(s) - \bar{\omega}_a,$$

la quale confrontata colla (15), porge l'espressione che cercavamo:

$$P_a = w(s) - \bar{\omega}_a. \tag{18}$$

(17) F. SEVERI, *loc. cit.* (6), n. 26 e 4, *b*.

11. *Dimensione di un multiplo abbastanza alto del sistema delle sezioni iperpiane.* – Profittando delle formule – d'immediata dimostrazione – che esprimono il grado e il genere curvilineo del sistema somma di due dati (cioè il grado e il genere del sistema lineare caratteristico) in funzione dei caratteri analoghi dei sistemi componenti [18] e della formula che lega in simil guisa i generi aritmetici della somma e dei componenti (n. 5), si trovano, mediante elementari calcoli algebrici, le formule:

$$n_0^{(h)} = h^3\, n,$$

$$n_1^{(h)} = h^2\,(\pi - 1) + h^2\,(h-1)\,n + 1,$$

$$n_2^{(h)} = \binom{h}{3}(n-1) + \binom{h}{2}\pi + hp_a + \binom{h-1}{3},$$

esprimenti il grado $n_0^{(h)}$, il genere curvilineo $n_1^{(h)}$ e il genere aritmetico $n_2^{(h)}$ del sistema $|hC|$.

Se ne trae:

$$n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} = n\binom{h+3}{3} - (\pi - 1 + n)\binom{h+2}{3} + (\pi + p_a)(h+1) - p_a - 3,$$

Questa relazione, confrontata colla formola (n. 4)

$$w(h) - 1 = n\binom{h+3}{3} - (\pi - 1 + n)\binom{h+2}{2} + (\pi + p_a)(h+1) - (p_p + p_3) - 1,$$

che esprime la dimensione R_h del sistema completo $|hC|$, dà

$$R_h = n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} - p_3 + 2.$$

12. *Gl'invarianti relativi* $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$. – Indichiamo con $|F|$ un qualunque sistema lineare di superficie tracciato su W, e con $|F'|$ il relativo sistema aggiunto. Pel teorema fondamentale dell'aggiunzione, il sistema $|F' - F|$ è indipendente dal sistema $|F|$, e, a meno di superficie eccezionali (superficie che si posson trasformare in punti o linee semplici), coincide col sistema canonico di W.

Chiameremo $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ i caratteri virtuali (grado, genere curvilineo, genere aritmetico) di una superficie $F' - F$; caratteri che si debbon *valutare virtualmente*, cioè come se esistesse una superficie effettiva corrispondente al simbolo $F' - F$, anche quando W non possiede il sistema canonico.

(18) Indicando con $[MNP]$ il numero dei punti comuni alle superficie M, N, P, con $[MN]$ il genere (virtuale) della curva comune alle M, N, con $[M]$ il genere aritmetico (virtuale) della superficie M, si hanno le formule:

$$[C^3] = [A^3] + [B^3] + 3[A^2B] + 3[AB^2], \qquad [C^2] = [A^2] + [B^2] + 2[AB] + 2[A^2B] + 2[AB^2] - 3$$

$$[C] = [A] + [B] + [AB],$$

che si riferiscono al sistema lineare $|C| = |A + B|$.

Questi caratteri coincidono rispettivamente coi generi $p^{(4)}$, $p^{(3)}$, $p^{(1)}$ [introdotti da Noether (19)], quando W sia priva di superficie eccezionali e abbia il genere geometrico > 0.

Sono *invarianti relativi*, cioè restano inalterati per quelle trasformazioni birazionali che non introducono superficie eccezionali. Essi sono già stati studiati diffusamente dal Pannelli (20), specialmente nei riguardi del loro comportamento di fronte alle trasformazioni birazionali che introducono superficie eccezionali.

Gl'invarianti Ω non sono tra loro indipendenti; si ha tra Ω_0 e Ω_1 la relazione

$$2\,\Omega_1 - 2 = 3\,\Omega_0 \text{ (21)},$$

la quale si ricava immediatamente dalla ben nota relazione tra i due invarianti ω di una superficie.

Ciò premesso, cerchiamo di esprimere i caratteri del sistema $|F'|$ mediante i caratteri di $|F|$ e gl'invarianti Ω. Indicando con K una superficie – eventualmente virtuale (22) – $F' - F$, si ha:

$$F' \equiv F + K,$$

e applicando le formole riferite nella nota (18), si ottengono le relazioni

$$(19)\qquad \begin{cases} n' = n + \Omega_0 + 3\,[F^2 K] + 3\,[F K^2] \\ \pi' = \pi + \Omega_1 + 2\,[F K] + 2\,[F^2 K] + 2\,[F K^2] - 3 \\ p'_a = p_a + \Omega_2 + [F K], \end{cases}$$

ove n , π , p_a denotano grado, genere curvilineo, genere aritmetico del sistema $|F|$ ed n' , π' , p'_a i caratteri analoghi di $|F'|$. Dalle (19) si trae

$$(20)\qquad n' - \pi' + p'_a = n - \pi + p_a + \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + [FK^2] + [F^2K] - [FK] + 3.$$

Inoltre:

$$(21)\qquad \begin{cases} [F^2 K] = [F^2 F'] - [F^3] = 2\,\pi - 2\,n - 2, \\ [F K^2] = [F F'^2] + [F^3] - 2\,[F^2 F'] = \omega + 3\,n - 4\,\pi + 3 \\ [F K] = [F F'] - [F^2] - [F^2 K] + 1 = \omega + 2\,n - 3\,\pi + 3, \end{cases}$$

(19) M. NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (Zweiter Aufsatz), Math. Ann., *8* (1875), pp. 495–533. Noether considera pure il genere $p^{(2)}$, che non è però distinto dagli altri ($p^{(2)} = 4\,p^{(4)} + 1$).

(20) *a*) M. PANNELLI, *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni*, Rend. R. Acc. dei Lincei, (5) *15*1 (1906), pp. 483–489; *b*) M. PANNELLI, *Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, Ibid., id., pp. 619–629.

Pel confronto col Pannelli si ponga $\Omega_0 = \Delta^{(3)}$, $\Omega_1 = \Delta^{(4)}$, $\Omega_2 = \Delta^{(1)}$.

(21) M. PANNELLI, *loc. cit.* (20), *a*), formola (23).

(22) Si posson considerare sopra una varietà *superficie virtuali*, come ho altrove considerato curve virtuali sopra una superficie. Cfr. F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rend. R. Ist. Lombardo, (2) *38* (1905), pp. 859–865 [Nota XXVII, vol. I, p. 325; N.d.R.].

ove ω è l'invariante d'Enriques–Castelnuovo appartenente alla superficie F. Dalle (21) si ricava

$$[F K^2] + [F^2 K] - [FK] = \pi - n - 2,$$

e quindi la (20) dà

$$n' - \pi' + p'_a = p_a + \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 1. \tag{22}$$

Si può enunciare la proposizione seguente:

V) *Tra il genere aritmetico virtuale p_a di una superficie F e i caratteri virtuali n', π', p'_a (grado, genere curvilineo, genere aritmetico) di una superficie aggiunta F', passa la relazione* (22).

Questa relazione deve considerarsi come l'analoga della

$$n' - \pi' = \pi - 2,$$

che passa tra il genere π di una curva C e i caratteri n', π' di una curva aggiunta C', sopra una data superficie algebrica.

13. *Forma provvisoria della relazione fondamentale.* – Poiché al n. 10 si sono supposte le n così elevate che la formola $w(l)$ relativa a W, sia applicabile per $l = s$, nella (18) al posto di $w(s)$ potremo scrivere l'espressione di $R_s + 1$, che si ricava dal n. 11 per $l = s$. La (18) si trasforma pertanto nella

$$P_a + \overline{\omega}_a = n_0^{(s)} - n_1^{(s)} + n_2^{(s)} - p_3 + 3. \tag{23}$$

In forza della relazione trovata al n. precedente, poiché il sistema di caratteri $n_0^{(s)}$, $n_1^{(s)}$, $n_2^{(s)}$ segnato su W dalle forme d'ordine s, è aggiunto alla superficie Φ, di genere aritmetico $\overline{\omega}_a$, potremo scrivere:

$$n_0^{(s)} - n_1^{(s)} + n_2^{(s)} = \overline{\omega}_a + \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 1,$$

la quale, confrontata colla (23), porge

$$P_a + p_3 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4. \tag{24}$$

Non essendosi ancor dimostrata l'uguaglianza dei numeri P_a, p_3, la (24) si riguarderà soltanto come una forma provvisoria della « relazione fondamentale » tra gl'invarianti Ω e il genere aritmetico della varietà.

14. *Irregolarità superficiale d'una varietà a tre dimensioni. – Genere geometrico virtuale d'una superficie.* – I signori Castelnuovo ed Enriques hanno dimostrato recentemente che l'irregolarità q_2 d'una superficie contenuta in una varietà V, a tre dimensioni, non dipende dalla superficie che si considera, a condizione che questa possa variare in un sistema ∞^2 (almeno) la cui curva caratteristica generica (comune a due superficie del sistema fuori delle even-

tuali linee–base) sia irriducibile [23]. Tale condizione si citerà in seguito dicendo che la superficie considerata è *generica* entro a V.

Il numero q_2 apparisce un carattere della varietà. Evidentemente trattasi di un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali di V: lo chiameremo l'*irregolarità superficiale della varietà.*

Esso rappresenta anche il numero degli integrali semplici distinti di 1ª specie appartenenti alla varietà; e mediante q_2 si esprime pure la connessione lineare del continuo riemanniano a sei dimensioni che dà l'imagine reale di V. Tale connessione risulta eguale alla connessione lineare di una superficie generica della varietà, cioè a $2q_2 + 1$.

La connessione lineare di una superficie appartenente a V e dotata di punti multipli, si potrà valutare riguardando le singolarità come assegnate, oppure come virtualmente inesistenti. Si avranno in tal modo valori non sempre eguali. Così, se la superficie ha una linea doppia che si voglia considerare come inesistente, si dovrà imaginare ristabilita la connessione attraverso alle due falde incrociantisi lungo la linea doppia, in tal guisa che, camminando entro la superficie, esse possano riguardarsi come continuazione l'una dell'altra.

In questo modo la *connessione lineare virtuale* di una particolare superficie appartenente ad un sistema lineare (o più generalmente ad un sistema continuo), risulterà eguale alla connessione lineare effettiva della superficie generica, qualora si riguardino come inesistenti le *nuove* singolarità che quella particolar superficie sia venuta ad acquistare, rispetto alla superficie generica.

Si potrà similmente parlare di *connessione lineare (virtuale) di una superficie spezzata,* immaginandone stabilita la connessione lungo le curve comuni alle varie parti.

In virtù del teorema sopra ricordato da Castelnuovo–Enriques, appena una superficie F sia composta da due parti F_1 , F_2, di cui l'una, per esempio F_1, sia generica, la connessione lineare di F risulterà eguale a $2q_2 + 1$. Infatti, se si escludono particolari posizioni di F_1 rispetto alla base del sistema lineare $|F_2|$, la curva comune ad F_1 , F_2 (od una sua parte) sarà di grado > 0, e quindi [24] ogni ciclo lineare di F_2 potrà ridursi, con deformazione continua, ad esser situato su quella curva. Ne deriva che i cicli lineari di F si ridurranno tutti ai cicli di F_1; tra questi, come sappiamo, ve ne sono tanti distinti, quanti sono quelli di V.

Le considerazioni precedenti permettono di arrivare alla nozione di *genere geometrico virtuale* di una superficie appartenente alla varietà V. S'intenderà con ciò la somma del genere aritmetico virtuale e dell'intero

(23) G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions,* Ann. Scient. de l'Ec. Norm. sup. (Paris), (3) *23* (1906), pp. 339–366.

(24) Vedi il n° 2 della mia Nota: F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard,* Rend. Circ. Mat. di Palermo, *21*1 (1906), pp. 257–282 [Memoria XXX, vol. I, p. 363; N.d.R.].

$(r-1)/2$, ove r denota la connessione lineare virtuale della superficie. Quando la superficie sia irriducibile e priva di singolarità accidentali, il genere geometrico virtuale coincide coll'effettivo.

La nozione di genere geometrico virtuale è resa utile sopratutto dal fatto ch'essa permette di esprimere *il genere geometrico del sistema lineare somma di due dati in funzione dei generi geometrici degli addendi.*

Se infatti si ha il sistema

$$|F| = |F_1 + F_2|,$$

colla sola condizione che una delle superficie F_1, F_2, per esempio F_1, sia generica nel senso sopra precisato, la connessione lineare virtuale di F (= connessione effettiva, se F è irriducibile e priva di singolarità accidentali), sarà uguale a $2q_2 + 1$, e quanto ai generi aritmetici si avrà la relazione

$$p_a = p'_a + p''_a + \pi,$$

ove p_a, p'_a, p''_a sono i generi aritmetici virtuali di F, F_1, F_2 e π il genere virtuale della curva comune ad F_1, F_2, fuori della base assegnata pel sistema $|F|$.

Indicando con p_g, p'_g, p''_g i generi geometrici virtuali di F, F_1, F_2, verrà

$$p_g = p_a + q_2 = p'_a + q_2 + p''_a + \pi = p'_g + p''_a + \pi.$$

Similmente, se fosse generica F_2 si avrebbe

$$p_g = p'_a + p''_g + \pi.$$

15. *Ancora sul genere aritmetico virtuale di una varietà a tre dimensioni.* – Dobbiamo ora esporre varie considerazioni sul genere aritmetico d'una varietà, dirette a stabilire alcuni principii sui quali ci fonderemo per dimostrare l'uguaglianza tra i generi P_a, p_3 (n. 8).

a) Proponiamoci anzitutto di calcolare il genere p_3 di una varietà V (irriducibile o no) completa intersezione di $r-3$ forme, in funzione degli ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{r-3}$ di queste forme e deduciamone l'espressione della postulazione $v(l)$ di V, in funzione di p_3.

Come si sa [25] $v(l)$ è espressa dalla formola

$$(25) \qquad v(l) = \binom{l+r}{r} - \sum_i \binom{l-n_i+r}{r} + \sum_{ik} \binom{l-n_i-n_k+r}{r} + \cdots + (-1)^{r-3} \binom{l-n_1-\cdots-n_{r-3}+r}{r},$$

ove i sommatori si estendano alle combinazioni semplici di $1^a, 2^a, \cdots$ classe. D'altra parte si ha pure (n. 3)

$$v(l) = k_0 \binom{l+3}{3} + k_1 \binom{l+2}{2} + k_2 (l+1) + k_3,$$

(25) *Loc. cit.* (6), § 1.

ove k_0, k_1, k_2, k_3 sono polinomii da determinarsi in n_1, n_2, $\cdots$, n_{r-3}. Risulta quindi

$$v(0) = k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 1 - \sum \binom{r - n_i}{r} + \sum \binom{r - n_i - n_k}{r} - \cdots,$$

cioè

$$p_3 = -(k_0 + k_1 + k_2 + k_3 - 1) = \sum \binom{r - n_1}{r} - \sum \binom{r - n_i - n_k}{r} + \cdots.$$

Mediante la formola

$$\binom{r - k}{r} = (-1)^r \binom{k - 1}{r}$$

l'espressione di p_3 si trasforma immediatamente nella seguente

$$p_3 = \binom{N - 1}{r} - \sum \binom{N - n_i - 1}{r} + \tag{26}$$

$$+ \sum \binom{N - n_i - n_k - 1}{r} - \cdots + (-1)^r \sum \binom{n_i - 1}{r},$$

ove si è posto $N = n_1 + \cdots + n_{r-3}$. Ora ricordiamo che se $\chi(l)$ denota la postulazione di V per *qualunque* valore di l — non soltanto per valori abbastanza grandi — si ha senz'altro $\chi(l) = v(l)$ quando $l \geq N - r$. Pei valori inferiori di l, sussiste la stessa relazione, purché nella (25) si pongano uguali a zero tutti quei simboli combinatori $\binom{k}{r}$ nei quali sia $k < r$ (26).

In particolare per $l = N - r - 1 = s$, si ha quindi

$$\chi(s) = \binom{N - 1}{r} - \sum \binom{N - n_i - 1}{r} + \cdots + (-1)^r \sum \binom{n_i - 1}{r},$$

la quale, confrontata colla (26), porge

$$p_3 = \chi(s). \tag{27}$$

Con un procedimento usato altra volta (n. 10) si ottiene la relazione

$$v(s + h) = \chi(s) + \chi_1(s + 1) + \sum_{i=2}^{h} c(s + i),$$

ove $\chi_1(l)$ denota la postulazione della sezione iperpiana C di V, per qualunque valore di l, mentre $c(l)$ denota la postulazione di C per l abbastanza grande ($\geq N - r + 1$). D'altronde, con un calcolo analogo a quello del n. 10, si trova

$$\chi_1(s + 1) + \sum_{i=2}^{h} c(s + i) = p_a^{(h)},$$

(26) *Loc. cit.* (6), § 1.

ove $p_a^{(h)}$ è il genere aritmetico virtuale di una $h\,C$; ne deriva, in forza della (27), che

$$v\,(s+h) = p_a^{(h)} + p_3 \,. \tag{28}$$

b) Sia W una varietà priva di punti multipli nello S_r e W' l'ulteriore intersezione di $r-3$ forme generiche degli ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{r-3}$, condotte per W; sia inoltre Φ la superficie comune a W, W'.

Diciamo p_3, p_3' i generi aritmetici di W, W' secondo la prima definizione (n. 4) e P_a, P_a' i generi aritmetici corrispondenti alla seconda definizione (n. 8).

Dimostreremo che

$$p_3 + p_3' = P_a + P_a' \,.$$

Indichiamo con:

$\bar{p}_3$ il genere aritmetico secondo il n. 4, della varietà $V = W + W'$;

$\bar{\omega}_a$ il genere aritmetico di Φ;

$p_a^{(h)}, p_a'^{(h)}$ i generi aritmetici delle sezioni rispettive di W, W' con una forma generica d'ordine h;

p_h il genere della curva segnata su Φ dalla forma stessa.

Se h è abbastanza grande, alle forme d'ordine $s+h$ ($s = n_1 + \cdots + n_{r-3} - r - 1$) la Φ presenta $p_h + \bar{\omega}_a$ condizioni (n. 10). Le forme d'ordine $s+h$ per Φ segnano altrove su W un sistema completo di dimensione $p_a^{(h)} - 1 + P_a$ (n. 10), onde ad esse la W presenta $p_a^{(h)} + P_a$ condizioni. Ne deriva che W presenta complessivamente

$$p_h + \bar{\omega}_a + p_a^{(h)} + P_a$$

condizioni alle forme d'ordine $s+h$ dello spazio.

Le forme d'ordine $s+h$ per W, segnano su W', fuori di Φ, un sistema completo di dimensione $p_a'^{(h)} - 1 + P_a'$; onde ad esse la W' presenta $p_a'^{(h)} + P_a'$ condizioni, e quindi la $W + W'$ presenterà

$$p_h + \bar{\omega}_a + p_a^{(h)} + P_a + p_a'^{(h)} + P_a'$$

condizioni alle forme d'ordine $s+h$ dello spazio. Potremo scrivere pertanto

$$v\,(s+h) = p_h + \bar{\omega}_a + p_a^{(h)} + P_a + p_a'^{(h)} + P_a' \,.$$

In virtù della (28) si ha

$$v\,(s+h) = (p_a^{(h)} + p_a'^{(h)} + p_h) + \bar{p}_3 \,.$$

Quest'espressione confrontata colla precedente, dà

$$\bar{p}_3 = P_a + P_a' + \bar{\omega}_a \,.$$

D'altronde (n. 5)

$$\bar{p}_3 = p_3 + p_3' + \bar{\omega}_a \,,$$

dunque

$$p_3 + p'_3 = P_a + P'_a . \tag{29}$$

16. *Uguaglianza dei due generi aritmetici* p_3, P_a. – *Forma definitiva della relazione fondamentale.* – Conserviamo le notazioni del n. precedente *b*) relativamente alle due varietà W, W', che insieme costituiscono la completa intersezione di $r - 3$ forme; e indichiamo inoltre con P_g, P'_g i generi geometrici delle W, W' e con $\overline{\omega}_g$ il genere geometrico di Φ.

Come altra volta abbiamo notato, le forme d'ordine s $(= \sum n_i - r - 1)$ segnano su Φ curve del sistema canonico, ma non necessariamente il sistema canonico completo. Diciamo pertanto ε la deficienza del sistema segnato su Φ dalle suddette forme.

Alle forme d'ordine s la Φ impone $\overline{\omega}_g - \varepsilon$ condizioni: a quelle che già passano per Φ la W impone P_g condizioni, perché esse segnano su W il sistema canonico completo. Onde la W imporrà $\overline{\omega}_g - \varepsilon + P_g$ condizioni alle forme d'ordine s dello spazio.

Poiché le forme d'ordine s per W, segnano su W' il sistema canonico completo, si conclude che la $W + W'$ presenta

$$P_g + P'_g + \overline{\omega}_g - \varepsilon$$

condizioni alle forme d'ordine s dello spazio.

D'altra parte [formola (27)] la $W + W'$ presenta alle forme d'ordine s un numero di condizioni eguale al proprio genere aritmetico virtuale, dunque:

$$P_g + P'_g + \overline{\omega}_g - \varepsilon = p_3 + p'_3 + \overline{\omega}_a .$$

Ne deriva che

$$\varepsilon = (\overline{\omega}_g - \overline{\omega}_a) + (P_g - p_3) + (P'_g - p'_3), \tag{30}$$

od anche [formola (29)]:

$$\varepsilon = (\overline{\omega}_g - \overline{\omega}_a) + (P_g - P_a) + (P'_g - P'_a) . \tag{31}$$

Si ricordi ora (n. 10) che, se si parte dalla W e si suppongono condotte per essa $r - 3$ forme generiche di ordini abbastanza alti, la dimensione del sistema completo $|\Phi'|$ aggiunto a $|\Phi|$, segnato su W dalle forme d'ordine s, è espressa da [formola (18)]:

$$w(s) - 1 = \overline{\omega}_a - 1 + P_a ;$$

cosicchè, indicando sempre con ε la deficienza del sistema segnato da $|\Phi'|$ su $|\Phi|$, la dimensione del sistema canonico $|\Phi' - \Phi|$ della varietà W, sarà data da

$$P_g - 1 = (\overline{\omega}_a - 1 + P_a) - (\overline{\omega}_g - 1 - \varepsilon) - 1,$$

donde si trae

$$\varepsilon = (\overline{\omega}_g - \overline{\omega}_a) + (P_g - P_a). \tag{32}$$

Questa relazione confrontata colla (31) prova che *quando gli ordini n delle forme condotte per W, sieno abbastanza alti, si può ritenere che la varietà W', ulteriore intersezione, abbia i generi* P'_g, P'_a *tra loro eguali.*

Si tenga ora conto del fatto che la deficienza della serie (canonica) segata sulla sezione iperpiana di Φ dalle forme d'ordine $s+1$, è uguale alla somma delle irregolarità superficiali di W, W' (27). Si può supporre le n così elevate, che il sistema segato sulla sezione iperpiana di W dalle forme d'ordine $s+1$, sia regolare, cioè che la serie segnata sulla sezione iperpiana di Φ abbia la deficienza uguale all'irregolarità superficiale di W: la sezione iperpiana di W' risulterà allora regolare. In altri termini: *quando le n sieno assai grandi, l'irregolarità superficiale di* W' *è nulla.*

Ciò premesso, ammettiamo di aver dimostrato che « per una varietà d'irregolarità superficiale nulla, sussiste la disuguaglianza

$$P_g \geq p_3 \text{ ».}$$

Allora per una varietà W d'irregolarità superficiale nulla e avente $P_g = P_a$, si stabilisce subito la relazione $P_a = p_3$.

Infatti, per una tale W la (32) dà $\varepsilon = 0$, perché non soltanto $P_g - P_a = 0$, ma anche $\overline{\omega}_g - \overline{\omega}_a = 0$ (giacchè la Φ può variare su W in un sistema di dimensione grande quanto si vuole a curve caratteristiche irriducibili). La (30) riducesi perciò alla

$$(P_g - p_3) + (P'_g - p'_3) = 0,$$

dalla quale, essendo le W, W' d'irregolarità superficiale nulla e risultando quindi $P_g - p_3 \geq 0$, $P'_g - p'_3 \geq 0$, segue:

$$P_g = p_3 , \qquad P'_g = p'_3 .$$

Si dimostra infine per una varietà qualunque che:

I due generi aritmetici p_3, P_a *sono eguali.*

Infatti, se W è una varietà qualunque, si può sempre supporre (scegliendo abbastanza grandi le n) che la W' abbia l'irregolarità nulla e che inoltre sia

$$P'_g = P'_a = p'_3 .$$

In forza della relazione (29) ne segue allora, anche per W:

$$P_a = p_3 ,$$

Per completare la dimostrazione, ci resta da provare la disuguaglianza $P_g \geq p_3$, tra il genere geometrico ed il genere aritmetico p_3 d'una varietà d'irregolarità nulla.

Tale proprietà sarà stabilita in seguito (n. 19).

(27) *Loc. cit.* (6), n. 26.

Ammesso ciò, la relazione (24) si trasforma nella

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 , \tag{33}$$

e si può enunciare il teorema seguente:

VI) *Il genere aritmetico d'una varietà a tre dimensioni si esprime in funzione dei caratteri virtuali* Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 *del sistema canonico, mediante la relazione fondamentale* (33).

Il teorema di Riemann–Roch sopra una varietà a tre dimensioni. Invarianza del genere aritmetico. Relazioni tra certe deficienze e le irregolarità della varietà.

17. *Sistemi continui completi sopra una varietà a tre dimensioni.* – Il teorema dimostrato da Enriques [28] per i sistemi algebrici completi di curve sopra una superficie, che cioè tali sistemi hanno la serie caratteristica completa, si estende alle varietà a tre (ed anche a più) dimensioni.

VII) *Sopra una varietà* V *un sistema algebrico completo di superficie irriducibili, ha il sistema caratteristico completo.*

Per sistema caratteristico si deve intendere il sistema lineare segnato sopra una superficie generica del sistema dato $\{F\}$, da quelle F che le sono infinitamente vicine [29].

La dimostrazione da me data altrove [30] per le superficie si estende immediatamente alle varietà. Basta profittare del principio che una superficie variabile con continuità sulla V, non può spezzarsi senza acquistare *nuove* linee doppie; il qual principio si riduce all'analogo, enunciato da Enriques per le curve, mediante la sezione con un iperpiano. Occorrerà pure per la dimostrazione, che omettiamo di esporre diffusamente, tener presente il teorema del n. 2 di questa Memoria.

Nel seguito indicheremo con F^2 una curva caratteristica del sistema $|F|$ – fuori della base assegnata – e con F^3 un gruppo caratteristico del sistema $|F|$, cioè un gruppo della serie caratteristica segnata sopra una F^2 dalle F – sempre fuori della base assegnata.

Analoghe notazioni si useranno pei sistemi non lineari.

Dal teorema VII si deduce immediatamente che:

VIII) *La deficienza* δ_2 *del sistema caratteristico* $|F^2|$ *di un sistema lineare irriducibile* $|F|$, *non supera l'irregolarità superficiale* q_2 *della varietà e vi son sistemi per cui il limite superiore è raggiunto.*

(28) F. Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rend. delle sess. della R. Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna, nuova Serie, *9* (1904–1905), pp. 5–13.

(29) Vedi F. Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, *39* (1903–1904), pp. 490–506 [Nota XVIII, vol. I, p. 234; N.d.R.].

(30) F. Severi, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96 [Nota XXIII, vol. I, p. 291; N.d.R.].

Basta ricordare [31] che sulla V ogni sistema lineare $|F|$ appartiene ad un sistema continuo (completo) formato da ∞^i sistemi lineari distinti, con $i \leq q_2$; e che vi sono sistemi per cui $i = q_2$.

Detta r la dimensione del sistema caratteristico *completo* di $|F|$, sarà $r + 1 - \delta_2$ la dimensione di $|F|$; mentre la dimensione del sistema continuo completo $\{F\}$ risulterà uguale a $\varrho + i$, ove ϱ è la dimensione di un *generico* sistema lineare contenuto in $\{F\}$.

Pel Teorema VII sarà dunque

$$r = \varrho + i - 1.$$

D'altra parte la dimensione del *particolare* sistema $|F|$ di $\{F\}$ non può essere inferiore a ϱ; onde

$$r - i + 1 \leq r + 1 - \delta_2,$$

cioè

$$\delta_2 \leq i \leq q_2.$$

Se poi si prende un sistema continuo $\{F\}$ per cui $i = q_2$, e si considera entro $\{F\}$ un generico sistema lineare, per questo si avrà

$$\delta_2 = i = q_2.$$

Ne deriva che « sopra una varietà d'irregolarità superficiale nulla, ogni sistema lineare « ha il sistema caratteristico completo » [32].

18. *Lemma sulla completezza del sistema segnato dal sistema canonico di V, o da un sistema aggiunto, sopra certe superficie della varietà.* – Sulla V, d'ordine n, che supponiamo immersa nello S_4 e dotata di singolarità ordinarie, consideriamo una superficie F (irriducibile o no) e conduciamo per F una forma S d'ordine l, che segni ulteriormente su V una superficie irriducibile K dotata di singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli) nei punti ove S interseca (fuori di F) la superficie doppia M di V.

(31) G. CASTELNUOVO–F. ENRIQUES, *loc. cit.* (23), pag. 360.

(32) Cfr. C. ROSATI, *Sugli spazi normali delle varietà algebriche*, Atti R. Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti, *68* (1908), pp. 75–84, Parte II^a, ov'è dimostrato il seguente teorema che contiene quello del testo: Dato un sistema lineare $|F|$ a curve caratteristiche irriducibili, suppongasi che il sistema *completo* $|F^2|$ individuato su F da una curva caratteristica, abbia la serie caratteristica completa: allora $|F|$ sega su F un sistema completo. Nell'ordine d'idee del testo, per via più semplice, ma meno elementare di quella del Rosati, il teorema stesso si può dimostrare così: Le superficie del sistema continuo completo $\{F\}$ debbono staccare su una F curve equivalenti, perché altrimenti il sistema caratteristico *completo* $|F^2|$ di $|F|$ sarebbe contenuto in un sistema continuo più ampio e non avrebbe la serie caratteristica completa. Ne deriva [vedi la mia Nota: F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti R. Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti, *65* (1905–1906), pp. 625–643, Parte II^a] che due superficie di $\{F\}$ sono equivalenti, cioè che $\{F\}$ è lineare. In virtù del Teorema VII ne segue l'asserto. La cosa estendesi subito alle varietà superiori.

Le forme d'un ordine arbitrario passanti per F e per la linea doppia di K (e quindi doppiamente pei suoi punti tripli) segnano su K – fuori delle linee fisse – un sistema completo (33).

D'altra parte appena l'ordine l di S sia maggiore di $n-5$, ogni forma d'ordine $n-5$ passante per F e per la linea doppia di K, contiene una curva di M (o di ogni parte di M, qualora M sia irriducibile) di ordine più elevato di quanto nol consenta il teorema di Bézout; e quindi quella forma d'ordine $n-5$ contiene di conseguenza M.

In breve: « Se $l > n-5$, ogni forma d'ordine $n-5$ aggiunta a K è di conseguenza aggiunta a V, cioè le forme d'ordine $n-5$ aggiunte a V e passanti per la superficie F, segnano su K, fuori delle linee fisse, un sistema completo ». In particolare, quando non esistano forme d'ordine $n-5$ aggiunte a V (cioè sia $P_g = 0$), si dovrà dire che « il sistema segnato su K dalle forme d'ordine l, è non speciale ».

Un altro lemma che ci occorrerà più tardi è il seguente:

« Il sistema aggiunto $|F'|$ ad una superficie qualunque F della varietà V, stacca un sistema lineare completo sulla sezione T di V con una forma generica S' d'ordine l', abbastanza alto ».

Diciamo ancora K l'ulteriore intersezione di V con una forma S di un ordine *fissato* l condotta per F. Il sistema $|F'|$ è segnato allora su V dalle forme aggiunte d'ordine $l+n-5$ passanti per K.

Le forme d'un ordine arbitrario passanti per la linea doppia di T (che è l'intersezione D' di S' colla superficie doppia M), e per la linea E' comune a T e a K, staccano altrove su T un sistema completo. Ora si può supporre l' tanto grande, che le forme d'ordine $l+n-5$ passanti per D' ed E', contengano di conseguenza M e K: da ciò segue l'asserto.

19. *Irregolarità tridimensionale. – Sua relazione colla sovrabbondanza e colla deficienza del sistema caratteristico di un multiplo delle sezioni iperpiane.* – La differenza tra il genere geometrico P_g e il genere aritmetico P_a (o p_3) di una varietà V a tre dimensioni, verrà chiamata l'*irregolarità tridimensionale* q_1 di V.

In questo n° troveremo una relazione tra l'irregolarità q_1, la sovrabbondanza s_h e la deficienza δ_h del sistema caratteristico di un multiplo $|hC|$ del sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di V. A tale scopo profitteremo soltanto della prima definizione data pel genere aritmetico (cioè prenderemo $q_1 = P_g - p_3$ senza preoccuparci affatto del genere P_a). Ne dedurremo che *una varietà d'irregolarità superficiale nulla, ha l'irregolarità tridimensionale non negativa* ($P_g \geq p_3$).

Con ciò resterà completata la dimostrazione esposta al n. 16 per stabilire l'uguaglianza tra i due generi aritmetici P_a, p_3.

(33) Lettera citata (7), n. 3.

Ed ecco ora il teorema che vogliamo dimostrare:

IX) *Sieno rispettivamente* s_h, δ_h *la sovrabbondanza e la deficienza del sistema caratteristico di* $|h\,C|$, *ove* h *è un intero positivo abbastanza grande e* C *una sezione iperpiana della varietà* V *d'irregolarità tridimensionale* q_1: *sussiste allora la relazione*

$$s_h = \delta_h + q_1 .$$

Infatti si può scegliere h così grande, che il sistema $|h\,C|$ risulti non speciale e che inoltre il sistema lineare di dimensione $P_g - 1$, segnato sopra una $h\,C$ dal sistema canonico di V, sia completo (n. prec.); in tal guisa che l'indice di specialità del sistema caratteristico di $|h\,C|$ risulterà uguale a P_g.

Indicando come al n. 11, con $n_0^{(h)}$, $n_1^{(h)}$, $n_2^{(h)}$ il grado, il genere curvilineo ed il genere aritmetico del sistema $|h\,C|$ di dimensione R_h, verrà dunque, in base al teorema di Riemann–Roch sulle superficie

$$R_h = n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} - P_g + 2 + s_h - \delta_h .$$

D'altronde (n. 11)

$$R_h = n_0^{(h)} - n_1^{(h)} + n_2^{(h)} - p_3 + 2;$$

dunque avremo

$$s_h = \delta_h + P_g - p_3 , \qquad \text{c.d.d.}$$

Quando V abbia l'irregolarità superficiale nulla, sarà $\delta_h = 0$ (n. 17) e quindi risulterà

$$P_g - p_3 = s_h \geq 0.$$

D'ora in poi il genere aritmetico d'una varietà, verrà denotato esclusivamente con P_a.

20. *Limite superiore per la deficienza del sistema (canonico) segnato sopra una superficie della varietà* V *dal proprio sistema aggiunto. – Invarianza del genere aritmetico di* V. – Per dimostrare che il genere P_a è un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali della varietà, ci occorreranno due lemmi, di cui passiamo ad occuparci.

LEMMA I. – Sulla V abbiasi il sistema $|E|$ somma dei due sistemi lineari irriducibili $|F|$, $|G|$, e si supponga che il sistema $|E'|$, aggiunto ad $|E|$, stacchi sopra una F un sistema completo. Allora la deficienza δ_1 del sistema (canonico) segnato sopra F dal sistema aggiunto $|F'|$, non supera la deficienza δ_2 del sistema segnato sopra G da $|G'|$.

S'indichino infatti con R, r_1, r_2 le dimensioni rispettive dei sistemi $|E'|$, $|F'|$, $|G'|$, con P_g il genere geometrico di V e con ε il numero delle condizioni che la curva C comune ad una F e ad una G fissate, impone alle superficie E' che debbono contenerla.

La dimensione s_1 del sistema canonico completo di F, si esprime subito in funzione di r_1 , δ_1 , P_g: basta tener presente che le superficie F' che contengono come parte F formano un sistema ∞^{P_g-1}. Si trae così

$$s_1 = r_1 - P_g + \delta_1 . \tag{34}$$

Similmente, la dimensione s_2 del sistema canonico completo di G verrà espressa da

$$s_2 = r_2 - P_g + \delta_2 . \tag{35}$$

Ciò premesso, si osservi che, essendo

$$|E'| = |F' + G| = |F + G'|$$

il sistema, per ipotesi completo, segnato da $|E'|$ sulla superficie F, è aggiunto alle curve C, e quindi che le superficie E' passanti per C, segano altrove su F il sistema canonico completo (non depurato dalle eventuali curve eccezionali). Se poi si tien conto del fatto che le E' contenenti F lasciano per residuo superficie G', si ottiene la relazione

$$s_1 = R - \varepsilon - r_2 - 1 ,$$

la quale, confrontata colla (34), porge

$$\delta_1 = R - r_1 - r_2 - \varepsilon + P_g - 1 . \tag{36}$$

Similmente, le superficie E' per C segnano altrove su G curve del sistema canonico, ma non si può affermare che queste sezioni formino il sistema canonico completo. Ne deriva che

$$s_2 \geq R - \varepsilon - r_1 - 1 ,$$

la quale, confrontata colla (35), dà

$$\delta_2 \geq R - r_1 - r_2 - \varepsilon + P_g - 1 ,$$

ossia, in forza della (36),

$$\delta_2 \geq \delta_1 ,$$

LEMMA II. – Sopra una superficie irriducibile F abbiasi un sistema lineare $|C|$, irriducibile e privo di punti base (anche non completo), e sia $|A|$ un tal sistema regolare (completo) che seghi su C una serie completa non speciale, la quale contenga la serie caratteristica di C e lasci come residuo una serie non speciale: allora il minimo sistema $|A + C|$, contenente parzialmente $|A|$ e $|C|$, è completo (e regolare).

Ciò deriva facilmente da una proposizione nota per le serie lineari sopra una curva [34]. In base alla proposizione cui alludiamo, si può infatti concludere

(34) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Ann. di Mat. pura ed appl., (2) *25* (1897), pp. 235–318, n. 43.

che è completa (non speciale) la minima serie lineare contenente ogni gruppo formato da un gruppo della serie completa $|A\,C|$, segnata da $|A|$ su C, e da un gruppo caratteristico del sistema $|C|$. Poiché questa serie minima è contenuta nella (o coincide colla) serie segnata su C dal sistema minimo $|A+C|$, così ne segue che questo sistema segna su C una serie completa non speciale $|A+C\,,C|$. Dicendo R la dimensione del sistema minimo $|A+C|$ ed r la dimensione della serie $|A+C\,,C|$, la dimensione ϱ del sistema completo $|A|$ risulterà

$$\varrho = R - r - 1.$$

Similmente, poiché il sistema completo $|A+C|$ di dimensione R_1, non può segnare su C una serie più ampia di quella che vi stacca il sistema minimo $|A+C|$, avremo

$$\varrho = R_1 - r - 1,$$

cioè $R = R_1$; e quindi il sistema minimo $|A+C|$ sarà completo.

Si vede poi subito che questo sistema è regolare, perché staccando da esso la curva C su cui $|A+C|$ segna una serie *completa non speciale*, si deve ottenere come residuo un sistema regolare. – Così è dimostrato anche il 2° lemma.

Supponiamo ora che la V sia immersa nello S_d e che ivi sia priva di singolarità. Diciamo F una superficie irriducibile e priva di punti multipli, su essa tracciata; e indichiamo infine con M una sezione iperpiana di V.

Le curve aggiunte C ad un multiplo assai elevato (diciamo secondo il numero h) di una sezione iperpiana di F, sono irriducibili e prive di punti multipli. Ciò risulta o dall'applicazione di un teorema dimostrato da Castelnuovo [35], od anche dalla costruzione delle C mediante le forme aggiunte alla superficie F [36].

Si consideri ora entro V il sistema $|hM+F'|$, ove $|F'|$ è il sistema aggiunto ad F, e si osservi ch'esso sega su F un sistema non necessariamente completo, formato da curve C: lo indicheremo con $|C|$.

Scegliendo un intero k assai grande, si può ottenere che le forme d'ordine k stacchino su F un sistema completo regolare $|A|$, il quale soddisfi, rispetto a $|C|$, alle ipotesi del Lemma II: ne segue che il minimo sistema $|A+C|$ è completo, cioè che è completo il sistema segnato su F da $|(h+k)\,M+F'|$, che è poi l'aggiunto al sistema $|(h+k)\,M+F| = |E|$. Applicando allora il Lemma I si concluderà che la deficienza δ_1 del sistema segato su F da $|F'|$, non supera la deficienza δ_2 del sistema segato da $|G'|$ su G, ove si è posto $|G| = |(h+k)\,M|$. Ora quest'ultima deficienza si può valutare facilmente.

(35) G. Castelnuovo, *loc. cit.* (34), n. 41.
(36) F. Severi, *loc. cit.* (6), § 6.

Detta ϱ_l la dimensione di $|G'|$ (ove $l = h + k$), dalla formola (15) (n. 9) si trae infatti

$$\varrho_l = p_a^{(l)} - 1 + P_a,$$

ove $p_a^{(l)}$ è il genere aritmetico di G.

D'altra parte, indicando con $p_g^{(l)}$ il genere geometrico di G e tenendo conto che G' sega su G un sistema canonico di dimensione $p_g^{(l)} - 1 - \delta_2$, si trova subito

$$\varrho_l = p_g^{(l)} - 1 + P_g - \delta_2,$$

la quale, confrontata colla precedente, porge

$$\delta_2 = (P_g - P_a) + (p_g^{(l)} - p_a^{(l)}) = q_1 + q_2.$$

Ne deriva che

$$\delta_1 \leq q_1 + q_2,$$

e si può enunciare il seguente teorema:

X) *La deficienza del sistema (canonico) segnato sopra una superficie della varietà V dal proprio sistema aggiunto, non supera la somma delle due irregolarità della varietà e vi sono superficie per cui il limite superiore è raggiunto.*

Osservazione. – Noi abbiamo dimostrato il teorema per una superficie F priva di singolarità; ma lo si può estendere facilmente anche ad una F dotata di singolarità, che si riguardino come assegnate colla loro molteplicità effettiva.

Il sistema aggiunto ad F si ottiene allora dal sistema $|F'|$, aggiunto alla F, considerata come virtualmente priva di punti multipli, imponendo alle F' la molteplicità $s - 1$ lungo ogni linea s–pla (ordinaria) di F e la molteplicità $r - 2$ in ogni punto r–plo (ordinario) di F.

La possibilità d'applicare il ragionamento precedente deriva da ciò che le forme d'ordine assai alto aggiunte ad F [37], segano sulla superficie, fuori della base dipendente dall'aggiunzione, sistemi lineari completi.

Dal teorema X segue facilmente che:

XI) *Il genere aritmetico della varietà V è un invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali della varietà.*

Infatti $q_1 + q_2$ apparisce come il limite superiore (raggiungibile) delle deficienze δ_1 relative alle superficie irriducibili di V; poiché mediante una trasformazione birazionale della V, ai numeri δ_1 corrispondono numeri uguali di analoga definizione, ne segue che $q_1 + q_2$ si mantiene inalterato per le trasfor-

(37) Cioè forme che segano sopra un iperpiano generico forme aggiunte alla curva sezione e che passano inoltre colla molteplicità $r - 2$ per ogni punto r–plo (necessari amente *proprio*, se V è priva di singolarità) della F.

mazioni birazionali di V. E siccome tanto q_2 che P_g sono invarianti assoluti, anche

$$P_a = (q_2 + P_g) - (q_1 + q_2)$$

risulterà un invariante assoluto.

Osservazione. – In forza della relazione fondamentale (33), l'espressione $\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2$ formata coi tre invarianti relativi a V, risulta pure un invariante assoluto [38].

21. *Il teorema di Riemann–Roch pei sistemi aggiunti.* – Al n. 9 abbiamo trovato la dimensione del sistema aggiunto ad un multiplo assai alto delle sezioni iperpiane di V; ora, mediante il Teorema X, possiamo trovare un limite inferiore per la dimensione del sistema aggiunto $|F'|$ ad una superficie F *generica* (n. 14) di generi p_g, p_a.

Indichiamo con ϱ la dimensione di $|F'|$ ed osserviamo che $|F'|$ sega su F un sistema lineare (canonico) di dimensione $p_g - 1 - \delta$, ove δ è la deficienza del sistema stesso.

Pel teorema fondamentale dell'aggiunzione verrà

$$\varrho - (p_g - 1 - \delta) - 1 = P_g - 1,$$

ossia

$$\varrho = p_g - 1 + P_g - \delta.$$

E poiché

$$\delta \leq q_1 + q_2,$$

avremo

$$\varrho \geq p_g - 1 + P_g - (p_g - p_a) - (P_g - P_a);$$

donde infine

$$\varrho \geq p_a - 1 + P_a. \tag{37}$$

Ricordando il Teorema V (n. 12), e la relazione fondamentale (33), si ottiene l'uguaglianza

$$n' - \pi' + p'_a = p_a + 2P_a - 3,$$

ove n', π', p'_a denotano i caratteri virtuali (grado, genere curvilineo, genere aritmetico) di F'. La (37) potrà perciò scriversi anche sotto la forma

$$\varrho \geq n' - \pi' + p'_a - P_a + 2. \tag{38}$$

Si può pertanto enunciare che:

XII) *La dimensione ϱ del sistema $|F'|$, di caratteri virtuali n', π', p'_a, aggiunto alla superficie F di genere aritmetico p_a, soddisfa alla disuguaglianza* (37) *o* (38).

(38) Ciò è provato per via ben diversa dal Pannelli [*loc. cit.* (20), *b*]. — La dimostrazione dell'invazianza del P_a si sarebbe dunque potuta poggiare anche sopra questo risultato del Pannelli.

Allorché nella (37) o (38) vale il segno $=$ (il che accade per esempio quando trattasi dell'aggiunto a un multiplo assai alto delle sezioni iperpiane di V), si dirà che il sistema $|F'|$ è *regolare*. Se vale invece il segno $>$ la differenza tra il 1° membro e il 2° si chiamerà la *sovrabbondanza* del sistema $|F'|$.

Più in generale, diremo che è *regolare* ogni sistema lineare non speciale, di caratteri n , π , p_a la cui dimensione sia espressa da

$$n - \pi + p_a - P_a + 2.$$

Dalle formule che legano i caratteri di due sistemi ai caratteri della loro somma, si trae facilmente che *staccando da un sistema regolare* $|F|$ *una superficie* G, *su cui* $|F|$ *seghi un sistema completo regolare, si ha come residuo un sistema regolare.*

E viceversa, « se il sistema regolare $|F - G|$ sega su G un sistema regolare, si « può affermare la completezza di questo sistema, appena si sappia che $|F|$ è regolare ».

Osservazione. – Dal Teorema XII, ricordando il Teorema VIII, si può trarre che *la deficienza del sistema caratteristico di un multiplo assai elevato delle sezioni iperpiane di* V, *è precisamente uguale all'irregolarità superficiale* q_2.

Detta C una sezione iperpiana di V, e $\{G\}$ un sistema continuo costituito da ∞^{q_2} sistemi lineari irriducibili, almeno ∞^1 (n. 17), consideriamo infatti un multiplo $|E| = |kC|$ così elevato che sieno soddisfatte le condizioni seguenti:

a) esso contenga parzialmente un sistema lineare $|G_0|$ fissato in $\{G\}$;

b) il sistema residuo $|E - G_0|$ si possa considerare come l'aggiunto ad un sistema lineare irriducibile $|F|$, almeno ∞^2, a curva caratteristica irriducibile.

Allora ogni sistema lineare $|E - G_0 + G|$, ove $|G|$ è variabile in $\{G\}$, sarà aggiunto al sistema $|F + G|$, che risulterà pure irriducibile, almeno ∞^4, ed a curva caratteristica irriducibile. Onde per la dimensione r del sistema $|E - G_0 + G|$, avremo la disuguaglianza

$$r \geq n - \pi + p_a - P_a + 2 ,$$

n , π , p_a essendo i caratteri virtuali del sistema stesso. Tali caratteri coincidono rispettivamente cogli analoghi di $|E|$, perché al variare di $|G|$ il sistema $|E - G_0 + G|$ descrive un sistema continuo $\{E\}$ formato da ∞^{q_2} sistemi lineari distinti, tra i quali $|E|$.

La dimensione di $|E|$ è espressa da (n. 11)

$$r' = n - \pi + p_a - P_a + 2 ,$$

e quindi risulta

$$r \geq r'.$$

D'altra parte, al variare del sistema che genera $\{E\}$, la dimensione r non può decrescere, dunque $r' \geq r$. Si conclude che $r = r'$, e quindi che la dimensione del sistema continuo completo $\{E\}$ è espressa da

$$R = n - \pi + p_a - P_a + 2 + q_2 .$$

La deficienza del sistema $|E|$, che è data da $R - r$ (Teorema VII), risulterà pertanto uguale a q_2. c.d.d.

22. *La somma delle deficienze dei sistemi segati sopra una superficie dagli aggiunti ai suoi multipli successivi.* – Sulla V consideriamo una superficie irriducibile F, tale che il sistema lineare $|F|$, di caratteri virtuali n, π, p_a, e di genere geometrico p_g, sia almeno ∞^2 e a curva caratteristica irriducibile.

Il sistema $|hF + F'|$, aggiunto ad $|(h+1)F|$, ha la dimensione (n. 21)

$$\varrho_h = \binom{h+1}{3}(n-1) + \binom{h+1}{2}\pi + (h+1)p_a + \binom{h}{3} - 1 + P_a + \varepsilon_h \qquad (\varepsilon_h \geq 0),$$

onde risulta

$$\varrho_h - \varrho_{h-1} - 1 = n\binom{h}{2} + h(\pi - 1) + p_a + \varepsilon_h - \varepsilon_{h-1}.$$

Ciò posto, si osservi che il sistema $|hF + F'|$ sega su F curve D aggiunte al multiplo secondo h di una curva caratteristica, e che questa può variare in un sistema lineare almeno ∞^1. In base ad un teorema di Picard, da me esteso recentemente [39], si potrà allora concludere che il sistema $|D|$ è regolare. Indicando con δ_h la sua deficienza e con r_h la dimensione dello stesso sistema, risulterà:

$$r_h = n\binom{h}{2} + h(\pi - 1) + p_a - \delta_h .$$

Poiché

$$r_h = \varrho_h - \varrho_{h-1} - 1 ,$$

verrà infine:

$$\varepsilon_h + \delta_h = \varepsilon_{h-1} . \tag{39}$$

Questa relazione è valida per ogni valore di h a partire da $h = 1$ in poi; per $h = 0$ essa va sostituita colla seguente

$$\varepsilon_0 + \delta_0 = q_1 + q_2 , \tag{40}$$

ove q_1, q_2 denotano le due irregolarità di V.

(39) F. SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rend. R. Acc. dei Lincei, (5) 17₂ (1908), pp. 465–470 [Nota XXXIX, vol. I, p. 456; N.d.R.].

Infatti, se il sistema $|F'|$, di dimensione $p_a - 1 + P_a + \varepsilon_0$, sega su F un sistema (canonico) di deficienza δ_0, il sistema $|F' - F|$ avrà la dimensione

$$P_g - 1 = p_a - 1 + P_a + \varepsilon_0 - p_g + \delta_0,$$

donde si trae

$$\varepsilon_0 + \delta_0 = (P_g - P_a) + (p_g - p_a),$$

la quale coincide colla (40), perché (n. 14) l'irregolarità di F è uguale all'irregolarità superficiale di V.

Scrivendo la (40) per $h = 1, 2, 3, 4, \cdots$ e sommando membro a membro da $h = 0$ fino ad $h = l$, si avrà

$$\varepsilon_l + \sum_{h=0}^{h=l} \delta_h = q_1 + q_2. \tag{41}$$

Da questa si trae anzitutto che delle δ maggiori di zero non ve ne può essere che un numero finito, cioè che *il sistema aggiunto ad un multiplo assai elevato di un sistema irriducibile* $|F|$, *almeno* ∞^2, *a curva caratteristica irriducibile, sega sopra* F *un sistema lineare completo*. Questo risultato lo avevamo ottenuto incidentalmente in modo diverso al n. 20, per una superficie F priva di punti multipli.

Essendo, per l assai grande, $\delta_l = 0$, da un certo punto in poi la sovrabbondanza ε_l del sistema $|lF + F'|$, assumerà un valore costante ε, e in virtù della (41) si potrà enunciare il teorema seguente:

XIII) *Sopra una varietà* V, *di irregolarità* q_1, q_2, *la somma delle deficienze dei sistemi segati su di una superficie* F, *appartenente ad un sistema almeno* ∞^2 *a curva caratteristica irriducibile, dal sistema* $|F'|$ *e dagli aggiunti ai successivi multipli di* $|F|$, *uguaglia la somma* $q_1 + q_2$, *diminuita della sovrabbondanza costante che possiede il sistema* $|(hF)'|$ *per* h *assai grande.*

Tale sovrabbondanza costante sappiamo che è nulla in relazione ad un multiplo assai elevato delle sezioni iperpiane di una varietà priva di punti multipli o dotata al più (nello S_4) di singolarità ordinarie.

Osservazioni. – Sopra una superficie algebrica, il teorema analogo al teorema XIII è stato notevolmente precisato dal Picard e da me. Si può estendere alle varietà il risultato di Picard?

Si può cioè provare che se una superficie F *soddisfa a certe condizioni di genericità* (*appartenere ad un sistema continuo o lineare convenientemente infinito, etc.*), *il suo sistema aggiunto è regolare*?

Per estendere la dimostrazione di Picard, occorrerebbero troppi elementi che per ora non si vede come trasportare alle varietà; per estendere la mia dimostrazione, bisogna anzitutto procurarsi un lemma analogo a quello su cui essa è poggiata.

Tale lemma si ottiene ovviamente. Il ragionamento è identico nella sostanza a quello sviluppato per le superficie e poggia sulla completezza del

sistema lineare caratteristico di un sistema continuo completo di superficie appartenente ad una varietà (n. 17), nonché sopra un noto criterio di equivalenza per le superficie di un sistema algebrico (irriducibile) (40).

Ecco il lemma cui alludo:

XIV) *Sia F una superficie atta a definire un sistema continuo almeno ∞^2, a curva caratteristica irriducibile, sopra una data varietà V, e $|G|$ un sistema lineare irriducibile che contenga parzialmente F. Allora il sistema lineare $|E| = |G - F|$ sega sulla generica superficie G un sistema lineare completo.*

Gli eventuali punti e linee base di $|G|$ debbono assegnarsi colla loro molteplicità effettiva.

Quando però coll'aiuto di questa proposizione si tenta di proseguire la dimostrazione, imitando il procedimento da me seguito per le superficie, s'intoppa in una difficoltà proveniente dal fatto che la specialità di un sistema lineare di curve sopra una superficie, non basta a caratterizzare la irregolarità del sistema stesso.

Non ho potuto risolvere la questione e la segnalo perciò all'attenzione del lettore.

23. *La deficienza della serie segata sopra la curva caratteristica di un sistema lineare dal doppio del sistema lineare caratteristico.* – Vogliamo ora stabilire una disuguaglianza tra la deficienza della serie segata dal sistema $|2H|$ sopra la curva caratteristica H di un sistema lineare $|F|$, e la somma delle irregolarità q_1, q_2 della nostra varietà V, che supponiamo al solito priva di singolarità in un iperspazio. A tal uopo converrà anzitutto estendere leggermente il Teorema IX (n. 19), dimostrando che « la differenza tra la sovrabbondanza σ e la deficienza δ del sistema lineare caratteristico di un sistema $|D|$, ottenuto togliendo una superficie G, irriducibile e priva di singolarità, da un multiplo abbastanza alto delle sezioni iperpiane di V, è uguale all'irregolarità tridimensionale q_1 ».

S'indichi con S una sezione iperpiana di V e si scelga un multiplo hS così elevato di quella sezione, che il sistema lineare

$$|D| = |hS - G|,$$

contenga il sistema canonico $|K|$ di V, e lasci come residuo un sistema lineare almeno ∞^2 a curva caratteristica irriducibile: allora in base al Teorema XIV si potrà affermare che $|K|$ sega sopra una D un sistema lineare completo.

Quando il genere geometrico di V è nullo (cioè quando $|K|$ manca), si dovrà invece dire che il sistema caratteristico di $|D|$ è non speciale.

A tale conclusione non si può pervenire coll'immediata applicazione del Teorema XIV, ma sibbene col ragionamento seguente:

Sia $|T|$ un sistema lineare di V, di cui esista l'aggiunto $|T'|$.

(40) F. SEVERI, Nota citata (32), n. 6.

In base al Teorema XIV, si può scegliere h così elevato, che $|T'|$ seghi su una D il sistema *completo*

$$|T'D| = |D'D| - |DD| + |TD|,$$

ove con $T'D$ si è indicato la curva comune a T' e a D, etc.

Se il sistema $|D'D|$, che è il sistema canonico di D, contenesse la curva caratteristica DD, il sistema $|T'D|$ conterrebbe $|TD|$.

Ora, crescendo eventualmente h, si può fare in modo che la curva TD sia d'ordine maggiore della curva TT', in tal guisa che una superficie T' che contenga TD contenga di conseguenza T. Poiché $|T'|$ sega su D un sistema completo, se questo contenesse parzialmente $|TD|$, $|T'|$ conterrebbe $|T|$, cioè esisterebbe il sistema canonico di V, contro il supposto.

Dunque il ogni caso si può ritenere che l'indice di specialità del sistema $|DD|$, sia uguale al genere geometrico P_g di V.

Ciò premesso, si osservi che, per h assai grande, il sistema segato su V dalle forme d'ordine h è completo (n. 2) e regolare (nn. 11 e 21), e che il sistema segato su G dalle stesse forme, è anch'esso completo e regolare. – Ne segue (n. 21) che è pur regolare il sistema $|D|$, cioè che la sua dimensione è espressa da

$$\varrho = n - \pi + p_a - P_a + 2,$$

ove n, π, p_a sono i caratteri virtuali del sistema stesso.

D'altra parte applicando il teorema di Riemann–Roch al sistema caratteristico $|DD|$, viene

$$\varrho = n - \pi + p_a - P_g + 2 + \sigma - \delta,$$

la quale, confrontata colla precedente, dà

$$\sigma - \delta = P_g - P_a. \qquad \text{c.d.d.}$$

Dimostriamo ora il teorema:

XV) *Sulla varietà V, d'irregolarità q_1, q_2, sia $|F|$ un sistema lineare, almeno ∞^2, privo di punti base, a curva caratteristica irriducibile, e siano δ_1, δ_2 le deficienze rispettive della serie segata sopra una tale curva dal doppio del sistema caratteristico e del sistema segato sopra una F dal sistema canonico di V: sussiste allora la relazione*:

$$\delta_1 - \delta_2 \leq q_1 + q_2,$$

e vi sono sistemi pei quali vale l'uguaglianza.

Per le ipotesi poste, la generica superficie F, come la generica superficie $G \equiv 2F$, sono irriducibili e prive di punti multipli; se pertanto con $|E|$ s'indica un multiplo abbastanza elevato delle sezioni iperpiane di V, al sistema $|D| = |E - G|$ si potrà, al momento opportuno, applicare il lemma precedente.

Ci sarà anche lecito di supporre che $|E|$ seghi un sistema regolare completo $|EF|$ sopra F ed una serie completa (non speciale) $|EH|$ sopra una curva caratteristica H (irriducibile e priva di punti multipli) della superficie F. Similmente si potrà esigere che il sistema $|M| = |E - F|$ seghi su F un sistema completo regolare $|MF|$. Abbiamo visto infatti nella dimostrazione del lemma, come si possa supporre che il sistema $|D| = |M - F|$ sia regolare; poiché la stessa supposizione può farsi per $|M|$, il sistema *regolare* $|MF|$ dovrà risultare completo (n. 21).

Ciò posto, indichiamo in modo generico con r_t la dimensione di un sistema lineare $|T|$, cosicché $r_d, r_e, \cdots$ denoteranno le dimensioni dei sistemi $|D|, |E|, \cdots$; e rappresentiamo inoltre con Γ il gruppo comune ad H e ad una D generica.

Calcoliamoci anzitutto la dimensione della serie completa $|EH|$.

La dimensione del sistema completo $|EF|$ è espressa da

$$r_e - r_m - 1;$$

la dimensione del sistema completo $|MF|$ è espressa da

$$r_m - r_d - 1;$$

poiché quest'ultimo sistema è residuo della curva H rispetto al sistema $|EF|$, sarà

$$r_e - r_m - 1 - (r_m - r_d - 1) - 1 = r_e - 2r_m + r_d - 1$$

la dimensione della serie $|EH|$.

Ne deriva che la serie segata da $|2H|$ su H, allorché sia completata, avrà la dimensione

$$r_e - 2r_m + r_d - 1 - \varepsilon,$$

ε denotando il numero delle condizioni che il gruppo Γ presenta alle E obbligate a contenerlo.

Calcoliamo ora la dimensione della serie g, segata su H dal sistema completo doppio $|2H|$. A tal uopo indichiamo con δ_1' la deficienza del sistema segato da $|G|$ su F – sistema contenuto totalmente in $|2H|$ – e con δ_2' la deficienza del sistema caratteristico di F.

Poiché il sistema $|GF|$ ha la dimensione $r_g - r_f - 1$, sarà

$$r_g - r_f - 1 + \delta_1'$$

la dimensione del sistema completo $|2H|$, e similmente sarà $r_f - 1 + \delta_2'$, la dimensione del sistema completo $|H|$. Onde la dimensione di g risulterà uguale a

$$r_g - r_f - 1 + \delta_1' - (r_f - 1 + \delta_2') - 1 = r_g - 2r_f + \delta_1' - \delta_2' - 1;$$

e quindi la deficienza δ_1 della serie g, contenuta totalmente nella serie segata su H dalle E per Γ, sarà data da

$$(42)\qquad \begin{cases} \delta_1 = (r_e - 2r_m + r_d - 1 - \varepsilon) - (r_g - 2r_f + \delta_1' - \delta_2' - 1) = \\ \quad = r_e - 2r_m + 2r_f + r_d - r_g + \delta_2' - \delta_1' - \varepsilon. \end{cases}$$

Indichiamo ora con L la curva segata su F dalla D che stacca sopra H il gruppo Γ: la serie segnata su L dalle E per Γ, conterrà totalmente quella, $|ML|$, segata su L da $|M|$, e quindi la deficienza δ' di quest'ultima serie, sarà almeno uguale alla differenza tra la dimensione della prima e la dimensione della seconda. – Vediamo di calcolare anzitutto la dimensione della serie $|EL|$ segata su L da $|E|$. A tal uopo cerchiamo quante sono le E passanti per L. Tali superficie segnano su F, fuori di L, il sistema *completo* $|2H|$, e, toltone F, lasciano come residuo il sistema $|M|$; onde esse formano un sistema di dimensione

$$r_g - r_f + r_m + \delta_1'.$$

La serie $|EL|$ ha pertanto la dimensione

$$r_e - r_g + r_f - r_m - \delta_1' - 1,$$

e quindi la serie segata su L dalle E per Γ, avrà la dimensione

$$r_e - r_g + r_f - r_m - \delta_1' - \varepsilon - 1.$$

Calcoliamo adesso la dimensione della serie $|ML|$ e perciò cominciamo, al solito, a trovare quante M passano per L. Tali superficie segano altrove su F il sistema caratteristico completo, e, toltone F, lasciano come residuo il sistema $|D|$; onde esse formano un sistema di dimensione

$$r_f + r_d + \delta_2',$$

e la dimensione della serie $|ML|$ risulterà quindi uguale a

$$r_m - r_f - r_d - \delta_2' - 1.$$

Avremo dunque

$$\delta' \geq r_e - 2r_m + 2r_f - r_g + r_d + \delta_2' - \delta_1' - \varepsilon,$$

la quale, confrontata colla (42), porge

$$(43)\qquad \delta' \geq \delta_1.$$

Ciò premesso, si osservi che avendo scelto sufficientemente elevato il multiplo $|E|$, si può supporre che il sistema lineare $|L|$ tracciato sulla F, contenga le curve (NF) segate su F dalle superficie canoniche N di V, e lasci come residuo un sistema lineare irriducibile almeno ∞^1: allora (41) la serie

(41) F. SEVERI, *loc. cit.* (39).

segata su L dal sistema $|NF|$, completato ove occorra, sarà completa. Ne deriva che l'indice di specialità della serie segata su L dal sistema $|M|$, risulterà uguale a $P_g + \delta_2 - i$, P_g essendo il genere geometrico di V ed i il numero delle superficie N indipendenti che passano per L. Si osservi subito che i non è che l'indice di specialità di F, perché l'ordine di L essendo abbastanza alto, ogni N per la curva L contiene di conseguenza la superficie F.

Quando sia $P_g = 0$, la serie $|ML|$ risulta non speciale: tale fatto si stabilisce con un ragionamento del tipo di quello sviluppato, in circostanze analoghe, nella dimostrazione del lemma.

Fissiamo ora l'attenzione sulla superficie D, che stacca la curva L, e su tale superficie consideriamo il sistema completo individuato da una curva caratteristica (DD) e il sistema completo individuato da una (MD). Teniamo inoltre presente che il sistema canonico $|N|$ sega su D un sistema *completo* $|K|$, di dimensione $P_g - 1$, residuo della curva (DD) rispetto al sistema canonico della D.

Dico che il sistema $|MD|$ ha lo stesso indice di specialità i del sistema $|F|$. Infatti, essendo

$$(MD) \equiv (DD) + L$$

il sistema residuo di (MD) rispetto al sistema canonico della superficie D, coincide con $|K - L|$, e d'altra parte questo sistema è segato su D dal sistema $|N - F|$, perché, come abbiamo osservato, ogni N per L contiene F.

Dicendo σ la sovrabbondanza del sistema $|MD|$, il quale sega su L una serie di deficienza δ' e d'indice di specialità $P_g + \delta_2 - i$, l'irregolarità del sistema

$$|DD| = |(MD) - L|$$

risulterà uguale a [42]

$$\sigma - i + \delta' - (P_g + \delta_2 - i) = \sigma + \delta' - \delta_2 - P_g,$$

e poiché l'indice di specialità di $|DD|$ è uguale a P_g, $\sigma + \delta' - \delta_2$ sarà la sovrabbondanza del sistema stesso.

Applicando il lemma, e ricordando (n. 17) che la deficienza δ del sistema caratteristico di $|D|$ non supera l'irregolarità superficiale q_2, si ottiene la disuguaglianza

$$\sigma + \delta' - \delta_2 \leq q_1 + q_2,$$

e quindi a fortiori

$$\delta' \leq \delta_2 + q_1 + q_2.$$

Confrontando infine colla (43), si giunge alla conclusione

$$\delta_1 - \delta_2 \leq q_1 + q_2.$$

(42) G. CASTELNUOVO, *loc. cit.* (34), n. 39.

Ci resta ora da provare che esistono sistemi per cui vale il segno $=$. Dimostriamo che l'*uguaglianza vale pei multipli assai elevati delle sezioni iperpiane di* V.

Consideriamo a tale uopo un multiplo $|E|$ così elevato delle sezioni iperpiane di V – la quale, ricordiamoci, è priva di punti multipli – che sieno soddisfatte le condizioni seguenti:

1ª il sistema $|E|$ e i multipli successivi sieno regolari (n. 11);

2ª il sistema $|E|$ possa considerarsi come l'aggiunto di un sistema irriducibile $|L|$, di dimensione sufficientemente ampia;

3ª la serie segata dal sistema canonico $|N|$ di V sopra una curva caratteristica (EE), sia completa [se non esiste $|N|$ la serie segata da $|2E|$ su (EE) sia non speciale].

Occupiamoci della 3ª condizione, poiché siamo ormai in grado di ritenere senz'altro soddisfatte le prime due.

Si può anzitutto scegliere $|E|$ così elevato, che il sistema $|N|$ seghi sopra una E un sistema lineare completo (n. 18). Per la 2ª condizione, sulla superficie E il sistema lineare completo $|EE|$ conterrà parzialmente il sistema $|NE|$ e il residuo sarà un sistema lineare irriducibile infinito. Ne deriva [43] che la serie segata su (EE) dal sistema completo $|NE|$, cioè da $|N|$, è completa.

Non ci tratteniamo sul modo di atteggiare la dimostrazione quando non esista $|N|$, perché al principio di questo n. abbiamo avuto occasione di dare il tipo del ragionamento in un caso analogo.

Passiamo piuttosto a stabilire la regolarità del sistema $|2(EE)|$ segato sopra una E dal sistema $|2E|$. Indicando con K una curva canonica di E, dalla 2ª condizione si trae che su E esiste il sistema irriducibile e più che ∞^0

$$|2(EE) - K| = |LE|.$$

Ne deriva che il sistema $|2(EE)|$ è aggiunto ad un sistema lineare irriducibile infinito, e quindi ch'esso è regolare.

Da ciò ora trarremo che il sistema segato su E da $|2E|$ è completo. Infatti la dimensione di tale sistema è uguale a

$$r_{2e} - r_e - 1,$$

r_{2e}, r_e denotando le dimensioni di $|2E|$ ed $|E|$. Tenendo presenti le espressioni di r_{2e} ed r_e (n. 11) si trova la dimensione di $|2(EE)|$

$$3n - 2\pi + p_a + 2, \tag{44}$$

ove n, π, p_a sono i caratteri di $|E|$.

Poiché la curva $2(EE)$ ha il grado $4n$ ed il genere $2\pi + n - 1$, l'espressione (44) non è altro che la dimensione virtuale del sistema completato

(43) F. SEVERI, *loc. cit.* (39).

$|2(EE)|$. Dal momento che questo sistema è regolare, si conclude che $|2(EE)|$ è completo.

Ora consideriamo la serie segata da $|2E|$ sopra una curva (EE), e diciamone δ_1 la deficienza. Questa serie ha l'indice di specialità P_g e quindi ha la dimensione

$$2n - \pi + P_g - \delta_1 .$$

La dimensione del sistema completo $|EE| = |2(EE) - (EE)|$ risulterà pertanto espressa da

$$3n - 2\pi + p_a + 2 - (2n - \pi + P_g - \delta_1) - 1 = n - \pi + p_a - P_g + 1 + \delta_1 .$$

L'indice di specialità di questo sistema è P_g (la deficienza δ_2 del sistema segato su E dal sistema canonico di V, è cioè nulla), onde δ_1 ne esprimerà la sovrabbondanza. Ricordando il Teorema IX e l'Osservazione alla fine del n. 21, si conclude che

$$\delta_1 = q_1 + q_2$$

ovvero, essendo $\delta_2 = 0$,

$$\delta_1 - \delta_2 = q_1 + q_2 . \qquad \text{c.d.d.}$$

Integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una varietà.

24. *Definizioni.* – È ormai ben noto il legame che passa tra gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica e la irregolarità della superficie [44].

Al n. 14 abbiamo ricordato come l'esistenza degli integrali analoghi sopra una varietà, si riconnetta alla irregolarità superficiale della medesima. Sorge ora la questione di caratterizzare geometricamente, almeno dal punto di vista qualitativo, l'esistenza degli integrali doppi di 1ª specie appartenenti ad una varietà algebrica V a tre dimensioni.

Supponiamo che la varietà V appartenga ad uno spazio a quattro dimensioni, di cui diremo x_1 , x_2 , x_3 , x_4 o rispettivamente x , y , z , t le coordinate non omogenee di punto, secondo che, per la comodità della scrittura, ci convenga l'una o l'altra notazione.

La V abbia per equazione

$$f(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = 0. \tag{45}$$

Entro alla V, o meglio entro alla riemanniana S a 6 dimensioni imagine reale di V, una varietà (bilatera) a due dimensioni A, si ottiene considerando

(44) Per la bibliografia in proposito rinvio il lettore al n. 8 della Monografia di G. Castelnuovo–F. Enriques, alla fine del trattato di E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier–Villars), t. I (1897), t. II (1906).

le x_1 , x_2 , x_3 , x_4 come funzioni di due variabili reali u , v, soggette eventualmente a qualche disuguaglianza funzionale, se la varietà a due dimensioni di cui trattasi non è chiusa. S'indichi in modo generale con $\frac{D(\varphi , \psi)}{D(u , v)}$, ove φ , ψ son due funzioni di u , v, il determinante jacobiano

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u},$$

e si consideri un'espressione del tipo

$$\iint_A \left[\sum_{i,k} P_{ik} \frac{D(x_i , x_k)}{D(u , v)}\right] du\, dv \qquad (P_{ik} = -P_{ki}), \tag{46}$$

i , k denotando una disposizione semplice binaria degli indici 1 , 2 , 3. – Noi supponiamo che le P sieno funzioni razionali delle x_1 , x_2 , x_3 , x_4, legate dalla equazione (45).

L'espressione (46) s'indica anche colla notazione

$$\iint_A \sum_{i,k} P_{ik}\, dx_i\, dx_k . \tag{47}$$

Poiché nel determinante jacobiano $\frac{D(x_i , x_k)}{D(u , v)}$, lo scambio delle x_i , x_k, senza il contemporaneo scambio delle u , v, produce un cambiamento di segno, così occorre fare la convenzione che nella (47), uno scambio dei differenziali dx_i , dx_k produca un cambiamento di segno nei termini relativi. Ciò dà la ragione della supposizione $P_{ik} = -P_{ki}$, mediante la quale l'espressione (47) risulta indipendente dall'ordine dei dx.

Il cambiamento di segno che si produce nel valore dell'espressione (46), allorché si scambiano fra loro u , v, corrisponde al fatto che l'integrale doppio può estendersi all'una o all'altra faccia della varietà bilatera A (o, in altri termini, corrisponde alla possibilità di fissare due sensi opposti attorno ad uno, quindi a tutti i punti di A).

La *condizione d'integrabilità* per l'integrale (47), cioè la condizione affinché il valore dell'integrale rimanga inalterato per una deformazione continua dell'area d'integrazione, che lasci fisso l'eventuale contorno, senza, beninteso, traversare punti di singolarità delle funzioni P, si scrive sotto la forma

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{31}}{\partial x_1} = 0 ,$$

ove le derivate si calcolino ricordando che x_4 è funzione algebrica di x_1 , x_2 , x_3.

Nel seguito supporremo sempre soddisfatta la condizione d'integrabilità. Ogni *periodo* dell'integrale (46), cioè il valore ottenuto estendendo l'integrale ad un ciclo a due dimensioni (area chiusa) di S, risulterà allora indipendente

dalle deformazioni continue del ciclo; e tutti i periodi potranno esprimersi come combinazioni lineari a coefficienti interi di un numero finito tra essi (45).

Noi ci limiteremo a considerare gl'*integrali doppi di 1ª specie*, cioè quegli integrali (47) che rimangono finiti per qualunque area d'integrazione.

25. *Integrali doppi appartenenti ad una sezione iperpiana variabile della varietà.* – Richiamate queste nozioni, indichiamo con R il numero dei cicli distinti a quattro dimensioni che si possono tracciare nella varietà S, talchè $R + 1$ denoterà l'*ordine di connessione quadrimensionale* della S (o della V), od anche, secondo il teorema di Poincaré, l'*ordine di connessione superficiale* (46) della varietà stessa.

Consideriamo un integrale doppio del tipo

$$\iint \frac{P(x, y, z, t)}{f'_t}\, dx\, dy, \tag{48}$$

e riguardiamo z come un parametro, sicché insomma si tratterà d'un integrale appartenente alla superficie algebrica (45). Detto m l'ordine di V, supponiamo che la $P = 0$ sia una varietà d'ordine $m - 4$ aggiunta a V: l'integrale (48) risulterà allora di 1ª specie (Clebsch–Noether), almeno per valori generici di z.

Orbene, noi dimostreremo il seguente teorema fondamentale:

XVI) *Tra i periodi dell'integrale* (48) *– i quali sono certe funzioni del parametro z – se ne trovano R nulli, corrispondenti ad altrettanti cicli superficiali* DISTINTI *della varietà V.*

Non è evidentemente restrittiva l'ipotesi che gli assi coordinati sieno disposti genericamente rispetto alla varietà V, dotata di singolarità *ordinarie*.

Allora gli spazi del fascio $z =$ cost. tangenti a V, produrranno sezioni possedenti oltre alle solite singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli) un punto doppio conico isolato. Ma com'è ben noto – e contrariamente a quanto accade nel caso analogo delle sezioni curvilinee d'una superficie – la presenza di questo punto doppio non altera affatto la *specie* dell'integrale (48) (47), cioè questo rimane ancora dovunque finito sulla relativa superficie sezione. Sicché insomma *l'integrale* (48) *è di 1ª specie sopra ogni sezione di $z =$* cost.

Può veramente sorgere un dubbio per quegli spazi del fascio che hanno posizioni particolari rispetto ai punti multipli di V; ma questo dubbio si rimuove osservando che in ogni caso la sezione di P con questi spazi particolari, continua a comportarsi come aggiunta anche rispetto alle singolarità più complicate che si producono sulle corrispondenti superficie sezioni.

Ciò si giustifica a priori pensando che tali singolarità nascono sempre dalla sovrapposizione di singolarità ordinarie, e che durante la variazione

(45) Veggasi ad esempio per queste nozioni il trattato citato di E. PICARD et G. SIMART (44).

(46) E. PICARD et G. SIMART, *loc. cit.* (44), t. I, Ch. II.

(47) Cfr. per esempio E. PICARD et G. SIMART, *loc. cit.* (44), t. I, p. 184.

dello spazio secante, la sezione di P si comporta come aggiunta rispetto alle singolarità che si avvicinano, in guisa che quando si raggiunge una delle posizioni particolari cui si allude, la suddetta sezione si comporterà come aggiunta anche rispetto alla singolarità limite.

Del resto la cosa si può verificare a posteriori, analizzando le cinque possibili posizioni particolari dello spazio $z = \text{cost.}$

1) Spazio tangente in O, nel modo più generale, alla superficie doppia D della nostra varietà. In tal caso la sezione di V possiede in O un tacnodo ordinario; la linea doppia della suddetta sezione presenta ivi un nodo; e infine la sezione di P passa per O toccando la sezione di V.

2) Spazio tangente in O, nel modo più generale, alla linea T tripla per V e per D. La sezione di V possiede in O un punto triplo triplanare e un altro punto triplo infinitamente vicino secondo la direzione della retta u comune ai tre piani tangenti, la quale è poi l'unica tangente alla linea doppia della suddetta sezione. Questa linea doppia ha pure in O due punti tripli infinitamente vicini. La sezione di P passa per O con un punto doppio biplanare, cui è infinitamente vicino, secondo la direzione u, un altro punto doppio.

3) Spazio generico passante per uno, O, dei punti che son quadrupli per V e per T e sestupli per D. La sezione di V ha in O un punto quadruplo, con quattro piani tangenti indipendenti; il punto O è sestuplo per la linea doppia della suddetta sezione e le tangenti relative sono i sei spigoli dell'angolo tetraedro formato da quei piani tangenti. La superficie sezione di P, passa per O con un punto triplo.

4) Spazio generico tangente in O alla linea luogo dei punti cuspidali di V (punti doppi in cui i due spazi tangenti coincidono). Nel punto O, doppio per la superficie sezione di V, coincidono due punti uniplanari (cuspidali) della superficie stessa. La sezione di P passa per questi punti.

5) Spazio generico passante per uno, O, dei punti triplo–cuspidali di V (punti tripli in cui due spazi tangenti coincidono). La sezione di V presenta ivi un punto triplo–cuspidale e la sezione di P passa per esso doppiamente.

Ciò premesso, consideriamo gli R cicli distinti a quattro dimensioni che si possono tracciare entro V. Per la scelta generica del fascio $z = \text{cost.}$, si può anzitutto escludere che uno qualunque di questi cicli abbia in comune con un spazio del fascio una varietà a tre dimensioni, perché entro alla totalità reale delle ∞^8 sezioni spaziali di V, non si può evidentemente trovare un continuo di più che ∞^1 sezioni spaziali incontranti il ciclo considerato secondo varietà a tre dimensioni. Ognuno degli R cicli considerati segherà pertanto una qualunque sezione $z = \text{cost.}$ – più propriamente la relativa riemanniana a quattro dimensioni – secondo uno o più cicli superficiali (in numero finito) di questa sezione.

Ma anche nel caso in cui i cicli ottenuti sieno più d'uno, eseguendone la *somma*, cioè riunendoli mediante sottili superficie tubulari, il loro complesso si potrà considerare come un sol ciclo.

Orbene, *gli R cicli cui si perviene in tal modo, sono invarianti rispetto alle circolazioni di z*, cioè facendo descrivere a z un cammino chiuso sul proprio piano rappresentativo, ognuno degli R cicli ritorna in sé stesso. E invero, qualora uno di tali cicli risulti dalla somma di più altri, come sopra si è spiegato la circolazione di z non potendo produrre che una permutazione tra i cicli componenti, lascia inalterata la loro somma.

I periodi dell'integrale (48) relativi a questi R cicli, sono pertanto *funzioni uniformi* di z; e poiché l'integrale conservasi di 1ª specie per ogni valore di z, ne segue che i periodi stessi sono funzioni uniformi dovunque finite, cioè *costanti*.

Ci resta da provare:

a) che gli R cicli invarianti sono tra loro distinti;

b) che le suddette costanti sono addirittura nulle.

L'affermazione *a*) riducesi a quest'altra: sulla riemanniana S un ciclo M a quattro dimensioni che non formi contorno (si sottintende sopra una qualche varietà a tre dimensioni condotta per esso), stacca sulla riemanniana Q, imagine di una sezione generica $z = \text{cost.}$, un ciclo superficiale N (somma eventualmente di più altri) che *non* forma contorno. Infatti, l'ipotesi che il ciclo M non formi contorno, si traduce nella esistenza di un ciclo lineare σ di S, il quale sega M in un numero dispari di punti. Ora il ciclo lineare σ, per deformazione continua senza uscire da S, può ridursi sulla riemanniana Q, e durante questa deformazione la parità del numero dei punti comuni a σ e ad M non s'altera: dunque, a deformazione eseguita, avremo sopra Q un ciclo lineare segante N in un numero dispari di punti. Ciò prova che N non può formare contorno.

Passiamo infine a dimostrare l'affermazione *b*). Cerchiamo a tal uopo la forma dello sviluppo di un periodo dell'integrale (48) nell'intorno di $z = \infty$. Per ciò converrà porre

$$x = zu\,, \qquad y = zv\,, \qquad t = zw\,,$$

e operare questa sostituzione nell'integrale (48) dopo avere ordinato i polinomi f, P aggruppandone i termini dello stesso ordine, a cominciare da quello di grado più alto. Verrà allora

$$\iint \frac{P(x\,,y\,,z\,,t)}{f'_t}\,dx\,dy =$$

$$= \iint \frac{z^{m-4}P_0(u\,,v\,,1\,,w) + z^{m-3}P_1(u\,,v\,,1\,,w) + \cdots}{z^{m-1}\dfrac{\partial f_0(u\,,v\,,1\,,w)}{\partial w} + z^{m-2}\dfrac{\partial f_1(u\,,v\,,1\,,w)}{\partial w} + \cdots}\,\frac{D(x\,,y)}{D(u\,,v)}\,du\,dv$$

$$= z^2 \iint \frac{z^{m-4}P_0(u\,,v\,,1\,,w) + \cdots}{z^{m-1}\dfrac{\partial f_0(u\,,v\,,1\,,w)}{\partial w} + \cdots}\,du\,dv\,,$$

ove P_i, f_i denotano il complesso dei termini di grado rispettivo $m-4-i$, $m-i$ nei polinomi P, f. Sicché lo sviluppo di un periodo dell'integrale (48) sarà della forma

$$\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z^3}+\cdots, \tag{49}$$

ove $a, b, c, \cdots$ sono convenienti periodi di determinati integrali doppi. Così per esempio a è un periodo dell'integrale

$$\iint \frac{P_0(u, v, 1, w)}{\frac{\partial f_0(u, v, 1, w)}{\partial w}}\, du\, dv,$$

relativo alla superficie $f_0(u, v, 1, w)=0$, che è la proiezione, dall'origine delle coordinate sul piano $z=1$, della sezione all'infinito di V.

Lo sviluppo (49) mostra che, se un periodo dell'integrale (48) è costante, per esso deve risultare necessariamente

$$a=b=c=\cdots=0,$$

cioè *il periodo stesso deve essere identicamente nullo.* c.d.d.

26. Una conseguenza notevolissima del teorema XVI è la seguente:

XVII) *La deficienza δ del sistema segato sopra una sezione iperpiana di una varietà a tre dimensioni V, dal proprio sistema aggiunto, non è mai inferiore al numero degli integrali doppi indipendenti di 1ª specie che appartengono alla varietà.*

Indichiamo infatti con J un integrale doppio di 1ª specie appartenente alla varietà V, per la quale conserviamo le notazioni degli altri numeri.

Sopra ogni sezione $z=$ cost. l'integrale J staccherà un integrale doppio di 1ª specie: dico che quest'integrale non può mai avere la forma (48). Nell'ipotesi contraria esso avrebbe nulli i periodi relativi ad R cicli superficiali *distinti* di V; e poiché ogni periodo di J è una combinazione lineare (a coefficienti interi o razionali) dei periodi relativi ad R cicli distinti qualunque, così tutti i periodi di J sarebbero nulli, cioè J si ridurebbe ad una costante (funzione uniforme dovunque finita).

Questo fatto si può esprimere geometricamente nel modo seguente: *La superficie aggiunta d'ordine $m-4$ individuata sopra uno spazio $z=$ cost. dall'integrale J, non può mai essere staccata sullo stesso spazio da una forma d'ordine $m-4$ aggiunta a V.*

Ne deriva che le curve canoniche individuate sopra una superficie $z=$ cost. da un integrale J, non possono appartenere al sistema staccato sulla stessa superficie dal relativo sistema aggiunto, e si conclude pertanto col Teorema XVII.

Ricordando il Teorema X si può enunciare che:

XVIII) *Il numero degli integrali doppi di* 1ª *specie che appartengono ad una varietà a tre dimensioni, non supera la somma delle due irregolarità* q_1, q_2 *della varietà.*

In particolare dunque *una varietà per cui sia nulla la somma* $q_1 + q_2$, *è priva d'integrali doppi di* 1ª *specie, ed una varietà completamente regolare* ($q_1 = q_2 = 0$), *è priva d'integrali doppi e d'integrali semplici di* 1ª *specie.*

Questi teoremi estendono (parzialmente perché si riferiscono soltanto agl'integrali doppi di 1ª specie) il primo risultato qualitativo da me ottenuto per gl'integrali semplici di una superficie (48).

La previsione che anche per le varietà si possa giungere a stabilire un'uguaglianza tra il numero Q degl'integrali doppi di 1ª *specie e la somma* $q_1 + q_2$, *è assai attraente; ma certamente questo risultato definitivo costerà molti sforzi.*

Noi qui dobbiamo limitarci a constatare sopra alcuni esempi, di cui tosto ci occuperemo, che *il limite superiore* $q_1 + q_2$ *del numero Q può essere effettivamente raggiunto.*

27. Prima però vogliamo esporre un'osservazione la quale fa presagire *un legame tra l'esistenza degli integrali doppi di* 1ª *specie sopra una varietà a tre dimensioni V, e le proprietà dei sistemi di* LINEE *tracciate sulla V.*

A tal uopo premetteremo la considerazione seguente, relativa alle serie doppiamente infinite di gruppi di punti sopra una superficie F di equazione

$$f(x, y, z) = 0.$$

Denotiamo con $(x_1, y_1, z_1) \cdots (x_n, y_n, z_n)$ n punti appartenenti ad un gruppo variabile entro una serie $\infty^2 \Sigma$, e con

$$\iint \varphi(x, y, z)\, dx\, dy$$

un integrale doppio di 1ª specie appartenente ad F.

Le coordinate (x_i, y_i, z_i) saranno funzioni algebriche (ad n valori) del punto (λ, μ, ν) variabile sopra una superficie $\psi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ che sia in corrispondenza birazionale con Σ, sicché l'espressione

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i, z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)},$$

risulterà funzione *razionale* del punto (λ, μ, ν): sia

$$\sum \varphi(x_i, y_i, z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)} = \Phi(\lambda, \mu, \nu).$$

(48) Veggasi per le citazioni la monografia citata di F. CASTELNUOVO–G. ENRIQUES (44).

Allora l'integrale

$$(50) \qquad \iint \Sigma \varphi(x_i, y_i, z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)} d\lambda\, d\mu = \iint \Phi(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu$$

è *un integrale doppio di* 1^a *specie della superficie* $\psi = 0$ [49].

Similmente se si ha sopra una varietà V un sistema Σ (semplice) di ∞^2 curve algebriche, tale che per un punto generico di V passino n linee del sistema non secantisi altrove, ad ogni punto di V risponderanno sopra una superficie $\psi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ rappresentativa del sistema, n punti

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1), \cdots, (\lambda_n, \mu_n, \nu_n),$$

ed ogni integrale doppio di 1^a specie

$$\iint \varphi(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu$$

della ψ, darà luogo ad un integrale doppio di 1^a specie

$$\iint \Sigma \varphi(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)\, d\lambda_i\, d\mu_i$$

della varietà V.

XIX) Dunque: *Sopra una varietà priva d'integrali doppi di* 1^a *specie, ogni sistema (semplice)* Σ *di* ∞^2 *curve algebriche, ha il genere geometrico nullo.*

In particolare *se la varietà è completamente regolare, non soltanto sarà nullo il genere geometrico di* Σ, *ma il sistema stesso sarà regolare* (cioè la superficie rappresentativa sarà regolare e di genere 0).

(49) Se la serie ∞^2, Σ, è un'involuzione, gl'integrali doppi di ψ provengono tutti dalle somme del tipo (50). Infatti, partendo da un integrale $\iint \Phi\, d\lambda\, d\mu$ di 1^a specie di ψ, si ha la relazione:

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) \frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} = \varphi(x, y, z),$$

ove φ è una tal funzione razionale, che $\iint \varphi\, dx\, dy$ è pure di 1^a specie. Si ottiene così *la condizione necessaria e sufficiente*:

$$\Sigma \varphi(x_i, y_i, z_i) \frac{D(x_i, y_i)}{D(\lambda, \mu)} = 0,$$

affinchè un'involuzione ∞^2 *sopra una superficie, sia di genere nullo.* Pel caso in cui si tratti di un'involuzione sopra una superficie iperellittica, cfr. G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti*, Mem. Soc. Ital. delle Sc. (detta dei XL), (3) *15* (1908), pp. 251–343, § 4.

Alcuni esempi.

28. *Varietà delle coppie di punti di una curva C e di una superficie F.* – Si può sempre supporre che la superficie data F sia priva di curve eccezionali (di 1ª specie), non escludendo il caso in cui F sia una rigata (razionale o no), nel qual caso, quando ci si riferisca ad un modello opportuno, non si hanno che curve eccezionali di 2ª specie (Castelnuovo–Enriques).

Si supporrà inoltre che la varietà V rappresenti « senza eccezione » le coppie di punti di F e di C. Indicheremo con Σ il fascio, birazionalmente identico a C, delle superficie F_0, identiche ad F, che rappresentano le coppie con un punto fissato su C; e con π la congruenza d'indice 1, identica ad F, formata dalle curve C_0, identiche a C, che rappresentano le coppie con un punto fissato su F. – Una curva C_0 ed una superficie F_0 si segano in un punto.

Ciò premesso, costruiamo anzitutto il sistema canonico di V. Sieno

$$f(\lambda, \mu, \nu) = 0, \qquad \varphi(\lambda', \mu') = 0 \tag{51}$$

le equazioni rispettive di F e di C, e

$$x_i = A_i(\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu') \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{52}$$

le formole che esprimono le coordinate non omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) di un punto variabile su V, come funzioni razionali dei punti (λ, μ, ν), (λ', μ') variabili sulle F, C. Poiché ad un punto di V risponde un punto su F ed un punto su C, le $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu'$ risulteranno funzioni razionali delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4, legate dall'equazione di V, la quale si ottiene eliminando le $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu'$ tra le (51), (52).

L'estensione immediata di un ragionamento del sig Picard [50], permette di concludere che gl'integrali tripli di 1ª specie, appartenenti a V, son tutti combinazioni lineari di integrali del tipo

$$\iiint P(\lambda, \mu, \nu)\, Q(\lambda', \mu')\, d\lambda\, d\mu\, d\lambda' = \iiint R(x_1, x_2, x_3, x_4)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

ove

$$\iint P(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu, \qquad \int Q(\lambda', \mu')\, d\lambda'$$

denotano rispettivamente due integrali di 1ª specie appartenenti ad F, C.

Dico anzitutto che il *determinante funzionale*

$$\frac{D(\lambda, \mu, \lambda')}{D(x_1, x_2, x_3)}, \tag{53}$$

considerato come funzione del punto variabile su V, *riducesi ad una costante non nulla*. Basterà provare ch'esso non si annulla mai sopra V.

(50) Cfr. E. Picard et G. Simart, *loc. cit.* (44), t. I, p. 196.

Infatti, se il determinante (53) si annullasse in un punto $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ della nostra varietà, del quale sia $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}; \bar{\lambda}', \bar{\mu}')$ la coppia corrispondente, nell'intorno di $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}; \bar{\lambda}', \bar{\mu}')$ le x non sarebbero più determinate funzioni uniformi di $(\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu')$, il che contraddice all'ipotesi che la corrispondenza tra le coppie $(\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu')$ e i punti (x_1, x_2, x_3, x_4), sia *biunivoca senza eccezione*.

Ne deriva che, a meno di una costante non nulla, si può scrivere la relazione

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(\lambda, \mu, \nu)\, Q(\lambda', \mu').$$

Se quindi s'indica con

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{p_g} P_{p_g} = 0$$

l'equazione del sistema canonico della superficie F, di genere geometrico p_g, e con

$$\mu_1 Q_1 + \cdots + \mu_p Q_p = 0,$$

l'equazione della serie canonica della curva C di genere p, l'equazione del sistema canonico di V sarà

$$\sum v_{ik} P_i Q_k = 0. \tag{54}$$

Se ne rileva che il genere geometrico di V è espresso da

$$P_g = p_g\, p.$$

Invero le $p_g\, p$ varietà $P_i Q_k = 0$ non posson essere tra loro linearmente legate, giacché se la (54) fosse un'identità per valori non tutti nulli delle v, se ne dedurrebbe l'identità

$$P_1 \sum v_{1k} Q_k + P_2 \sum v_{2k} Q_k + \cdots + P_{p_g} \sum v_{p_g k} Q_k = 0,$$

donde, a causa dell'indipendenza delle P, si trarrebbe

$$\sum v_{ik} Q_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, p_g),$$

e ciò porterebbe ad almeno un legame tra le Q.

L'equazione (54) può essere interpretata geometricamente dicendo che:

Una superficie canonica di V si ottiene aggiungendo alle superficie formanti entro il fascio Σ un gruppo canonico, una superficie riempita dalle ∞^1 curve che dànno entro la congruenza π un ente canonico.

Costruiamo ora gl'integrali doppi della varietà V. Si vede colla solita considerazione [51] che ogni integrale doppio di 1ª specie di V, è una combinazione lineare d'integrali del tipo

$$\iint P(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu, \tag{55}$$

$$\iint H(\lambda, \mu, \nu)\, Q(\lambda', \mu')\, d\lambda\, d\lambda' + K(\lambda, \mu, \nu)\, Q(\lambda', \mu')\, d\mu\, d\lambda',$$

(51) E. PICARD et G. SIMART, *loc. cit.* (44), t. I, pp. 129 e 196.

ove

$$\iint P\,d\lambda\,d\mu\,, \qquad \int H\,d\lambda + K\,d\mu\,, \qquad \int Q\,d\lambda',$$

sono integrali di 1ª specie appartenenti rispettivamente ad F, C. E poiché, come si prova facilmente, gl'integrali del tipo (55) sono tra loro indipendenti, si conclude che *la varietà V possiede $p_g + p\,(p_g - p_a)$ integrali doppi di 1ª specie*, ove p_a denota il genere aritmetico di V.

Infine *gl'integrali semplici di 1ª specie della V* sono combinazioni lineari dei trasformati degl'integrali semplici di F o di C, e perciò *sono in numero di $p_g - p_a + p$*.

Passiamo a calcolare i caratteri Ω_0, Ω_1, Ω_2, P_a relativi alla varietà V.

Ricordiamo che F_0 denota una superficie del fascio Σ e C_0 una curva della congruenza π. Con Φ indicheremo una superficie riempita dalle ∞^1 curve C_0 che dànno entro π un ente canonico.

Per calcolare i caratteri Ω occorrerà conoscere i caratteri virtuali dei sistemi $|F_0|$, $|\Phi|$, mediante cui si compone il sistema canonico. Non si esclude il caso che questo manchi; naturalmente allora si avrà da fare con enti virtuali.

Il grado e il genere curvilineo di $|F_0|$ sono rispettivamente uguali a 0, 1, perché non vi son punti comuni a due F_0. Quanto al genere aritmetico di F_0, esso è uguale al genere aritmetico p_a di F.

Indicando con n_0, n_1, n_2 grado, genere curvilineo, genere aritmetico di $|(2p-2)\,F_0|$, avremo pertanto

$$n_0 = 0, \qquad n_1 = 1, \qquad n_2 = 2p - 3 + 2\,(p-1)\,p_a.$$

Passiamo a calcolare i caratteri di $|\Phi|$. A tal uopo si osservi che una Φ appartiene ad un sistema continuo ∞^{p_g-1} *composto* colla congruenza π; due Φ di questo sistema si segano in $p^{(1)} - 1$ curve C_0 del fascio di genere $p^{(1)}$ che la congruenza subordina su esse, $p^{(1)}$ denotando il genere lineare di F.

Se si indicano con m_0, m_1 il grado e il genere curvilineo di $|\Phi|$, verrà intanto

$$m_0 = 0, \qquad m_1 = (p^{(1)} - 1)\,(p-1) + 1.$$

Quanto al genere aritmetico m_2 di $|\Phi|$, esso non è altro che il genere aritmetico della superficie delle coppie di punti di C e di una curva canonica di F; cioè (52)

$$m_2 = (p^{(1)} - 1)\,(p-1) - 1.$$

(52) A. MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, *38* (1902–1903), pp. 149–154, p. 151; M. DE FRANCHIS, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, *17* (1903), pp. 104–121, p. 108.

Tenendo infine presente che una Φ sega sopra una F_0 una curva canonica, mediante le formole (n. 11) che esprimono i caratteri del sistema somma di due altri, si ha

$$\Omega_0 = 6(p-1)(p^{(1)}-1), \qquad \Omega_1 = 9(p-1)(p^{(1)}-1)+1,$$
$$\Omega_2 = 3(p-1)(p^{(1)}-1)+2(p-1)p_a+2p-3,$$

e in forza della relazione fondamentale (33), si ottiene *il valore del genere aritmetico P_a di V*

$$P_a = (p-1)p_a + p.$$

L'irregolarità tridimensionale q_1 di V è perciò data da

$$q_1 = P_g - P_a = p(p_g - p_a) + p_a - p;$$

e l'irregolarità superficiale q_2 da

$$q_2 = (p_g - p_a) + p.$$

Ne deriva che *il numero degli integrali doppi di* 1ª *specie appartenenti a V è uguale alla somma delle due irregolarità*

$$q_1 + q_2 = p_g + p(p_g - p_a).$$

Osservazioni. – Quando la F sia regolare con $p_g = p_a > 0$ e la C razionale ($p = 0$), si ottiene *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale nulla e ad irregolarità tridimensionale* > 0.

Nel caso $p_g = p_a = p = 1$, si ha invece *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale* > 0 *e ad irregolarità tridimensionale nulla.*

Nel caso $p_g = p_a = 0$, $p > 0$, si ha *un esempio di varietà col genere geometrico minore del genere aritmetico* ($P_g = 0$, $P_a = p$).

Nel caso $p_g = p = 0$, $p_a < 0$ si ha *un esempio di varietà avente diverse da zero ambedue le irregolarità e che tuttavia è priva d'integrali doppi di* 1ª *specie.*

29. *Varietà delle terne di punti di una curva C di genere p.* – Ho già avuto occasione altrove [53] di assegnare il numero degl'integrali tripli, doppi, semplici di 1ª specie appartenenti ad una tal varietà V; questi numeri risultano rispettivamente uguali a $\binom{p}{3}$, $\binom{p}{2}$, p, cosicché *il genere geometrico P_g e l'irregolarità superficiale q_2 della V sono espressi da*

$$P_g = \binom{p}{3}, \qquad q_2 = p.$$

Ricordo anche la costruzione del sistema canonico di V [54].

(53) F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, *38*, pp. 185–200 (1902–1903), p. 198 [Nota XII, vol. I, p. 129; N.d.R.].

(54) *Loco cit.* (53), p. 200.

Sia Σ la serie ∞^1 di superficie F_0, identiche alla superficie delle coppie di punti della curva C, ciascuna delle quali rappresenta le terne aventi un punto fisso. Per un punto generico di V passano tre superficie F_0 (cioè Σ è d'indice 3); e sopra una fissata F_0, le altre segano il relativo sistema di grado 1 e d'indice 2, che appartiene alla F_0 fissata, in quanto la si consideri come superficie delle coppie di punti di C.

Orbene, *sulla V una superficie canonica si ottiene come luogo dei punti comuni alle terne di superficie F_0, tolte da un gruppo variabile in una g^2_{2p-2} canonica del sistema Σ.*

Poiché, data la costruzione un po' complicata del sistema canonico, il calcolo diretto degl'invarianti Ω appartenenti a V, non si presenterebbe così semplice come nel caso precedente, gioverà di calcolare per altra via il genere aritmetico P_a della varietà.

Imitando un ragionamento che ho esposto altrove [55] per la superficie delle coppie di punti di una curva, e profittando anzi del risultato là stabilito, si prova – senza difficoltà – che il sistema lineare completo cui appartengono totalmente i gruppi di superficie F_0 formanti entro Σ una serie lineare completa g^r_n, ha la dimensione $\binom{r+3}{3} - 1$.

Ciò posto, si osservi che il sistema lineare $|nF_0|$, contenente le suddette superficie composte, è semplice ed è privo di gruppi di un numero finito o infinito di punti che presentino alle sue superficie una sola condizione. Sicché, appena sia $r > 1$, si potrà trasformare birazionalmente V in una varietà V', priva di singolarità, sulla quale $|nF_0|$ venga segato dagl'iperpiani.

Ne deriva (n. 11) che, per n assai alto, il sistema $|nF_0|$ è regolare (n. 21).

Da che il sistema $\infty^0 |F_0|$ ha il grado 1, il genere curvilineo p, e il genere aritmetico $\binom{p}{2} - p$ [56], mediante le formole del n. 11, si avrà l'espressione

$$R_n = \binom{n+3}{3} - p\binom{n+2}{2} + \binom{p}{2}(n+1) - \binom{p}{2} + p - P_a - 1$$

della dimensione effettiva R_n del sistema $|nF_0|$.

D'altra parte, essendo per $n > 2p-2$, $r = n-p$, risulta pure

$$R_n = \binom{n-p+3}{3} - 1.$$

Confrontando le due espressioni di R_n, in virtù dell'identità

$$\binom{n+3}{3} = \binom{n-p+3}{3} + p\binom{n+2}{2} - \binom{p}{2}(n+1) + \binom{p}{3},$$

(55) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) 54 (1903), pp. 1–49, n. 20 [Memoria XV, vol. I, p. 211; N.d.R.].

(56) M. DE FRANCHIS, *loc. cit.* (52), p. 118; F. SEVERI, *loc. cit.* (53), p. 193.

si ottiene *l'espressione cercata del genere aritmetico di* V

$$P_a = \binom{p}{3} - \binom{p}{2} + p.$$

L'irregolarità tridimensionale q_1 vien dunque uguale a $\binom{p}{2} - p$ ed anche in tal caso *il numero degl'integrali doppi di* 1ª *specie appartenenti a* V, *risulta uguale alla somma delle due irregolarità* q_1, q_2.

Cenni di estensioni alle varietà superiori.

30. *Ancora sul genere aritmetico.* – Sia V_k una varietà dello S_{k+1}, che possa riguardarsi come proiezione generica di una varietà senza punti multipli, talché le singolarità di V_k sieno *ordinarie*. Detto n l'ordine di V_k, consideriamo il numero virtuale P_a delle forme indipendenti d'ordine $n - k - 2$, passanti per la M_{k-2} doppia di V_k. Per $k = 2, 3$ si sa che P_a coincide col genere aritmetico p_k definito al n. 4. Orbene, questa conclusione vale anche per k qualunque. Eccone un cenno di dimostrazione:

Si estendono anzitutto, senz'alcuna difficoltà di concetto, gli sviluppi dei nn. 9, 10, 11, 12, 13 e si arriva così, dopo aver definito gl'invarianti relativi $\Omega_0, \Omega_1, \cdots, \Omega_{k-1}$ (grado, genere curvilineo, genere aritmetico superficiale, $\cdots$, genere aritmetico a $k - 1$ dimensioni della varietà, eventualmente virtuale, $F' - F$), alla forma provvisoria della relazione fondamentale

$$(56) \quad P_a + (-1)^{k-1} p_k = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \cdots + (-1)^{k-1} \Omega_{k-1} + k + (-1)^{k-1}.$$

Si ricordi quindi che p_k, e per ragioni analoghe anche P_a, son caratteri numerativi di V_k (Teorema IV).

In particolare per una varietà V_k completa intersezione di $r - k$ forme generiche dello S_r, p_k e P_a risultano funzioni soltanto degli ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{r-k}$ di queste forme. Le relative espressioni si calcolano facilmente. L'espressione di p_k si ottiene infatti come al n. 15 *a*), e l'espressione di P_a si calcola osservando che le forme d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-k} - r - 1 + h$ segano sopra V_k il sistema (completo) aggiunto al multiplo secondo h di una sezione iperpiana, e che d'altra parte, secondo il n. 9 esteso, la dimensione di questo aggiunto si sa esprimere in funzione di P_a.

Confrontando le due espressioni così ottenute si trova

$$(57) \qquad p_k = P_a .$$

S'indichino ora con α_i $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ i caratteri proiettivi di una qualunque V_k (n. 6). Si avrà allora

$$p_k = \sum c_i \alpha_i , \qquad P_a = \sum c'_i \alpha_i ,$$

le c_i , c'_i essendo costanti. Sostituendo al posto delle a_i le loro espressioni (in funzione delle n) relative al caso in cui V_k è intersezione completa, si otterrà l'identità

$$\sum c_i a_i = \sum c'_i a_i ,$$

valida qualunque sieno gli ordini n. Ne segue che

$$c_i = c'_i .$$

L'uguaglianza (57) vale perciò per una V_k qualunque e si ottiene *la forma definitiva della relazione fondamentale*

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \cdots - \Omega_{k-1} + k - 1 = 0 \qquad \text{(per } k \text{ pari)},$$
$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots + \Omega_{k-1} + k + 1 = 2P_a \qquad \text{(per } k \text{ dispari)}.$$

31. *Deficienza del sistema segato sopra una varietà a $k-1$ dimensioni F, tracciata sulla varietà V_k, dal relativo sistema aggiunto $|F'|$.* – Con un ragionamento addirittura identico, salvo adattamenti di parole, a quello svolto per $k = 3$, si arriva ad estendere alle V_k il Lemma I del n. 20.

Meno immediata è l'estensione del Lemma II, che perciò riferiremo diffusamente.

Chiameremo anzitutto *regolare* un sistema lineare non speciale $|F|$ di M_{k-1}. appartenente a V_k, quando la sua dimensione sia espressa da

$$(58) \qquad n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \cdots + (-1)^{k-2} n_{k-2} + (-1)^{k-1} n_{k-1} + (-1)^k P_a + k - 1,$$

ove n_0 , n_1 , n_2 , $\cdots$, n_{k-1} sono i caratteri virtuali del sistema (grado, genere curvilineo, genere aritmetico superficiale, $\cdots$, genere aritmetico della varietà a $k-2$ dimensioni comune a due F, genere aritmetico di una F).

In forza del n. 11, già esteso alle V_k, si può affermare la regolarità di un multiplo assai elevato delle sezioni iperpiane di V_k (supposta priva di singolarità). Se ne deduce anche la regolarità del sistema $|F|$ staccato sopra V_k dalle forme di ordine assai alto che passano per una varietà G_{k-1}, priva di singolarità, tracciata su V_k. Basta infatti scegliere l così alto, che le forme d'ordine l stacchino tanto su G_{k-1} che su V_k, sistemi completi regolari, di cui indichiamo con R, r le dimensioni. La dimensione di $|F|$ risulterà uguale ad $R - r - 1$. – Ricordando le formole che legano i caratteri virtuali di due varietà, ai caratteri della loro somma, l'espressione $R - r - 1$ si trasforma in un'espressione del tipo (58), e perciò, secondo la definizione, $|F|$ risulta regolare.

Ciò premesso, sulla V_k indichiamo con $|F|$ un *sistema lineare (completo o no) completamente irriducibile* – cioè tale che risultino irriducibili i suoi sistemi lineari caratteristici dei diversi ranghi. Supponiamo inoltre $|F|$ privo di varietà base. Sia $|A|$ un sistema lineare *completo* regolare, il quale segni sopra la varietà F_i comune a $k - i$ ($i = 1, 2, 3, \cdots, k-1$, $F_{k-1} = F$) varietà generiche F, un sistema *completo* regolare, che contenga il sistema lineare segnato da $|F|$ su F_i e lasci come residuo un sistema regolare (even-

tualmente incompleto): il Lemma II afferma allora che il minimo sistema $|F+A|$ è completo e regolare.

Poiché già sappiamo che il lemma è vero per $k=2$, lo ammetteremo sulle varietà a $k-1$ dimensioni, e lo dimostreremo per induzione sulla V_k. Indichiamo perciò con $|C|$ il sistema *completo* $|F+A|$ e proviamo anzitutto che $|C|$ è regolare.

Se $\overline{F}$ designa una fissata F, $\overline{F}_{k-2}$ la sezione di $\overline{F}$ con una generica F, dalle condizioni cui soddisfa per ipotesi il sistema $|A|$, segue che il sistema lineare completo $|B|$, staccato su $\overline{F}$ da $|A|$, soddisfa alle condizioni analoghe. Avendo ammesso il teorema sulle varietà a $d-1$ dimensioni, ne deriva che è completo e regolare il minimo sistema lineare

$$|D| = |B + \overline{F}_{k-2}|$$

tracciato su $\overline{F}$. E poiché $|C|$ segna su $\overline{F}$ un sistema lineare che contiene totalmente ogni varietà composta $B+\overline{F}_{k-2}$, si conclude che tale sistema coincide con $|D|$.

S'indichi ora con r_d la dimensione di $|D|$ e con $\bar{r}_c$ la dimensione (virtuale) che $|C|$ avrebbe se fosse regolare, cosicché la dimensione effettiva di $|C|$ risulterà $r_c = \bar{r}_c + \varepsilon$, ove ε è un intero (positivo, negativo o nullo).

La dimensione del sistema completo $|A|$ verrà uguale ad

$$r_a = \bar{r}_c + \varepsilon - r_d - 1.$$

Profittando delle formole che legano i caratteri di $|C|$ ai caratteri dei sistemi $|F|$ ed $|A|$, si trova

$$\bar{r}_a = \bar{r}_c - r_d - 1,$$

ove $\bar{r}_a$ denota la dimensione virtuale di $|A|$. Confrontando questa relazione colla precedente, viene

$$r_a = \bar{r}_a + \varepsilon,$$

donde, a causa della regolarità di $|A|$, segue $\varepsilon = 0$ e perciò $r_c = \bar{r}_c$. Dunque il sistema $|C|$ è regolare.

S'indichi ora con $|E|$ il minimo sistema $|F+A|$: si tratterà di provare che $|E|$ coincide col sistema completo $|C|$.

Poiché $|C|$ segna su $\overline{F}$ il minimo sistema lineare $|B+\overline{F}_{k-2}|$, anche E segnerà su F lo stesso sistema $|D|$. In ambedue i casi il sistema residuo

$$|C - \overline{F}|, \qquad |E - \overline{F}|$$

è il sistema completo $|A|$. Ne deriva che la dimensione di $|E|$, come quella di $|C|$, è espressa da

$$r_a + r_d + 1,$$

e quindi i due sistemi coincidono. c.d.d.

Si hanno allora tutti gli elementi per concludere come al n. 20 che, data su V_k una varietà a $k-1$ dimensioni F, priva di singolarità, la deficienza δ_1

del sistema segato su F dal sistema aggiunto $|F'|$, non supera la deficienza δ_2 del sistema staccato da $|G'|$ sopra la sezione G di V_k con una forma d'ordine assai alto. – Ora la deficienza δ_2 si valuta facilmente applicando la formola analoga alla (15) del n. 9, e si trova così

$$\delta_2 = q_1 + q,$$

ove q_1 $(= P_g - P_a)$ è l'irregolarità k–dimensionale di V_k e q è l'irregolarità $(k-1)$–dimensionale di G.

Ammettendo che l'irregolarità $(k-1)$–dimensionale delle varietà prive di punti multipli, appartenenti a V_k, non possa crescere oltre ogni limite e indicando con q_2 questo limite superiore, che si potrebbe chiamare *l'irregolarità $(k-1)$–dimensionale di V_k*, si giunge alla conclusione che *la deficienza del sistema segato sopra una F di V_k dal proprio sistema aggiunto, non supera la somma delle irregolarità a $k-1$ ed a k dimensioni appartenenti a V_k.*

E da ciò segue pure col processo d'induzione completa, *l'invarianza assoluta del genere aritmetico rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà.*

Osservazione. – Nel caso di k dispari, dalla relazione fondamentale, stante l'evidente invarianza relativa dei caratteri Ω, si trarrebbe subito l'invarianza (almeno relativa) di P_a; ma un esame più approfondito del modo di variare degli Ω rispetto alle trasformazioni che posseggono su V_k elementi fondamentali (come ha fatto il sig. Pannelli per $k = 3$), porterebbe a stabilire l'invarianza assoluta di P_a. – Nel caso di k pari, volendo dimostrare l'invarianza del P_a per una via – diremo così – aritmetica, occorrerebbe trovare in generale una relazione analoga a quella data da Noether per le superficie $(\omega + I = 12 p_a + 9)$.

32. *Le irregolarità di una V_k.* – Dal n. precedente apparisce come essenziale per lo sviluppo della geometria sopra una varietà V_k, la dimostrazione del fatto che le varietà a $k-1$ dimensioni, prive di punti multipli, le quali soddisfino entro V_k a certe condizioni di genericità (ved. per $k = 3$ il n. 14), hanno la stessa irregolarità $(k-1)$–dimensionale.

Una volta ammesso questo fatto, ne segue che *per una data V_k si debbono considerare $k-1$ irregolarità, $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_{k-1}$.*

In generale q_i è l'irregolarità $(k-i+1)$–dimensionale di una varietà *generica* a $k-i+1$ dimensioni contenuta in V_k.

33. *Integrali multipli finiti dei vari ranghi appartenenti ad una V_k.* – Gli sviluppi dei nn. 24, 25, 26 si estendono senza difficoltà agl'integrali $(k-1)$–pli di 1ª specie appartenenti ad una V_k e si arriva alla conclusione che *la deficienza del sistema segato sopra una sezione iperpiana di V_k, dal proprio sistema aggiunto, è almeno uguale al numero degl'integrali $(k-1)$–pli indipendenti, di 1ª specie, che appartengono a V_k.*

Quanto agl'integrali finiti $(k-1)$–pli di V_k $(i = 2, 3, \cdots, k-1)$, tutto tende a far supporre ch'essi sieno precisamente tanti quanti gl'integrali analoghi

di una generica varietà a $k - i$ dimensioni appartenente a V_k (in particolare della sezione di V_k con uno spazio lineare di conveniente dimensione). Il fatto, come abbiamo ricordato (n. 14), è già stato stabilito per gl'integrali semplici.

Ciò che si può senz'altro affermare, in forza del teorema sopra enunciato e della relazione tra la deficienza δ e le irregolarità q_1 , q_2, è che una varietà completamente regolare ($q_1 = q_2 = \cdots = q_{k-1} = 0$) non possiede integrali $(k - i)$-pli di 1ª specie ($i = 1, 2, \cdots, k - 1$).

34. I teoremi e le induzioni riferite si possono controllare sopra esempi, tra i quali riesce singolarmente istruttivo il caso di una V_k rappresentante le k-ple di punti di una curva C di genere p.

A proposito di questa V_k faremo un'altra osservazione. – Il numero degl'integrali finiti $(k - i)$-pli ($i = 0, 1, \cdots, k - 1$) ad essa appartenenti, è dato da (57)

$$\binom{p}{k-i},$$

cosicchè in particolare il genere geometrico è espresso da

$$P_g = \binom{p}{k}.$$

Il genere aritmetico P_a si calcola col procedimento da $k - 1$ a k, come al n. 29, e si trova così

$$P_a = \binom{p}{k} - \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} p.$$

Dunque *per la V_k considerata il genere aritmetico è dato dalla formola*

$$P_a = i_k - i_{k-1} + i_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} i_1,$$

ove i_k , i_{k-1} , $\cdots$, i_1 denotano rispettivamente i numeri degl'integrali finiti k-pli, $(k-1)$-pli , $\cdots$, semplici, che appartengono alla varietà.

Qualora si ammetta che, per una qualunque varietà, *l'espressione*

$$i_k - i_{k-1} + i_{k-2} - \cdots \pm i_1.$$

sia un carattere numerativo (n. 6), col metodo della determinazione delle costanti, usato già al n. 30, *si deduce che per ogni varietà V_k vale la relazione*

$$P_a = i_k - i_{k-1} + i_{k-2} - \cdots \pm i_1 .$$

Ma la *dimostrazione* di questo risultato si otterrà indubbiamente attraverso a difficoltà gravissime, introducendo molti nuovi elementi e sviluppandone altri, che oggi esistono appena in germe nella teoria delle funzioni algebriche di più variabili.

(57) Cfr. la mia Nota citata (53).

XLIV.

UNO SGUARDO D'INSIEME ALLA GEOMETRIA SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 68_2 (1909), pp. 829–838.

Mi propongo di dar conto in questa Nota di un nuovo modo d'introdurre nella teoria delle superficie algebriche la nozione di genere aritmetico e di dedurne il cosidetto teorema di Riemann–Roch. La via cui alludo rappresenta una semplificazione notevole anche rispetto all'altra ch'io avevo seguito anteriormente per giungere al teorema di Riemann–Roch [1]; la quale, alla sua volta, era già assai più sbrigativa di quella originaria di Castelnuovo [2].

Mi pare che il metodo d'esposizione di cui intendo far cenno e che ho seguito nelle mie lezioni all'Università di Padova, possa approssimarsi in modo soddisfacente ad un assetto definitivo della teoria.

Ecco anzitutto, sommariamente, l'ordine secondo cui ho svolto la geometria sopra una superficie:

I. Sistemi lineari di curve sopra una superficie (punti base, curve fondamentali, condizioni lineari varie, sistemi semplici e composti). – Sistemi completi: determinazione univoca mediante una curva (seguendo la via di Enriques) [3]. Le superficie iperspaziali come trasformate razionali delle superficie dello spazio ordinario. – Linearità dei sistemi algebrici (∞^2 almeno) di indice 1 (dedotta dal teorema di Humbert–Castelnuovo). – Fasci razionali e irrazionali.

II. Influenza dei punti multipli variabili di una curva C, variabile con continuità, sui gruppi caratteristici della C. – Conseguenze relative ai sistemi lineari [4].

(1) F. SEVERI, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rend. R. Acc. dei Lincei (5) *12* (1903), pp. 250–257 [Nota XVI, vol. I, p. 224; N.d.R.]; F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 602–612 [Nota XXVI, vol. I, p. 317; N.d.R.].

(2) G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) *25* (1897), pp. 235–318.

(3) F. ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, *37* (1901), pp. 19–40.

(4) Facili estensioni delle cose analoghe pel piano. Vedi le mie lezioni: F. SEVERI, *Lezioni di geometria algebrica*, Draghi, Padova (1908), pp. 1–346; pp. 28, 32.

III. Postulazione d'una curva iperspaziale: aggiunte ad una tal curva nel senso di Castelnuovo. – Caso d'una curva sghemba con punti tripli, triplanari. – Subaggiunte ad una superficie iperspaziale F (definite dalla condizione di dare sopra un iperpiano generico forme aggiunte alla curva sezione di F). – Le subaggiunte d'ordine assai alto segnano sopra un iperpiano sistemi lineari completi. – Da ciò deducesi che, mediante tali subaggiunte, la F si muta birazionalmente in una superficie F' priva di linee multiple. – I punti multipli isolati di F' si posson poi mutare in linee (multiple o semplici) trasformando F' in F'' mediante le forme d'ordine assai alto, che passano per essi. – Alla F'' s'applichi di nuovo la trasformazione mediante le subaggiunte, e così proseguendo finché non si sieno sciolte tutte le singolarità (5).

IV. Punti base assegnati e accidentali d'un sistema lineare. – Molteplicità effettive e virtuali. – Si estende il teorema sull'unicità del sistema lineare completo. – Curve eccezionali di 1ª e di 2ª specie. – Singolarità infinitamente vicine d'una curva tracciata su F.

V. Somma e differenza di sistemi lineari. – Significato delle convenzioni relative ai punti base, quando questi mutansi in curve eccezionali. – Molteplicità di intersezione di 2 curve tracciate sopra una superficie. – Grado e genere effettivi e virtuali d'un sistema lineare. – Formole relative al sistema somma di due altri (6).

VI. Criterio d'equivalenza per due curve seganti gruppi equivalenti sulle curve d'un fascio (7). – Definizione delle curve aggiunte e teorema fondamentale dell'aggiunzione (secondo la via da me altrove tracciata (8)). – Sistema canonico. – Sistemi speciali o no. – Genere geometrico e plurigeneri. – Relazione $n' - \pi' = \pi - 2$ tra il genere virtuale π d'una curva C e i caratteri n', π' del sistema aggiunto. – Invarianti

$$\omega\ ,\ \omega_0\ ,\ p^{(1)}\ ,\ p^{(2)}\ (\omega_0 = \omega - 1)\ .$$

(5) Non ho dimostrato che l'operazione ha termine. È probabile che con un po' d'attenzione si riesca a provarlo estendendo la via seguita per le curve a pag. 63–64 delle mie citate *Lezioni*.

(6) Ecco come ho dimostrato la formola che dà il genere π della somma $|C| = |A+B|$, in funzione dei generi π_1, π_2, di A, B e del numero $i = [AB]$. Per brevità mi riferisco al caso in cui C, A, B sieno irriducibili e prive di punti multipli. Quando C sulla superficie F tende ad una curva spezzata $A + B$, la sviluppabile delle tangenti a C, ha per limite l'insieme delle sviluppabili osculatrici ad A, B e dei fasci delle tangenti alla superficie F nei punti (AB): ciascuno di questi va contato 2 volte (lo si vede p. e. proiettando in un piano le sviluppabili). Indicando con w, w_1, w_2 gli ordini delle sviluppabili relativi a C, A, B e con m, m_1, m_2 gli ordini di queste curve, si hanno le relazioni:

$$w = 2m + 2\pi - 2\ ,\qquad w_1 = 2m_1 + 2\pi_1 - 2\ ,\qquad w_2 = 2m_2 + 2\pi_2 - 2\ ,$$

$$w = w_1 + w_2 + 2i\ ,\qquad m = m_1 + m_2\ ,$$

donde segue $\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$.

(7) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) *12* (1905), pp. 55–79; n. 9 [Memoria XXV, vol. I, p. 311; N.d.R.].

(8) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 65_2 (1906), pp. 625–643; p. 629 [Memoria XXXI, vol. I, p. 393; N.d.R.].

VII. Serie caratteristica d'un sistema continuo. – Caso d'un fascio irrazionale [9]. – Teorema di Enriques, concernente la completezza della serie caratteristica d'un sistema continuo completo [10]. – Criterio d'equivalenza relativo alle curve d'un sistema continuo seganti gruppi equivalenti sopra una C irriducibile variabile in un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale [11]. – Completezza della serie segata da $|E| = |D - C|$ sulla curva D, che contiene parzialmente una C variabile come sopra [12]. – Osservo che questo teorema dà una *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del sistema* $|D - C|$. Occorre e basta che il gruppo (CD) sia contenuto parzialmente nella serie caratteristica di $|D|$.

Prendendo le mosse da questo punto, passo ad esporre gli sviluppi sul genere aritmetico e sul teorema R. R. secondo il nuovo piano.

1. Dimostro in primo luogo che *l'infinità x dei sistemi lineari distinti contenuti in un sistema continuo completo, al variare di questo sulla superficie F, non può crescere oltre ogni limite.*

Dicasi difatti C una curva di genere π, tracciata su F, la quale sia priva di singolarità e atta a definire un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale; e s'indichi con $\{D\}$ un sistema continuo completo, contenente ∞^x sistemi lineari (completi). Proverò che $x \leq \pi$.

Invero su C i vari sistemi $|D|$ segnano tante serie lineari: una generica di queste, completata se occorre, indichiamola con $|CD|$. Quanti sono i sistemi $|D|$ che determinano su C la *medesima* $|CD|$? La totalità di questi sistemi è una varietà algebrica, che consta d'un numero finito di varietà irriducibili, ciascuna delle quali, per un noto criterio d'equivalenza, è formata da curve equivalenti, e quindi, nelle nostre condizioni, costituisce addirittura un sistema $|D|$. Non vi può essere perciò che un numero finito $s \geq 1$ di sistemi $|D|$ seganti serie equivalenti. Donde si trae che tanti sono i sistemi $|D|$ quante le serie distinte $|CD|$. Ma sopra una curva di genere π non posson aversi più che ∞^π serie lineari complete di dato ordine; dunque $x \leq \pi$.

2. In virtù del teorema ora dimostrato *l'infinità x, di cui sopra si parla, ammette un massimo q, che diremo l'irregolarità della superficie F.*

Si tratta, evidentemente, d'un carattere invariante di fronte a tutte le trasformazioni birazionali di F.

(9) F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *39* (1904), pp. 371–393 [Memoria XVIII, vol. I, p. 234; N.d.R.].

(10) Ho esposto la dimostrazione data da me in: F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rend. Circolo Matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96 [Nota XXIII, vol. I, p. 291, N.d.R.].

(11) F SEVERI, *Osservazioni varie ecc.* loc. cit. in (8); n. 2.

(12) F. SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Rend. R. Acc. dei Lincei, (5) *17* (1908), pp. 465–468. [Nota XXXIX, vol. I, p. 456; N.d.R.].

Le superficie aventi $q = 0$ diconsi *regolari* e su esse ogni sistema continuo completo è lineare (superficie razionali, superficie prive di punti multipli nello S_3, ecc.).

3. Si avverta ora:

a) Che la deficienza delle serie caratteristica di un generico $|D|$ è evidentemente uguale ad x.

b) Che la dimensione d'un particolar $|D|$ non è inferiore a quella del generico $|D|$, e quindi che la deficienza relativa al sistema particolare è $\leq x$.

Se ne ricava il *teorema di Castelnuovo*:

La deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare (irriducibile e senza punti base) non supera l'irregolarità della superficie e vi sono sistemi per cui il massimo è raggiunto.

4. La differenza $p_g - q$ è un invariante assoluto di F: lo chiameremo *genere aritmetico* e lo indicheremo con p_a. Per definizione, essendo $q \geq 0$, $p_g \geq p_a$.

5. Calcoliamo ora la dimensione d'un sistema lineare completo $|C|$, irriducibile e privo (effettivamente) di punti base.

Per la deficienza δ della serie caratteristica di $|C|$ si ha la relazione

$$\delta = q - \varepsilon \qquad (\varepsilon \geq 0).$$

Quanto all'indice di specialità j della stessa serie, è facile vedere che

$$j = p_g - i + \eta \qquad (\eta \geq 0).$$

ove i denota l'indice di specialità di $|C|$.

Infatti il sistema canonico di F segna su C una serie di dimensione $p_g - 1 - i$, che è residua della serie caratteristica rispetto alla serie canonica di C; detta η la deficienza di quella serie, si ha appunto la relazione sopra scritta.

Indicando con n, π il grado e il genere di $|C|$ verrà dunque

$$r = n - \pi + p_g - i + \eta - q + \varepsilon + 1,$$

ossia

$$r = n - \pi + p_a + 1 - i + \varepsilon + \eta \qquad (\varepsilon, \eta \geq 0).$$

Donde infine

$$r \geq n - \pi + p_a + 1 - i, \tag{1}$$

che *esprime il teorema di Riemann–Roch sulle superficie*. Pei sistemi riducibili e con punti base veggansi i nn. 10, 11.

6. La somma $\sigma = \varepsilon + \eta$ dicesi *sovrabbondanza* del sistema. Un sistema per cui $\sigma = i = 0$ (e quindi $\varepsilon = \eta = 0$) dicesi *regolare*.

Il secondo membro della disuguaglianza (1) si considererà come la *dimensione virtuale* del sistema, in quanto le cause che producono la sovrabbondanza si riguardino come pure accidentalità.

Proviamo che *sopra ogni superficie esistono sistemi regolari*.

Suppongo F immersa nello S_r e priva di singolarità. Indico con $\{L\}$ un sistema continuo completo formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Si può determinare un multiplo così elevato $|D|$ delle sezioni iperpiane di F (sia secondo il numero k), che contenga parzialmente ogni $|L|$. Esisterà allora il sistema

$$|D + L_0 - L|, \tag{2}$$

ove $|L_0|$ sia un sistema fissato in $\{L\}$ ed $|L|$ un sistema ivi variabile. Il luogo degli ∞^q sistemi distinti (2), è un sistema continuo $\{D\}$, che contiene $|D|$.

Si può inoltre supporre che il generico sistema $|D|$, tratto da $\{D\}$, sia aggiunto ad un sistema infinito irriducibile $|C|$. Fissiamo infatti un sistema $|H|$ qualunque, che possegga l'aggiunto $|H'|$ e osserviamo che, come rilevasi subito dal teorema R. R., la dimensione di $|D|$ si conserva non inferiore ad una funzione (positiva) di 2° grado di k, mentre il numero $[DH']$ dei punti comuni a D ed H', è una funzione di 1° grado di k. Scegliendo k sì grande che la prima funzione risulti maggiore della seconda, saremo certi che ogni $|D|$ contiene H', e quindi che esiste

$$|C| = |D + H - H'|.$$

Abbiamo così costruito un sistema $|D|$ per cui $\delta = q$ (e quindi $\varepsilon = 0$) e che può considerarsi come aggiunto al sistema $|C|$, infinito e irriducibile. Segue allora da una proposizione sopra ricordata [13], che il sistema canonico di F segna su D una serie completa e quindi che in corrispondenza a $|D|$ è pure $\eta = 0$.

La deduzione presentasi un po' meno ovvia quando $p_g = 0$. Ma anche in tale ipotesi si perviene allo stesso risultato, che si enuncia in questo caso dicendo che la serie caratteristica di $|D|$ è non speciale. Invero, se $p_g = 0$, non esiste $|D - C| = |C' - C|$ e quindi non può esistere la serie $|(DD) - (DC)|$ [14]. Ciò equivale a dire che non esiste la serie

$$|(DD') - (DD)| = |(D\,,\, 2D - C) - (DD)| = |(DD) - (DC)|,$$

ove $|D'| = |2D - C|$ è l'aggiunto a $|D|$.

(13) F. SEVERI, *Sulla regolarità ecc.*, cfr. (12).

(14) Vedi l'osservazione con cui si chiude la prefazione di questa Nota.

Poiché $|D|$ è non speciale, si conclude che: *Un sistema lineare generico tratto dal sistema continuo cui appartengono le sezioni di F colle forme d'ordine assai alto, è regolare.*

7. A questo punto si osservi che, se un sistema lineare $|D|$, di caratteri n', π', è l'aggiunto dal sistema $|C|$ di genere π, la relazione

$$r \geq n' - \pi' + p_a + 1,$$

in virtù della

$$n' - \pi' = \pi - 2,$$

può scriversi sotto la forma

$$r \geq \pi - 1 + p_a,$$

e da ciò, con un calcolo ovvio, si deduce il *teorema* di *Enriques*:

La deficienza della serie (canonica) staccata sopra una curva C dal proprio sistema aggiunto, non supera l'irregolarità della superficie e vi sono curve per cui il limite superiore è raggiunto.

Quest'ultima affermazione deriva dalla circostanza che, come s'è visto al n. 6, $|D|$ può supporsi regolare.

8. Si ripetano ora i ragionamenti dei nn. 1, 3 della mia Nota lincea già citata – cfr. (12) – e si concluderà col *teorema di Picard* (sotto forma più estesa):

Il sistema aggiunto $|C'|$ ad una C, la quale sia atta a definire un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale, è regolare; cioè la serie segata da $|C'|$ su C ha proprio la deficienza $p_g - p_a$.

E infine, come al n. 4 della mia Nota suddetta, si avrà un significato per la sovrabbondanza d'un sistema lineare privo di punti base.

9. Voglio ancora esporre un'altra conseguenza del teorema contenuto nella mia Nota lincea – cfr. (12) – più volte citata.

La condizione necessaria e sufficiente affinché esista la differenza $|A - B|$ di due curve A, B – la seconda delle quali definisca un sistema continuo diverso da un fascio irrazionale – è che il sistema $|B'|$ aggiunto a B, seghi su A una serie speciale: se questa ha l'indice di specialità s, sarà $s - 1$ la dimensione di $|A - B|$.

Sussiste infatti la relazione

$$(AB') \equiv (AB) + (AA') - (AA),$$

donde

$$(AA) - (AB) \equiv (AA') - (AB'),$$

la quale prova che la dimensione $s - 1$ della serie $|(AA') - (AB')|$ uguaglia quella di $|(AA) - (AB)|$, cioè di $|A - B|$.

Si può di qua ricavare *quella medesima condizione aritmetica, sufficiente per l'esistenza di* $|A - B|$, *cui pervenni altra volta, mediante la nozione di curve virtuali* (15).

Detti a, b i gradi virtuali, α, β i generi virtuali di A, B, e indicato con j il numero dei punti del gruppo (AB) e con $i - 1$ la dimensione del sistema $|B' - A|$ ($i = 0$ quando questo sistema non esiste), per la dimensione della serie segata da $|B'|$ su A si hanno le due espressioni

$$\beta - 1 + p_a - (i - 1) - 1 , \qquad (j + 2\alpha - 2 - a) - \alpha + s - \delta ,$$

s, δ essendo rispettivamente l'indice di specialità e la deficienza della serie considerata. Uguagliando la due espressioni e tenendo conto che $\delta \geq 0$, si ottiene

$$r = s - 1 \geq \beta + p_a - i - j - \alpha + a , \tag{2}$$

ove r indica la dimensione di $|A - B|$. Se ne trae la condizione

$$a - j \geq \alpha - \beta + i - p_a .$$

sufficiente perché sia $r \geq 0$, cioè perché esista $|A - B|$.

La (2) può anche scriversi sotto la forma

$$r \geq n - \pi + p_a + 1 - i , \tag{3}$$

n, π, i essendo i caratteri (grado e genere virtuali, indice di specialità) della curva virtuale $A - B$.

10. Le considerazioni del numero precedente permettono di *estendere il teorema R. R. ai sistemi comunque riducibili (virtualmente privi di punti base)*.

È chiaro infatti che, se $|C|$ è un sistema qualunque (virtualmente privo di punti base), si posson determinare due sistemi lineari irriducibili infiniti $|A|$, $|B|$, effettivamente privi di punti base, tali che

$$|C| = |A - B| .$$

Basta per esempio prendere come sistema $|A|$ quello che vien segato sulla superficie F dalle forme d'ordine assai alto l, e come sistema $|B|$ quello segato dalle forme d'ordine l che passano per una C.

Detti n, π, i i soliti caratteri di C, per la dimensione r di $|C|$, in virtù del n. 9, varrà la disuguaglianza (3), che estende il teorema R. R. al sistema $|C|$.

(15) F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rend. R. Ist. Lombardo Scienze e Lettere, (2) *38* (1905), pp. 859–865 [Nota XXVII, vol. I, p. 325; N.d.R.].

11. È anche facile *estendere il risultato ai sistemi con punti base assegnati (eventualmente ipermultipli)*.

Se, invero, $|C|$ ha punti base assegnati con molteplicità virtuale t ($\leq s$, ove s è la molteplicità effettiva) e se n , π denotano il grado e il genere virtuali di C, saranno

$$n + \sum t^2, \quad \pi + \sum \frac{t(t-1)}{2}$$

il grado e il genere virtuali di $|C|$, considerato come virtualmente privo di punti base.

Dicasi $\bar{r}$ la dimensione di $|C|$ in quest'ultima ipotesi, r la dimensione di $|C|$ con quelle tali molteplicità assegnate. Si ha evidentemente

$$r \geq \bar{r} - \sum \frac{t(t-1)}{2}.$$

D'altronde, in virtù di quanto precede

$$\bar{r} \geq n + \sum t^2 - \pi - \sum \frac{t(t-1)}{2} + p_a + 1 - i,$$

dunque

$$r \geq n - \pi + p_a + 1 - i.$$

XLV.

DI ALCUNI RECENTI RISULTATI NELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE E SOPRA QUALCHE PROBLEMA AD ESSI COLLEGATO (1)

Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, *2* (1909), pp. 234–241.

Uno tra i risultati più importanti ottenuti in questi ultimi tempi nella teoria delle superficie algebriche, si riferisce agl'integrali di differenziali totali.

Il Picard aveva introdotto fino dal 1884 la nozione d'integrale di differenziale totale appartenente ad una superficie algebrica

$$f(x, y, z) = 0,$$

considerando gl'integrali del tipo

$$\int A dx + B dy,$$

ove A, B sono funzioni razionali del punto (x, y, z) variabile su f, le quali soddisfanno, sulla superficie, alla condizione d'integrabilità.

Si domandava di riconnettere l'esistenza degl'integrali semplici di 1ª specie – dovunque finiti su f – e degl'integrali semplici di 2ª specie – aventi sole singolarità polari – a qualche proprietà geometrica della superficie; di stabilire insomma un legame del tipo di quello classico tra gl'integrali abeliani di 1ª e di 2ª specie ed il genere della curva cui essi appartengono.

La ricerca per una superficie presentavasi però profondamente diversa dall'analoga sopra una curva! Basti accennare al fatto che, mentre una curva piana priva di punti multipli, ha il massimo numero d'integrali abeliani di 1ª e di 2ª specie, compatibili col suo ordine, una superficie dello spazio, priva di singolarità, non possiede alcun integrale semplice (trascendente) di 1ª o di 2ª specie.

Tuttavia, se si vuole, il risultato ottenuto sulle superficie può presentarsi come analogo a quello noto per le curve: sopra una curva algebrica di genere p, la totalità degli ∞^n $(n \geq p)$ gruppi di n punti, si distribuisce in ∞^p totalità, non aventi gruppi comuni, le quali sono altrettante serie lineari, nel senso di Brill e Noether. Orbene, sopra una superficie algebrica f, che possegga p integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti, il sistema continuo

(1) Sugli argomenti qua toccati l'A. riferì verbalmente alla sezione II del Congresso, nella seduta del 9 aprile.

più ampio cui appartiene una curva i cui caratteri sieno legati da una certa disuguaglianza, che qui è inutile trascrivere, è costituito da ∞^p sistemi lineari completi, tra loro distinti (2).

Quanto agl'integrali semplici di 2ª specie, si prova che f ne possiede $2p$ indipendenti; e poiché Picard aveva da tempo dimostrato che « gl'integrali di 2ª specie son tanti quanti i loro periodi », così ne segue che anche il numero di tali periodi distinti è uguale a $2p$.

Quest'ultimo risultato si può enunciare dicendo che $2p$ è il numero dei cammini chiusi distinti, esistenti sulla riemanniana imagine reale di f.

L'intero p, che rimane evidentemente immutato nelle trasformazioni birazionali della superficie, è d'altro lato uguale alla *irregolarità* di questa, cioè alla differenza $p_g - p_a$ tra il genere geometrico ed il genere aritmetico.

Ricordo che il « genere geometrico » si può definire come il numero degli integrali doppi indipendenti, dovunque finiti sulla superficie data f (Clebsch, Noether), oppure, geometricamente, se la f è d'ordine m, come il numero delle superficie indipendenti d'ordine $m - 4$ ad essa aggiunte (3).

Quanto al « genere aritmetico », considerato inizialmente da Cayley, Zeuthen e Noether, ricordo ch'esso è dato dal numero virtuale delle suddette superficie d'ordine $m - 4$; numero *virtuale*, in quanto si calcola come se valesse, anche per $l = m - 4$, la formola che esprime il numero delle condizioni cui deve soddisfare una superficie d'ordine l, per essere aggiunta ad f; mentre invece la formola stessa vale soltanto per l abbastanza grande.

Il teorema sul numero degl'integrali semplici di 1ª e di 2ª specie ed il legame colle proprietà geometriche della superficie, sono il risultato complessivo di ricerche dovute (in ordine cronologico) a me, ad Enriques e a Castelnuovo.

Gli strumenti trascendenti di tali ricerche son forniti dai risultati di Picard, nonché dalla nozione, da me introdotta, delle funzioni razionali residue di un integrale di 2ª specie; lo strumento geometrico più importante è dato dal teorema fondamentale di Enriques, secondo cui « la serie lineare caratteristica di un sistema continuo completo (serie segata sopra una curva generica del sistema dalle curve che le sono infinitamente vicine), è completa ».

* * *

Una questione importante s'affaccia a proposito della serie caratteristica d'un sistema continuo di curve algebriche, sopra la superficie f. Il sistema lineare completo individuato da una curva irriducibile C, tracciata sulla

(2) Ometto, ora e nel seguito, particolareggiate citazioni, e rinvio alla Monografia di G. CASTELNUOVO–F. ENRIQUES, che trovasi alla fine del II volume del trattato di E. PICARD–G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, II, Gauthier Villars, Paris (1906), pp. 485–522. Per la parte più antica della teoria veggasi la Monografia degli stessi autori: G. CASTELNUOVO–F. ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, Math. Annalen, *48* (1896), pp. 241–316.

(3) Quando f possegga una linea doppia ordinaria — ipotesi che, com'è noto, non è restrittiva nella geometria delle trasformazioni birazionali — le aggiunte son definite dalla condizione di passare per la linea doppia.

superficie, essendo generalmente contenuto in un sistema continuo più ampio, ha la serie caratteristica deficiente: si sa solo che la deficienza di questa serie non supera $p = p_g - p_a$, e che esistono sistemi lineari per cui il limite è raggiunto.

La determinazione precisa di questa deficienza, occorre nel computo del numero di costanti arbitrarie dalle quali dipende una funzione razionale, di cui si assegni la curva polare (di 1° ordine) C. Sotto forma geometrica ciò equivale a determinare la dimensione r del sistema lineare completo $|C|$, ossia la dimensione $r - 1$ della relativa serie caratteristica.

A tal uopo bisogna conoscere la deficienza δ e l'indice di specialità j di questa serie, cioè il numero dei gruppi canonici indipendenti della curva C, che passano per un gruppo caratteristico. Conoscendosi δ ed j, l'ordinario teorema di Riemann–Roch, applicato alla C, porge:

$$r = n - \pi + j - \delta + 1 ,$$

ove n , π sono il *grado* e il *genere* di C.

Mediante la disuguaglianza

$$\delta \leq p_g - p_a ,$$

Castelnuovo ha ricavato fin dal '97 il limite inferiore

$$r \geq n - \pi + p_a - i + 1,$$

pel numero delle costanti arbitrarie che compajono nella più generale funzione razionale avente la C per curva polare (di 1° ordine). In questa disuguaglianza, che si suol citare come *il teorema di Riemann–Roch sulle superficie*, i denota l'indice di specialità della C, cioè il numero delle superficie aggiunte d'ordine $m - 4$, che passano per C.

L'espressione del 2° membro si chiama la « dimensione virtuale » del sistema $|C|$, il quale si considera come *regolare*, quando è non speciale ($i = 0$) e inoltre la sua dimensione effettiva uguaglia la virtuale.

In un sistema lineare privo di punti base – è questo per molte ragioni il caso più interessante – le cause perturbatrici rispetto alla regolarità del sistema son due:

1°) Il fatto che la deficienza δ della serie caratteristica, si discosti dal suo valore normale massimo $p_g - p_a$.

2°) Il fatto che la serie lineare segata sopra la curva C, dalle superficie di ordine $m - 4$ aggiunte ad f, non risulti completa.

La prima causa perturbatrice cessa per le superficie regolari ($p_g = p_a$); in ogni caso si deve giungere a determinarla in modo preciso mediante gl'integrali semplici di 1ª specie, così da avere un significato netto per l'aumento ch'essa porta alla dimensione virtuale.

Preciso un po' di più la posizione del problema.

Mi limito perciò al caso in cui lungo C non è costante nessun integrale semplice di 1ª specie (il caso contrario non ha interesse). Allora i p integrali

di 1ª specie della f, considerati come funzioni del punto scorrente su C, dànno ivi altrettanti integrali abeliani (riducibili) di 1ª specie, e quindi individuano su C una serie lineare ∞^{p-1}, tutta formata da gruppi canonici. Questa serie, su cui avrò da ritornare in seguito, non è completa – almeno se, come accadrà in generale, il genere π di C è $>$ di p: la chiamerò, per ragioni evidenti, la *serie canonica ridotta* della curva C.

La considerazione di tale serie sembra fondamentale per la ricerca delle cause che tendono ad allontanare δ dal suo valore massimo. Di ciò dànno indizio, oltre a qualche esempio, le equazioni, che ho altrove scritto, esprimenti le condizioni affinché un integrale di 2ª specie riducasi ad una funzione razionale. Si tratta qui di un'interpretazione analoga a quella data dal Roch, per le condizioni riemanniane affinché un integrale abeliano di 2ª specie riducasi ad una funzione razionale; ma la cosa, per le superficie, è assai più complessa.

Tuttavia, dal punto di vista geometrico, qualcosa si può affermare di più preciso sulla prima causa d'irregolarità.

Possiamo infatti dimostrare che *sopra una superficie f d'irregolarità p, la deficienza δ della serie caratteristica d'un sistema irriducibile $|C|$, i cui caratteri soddisfacciano alla disuguaglianza*

$$(1) \qquad n - \pi + p_a - i + 1 \geq 0 ,$$

è data precisamente da

$$\delta = p .$$

Noi supponiamo che C sia la curva generica d'un sistema lineare irriducibile, i cui punti base vengano assegnati colla loro molteplicità effettiva. Potremo anzi ammettere addirittura, dopo aver eventualmente operato una opportuna trasformazione birazionale della f, che il sistema $|C|$ sia privo di punti base: allora C non avrà punti multipli.

Consideriamo il sistema continuo completo $\{C\}$ contenente $|C|$. In un Nota del Circolo matematico di Palermo [4], esponendo una dimostrazione del teorema di Enriques – secondo cui è completa la serie caratteristica di $\{C\}$ – ho assegnato un modo, che qui giova richiamare, per costruire le curve infinitamente vicine alla C data.

Si consideri su f un sistema lineare $|E|$, irriducibile e privo di punti base, che contenga parzialmente $\{C\}$ e che seghi su C una serie lineare completa; si costruisca in corrispondenza ad ogni sistema lineare contenuto in $\{C\}$, il sistema residuo $|D| = |E - C|$, e s'indichi infine con $\{D\}$ l'insieme dei sistemi $|D|$ e con d il numero dei punti comuni a C e ad una D.

Allora le curve E dotate di d punti doppi e infinitamente vicine ad una curva spezzata $C + D$ ($\equiv E$), risultano spezzate in una parte infinitamente vicina a C ed in una infinitamente vicina a D: orbene, quelle tra le parti suddette,

(4) F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rend. del Circolo matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 93–96 [Nota XXIII, vol. I, p. 291; N.d.R.].

che sono infinitamente vicine a C, segano ivi la serie caratteristica completa. Ma la cosa analoga non può affermarsi per le parti infinitamente vicine a D, perché non si sa a priori se il sistema $\{D\}$ sopra definito sia completo.

Però, se si tien conto dell'ipotesi (1), si conclude subito che $\{D\}$ è completo, giacché $\{C\}$, e quindi $\{D\}$, risultano costituiti da ∞^p sistemi lineari distinti [5].

Se si osserva inoltre che le E dotate di d punti doppi e infinitamente vicine a $C+D$, passano pei punti del gruppo (C, D) – che son doppi per $C+D$ – si potrà affermare che le curve E passanti per questo gruppo, segano una serie completa, fuori dei punti fissi, non soltanto sulla C, ma anche sulla D.

Indicando con R, r, r_1 le dimensioni rispettive dei sistemi completi $|E|, |C|, |D|$, con ε il numero delle condizioni imposte alle E dai punti del gruppo (C, D), e infine con δ, δ_1 le deficienze rispettive delle serie caratteristiche di $|C|, |D|$, in virtù d'un noto procedimento di Castelnuovo [6], verrà:

$$\delta = \delta_1 = R - r - r_1 - \varepsilon ,$$

e poiché se $|E|$, come può supporsi, è regolare, e la serie completa $|EC|$ è non speciale, $|D|$ è pure regolare, risulterà

$$\delta = \delta_1 = p .$$

Ciò che apparisce come essenziale nel ragionamento precedente non è già l'ipotesi (1), ma sibbene l'ipotesi che il sistema completo $\{C\}$ sia costituito da ∞^p, e non da un minor numero di sistemi lineari distinti.

Che cosa potrà dirsi del valore di δ, se $\{C\}$ è costituito da ∞^i $(i < p)$ sistemi lineari?

Si consideri ancora il sistema regolare $|E|$ contenente parzialmente $\{C\}$ e segante sopra C una serie completa non speciale, in tal guisa che $|D| = |E - C|$ risulterà pure regolare. Il sistema $\{D\}$ formato dai resti dei sistemi $|C|$ rispetto ad $|E|$, questa volta non è completo; ma tuttavia si può calcolarne agevolmente l'infinità ϱ. Invero la dimensione di un sistema lineare *generico* scelto in $\{D\}$, non può da un lato esser superiore a quella r_1 del *particolar* sistema $|D|$, né d'altra parte, pel teorema di Riemann–Roch, può esserne inferiore; onde dovrà essere

$$\varrho = r_1 + i .$$

La dimensione della serie caratteristica del sistema $\{D\}$, che è poi la dimensione della serie lineare staccata su D, fuori dai punti fissi, dalle E

(5) Ved. il n. 7 della mia Nota: F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *40* (1905), pp. 602–612 [Nota XXVI, vol. I, p. 324; N.d.R.].

(6) G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, Annali di Matematica, (2) *25* (1897), pp. 235–318.

passanti pel gruppo (CD), risulterà pertanto uguale ad $r_1 - 1 + i$. Avremo perciò col solito procedimento di Castelnuovo:

$$\delta = i = R - r - r_1 - \varepsilon .$$

Questo risultato ci dice in definitiva che *entro un sistema continuo completo non si trovano mai, come a priori potrebbe supporsi, sistemi lineari particolari di dimensione superiore a quella del sistema lineare generico.*

La proprietà è assai strana e fa mancare un altro dei pochi legami di analogia esistenti tra le curve e le superficie!

* * *

Come si può costruire geometricamente la serie canonica ridotta? Questa domanda cui importa rispondere per ben definire la prima tra le cause sopra accennate d'irregolarità d'un sistema lineare, si riattacca ad un'altra questione sugl'integrali di 1ª specie. In un differenziale totale appartenente ad f, in qual modo bisogna scegliere le funzioni razionali A , B, coefficienti di dx e di dy, affinché il differenziale risulti di 1ª specie?

Per gl'integrali abeliani d'una curva algebrica d'ordine m, la cosa analoga è ben nota. Un differenziale abeliano di 1ª specie si costruisce con operazioni razionali a partire dall'equazione della curva, giacché la funzione integranda è determinata da un polinomio aggiunto d'ordine $m - 3$.

Per una superficie, la questione, dal lato strettamente analitico, può considerarsi risoluta. Il Picard l'ha infatti ricondotta alla determinazione di quattro polinomi, d'ordine dato, soddisfacenti a due equazioni differenziali, che traducono le condizioni d'integrabilità.

Ma non si riesce a scoprire facilmente il contenuto geometrico di tale costruzione: a caratterizzare cioè le operazioni analitiche, come condizioni di passaggio di certe superficie per linee e punti, legati alle singolarità della superficie f!

Io avevo intraveduto una risposta alla questione e ne avevo fatto anche cenno nella comunicazione verbale al Congresso, ma esaminando le cose più dettagliatamente, ho dovuto concludere che la ricerca non era ancor matura.

Tuttavia, a proposito di ciò e della serie canonica ridotta, stimo utile di esporre alcune osservazioni, che potrebbero guidare altri al risultato definitivo.

Fissiamo l'attenzione sopra un integrale abeliano

$$(2) \qquad \int A\,(x\,,\,y\,,\,z)\,dx \qquad (A \text{ razionale in } x\,,\,y\,,\,z),$$

appartenente alle sezione della nostra f con un piano $y =$ cost; e supponiamo che l'integrale stesso sia di 2ª (o di 1ª) specie per valori generici di y. Ciò non esclude che in corrispondenza di ciascuno dei piani $y =$ cost, tangenti alla

superficie, l'integrale sia di 3ª specie, chè anzi, in generale, esso viene a presentare una singolarità logaritmica nel relativo punto di contatto.

Si vede che *fra i periodi dell'integrale* (2) *ve ne sono r distinti che si riducono a funzioni razionali di* y, $r + 1$ designando l'ordine di connessione lineare di f [7].

Dal punto di vista dell'*Analysis situs*, osserverò che questa notevole proposizione del Picard si può ottenere nel modo seguente:

Dato che i numeri di Betti esprimenti gli ordini di connessione lineare e a tre dimensioni della superficie f, sono uguali tra loro [8], si potranno fissare sulla superficie r cicli *distinti* a tre dimensioni, seganti sopra una sezione piana generica del fascio $y = \text{cost}$, r cicli lineari *distinti*. La circostanza che un ciclo a tre dimensioni possa tagliare una sezione piana secondo due o più cicli lineari separati, non deve imbarazzare, perché in questo caso si considererà il ciclo unico che risulta dalla loro somma.

Ciascuno dei cicli così costruiti ritorna in sé stesso per ogni circolazione di y, e quindi i periodi corrispondenti dell'integrale (2) risultano funzioni uniformi di y. Queste funzioni non possono ammettere a priori che singolarità logaritmiche o polari, e d'altro lato, trattandosi di funzioni uniformi, si deve escludere l'esistenza di singolarità del primo tipo. Dovrà dunque trattarsi di funzioni razionali.

Si osserverà che *queste funzioni riduconsi a polinomii* allorquando la curva polare della funzione A non contiene altre sezioni $y = \text{cost.}$ all'infuori della curva all'infinito di f; mentre *esse riduconsi a costanti* quando tra le sezioni $y = \text{cost.}$ non c'è alcuna curva polare di A.

Il ragionamento esposto, oltre alla sua semplicità, ha il vantaggio di potersi riferire anche al caso d'un integrale abeliano di 2ª specie fissato razionalmente sopra una curva irriducibile C, variabile in un fascio lineare. Si può quindi enunciare il teorema di Picard sotto la forma invariantiva seguente:

Essendo dato sopra una superficie f *un fascio lineare irriducibile* $|C|$, *le cui curve si determinino coi valori del parametro* λ, *fra i periodi d'un integrale abeliano di* 2ª (*o di* 1ª) *specie fissato razionalmente sulla curva* C *variabile nel fascio, ve ne sono* r *distinti, che si riducono a funzioni razionali di* λ.

Sotto le ipotesi precedenti, sopra ogni C risulta staccata razionalmente, rispetto a λ, la funzione razionale integranda φ, la quale, al variare di λ, genera una funzione razionale Φ appartenente ad f. Ebbene, *la condizione affinché gli* r *periodi di cui sopra si parla si riducano a costanti, è che la curva polare di* Φ *non contenga alcuna* C.

Diremo *cicli invarianti* gli r cicli distinti di una C che ritornano in sé per le circolazioni di λ. Accanto a questi cicli ve ne sono altri notevoli: son

(7) E. PICARD–G. SIMART, II, l.c. in (1), p. 389. Veramente qui si parla di *polinomi*; ma l'integrale (2) considerato dagli Autori è *generico* ed è perciò sottinteso che la funzione A resti finita nel punto generico d'una sezione $y = \text{cost}$, per ogni valore *finito* di y.

(8) E. PICARD–G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, I, Gauthier Villars, Paris (1897); p. 44.

quelli che vengono a circondare – sopra un foglio della riemanniana relativa a C – un *nuovo* punto doppio che la C venga ad acquistare al variare di λ (si sottintende che il fascio non presenti particolari complicazioni).

Ogni ciclo di C è omologo ad una combinazione lineare dei cicli invarianti e dei cicli ultimamente considerati, che conviene chiamare *cicli nulli*, per ricordare che entro alla f essi riduconsi in definitiva a punti. – Un integrale semplice di 1ª specie appartenente ad f, stacca sopra ogni C un integrale abeliano di 1ª specie che ha periodi costanti (non tutti nulli) lungo i cicli invarianti e periodi nulli lungo i cicli nulli. E viceversa, da un integrale abeliano di questo tipo, fissato razionalmente sopra ogni C, si ricostruisce un integrale semplice della superficie.

In corrispondenza agl'integrali di 1ª specie appartenenti ad f, vengono pertanto ad ottenersi altrettante *curve indipendenti* $C + C'$, *che passano pei punti base e pei punti doppi staccati da curve del fascio,* $|C'|$ *denotando il sistema aggiunto a* C.

Tutta la difficoltà della questione posta sta nel trovare a quali ulteriori condizioni debba *eventualmente* soggettarsi una curva $C + C'$ che passi pei punti base e pei punti doppi staccati, affinché l'integrale abeliano *di* 1ª *specie* ch'essa determina razionalmente sopra *ogni* curva C, abbia periodi nulli lungo i cicli nulli.

Una conseguenza utilissima si può già dedurre dalle considerazioni precedenti. Riferiamoci al caso in cui $|C|$ denoti il fascio di sezione piane $y = \text{cost.}$ della nostra superficie f, e s'indichi con $Q(x, y, z) = 0$ una superficie d'ordine $m - 3$ aggiunta ad f. Allora si dimostra con Picard, che l'integrale $\int \frac{Q(x, y, z)}{f'_z} dx$ (y parametro) ha periodi nulli lungo i cicli invarianti. Ne deriva che l'integrale abeliano staccato sopra una sezione $y = \text{cost.}$ da un integrale semplice di 1ª specie della superficie, non può mai coincidere coll'integrale precedente, perché altrimenti si avrebbe su f un integrale (non costante) con tutti i periodi nulli.

Sotto forma invariantiva si può dunque dire che *la serie canonica ridotta esistente sopra una curva* C *della superficie, non ha alcun gruppo comune colla serie staccata su* C *dal relativo sistema aggiunto* $|C'|$.

XLVI.

SULLE SUPERFICIE MODANATE

Periodico di Matematica, (3) *6* (1909), pp. 212–215.

Si suole spesso affermare che la traiettoria di una goccia d'acqua (o di un punto materiale) che scorra senza attrito sopra una superficie topografica, è una linea di massima pendenza della superficie.

È facile convincersi che quest'affermazione non è esatta. Sopra una superficie topografica S le *linee idrodinamiche* – traiettorie di punti materiali soggetti alla sola gravità – sono generalmente distinte dalle linee di massima pendenza.

Dicasi infatti A un punto di S, a partire dal quale si abbandoni sulla superficie, senz'impulso, un granello materiale M. Togliendo dal peso di M la componente normale, la quale è equilibrata dalla reazione della superficie, resta sola attiva la componente tangenziale, che risulta normale alla linea di livello l_A per A. Onde nel primo istante, M si muove descrivendo un elemento della linea di massima pendenza uscente da A.

Ma quando M attraversa in B la linea di livello l_B infinitamente prossima ad l_A, la velocità acquistata da M – che ha la direzione della retta AB, tangente in A ad S – si compone colla velocità impressa ad M dall'azione della gravità in quell'istante. Quest'ultima velocità è diretta secondo l'elemento BC della linea di massima pendenza $ABC\ldots$ uscente da B; sicché il granello M, a partire da B, generalmente deve deviare dalla linea di massima pendenza.

Perché questa deviazione non si verifichi, occorre e basta che gli elementi AB, BC appartengano ad un medesimo piano verticale. Dunque:

Sopra una superficie topografica le linee idrodinamiche coincidono colle linee di massima pendenza, soltanto quando queste ultime stanno in piani verticali.

In pratica le *linee d'impluvio del terreno* sono però meno differenti dalle linee di massima pendenza, di quanto teoricamente non si preveda. (Intendo parlare, beninteso, dell'andamento generale di tali linee, prescindendo dalle deformazioni locali, inerenti alle diverse resistenze dei terreni).

L'attrito, i fenomeni di adesione e di pressione, tendono infatti a diminuire in ogni istante la velocità che l'acqua conserva per inerzia. Viene così a ridursi notevolmente l'entità della causa da cui proviene la deviazione dalla linea di massima pendenza. Si aggiunga che a ricondurre il fenomeno verso le

condizioni statiche, contribuisce forse anche il fatto che in un corso d'acqua perenne il moto è pressoché stazionario.

M'è capitato di riflettere su tale questioncella [1] preparando le mie lezioni di Geometria Descrittiva [2]. Ne ho tratto occasione per cercare un'esposizione semplice ed elementare delle proprietà delle superficie topografiche modanate, nelle quali appunto si cade quando linee idrodinamiche e di massima pendenza coincidono.

Ed ho creduto opportuno d'esporre ai giovani *alcune* di queste proprietà, perché, se stimo utile che nel corso di Descrittiva si tenga d'occhio la pratica [3], cercando che gli scolari apprezzino i mutui legami tra teoria e applicazione, credo anche utilissimo d'intercalare qua e là, quando se ne presenti il destro, nozioni intuitive di geometria infinitesimale. Mi par giovevole che questo genere d'intuizione si sviluppi nel futuro ingegnere.

Ho detto che *le superficie topografiche per cui le linee idrodinamiche e di massima pendenza coincidono, sono modanature.*

Com'è noto con tale denominazione (in francese *moulures*) Monge indicava le *superficie che hanno le linee di curvatura di un sistema in piani paralleli tra loro.*

Nel caso che poc'anzi consideravo, di una superficie topografica S avente ogni linea l di massima pendenza sopra un piano verticale λ, la orizzontale tangente alla linea di livello, che passa per un punto P di l, è perpendicolare a λ, e quindi la normale ad S in P, giace in λ. Questo piano è perciò normale ad S in tutti i punti di l. Donde segue che la l è una linea di curvatura (le normali ad S ne' suoi punti formando un inviluppo piano) e che le linee di livello, traiettorie ortogonali delle diverse l, son esse pure linee di curvatura della superficie, la quale dunque, secondo la definizione di Monge, viene ad esser modanata.

Ma proviamo, viceversa, che *se sopra una superficie le linee di curvatura di un sistema stanno in un fascio di piani paralleli, anche le linee di curvatura dell'altro sistema sono piane* (*e situate in piani dovunque normali alla superficie*).

Consideriamo infatti una superficie S soddisfacente all'ipotesi. Per brevità quei piani paralleli li chiameremo orizzontali, sicché le linee di curvatura date si potranno chiamare linee di livello della S.

Le traiettorie ortogonali della famiglia, cioè le linee di massima pendenza di S, costituiranno l'altro sistema di linee di curvatura. Indichiamo con l

(1) Del resto l'osservazione non deve essere nuova: ho in mente d'averla già vista in qualche luogo!

(2) A Padova gli studî per gli allievi ingegneri sono stati da poco riformati in virtù della legge sul Magistrato alle acque. Il corso di Proiettiva rimane soltanto per gli studenti di matematiche pure e nel corso di Descrittiva s'intercalano colla massima economia quelle nozioni di Proiettiva che occorrono per lo sviluppo della Descrittiva.

(3) E non sarebbe male che i nostri corsi di Descrittiva fossero decisamente riformati in questo senso. Ci vuol però molta cura e discrezione, perché non s'ha da eccedere nel verso opposto.

una di queste linee e con A, B due suoi punti successivi. Il piano verticale λ, normale alla superficie in A, passa per B. Invero, ciò equivale ad affermare che la retta AB è una retta di massima pendenza del piano tangente alla S in A. D'altra parte le due normali alla S in A e B s'incontrano in un punto P, da che A e B son punti successivi d'una linea di curvatura. Ne deriva che il suddetto piano verticale λ, contiene la retta BP, cioè che è normale ad S anche in B.

Similmente dal fatto che λ è normale ad S in B, si deduce che è normale alla superficie nel punto C successivo a B sulla l; ecc. Si conclude pertanto che la l è situata tutta quanta sul piano verticale λ.

Dico di più che *ogni modanatura si genera mediante una curva piana (indeformabile) il cui piano rotoli, senza strisciare, attorno ad un cilindro verticale* (4).

Poiché i piani delle linee di massima pendenza d'una superficie topografica modanata, inviluppano un cilindro verticale, basterà evidentemente dimostrare che queste linee sono tra di loro congruenti.

Imagino il piano orizzontale su cui si rappresenta la superficie S. Le linee di massima pendenza vengon rappresentate da rette dovunque normali alle proiezioni delle linee di livello, in tal guisa che queste linee risultano evolventi di una medesima curva γ (inviluppata da quelle rette). Ne deriva che due linee di livello successive, staccano sopra due tangenti a_1, b_1 di γ, segmenti (infinitesimi) uguali, cui corrispondono quindi sopra le curve a, b di massima pendenza, rappresentate da a_1, b_1, elementi eguali e di egual pendenza.

Mediante le coppie di linee di livello successive, le curve a, b risultano così riferite in tal guisa che gli elementi corrispondenti sono eguali ed equinclinati sul quadro: onde le curve stesse risultano congruenti.

Osservazione. – Dal fatto ora stabilito che gli elementi staccati sopra due linee di massima pendenza da due linee di livello successive, sono equinclinati sul quadro, tenendo presente che le inclinazioni di detti elementi non sono altro che le inclinazioni dei piani tangenti ad S, cui essi appartengono, segue che i *piani tangenti ad una superficie topografica modanata lungo una linea di livello, formano un angolo costante col quadro* (5).

Com'è ben noto la definizione mongiana delle modanature è stata estesa, chiamando *superficie modanate tutte quelle che hanno le linee di curvatura d'un sistema situate in piani dovunque normali alla superficie.*

È facile arrivare sinteticamente alla genesi cinematica di una tal superficie S (6).

(4) Teorema dato analiticamente da MONGE nella celebre *Application de l'Analyse à la Géométrie* (IV éd., Paris. 1809, p. 139 e più particolarmente p. 151). Cfr. pure per es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ed., Pisa, 1902, t. I, p. 176).

(5) Caso particolare di un noto teorema di Joachimsthal. Su questo teorema J. BERTRAND (Journal de Lionville, (1) *13* (1848) p. 76) poggia una dimostrazione geometrica della genesi di una superficie topografica, che ha qualche analogia con quella esposta nel testo, pur essendone meno semplice.

(6) Per la dimostrazione analitica ved. per es. L. BIANCHI, *loc. cit.*, t. II, p. 264.

Indico con Γ lo spigolo di regresso della sviluppabile formata dai piani delle linee di curvatura considerate, e chiamo l_1 , l_2 due di queste curve successive. Il piano di l_1 conterrà le tangenti successive, a , b di Γ e il piano di l_2 le tangenti successive b , c.

Considero la superficie di rotazione R, che ha per asse b e per linea meridiana l_1. Nei punti di l_1 le normali a R coincidono colle normali ad l_1 e quindi colle normali ad S. Onde in ogni punto di l_1 le S , R hanno lo stesso piano tangente; cioè *le due superficie si toccano lungo tutta la linea* l_1.

Ciò significa che la linea (meridiana) secondo cui R è segata dal piano bc, coincide colla sezione l_2 di S collo stesso piano. Ne segue che la rotazione infinitesima che porta il piano ab in bc, porta la curva l_1 in l_2, e si può quindi enunciare che:

Ogni superficie modanata (generale) si può concepir generata da una curva piana (indeformabile) il cui piano rotoli, senza strisciare, sopra una data sviluppabile.

Si noti che le linee di curvatura considerate sono anche geodetiche sulla S.

XLVII.

MÉMOIRE SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES (*)

In collaborazione con F. ENRIQUES

PARTE I: Acta Mathematica, *32* (1909), pp. 283–392.

I. INTRODUCTION.

1. On appelle *surface hyperelliptique* toute surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0$$

qui admet une représentation paramétrique par des *fonctions uniformes quadruplement périodiques* de deux variables

$$(1) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

D'après un théorème classique de Weierstrass, on peut construire une surface hyperelliptique F de la façon suivante:

Soient x, y, z trois fonctions analytiques uniformes indépendantes de u, v ayant le caractère de fonctions rationnelles pour toute valeur finie de u, v; si ces fonctions sont quadruplement périodiques aux mêmes périodes, elles seront toujours liées par une équation algébrique

$$F(x, y, z) = 0.$$

Si au lieu de *trois* fonctions quadruplement périodiques, on en considérait $r > 3$, on aurait analoguement une surface hyperelliptique de l'hyperespace S_r, à r dimensions; celle–ci se ramenerait d'ailleurs par une projection à une surface de l'espace ordinaire.

Si, étant donnée une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0,$$

on choisit trois (ou plusieurs) fonctions rationnelles indépendantes

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z),$$

celles–ci seront liées par une nouvelle équation algébrique

$$\Phi(X, Y, Z) = 0,$$

qui représente, ainsi que $F = 0$, une surface hyperelliptique. On peut exprimer cette remarque en disant que «si une surface Φ admet une transformée rationnelle hyperelliptique (F), elle est elle–même hyperelliptique».

(*) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907).

En considérant en particulier le cas où la substitution rationnelle soit invertible (par des fonctions rationnelles), on a que « toute transformée birationnelle d'une surface hyperelliptique est elle–même hyperelliptique ».

Au point de vue des problèmes dont nous occuperons, deux surfaces liées par une correspondance birationnelle nous apparaîtront comme deux surfaces identiques, en tant qu'elles correspondent au même corps de fonctions abéliennes. Ainsi, dans la suite, nous considérerons toujours une surface donnée comme une image projective de la classe à laquelle elle appartient; c'est–à–dire qu'il sera permis de remplacer cette image par une autre quelconque de ses transformées birationnelles.

2. *Premiers caractères des surfaces hyperelliptiques: le diviseur.*

D'après le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes (1) étant données les fonctions

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

on peut ramener leurs *périodes primitives à un tableau normal* de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix} \right.$$

où δ est une entier positif. Cette réduction peut être effectuée par des substitutions linéaires, d'une infinité de manières différentes. Mais on est toujours amené au même valeur de δ. C'est ce que nous allons démontrer. Soit:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix}$$

un tableau quelconque de périodes primitives des f; on a la relation bilinéaire à coefficients entiers:

$$\sum_{i,\varkappa} c_{i\varkappa}\, \alpha_i\, \beta_\varkappa = 0 \qquad (c_{ii} = 0,\ c_{i\varkappa} = -c_{\varkappa i}).$$

Lorsqu'on veut construire un tableau normal de périodes, on commence à transformer les périodes au moyen d'une transformation linéaire d'ordre 1, telle que la relation bilinéaire entre les périodes transformées

$$\begin{matrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{matrix}$$

(1) Voir les travaux généraux de Weieerstrass et de MM. Poincaré et Picard concernant les fonctions abéliennes de genre p; voir en particulier pour $p = 2$ le mémoire classique de M. Appell: P. Appell, *Sur les fonctions périodiques de deux variables*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (4) 7 (1891), pp. 157–219 et la note recente de M. Painlevé (Comptes rendus).

ait la forme normale:

$$\alpha'_1 \beta'_3 - \beta'_1 \alpha'_3 + \delta (\alpha'_2 \beta'_4 - \beta'_2 \alpha'_4) = 0$$

1 , δ étant les *diviseurs élémentaires* de la forme (3). On prend ensuite de nouvelles variables

$$\lambda_0 u + \mu_0 v , \qquad \lambda_1 u + \mu_1 v ,$$

où les constantes λ , μ sont déterminées de telle sorte que

$$\lambda_0 \alpha'_1 + \mu_0 \beta'_1 = 1 \qquad \lambda_1 \alpha'_1 + \mu_1 \beta'_1 = 0$$

$$\lambda_0 \alpha'_2 + \mu_0 \beta'_2 = 0 \qquad \lambda_1 \alpha'_2 + \mu_1 \beta'_2 = \frac{1}{\delta} .$$

Ainsi le nombre δ vient dépendre seulement des diviseurs élémentaires de la forme (3). Comme deux systèmes différents de périodes *primitives* sont toujours liées par une transformation linéaire d'ordre 1, d'après un théorème bien connu de Weierstrass, les formes bilinéaires relatives à ces systèmes, auront les mêmes diviseurs élémentaires; ainsi la valeur de δ est la même quel que soit le système de périodes primitives dont on part, tant que ces périodes ne sont pas liées par des relations singulières à coefficient entiers.

Nous verons de prouver que, *pour des périodes arbitraires*, la réduction des périodes primitives des fonctions f à la forme normale, nous amène à un tableau (2) où *l'entier δ résulte défini sans ambiguité par rapport aux fonctions f*; ce nombre entier est donc un caractère du système de fonctions abéliennes données; nous l'appelerons le *diviseur* de ce fonctions.

Nous dirons aussi qu'une surface F est une *surface hyperelliptique de diviseur δ*, lorsqu'elle admet une représentation paramétrique par des fonctions abéliennes de diviseur δ.

3. *Le rang*. Soit encore un système de fonctions abéliennes

$$(1) \qquad x = f_1 (u , v) , \qquad y = f_2 (u , v) , \qquad z = f_3 (u , v) .$$

Un autre caractère de ce système peut être défini de la façon suivante:

A tout point (x , y , z) de la surface F il peut correspondre ou bien un seul couple (u , v), ou bien $r > 1$ couples (u , v), incongrus par rapport aux périodes primitives des fonctions f.

Dans le premier cas il y a une correspondance biunivoque entre les points de la surface F et les points (u , v) intérieurs à un prismatoïde de périodes primitives; dans le second cas au contraire on a qu'à tout point (x , y , z) de F correspondent $r > 1$ points intérieurs à ce prismatoïde.

Le nombre $r (\geq 1)$ des points (u , v) intérieurs au prismatoïde des périodes, qui correspondent à un même point (x , y , z) de F, sera désigné dans la suite sous le nom de *rang du système de fonctions f*; on dira aussi que la *surface F est hyperelliptique de rang r.*

4. *Surfaces rationnelles et réglées elliptiques.*

D'après les définitions que nous venons de poser, toute surface rationnelle et de même toute surface réglée elliptique, peut être considérée comme une surface hyperelliptique, et cela de différentes façons.

On peut considérer une surface rationnelle (ou une réglée elliptique) F comme un cas de dégénérescence de surfaces hyperelliptiques de rang 1; mais on peut aussi exprimer les coordonnées des points de F par des fonctions abéliennes *non dégénérescents*, formant un système de *rang* > 1.

Dans la suite nous laisserons de côté les surfaces rationnelles et celles qui peuvent être transformées en de réglées elliptiques: *le nom de surfaces hyperelliptiques ne sera donc pas appliqué aux surfaces de ces familles*, tout au moins lorsqu'il s'agira de surfaces que l'on se donnera à priori.

5. *La surface de Jacobi.*

Dans la théorie des surfaces hyperelliptiques joue un rôle fondamental la *surface que l'on construit* de la façon suivante: Soit

$$f(\xi) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$$

une courbe de genre deux, et soient (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) deux points variables de f; posons

$$(1) \qquad x = \xi_1 + \xi_2, \qquad y = \xi_1 \xi_2, \qquad z = \eta_1 + \eta_2.$$

D'après le théorème d'inversion de Jacobi, le point (x, y, z) décrit une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0,$$

dont l'equation s'obtient en éliminant $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ entre les (1) et les

$$f(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0.$$

A chaque couple de points de la courbe f correspond par les formules (1) un point de la surface F, et réciproquement.

La surface F, ou toute transformée birationnelle de celle-ci, dont les points correspondent (élément par élément) aux couples de points d'une courbe de genre deux, sera désignée dans la suite sous le nom de *surface de Jacobi.*

Remarque. La courbe de genre deux peut dégénérer en se réduisant à un couple de courbes elliptiques; on tombe alors sur la *surface de Jacobi particulière* qui représente les couples de points de ces courbes.

Il y a aussi d'autres dégénérescences possibles de la courbe f, mais ces cas amènent aux surfaces hyperelliptiques dégénérescentes (surfaces rationnelles et réglées elliptiques) que nous venons d'exclure de notre étude (n. 4).

6. *Transformées rationnelles d'une surface hyperelliptique.* Le rôle qui est joué par la surface de Jacobi dans la théorie des surfaces hyperelliptiques, ressortira du théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique admet une transformée rationelle qui est une surface de Jacobi.

Considérons la surface hyperelliptique Φ qui est représentée par les formules

$$(1) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

et supposons d'avoir effectues d'avances sur les substitutions linéaires qui ramènent les périodes des fonctions abéliennes f_1, f_2, f_3 au tableau normal

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g', \end{array} \right.$$

où le diviseur δ sera un entier positif (n. 2). Entre les parties imaginaires g_1, h_1, g_1', de g, h, g' on aura l'inégalité

$$(3) \qquad g_1 g_1' > h_1^2.$$

En désignant par $r\ (\geq 1)$ le rang des fonctions (1), on aura qu'à un point quelconque (x, y, z) de Φ correspondent r couples (u, v) incongrus par rapport aux périodes (2), soit

$$(4) \qquad (u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots (u_r, v_r).$$

Par rapport au tableau (2) ces couples ne sont pas distincts des couples

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \left(u_1, v_1 + \frac{x}{\delta}\right), \left(u_2, v_2 + \frac{x}{\delta}\right), \cdots \left(u_r, v_r + \frac{x}{\delta}\right), \\ x = 1, 2, \cdots, \delta - 1. \end{array} \right.$$

Mais, toutefois, les couples (4), (5), qui sont au nombre de $n = r\,\delta$, sont distincts par rapport au tableau

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{array} \right.$$

Ceci posé, nous allons construire une surface de Jacobi F, en partant d'une courbe f de genre deux dont les intégrales de première espèce aient les périodes normales (6); nous sommes assurés que cette courbe existe d'après l'inégalité (3).

En désignant par $\omega_1(\xi), \omega_2(\xi)$ les intégrales considérées de f, sommons les valeurs que ω_1, ω_2 prennent en deux points $(\xi_1), (\xi_2)$ de f; on peut regarder ces sommes comme des fonctions du point (X) de la surface F, qui correspond au couple $(\xi_1), (\xi_2)$ de f.

Soit:

$$u(X) = \omega_1(\xi_1) + \omega_1(\xi_2), \qquad v(X) = \omega_2(\xi_1) + \omega_2(\xi_2).$$

Les fonctions u, v seront deux intégrales simples de première espèce attachées à la surface F, et elles auront les périodes primitives (6).

Les coordonnées d'un point de F seront des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u, v ayant les périodes (6).

Or, entre les points de la surface Φ et ceux de F il y a une correspondance $[1, n]$ de façon qu'à un point (x) de Φ répondent n points (X) de F, donnés par les couples (4), (5).

Etant donné un point (X) de F, on a un couple (u, v) par rapport au tableau des périodes (6) et à fortiori par rapport à (2); ainsi par les formules (1) à (X) répond un point (x) de Φ qui résulte une fonction rationnelle de (X).

La surface Φ adment donc une transformée rationnelle qui est la surface de Jacobi F. La proposition énoncée se trouve ainsi justifiée.

Remarque. On reconnaît en cette proposition une expression géométrique du théorème fondamental d'après lequel toute fonction abélienne est une fonction rationnelle des séries Θ.

La propriété que nous venons d'établir peut être énoncée d'une autre façon.

Entre la surface hyperelliptique donnée Φ et la surface de Jacobi F nous avons trouvé une correspondance $[1, n]$ de sorte qu'à un point de Φ répond un groupe G_n de n points de F. Les groupes G_n qu'on obtient sur F en variant le point homologue de Φ, forment une série algébrique ∞^2 qui jouit de la propriété suivante: chaque point de F appartient à *un* groupe de la série, les points du groupe jouant un rôle symétrique par rapport à la détermination de celui–ci.

On exprime cette propriété en disant que les groupes G_n forment sur F une *involution* I_n *d'ordre* n. On dira aussi que Φ (ou toute autre surface en correspondance birationnelle avec celle–ci) *représente* l'involution I_n, ou qu'elle en est une *image*.

Ces définitions établies, notre résultat peut être exprimé en disant que « toute surface hyperelliptique correspond à une involution I_n appartenant à une surface de Jacobi ».

On peut même préciser cet énoncé en tenant compte de la valeur de n; en effet nous avons trouvé

$$n = r\delta,$$

r et δ désignant respectivement le rang et le diviseur de la surface hyperelliptique donnée.

Nous aurons donc le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de diviseur δ *et de rang* r *correspond à une involution d'ordre* $r\delta$ *appartenant à une surface de Jacobi*; la surface donnée est une image de l'involution.

En particulier: *Toute surface hyperelliptique de diviseur et de rang* 1 *est une surface de Jacobi.*

On a aussi:

Toute surface hyperelliptique de rang r et diviseur δ, correspond à une involution d'ordre r appartenant à une surface hyperelliptique de rang 1 *et de diviseur δ.*

II. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1.

7. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1 ont été étudiées par M. Picard comme des surfaces admettant un groupe permutable ∞^2 de transformations birationnelles en elles–mêmes, c'est pourquoi elles ont reçu le nom de *surfaces de Picard.*

Aux propriétés découvertes par M. Picard, M. Humbert a ajouté une étude approfondie de ces surfaces, de façon qu'on en possède maintenant une théorie qui peut être regardée comme complète sous plusieurs points de vue.

Cependant il ne paraîtra pas inutile que nous nous arrêtons à rappeler en ce chapitre les théorèmes fondamentaux qui constituent cette théorie, en les rapprochant au point de vue géométrique, auquel nous nous placerons souvent dans la suite de ces recherches; nous aurons occasion ainsi d'ajouter aux résultats connus quelques résultats nouveaux, qui nous ne semblent pas dépourvus d'interêt.

Nous nous proposons d'abord de construire toutes les surfaces de Picard en partant de la surface de Jacobi (nn. 11,12). Cette construction mettra simplement en lumière les propriétés fondamentales qu'on peut considérer comme caractéristiques pour notre famille de surfaces (nn. 13, 14, 16). Enfin elle nous amenera à reconnaître les types, birationnellement distincts, de surfaces hyperelliptiques de rang 1, en classifiant celles–ci d'après leur diviseur δ (n. 30).

8. *Transformations de la surface de Jacobi en elle–même.*

Reprenons la surface de Jacobi F que nous avons définie au n. 5; elle est représentée par les équations

$$x = \xi_1 + \xi_2 , \qquad y = \xi_1 \xi_2 , \qquad z = \eta_1 + \eta_2 ,$$
$$f(\xi_1 , \eta_1) = 0 , \qquad f(\xi_2 , \eta_2) = 0 ,$$

en désignant par $f(\xi , \eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$ une courbe de genre deux.

Ainsi que nous l'avons rappelé, la surface F possède deux intégrales simples de première espèce que l'on obtient en sommant les valeurs des intégrales analogues de f, aux points (ξ_1 , η_1) et (ξ_2 , η_2) (voir n. 6).

Or il est bien connu que:

La surface de Jacobi F admet deux séries ∞^2 *de transformations birationnelles en elle–même, qui forment un groupe mixte.*

Ces transformations sont représentées par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} u + u' = \text{const.} \\ v + v' = \text{const.} \end{cases}$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} u' - u = \text{const.} \\ v' - v = \text{const.} \end{cases}$$

Les transformations (1) s'appellent des *transformations de première espèce*, les (2) des *transformations de seconde espèce*; ce sont là les deux sortes de transformations qui appartiennent à F pour toute valeur des modules; il peut en exister d'autres seulement pour des valeurs particulières de ces modules, ainsi que nous le verrons dans la suite.

Une transformation de première espèce définit sur F une involution de second ordre, les points homologues étant conjugués par rapport à celle–ci.

Le produit de deux transformations de première espèce est une transformation de seconde espèce.

Deux transformations de 2^{de} espèce engendrent par multiplication une nouvelle transformation de 2^{de} espèce; cela revient à dire que les transformations de 2^{de} espèce forment, à elles seules, un *groupe continu* qui est un sous–groupe du groupe mixte renfermant toutes les tranformations (1), (2) de F.

A l'égard de la multiplication des transformations de F ajoutons que: *les transformations de 2^{de} espèce sont deux à deux permutables entr'elles.*

Il n'en est plus ainsi généralement pour deux transformations de première espèce.

Enfin rappelons que:

Etant donnés sur F deux points (x), (x'), il existe deux transformations de notre groupe mixte qui font correspondre au premier point le second; l'une de celles–ci est une transformation de première espèce, l'autre une transformation de seconde espèce.

Remarque I. Si une transformation de seconde espèce

$$\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

ramène en lui–même un point de la surface, les équations de la transformation seront satisfaites pour $u' = u$, $v' = v$. Il faudra donc que l'on ait $\lambda = \mu = 0$, c'est–à–dire que la transformation soit *l'identité*. Donc:

Une transformation de seconde espèce qui ne soit pas l'identité n'admet aucun point de coïncidence.

Au contraire une transformation de première espèce

$$\begin{cases} u + u' = \lambda \\ v + v' = \mu \end{cases}$$

adment toujours 16 points de coïncidence qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1, ω_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v.

Remarque II. Faisons une autre remarque utile pour la suite.

Lorsque un point de F se meut sur un cycle linéaire quelconque σ, *le point qui lui correspond au moyen d'une transformation de seconde espèce*

$$\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

décrit un cycle σ' *homologue à* σ. En effet si les paramètres λ, μ aboutissent à zéro par une variation continue, le cycle σ' se réduit au cycle σ.

9. *Transformations de seconde espèce cycliques.*

Tandis que les transformations de première espèce de F sont périodiques (d'ordre 2) il n'en est pas ainsi, en général, pour les transformations de seconde espèce.

Reprenons les équations (2) du n. 8 en les écrivant sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv \lambda \\ v' - v \equiv \mu \end{cases}$$

et rappelons qu'il est sous-entendu que les congruences se rapportent aux périodes simultanées de u, v. Pour que ces équations représentent une transformation périodique d'ordre n, il faut avoir

$$n\lambda \equiv 0, \qquad n\mu \equiv 0;$$

cela revient à dire que

$$\lambda = \frac{\omega_1}{n}, \qquad \mu = \frac{\omega_2}{n},$$

ω_1, ω_2 désignant un couple de périodes simultanées de u, v.

On obtient ainsi des transformations de la surface de Jacobi F, qui sont périodiques d'ordre n.

En tenant compte du fait que parmi ces transformations il y en a en général qui sont périodiques d'un ordre diviseur de n, au moyen d'une formule connue de Dedekind on reconnait que: *les transformations périodiques d'ordre n (et non moindre que n) sont au nombre de* $n^4\left(1 - \frac{1}{\alpha^4}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma^4}\right)\cdots$ *où* $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ *désignent les diviseurs premiers de n* [2].

(2) Voir p. ex. G. CASTELNUOVO, Rend. dell'Istituto Lombardo, (2) *25* (1892); n. 8.

Remarque. Les transformations périodiques d'ordre n de F en elle–même peuvent être définies de la façon suivante:

Soit G_n un groupe de n points de F et sommons les valeurs des intégrales u, v aux points de G_n; désignons ces sommes par h, k. Il y aura ∞^{2n-2} groupes analogues à G_n qui donnent lieu aux mêmes sommes h, k; ceux–ci formeront une certaine série qu'on pourra désigner par Γ_n. Or parmi les groupes de Γ_n il y en aura un nombre fini (et précisément n^4) qui seront formés par un seul point compté n fois [3]. Eh bien: les transformations périodiques d'ordre n sont définies parmi les transformations de seconde espèce de F, par la propriété de changer un point de coïncidence n–ple de Γ_n en un point analogue.

Considérons une transformation périodique de seconde espèce de F, et ses puissances; on obtient un groupe cyclique de transformations qui sont représentées par les formules:

$$(3) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv k\,\dfrac{\omega_1}{n} \\ v' - v \equiv k\,\dfrac{\omega_2}{n}, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

où ω_1, ω_2 constituent un certain couple de périodes de u, v. On peut même ramener ces formules à une expression plus simple; en effet par des substitutions linéaires convenables effectuées sur les cycles normaux et sur les intégrales u, v, elles se réduisent à la forme

$$(3') \qquad \begin{cases} u' - u \equiv 0 \\ v' - v \equiv \dfrac{k}{n}. \end{cases}$$

Cette réduction s'effectuera de la façon suivante: désignons par ϱ_2 le cycle de F qui correspond aux périodes ω_1, ω_2 et construisons un système normal de cycles $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, renfermant ϱ_2; il suffira de prendre comme nouvelles variables les intégrales de F qui ont les périodes 1, 0 et 0, 1 le long de ϱ_1, ϱ_2.

Il est bon d'ajouter que la construction du système normal de cycles auquel appartient ϱ_2, peut être effectuée en remarquant que la surface F renferme de courbes C de genre deux (n. 20); il suffit alors de ramener le cycle ϱ_2 à un cycle de la surface riemannienne C et de construire ensuite sur celle–ci les retrosections riemanniennes $\varrho_1\,\varrho_2$, $\varrho_3\,\varrho_4$ [4].

(3) Voir p. ex. G. CASTELNUOVO, *loc. cit.*

(4) Voir le Traité de MM. PICARD et SIMART (t. I, p. 86) et les remarques de F. SEVERI dans son mémoire: *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, *21* (1906), pp. 257–282 [Memoria XXX, vol. I, p. 363; N.d.R.].

10. Opérons sur un point quelconque P de F au moyen des transformations (3) ou (3′) du n. 9; on a ainsi un groupe de points $G_n=(P, P', P'', \cdots P^{(n-1)})$.

Ce groupe est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points; en conséquence au varier de P, il décrit une *involution cyclique d'ordre n* que nous pouvons désigner par I_n. On obtient le nombre des involutions I_n, en divisant le nombre des transformations périodiques d'ordre n par le nombre des transformations qui ramènent en lui–même tout groupe d'une I_n donnée. Ce dernier nombre est évidemment égal à la fonction $\varphi(n)$ de Gauss.

Il y a donc sur F, $n^3\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)\cdots$ *involutions cycliques d'ordre n engendrées par les transformations de seconde espèce* (3), [ou (3′)].

Ces involutions cycliques I_n jouissent des *propriétés suivantes*:

a) *Elles sont transformées en elles–mêmes par les transformations de seconde espèce de F.*

b) *Elles sont transformées en elles–mêmes par les transformations de première espèce de F.*

Cette dernière affirmation a besoin d'être justifiée. Soit ω une transformation cyclique de seconde espèce d'ordre n, qui engendre su F une involution I. Il ne subsiste pas que ω soit transformée en elle–même par une transformation quelconque de première espèce π. Mais en multipliant ω par π, on obtient un groupe fini composé par les $2n$ transformations

$$\omega\ ,\ \omega^2, \cdots \omega^{n-1},\ \omega^n \equiv 1$$
$$\pi\ ,\ \omega\pi\ , \cdots \omega^{n-1}\pi\ .$$

Ces transformations donnent lieu à une involution I_{2n} dont chaque groupe est composé par *deux* groupes de I_n, qui sont échangés l'un en l'autre par chacune des transformations de première espèce

$$\pi\ ,\ \omega\pi\ , \cdots \omega^{n-1}\pi\ .$$

Il s'ensuit que I_n est transformée en elle–même par toute transformation de première espèce de F.

c) *Elles n'ont pas des points de coïncidence,* c'est–à–dire que tout point P d'un groupe G_n de I_n est distinct des autres $n-1$.

En effet un point de coïncidence de I_n serait un point uni pour une transformation de seconde espèce, tandis que ces transformations n'ont pas des points unis (voir la remarque I au n. 8).

11. *Construction des surfaces de Picard de diviseur* δ.

Considérons une involution I_δ engendrée par une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, appartenant à une surface de Jacobi F.

Nous allons démontrer que *toute surface* F_δ *qui représente l'involution* I_δ *est une surface hyperilleptique de rang I, c'est–à–dire une surface de Picard de diviseur* δ.

En désignant par u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F, nous considérerons les sommes des valeurs que u, v prennent aux δ points d'un groupe de I_δ; ces sommes divisées par δ seront désignées par U, V.

Alors U, V seront deux intégrales de première espèce attachées à la surface F_δ; il s'agit:

a) de déterminer les périodes primitives de U, V et de montrer que celles-ci sont

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix};$$

b) de prouver que les coordonnées des points de F_δ s'expriment par des fonctions uniformes de U, V; ces fonctions seront de rang 1, puisqu'en tout point de F_δ les intégrales U, V résultent définies sans ambiguité, aux périodes près.

a) Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les quatre cycles de la surface F qui correspondent aux périodes normales, ce que l'on peut représenter par le tableau suivant

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
u	1	0	g	h
v	0	1	h	g'

On peut supposer que les équations de la transformation périodique qui engendre I_δ soient

$$\begin{matrix} u' - u \equiv 0 \\ v' - v \equiv \frac{1}{\delta} \end{matrix} \qquad \text{mod} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{Bmatrix}$$

(voir n. 9).

Ceci posé considérons les cycles $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \sigma_4'$ de F_δ, correspondant à $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

On peut évaluer les périodes de U, V le long de ces cycles, en rappelant la remarque II du n. 8; d'après cette remarque au cycle σ_1' décrit par un point P' de F_δ, correspondent sur F des cycles homologues décrits par les δ points homologues $P_1, \cdots, P_\delta$; un de ces cycles a été dejà désigné par σ_1.

On trouve ainsi que les périodes de U, V correspondant aux cycles $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \sigma_4'$ sont celles représentées par le tableau suivant

	σ_1'	σ_2'	σ_3'	σ_4'
U	1	0	g	h
V	0	1	h	g'.

Mais les cycles σ'_1 , σ'_2 , σ'_3 , σ'_4 de F_δ ne sont pas primitifs; c'est là un point délicat qu'il faut mettre en lumière.

A cet effet remarquons que l'on obtient un cycle de F_δ qui n'est pas une combinaison linéaire de σ'_1 , σ'_2 , σ'_3 , σ'_4 par la construction suivante: considérons les points P_1 , P_2 , $\cdots P_\delta$ de F qui correspondent à un même point P' de F_δ. Soit Θ_1 une ligne ouverte joignant P_1 à P_2. Tandis que P_1 décrit cette ligne, P_2 parcourira une ligne Θ_2 qui aboutit à P_3 , $\cdots$, P_δ une ligne Θ_δ qui aboutit à P_1. Eh bien, au chemin ouvert Θ_1 correspond sur F_δ un cycle fermé Θ'; ce cycle parcouru δ fois correspond au cycle

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_\delta$$

de la surface F.

Evaluons les périodes des intégrales U, V correspondant au cycle Θ' de F_δ. Elles correspondent aux valeurs que les intégrales u , v de F prennent le long de Θ_1; la correspondance $(P_1 P_2)$ étant représentée par les équations

$$u' \equiv u$$

$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

ces valeurs sont respectivement

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\delta}, \qquad \text{mod} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{Bmatrix}$$

Nous sommes arrivés à la conclusion que les intégrales U, V de F admettent les périodes simultanées $0 , \frac{1}{\delta}$ par rapport au cycle Θ'; ce cycle compté δ fois donne le couple de périodes $(0 , 1)$ et résulte ainsi homologue à σ'_2.

On voit ainsi, ce que nous avons affirmé, que les périodes

$$(1) \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{Bmatrix}$$

ne sont pas des périodes primitives pour U, V sur F_δ, puisque ces intégrales admettent les périodes

$$(2) \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{Bmatrix}$$

correspondant aux cycles

$$(3) \qquad \sigma'_1 , \quad \Theta' , \quad \sigma'_3 , \quad \sigma'_4 .$$

On peut prouver au contraire que les périodes (2) sont primitives. A cet effet il faut montrer que tout cycle de F_δ est homologue à une combinaison linéaire à coefficients *entiers* des cycles (3).

Observons d'abord qu'un système de chemins analogues aux chemins $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\delta$, peut être défini sur F pour tout groupe G_δ de l'involution I_δ, et que le cycle Θ' correspondant aux nouveaux chemins sur F_δ, est homologue au chemin Θ' obtenu auparavant, parce qu'il donne encore les valeurs $0, \frac{1}{\delta}$ pour les intégrales U, V.

Ajoutons que sur F un chemin allant de P_1 à P_{i-1} $(i = 3, 4 \cdots)$ est homologue à la somme du chemin $\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_i$ et d'un cycle linéaire; par conséquent le chemin fermé qui lui correspond sur F_δ est homologue à la somme de $i\Theta'$ et d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des cycles $\sigma_1', \sigma_2' = \delta\Theta_1', \sigma_3', \sigma_4'$, c'est-à-dire à une combinaison des cycles $\sigma_1', \Theta', \sigma_3', \sigma_4'$.

Comme tout cycle linéaire de F_δ a pour correspondant sur F ou bien un cycle lineaire – qui s'exprime au moyen des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – ou bien un chemin ouvert joignant deux points conjugués – qui s'exprime au moyen de ces mêmes cycles et de chemins $\Theta_1, \cdots, \Theta_\delta$ – on en conclût que tout cycle de F_δ restera homologue à une combinaison à coefficients entiers des cycles

$$\sigma_1', \quad \Theta', \quad \sigma_3', \quad \sigma_4'. \tag{3}$$

b) Il s'agit maintenant de montrer que les coordonnées des points de F_δ sont des fonctions uniformes de U, V, c'est-à-dire que U, V ne peuvent reprendre les mêmes valeurs, par rapport aux périodes (2), en des points différents de la surface.

Revenons à la définition des intégrales U, V: elles s'obtiennent en divisant par δ les sommes des valeurs des intégrales u, v attachées à F, aux points d'un groupe de I_δ. On a donc

$$\begin{aligned} U &\equiv u \\ V &\equiv v + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned} \qquad \text{mod} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{Bmatrix}$$

Soit U_0, V_0 et U_1, V_1 deux couples de valeurs de U, V, congrus par rapport au tableau (2), et désignons par X_0, X_1 les points correspondants de F_δ; il faut prouver que ceux-ci ne sont pas distincts.

Désignons par x_0 un des δ points de F correspondants à X_0, et par x_1 un des points correspondants à X_1. On aura alors

$$\begin{aligned} U_0 &\equiv u(x_0), & U_1 &\equiv u(x_1) \\ V_0 &\equiv v(x_0) + \frac{\delta - 1}{2\delta}, & V_1 &\equiv v(x_1) + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1) \\ v(x_0) &\equiv v(x_1), \end{aligned}$$

les congruences ayant lieu par rapport au tableau (2). Ces relations peuvent donc s'écrire

$$u(x_0) \equiv u(x_1)$$
$$v(x_0) \equiv v(x_1) + \frac{\varepsilon}{\delta} \qquad (\varepsilon \text{ entier} \leq \delta)$$

les nouvelles congruences étant considérées par rapport au tableau (1).

Il s'ensuit que x_0 est amené en x_1 par la transformation

$$u' \equiv u$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

et par conséquent que x_0, x_1 appartiennent à un même groupe de I_δ, ou, enfin, que les points X_0, X_1 ne sont pas distincts.

12. Nous venons de prouver que toute involution cyclique I_δ engendrée sur une surface de Jacobi par une transformation périodique de second espèce, est représentée par une surface de Picard. Il est aisé de montrer que, réciproquement, toutes les surfaces de Picard peuvent être obtenues par cette construction.

C'est là une conséquence immédiate de ces faits: *a*) que par la construction indiquée on obtient des surfaces hyperelliptiques de rang 1 (c'est-à-dire des surfaces de Picard) correspondant à un tableau normal de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}$$

qui peut être assigné à priori (en satisfaisant à l'inégalité classique); *b*) que des surfaces de Picard, correspondant à un même tableau, peuvent être transformées birationnellement l'une dans l'autre.

Ainsi on peut résumer les résultats obtenus on énonçant le théorème suivant:

Que l'on se donne une surface de Jacobi F et une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, de F; l'involution I_δ engendrée sur F par cette transformation, et représentée par une surface F_δ qui est une surface de Picard de diviseur δ.

Réciproquement, toute surface de Picard F_δ de diviseur δ admet comme transformée rationnelle une surface de Jacobi F (δ = 1), de façon qu'à un point de F_δ correspondent sur Fδ points homologues par rapport à une transformation périodique de seconde espèce et à ses puissances.

Remarque. Au lieu de considérer sur F le groupe cyclique engendré par une transformation périodique

$$u' \equiv u$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

on peut considérer le groupe engendré par deux transformations

$$u' \equiv u\,, \qquad u' \equiv u + \frac{1}{\delta}$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta}\,, \qquad v' \equiv v\,.$$

De même que par le premier groupe cyclique on définit sur F une involution I_δ, d'ordre δ, par ce second groupe on définit sur F une involution I_{δ^2}, d'ordre δ^2. Celle–ci vient représentée aussi par une surface de Picard F'. Mais les intégrales de F' admettent les périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \delta g & \delta h \\ 0 & 1 & \delta h & \delta g' \end{matrix}$$

de façon que F' est une nouvelle surface de Jacobi (de diviseur 1) (5).

Il est intéressant de remarquer que la surface de Picard F_δ correspondant à l'involution I_δ, est une transformée rationnelle de la surface de Jacobi F, et qu'il y a entre F', F_δ une correspondance $[1\,,\,\delta]$ sans points de diramation sur F'.

On obtient ainsi une construction des surfaces de Picard, en quelque sorte réciproque à celle que nous avons développée au n. 11: *Toute surface de Picard F_δ de diviseur δ, est une transformée rationnelle d'une surface de Jacobi F, qui correspond à une involution d'ordre δ sur F_δ; ainsi F_δ vien représentée sur une surface de Jacobi comptée δ fois sans points de diramation.*

13. *Les surfaces de Picard considérées comme des surfaces qui admettent un groupe de transformations en elles–mêmes.*

D'après notre construction des surfaces de Picard F_δ (n. 11) les propriétés des involutions I_δ appartenant à une surface de Jacobi (propriétés que nous avons indiquées par a), b) au n. 10) se traduisent en les propriétés suivantes.

Toute surface F_δ hyperelliptique de rang 1, admet deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elles–mêmes, qui seront désignées comme des transformations de première et de second espèce. Les transformations

(5) Il est essentiel de remarquer que, d'après les nn. 2, 3, le diviseur Δ et le rang r de F résultent en effet $\Delta = 1\,, r = 1$, et cela parce qu'en ces définitions on se rapporte toujours à des périodes primitives. Il n'en serait pas ainsi si l'on se rapportait aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

car on aurait alors

$$r = \delta^2.$$

Mais ces périodes ne sont pas primitives puisque les intégrales correspondantes admettent les périodes simultanées $\left(\frac{1}{\delta}\,0\right)\left(0\,\frac{1}{\delta}\right)$.

de première espèce sont périodiques d'ordre 2; celles de seconde forment un groupe continu de transformations permutables.

D'ailleurs, étant donnée la représentation paramétrique de F_δ par les intégrales U, V, les transformations de première et de seconde espèce de F_δ en elle–même, résultent définies par les formules

$$U' + U \equiv \text{const.}$$
$$V' + V \equiv \text{const.}$$

et respectivement

$$U' - U \equiv \text{const.}$$
$$V' - V \equiv \text{const.}$$

de même que dans le cas de la surface de Jacobi (n. 8).

Or M. Picard a établi le théorème suivant:

Toute surface algébrique qui admet un groupe continu permutable ∞^2 *de transformations birationnelles en elle–même, opérant sur les points de la surface d'une manière transitive, est une surface hyperelliptique de rang* 1 *ou une dégénérescence* (surfaces rationnelles ou réglées elliptiques).

C'est même à cause de ce théorème qu'on a donné aux surfaces en question le nom de *surfaces de Picard.*

L'énoncé qui précède ne diffère de celui de M. Picard que par l'introduction du mot « rang », d'après la definition du n. 3.

14. *Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang* 1. *Théorème de M. Picard.*

Les surfaces de Picard F_δ jouissent des propriétés suivantes:

a) Il y a *deux* intégrales simples de première espèce attachées à F_δ; nous les avons désignées par U, V.

b) Il y a *une* intégrale double de première espèce

$$\iint dU\, dV,$$

c'est–à–dire que le genre de F_δ est

$$p_g = 1.$$

En désignant par m l'ordre de F_δ il y aura donc une surface adjointe φ_{m-4} d'ordre $m - 4$.

c) La surface φ_{m-4} adjointe à F_δ coupe celle–ci, hors de la courbe double, suivant des *courbes exceptionnelles*, qui peuvent manquer, et que l'on peut toujours faire disparaître par une transformation de la surface.

Outre que par le raisonnement analytique de M. Picard, la propriété c) peut être justifiée géométriquement de la façon suivante. On remarquera

d'abord qu'elle subsiste pour la surface de Jacobi F ($\delta = 1$): en effet en se rapportant au modèle défini au n. 5, l'adjointe φ_{m-4} coupera F suivant la ligne exceptionnelle qui correspond à la g_2^1 de la courbe de genre deux, dont F représente les couples. Mais, d'après la construction du n. 11, la même propriété subsistera pour toute F_δ, quel que soit δ; en effet à une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe, répondrait une courbe analogue sur la surface de Jacobi, qui est une transformée rationnelle de F_δ (6).

Or c'est une circostance de la plus haute importante que les propriétés a), b), c) des surfaces F_δ suffisent à caractériser la famille de ces surfaces. On a en effet *le théorème de M. Picard* que nous énoncerons sous la forme suivante:

Toute surface d'ordre m et de genre $p_g = 1$, qui possede deux intégrales simples de première espèce et qui n'est pas découpée par son adjointe d'ordre $m - 4$ en déhors des courbes exceptionnelles, est une surface hyperelliptique de rang 1.

M. Picard a établi ce théorème en 1885; il est revenu sur le même sujet en 1889 et enfin en 1906 dans le « Traité » écrit en collaboration avec M. Simart (7).

La dernière démonstration du théorème est particulièrement simple et il suffira de la rappeler ici dans ses grandes lignes; on aura ainsi l'occasion de mettre en lumière explicitement comment les surfaces hyperelliptiques définies par les propriétés a), b), c) peuvent avoir un diviseur $\delta \geq 1$.

En supposant que la surface donnée possède deux intégrales simples de premierè espèce U, V, celles–ci auront 4 couples de périodes. Effectuons sur ces périodes une substitution linéaire convenable à coefficients entiers, substitution dont le déterminant δ sera ≥ 1, et ajoutons une transformation linéaire sur les intégrales, de façon à ramener les périodes de U, V au tableau

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}.$$

Ce tableau correspond à une surface de Jacobi F, que l'on peut supposer dépourvue de courbes exceptionnelles; et il est aisé de reconnaître que la surface donnée F_δ est une transformée rationnelle de F. F_δ se trouve représentée ainsi sur la *surface F comptée δ fois, sans points de diramation.*

Il en résulte (Remarque au n. 12) que F_δ est une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

Il est à remarquer que la condition c) que nous avons énoncée parmi les proprietés caractéristiques de F_δ, joue un rôle essentiel; si on la laisse tomber, F_δ sera encore représentée sur la surface de Jacobi F comptée δ

(6) Voir la note (16).

(7) Voir ce Traité, t. II, pp. 453–456.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE · PISA · BIBLIOTECA

fois, mais on trouvera sur F une courbe de diramation (qui résultera elliptique) à laquelle correspondra une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe d'ordre $m - 4$.

En ce cas F_δ ne serait pas une surface hyperelliptique. Mais on peut démontrer qu'elle serait une surface elliptique, c'est–à–dire une surface doueé d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations en elle–même (Enriques).

15. *Rappel de notions appartenant à la théorie des surfaces algébriques.*

Pour achever le tableau des propriétés de surfaces de Picard, il nous conviendra de rappeler quelques notions empruntées à la théorie géométrique des surfaces algébriques (8).

D'abord on définit pour toute surface les invariants désignés respectivement par p_a, p_g, P_i $(i = 2, 3 \cdots)$. p_a désigne le *genre numérique*: p_g le *genre géométrique*; P_i le *genre d'ordre* i $(P_1 = p_g)$ c'est–à–dire le nombre des courbes i fois canoniques linéairement indépendantes de la surface.

On a ensuite à considérer le *genre lineaire* (virtuel) $p^{(1)}$, c'est–à–dire une certaine expression arithmétique du genre des courbes canoniques; cette expression sera rapportée à la surface elle–même si celle–ci ne renferme pas des courbes exceptionnelles; dans le cas contraire elle sera rapportée à une surface transformée dépourvue de courbes exceptionnelles; d'après MM. Castelnuovo et Enriques cette transformée existe toujours, si la surface donnée n'appartient pas à la famille des réglées.

L'ordre de la courbe canonique d'une surface n'est pas un invariant de celle–ci; mais si, étant $p_g = 1$, cet ordre est égal à zéro (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles), cette propriété est invariant par rapport aux transformations birationnelles.

En ce cas la surface jouit de propriétés remarquables.

Rapportons–nous à une surface de la classe qui soit dépourvue de courbes exceptionnelles; soit m l'ordre de la surface et π le genre des sections planes; on a toujours

$$m = 2\pi - 2.$$

Sous une forme plus générale: Si l'on a sur cette surface un système linéaire $|C|$ de courbes C de genre π, celles–ci se coupent deux à deux en

$$m = 2\pi - 2$$

points (c'est–a–dire que m est le *degré* du système).

Mais on en a davantage: le groupe de m points communs à deux courbes C est un *groupe canonique* sur chacune de ces courbes.

(8) Voir les travaux de M. NÖTHER et de M. ENRIQUES, ou la note expositive de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES qui se trouve à la fin de E. PICARD – G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, Gauthier–Villars, Paris (1900).

C'est ce qu'on exprime en disant que la *série caractéristique* g_m découpée sur une courbe C par les autres courbes du système, est la *série canonique* de C, ou une partie de celle-ci. Si le système $|C|$ appartient à un système continu non linéaire, les courbes infinitement prochaines à C, contenues dans le système, coupent sur C des groupes de la même série caractéristique; c'est de cette façon que M. Severi définit la série caractéristique sur C, même dans le cas où le système linéaire $|C|$ ait la dimension égal à zéro.

Une surface de genre $p_g = 1$, dont la courbe canonique a l'ordre zéro, a le genre linéaire $p^{(1)} = 1$; elle ne renferme pas des courbes i fois canoniques, quel que soit i, de sorte que

$$P_i = 1. \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

Cette dernière propriété sert à definir la famille des surfaces de genre $p_g = 1$ dont la courbe canonique a l'ordre 0; en effet on a le théorème suivant [9]:

Toute surface dont les genres d'ordre 1 et 4 sont égaux à l'unité

$$(p_g = P_4 = 1)$$

a une courbe canonique d'ordre 0; *le genre numérique de la surface est*

$$p_a = 1 \quad ou \quad p_a = -1.$$

16. *Les surfaces de Picard caractérisées par leurs nombres invariants.*

D'après les notions que nous venons de rapporter, on peut transformer le théorème de M. Picard (n. 14) de la façon suivante:

Rappelons d'abord que le nombre des intégrales de première espèce attachées à une surface, est $p_g - p_a$; c'est là un résultat connu auquel ont amené récemment les recherches établies par M. Picard d'un côté, par MM. Severi, Enriques et Castelnuovo de l'autre coté.

Alors les conditions a), b), c) du n. 14 se traduiront par les égalités

$$p_g = 1, \qquad p_g - p_a = 2, \qquad P_4 = 1.$$

On aura donc le théorème suivant (qui a été donné par M. Enriques dans le Mémoire cité du Circolo di Palermo):

Les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1 sont exprimées par les égalités

$$p_a = -1, \qquad p_g = P_4 = 1.$$

(9) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sé stesse*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 61-72. F. ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, Rendiconti dell'Accademia di Bologna, (1906).

17. *Courbes appartenant à une surface de Picard: courbes rationnelles.*

On a la proposition suivante:

Une surface de Picard ne saurait renfermer une courbe rationnelle qui ne soit pas exceptionnelle.

Soit

$$F_\delta(x, y, z) = 0$$

une surface de Picard d'ordre m.

Il y a deux intégrales simples de première espèce u, v et l'on a

$$du = \frac{B dx - A dy}{F_z'}, \qquad dv = \frac{B_1 dx - A_1 dy}{F_z'};$$

A, B, A_1, B_1 désignent ici des polynomes liés par l'identité de M. Nöther

$$AB_1 - A_1 B = F_z' \cdot Q(x, y, z),$$

Q étant le polynome d'ordre $m - 4$ adjoint à F_δ.

Or si F_δ renferme une courbe rationnelle E, on a sur E

$$B\,dx - A\,dy = 0;$$

$$B_1 dx - A_1 dy = 0,$$

et par conséquent

$$AB_1 - A_1 B = 0.$$

Mais comme on peut supposer que E n'ait aucune relation particulière avec les axes coordonnés, on en déduit

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Or, en général, Q coupe F suivant une courbe composée de courbes exceptionnelles et de la courbe canonique, qui, en ce cas est d'ordre zéro. D'après la relatior précédente on en déduit que E est une courbe exceptionnelle de F_δ, ce qu'il fallait démontrer.

Convention. — Dans la suite en raisonnant de courbes appartenant à une surface F_δ *nous nous rapporterons toujours à des surfaces dépourvues de courbes exceptionnelles* (*n.* 15)*; ces surfaces ne renfermeront donc pas des courbes rationnelles.*

18. *Courbes elliptiques.*

La surface de Picard F_δ peut renfermer une courbe elliptique C; en ce cas C appartient à un faisceau elliptique de courbes analogues, et il y a sur F_δ un second faisceau elliptique de courbes elliptiques.

Supposons que F_δ renferme une courbe elliptique C; si celle-ci appartient à une série continue, le degré de la série sera égal à zéro ($m = 2\pi - 2$); en conséquence C ne saurait appartenir à une série qui ne soit pas un faisceau.

Transformons C par les ∞^2 transformations de seconde espèce de F_δ (n. 13); comme C ne peut admettre que ∞^1 transformations birationnelles en elle-même, on aura ∞^1 courbes transformées de C, qui formeront un faisceau.

Il y aura *une* intégrale simple de première espèce attachée à F_δ, c'est-à-dire une combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ des deux intégrales u, v, qui demeure constante le long des courbes du faisceau; on en déduit que le faisceau est elliptique.

L'intégrale $\lambda u + \mu v$ aura deux périodes distinctes; d'après MM. Picard et Poincaré, à côté de cette intégrale réductible, il y en aura une autre associée, à laquelle correspond un second faisceau elliptique de courbes elliptiques de niveau.

Les deux faisceaux que nous venons de considérer, sont formés par les trajectoires de deux sous-groupes algébriques ∞^1 renfermés dans le groupe des transformations de seconde espèce de F_δ.

Remarque. On voit que la surface de Picard correspondant à des modules généraux, ne renferme pas des courbes elliptiques.

Parmi les surfaces de Jacobi renfermant des courbes elliptiques, il y a la *surface particulière* dont les points correspondent aux couples de points choisis sur deux courbes de genre un. Cette surface vient caractérisée par la propriété de renfermer *deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques se coupant en un seul point.*

19. *Si une surface de Picard renferme un faisceau irrationnel de courbes, le faisceau est elliptique et les courbes sont de même elliptiques.*

On établit aisément que le faisceau est elliptique, en remarquant qu'il ne peut y avoir qu'*une* intégrale qui demeure constante le long de ses courbes.

On reconnait que ces courbes C sont de genre $\pi = 1$ d'après le n. 15, puisque le faisceau étant irrationnel ne peut avoir des points base (Castelnuovo-Enriques), et par conséquent deux courbes C se coupent en $m = 2\pi - 2 = 0$ points.

20. *Courbes de genre deux.*

Nous avons remarqué qu'une surface de Picard F_δ ne renferme pas en général des courbes elliptiques. Au contraire on construit sur F_δ des courbes de genre deux par le procédé suivant:

Considérons sur F_δ un système linéaire complet de courbes K de genre π; ce système $|K|$, qui est l'adjoint de lui-même, aura la dimension $\pi - 2$ (théorème de Riemann-Roch pour la surface F_δ); ainsi en imposant aux courbes K de posséder $h = \pi - 2$ points doubles, on obtiendra un nombre fini de courbes de genre deux, renfermées dans le système $|K|$.

Or toute courbe C de genre deux, appartenant à F_δ et douée de h points doubles, est amenée par les ∞^2 transformations de seconde espèce, en ∞^2 courbes birationnellement identiques; nous allons prouver que ces courbes forment un

système, que nous désignerons par Σ_{h+1}, *dont les éléments correspondent d'une façon biunivoque aux points de la surface* F_δ.

Comme les points de F_δ correspondent biunivoquement aux transformations du groupe continu qui appartient à la surface (voir le n. 8), il suffira de prouver qu'il y a une seule transformation de seconde espèce amenant une courbe C en autre courbe du système Σ_{h+1}; cela revient à dire que: *toute transformation de seconde espèce de* F_δ *qui laisse invariant la courbe* C, *se réduit à l'identité.*

Soit en effet

$$(\tau)\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

une transformation de seconde espèce de F_δ qui ramène en elle-même la courbe C. Il s'agit de prouver que

$$\lambda = \mu = 0 .$$

Considérons sur C la série canonique g_2^1 et désignons par h , k les sommes des valeurs des intégrales u , v aux points d'un couple de cette série; les points conjugués par rapport à la g_2^1 seront conjugués par rapport à la transformation de première espèce:

$$(\omega)\begin{cases} u + u' = h \\ v + v' = k . \end{cases}$$

En multipliant les deux transformations on obtient une transformation de première espèce:

$$(\tau\omega)\begin{cases} u + u' = \lambda + h \\ v + v' = \mu + k . \end{cases}$$

Or, d'après le théorème d'Abel, si λ , μ étaient différents de zéro, les points de C conjugués par rapport à $(\tau\omega)$ résulteraient conjugués en une nouvelle g_2^1, qui devrait ainsi exister sur C. Mais comme C renferme une seule série linéaire de seconde ordre, qui est la g_2^1 canonique, on en conclut que

$$\lambda = \mu = 0 .$$

Remarque. Nous venons de prouver que toute courbe de genre deux sur F_δ, appartient à un système qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de seconde espèce, système birationnellement identique à la surface F_δ.

Il est aisé de reconnaître que ce système est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de premierè espèce. Il suffit à cet effet de rappeler ce que nous avons déjà remarqué, que, étant donnée une courbe de genre deux, C, il y a une transformation de première espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, et par rapport à laquelle sont conjugués les couples de points de la g_2^1 de C.

21. *Systèmes Σ appartenant à une surface de Jacobi.*

D'après la construction du n. 5, une surface de Jacobi F, dont les points correspondent aux couples d'une courbe f de genre deux, irréductible, renferme toujours des courbes de genre deux irréductibles qui n'ont pas des points doubles (hors de la courbe double de F).

En effet on obtient sur F une telle courbe, en considérant les ∞^1 couples qui ont un point fixe sur f.

Soit C une courbe de genre deux irréductible et dépourvue de points doubles, tracée sur F. Il y a un système $\infty^2 \Sigma (= \Sigma_1)$ de courbes analogues, auquel C appartient (n. 20); les courbes C se coupent deux à deux en 2 points, (2 est le *degré* de Σ), et la série caractéristique, découpée sur une C par les courbes infiniment prochaines du même système, est la g_2^1 canonique de C (n. 15). Comme cette série est complète, il s'ensuit que le système Σ n'est pas renfermé en un système continu plus ample de courbes du même ordre.

Il est aisé d'évaluer le nombre des courbes C de Σ qui passent par deux points de F; ce nombre, qu'on appelle l'*indice* de Σ, est égal à 2.

En effet la surface F ne saurait pas renfermer un système de degré 2 et d'indice > 2, sans être rationnelle.

C'est là une conséquence d'un théorème bien connu de MM. Humbert et Castelnuovo, que M. Castelnuovo a mis explicitement en lumière (10).

En résumant les résultats obtenus, on aura le théorème suivant:

Toute surface de Jacobi, correspondant à une courbe de genre deux irréductible, renferme un système $\infty^2 \Sigma$ de courbes de genre deux irréductibles sans points doubles; ce système, qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de première et de seconde espéce, a la degré 2 et l'indice 2.

Fait exception la surface de Jacobi particulière renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en un point; c'est la surface correspondant au cas où la courbe de genre deux se décompose en deux courbes elliptiques (n. 5).

Remarque. Nous avons vu que, en considérant la surface de Jacobi F qui correspond point par couple à une courbe f de genre deux, on obtient sur F une courbe de genre deux représentant les couples de f qui renferment un même point. On construit de cette façon ∞^1 courbes de genre deux qui ont un point fixe; eh bien, cette série ∞^1 de courbes sera contenue en une série complète ∞^2 qui constituera sur F un système Σ de degré et d'indice 2.

Ainsi que nous le verrons dans la suite, le système Σ obtenu sur F, est le seul système de degré et d'indice 2 appartenant à F, lorsque f a des modules généraux. Pour des modules particuliers il peut y avoir sur F plusieurs systèmes Σ doués des mêmes caractères.

(10) Atti della R. Acc. di Torino, 1893.

22. Il y a lieu maintenant de montrer que:

L'existence d'un système $\infty^2 \Sigma$ *de courbes de genre deux, ayant aussi le degré et l'indice égaux à deux, est une propriété caractéristique de la surface de Jacobi.*

En effet si une surface F renferme un tel système Σ de courbes C, il est aisé de construire une courbe de genre deux qui correspond couple par point à F.

Considérons les courbes C passant par un point fixe P de F, et choisissons en particulier une de ces courbes C. Toute C par P coupe C en un point hors de P, et par tout point de C passe une courbe C qui contient aussi P.

Or par un point quelconque de F il passent deux courbes C renfermant P, qui coupent C, hors de P, en deux points; réciproquement étant donnés deux points sur C, ceux–ci détermineront avec P deux courbes C se coupant en un point de F.

De cette façon les points de F viennent correspondre aux couples de points de la courbe C, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Il a été implicitement reconnu, en effectuant la construction précédente, que toute courbe C de Σ est birationnellement identique à la série Γ des C, qui passent par un point P de F.

La correspondance point par couple entre F et Γ est établie de la façon suivante: deux courbes C de Γ se coupent hors de P en *un* point X; réciproquement tout point X appartient à deux courbes C de Γ.

On sait que la variété Γ, de genre deux, renferme une série canonique g_2^1; eh bien, les C de Γ qui forment un couple de cette g_2^1 sont les courbes C *qui ont un contact en* P.

Ainsi la variété Γ vient représentée sur le continuum rationnel constitué par les points infiniment prochains à P à compter deux fois; et il y a 6 *points de diramation*, c'est–à–dire que, parmi les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P, il y en a 6 qui sont constitués par des courbes coïncidantes.

23. *Remarque concernant une certaine dualité.*

D'après une propriété générale établie au n. 20, un système Σ constitué par ∞^2 courbes de genre deux sur une surface F_δ est birationnellement identique à cette surface; cela signifie que si l'on représente les éléments (courbes) de Σ par une surface F', on pourra passer de F à F' par une transformation birationnelle.

Nous allons étudier de plus près la correspondance remarquable entre points et courbes que l'on obtient ainsi, lorsque, F étant une surface de Jacobi, on considère le système Σ de degré et d'indice 2, que nous venons de définir.

On a par construction qu'à tout point de F' correspond sur F *une* courbe C de Σ et réciproquement. Mais si l'on considère les ∞^1 courbes C issues par un point P de F, on aura qu'à ces courbes répondent des points décrivant sur F' une courbe C' que l'on regardera comme homologue au point P.

Or les ∞^2 courbes définies ainsi sur F', formeront un certain système Σ', et l'on voit de suite que le degré de Σ' est l'indice de Σ et l'indice de Σ' est le degré de Σ; par conséquent ces nombres sont égaux à 2. Il s'ensuit (n. 15) que le genre des courbes C' est aussi égal à 2; c'est ce qu'on peut reconnaître aisément d'un façon directe, parce que la série des courbes C issues par un point P de F, est birationnellement identique à une courbe quelconque C de la même série. (Remarque au n. 22).

Le système Σ' de F' étant parfaitement analogue au système Σ de F, ces remarques nous amènent à établir une sorte de *principe de dualité* liant les propriétés des surfaces F, F', ou si l'on aime mieux, liant les propriétés de la surface F et de la variété Σ.

Cette dualité consiste en ce qu'à toute propriété de F répond une propriété correlative où l'on remplace les points par les courbes d'un système Σ de degré et d'indice 2, et réciproquement.

24. *Autres remarques concernant les courbes de genre deux sur une surface de Jacobi.*

Nous avons remarqué qu'une surface de Jacobi F renferme un système ∞^2 Σ de courbes C de genre deux, sans points doubles. Hors de Σ il y a aura d'autres courbes K de genre deux; nous allons montrer que K doit couper les courbes C de Σ en plus que deux points. C'est dire qu'on a le théorème suivant:

Toute courbe K de genre deux coupant les courbes C d'un système Σ en deux points, appartient à ces système.

Pour le démontrer remarquons d'abord que K ne saurait toucher toutes les ∞^2 courbes C, car il s'ensuivrait que les ∞^1 C issues par un point de K n'auraient pas des intersections variables.

Ceci posé, considérons une série ∞^1 Γ de C passant par un point P de K et ne touchant pas K.

Si K n'appartient pas à la série Γ, pour tout point M variable sur K il y a *deux* C de la serie Σ; réciproquement toute courbe C de Γ coupe K en *un* point variable. Ainsi on obtient une correspondance [1 , 2] entre la courbe K et la série algébrique ∞^1 Γ. Mais la série Γ a le genre deux (puisqu'elle correspond élément par élément à une courbe C de Γ); ainsi la conclusion obtenue vient contredire un théorème connu de Weber, d'après lequel, étant données deux variétés algébriques ∞^1 de genre deux (ou de genre supérieur à deux) toute transformation entre elles qui soit rationnelle dans un sens, est rationnelle aussi dans le sens inverse.

Cette contradiction prouve que la courbe K appartient à la série Γ des courbes C, c'est-à-dire qu'elle est une courbe C; ce qu'il fallait démontrer.

25. *Système Σ_δ appartenant à une surface de Picard F_δ.*

Considérons maintenant une surface F_δ (de diviseur $\delta > 1$) comme représentant une involution cyclique I_δ, qui appartient à une surface de Jacobi F (n. 11).

Il y a sur F un système $\infty^2 \Sigma$ constitué par des courbes C de genre deux sans points doubles; cherchons les caractères de courbes qui correspondent aux C sur F_δ. D'abord ce seront des courbes de genre deux; mais il est aisé de reconnaître qu'elles aurons $\delta - 1$ points doubles.

En effet à une C sont conjuguées, par rapport à I_δ, $\delta - 1$ courbes du même système Σ, qui coupent la C donnée en $\delta - 1$ couples; à chacune de celles–ci correspond un point double de la courbe homologue à C sur F_δ, courbe que nous désignerons par C_δ.

Or les ∞^2 courbes C_δ que l'on construit analoguement sur F_δ, formeront un système Σ_δ qui (d'après un théorème de M. Enriques) sera renfermé, en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes du même ordre et de genre $\delta + 1$, système constitué par ∞^2 systèmes linéaires dont le degré sera égal à 2δ (n. 15).

Evaluons les caractères du système Σ_δ.

D'abord son degré, c'est–à–dire le nombre des points communs à deux courbes C_δ, sera égal à 2δ.

L'indice de Σ_δ est aussi 2δ. En effet considérons deux points A, B de F_δ; à ceux–ci correspondent sur F deux groupes de points $A_1, A_2, \cdots \cdots, A_\delta, B_1, B_2, \cdots, B_\delta$ et il y a $2\delta^2$ courbes C renfermant un point A_s $(s = 1, 2, \cdots)$ et un point B_t $(t = 1, 2, \cdots)$; mais ces $2\delta^2$ courbes C se partagent en 2δ groupes, chaque groupe étant constitué par δC conjuguées par rapport à l'involution I_δ; il s'ensuit qu'il y a sur F_δ 2δ courbes C_δ passant par A et B.

En résumant, *toute surface de Picard, de diviseur* δ, *renferme un système* $\infty^2 \Sigma_\delta$ *de courbes de genre deux irréductibles douées de* $\delta - 1$ *points doubles, système dont le degré et l'indice sont égaux à* 2δ.

Fait exception le cas des surfaces F_δ *renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en* δ *points*; en ce cas F_δ représente une involution I_δ sur une surface de Jacobi particulière (admettant deux faisceaux de courbes elliptiques unisécantes) de sorte que *les courbes du système* Σ_δ *dégénèrent* en des couples de courbes elliptiques choisies dans les deux faisceaux.

Remarque. Néanmoins même en ce cas, le système $\infty^{\delta+1}$ de courbes de genre $\delta + 1$ qui renferme Σ_δ, est composé par des courbes généralement irréductibles.

26. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Jacobi de modules généraux.*

Nous avons reconnu que toute surface de Jacobi générale F, renferme un système continu ∞^2 de courbes de genre deux sans points doubles; ce système que nous avons appelé Σ, a le degré et l'indice égaux à 2.

Or les groupes de n (> 1) courbes C de Σ seront renfermés en un système continu ∞^{n^2+2} de courbes irréductibles, système qu'on pourra désigner par $[nC]$ et que l'on appellera multiple de $\Sigma \equiv [C]$ suivant le nombre n.

Le système $[nC]$ sera aussi transformé en lui–même par les transformations de première et de seconde espèce de la surface; il sera constitué de

∞^2 systèmes linéaires $|nC|$ de genre $n^2 + 1$, de degré $2n^2$ et de dimension $n^2 - 1$.

Remarque. Il est intéressant pour la suite de montrer que: *tout système $|nC|$ est invariant vis-à-vis des transformations cycliques de seconde espèce, d'ordre n, de la surface F.*

C'est ce qu'on prouve de la manière suivante: soit π une transformation de seconde espèce, périodique d'ordre n; toute courbe C de Σ est amenée par π, en $n - 1$ courbes homologues, qui avec la première forment un certain groupe nC; on obtient ainsi ∞^2 groupes, invariant vis-à-vis de π, et dont deux quelconque n'appartiennent pas au même système linéaire; ces groupes définissent donc les ∞^2 systèmes linéaires complets $|nC|$ de la série $[nC]$, et l'on voit ainsi que tous ces systèmes $|nC|$ sont invariant par rapport à π.

c.q.f.d.

Sans nous arrêter davantage sur cette remarque, rappelons que l'on a le théorème suivant:

Les modules de la surface F ayant des valeurs générales, toute courbe appartenant à F est renfermée en un système $[nC]$ de courbes du même ordre.

C'est là une conséquence immédiate d'un théorème etabli par M. Severi (11). Ainsi que nous l'expliquerons tout à l'heure cette propriété correspond aussi à un fait connu de la théorie des fonctions abéliennes.

Il en découle en particulier que *la surface de Jacobi ne renferme en général qu'un seul système de courbes de genre deux sans points doubles.*

27. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Picard de modules généraux.*

Nous nous proposons d'étendre le théorème rappelé ci-dessus aux surfaces F_δ de diviseur $\delta > 1$.

Nous savons que F_δ renferme ∞^2 courbes C_δ de genre deux, qui sont contenues dans un système continu $\infty^{\delta+1}$ $[C_\delta]$ de genre $\delta + 1$ et de degré 2δ, constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Nous voulons établir le théorème suivant:

Toute courbe appartenant à une surface F_δ de modules généraux, est renfermée en un système $[nC_\delta]$ de courbes du même ordre, c'est-à-dire en un système multiple de $[C_\delta]$ suivant un certain nombre n choisi d'une façon convenable.

Nous considérerons F_δ comme représentant une involution cyclique I_δ sur une surface de Jacobi F de modules généraux (n. 11). Les C_δ de F_δ correspondent aux courbes C engendrant le système Σ de F.

Soit K une courbe quelconque de F_δ et $|K|$ le système linéaire complet auquel elle appartient.

(11) F. Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903), 49 p., n. 23, [Memoria XV, vol. I, p. 173; N.d.R.].

A $|K|$ correspond sur F un système linéaire $|K'|$, qui sera contenu totalement dans le système continu $[sC]$, pour une certaine valeur de s; cette valeur a la signification suivante: *le degré de* $|K|$ *est*

$$\frac{2s^2}{\delta}$$

Il faut remarquer que $|K'|$ ne sera pas un système linéaire complet; en effet les courbes K' satisfont à la condition d'être transformées en elles–mêmes par la transformation cyclique de seconde espèce π, qui engendre l'involution I_δ; en laissant tomber cette condition on trouvera un système linéaire plus ample $|sC|$ renfermant $|K'|$. La seule chose qu'on peut affirmer, c'est que $|K'|$ est un système linéaire *complet par rapport à l'involution* I_δ, c'est–à–dire qu'il n'y a pas en $|sC|$ un système lineaire plus ample de $|K'|$ qui soit transformé en lui–même par π et renferme $|K'|$.

Ceci posé, considérons une transformation périodique de seconde espèce, ω, d'ordre s, engendrant une involution cyclique; on peut supposer que ω soit choisie de telle façon qu'il n'y ait pas des puissances communes à π, ω.

Or nous savons que ω transforme en lui–même notre système linéaire complet $|sC|$ ainsi que tout autre système de la série ∞^2 constituant $[sC]$, (n. 26); en outre ω transforme en elle–même l'involution I_δ; par conséquent ω transformera en lui–même le système linéaire $|K'|$ qui, étant renfermé en $|sC|$ est complet par rapport à I_δ.

Passons à la surface F_δ. La transformation ω de F étant permutable avec π, donne lieu à une transformation de seconde espèce $\overline{\omega}$ périodique d'ordre s, sur F_δ; le système linéaire $|K|$ vient transformé en lui–même par $\overline{\omega}$.

On en déduit qu'il y a en $|K|$ des courbes unies par rapport à $\overline{\omega}$, se partageant en un certain nombre de systèmes linéaires; nous considérerons un de ces systèmes $|\overline{K}|$, de dimension ≥ 0.

Soit I_s l'involution cyclique d'ordre s engendrée par $\overline{\omega}$ sur F_δ et soit F_h la surface hyperelliptique (ayant un certain diviseur h) qui représente I_s.

Au système $|\overline{K}|$ de F_δ correspond sur F_h un système linéaire de courbes dont le degré s'obtient de celui de $|\overline{K}|$ en le divisant par s; le degré du système obtenu sur F est donc

$$\frac{2s}{\delta}.$$

Or ce degré doit être un nombre entier pair (voir n. 15), par conséquent s *est divisible par* δ.

En posant

$$s = n\delta$$

on aura donc sur F, que $|K'|$ appartient à $[n\delta C]$, et sur F_δ que $|K|$ appartient totalement à $|nC_\delta|$. c.q.f.d.

28. *Rapprochement entre les résultats qui précèdent et la théorie des séries* Θ. *Représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi.*

Il y a lieu de rapprocher les résultats que nous venons d'établir, à quelques théorèmes connus de la théorie des fonctions abéliennes.

Nous commençons à rappeler les notions suivantes sur les *séries* Θ et sur les *fonctions intermédiaires*.

Soit un système de périodes normales

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases}$$

satisfaisant à l'inégalité classique $g_1 g_1' > h_1^2$, g_1, h_1, g_1', étant les parties imaginaires des périodes g, h, g'.

On suppose ordinairement que g_1, et par conséquent g_1', soient positifs, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément.

Une *fonction thêta* relative au tableau (1), est définie par les conditions fonctionnelles

$$(2) \qquad \begin{cases} \Theta(u+1, v) = \Theta(u, v+1) = \Theta(u, v) \\ \Theta(u+g, v+h) = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l u + \nu} \\ \Theta(u+h, v+g') = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l v + \nu'} \end{cases}$$

(l entier; ν, ν' constantes données).

Les conditions d'existence d'une telle fonction reviennent aux conditions de convergence de la série qu'on obtient en développant Θ par la formule de Fourier. On trouve ainsi qu'il doit être $g_1 g_1' > h_1^2$ et que le nombre entier l doit avoir le signe de g_1, c'est-à-dire, dans notre hypothèse, que $l > 0$.

Le nombre l est *l'ordre* de la fonction Θ.

Les exponentielles

$$e^{-2\pi i l u + \nu}, \qquad e^{-2\pi i l v + \nu'}$$

sont les *multiplicateurs* de Θ.

On trouve aisément que les fonctions Θ aux mêmes multiplicateurs (c'est-à-dire rélatives aux mêmes valeurs des constantes ν, ν'), peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants, de l^2 d'entre elles.

On a aussi, d'après un théorème bien connu de M. Poincaré que deux fonctions Θ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs, incongrus par rapport aux périodes.

Les fonctions Θ peuvent être généralisées en introduisant des fonctions que (d'après une dénomination de Briot et Bouquet) MM. Poincaré et Humbert ont appelées *fonctions intermédiaires*.

Il s'agit des fonctions se reproduisant par l'addition d'une des périodes 1 , 0; 0 , 1; g , h; h , g', à un *multiplicateur* près, qui est une exponentielle de première degré $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$ (12).

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle de seconde degré $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, on peut disposer des constantes a , b , $\cdots$ de façon que la nouvelle fonction $\varphi(u , v)$ vérifie les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(u+1 , v) = \varphi(u , v) , \qquad \varphi(u , v+1) = \varphi(u , v)\, e^{\theta u} \\ \varphi(u+g , v+h) = \varphi(u , v)\, e^{\lambda u+\mu v+\nu} \\ \varphi(u+h , v+g') = \varphi(u , v)\, e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'} \end{cases}$$

les θ , λ , μ , ν , λ', μ', ν' étant des constantes.

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'il existe entre g , h , g' une relation de la forme

$$(4)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 ,$$

les A, B, C, D, E étant des entiers – premiers entre eux – dépendant des constantes θ , λ , μ , λ', μ'.

Les relations de la forme (4) entre les périodes g , h , g', ont été l'objets de recherches remarquables de M. Humbert et dans la suite nous aurons à les considérer par rapport aux transformations birationnelles d'une surface de Jacobi en elle–même.

Nous distinguerons ces relations d'autres relations singulières (à coefficients entiers) qu'on peut avoir entre les périodes, en les appelant *relations de Humbert.*

En exprimant les constantes θ , λ , μ , λ', μ', en fonction des entiers A, B, C, D, E on a les conditions

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi(u+1 , v) = \varphi(u , v) , \qquad \varphi(u , v+1) = \varphi(u , v)\, e^{-2\pi i D k u} \\ \varphi(u+g , v+h) = \varphi(u , v)\, e^{-2\pi i [lu-(C-Dg)kv]+\nu} \\ \varphi(u+h , v+g') = \varphi(u , v)\, e^{2\pi i [Aku+(l+Bk+Dkh)v]+\nu'} \end{cases}$$

où l , k sont deux entiers que M. Humbert appelle les *indices* de la fonction φ.

Lorsque $k = 0$, on tombe sur les fonctions Θ d'ordre l.

Si les périodes g , h , g' sont arbitraires, de sorte que la relation (4) soit une identité ($A = B = C = D = E = 0$), la φ se réduit de même à une fonction Θ d'ordre l, c'est–à–dire que *les fonctions intermédiaires n'existent que pour des valeurs particulières des périodes.*

(12) Voir surtout: H. POINCARÉ, American Journal, 7, p. 316; H. POINCARÉ, *Sur les fonctions abeliennes*, Acta Mathematica, 26 (1902), pp. 43–98, a p. 81. G. HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Premier Mémoire), Journal de Mathématiques, (5) 5 (1899), pp. 233–350; *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Deuxième Mémoire), Journal de Mathématiques, (5) 6 (1900), pp. 279–386; etc.

Les conditions d'existence des fonctions intermédiaires correspondant à une relation de Humbert, le nombre des fonctions linéairement indépendantes qu'on trouve dans un système de fonctions φ aux mêmes multiplicateurs, et enfin le nombre de zéros communs à deux fonctions φ répondant à une même relation singulière, ont été donnés par M. Humbert dans ses mémoires sur les fonctions abéliennes, auxquelles nous renverrons (13).

Ces notions rappelées, nous allons nous occuper de la représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi, représentation que l'on obtient au moyens des fonctions Θ ou des fonctions intermédiaires.

Soit F la surface de Jacobi relative au tableau (1) et u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F. Si entre les paramètres u, v on pose l'équation

$$\Theta(u, v) = 0,$$

la Θ étant d'ordre l et de multiplicateurs donnés, on obtient une courbe *algébrique* appartenant à un système linéaire ∞^{l^2-1}, car entre les $\Theta(u, v)$ il y en a l^2 linéairement indépendantes. Ce système à son tour, est contenu totalement dans un système continu de ∞^2 systèmes linéaires analogues, qui sont représentés par l'equation

$$\Theta(u + \lambda, v + \mu) = 0,$$

renfermant deux paramètres λ, μ. On remarquera que le premier membre de cette équation est encore une fonction thêta de u, v; mais elle a des multiplicateurs différents de ceux qui appartiennent à $\Theta(u, v)$.

Le degré du système continu envisagé, est égal au nombre des zéros communs à deux fonctions Θ d'ordre l, c'est-à-dire à $2l^2$. En se rappelant la relation entre le genre et le degré d'un système continu tracé sur F (n. 15), on trouve que le genre de notre système est

$$\pi = l^2 + 1.$$

En particulier, lorsque $l = 1$, le système continu représenté par l'équation

$$\Theta(u + \lambda, v + \mu) = 0$$

a la dimension, le degré, le genre égaux à 2, c'est-à-dire qu'il est un système Σ (n. 21).

Comme entre les fonctions thêta d'ordre l et de multiplicateurs donnés, il y a aussi la puissance l^{me} d'une fonction thêta de premier ordre ayant des multiplicateurs convenables, on en conclut que:

Le système continu donné par l'équation

$$\Theta(u + \lambda, v + \mu) = 0,$$

(13) Voir en particulier: *Sur les fonctions abeliénnes singulières* (Deuxième Mémoire), Journal de Mathematiques, (5) *6* (1900), p. 313.

où la Θ, d'ordre l, renferme l^2 paramètres linéaires et homogènes, est le multiple d'ordre l du système Σ formé par les courbes de zéro des fonctions thêta de premier ordre.

Si l'on ajoute que, pour g, h, g' arbitraires toute courbe tracée sur F s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta [14], on tombe de nouveau sur la conclusion déjà établie au n. 26 que: *Sur une surface de Jacobi à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système Σ* (déterminé d'une façon unique) *et de ses multiples.*

Lorsque – pour des valeurs particulières de modules g, h, g' – on trouve sur la surface F plusieurs systèmes Σ différents entre eux, il est aisé de reconnaître que toute courbe d'un de ces systèmes, peut être représentée en égalant à zéro une fonction Θ, pourvu que l'on choisisse convenablement les intégrales normales u, v. Il nous sera permis d'omettre la démonstration de ce fait dont nous n'aurons pas besoin dans la suite.

Supposons maintenant qu'on ait fixé le choix des intégrales normales u, v et qu'il s'agisse d'une surface F à modules particuliers. En égalant à zéro une fonction Θ, on aura une courbe appartenant à un système déterminé $\Sigma \equiv [C]$ ou à son multiple d'ordre l, $[lC]$.

Toute autre courbe L de F sera représentée en égalant à zéro une fonction intermédiaire, soit $\varphi(u, v) = 0$.

C'est là un théorème fondamental de M. Appell [15] qui explique le rôle des fonctions intermédiaires dans l'étude des surfaces de Jacobi à modules particuliers.

On peut ajouter que, si la relation de Humbert correspondant à la fonction φ, d'indices l, k, est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

le système linéaire complet $|L|$ a la dimension

$$r = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 - 1,$$

le degré $2r + 2$, le genre $r + 2$, et la courbe L coupe en $2l + Bk$ points toute courbe C de Σ.

Le système $|L|$ appartient à une série continue ∞^2 de système linéaires analogues $\varphi(u + \lambda, v + \mu) = 0$.

(14) G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, (Premièr Partie, Deuxième Partie), Journal de Mathematiques, (4) 9 (1893), pp. 29–170; *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, (Troisième Partie, Quatrième Partie), Journal de Mathematiques, (4) 9 (1893), pp. 361–475, p. 371.

(15) P. APPELL, *Sur les fonctions périodiques de deux variables*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (4) 7 (1891), pp. 157–219, p. 195; G. HUMBERT, *Mem. cité* [14], p. 195; G. HUMBERT, *ibidem*, (1893), pp. 42–43.

29. *Représentation des courbes tracées sur une surface* F_δ.

Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{cases}$$

le tableau des périodes primitives des intégrales normales u, v attachées à une surface F_δ de rang l et diviseur δ quelconque.

On peut construire aisément des fonctions satisfaisant non seulement aux relations générales (2), du n. 28, mais aussi aux relations particulières

$$\Theta(u+1, v) = \Theta\left(u, v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u, v)$$

de sorte que les quatre paires de périodes relatives à ces fonctions soient données par le tableau (1).

Nous appelerons Θ_δ les fonctions Θ satisfaisant à cette condition. On obtient en particulier une fonction Θ_δ en considérant le produit

$$\Theta_\delta(u, v) = \Theta(u, v)\,\Theta\left(u, v+\frac{1}{\delta}\right)\Theta\left(u, v+\frac{2}{\delta}\right)\cdots\Theta\left(u, v+\frac{\delta-1}{\delta}\right)$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta relative au tableau

$$(2)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Si la fonction $\Theta(u, v)$ est d'ordre l_0, la $\Theta_\delta(u, v)$ est évidemment d'ordre $l = \delta l_0$. Réciproquement, on peut démontrer que *toute fonction thêta vérifiant les relations*

$$(3)\qquad \begin{cases} \Theta(u+1, v) + \Theta\left(u, v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u, v) \\ \Theta(u+g, v+h) = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l u + v} \\ \Theta(u+h, v+g') = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l v + v'} \end{cases}$$

est d'ordre l multiple de δ.

En effet la dernière de ces relations donne

$$\Theta\left(u+h, v+\frac{1}{\delta}+g'\right) = \Theta\left(u, v+\frac{1}{\delta}\right) e^{-2\pi i l v - 2\pi i \frac{l}{\delta} + v'}$$

d'où, en vertu de la condition

$$\Theta\left(u, v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u, v),$$

on tire

$$\Theta\left(u+h, v+\frac{1}{\delta}+g'\right) = \Theta(u+h, v+g') = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l v - 2\pi i \frac{l}{\delta} + v'}.$$

Il faudra donc qu'il soit

$$e^{-2\pi i \frac{l}{\delta}} = 1, \qquad \text{c'est-à-dire: } \frac{l}{\delta} = \text{entier.}$$

On trouve aisément, par le même procédé qu'on emploie dans le cas des fonctions Θ générales, que les fonctions Θ_δ — les ν, ν' étant des constantes données – peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires à coefficients constants de l^2/δ d'entre elles.

Deux fonctions Θ_δ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs incongrus par rapport au tableau (2), tandis qu'elles ont seulement $2ll'/\delta$ zéros incongrus par rapport au tableau (1), car le zéros incongrus par rapport à (2) se distribuent en $2ll'/\delta$ groupes de δ zéros congrus par rapport à (1).

Ceci posé, remarquons qu'au moyen de la correspondance $[1, \delta]$ entre la surface F_δ et la surface de Jacobi F relative au tableau (2), à une courbe C

$$\Theta(u, v) = 0$$

d'un système Σ tracé sur F, répond sur F_δ la courbe C_δ

$$\Theta(u, v)\,\Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right)\cdots\Theta\left(u, v + \frac{\delta - 1}{\delta}\right) = 0$$

appartenant au système Σ_δ homologue de Σ (n. 25).

Lorsque on ne regarde pas comme distincts deux zéros de $\Theta(u, v)$ incongrus par rapport à (2), mais congrus par rapport à (1), on peut aussi représenter la courbe C_δ avec la même équation $\Theta(u, v) = 0$, qui représente la courbe correspondante C.

Il s'ensuit que *sur la surface F_δ les courbes de zéro des fonctions thêta du premier ordre, relatives au tableau* (2), *sont de courbes C_δ d'un système Σ_δ*.

Un système linéaire complet $|C_\delta|$ est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u, v) = 0, \tag{4}$$

Θ_δ étant une fonction d'ordre *minimum* δ satisfaisant aux conditions (3) pour des valeurs données des constantes ν, ν'. Cette fonction renferme $\frac{\delta^2}{\delta} = \delta$ paramètres linéaires et homogènes, de sorte que le système $|C_\delta|$ a la dimension $\delta - 1$. Le degré de ce système est $\frac{2\delta^2}{\delta} = 2\delta$, le genre $\pi = \delta + 1$ (n. 15).

Au varier des multiplicateurs de la fonction Θ_δ on obtient toute courbe C_δ de Σ_δ, c'est-à-dire que ce système est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u + \lambda, v + \mu) = 0. \tag{5}$$

Si la fonction Θ_δ envisagée a l'ordre $l = l_0\,\delta$, on voit aisément que l'équation (4) donne un système linéaire $|l_0\,C_\delta|$ et que l'équation (5) donne le système continu complet $[l_0\,C_\delta]$.

Ce que nous avons dit des fonctions thêta peut se répéter aussi pour les fonctions intermédiaires.

Une fonction intermédiaire $\varphi_\delta(u, v)$ définie par rapport au tableau (2), c'est-à-dire satisfaisant aux conditions (5) du n. 28, pourra être regardée comme une fonction intermédiaire relative au tableau (1), lorsqu'on aura

$$\varphi_\delta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \varphi_\delta(u, v)\, e^{-2\pi i D k u}.$$

On obtient par example une fonction intermédiaire de cette espèce en considérant le produit

$$\varphi(u, v)\, \varphi\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) \cdots \varphi\left(u, v + \frac{\delta - 1}{\delta}\right),$$

$\varphi(u, v)$ étant une fonction intermédiaire relative au tableau (1); et l'on déduit aisément la théorie des fonctions φ_δ de celle des fonctions φ étudiées par M. Humbert.

Le théorème de M. Appell nous dit actuellement que *toute courbe algébrique tracée sur F_δ peut être représentée en égalant à zéro une fonction φ_δ.*

Lorsque les modules g, h, g' de la surface F_δ ou de la surface de Jacobi attachée à F_δ sont généraux, toute fonction φ_δ se réduit à une fonction Θ_δ.

Or, d'après la remarque que toute fonction Θ_δ a un ordre multiple de δ on retrouve ainsi le résultat établi au n. 27, que *sur une surface F_δ à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système $[C_\delta]$ bien déterminé et de ses multiples.*

30. *Surfaces de Picard d'ordre minimum dépourvues de courbe exceptionnelles.*

Les quelques remarques que nous venons d'établir par des voies différentes aux nn. 26, 27 et 28, 29, nous amènent à construire des types, projectivement définis, des surfaces de Picard; et ce sera un résultat remarquable que, en exceptant des modules particuliers, on obtiendra ainsi, pour chaque valeur du diviseur δ, les surfaces de Picard d'ordre minimum, parmi celles qui ne renferment pas des courbes exceptionnelles.

Nous avons reconnu qu'à toute surface de Picard F_δ appartient un système Σ_δ renfermé en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes (généralement irréductibles) de genre $\delta + 1$; et nous avons ajouté que le système $\infty^{\delta+1}$ est constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Considérons un quelconque $|C_\delta|$ parmi ces systèmes linéaires $\infty^{\delta-1}$ de genre $\delta + 1$ et de degré 2δ.

En supposant $\delta > 3$ $(\delta - 1 \geq 3)$ on pourra transformer F_δ de façon que les courbes du système considéré deviennent des sections planes ou hyperplanes de la surface; on obtiendra ainsi *une surface F_δ d'ordre 2δ appartenant à un espace $S_{\delta-1}$ de dimension $\delta - 1$ et cette surface ne renfermera pas des courbes exceptionnelles*, puisque le système linéaire qui nous a fourni la transformation n'a pas de points base.

Ajoutons, sans appuyer sur les détails, qu'il est aisé de reconnaître que notre surface d'ordre 2δ ne saurait se réduire à une surface d'ordre δ comptée deux fois.

Faisons maintenant $\delta = 3, 2$. Il suffira alors de considérer le double d'un système linéaire $|C_\delta|$ c'est-à-dire $|2C_\delta|$.

Ce système est de genre

$$\delta + 1 + \delta + 1 + 2\delta - 1 = 4\delta + 1,$$

de degré

$$8\delta$$

et de dimension

$$4\delta - 1.$$

On obtient donc des *surfaces de Picard* F_2, F_3 *d'ordre* 16, 24, *qui appartiennent respectivement* à *un espace* S_7, S_{11}, *et qui sont dépourvues de courbes exceptionnelles.*

Pour $\delta = 1$ la dimension de $|2C|$ est 3; il semble donc qu'on sera amené à une surface de Jacobi d'ordre 8 sans courbes exceptionnelles. Mais une circonstance particulière se presente; les courbes du système transformant $|2C|$ passant par un point, renferment en conséquence un autre point, qui est conjugué au premier en une transformation de première espèce, bien définie par la condition de laisser invariant le système $|2C|$.

Ainsi la surface d'ordre 8 que l'on construit se réduit à une surface de quatrième ordre (de Kummer) comptée deux fois.

Il faut donc considérer un système linéaire $|3C|$ qui a le genre 10, le degré 18 et la dimension 9. On en est amené à une *surface de Jacobi d'ordre 18 en un espace* S_9, *qui est dépourvue de courbes exceptionnelles.*

Il est bien entendu qu'en projetant les surfaces appartenant à des hyperespaces, que nous venons de construire, on obtiendra des surfaces de l'espace ordinaire, qui seront dépourvues de courbes exceptionnelles et aurons le même ordre que les surfaces données, si l'on a projeté par des points extérieurs.

En projetant par des points de la surface l'ordre en est abaissé, mais des courbes exceptionnelles prennent naissance.

III. Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi.

31. *Invariants des involutions appartenant à une surface de Jacobi.*

D'après les remarques développées dans le n. 6, étant donnée une surface hyperelliptique Φ, on peut toujours construire une surface de Jacobi F transformée rationnelle de Φ; on aura entre Φ, F une correspondance $[1, n]$, de telle sorte qu'aux points de Φ correspondront les groupes G_n de n points d'une certaine involution I_n sur F. La surface Φ est une *image* de l'involu-

tion I_n. Ainsi le problème de déterminer les familles, birationnellement distinctes, de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramené à l'étude et à la classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi F.

Et nous supposerons toujours que F ne renferme pas des courbes exceptionnelles, puisque ces courbes, si elles existent, peuvent être éliminées par une transformation de la surface.

Ajoutons les remarques suivantes:

1) Toute involution I_n donnée sur F (soit toute surface – image de I_n – dont F est une transformée rationnelle) a le genre géométrique

$$p_g \leq 1.$$

En effet, si l'on fait abstraction des courbes exceptionnelles, il ne peut pas exister sur Φ des courbes canoniques d'ordre > 0, car à une courbe canonique de Φ devrait correspondre une courbe faisant parti d'une courbe canonique de F (16).

Cette remarque prouve même davantage, c'est–à–dire que (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles) Φ ne saurait renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, et par conséquent, en désignant par P_i ses genres d'ordre $i = 2, 3, \cdots$, on aura

$$P_i \leq 1.$$

2) Le genre numérique d'une involution appartenant à F, ne saurait descendre au dessous de -1, soit

$$p_a \geq -1.$$

En effet l'on avait $p_a < -1$, la surface pourrait être ramenée birationnellement à une réglée dont la section plane aurait le genre $-p_a$; alors aux génératrices de celle–ci correspondraient sur F les courbes d'un faisceau irrationnel, de genre $-p_a > 1$; mais un tel faisceau ne saurait pas appartenir à une surface de Jacobi (n. 19).

Ces remarques nous amènent à établir une distinction des involutions qui peuvent appartenir à F, d'après les valeurs des caractères invariants.

On pourra avoir des involutions irrégulières (c'est–à–dire des involutions représentées par des surfaces irrégulières) et des involutions régulières; nous désignerons en tous cas, par $d\,(\geq 0)$ l'irrégularité d'une involution appartenant à F, ou de la surface qui en est l'image; d sera donc la différence $p_g - p_a$ entre le genre géométrique et le genre numérique de Φ.

Or trois cas seront possibles:

$$d = 2, \qquad d = 1, \qquad d = 0.$$

(16) F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (3) *44* (1893), cap. VI. – Voir aussi F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *36* (1903), pp. 495–511 [Nota XIV, vol. I, p. 158; N.d.R.].

Si $d = 2$ les inégalités $p_g \leq 1$, $p_a \geq -1$, ne peuvent être satisfaites qu'en faisant

$$p_g = 1 , \qquad p_a = -1 ;$$

et, comme il n'y a pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on tombe sur des surfaces Φ hyperelliptiques de rang 1; ainsi que nous l'avons remarqué ces surfaces représentent des involutions engendrées sur F par des transformations cycliques de 2de espèce (n. 12).

Si $d = 1$, on peut supposer à priori

$$p_g = 1 , \qquad p_a = 0,$$

ou

$$p_g = 0 , \qquad p_a = -1 ;$$

mais la première hypothèse doit etre écartée parce qu'il n'existe pas des courbes canoniques d'ordre > 0 [17]; on aura donc

$$p_g = 0 , \qquad p_a = -1.$$

On tombe alors sur des *surfaces elliptiques*, douées d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations birationnelles en elles-mêmes [18]; parmi ces surfaces on pourra rencontrer des surfaces qui se ramènent à des réglées elliptiques, et des surfaces irréductibles à des réglées; on peut distinguer les deux cas d'après la valeur du genre d'ordre 12, P_{12}; on a

$$P_{12} = 0 \qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

dans le premier cas; et $P_{12} > 0$, et ici donc $P_{12} = 1$, dans le second [19].

Si enfin $d = 0$, on aura

$$p_g = p_a = 0$$

ou

$$p_g = p_a = 1.$$

Dans le premier cas on pourra considérer le bigenre P_2; si

$$P_2 = 0$$

la surface est rationnelle (Castelnuovo) [20].

L'hypothèse $P_2 > 0$, jointe a nos inégalités. $P_i \leq 1$ $(i = 2 , 3 , \cdots)$, ne peut être satisfaite que pour des surfaces réductibles à un type connu, pour lesquelles

$$P_2 = 1 , \qquad P_3 = 0 \qquad (P_{2i} = 1 , P_{2i+1} = 0).$$

(17) Cfr. F. ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, Rendiconti dell'Accademia di Bologna, (1906).

(18) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 1–33.

(19) Ibidem.

(20) *Sulle superficie di genere zero*, Memorie della Società italiana delle Scienze, (1896).

Les résultats de cette discussion viennent résumés par le tableau suivant, où nous indiquons les valeurs possibles des caractères invariants qui appartiennent à une surface hyperelliptique quelconque (soit les caractères des involutions qui peuvent appartenir à F):

a) $d = p_g - p_a = 2$, $p_a = -1$, $p_g = 1$ ($P_i = 1$; $i = 2, 3, \cdots$) (*surfaces hyperelliptiques de rang* 1 — n. 16);

b) $d = p_g - p_a = 1$

$$p_a = -1 , p_g = 0 \begin{cases} P_{12} = 0 \text{ (\textit{réglées elliptiques})} \\ P_{12} = 1 \text{ (\textit{surfaces elliptiques} non réductibles à des réglées)} \end{cases}$$

c) $d = p_g - p_a = 0$

$$p_g = p_a = 0 \begin{cases} P_2 = 0 \text{ (\textit{surfaces rationnelles})} \\ P_2 = 1 , \quad P_3 = 0. \end{cases}$$

$$p_g = p_a = P_2 = 1 \qquad (P_i = 1 ; i = 3, 4 \cdots).$$

Ces résultats sont obtenus *à priori* d'après les théorèmes de classification établis récemment dans la théorie des surfaces algébriques; il y a lieu maintenant des les retrouver à posteriori en classifiant les involutions qui peuvent appartenir à une surface de Jacobi F, d'après deux points de vue différents:

1) d'après le *nombre des transformations de seconde espèce* de F qui les ramènent en elles–mêmes;

2) d'après le *nombre de leurs coïncidences*.

Chacun de ces points de vue nous fournira ainsi un critérium pour reconnaître si une involution donnée sur F, appartient à l'une ou à l'autre des familles que nous venons de déterminer.

Remarque. Les résultats auxquels nous serons amenés subsistent de même pour les involutions appartenant à une surface de Picard de diviseur quelconque.

32. *Les involutions classifiées d'après leurs transformations en elles–mêmes.*

Plaçons nous d'abord au premier point de vue.

Soit donc I_n une involution donnée sur la surface de Jacobi F, Φ une surface image de I_n.

L'involution I_n (soit la surface Φ qui la représente) pourra être regulière ou irrégulière, son irrégularité d (≥ 0) étant exprimée par la différence $p_g - p_a$ entre son genre géométrique et son genre numérique.

Or nous allons démontrer le théorème suivant:

Une involution appartenant à F sera irrégulière ou régulière, suivant qu'il existe ou qu'il n'existe pas une infinité (continue) de transformations de seconde espèce qui la transforment en elle–même.

Considérons d'abord une involution I_n régulière; nous prouverons qu'il ne peut exister qu'un nombre fini (tout au plus) de transformations de seconde espèce par rapport auxquelles I_n jouit de la propriété d'invariance.

Soient u, v deux intégrales indépendantes de première espèce, attachées à la surface F; évaluons les sommes des valeurs qu'elles prennent aux n points d'un groupe $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de I_n.

Soit

$$\sum u(x_i) \equiv u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_n) \equiv h$$
$$\sum v(x_i) \equiv v(x_1) + v(x_2) + \cdots + v(x_n) \equiv k.$$

En faisant varier le groupe $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, h, k demeurent constantes, autrement elles fourniraient des intégrales de Φ (tandis que le nombre de celles–ci est $d = 0$).

Or une transformation de 2de espèce de F est donnée par les formules

$$u(y) \equiv u(x) + a$$
$$v(y) \equiv v(x) + b.$$

Si cette substitution doit transformer en elle–même l'involution I_n, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum u(y_i) \equiv \sum u(x_i) + na \equiv h \\ \sum v(y_i) \equiv \sum v(x_i) + nb \equiv k \end{cases}$$

(les congruences subsistant toujours par rapport aux périodes de u, v); il suit

$$na \equiv 0$$
$$nb \equiv 0,$$

et par conséquent a et b ne sauraient recevoir qu'un *nombre fini* de valeurs, distinctes par rapport aux périodes.

Supposons au contraire que l'involution I_n soit irrégulière. Si elle était transformée en elle–même par un nombre fini de transformations de 2de espèce, elle serait transportée en ∞^2 involutions distinctes par les ∞^2 transformations de 2de espèce; et, comme le groupe formé par les transformations est transitif, on aurait ainsi une série continue d'involutions *irrégulières* jouissant de la propriété que les groupes de la série qui passent par un point donné de F, *remplissent la surface*.

Cette conclusion est absurde; en effet M. Severi a montré [21] que si l'on a sur une surface une série continue d'involutions irrégulières, les groupes de celles–ci qui renferment un point donné, appartiennent tous à une même *courbe* algébrique (variable dans un faisceau irrationnel).

(21) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) *12* (1905), pp. 55–79 [Memoria XXV, vol. I, p. 314; N.d.R.].

Partant on arrive à la conclusion que « toute involution régulière de F est transformée en elle–même par un nombre fini de transformations de 2^{de} espèce » et réciproquement. c.q.f.d.

33. *Mais on peut en dire davantage.*

En effet il est aisé de prouver que « si une involution I_n donnée sur la surface F, a l'irrégularité $d = 2$ elle demeure invariant par rapport aux ∞^2 transformations de 2^{de} espèce de F, et réciproquement ».

Soit Φ une surface image de I_n. D'après le n. 31 on a

$$p_g = 1 , \qquad p_a = -1.$$

En outre Φ ne renferme pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0 (n. 31). On en conclût que Φ est une surface hyperelliptique de rang 1, admettant un groupe ∞^2 de transformations birationnelles en elle–même (n. 16). Entre Φ, F il y a une correspondance algébrique $[1 , n]$ dépourvue de courbe de diramation; et à toute transformation birationnelle de Φ en elle–même répondent n transformations de 2^{de} espèce distinctes de F (22).

Ainsi I_n vient transformée en elle–même par les ∞^2 transformations; en particulier il y a parmi celles–ci n transformations qui laissent invariant chaque groupe de I_n, et engendrent l'involution au sens du n. 10.

La proposition réciproque s'établit de suite. Si I_n est transformée en elle–même par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce de F, la surface Φ – image de I_n – admet ∞^2 transformations en elle–même; par conséquent elle a les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$, et l'irrégularité $d = 2$.

Que l'on rapproche maintenant le résultat obtenu à celui du n. 32; un raisonnement par exclusion nous permet de conclure que:

Toute involution irrégulière donnée sur F admet ∞^2 *ou* ∞^1 *transformations de* 2^{de} *espèce en elle–même, suivant que son irrégularité est*

$$d = 2 \quad \text{ou} \quad d = 1.$$

Le cas $d = 2$ *nous ramène aux surfaces hyperelliptiques de rang* 1.

Le cas $d = 1$ *nous ramène à des surfaces elliptiques* (23) de genre numérique $p_a = -1$ et par conséquent de genre géométrique $p_g = 0$; parmi ces surfaces nous verrons qu'il existe des surfaces qui se laissent transformer en des réglées elliptiques (cas de dégénérescence) et aussi en *des surfaces elliptiques non réductibles à des réglées.*

(22) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (n. 5), Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 61–72.

(23) On appelle ainsi les surfaces admettant un grupe elliptique de transformations en elles–mèmes. Après MM. Picard et Painlevé ces surfaces ont été étudiées, notamment dans le cas $p_g = 0$, par M. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 1–33.

34. *Les involutions classifiées d'après leurs coïncidences.*

Nous allons nous placer maintenant au second des points de vue dont nous avons parlé au n. 31.

Dans une involution I_n de F, il peut exister des groupes G_n, constitués de n points qui ne sont pas tous distincts entre eux, c'est–à–dire renfermant des *coïncidences*. Or trois cas pourront se présenter.

35. *Premier cas.*

L'involution I_n possède une infinité de coïncidences, c'est–à–dire une courbe K de points de coïncidence. En ce cas nous allons prouver que I_n *est rationnelle on peut être représentée par une surface réglée elliptique.*

Désignons par m l'ordre de la surface F, et par π le genre de ses sections planes; on aura (F ne renfermant pas des courbes exceptionnelles).

$$m = 2\pi - 2.$$

Soit

$$h\,(>0)$$

l'ordre de la courbe K, et D l'ordre de la courbe décrite par les $n-1$ points conjugués à un point (x) qui décrit une section plane de F.

Considérons sur la surface Φ, image de I_n, les courbes C correspondant aux sections planes de F.

Les courbes C se couperont deux à deux en $D+m$ points, chaque point commun à deux C répondant à un point commun aux sections planes homologues de F, ou bien à un groupe G_n de I_n dont un point appartient à la première de ces sections, et un autre point (conjugué au premier) appartient à la seconde.

Les courbes C auront le genre effectif π, ce genre étant égal à celui des sections de F; mais elles aurons un certain nombre de points doubles variables qui prennent naissance de la façon suivante: la courbe, d'ordre D, conjuguée à une section plane de F, rencontre cette section en D points; de ceux–ci, h tombent sur la courbe de coïncidence K; les autres $D-h$ se partagent en $\frac{D-h}{2}$ couples de points conjugués par rapport à I_n; eh bien à ces couples correspondent $\frac{D-h}{2}$ points doubles de la courbe C, homologue à la section considérée de F.

Or la série des courbes C sur Φ est rationnelle; par conséquent [24] elle appartient à un système linéaire $|C|$. Le genre Π et le degré M auront respectivement les valeurs suivantes:

$$\Pi = \pi + \frac{D-h}{2}$$

$$M = m + D = 2\pi - 2 + D.$$

(24) F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 10 (1896), pp. 30–35.

Pourtant on a $(h > 0)$

$$M > 2\Pi - 2.$$

D'après un théorème de MM. Castelnuovo–Enriques [25] cela suffit pour que la surface Φ soit rationnelle ou puisse être ramenée à une surface réglée irrationnelle, qui, dans notre cas, serait une réglée elliptique, son genre numérique ne pouvant pas descendre au–dessous de — 1 (n. 31).

36. *Deuxième cas.*

Il n'existe pas des coïncidences de l'involution I_n.

D'après une formule de M. Severi, on peut alors évaluer le genre numérique de la surface Φ image de I_n, qui se trouve en correspondence $[1, n]$ avec F; puisqu'il n'y a pas sur Φ des points de diramation, on trouve que ce genre numérique est

$$p_a = -1.$$

Relativement au genre géométrique, on pourra distinguer deux hypothèses:

$$p_g = 1 \quad \text{ou} \quad p_g = 0.$$

Dans l'hypothèse $p_g = 1$ il y aura sur Φ une courbe canonique d'ordre zéro (n. 31) et par suite la surface résultera une surface hyperelliptique de rang 1.

Examinons ensuite l'hypothèse $p_g = 0$. La surface Φ sera une *surface elliptique* qui ne saurait pas être ramenée à une réglée.

C'est ce que l'on peut reconnaître en raisonnant par absurde. Si une surface réglée est en correspondance $[1, n]$ avec F, aux génératrices de la première surface ne sauraient répondre sur F des courbes réductibles en n parties rationnelles; partant sur une courbe homologue à une des génératrices sur–nommées, ou sur une composante irréductible de cette courbe, il y aurait des points de coïncidence.

Ajoutons que la surface elliptique Φ renferme deux faisceaux de courbes elliptiques, un parmi ceux faisceaux étant elliptique, l'autre rationnel. Cette propriété, qui découle immédiatement de la construction de la surface Φ, s'accorde avec la circostance que nous avons reconnue au n. 31, que les plurigenres de Φ ne peuvent surpasser 1.

37. *Troisième cas. – L'involution* I_n *possède un nombre fini de coïncidences.*

En ce cas il ne peut y avoir qu'un nombre fini de transformations de la surface F, qui laissent invariant I_n, puisque ces transformations doivent

(25) G. CASTELNUOVO–F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) *6* (1901), pp. 165–225.

échanger entre eux les points de coïncidences. Il s'ensuit (n. 32) que Φ est régulière, et l'on a

$$p_g = p_a = 0$$

ou

$$p_g = p_a = 1.$$

En le premier cas le bigenre P_2 aura l'une des valeurs suivantes:

$$P_2 = 0$$

ou

$$P_2 = 1;$$

et lorsque $P_2 = 0$ on tombe sur des surfaces rationnelles.

38. *Involutions appartenant à une surface régulière de genres 1.*

Il nous sera utile pour la suite de considérer les involutions, et notamment les involutions de couples de points, appartenant à une surface régulière de genres 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$).

En classifiant ces involutions, on tombera toujours sur des surfaces régulières et on aura les trois cas possibles

$$p_a = p_g = P_2 = 0 \quad \text{(cas rationnel)}$$

$$p_a = p_g = 0, \qquad P_2 = 1, \qquad (P_3 = 0)$$

$$p_a = p_g = P_2 = 1.$$

Nous voulons montrer par un exemple que les deux derniers cas peuvent se presenter, tous deux, effectivement.

A cet effet considérons une surface F_8 intersection complète de trois quadriques dans un espace à 5 dimensions S_5. Il peut arriver que F_8 soit transformée en elle–même par une homographie involutoire de cet espace, et cette homographie pourra appartenir à l'une de trois espèces suivantes:

1) homologie;

2) homographie douée d'une droite de points unis qui ne coupe pas F, et d'un S_3 de points unis;

3) homographie douée de deux plans de points unis, qui ne coupent pas F.

Or l'homographie transformant F en elle–même donne lieu à une involution I_2 sur F. Eh bien, cette involution représente une surface rationnelle dans le premier cas; elle représente une surface de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$ dans le second cas; enfin elle représente une surface de genres $p_a = p_g = 0$ et $P_2 = 1$, dans le troisième cas.

Nous allons justifier ces assertions en laissant de coté le premier cas, qui né presente d'ailleurs aucune difficulté, puisqu'il suffit de répéter le raisonnement du n. 35.

En nous plaçant d'abord le cas 2), considérons les sections découpées sur F par les hyperplans renfermant l'axe de l'homographie. A ces sections répondront sur la surface image de I_2 ∞^3 courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points; on en déduit que cette surface est birationnellement identique à une surface générale du quatrième ordre

$$(p_a = p_g = P_2 = 1).$$

Dans le cas 3) considérons les sections découpées sur F par les hyperplans qui renferment l'un ou l'autre parmi les deux plans de points unis. A ces courbes répondront sur la surface image de I_2 des courbes de genre 3, qui donneront lieu à deux systèmes ∞^2 de degré 4; les courbes de l'un système couperont toute courbe de l'autre système en 4 points formant sur cette courbe un groupe de la série canonique g_4^2. Pourtant les deux systèmes seront adjoint l'un à l'autre et l'on aura $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ c.q.f.d.

Il est à remarquer qu'entre les cas 1) 2) 3) il y a a le critérium de distinction suivant: dans le cas 2) l'involution donnée sur F a un nombre fini de coïncidences, dans le cas 3) l'involution n'a pas du tout de coïncidence; on en a au contraire une infinité dans le cas 1).

Or cette remarque peut être généralisée. Toute involution de couples de points donnée sur une surface régulière, F, de genres 1, peut être engendrée par une homographie sur une surface F', transformée de F, appartenant à un hyperespace convenable. On peut donc répéter pour F' les considérations que nous venons de développer ci-dessus.

On arrive ainsi, à la conclusion suivante:

Etant donnée une surface régulière de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, *on peut y avoir trois sortes d'involutions de couples de points*:

1) *involutions rationnelles* ($p_a = P_2 = 0$);

2) *involutions de genres* 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$);

3) *involutions de genre* 0 *et de bigenre* 1, *dépourvues de courbes bicanoniques d'ordre* > 0 ($p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

On a une infinité de coïncidences dans le cas 1), *un nombre fini* > 0 *de coïncidences dans le cas* 2), *point de coïncidences dans le cas* 3).

IV. Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$.

39. Soit F une surface hyperelliptique de rang 1 ($p_g = 1$, $p_a = -1$). Nous avons déjà établi une distinction entre les involutions I_n qui peuvent appartenir à F, suivant qu'il existe une courbe de coïncidence, ou bien qu'il y a seulement un nombre fini $N > 0$ de points de coïncidence, ou qu'il n'y en a pas du tout ($N = 0$).

Nous allons considérer dans la suite les involutions I_n qui possèdent un nombre fini $N (\geq 0)$ de coïncidences.

Parmi ces involutions nous avons déjà considéré en particulier celles qui sont engendrées par des transformations cycliques de seconde espèce de $F (N = 0)$; ce sont des involutions représentées par des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1, ou brièvement des *involutions de rang 1*.

Or une involution I_n étant donnée sur F, deux cas peuvent se présenter:

1) il peut arriver que chaque groupe G_n de I_n soit composé par un certain nombre $r (\geq 1)$ de groupes G_δ de $\delta (> 1)$ points $(n = r\delta)$, de façon que les groupes G_δ engendrent une involution I_δ de rang 1; en ce cas on dira que *l'involution I_n est composée par la I_δ*;

2) au contraire il se peut que les groupes de I_n ne soient pas composés par des groupes d'une involution de rang 1.

La même distinction peut être établie de la façon suivante:

On se trouve dans le cas 1) s'il existe des transformations de 2de espèce qui transforment en lui–même chaque groupe de I_n; au contraire le cas 2) correspond à l'hypothèse que de telles transformations n'existent pas.

Il y a lieu maintenant d'établir un critérium qui nous permettra de reconnaître plus aisément si une involution I_n donnée sur F est composée par une involution de rang 1.

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les n points d'un groupe G_n de I_n; d'après une locution déjà établie, deux quelconques parmi ces points sont dits *conjugués* par rapport à I_n. Si I_n est composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1, il y a en G_n des points conjugués par rapport à I_n, par exemple les points x_1, x_2, qui sont aussi conjugués par rapport à I_δ.

Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante: toute transformation de 2de espèce de F amène les points x_1, x_2 en des points conjugués par rapport à I_n.

En effet l'involution I_δ est transformée en elle–même par les transformations de 2de espèce, et, comme I_n est composée par I_δ, deux points conjugués par rapport à I_δ sont aussi conjugués par rapport à I_n.

Maintenant il y a lieu de remarquer qu'il subsiste la proposition réciproque suivante.

Que l'on ait sur F une involution I_n; si deux points x_1, x_2, conjugués par rapport à celle–ci, sont transformés en des points conjugués, par toute transformation de 2de espèce, l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Nous allons démontrer ce théorème.

Considérons une transformation de 2de espèce, π, de F, choisie d'une façon générale; elle amenera le point x_1 en un point x_1' et sera définie par la correspondance de ces deux points, de façon qu'on pourra la désigner en écrivant

$$\pi = (x_1 x_1').$$

Le point x_1 appartient à un groupe G_n de I_n dont les points sont désignés par $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

Or d'après notre hypothèse, la transformation π qui amène x_1 en x_1, amène x_2 en un point x_2' qui est conjugué à x_1' par rapport à I_n. Il pourra arriver aussi que d'autres points de G_n, par exemple $x_3, \cdots, x_\delta$ soient transformés par π en des points $x_3', \cdots, x_\delta'$, coniugués à x_1', et que cela arrive d'ailleurs quel que soit la transformation de 2de espèce π.

Les points $x_1, x_2, \cdots, x_\delta$ formeront en G_n un groupe G_δ qui se trouve défini de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

a) le groupe G_δ est déterminé à partir du point x_1, que l'on peut faire varier sur F;

b) le groupe G_δ est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points $x_1, x_2, \cdots, x_\delta$, puisqu'on a

$$\pi = (x_1 x_1') = (x_2 x_2') = \cdots = (x_\delta x_\delta').$$

Il suit que G_δ décrit, au varier de x_1, une involution I_δ par laquelle I_n résulte composée. Mais comme I_δ est transformée en elle–même par les transformations de 2de espèce, elle est une involution de rang 1 (n. 32). Ainsi notre proposition se trouve établie.

40. En ce qui suit nous allons supposer que l'involution I_n douée de $N \geq 0$ points de coïncidence, que nous considérons sur la surface F, ne soit pas composée par une involution I_δ $(\delta > 1)$ de rang 1. Ce n'est pas là une restriction essentielle que nous imposons à I_n, puisque cette condition pourra toujours être remplie en remplaçant la surface donnée par une autre surface de Picard.

Ceci posé, nous nous proposons d'établir que l'involution I_n est engendrée par n transformations birationnelles de la surface F en elle–même, transformations formant un groupe d'ordre n. Plus clairement nous disons que, si l'on considère les n points $x_1, x_2, \cdots x_n$ d'un groupe variable de I_n, chacun de ceux–ci dépend rationnellement de l'un des autres; par exemple $x_2 \cdots x_n$ sont des fonctions rationnelles de x_1.

Pour arriver à cette conclusion fondamentale, nous poursuivons l'étude de l'involution I_n, en rappelant nos hypothèses fondamentales:

1) que I_n soit douée d'un nombre fini $N \geq 0$ de points de coïncidence;
2) que I_n ne soit pas composée par une involution I_δ $(\delta > 1)$ de rang 1.

Considérons sur F un système continu complet Σ de courbes C (de genre $\pi \geq 2$) sans points–base, choisi d'ailleurs d'une façon quelconque, et construisons le système des courbes K (*conjuguées* aus C) qui sont définies de la façon suivante:

tandis qu'un point décrit une courbe C, les $n - 1$ points conjugués décrivent une courbe K, que l'on dit conjuguée à la première.

Nous nous proposons d'établir que chaque courbe K se décompose en $n - 1$ courbes, birationnellement identiques à la courbe C dont elle prend naissance. Cette conclusion, qui nous permettra de démontrer aisément le

théorème fondamental que nous avons en vue, sera établie par un procédé de réduction à l'absurde. Nous supposerons d'abord que les courbes K soient (généralement) irréductibles et nous montrerons que cette hypothèse contredit à l'hypothèse 2). Ensuite nous examinerons le cas où les K seraient réductibles, mais le nombre de leurs composantes irréductibles serait $< n - 1$ et nous en tirerons la même conclusion.

41. Adoptons les hypothèse 1) 2) du n. préc. et supposons en outre que la courbe K conjuguée à une courbe C (choisie d'une façon générale en Σ), soit irréductible. Il y aura sur K une involution γ^1_{n-1} de genre π (π étant le genre de C); deux points conjugués par rapport à γ^1_{n-1} – c'est–à–dire deux points appartenant à un même groupe de cette série – seront conjugués aussi par rapport à l'involution I_n.

Considérons les transformation de 2de espèce de la surface F en elle–même. On pourra supposer: ou bien que ces transformations changent la série des courbes K en elle–même; ou bien qu'elles changent une courbe K en une nouvelle courbe $\bar{K}$ qui n'est pas conjuguée à une courbe C de notre système Σ.

Si la série des courbes K est transformée en elle–même, c'est–à–dire si une courbe K est transformée en une autre courbe K, l'involution γ^1_{n-1} considerée sur la première courbe, se transformera dans l'involution γ^1_{n-1} qui vient définie analoguement (par rapport à I_n) sur la seconde courbe; en effet s'il n'en était pas ainsi on trouverait qu'une courbe K, en tant qu'elle peut correspondre à une infinité de courbes analogues par les ∞^2 transformations de 2de espèce, renferme une infinité continue d'involution irrationnelles γ^1_{n-1}, ce qui contredit à un théorème connu de MM. Painlevè, Humbert et Castelnuovo.

Il suit des cette remarque que, si la série des courbes K est transformée en elle–même par les transformations de 2de espèce de F, deux points situés sur une courbe K et conjugués par rapport à I_n (c'est–à–dire appartenant à un même groupe de I_n) seront amenés par toute transformation de 2de espèce, en des points conjugués de même par rapport à I_n; d'après le critérium établi au n. 39 cela signifie que l'involution I_n est une involution de rang 1, ou qu'elle est composée par une involution de rang 1, ce qui contredit à notre hypothèse 2).

Nous devons donc supposer qu'une transformation de 2de espèce (choisie d'une façon générale) change une courbe K en une nouvelle courbe $\bar{K}$ qui n'est pas conjugués à une courbe C de notre système Σ.

Construisons alors la courbe L conjuguée à $\bar{K}$ par rapport à I_n, c'est–à–dire la courbe engendrée par les $n - 1$ points conjugués à un point variable sur $\bar{K}$.

La courbe $\bar{K}$ correspondant à K en une transformation de 2de espèce π, on peut faire varier K tout en tenant fixe K pourvu qu'on laisse varier π, et d'une façon continue on peut réduire ainsi $\bar{K}$ à K, tandis que π se réduit à la transformation identique.

Or, lorsque $\overline{K}$ variant d'une façon continue se réduit à K, la courbe L conjuguée à $\overline{K}$ variera aussi et devra se réduire à la courbe conjuguée à K, c'est-à-dire à la courbe composée $(n-2)K + C$.

Il s'agit de voir comment cette réduction est possible.

Supposons d'abord que la courbe L, qui tend à la limite $(n-2)K + C$, soit irréductible.

Envisageons un groupe de points de I_n dont un point se trouve sur $\overline{K}$; nous voulons désigner par x_2 ce point, et par $x_1, x_3, \cdots, x_n$ les $n-1$ points conjugués qui appartiennent à L.

Si, ainsi que nous l'avons supposé, L est irréductible, on peut échanger entre eux les points x_1, x_3, en faisant décrire un cycle au point x_2 sur $\overline{K}$; il est sous-entendu que l'on envisage $\overline{K}$ comme une surface de Riemann.

Or $\overline{K}$ se réduit d'une façon continue à K; le cycle décrit sur $\overline{K}$ par x_2 se réduit à un cycle sur K, qui est d'ailleurs une surface de Riemann identique à $\overline{K}$.

En force d'un *postulat de continuité* qu'on a le droit d'appliquer ici, il doit donc arriver le fait suivant: considérons un groupe de points $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de I_n, et supposons que le premier point appartienne à la courbe C, et les autres $n-1$ points à la courbe conjuguée K; on peut faire décrire au point x_2 sur K un tel cycle que x_1 se change avec x_3.

Comment ce fait est-il-possible?

Suivons par la pensée le mouvement du point x_2 qui décrit un cycle sur K, et suivons de même le chemin qui vient décrit par un point x_3 conjugué à x_2 et situé sur la même courbe K.

Pour que x_3 se change en x_1, il faut qu'il passe de la courbe K à la courbe C, et ce passage ne peut avoir lieu que par l'un des points communs à C, K. Or x_3 coïncidera avec l'un, A, de ces points, lorsque x_2 occupera la position A' d'un des points conjugués sur K; mais si on continue le mouvement de x_2 au delà de A', où se trouvera la continuation du chemin décrit par x_3? appartiendra-t-elle à K, ou bien se trouvera-t-elle sur C?

Pour éclaircir ce point, remarquons que lorsque x_2 décrit un cycle en passant par A', il y a toujours un chemin décrit par x_3 qui lui correspond et qui est situé en totalité sur K; une autre branche de la même fonction algébrique (correspondant à l'involution I_n) est la branche x_1 qui se meut sur C; pour que le chemin de x_3 se continue, en passant par A sur C, il faut donc que cette branche x_1 aboutisse de même à A lorsque x_2 atteind A', c'est-à-dire que les deux branches x_3 et x_1 se réunissent en A; mais cela signifie qu'en A doit tomber un *point de coïncidence* de l'involution I_n.

Or cette conclusion contredit à notre hypothèse 1). En effet s'il n'y a qu'un nombre fini de points de coïncidence de I_n, une courbe C choisie d'une façon générale en Σ, n'en renferme pas.

On en déduit que la courbe L ne saurait être irréductible. Cette courbe sera donc composée et parmi ses composantes il y en aura une, que nous pouvons désigner par X, qui renfermera un seul point x_1 parmi les conjugués à x_2; en effet si x_1 décrivait une courbe renfermant un autre parmi ses points

conjugués, par exemple x_3, il aurait y sur K un cycle de x_2 auquel correspondrait un échange entre x_1, x_3, et on en conclurait, comme avant, qu'il y aurait sur C des points de coïncidence.

Nous venons de reconnaître que L se décompose, et précisement qu'il y a une de ses composantes (X) qui est décrite simplement par le point x_1 conjugué au point x_2, se mouvant sur K. Lorsque K se réduit par continuité à K, X se réduira à C.

En effet on pourrait se douter seulement que X se réduise à $C + \theta$, θ désignant une *courbe fondamentale*, lieu des points conjugués à un *point fondamental* de I_n appartenant à K; mais une analyse approfondie porte à exclûre cette hypothèse.

Ce n'est pas qu'on ne puisse supposer *à priori* que toutes les courbes K aient communs des points fondamentaux de I_n, qui seraient multiples pour les K, mais il est aisé de reconnaître que si l'on transforme un point fondamental en une courbe exceptionnelle, cette courbe ne fait pas partie de la K envisagée comme limite de $\bar{K}$, et en conséquence la courbe θ conjugué à la courbe exceptionnelle, ne fait pas partie de la courbe limite de X, qui est simplement C et non $C + \theta$.

Ceci posé, rappelons-nous que le système Σ de C est un système continu complet; on en déduira que la courbe X, qui en variant par continuité se réduit à une C, appartient elle-même à ce système Σ. Mais cette conséquence entraîne que la courbe $\bar{K}$, transformée d'une courbe K par une transformation de 2de espèce, soit le lieu décrit par un point conjugué à une courbe C, et par conséquent qu'elle appartienne au même système de K. Ce système sera donc invariant par rapport aux transformations de 2de espèce si, ainsi que nous l'avons supposé, les K sont irréductibles; c'est là une conclusion qui contredit à l'hypothèse 2) du n. 40, ainsi que nous l'avons remarqué.

On en conclut que *les courbes K ne sont pas irréductibles.*

42. Il faut analyser maintenant les différentes hypothèses qu'on peut faire au sujet de la décomposition des courbes K. On peut supposer:

ou bien que K se décompose en un certain nombre $h < n - 1$ de composantes $K_1, \cdots, K_h$;

ou bien qu'elle se décompose en $n - 1$ composantes.

Si c'est le premier cas qui a lieu, il y aura une partie irréductible de K, soit par exemple K_1, qui renferme une involution irrationnelle $\gamma_r^1 (r > 1)$ dont chaque groupe est constitué par r points conjugués de I_n.

Nous pourrons maintenant répéter pour les K_1, le raisonnement que nous avons développé avant au sujet des K.

Nous transformons les K_1 par les transformations de 2de espèce. Si les courbes transformées sont des courbes K_1 du même système, il s'ensuit que l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Il faut donc supposer que la courbe $\bar{K}_1$, transformée d'une K_1, n'appartienne pas au système de celle-ci. Maintenant $\bar{K}_1$ peut varier par continuité

se réduisant à K_1; la courbe L conjuguée à $\overline{K}_1$ se réduit alors à la courbe conjuguée à K_1, c'est-à-dire à la courbe

$$(r-1)K_1 + K_2 + \cdots + K_h + C.$$

Considérons un groupe de points $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de I_n dont un point x_2 est situé sur K_1, est un point x_1 est sur C. Lorsque x_2 décrit un cycle sur K_1, il n'est pas possible échanger x_1 avec un autre point x_3, du groupe, n'existant pas sur C des points de coïncidence. Mais d'un autre coté, à cause de raisons de continuité, cet échange devrait se présenter comme possible si un échange analogue a lieu sur L, c'est-à-dire si la courbe L est irréductible ou si elle ne renferme pas une composante (décrite simplement par le point x) qui se réduit à C lorsque $\overline{K}_1$, se réduit à K_1.

On en conclût que L est réductible et renferme une composante appartenant au système complet Σ des C; et il s'ensuit que $\overline{K}_1$, est une partie de la courbe conjuguée à une C et qu'elle appartient au même système que K_1, c'est-à-dire que le système des K_1 est invariant par rapport aux transformations de 2de espèce. C'est là une conclusion absurde, ainsi que nous l'avons déjà remarqué.

Cet absurde prouve que *la courbe K conjuguée à une C par rapport à I_n, se décompose en $n-1$ parties décrites simplement par les $n-1$ points conjugués à celui qui se meut sur C, et par conséquent birationnellement identiques à C.*

43. Il est aisé maintenant d'achever la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Supposons que Σ soit du type envisagé aux nn. 21, 25 et considérons en Σ les ∞^1 courbes C passant par un point x_1; les courbes conjuguées à ces C se décomposent en $n-1$ parties $C', \cdots, C^{(n-1)}$, qui passent respectivement par les points $x_2, \cdots, x_n$ du groupe de I_n déterminé par x_1.

Or un point quelconque P de la surface F appartient à un nombre fini de courbes C par x_1, courbes qui, se coupant en ce point, servent à le déterminer; aux C par P correspondent des C' par x_2 se coupant en un point conjugué P' qui se meut avec P et résulte ainsi dépendre rationnellement de P.

On voit d'ailleurs que cette correspondance rationnelle fait correspondre au point x_1, le point x_2.

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Toute involution I_n appartenant à une surface hyperelliptique F de rang 1 *et satisfaisant aux hypothèses* 1), 2) *du n.* 40, *est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même; ces transformations amènent un point quelconque de la surface F respectivement en ses $n-1$ conjugués par rapport à I_n.*

44. *Théorème fondamental.*

Le théorème que nous venons d'établir peut être énoncé sous une autre forme comme une propriété fondamentale des surfaces hyperelliptiques.

D'après les nn. 6, 35 toute surface hyperelliptique Φ de rang $r (> 1)$ et de diviseur δ, correspond à une involution I_n d'ordre $n = r\delta$ appartenant à une surface de Jacobi F, et possédant un nombre fini $N \geq 0$ de points de coïncidence (les surfaces rationnelles et les réglées elliptiques étant laissées de côté d'après le n. 4). Lorsque $\delta = 1$ l'involution I_n remplit les conditions 1) 2) demandées par le théorème précédent. Si au contraire $\delta > 1$ l'involution I_n résulte composée par une involution I_δ de rang 1; cette involution I_δ vient représentée par une surface de Picard F_δ, et l'on a sur F_δ une involution I_r d'ordre r dont les groupes correspondent aux points de la surface Φ et qui remplit les mêmes conditions 1) 2).

On a donc le théorème fondamental suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r > 1$ et de diviseur δ correspond à une involution engendrée par un groupe de r transformations birationnelles sur une surface de Picard F_δ.

C'est ce qu'on peut exprimer aussi de la façon suivante:

Soit $\Phi(x, y, z) = 0$ une surface hyperelliptique et supposons que, les x, y, z étant des fonctions abéliennes de deux paramètres u, v, il arrive qu'à tout groupe de valeurs de x, y, z, correspondent r couples (u, v) incongrus par rapport aux périodes primitives, soit:

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots, (u_r, v_r);$$

en ce cas les u, v seront liées par $r - 1$ substitutions linéaires

$$\left.\begin{aligned} u_i &= a_i u_1 + b_i v_1 + c_i \\ v_i &= d_i u_1 + e_i v_1 + f_i \end{aligned}\right\} \qquad i = 2, 3, \cdots, r$$

dont les coefficients ne dépendent pas de x, y, z.

Ces substitutions, ajoutée la substitution identique, forment un groupe d'ordre r; et les constantes a_i, b_i, d_i, e_i, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes.

V. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.

45. *Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.* D'après le théorème fondamental du n. 44, la détermination des familles birationnellement distinctes de surface hyperelliptiques, se trouve ramenée à celle des groupes finis de transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique de range 1 en elle-même.

On se rattache ainsi à la théorie de transformations des fonctions abeliennes de genre 2, théorie qui a pris naissance dans les Notes classiques de Hermite [26] et qui a été développée successivement par les recherches

(26) Comptes rendus de l'Academie des Sciences, 40 (1855).

de MM. Frobenius, Weber, Hurwitz, Wiltheiss, Humbert [27], ce dernier ayant considéré les transformations dans toute leur généralité, ainsi que nous aurons lieu de le rappeler dans la suite.

Rappelons d'abord le résultat auquel on est amené dans le cas où les modules sont arbitraires.

Soit F une surface de Jacobi, et u, v les integrales normales de 1re espèce attachées à F. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la substitution linéaire

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta$$

établisse une transformation rationnelle de la surface F en elle-même, de sorte que les coordonnées du point (u', v') soient des fonctions rationnelles des coordonnées du point (u, v), est que u', v' augmentent d'une des périodes simultanées, lorsque u, v augmentent d'une telle période. Soit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v: alors la condition précédente peut s'exprimer sous forme analytique en écrivant les relations:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h & \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h \\ \lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g' & \mu' = b_1 + b_3 h + b_2 g' \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 g + d_2 h & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 g + c_2 h \\ \lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3 h + d_2 g' & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 h + c_2 g' \end{cases}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont 16 *entiers caractéristiques* de la transformation.

Si l'on veut exprimer que la transformation est birationnelle, on doit supposer que la valeur du déterminant (*degré* de la transformation):

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

soit égale à ± 1 [28].

(27) Journal de mathématiques (1899–1900–1901–1903–1904–1906).

(28) Il faut toujours prendre la valeur $+1$, lorsque, ainsi que nous le supposons, on a entre les parties imaginaires des périodes, l'inégalité classique $g_1 g_1' > h_1^2$. Voir G. HUMBERT, *Sur les fonctions abeliennes singulières* (Deuxième Mémoire), Journal de Mathematiques, (5) 6 (1900), p. 291.

En éliminant les constantes $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ entre les équations (1), on a les relations

$$(A) \quad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$(B) \quad gha_3 + gg' a_2 + h^2 b_3 + hg' b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0$$

$$(C) \quad gha_3 + gg' b_3 + h^2 a_2 + hg' b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0$$

$$(D) \quad h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0 .$$

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, ces relations se réduisent à des identités et l'on tombe sur les transformations

$$u' = \pm u + \text{const.}$$
$$v' = \pm v + \text{const.}$$

de 1re et de 2de espèce.

Nous les appelerons les *transformations ordinaires* de la surface F en elle-même, car *elles existent sur F pour toute valeur des modules.*

Si au lieu de considérer une surface de Jacobi, on se rapporte à une surface de Picard F_δ de diviseur $\delta > 1$, on arrive de même à la conclusion que, pour des modules arbitraires, cette surface ne saurait admettre d'autres transformations en elle-même que les *transformations ordinaires*:

$$u' = \pm u + \text{const.}$$
$$v' = \pm v + \text{const.}$$

Or parmi ces transformations, celles qui sont (périodiques) de 2de espèce nous amènent à des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1 (n. 11), ainsi donc les seules transformations correspondant à des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, seront les transformations de 1re espèce, que l'on peut toujours réduire à la forme

$$u' = -u , \qquad v' = -v .$$

On en déduit le théorème suivant:

Il n'y a d'autres surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, dépendant de trois modules arbitraires, que des surfaces régulières de rang $r = 2$. Ces surfaces peuvent être représentées en exprimant les coordonnées de leurs points par des fonctions hyperelliptiques paires, d'ailleurs arbitraires. Elles se partagent en une infinité de familles birationnellement distinctes, d'après la valeur du nombre entier δ qui en est le diviseur.

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ ont été l'objet d'études classiques (Kummer, Weber, Humbert); le cas $\delta > 1$ a appelé récemment l'attention de MM. Traynard et Remy.

46. *Surfaces de Kummer.* Nous allons considérer d'abord les surfaces régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$; s'il n'y aura ici rien d'essentiel à ajouter aux résultats connus, nous aurons au moins l'occasion de devélopper

la méthode que nous employerons dans la suite pour étudier les cas nouveaux qui se présentent pour $r > 2$.

Remarquons d'abord que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$, correspond à une involution de couples de points appartenant à une surface de Jacobi et représentée sur celle–ci par

$$u + u' = \lambda , \qquad v + v' = \mu \tag{2}$$

(λ , μ constantes).

Ceci posé considérons sur F le système fondamental Σ constitué de ∞^2 courbes C de genre 2, se coupant deux à deux en 2 points (n. 21).

Nous allons supposer d'abord que le C soient irréductibles, ce qui est le cas général.

Le système Σ est transformé en lui–même par toute involution du type (2). Ainsi si l'on se donné une involution I_2 de ce type, il y aura ∞^2 couples de courbes C conjuguées par rapport à I_2. Construisons une surface Φ image de I_2, dont les points correspondent *sans exception* aux couples de cette involution. Aux courbes C répondront sur Φ des courbes K; chaque K représentera deux C conjuguées par rapport à I_2.

Il est aisé de reconnaître que deux courbes K se coupent en 4 points, puisque deux couples de courbes C sur F ont communs 8 points (qui se partagent ici en 4 couples de I_2). De même on voit que les courbes K (dont le genre est 2 comme celui de C) ont un point double variable; en effet toute K renferme un point double correspondant au couple de I_2 qui est commun aux deux C homologues à K et conjuguées entr'elles par rapport à I_2.

La surface Φ étant régulière, c'est–à–dire dépourvue d'intégrales simples, on aura d'après une remarque de M. Humbert, que les ∞^2 courbes K, tracées sur Φ, appartiennent à un système linéaire sans points base, de courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points.

On peut même supposer que les courbes de ce système ∞^2 soient les sections planes de la surface Φ. En effet il est aisé de reconnaître que, étant excepté le cas de la surface de Jacobi particulière associée à une courbe réductible, les courbes K passant par un point de Φ ne renferment pas en conséquence d'autres points variables avec celui–là, et par suite on peut toujours transformer la surface choisie comme image de I_2, de façon que courbes K viennent coupées par des plans.

Alors la surface Φ sera du quatrième ordre à sections planes de genre trois (c'est–à–dire dépourvue de courbes multiples); les ∞^2 courbes K qui répondent aux C de F, seront les sections découpées sur Φ par les plans tangents.

En outre Φ aura des points doubles qu'on déterminera de la façon suivante:

Il y a sur F 16 points de coïncidence de l'involution I_2 qui tombent dans les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2} , \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2} ,$$

ω_1 et ω_2 désignant un couple de périodes simultanées des intégrales u , v.

A chacun de ces points correspond un point de Φ dont nous allons calculer la multiplicité.

A cet effet considérons le système linéaire $|K|$ formé par les sections planes de Φ. A ce système correspond sur F un système linéaire auquel appartiennent les ∞^2 couples de courbes $C + C'$ de Σ, conjuguées par rapport à l'involution I_2; système linéaire qu'on pourra désigner par

$$|D| = |C + C'|.$$

Ceci posé, considérons les ∞^1 couples de courbes $C + C'$ qui passent par un point uni P de I_2. Il a lieu de rappeler que les ∞^1 courbes C par P forment une série d'éléments de genre 2, et que dans cette série il y a *une* g_2^1, qui est constituée par les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P; on en conclût que, les ∞^1 couples $C + C'$ formant aussi une g_2^1, sont constituées de courbes tangentes en P.

Il s'ensuit que le système linéaire ∞^2 des courbes D passant par P, a en P un point-base double, de sorte que deux courbes de ce système se coupent hors de P en $8 - 4 = 4$ points mobiles. Par conséquent aux courbes D par P correspondent sur Φ des courbes de $|K|$ par un point P', se coupant deux à deux hors de P' en $4/2 = 2$ points mobiles; ainsi donc P' est un point double de Φ.

On reconnaît aisément qu'il s'agit d'un point double conique, parce que toute courbe D, arbitrairement choisie parmi celles qui passent par P, a en P deux branches distinctes, auxquelles correspondent deux branches distinctes de la section plane homologue de Φ, et parce que d'un autre coté le cone tangent à Φ en P' correspond élément par élément au domaine de P sur F et il est en conséquence irréductible.

Nous venons de reconnaître qu'aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F, répondent 16 *points doubles coniques de* Φ.

Il y a lieu maintenant de rappeler le principe de dualité que nous avons établi au n. 23.

Le système Σ des courbes C constitue une variété ∞^2 d'éléments, birationnellement identique à la surface F, et transformée en elle-même par l'involution I_2; aux couples de C conjuguées correspondent les sections de Φ par les plans tangents, qui forment une variété identique à la surface Φ elle-même.

Il y aura donc 16 courbes C de coïncidence, transformées en elles-mêmes par I_2, auxquelles répondront 16 *plans singuliers qui touchent* Φ *suivant des coniques.*

On trouvera d'ailleurs aisément que: toute courbe C de coïncidence renferme 6 points de coïncidence de I_2 (puisqu'une g_2^1 sur une courbe de genre deux a justement 6 coïncidences); par dualité tout point de coïncidence appartiendra à 6 courbes C de coïncidence.

Deux C de coïncidence se couperont en 2 points de coïncidence, et réciproquement deux points de coïncidence appartiendront à 2 courbes C de coïncidence, etc.

Ces propriétés se réflechissent en des propriétés analogues de 16 points doubles et de 16 plans tangents suivant des coniques de la surface Φ; on a ainsi les propriétés bien connues des points et des plans singuliers d'une *surface de Kummer*.

Ces propriétés trouvent leur expression la plus simple en une représentation symbolique qui a été introduite par M. Humbert, et qui est la suivante.

Considérons les deux séries de nombres

$$1, 2, 3, 4, \quad \text{et} \quad 1', 2', 3', 4',$$

et désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les nombres de la première série pris suivant un ordre quelconque, et analoguement par $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les nombres de la seconde série.

On peut représenter les 16 plans singuliers de Φ par

$$\alpha\alpha', \alpha\beta', \cdots, \beta\alpha', \beta\beta', \cdots,$$

et les 16 points doubles par

$$(\alpha\alpha'), (\alpha\beta'), \cdots, (\beta\alpha'), (\beta\beta'), \cdots,$$

de façon que

1) les six plans singuliers par les points $(\alpha\alpha')$ soient $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$, $\alpha'\delta$ etc.;

2) corrélativement les six points doubles appartenant au plan $\alpha\alpha'$ soient $(\alpha\beta')$, $(\alpha\gamma')$, $(\alpha\delta')$, $(\alpha'\beta)$, $(\alpha'\gamma)$, $(\alpha'\delta)$ etc.

Remarque. Ce même symbolisme sert à représenter la configuration des points et des courbes de coïncidence de l'involution I_2 sur F.

47. *Cas de dégénérescence.* Nous venons d'établir le théorème connu qu'on peut énoncer de la façon suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ est birationnellement identique à une surface de Kummer du quatrième ordre, douée de 16 points doubles et de 16 plans tangents suivant des coniques, qui forment la configuration bien connue.

Il y a pourtant un cas d'exception, dans lequel la surface de Kummer Φ se réduit à une quadrique double Q, douée d'une courbe de diramation.

C'est le cas où l'on part d'une surface de Jacobi qui représente les couples de deux courbes elliptiques.

Alors les courbes C de Σ sont réductibles; chacune se compose d'une courbe elliptique C_1 et d'une courbe elliptique C_2 se coupant en un point; et C_1 et C_2 appartiennent respectivement à deux faisceaux elliptiques. Si l'on construit, comme avant, une surface Φ image de I_2, on trouve sur Φ deux faisceaux linéaires de courbes elliptiques K_1, K_2, homologues aux C_1, C_2 respectivement; une K_1 et une K_2 se coupent en 2 points. Or les ∞^2 courbes

$K_1 + K_2$ seront renfermées en un système ∞^3 de courbes K de genre 3, se coupant deux à deux en 4 points; mais il est aisé de voir:

1) que les K sont des courbes hyperelliptiques, puisqu'elles sont coupées en 2 points par les courbes du faisceau $|K_1|$ ou par les courbes de $|K_2|$;

2) que par conséquent les courbes K passant par un point de Φ passent par un point conjugué, deux points étant conjugués lorsqu'ils sont communs à une K_1 et à une K_2;

3) qu'à cause de cette circonstance la surface transformée de Φ ayant comme sections planes les courbes K, se réduit à une quadrique double Q, ainsi que nous l'avons énoncé.

Quant à la courbe de diramation sur Q, on voit d'abord qu'elle est d'ordre 8, coupant les droites des deux systèmes (génératrices et directrices) de la quadrique également en 4 points.

Il y a sur F 16 points de coïncidence de I_2, et il y a 4 courbes de coïncidence C_1 et $4C_1$, qui se coupent en ces 16 points.

Or aux $4C_1$ répondent 4 droites, soit 4 génératrices de Q, aux $4C_2$ quatres directrices de la même quadrique. Eh bien, il est aisé de reconnaître que ces 8 droites forment la courbe de diramation de la surface Q, regardée comme une image double de Φ.

48. *La surface hyperelliptique* ($r = 2$, $\delta = 1$) *représentée sur un plan double*. La surface de Kummer peut être projetée par un de ses points doubles sur un plan; on peut la transformer ainsi en un *plan double*, c'est-à-dire en une surface de la forme

$$z^2 = f(x, y);$$

la courbe de diramation du plan double,

$$f = 0,$$

se compose de 6 droites tangentes à une même conique C.

En cette représentation se trouve renfermé aussi le cas particulier que nous venons de considérer; il correspond à une dégénérescence de la conique C, considérée comme enveloppe, c'est-à-dire au *cas où* $f = 0$ *se compose de deux ternes de droites passant respectivement par deux points.*

49. *La surface du quatrième ordre hyperelliptique caractérisée par ses points doubles*. Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$, peut être transformée en une surface de Kummer du 4^{me} ordre à 16 points doubles et 16 plans singuliers; fait exception le cas particulier où la surface de Kummer se réduit à une quadrique double.

Or il y a lieu de rappeler que « toute surface du quatrième ordre possédant 16 points doubles, possède aussi 16 plans tangents suivant des coniques,

plans qui forment avec les 16 points la configuration de Kummer, que nous avons définie ».

C'est là une conséquence immédiate de ce fait, que en projetant la surface donnée Φ par un de ses 16 points doubles sur un plan double, on a sur celui-ci une courbe de diramation douée de 15 points doubles, qui se décompose en 6 droites. En effet il suit de cette remarque que pour chacun des 16 points doubles de Φ il passe 6 plans tangents suivant de coniques, renfermart chacune 6 points doubles; et partant il y a 16 plans singuliers.

Or la configuration formée par ces plans en union aux 16 points doubles de Φ, jouit des propriétés connues de la configuration de Kummer, propriétés que l'on peut exprimer au moyen du symbolisme de M. Humbert, et qui découlent, de la propriété fondamentale établie, savoir que:

il y a 6 plans	il y a 6 points
singuliers par	doubles sur
chaque point	chaque plan
double.	singulier.

Ceci posé, considérons la série des surfaces du quatrième ordre (de Kummer) douées de 16 points doubles. Cette série est ∞^3 et elle est *irreductible*; ainsi toute surface Φ dépend exclusivement de *trois modules*.

En supposant ce point bien établi, il en résulte que toute surface Φ est une surface hyperelliptique de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$.

Partant, si l'on se donne une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles, il doit être possible de construire une surface de Jacobi F dont Φ est une transformée rationnelle, et telle que les coordonnées de ses points s'expriment par celles des points de Φ à l'aide d'une racine carrée.

Nous allons monter comment on peut effectuer cette construction. Celà signifie que nous nous proposons le problème suivant:

Etant donnée une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles et par conséquent aussi de 16 plans tangents suivant des coniques (points et plans formant la configuration de Kummer), il s'agit d'exprimer les coordonnées des points de Φ par des fonctions Θ de deux paramètres.

Ce problème peut être résolu par le procédé qui suit.

Soit

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation homogène de la surface donnée.

Considérons une forme algébrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

de degré pair $2n$, que nous allons déterminer dans la suite, et construisons dans l'espace à 5 dimensions $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5)$ la surface F qui est définie par

$$y_1 = x_1^n, \quad y_2 = x_2^{n-1} x_1, \quad y_3 = x_3^{n-1} x_1, \quad y_4 = x_4^{n-1} x_1, \quad y_5 = \sqrt{f}.$$

Cette *surface* est représentée sur la *surface double* Φ; *la courbe de diramation* est donnée par $f = 0$; toutefois il faut retrancher de l'intersection de $f = 0$, $\Phi = 0$, les parties qui comptent doubles.

Nous tâcherons de déterminer f de façon que la surface double Φ ne possède d'autres points de diramation que ses 16 points doubles, et nous montrerons qu'en ce cas la surface F est une surface hyperelliptique de rang 1 (ainsi donc d'après nos hypothèses, une surface de Jacobi).

Il y a lieu de supposer d'abord que f ne renferme pas comme facteur une forme algébrique des x à une puissance supérieure à la première.

Ceci posé considérons l'intersection de $f = 0$, $\Phi = 0$:

1) Si parmi les composantes de cette courbes il y en a une comptée $2s$ fois, cette composante ne fait pas partie de la courbe de diramation; s'il y a une composante comptée $2s + 1$ fois, celle-ci doit être comptée comme si elle était simple.

2) Si $f = 0$ renferme un point double, O, de Φ, et si toute droite du cône tangent par O a, en O, s intersections avec $f = 0$, il arrive que le domaine du point O sur Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite de Φ, lorsque s est impair; au contraire si s est pair, ce même domaine ne constitue pas une courbe de diramation de Φ.

Cette remarque se ramène à la première en effectuant une transformation birationnelle de l'espace (x), de façon que le point O soit transformé en une courbe.

3) La surface F peut être réductible en deux parties dont chacune soit représentée simplement sur Φ. En ce cas il n'y a pas des points de diramation sur la surface double Φ.

Ceci posé, rappelons les propriétés de la configuration de Kummer appartenant à Φ. On sait qu'il y a des tétraèdres de Rosehnaim se composant de 4 plans tangents suivant des coniques, qui renferment dans leur ensemble les 16 points doubles de la surface.

On peut supposer d'avoir pris un tétraèdre de Rosenhaim comme tétraèdre fondamental pour le système de coordonnées auxquelles nous nous rapportons, soit

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Posons

$$f = x_1 x_2 x_3 x_4$$

et considérons la surface F définie par les équations

$$(3) \qquad y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2 x_1, \quad y_3 = x_3 x_1, \quad y_4 = x_4 x_1, \quad y_5 = \sqrt{f}.$$

Comme $f = 0$ est tangent à Φ suivant les 4 coniques situées dans les plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

on voit que ces coniques ne sont pas des courbes de diramation de la surface double Φ, leurs points étant des points critiques apparents.

Au contraire $f = 0$ a en chaque point double de Φ une multiplicité 1 ou 3, et n'a aucun contact particulier avec les droites du cône tangent à Φ en ce point; ainsi donc le domaine de tout point double de Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il s'ensuit d'abord que la surface F décrite par le point (y) est irréductible.

Evaluons les genres de F.

D'abord on aura

$$p_g = P_2 = P_3 \cdots = 1;$$

c'est là une conséquence immédiate de ce qu'aux sections planes de Φ correspondent sur F des courbes de genre 5 se coupant deux à deux suivant de groupes canoniques de 8 points. Aux courbes de diramation infiniment petites constituées par les domaines des points doubles de Φ, répondront sur la surface F, ou sur une transformée de celle-ci, des points simples ou des courbes exceptionnelles (29).

Pour calculer le genre numérique p_a de F, nous considérerons l'invariant de Zeuthen–Segre

$$I = 12\, p_a - p^{(1)} + 9$$

où (étant $P_i = 1$) le genre linéaire

$$p^{(1)} = 1.$$

La valeur de cet invariant pourra etre déduite de celle qui appartient à l'invariant analogue de Φ, qui est

$$I' = 20.$$

On sait que l'invariant I' peut être évalué de la façon suivante:

Considérons un faisceau de sections planes C de la surface Φ. Elles sont de genre $\pi = 3$ et il y a $n = 4$ points-base, partant

$$I' = \delta - n - 4\pi = \delta - 16;$$

δ désigne ici le nombre des courbes C douées d'un point double, mais les sections planes C qui passent par un point double de Φ comptent deux fois dans ce nombre.

Ainsi on a

$$\delta = 2 \cdot 16 + \delta',$$

où $\delta' = 4$ est la classe de la surface, et on retrouve la valeur de I':

$$I' = 20.$$

(29) Autrement ces courbes seraient des courbes canoniques proprement dites (F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *44* (1893)) tandis que F ne renferme pas de telles courbes ($P_i = 1$).

Aux courbes C correspondent sur F des courbes K de genre $\Pi = 5$; formant un faisceau qui a $N = 8$ points–base. On aura

$$I = \Delta - N - 4\Pi = \Delta - 28,$$

où Δ désigne le nombre des courbes K de notre faisceau qui sont douées d'un point double.

Or, parmi ces courbes K, il y en a d'abord $\delta' = 4$ douées chacune de 2 points doubles, correspondant au point double de la courbe homologue C; en second lieu il y a $16\,K$ correspondant aux C qui passent par les points doubles de Φ, et douées chacune d'un point double tombant en un point simple de F (ou d'une surface transformée de celle–ci). Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\cdot 4 + 16 = 24 \\ I &= -4 \qquad\qquad (= 12\,p_a + 8) \\ p_a &= -1. \end{aligned}$$

On conclût que la surface F, ayant les genres

$$p_a = -1, \qquad p_g = P_4 = 1,$$

est une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16).

Ainsi notre problème se trouve résolu, au moins théoriquement. En effet il est aisé d'exprimer les coordonnées des points de Φ en renversant les formules (3), ce qui se fait rationnellement; en suite il faudra construire les deux intégrales simples de première espèce u, v attachées à F; les coordonnées des points de Φ seront des fonctions hyperelliptiques de u, v.

50. *Surfaces hyperelliptiques de diviseur* $\delta > 1$. Passons maintenant aux surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$.

Toute surface Φ de cette espèce correspond à une involution I_2 sur une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

L'involution I_2 est engendrée par une transformation de 1re espèce:

$$\begin{aligned} u + u' &\equiv \lambda \\ v + v' &\equiv \mu, \end{aligned}$$

par rapport aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}$$

Par conséquent on a, comme pour $\delta = 1$, 16 points de coïncidence de I_2 qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2}. \qquad (\omega_1, \omega_2 \text{ périodes simultanées})$$

Or il y a sur F_δ un système ∞^2 de courbes C_δ de genre 2, douées de $\delta - 1$ points doubles, se coupant deux à deux en 2δ points. Ce système est invariant par rapport à toute involution I_2 de 1re espèce.

Aux couples de courbes C_δ conjuguées par rapport à I_2, correspondent, sur une surface Φ image de I_2, des courbes de genre 2, se coupant deux à deux en 4δ points et douées de $2\delta - 1$ points doubles. La surface Φ étant régulière, ces courbes seront renfermées dans un même système linéaire $\infty^{2\delta+1}$ de genre $2\delta + 1$ et de degré 4δ.

On peut supposer que Φ soit transformée en une surface de l'espace $S_{2\delta+1}$ de telle façon que ses sections hyperplanes soient les courbes de genre 2 que nous venons de nommer.

Alors Φ sera une surface d'ordre 4δ, dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques; elle aura 16 points doubles correspondant aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F_δ.

Il y aura en outre 16 hyperplans singuliers touchant Φ suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces hyperplans correspondent aux 16 courbes C_δ qui sont transformées en elles–mêmes par I_2.

Les points et les hyperplans singuliers de la surface Φ en $S_{2\delta+1}$ formeront une configuration qui pourra être représentée par le même symbolisme de M. Humbert, que nous avons adopté pour la configuration de Kummer. Ce symbolisme exprime en effet les propriétés fondamentales suivantes: tout hyperplan singulier renferme 6 points doubles, deux hyperplans ont communs (outre que $\delta - 1$ points simples de la surface) deux points doubles et correlativement. A ce symbolisme on est aussi amené par la représentation paramétrique de la surface. C'est ce qu'on exprimera en disant que ces points et ces hyperplans forment une *configuration semblable* à celle de Kummer.

Ainsi nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surfaces d'ordre 4δ à section de genre $2\delta + 1$ en $S_{2\delta+1}$, surface possédant 16 points doubles et 16 hyperplans singuliers qui la touchent suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces 16 points et ces 16 hyperplans singuliers forment une configuration semblable à celle de Kummer pour $\delta = 1$. C'est pourquoi on dira aussi que Φ est une *surface de Kummer généralisée.*

Remarque. Il est aisé de reconnaître que pour $\delta > 1$ la surface Φ ne dégénère pas en une surface double, même dans le cas auquel donne naissance une courbe de genre 2 réductible.

51. *La surface hyperelliptique d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$ caractérisée par ses points et ses hyperplans singuliers.* Nous venons de prouver que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surface d'ordre 4δ de $S_{2\delta+1}$ douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers, qui touchent la surface suivant des courbes rationnelles d'ordre 2δ formant une configuration semblable à celle de Kummer.

Il y a lieu d'établir la proposition réciproque suivante, qui est d'ailleurs analogue à celle que nous avons établie pour $\delta = 1$.

Toute surface $\Phi_{4\delta}$ d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$, douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers formant une configuration semblable à celle de Kummer, est une surface hyperelliptique de rang 2 et de diviseur δ.

Il suffit de répéter ici la démonstration que nous avons développée pour $\delta = 1$. On construira ainsi une surface F représentée sur $\Phi_{4\delta}$ comptée deux fois, où il y aura 16 points de diramation qui tomberont en les 16 points doubles; il s'ensuivra que la surface F aura le genre géométrique $p_g = 1$ et le genre numérique $p_a = -1$. Comme il n'y aura pas d'ailleurs des courbes pluricanoniques, F sera une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16). Quant à son diviseur il est aisé de reconnaître qu'il aura la valeur δ, ou tout au moins qu'il sera $\leq \delta$.

La surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ peut être caractérisée aussi d'une autre façon remarquable. Rappelons d'abord que le système des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$ correspond à un système linéaire de F_δ auquel appartiennent les couples de courbes $C_\delta + C'_\delta$ conjuguées par rapport à l'involution I_2, système qu'on peut désigner par $|C_\delta + C'_\delta|$.

Or ce système est renfermé dans un système linéaire complet $|2C_\delta|$ qui a la dimension $4\delta - 1$.

On peut supposer que le système $|2C_\delta|$ soit découpé sur F_δ par les hyperplans d'un espace $S_{4\delta-1}$. Alors l'involution I_2 sera engendrée par une homographie de cet espace, homographie qui laisse invariant la surface F_δ.

Parmi les hyperplans de $S_{4\delta-1}$, il y en a $\infty^{2\delta+1}$ découpant sur F_δ les courbes du système $|C_\delta + C'_\delta|$; ce sont des hyperplans doubles pour notre homographie involutoire. Il y aura donc une seconde série $\infty^{2\delta-3}$ de hyperplans doubles coupant sur F_δ $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies par rapport à I_2.

Ces $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies forment un système linéaire qui a 16 points-base, tombant en les 16 points doubles de I_2.

En correspondance à ces courbes on a sur $\Phi_{4\delta}$ un système linéaire de courbes passant par les 16 points doubles de la surface, et telles que comptées deux fois appartiennent au système complet double de celui qui est découpé par les hyperplans. En se rappelant que ce système double est découpé tout entier par les quadriques de $S_{2\delta+1}$ (30), on voit que les courbes nommées ci-dessus sont des courbes de contact de $\infty^{2\delta-3}$ quadriques passant par le 16 points doubles de la surface.

Ainsi donc:

Toute surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ de $S_{2\delta+1}$ ($\delta > 1$) possède $\infty^{2\delta-3}$ quadriques passant par ses 16 points doubles, qui la touchent suivant une courbe d'ordre 4δ.

(30) Cfr. F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *44* (1893), (§ V, 5).

Réciproquement toute surface d'ordre 4δ *de* $S_{2\delta+1}$ *à sections de genre* $2\delta+1$, *possédant* 16 *points doubles et une quadrique tangente suivant une courbe d'ordre* 4δ *qui passe par ces points, est une surface hyperelliptique.*

En effet en désignant par $x_i\,(i = 1, 2, \cdots, 2\delta+2)$ les coordonnées homogènes des points de la surface, et étant $f(x_i) = 0$ l'équation de la quadrique considérée, on voit que la surface.

$$y_i = x_i, \qquad y_{2\delta+3} = \sqrt{f}$$

est une surface hyperelliptique de rang 1

$$(p_a = -1, p_g = P_4 = 1).$$

Maintenant une question se pose: l'existence de quadriques tangentes qui passent par les 16 points doubles de la surface $\Phi_{4\delta}$, ne serait-elle une conséquence de ce que la surface possède 16 points doubles?

S'il en est ainsi les surfaces hyperelliptiques $\Phi_{4\delta}\,(p_a = p_g = P_2 = 1)$ seraient caractérisées tout simplement par la propriété d'avoir 16 points doubles, ainsi que celà arrive pour $\delta = 1$.

Nous croyons qu'on doit répondre par l'affirmative à la demande posée dessus. Cependant pour établir ce beau théorème, il faudrait pouvoir calculer en général le nombre des modules dont dépendent les différentes familles de surfaces de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, familles qui se distinguent d'après la valeur d'un entier [31].

Or c'est là une question délicate qui demeure en suspens.

Partant nous nous bornerons à remarquer que:

Toute surface d'ordre 8 *de* S_5, *ayant les sections hyperplanes de genre* 5, *et possédant* 16 *points doubles, est une surface hyperelliptique.*

C'est ce qui découle d'un compte de modules, qui se fait ici d'une façon immédiate. En effet les surfaces d'ordre 8 dont il est question, sont chacune intersection complète de trois quadriques, c'est-à-dire surfaces-base d'un réseau; un tel réseau dépend de 19 invariants (modules de la surface-base); 16 points doubles entraînent autant de conditions, ce qui réduit à 3 le nombre des modules.

52. *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre* $(\delta > 1)$. Les surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ ont été l'objet de plusieurs Notes et d'un Mémoire de M. Traynard [32], qui en se plaçant dans les premiers cas $\delta = 2, 3, 4$, a étudié notamment les surfaces d'ordre 4 que l'on obtient par projection des surfaces $\Phi_{4\delta}$ considérées ci-dessus.

(31) Cfr. F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria nelle superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *44* (1893), (§ III, 6).

(32) Comptes rendus: 1904, I p. 339, II p. 718: 1905, I p. 218, II 931. E. TRAYNARD, *Sur les fonctions thêta de deux variables*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3) *24* (1907), pp. 77–177.

D'autres remarques concernant ces mêmes surfaces ont été faites par M. Remy (33), qui en particulier a rencontré toute une série denombrable de surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$, se ramenant à des surfaces d'ordre 4 douées de 15 points doubles.

A notre point de vue la question de déterminer les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre (de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$), peut être traitée de la façon suivante.

Il s'agit de déterminer les types projectivement distincts de surfaces du quatrième ordre, qui résultent d'une transformation birationnelle, en partant d'une surface donnée $\Phi_{4\delta}$.

Or le système linéaire transformant pourra être découpé sur $\Phi_{4\delta}$ par des variétés d'un certain ordre y, se comportant dans les 16 points doubles de la surface comme si ceux-ci étaient des points multiples d'ordre x_i ($i = 1, \cdots, 16$). La dimension d'un tel système est

$$2\delta y^2 + 1 - \sum_{i=1}^{16} x_i^2,$$

et son degré est

$$4\delta y^2 - 2\sum x_i^2;$$

en égalent ce degré à 4, ou la dimension à 3, on tombe sur l'équation arithmétique

$$2\delta y^2 - \sum x_i^2 = 2.$$

On peut avoir aussi d'autres surfaces du quatrième ordre transformées de $\Phi_{4\delta}$, qui ne sont pas obtenues par un système transformant multiple du système des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$, tel que le système que nous venons de considérer.

En tous cas, en rappelant le théorème du n. 27 concernant les surfaces de Picard, il est aisé de reconnaître que, si les modules sont arbitraires, le système découpé sur la surface du quatrième ordre par les quadriques, sera représenté sur $\Phi_{4\delta}$ par un système découpé par des variétés ayant dans les points doubles une certaine multiplicité, et n'ayant d'ailleurs des courbes-base.

Ainsi donc on tombe sur la discussion arithmétique de l'équation

$$2\delta y^2 - \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 8.$$

La question de déterminer toutes les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de diviseur $\delta > 1$, dans le cas de modules arbitraires, se ramène à la discus-

(33) Comptes rendus: 1906, I p. 768, II p. 767. L. REMY, *Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre*, Bulletin de la Société Mathématique de France, *35* (1907), pp. 53–69.

sion de cette équation de Pell généralisée. Il faut néanmoins tenir compte de certaines inégalités qui expriment l'irréductibilité du système transformant considéré, et qui, dans un cas particulier, ont été étudiées de près par M. Remy.

53. *Quelques remarques au sujet du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique.* Soit une famille de surfaces algébriques dépendant de trois modules; si ces surfaces sont hyperelliptiques de rang $r > 1$, elles seront des surfaces régulières de rang $r = 2$, birationnellement identiques à des surfaces de Kummer généralisées, c'est-à-dire, à des $\Phi_{4\delta}$ pour une valeur convenable de δ.

Ainsi donc *la question de reconnaître si une surface donnée (dépendant de trois modules) est hyperelliptique de rang $r > 1$, se ramène à celle de reconnaître l'idendité birationnelle de notre surface avec un type de surfaces, qui vient caractérisé à un point de vue invariant par l'existence d'un certain groupe de courbes* (le groupe qui correspond à celui de points double et des courbes de contact des hyperplans singuliers de $\Phi_{4\delta}$).

Partant, après avoir reconnu que les genres de la surface donnée sont tous éguax à 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), il s'agira d'exprimer que la surface renferme un certain groupe de courbes rationnelles (de degré — 2).

Or d'après un théorème de M. Severi, qu'il a récemment complété, toutes les courbes appartenant à une surface régulière, peuvent être obtenues par addition et soustraction en partant d'un nombre fini de systèmes linéaires. Par ce procédé *la question posée se ramène à la discussion arithmétique d'un système d'équation quadratiques.*

Ces remarques suffisent à montrer quel est en général le caractére du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique de rang $r > 1$. On serait amené toujours à des discussions analogues, dans le cas de surfaces régulières correspondant à des Θ dont les modules satisfont à des relations particulières.

Lorsqu'il s'agit de surfaces irrégulières, la question devient beaucoup plus simple et, comme nous arrons lieu de le montrer, on arrive à définir les surfaces hyperelliptiques irregulières par les valeurs de certains caractères invariants.

VI. Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.

54. D'après les nn. 31, 36 toute surface hyperelliptique irrégulière de rang $r > 1$, est une surface elliptique de genres

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1$$

renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

Le théorème fondamental que nous avons établi au n. 44, permet de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, et cette analyse, en laquelle nous avons été précedés

par MM. Bagnera et de Franchis, amène à trouver toutes les surfaces elliptiques renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

De notre côté, et d'une facon indépendante de ces recherches, nous avons établi la classification des surfaces hyperelliptiques irrégulières en tâchant de démontrer directement la réciproque de la proposition du n. 36; il s'ensuit que les surfaces hyperelliptiques irrégulières correspondent aux valeurs

$$r = 2, 3, 4, 6$$

du rang r, et qu'elles peuvent être définies d'après les valeurs de leurs plurigenres.

On a ainsi le théorème fondamental suivant.

Toute surface de genre arithmétique $p_a = -1$ et dont le genre et les plurigenres géométriques ont les valeurs 0, 1, est une surface hyperelliptique. Le tableau des familles différentes correspondantes à ces hypothèses, se trouvera indiqué en détail au n. 57.

55. *Rappel de quelques notions concernant les surfaces elliptiques.* Il faut rappeler d'abord quelques propriétés des surfaces elliptiques de genre $p_g = 0$ (34).

Il y a sur toute surface de cette famille un faisceau elliptique de courbes C de genre $\pi > 0$, et un faisceau rationnel de courbes elliptiques K; une courbe C et une courbe K se coupent en un certain nombre n de points, et ce nombre vient appelé le *déterminant* de la surface. Nous considérerons en particulier le cas $\pi = 1$, qui nous interesse ici.

Toute surface elliptique de genre $p_g = 0$ et de déterminant n, peut être représentée sur un cylindre elliptique, multiple suivant le nombre n,

$$\varphi(x, y) = 0;$$

il y aura sur φ une courbe de diramation formée par les courbes

$$z = a_1, \qquad z = a_2, \cdots, z = a_t,$$

à compter respectivement suivant les ordre

$$s_1, s_2, \cdots, s_t.$$

Si la surface elliptique doit renfermer un faisceau elliptique de courbes C de genre 1, on aura

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2,$$

et par suite l'on tombera nécessairement sur un des cas suivants:

a) $\qquad t = 4, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2, \qquad n = 2\delta$

(δ étant un entier *à priori* quelconque).

(34) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, *20* (1905), pp. 1–33.

La surface ainsi définie dépend de *deux modules* c'est-à-dire du module de φ et du rapport anharmonique $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$. Les valeurs de ses genres et de ses plurigenres sont données par la formule de Enriques (l. c. § 8):

$$P_m = 1 + m(t-2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i ,$$

où ϱ_i est un entier satisfaisant aux conditions

$$\frac{m}{s_i} \leq \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1$$

et où l'on prend $P_m = 0$ lorsque le second membre de la formule résulte négatif. On obtient ainsi

$$p_a = -1 , \qquad P_{2i+1} = 0 , \qquad P_{2i} = 1.$$

Réciproquement ces valeurs suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même de savoir que

$$p_a = -1 , \qquad p_g = 0 , \qquad P_2 = P_4 = 1.$$

En effet étant $p_a = -1$, $p_g = 0$, on a une surface elliptique dont les plurigenres peuvent être calculés d'après la formule citée d'Enriques. Or si $P_2 = t - 3 = 1$, il suit $t = 4$; et si $P_4 = 1$, étant $s_i \geq 2$, il suit

b)
$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2.$$
$$t = 3 , \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3 , \qquad n = 3\delta.$$

La surface ainsi définie dépend d'un module, c'est-à-dire du module de φ (les courbes C sont en ce cas équianharmoniques).

On a

$$p_a = -1 , \qquad P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0 , \qquad P_{3i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1 , \qquad P_3 = 1 , \qquad P_8 = 0,$$

car d'après la formule habituelle on en déduit $t = s_1 = s_2 = s_3 = 3$.

c)
$$t = 3 , \qquad s_1 = 2 , \qquad s_2 = s_3 = 4 , \qquad n = 4\delta.$$

La surface ainsi définie – renfermant un faisceau de courbes harmoniques C – dépend d'un module. On a

$$p_a = -1 , \qquad P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0 , \qquad P_{4i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il est question. Il suffit méme que l'on ait

d)
$$p_a = -1 , \qquad P_6 = P_{10} = 0 , \qquad P_4 = 1.$$
$$t = 3 , \qquad s_1 = 2 , \qquad s_2 = 3 , \qquad s_3 = 6 , \qquad n = 6\delta.$$

La surface ainsi définie – renfermant comme dans le cas b) un faisceau de courbes équianharmoniques – dépend aussi d'un module. On a

$$p_a = -1\,, \qquad P_{6i+1} = P_{6i+2} = \cdots = P_{6i+5} = 0\,, \qquad P_{6i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants caracterisent les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même que l'on ait:

$$p_a = -1\,, \qquad P_2 = P_3 = P_{14} = 0\,, \qquad P_6 = 1.$$

Dans ce cas la discussion relative est peut–être moins simple et par suite nous l'exposons ici brièvement.

Étant $P_2 = 0$ et par suite $p_g = 0$, il s'agit d'une surface elliptique. La relation $P_2 = 0$ amène $t = 3$, tandis que la relation $P_6 = 1$ donne

$$\alpha) \quad s_i \geq 3 \qquad\qquad (i = 1\,, 2\,, 3)$$

ou

$$\beta) \quad s_1 = 2\,, \qquad s_2 \geq 3\,, \qquad s_3 \geq 6\,.$$

Ceci posé, remarquons que $P_4 = 0$, car s'il était $P_4 > 0$, étant $P_6 = 1$, on aurait $P_2 = 1$. La relation $P_4 = 0$ jointe aux $\alpha)$ $\beta)$, donne respectivement

$$\alpha') \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3\,, \qquad \text{ou} \qquad \alpha'') \quad s_1 = s_2 = 3\,, \qquad s_3 \geq 4\,,$$
$$\beta') \quad s_1 = 2\,, \qquad s_2 = 3\,, \qquad s_3 \geq 6\,.$$

Comme les valeurs $\alpha')$ $\alpha'')$ donnent $P_3 = 1$, la relation $P_3 = 0$ rend possible seulement l'hypothèse $\beta')$. Enfin la relation $P_{14} = 0$ nous montre qu'il doit être $s_3 = 6$.

56. *Construction d'une surface de Picard représentée sur une surface elliptique multiple renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.* Soit $\Phi(x\,, y\,, z) = 0$ l'équation d'une surface elliptique d'ordre m – douée de singularités ordinaires – appartenant à un des types a) b) c) d) envisagés au n. préc., et soit $X(x\,, y\,, z) = 0$ l'équation de la surface r–adjointe d'ordre $r(m-4)$ attachée à Φ, où $r\,(= 2\,, 3\,, 4\,, 6)$ est l'indice du premier plurigenre différent de zéro.

Envisageons la surface F représentée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \Phi(x\,, y\,, z) = 0\,, \\ u^r = X(x\,, y\,, z)\,, \end{cases}$$

$x\,, y\,, z\,, u$ étant les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions. Nous prouverons que les courbes coupées sur F par les hyperplans parallèles à la doite u, sont des courbes *irréductibles* se coupant deux à deux suivant des groupes *canoniques*.

Ce résultat étant établi, on aura à considérer une correspondance $(1\,, r)$ entre les surfaces irréductibles $\Phi\,, F$; dans cette correspondance il n'y a pas de points de coïncidence, car la $X = 0$ ne coupe la $\Phi = 0$ hors de la ligne

double de Φ, et par suite sur la surface le radical $\sqrt[r]{X(x, y, z)}$ ne présente aucun point de *diramation effective*. D'après une formule de M. Severi (35) on pourra pourtant calculer le genre numérique p_a de F; on trouve ainsi $p_a = -1$. Comme la F vient renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre zéro – transformées des courbes pluricanoniques de Φ – elle sera ou bien une surface elliptique de genre $p_g = 0$, ou bien une surface ayant les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$ et la courbe canonique d'ordre zero. La première hypothèse s'écarte tout de suite en se rappelant que F renferme un système linéaire dont la série caractéristique est canonique; on en déduit que F est une surface hyperelliptique de rang 1, c'est-à-dire une surface de Picard (ou de Jacobi).

D'après la définition du rang, r désignera le rang de la surface hyperelliptique Φ.

Il s'agit maintenant d'établir que les sections hyperplanes de F, sont irréductibles, et de déterminer leurs mutuelles intersections. Soit $z = z_0$ un hyperplan parallèle à la droite u et envisageons la courbe gauche Γ, qui est représentée par les equations:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z_0) = 0, \\ u^r = X(x, y, z_0). \end{cases}$$

Considérons le faisceau $|\Gamma|$ coupé sur le cylindre $\Phi(x, y, z_0) = 0$ par le faisceau de surfaces

$$u^r = \lambda X(x, y, z_0).$$

Pour $\lambda = 0$ on obtient la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$, que nous désignerons par C, à compter r fois, et les génératrices à l'infini du cylindre, formant un groupe que nous désignerons par I, dont chacune doit être comptée $r(m-5)$ fois. Pour $\lambda = \infty$ on obtient le groupe H formé par les couples de génératrices qui coïncident avec les génératrices doubles du cylindre, dont chacune doit être comptée r fois. On en tire que les courbes

$$(3) \qquad rC + r(m-5)I, rH$$

appartiennent totalement au faisceau $|\Gamma|$. Comme ces courbes n'ont pas des parties communes, si le faisceau $|\Gamma|$ est réductible, en vertu d'une proposition connue de MM. Noether et Enriques, toute courbe Γ sera composée par un certain nombre $h > 1$ de parties irréductibles Δ, formant une involution d'ordre h dans un faisceau $|\Delta|$; celui-ci sera linéaire puisque sur le cylindre on n'a pas des faisceaux irrationnels différents du faisceau des génératrices. Les courbes (3) donneront des éléments multiples de cette involution. Il s'ensuit que r est égal à un multiple hl de h ($r = hl, r > l$), et que les courbes $lC + l(m-5)I, lH$ sont des courbes Δ.

(35) F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *36* (1903), pp. 495–511 [Nota XIV, vol. I, p. 158; N.d.R.].

Pourtant les groupes coupés par ces courbes sur une section plane C_1 du cylindre seront équivalents. Or la courbe $lC + l(m-5)I$ coupe sur une C_1 un groupe équivalent à la section sur C_1 d'une courbe d'ordre $l(m-4)$, et la courbe lH rencontre C_1 suivant les $2d$ couples coïncidant dans les d points doubles de C_1, à compter chacune l fois. On en tire aisément que le multiple d'ordre l du groupe coupé par une droite sur une section plane de notre surface Φ, est équivalent à un groupe l–canonique.

Cette conclusion est absurde, car le plurigenre P_l de Φ résulterait > 0, tandis qu'on a supposé que P_r soit le premier plurigenre non nul. Partant $h = 1$ et les courbes (2) sont irréductibles.

Il nous reste à montrer que les plans paralleles à la droite u coupent sur la courbe Γ des groupes canoniques. La courbe Γ étant l'intersection complète d'une surface d'ordre m, $\Phi(x, y, z_0) = 0$, et d'une surface d'ordre $r(m-4)$, $u^r = X(x, y, z_0)$, on pourra couper sur Γ la série canonique au moyen des surfaces – adjointes à Γ – d'ordre $(r+1)(m-4)$ ayant la multiplicité $s_1 + s_2 - 2$ en tout point s_1–ple pour $\Phi = 0$ et s_2–ple pour $u^r = X$ (Noether).

Pour plus de clarté nous développerons le raisonnement dans le cas de $r = 2$.

Comme dans le sommet O_∞ du cylindre on a $s_1 = m$, $s_2 = 2m - 10$, le surfaces d'ordre $3(m-4)$ adjointes à Γ, auront en O_∞ un point multiple d'ordre $3(m-4)$ et par suite elles seront des cylindres ayant le sommet O_∞. A tout point double de la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$ correspond un point P quadruple par rapport à Γ: deux branches de Γ étant tracées sur une nappe du cylindre et deux branches su l'autre. On en tire que les cylindres adjoints à I doivent passer doublement par tout point P, c'est–à–dire qu'ils doivent être des cylindres biadjoints au cylindre Φ.

Il est maintenant nécessaire de bien fixer le comportement de ces cylindres en O_∞. La courbe Γ passe par ce point avec la multiplicité $2m(m-5)$ et y possède m tangentes distinctes, qui sont les génératrices à l'infini du cylindre Φ. On voit aisément qu'en correspondance de chacune de ces tangentes, Γ possède un point $2(m-5)$–ple et $m-5$ points doubles successifs, qui tombent en des points doubles de la surface $u^r = X$. On en tire que les cylindres adjoints à Γ passent simplement par chacun de ces points, c'est–à–dire qu'en correspondance de chacune des m tangents ils ont avec Γ la multiplicité d'intersection $2(m-5)(3m-11)$.

Or les conditions définissant un cylindre adjoint à Γ, sont satisfaites en prenant le cylindre formé par $X = 0$, par le plan à l'infini compté $m-5$ fois et par un plan passant par O_∞; on en conclut que ce plan coupe sur Γ un groupe canonique.

Lorsque r prend une quelconque des valeurs restant (3, 4, 6) on voit analoguement qu'une surface d'ordre $(r+1)(m-4)$ adjointe à Γ, est formée par le cylindre $X = 0$, augmenté du plan à l'infini compté $m-5$ fois et d'un plan arbitraire passant par O_∞; et l'on arrive en conséquence à la même conclusion que ci–dessus.

En nous résumant et en rappelant que les surfaces hyperelliptiques de rang 1 sont caracterisée par les valeurs $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ des invariants (n. 16), on peut énoncer le théorème suivant:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface irrégulière Φ soit hyperelliptique, peuvent être exprimées en disant que la surface a la genre numérique $p_a = -1$ et que ses plurigenres $P_i (i = 1, 2, \cdots)$ prennent les valeurs 0, 1.

En désignant par r le rang de Φ, on a $r = 1, 2, 3, 4, 6$, et ces différents cas sont caractérisés par les valeurs suivantes des genres et des plurigenres:

$$p_a = -1 \begin{cases} r = 1, & p_g = P_4 = 1 \\ r = 2, & p_g = 0, \quad P_2 = P_4 = 1 \\ r = 3, & P_8 = 0, \quad P_3 = 1 \\ r = 4, & P_6 = P_{10} = 0, \quad P_4 = 1 \\ r = 6, & P_2 = P_3 = P_{14} = 0, \quad P_6 = 1 \text{ (36)}. \end{cases}$$

57. *Détermination de la valeur du diviseur δ appartenant aux surfaces hyperelliptiques irrégulières. – Types des substitutions linéaires sur u, v qui correspondent à ces surfaces.* – En nous appuyant sur le théorème établi au n. préc. nous pouvons déterminer aisément toutes les classes distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, ce qui revient à calculer les valeurs qu'on peut donner à leur diviseur δ. On retrouvera ainsi sous une autre forme, les résultats d'une classification établie directement par MM. Bagnera et De Franchis (37).

Désignons par δ le diviseur de la surface hyperelliptique F de rang 1, représentée, d'après le n. préc. sur la surface r–ple Φ, de rang r. Aux deux faisceaux de courbes elliptiques de Φ, correspondent sur F deux faisceaux de courbes elliptiques, c'est à–dire qu'il y a deux intégrales *elliptiques* u, v attachées à F.

Les groupes de r points de F correspondant aux points de Φ, ne peuvent pas être ramenés en eux–mêmes par une transformation de 2me espèce de la surface, car autrement on pourrait construire une autre surface F' de rang 1 représentée sur la surface r'–ple Φ (r' étant un diviseur de r), et cela de façon qu'il n'y ait pas sur Φ des points de diramation, de sorte que le plurigenre $P_{r'}$ de Φ, aurait la valeur $P_{r'} = 1$, tandis que P_r est le premier plurigenre non nul.

On en tire que l'involution I_r image de Φ, est engendrée sur F par un groupe G_r de transformations birationnelles de F en elle–même (n. 44), et que le diviseur de Φ est égal au diviseur δ de F.

(36) Nous avons déjà publié ce résultat dans les Atti della R. Acc. dei Lincei. F. ENRIQUES–F. SEVERI, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *17* (1908), pp. 4–9 [Nota XXXVI, vol. I, p. 442; N.d.R.].

(37) Atti della R. Acc. dei Lincei, 21 Avril 1907; n° 5.

Les transformations de G_r seront représentées par des substitutions de la forme

$$(4) \qquad u' = u + k\,, \qquad v' = \mu v\,, \qquad (\mu = -1\,, e^{\frac{2\pi i}{3}}\,, e^{\frac{2\pi i}{3}}\,, i)\,,$$

$u =$ const., $v =$ const., étant les faisceaux elliptiques de F qui correspondent respectivement au faisceau elliptique et au faisceau rationnel de Φ. Il s'ensuit que G_r est un groupe cyclique (et l'on retrouve ainsi que $r = 2\,, 3\,, 4\,, 6$).

Quant à la constante k, elle devra être déterminée de façon que rk, et non $r'k\,(r' < r)$, soit une période de l'intégrale elliptique u; autrement G_r renfermerait une transformation non identique

$$u' = u\,, \qquad v' = \mu v$$

et il y aurait la courbe de coïncidence $v\,(\mu - 1) = 0$, c'est-à-dire que I_r serait représentée par une réglée.

Ceci posé examinons les différents cas correspondant aux valeurs de r.

Premier cas: $r = 2$. Le groupe G_r est engendré par la substitution

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{2}\,, \qquad v' = -v$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a par suite sur F la transformation birationnelle

$$T) \quad u' = u\,, \qquad v' = -v$$

qui possède une courbe de coïncidence $(v = 0)$. Pourtant sur toute courbe $u =$ const., la T donne une série linéaire g_2^1 douée de 4 coïncidences. Comme la courbe de coïncidence de la T est composée par un certain nombre y de courbes $v =$ const. – parmi lesquelles la $v = 0$ — en désignant par x le nombre des intersections de deux courbes $u =$ const. $v =$ const., nous aurons nécessairement

$$xy = 4$$

et par suite

$$x = 1\,, y = 4\,; \qquad x = 2\,, y = 2\,; \qquad x = 4\,, y = 1\,.$$

a) $x = 1\,, y = 4$. La surface F est alors la surface de Jacobi qui correspond à une courbe de genre deux décomposée en deux courbes elliptiques, et par conséquent on a le tableau des périodes

u	1	0	g	0
v	0	1	0	g'.

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{2}\,, \qquad v' = -v$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 2\,, \delta = 1$.

b) $x = y = 2$. On a sur F deux faiceaux dont les courbes se coupent en deux points. Démontrons que la F a la diviseur 2. Soit en effet

$$\begin{array}{c|cccc} u & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ v & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v, les indices 1, 3 et 2, 4 étant associés.

L'involution J_2 engendrée sur F en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux, sera représentée par une substitution de 2me espèce de la forme

$$u' = u + \frac{\omega_1}{2}, \qquad v' = v + \frac{\theta_1}{2},$$

car le premier couple $(\omega_1\, \theta_1)$ des périodes normales peut être choisi arbitrairement. Comme J_2 est identique à une surface de diviseur 1 – la surface des couples de points de deux courbes elliptiques – on pourra conclure que le tableau

$$\begin{array}{cccc} \frac{\omega_1}{2} & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \frac{\theta_1}{2} & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

doit se rapporter à une surface de diviseur 1, et par suite que

$$\frac{\omega_1}{2}\theta_3 - \omega_3\frac{\theta_1}{2} + \omega_2\,\theta_4 - \omega_4\,\theta_2 = 0\,.$$

Cette relation montre que notre surface F a le diviseur $\delta = 2$.

De la forme des périodes de la surface de Jacobi représentant J_2, on tire que les périodes normales de u, v, sur la surface F, au moyen d'une substitution linéaire sur u, v, peuvent se réduire à la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g'. \end{array}$$

On voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \qquad v' = -v$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique Φ de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 2$.

c) $x = 4, y = 1$. Sur la surface F qui se rapporte à ce cas, considérons l'involution J_4 qu'on obtient en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$; cette involution peut aussi être engendrée par un groupe Γ_4 de transformations de 2me espèce qui ramènent en elle-même la courbe de coïncidence de la transformation T et par suite la transformation T elle-même.

En multipliant T par les transformations de Γ_4 on engendre un groupe Γ_8 formé par des transformations permutables involutoires.

En substituant à T la transformation S, dépourvue de coïncidences, nous obtiendrons un groupe Δ_8 en isomorphisme oloédrique avec Γ_8. Sur la courbe $v = 0$ qui reste invariant vis-à-vis des transformations de Δ_8, ce groupe donne lieu à un groupe Δ_8' engendrant une involution elliptique γ_8^1. Comme Δ_8' est isomorphe à Δ_8, Δ_8' renfermera 7 transformations involutoires de 2me espèce sur $v = 0$, tandis que sur une courbe elliptique on ne trouve que 3 de telles transformations. – On en conclut que le cas c) est impossible (38).

Deuxième cas: $r = 3$. Le groupe G_3 est donné par

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{3}, \qquad v' = \varepsilon v \qquad (\varepsilon = e^{2\pi i/3})$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a la transformation

$$T) \quad u' = u, \qquad v' = \varepsilon v,$$

possédant une courbe de coïncidence, dont fait partie la $v = 0$. Sur toute courbe $u = \text{const.}$, T donne une série g_8^1, douée de 3 points triples. En désignant par y le nombre des courbes $v = \text{const.}$ qui forment la courbe de coïncidence de T, et par x le nombre des points communs à $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, on a par suite

$$xy = 3$$

d'où

$$x = 1, \quad y = 3; \qquad x = 3, \quad y = 1.$$

d) $x = 1, y = 3$. Le faisceau $v = \text{const.}$ sera équianharmonique et l'on aura le tableau

u	1	0	g	0
v	0	1	0	ε.

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{3}, \qquad v' = \varepsilon v$$

engendre sur F une involution I_3 identique à une surface elliptique pour laquelle $r = 3$, $\delta = 1$.

e) $x = 3, y = 1$. Comme dans le cas b), on voit que le tableau des périodes relatives à F, se réduit au diviseur 1 en ajoutant la troisième partie d'une

(38) On peut construire aisément des surfaces pour lesquelles $x = 4$, $y = 1$ et qui renferment des groupes du type Γ_8; telle est p. ex. la surface de Jacobi correspondant au tableau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{pmatrix}$$

. Mais sur cette surface on n'a pas des transformations involutoires sans coïncidences du type

$$u' = u + \text{const.}, \quad v' = -v.$$

période, et l'on en tire que F a le diviseur 3. On voit aussi comme en b) que le tableau correspondant à F peut être mis sous la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3} \end{array}$$

et par suite que F possède la transformation

$$u' = u + \frac{1}{9}, \qquad v' = \varepsilon v,$$

qui engendre une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = \delta = 3$.

Troisième cas: $r = 4$. Le groupe G_4 est donné par

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{4}, \qquad v' = iv;$$

la transformation

$$T) \quad u' = u, \qquad v' = iv$$

donne sur toute courbe $u = \text{const.}$ une g_4^1 douée de 2 points 4-ples et de 2 points doubles. Les deux points 4-ples peuvent varier en $y \geq 1$ courbes $v = \text{const.}$; on a la condition

$$xy = 2$$

et par suite

$$x = 1, \quad y = 2; \qquad x = 2, \quad y = 1.$$

f) $x = 1, y = 2$. On a le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & i. \end{array}$$

La substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \qquad v' = iv$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4, \delta = 1$.

g) $x = 2, y = 1$. On tombe sur une surface du type b) correspondant au tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g'. \end{array}$$

Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être harmonique, on peut poser $g' = \frac{i+1}{2}$, et alors on voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{8}, \qquad v' = iv$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 2$.

Quatrième cas: $r = 6$. En suivant la marche habituelle on trouve sur les courbes $u = \text{const.}$ une g_6^1 douée d'un point 6–ple, de deux points 3–ples et de trois points doubles. Le point 6–ple décrit la courbe $v = 0$, qui, par conséquent, vien couper toute courbe $u = \text{const.}$ en un seul point. Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être équianharmonique, on aura le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{array}$$

et la substitution $u' = u + \frac{1}{6}$, $v' = -\varepsilon v$ engendrera sur F une involution représentée par une surface elliptique pour laquelle $r = 6$, $\delta = 1$.

En résumant, on peut former le tableau suivant qui donne *les valeurs du rang r, du diviseur δ et du determinant $n\,(= r\delta)$ ainsi que les périodes et les substitutions linéaires sur u, v, qui correspondent aux surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.*

r	δ	n	Périodes	Substitutions sur u, v
2	1	2	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g' \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{2}$, $v' = -v$
2	2	4	$\begin{cases} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{4}$, $v' = -v$
3	1	3	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{3}$, $v' = \varepsilon v$
3	3	9	$\begin{cases} \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3} \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{9}$, $v' = \varepsilon v$
4	1	4	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{4}$, $v' = iv$
4	2	8	$\begin{cases} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{8}$, $v' = iv$
6	1	6	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{6}$, $v' = -\varepsilon v$

VII. Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation paramétrique propre par des fonctions θ irréductibles.

58. *Quelques remarques au sujet des surfaces admettant une représentation paramétrique par des fonctions hyperelliptiques irréductibles.* – Nous avons reconnu d'abord que les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ se réduisent, pour des valeurs arbitraires des modules, aux surfaces régulières de rang 2 (surface de Kummer et ses généralisations pour $\delta > 1$).

Pour des valeurs particulières des modules, il se présente d'autres surfaces hyperelliptiques correspondant à des surfaces de Jacobi (ou de Picard) qui admettent des transformations birationnelles en elles–mêmes outre que les transformations ordinaires de 1re et de 2me espèce.

Le problème général de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, peut être traité en procédant de la façon suivante:

On déterminera d'abord toutes les surfaces de rang 1 admettant des transformations birationnelles en elles–mêmes; à tout groupe fini de transformations correspond une involution qui en est engendrée; celles parmi ces involutions qui ne sont pas rationnelles ou représentées par des réglées, nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dont le rang est égal à l'ordre du groupe.

Or il y a lieu à distinguer deux cas:

1) celui où il s'agit d'involutions appartenant à une surface de Jacobi associée à une courbe de genre 2 *irréductible*;

2) le cas où il s'agit d'involutions sur une surface de Jacobi associée à une courbe *réductible*.

Étant donnée une surface hyperelliptique de rang r, correspondante à une involution du type (1), on dira que la *représentation paramétrique* de la surface est obtenue *par des fonctions hyperelliptiques de rang r irréductibles*. En ce cas il est impossible de remplacer les fonctions hyperelliptiques de u, v, qui fournissent notre représentation, par des fonctions elliptiques $p_1(au + bv), p_2(cu + dv)$, lorsque, bien entendu, on costruit la surface de rang 1, F, correspondante à Φ, au moyen des *périodes primitives* des fonctions qui donnent la représentation de Φ (voir le n. 12).

Lorsq'on envisage la périodicité par rapport à un tableau non primitif, la repésentation de Φ peut devenir réductible. Il y a lieu d'éclaircir cette remarque par un exemple. Considérons les deux tableaux

$$\alpha)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{Vmatrix} \qquad \beta)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2g & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2g'. \end{Vmatrix}$$

D'après la remarque du n. 12 la surface de Jacobi F correspondant à α) représente une involution sur la surface de Jacobi F' correspondant à β); et tandis que F est associée à une courbe de genre 2 irréductible, F' est associée à une courbe réductible. Pourtant une surface hyperelliptique Φ qui admet une représentation irréductible (de rang r) par rapport à α), admet aussi une représentation réductible (de rang $4r$) par rapport à β).

Dans la suite nous nous rapporterons au cas (1), *en supposant aussi ponr simplicité*, $\delta = 1$.

En se rappelant le résultat établi tout à l'heure pour les surfaces hyperelliptiques irrégulières, on voit que les types ayant $\delta = 1$ amènent à des représentations réductibles.

Suivant notre programme il s'agira de classifier les surfaces de Jacobi (associées à des courbes irréductibles) qui admettent des transformations non ordinaires en elles-mêmes. Et on pourra laisser de côté les transformations cycliques de la forme:

$$u' = u + k\,, \qquad v' = \mu v\,,$$

parce que celles-ci amènent à des surfaces hyperelliptiques irrégulieres où à des involutions sur de telles surfaces, et lorsque $\delta = 1$, elles correspondent à des cas de réductibilité de la représentation paramétrique.

En d'autres termes *nous aurons à étudier les groupes appartenant à une surface de Jacobi attachée à une courbe de genre 2 irréductible et ne renfermant pas des transformations sans points unis* (39).

Remarque. – Les involutions régulières engendrées sur une surface de rang 1 par des groupes renfermant des transformations singulières sans points unis, restent partant exclues de notre étude. Elle amènent à des surfaces régulières de genre $p_g = 0$, et de bigenre $P_2 = 1$, qui ont été objet de recherches de MM. Bagnera et De Franchis (40).

59. *Transformations d'une surface de Jacobi en elle-même: transformations de Hermite et de M. Humbert.* – Soit F une surface de Jacobi correspondante au tableau de périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

(39) Que « toute transformation cyclique sans points unis se ramène à la forme $u' = u+k$, $v' = \mu v$ » c'est une conséquence immédiate du théorème de M. Hamburger sur les substitutions linéaires homogènes; il suffit de se rapporter au cas où l'équation caractéristique a la racine 1.

(40) Rendiconti dei Lincei, 21 avril 1907, n° 6; Comptes rendus, 4 novembre 1907.

L'analyse des cas où il y a des transformations birationnelles non ordinaires de F en elle–même, nous ramène à considérer les relations fondamentales (A), (B), (C), (D), du n. 45, savoir

$$(A)\quad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$(B)\quad gha_3 + gg' a_2 + h^2 b_3 + hg' b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0$$

$$(C)\quad gha_3 + gg' b_3 + h^2 a_2 + hg' b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0$$

$$(D)\quad h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0\,.$$

Nous avons dit que ces relations se réduisent à des identités pour des valeurs arbitraires de g, h, g', et on tombe alors sur les transformations ordinaires de F.

Si les relations (A), (B), (C), (D) ne sont pas des identités, on dira que les périodes g, h, g' sont liées par des *relations entières*, qui doivent se réduire au plus à *trois* distinctes.

Une relation entière peut se présenter quelque fois sous la forme particulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0\,.$$

On démontre que si les (A), (B), (C), (D) ne sont pas identiques, les périodes sont liées au moins par une telle relation singulière (41).

Au moyen des 16 entiers caractéristiques, M. Humbert a composé deux autres entiers l, k, qu'il a appelés les *indices* de la transformation, et qui jouent un rôle fondamental dans la théorie. Reppelons ici la définition de ces nombres.

Des relations (A), (B), (C), (D) on tire aisément la relation

$$[(ac)_{03} + (ac)_{12}]\,g + [(bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12}]\,h + [(db)_{03} + (db)_{12}]\,g' + \\ + [(ab)_{03} + (ab)_{12}]\,(h^2 - gg') + [(cd)_{03} + (cd)_{12}] = 0\,,$$

où l'on a posé

$$(ac)_{03} = a_0 c_3 - a_3 c_0\,, \qquad (ac)_{12} = a_1 c_2 - a_2 c_1\,, \text{ etc.}$$

Eh bien, si les coefficients (entiers) de cette relation ont un facteur commun – se réduisant à zéro lorsque la relation devient identique – ce facteur s'appelle *l'indice* k de la transformation.

Après avoir divisé par ce facteur (s'il est différent de zéro), la relation se présente sous la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0\,.$$

A, B, C, D, E étant des entiers premiers entre eux.

(41) G. HUMBERT, *Sur les fonctions abeliénnes singulières* (Deuxième Mémoire), Journal de Mathematiques, (5) *6* (1900), p. 330.

Le second indice l est défini par

$$l = (ad)_{03} + (ad)_{12}$$

et entre les deux indices de la transformation birationnelle, on a la relation

$$1 = l^2 + Bkl + (AC + DE)\, k^2.$$

En particulier, lorsque $k = 0$, on tombe sur les *transformations de Hermite* (d'ordre 1), caractérisées par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} (ac)_{03} + (ac)_{12} = (bd)_{03} + (bd)_{12} + (ab)_{03} + (ab)_{12} = (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0 \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} = (ad)_{03} + (ad)_{12} = 1. \end{cases}$$

La classe des transformations de Hermite comprend les transformations ordinaires de 1re et de 2de espèce: mais pour des valeurs particulières des modules on a aussi des *transformations singulières de Hermite*.

Les transformations correspondantes à $k \neq 0$ sont toujours singulières et nous les appelerons *transformations de Humbert* (42).

60. Revenons au cas général d'une transformation d'indices l, k arbitraires. Nous allons former une combinaison de l, k ayant une signification géométrique remarquable.

Le système Σ représenté par

$$\Theta(u + \varrho, v + \sigma) = 0,$$

où Θ est une fonction thêta de 1r ordre et ϱ, σ sont des paramètres (n. 28), est changé par la transformation birationnelle envisagée, en un système Σ analogue, de degré 2 et de genre 2. L'equation des courbes de ce dernier système s'obtiendra en transformant la fonction Θ au moyen de la substitution linéaire

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta,$$

qui répresente notre correspondance birationnelle. On obtient ainsi l'équation

$$\varphi(u + \varrho, v + \sigma) = 0,$$

où φ est une fonction intermédiaire d'indices l, k (n. 28) (43).

En appliquant une formule donnée par M. Humbert (J. d. M., 1900, p. 313) on trouve que les fonctions Θ, φ ont $2l + Bk$ zéros communs, et par suite on peut énoncer la proposition suivante:

Une transformation birationnelle d'indices l, k, attachée à la relation singulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

(42) M. Humbert réserve seulement à ces transformations la dénomination de « singulières ».

(43) G. Humbert, *Sur les fonctions abeliènnes singulières* (Deuxième Mémoire), Journal de Mathématiques, (5) *6* (1900), p. 311.

change le système Σ formé par les courbes de niveau zéro des fonctions Θ du 1^{r} *ordre, en un système analogue formé par les courbes de niveau zéro des fonctions intermédiaires d'indices l, k; et ces dernières courbes coupent une des premières en $2l + Bk$ points.*

En particulier si $k = 0$, et par suite $l = 1$, les courbes transformées coupent les courbes primitives en 2 points. Il s'ensuit qu'elles appartiennent au système Σ donné (n. 24).

On arrive à la même conclusion en se rappelant que *les transformations de Hermite sont caractérisées par la condition de changer une fonction thêta en une fonction analogue.*

61. *Sur la représentation paramétrique d'une surface hyperelliptique par des fonctions Θ.* – Envisageons sur la surface de Jacobi F une involution (régulière) I_r engendrée par les transformations birationnelles d'un groupe G_r, et soit Φ une surface hyperelliptique image de I_r.

Supposons d'abord que les r transformations de G_r soient des transformations de Hermite, ou brièvement que G_r soit un *groupe de Hermite.*

Alors, en tenant compte du fait que les transformations de G_r changent en lui–même un système Σ fixé, on costruit aisément un système linéaire irréductible $|D|$, appartenant totalement au multiple d'ordre l de Σ, de telle façon que toute courbe D soit changée en elle–même par G_r, c'est–à–dire que $|D|$ appartient à l'involution I_r. Si, comme on peut le supposer sans restriction, le système linéaire $|\Gamma|$ de Φ correspondant à $|D|$, est *simple*, on peut transformer birationnellement la surface Φ, de telle sorte que $|\Gamma|$ résulte le système des sections planes (ou hyperplanes) de la surface transformée, que nous désignerons encore par Φ.

Comme par un choix convenable des intégrales u, v, les courbes du système Σ viennent être représentées en égalant à zéro les fonctions Θ du 1^{r} ordre, le système $|D|$ viendra représenté par une équation de la forme

$$\lambda_0 \Theta_0(u, v) + \lambda_1 \Theta_1(u, v) + \cdots + \lambda_d \Theta_d(u, v) = 0, \tag{2}$$

les Θ_i étant des fonctions thêta d'ordre l.

En désignant par $(x_0, x_1, \cdots, x_d)$ les coordonnées homogènes d'un point variable sur Φ, on pourra donc poser

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, d). \tag{3}$$

Pour des valeurs données des variables x les équations précédentes admettront seulement un nombre *fini* de solutions incongrues (u, v), car deux courbes D arbitraires se coupent en un nombre fini de points.

On remarquera que quelqu'une des solutions susdites pourra ne varier pas avec les x, lorsque le système $|D|$ ait des points–base.

Faisons maintenant le raisonnement réciproque. Soit Φ une surface hyperelliptique de rang r représentée par les formules (3), les Θ_i étant des fonctions d'ordre l telles que les équations (3) aient un nombre fini de solu-

tions pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point de Φ. Au système linéaire $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les plans (ou hyperplans), répond sur F le système linéaire $|D|$, représenté par (2). Comme le système $|D|$ appartient à l'involution I_r dont les groupes répondent aux points de Φ, toute courbe D sera changée en elle–même par les transformations du groupe G_r engendrant I_r. Il s'ensuit qu'une, T, de ces transformations change une courbe C de Σ en une courbe C_0 telle que les courbes lC, lC_0 appartiennent au même système continu. On en tire que C_0 coupe en deux points C et par suite (n. 24) que T change en lui–même le système Σ. On arrive pourtant à la conclusion que G_r est un groupe de Hermite. Donc:

Toute surface hyperelliptique de rang r, répondant à une involution engendrée par un groupe de Hermite G_r, se laisse représenter au moyen des fonctions Θ, par des formules du type

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots,);$$

ces équations admettant seulement un nombre fini de solutions incongrues (u, v), pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point variable sur la surface. – Réciproquement, toute surface hyperelliptique admettant une telle représentation, répond à un groupe de Hermite.

Nous exprimerons brièvement ces propriétés en disant que *les surfaces répondant à des groupes de Hermite sont caractérisée par la condition d'admettre une représentation propre par des fonctions thêta.*

Si, au contraire, la surface Φ répond à un groupe G_r de Humbert (formé par des transformations de Humbert), aux sections planes de Φ répondront sur F des courbes D n'appartenant pas totalement à un système $l\Sigma$; mais on pourra toujours ajouter aux courbes du système linéaire $|D|$ une courbe fixe H, de telle sorte que les courbes $H + D$ appartiennent totalement à un système $l\Sigma$. Le système réductible $H + |D|$ sera représenté par une équation du type (2) et par suite la Φ admettra une représentation du type (3); mais *dans le cas actuel les équations* (3) *posséderont un nombre infini de solutions fixes, répondant aux points de la courbe fixe H, et un nombre fini de solutions variables avec les x.*

On dira par conséquent que *toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une représentation impropre par des fonctions Θ.*

Comme toute courbe tracée sur F peut être représentée d'une façon complète en égalant à zéro une fonction intermédiaire, dans le cas actuel le système $|D|$ pourra toujours être représenté par une équation du type

$$\lambda_0 \varphi_0(u, v) + \lambda_1 \varphi_1(u, v) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(u, v) = 0,$$

les φ étant des fonctions intermédiaires n'ayant deux à deux qu'un nombre fini de zéros communs. Donc:

Toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une représentation propre par des fonctions intermédiaires.

62. *Quelques propriétés des transformations d'une surface de Jacobi en elle–même.* – Considérons une surface de Jacobi admettant une transformation birationnelle en elle–même

$$(T) \qquad \begin{cases} u' = \lambda u + \mu v + \alpha \\ v' = \lambda' u + \mu' v + \beta . \end{cases}$$

En multipliant cette transformation T par les transformations de 2de espèce, on obtient la série continue ∞^2 de transformations analogues

$$(1) \qquad \begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + h \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + k \end{aligned}$$

(où h, k sont des paramètres).

En trasformant T par la transformation de 2de espèce

$$(S) \qquad \begin{cases} u' = u + \gamma \\ v' = v + \delta \end{cases}$$

on obtient la transformation $S^{-1} TS$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + \alpha - (\lambda - 1)\gamma - \mu\delta \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + \beta - \lambda'\gamma - (\mu' - 1)\delta , \end{aligned}$$

transformation qui appartient à la même série ∞^2 (1) et peut être identifiée avec une transformation arbitraire de cette série, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \mu \\ \lambda' & \mu' - 1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Cette condition analytique se traduit en ce qu'il y a un nombre fini > 0 de solutions des congruences:

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)\, u + \mu v &\equiv -\alpha \\ \lambda' u + (\mu' - 1)\, v &\equiv -\beta , \end{aligned}$$

c'est–à–dire que T possède un nombre fini > 0 de points unis.

Ainsi donc:

Toute transformation T de F, ayant un nombre fini de points unis, vient transformée par les transformations de 2de *espèce en des transformations semblables formant une serie* ∞^2; *cette même série peut être obtenue en multipliant T par les transformations de* 2de *espèce.*

Remarque. – Dans la série ∞^2 considérée, il y aura une transformation, semblable à T, qui aura le point uni $u = v = 0$, de sorte que la substitution sur u, v se réduit homogène.

Si T est une transformation périodique d'ordre n, toutes les transformations semblables auront la même période; parmi celles–ci il y en a une qui

laisse invariant le point $u = v = 0$, et qui peut se réduire à la forme suivante

$$u' = \varepsilon^r u\,, \qquad v' = \varepsilon^s v \qquad (\varepsilon = e^{(2\pi i)/n})$$

(u, v étant des intégrales convenables non normales).

Une autre remarque qui se rattache à ce qui précède est la suivante.

Etant donnée sur F une transformation birationnelle T possédant des points unis, il y aura des transformations ordinaires qui ramènent T en elle–même; ce seront les transformations de 1re et de 2de espèce qui font correspondre à un point uni de T un point uni de la même transformation.

Cette propriété peut être reconnue aisément au point de vue géométrique. Soient A, B deux points unis distincts ou coïncidants de T, et soit S la transformation de 1re ou de 2de espèce portant A en B. La transformée de S par T sera une transformation de la même espèce que S, faisant correspondre B à A, et par suite ne différera pas de S; il s'ensuit que S, T sont échangeables, et par conséquent que S transforme T en elle–même.

63. *Transformations hermitiennes.* – Les propriétés que nous venons d'étudier se rapportent de même aux différentes sortes de transformations singulières qui peuvent appartenir à une surface de Jacobi. Tâchons maintenant de caractériser au point de vue géométrique les transformations hermitiennes.

Soit T une telle transformation de la surface F. Après avoir multipliée T par une transformation de 2de espèce convenable, on peut supposer toujours qu'elle possède un point uni P. Fixons un système Σ de courbes C appartenant à F et envisageons la variété H formée par les ∞^1 courbes C issues par P.

Comme T transforme en lui–même le système Σ, on aura entre les éléments (courbes) de la variété H une transformation birationnelle, et par suite l'on aura une transformation analogue entre les points de la courbe de genre deux attachée a F (n. 22). Ainsi donc:

Toute transformation hermitienne d'une surface de Jacobi correspond à une transformation birationnelle de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Réciproquement à toute transformation de cette courbe correspond une série, en général ∞^2, de transformations hermitiennes de la surface de Jacobi.

64. *Aperçu sur les surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$.* En ce qui précède nous nous sommes rapportés aux surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta = 1$ et par suite à la surface de Jacobi.

Il y a lieu d'étendre les considérations établies, aux surfaces de diviseur $\delta > 1$.

Etant donné sur F une transformation birationnelle

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta$$

on exprime tout d'abord λ , μ , λ', μ' au moyen des périodes par des relations qu'on obtient des relations (1) du n. 45 en changeant a_1 , b_1 , c_1 , d_1 respectivement en

$$\frac{a_1}{\delta}, \qquad \frac{b_1}{\delta}, \qquad \frac{c_1}{\delta}, \qquad \frac{d_1}{\delta}.$$

On arrivera ainsi aux relations entières analogues aux relations (A), (B), (C), (D).

Les transformations birationnelles existant sur F se partageront en deux familles: *transformations de Hermite*, qui changent entre elles les fonctions Θ_δ (n. 29) et *transformations de Humbert* qui changent une fonction Θ_δ en une fonction intermédiaire φ_δ.

Les considérations relatives à la représentation d'une surface hyperelliptique de rang r au moyen des fonctions thêta ou intermédiaires, s'étendent sans aucune difficulté aux surfaces de rang r et diviseur $\delta > 1$. On a une représentation *propre* par des fonctions Θ_δ seulement pour les surfaces répondant à des groupes de Hermite; tandis que pour les surfaces répondant aux groupes de Humbert, on a une représentation propre par des fonctions φ_δ.

Ceci posé, on peut reconnaître que toute surface hyperelliptique admettant une représentation propre par des fonctions Θ_δ irréductibles correspond à une courbe de genre 2 possédant des transformations en elle–même.

En somme la détermination de ces surfaces hyperelliptiques, se ramène à celle des involutions I_δ appartenant à une surface de Jacobi et invariant par rapport à un groupe de transformations de celle–ci.

Le rang étant > 2 on trouverait que δ ne peut recevoir qu'un nombre fini de valeurs.

Mais nous laisserons de côté cette discussion pour nous borner au cas $\delta = 1$; la remarque qui précède montre d'ailleurs comment cette analyse serait à compléter, et que les types qui se présentent pour $\delta > 1$ se rattachent étroitement à ceux que nous proposons de classifier, où $\delta = 1$.

65. *La classification des surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des Θ irréductibles, ramenée à l'analyse des courbes de genre 2 qui possèdent un groupe de transformations en elles–mêmes.* – Nous nous proposons de classifier les surfaces hyperelliptiques (régulières) de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant un représentation propre par des fonctions Θ irréductibles.

En laissant de côté les cas $r = 2$ (ch. V), ces surfaces correspondent à des surfaces de Jacobi singulières admettant un groupe G_r de transformations en elles–mêmes, transformations possédant chacune un nombre fini de points unis, et correspondantes à des transformations analogues de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Il s'agit donc de classifier les groupes G_r satisfaisant aux conditions établies.

Remarquons d'abord que parmi les transformations de G_r il peut y avoir une seule transformation ordinaire (de première espèce), parce que le produit de deux transformations de 1re espèce donnerait une transformation de 2de espèce, et le groupe G_r n'en renferme pas (étant $\delta = 1$).

Il s'ensuit que si le groupe G_r renferme des transformations à période pair $2p, 2q, \cdots$, les puissances d'ordre $p, q, \cdots$ de celles–ci, donneront lieu à une même transformation de 1re espèce. En effet chacune de ces puissances est une transformation périodique d'ordre 2 douée de points unis en nombre fini, et par conséquent elle est une transformation ordinaire de 1re espèce.

On voit aussi que si G_r renferme une transformation de 1re espèce π, celle–ci est échangeable avec les autres transformations du groupe, car les transformées de π en G sont des transformations périodiques d'ordre 2.

Enfin si à côté de π il a en G_r une transformation T à période impair p, la transformation $T\pi$ sera à période $2p$, et sa puissance d'ordre p sera π.

Ces remarques faites, considérons la courbe f de genre 2, qui est associée à F.

Nous allons démontrer que f admet un groupe de transformations isomorphe à G_r.

Il faut distinguer deux cas:

a) Il peut arriver que les transformations de G_r aient sur F un même point uni O.

En ce cas considérons parmi les courbes de genre 2 d'un système Σ appartenant à F, celles qui passent par O. On aura une série ∞^1 de courbes qui correspondent élément par élément à f; et cette série sera invariant par rapport à G_r. Il s'ensuit que le groupe G_r de F correspond à un groupe isomorphe engendré sur f par les transformations homologues à celles de G_r.

b) Supposons au contraire que les transformations de G_r n'aient pas sur F un point uni commun.

Toute transformation de G_r appartient à une série ∞^2 de transformations périodiques du même ordre, que l'on obtient en multipliant la transformation donnée par les ∞^2 transformations de 2de espèce.

Dans la série ∞^2 des transformations périodiques nommées dessus, il y en a une admettant un point uni O arbitrairement choisi sur F. De cette façon aux r transformations de G_r on peut faire correspondre r transformations périodiques du même ordre, admettant un même point uni O. Ces transformations engendreront un groupe G'_r isomorphe à G_r.

C'est là une conséquence du fait que deux transformations quelconques de G_r ne donnent jamais pour produit une transformation de 2de espèce.

Partant on en déduit le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique (régulière) de rang $r > 1$ et de diviseur 1, admettant une représentation propre par des $\Theta(u, v)$ irréductibles, correspond à une courbe de genre 2 possédant un groupe de r transformations en elle–même,

et ce groupe est isomorphe à celui formé par les substitutions linéaires sur u, v, *qui laissent invariant les* Θ.

Réciproquement, si l'on se donne une courbe de genre 2 admettant un groupe G'_r de transformations en elle-même, la surface de Jacobi correspondante admettra un ou plusieurs groupes G_r isomorphes à G'_r; chacun de ceux-ci donne lieu à une involution, et, en écartant le cas où l'on tombe sur des involutions rationnelles ou représentées par des réglées, on aura autant de types de surfaces hyperelliptiques satisfaisant aux conditions demandées.

66. *Courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes.* D'après le n. 65 nous sommes ramenés à l'analyse des courbes de genre 2 admettant des transformations birationnelles singulières en elles-mêmes.

Cette analyse a été l'objet d'une étude de M. Bolza (44), dont il nous conviendra de rappeler les résultats.

Soit une courbe de genre 2

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0;$$

φ est un polynome d'ordre 5 ou 6, qui peut être remplacé par une forme homogène d'ordre 6 en posant $x = \frac{\xi}{\eta}$; l'équation $\varphi = 0$ représente les 6 points de diramation de f.

Il s'agit de classifier les équations $\varphi = 0$ qui admettent un groupe de transformations linéaires en elles-mêmes. Or d'après le théorème de M. Jordan concernant la classification des groupes linéaires, un groupe qui laisse invariant $\varphi = 0$ pourra être:

a) un groupe cyclique d'ordre 2, 3, 4, 5, 6;

b) un groupe diédrique d'ordre 4, 6, 12;

c) un groupe tetraédrique d'ordre 12, ou un groupe octaédrique (exaédrique), d'ordre 24;

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les points de diramation de f, racines de $\varphi = 0$.

Il pourra arriver que $\varphi = 0$ admette une transformation linéaire en elle-même qui soit périodique d'ordre 2, de façon que sur les 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 il se produise une substitution de la forme:

1) $$(1\,2)\ (3\,4)\ (5\,6)$$

ou bien de la forme

2) $$(1\,1)\ (2\,2)\ (3\,4)\ (5\,6).$$

(44) O. Bolza, *On binary sextics with linear transformations into themselves*, American Journal of Math., *10* (1888), pp. 47–70.

En ce dernier cas il y aura aussi les transformations linéaires

3)
$$\begin{matrix}(1\,2) & (3\,6) & (4\,5)\\ (1\,2) & (3\,5) & (4\,6)\end{matrix}$$

qui engendrent un groupe diédrique 3) d'ordre 4, auquel appartient la substitution 2).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 3 engendré par

4)
$$(1\,2\,3)\quad (4\,5\,6)$$

il y aura aussi les transformations d'ordre 2

5)
$$\begin{matrix}(1\,4) & (2\,6) & (3\,5)\\ (1\,6) & (2\,5) & (3\,4)\\ (1\,5) & (2\,4) & (3\,6),\end{matrix}$$

engendrant un groupe diédrique 5) d'ordre 6, qui renferme 4).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 4 engendré par

6)
$$(1\,1)\quad (2\,2)\quad (3\,4\,5\,6),$$

il y a un groupe octaédrique 7) de 24 substitutions linéaires qui ramènent $\varphi = 0$ en elle–même.

Dans ce groupe sont renfermées 6 substitutions d'ordre 4 analogues à 6) et leurs 3 carrées d'ordre 2 et du type 2), 8 substitutions d'ordre 3, et 6 substitutions d'ordre 2 et du type 1). Il y a:

8) un sous–groupe tetraédrique d'ordre 12 renfermant les 8 substitutions d'ordre 3 et les substitutions d'ordre 2 et du type 2);

9) un sous–groupe de celui–ci, diédrique d'ordre 4, renfermant les 3 involutions nommées;

enfin des sous–groupes diédriques d'ordre 4, 6 appartenant aux types 3), 5), et leurs sous–groupes cycliques.

Si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 5 telle que

10)
$$(1\,1)\quad (2\,3\,4\,5\,6),$$

il n'y a que le groupe cyclique d'ordre 5 engendré par cette transformation.

Enfin si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 6, telle que

11)
$$(1\,2\,3\,4\,5\,6),$$

outre le groupe cyclique engendré par celle–ci, il y aura 6 substitutions d'ordre 2 telles que

12)
$$\begin{matrix}(1\,4) & (2\,3) & (5\,6)\,;\cdots\cdots\\ (1\,1) & (4\,4) & (2\,6) & (3\,5)\,;\cdots\cdots,\end{matrix}$$

qui engendrent un groupe diédrique d'ordre 12.

Dans ce groupe sont renfermés des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6, semblables aux types 3), 5), et un sous-groupe diédrique d'ordre 6 renfermant les substitutions

13)
$$(1\,3\,5)\quad(2\,4\,6)$$
$$(1\,1)\quad(4\,4)\quad(2\,6)\quad(3\,5);\cdots\cdots$$

En résumant il y a 13 types différents de groupes de substitutions linéaires qui laissent invariant une forme φ d'ordre 6, mais cette forme ne donne lieu qu'à 6 types différents.

Nous allons écrire, d'après M. Bolza, les formes normales de φ correspondantes à ces types, en distinguant en chaque cas les groupes de transformations qui laissent invariant la courbe

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0,$$

et en indiquant à côté de chaque type le tableau des périodes normales appartenant à la courbe f.

On aura donc les types suivants:

I)
$$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^4\eta^2 + \beta\xi^2\eta^4 + \eta^6$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 4 engendré par les transformations

$$x' = -x,\quad y' = y;\qquad x' = -x,\quad y' = -y;\qquad x' = x,\quad y' = -y;$$

b) un sous-groupe d'ordre 2 de celui-ci, outre que $(x' = x, y' = -y)$, par exemple

$$(x' = -x, y' = y).$$

Ces groupes correspondent au groupe 1) sur les racines de $\varphi = 0$.

Le tableau normal des périodes de f est

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

où

$$h = \frac{1}{2}.$$

II)
$$\varphi = \xi(\xi^5 + \eta^5)$$

ou

$$\varphi = x(x^5 + 1).$$

La courbe f admet

a) un groupe cyclique d'ordre 10

$$x' = \varepsilon x\,, \quad y' = e^{(\pi i)/5}\, y\,; \qquad \varepsilon = e^{(2\pi i)/5}$$

b) un sous-groupe d'ordre 5 de celui-ci.

Ces groupes correspondent également à un groupe 10) opérant sur les racines de $\varphi = 0$.

Périodes normales de f:

$$g = 1 - \varepsilon^4, \qquad h = -\varepsilon^2 - \varepsilon^4, \qquad g' = \varepsilon.$$

III) $$\varphi = \xi\eta\,(\xi^4 + \alpha\xi^2\,\eta^2 + \eta^4)$$

ou

$$\varphi = x\,(x^4 + \alpha x^2 + 1).$$

Périodes normales de f:

$$g = g', \qquad h = \frac{1}{2}\,.$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 8 qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique engendré par les trois involutions qui laissent invariant $\varphi = 0$ opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme le groupe 3);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 4

$$(x' = -x\,,\ y' = \pm iy)$$

qui correspond au groupe 2) sur les racines de $\varphi = 0$.

IV) $$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^3\,\eta^3 + \eta^6$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^3 + 1;$$

$$12\,gg' + 1 = 0\,, \qquad h = \frac{1}{2}\,.$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 12 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 6 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 5);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 6, correspondant au groupe cyclique d'ordre 3 de $\varphi = 0$ (type 4):

$$(x' = \varepsilon x\,,\ y' = -y\,;\ \varepsilon = e^{(2\pi i)/3})$$

c) un sous-groupe de b) d'ordre 3.

V) $$\varphi = \xi^6 + \eta^6,$$

ou, en changeant η en $i\eta + \varphi = \xi^6 - \eta^6$, d'où l'on tire

$$\varphi = x^6 - 1.$$

On a les périodes

$$g = g' = \frac{i}{2\sqrt{3}}, \qquad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 12 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 12);

b) un sous–groupe de a) d'ordre 12, qui correspond au groupe cyclique d'ordre 6 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ (type 11):

c) deux sous–groupes cycliques de b), d'ordre 6, engendrés par

$$x' = -\varepsilon x, \qquad y' = \pm y \qquad (\varepsilon = e^{(2i\pi)/3})$$

d) un sous–groupe d'ordre 12 de a), qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique, d'ordre 6, opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 13).

$$\left(\begin{array}{lll} x' = \varepsilon x, \ y' = \pm y \ ; & x' = \varepsilon^2 x, \ y' = \pm y \ ; & x' = x \ , \ y' = \pm y \\ x' = \dfrac{1}{x}, \ y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon}{x}, \ y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon^2}{x}, \ y' = \dfrac{\pm iy}{x^3} \end{array}\right).$$

La courbe f admet aussi d'autres groupes renfermés en a) et appartenant aux types I), III), IV).

VI) $\qquad \varphi = \xi\eta\,(\xi^4 + \eta^4) \qquad$ ou bien $\qquad \varphi = \xi\eta\,(\xi^4 - \eta^4),$

ou respectivement

$$\varphi = x^5 + x, \qquad \varphi = x^5 - x;$$

$$g = g' = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}, \qquad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 48 en isomorphisme diédrique avec le groupe octaédrique de 24 substitutions linéaires, qui laissent invariant $\varphi = 0$ (type 7); et les sous–groupes suivants;

b) groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec un groupe tetraédrique de 12 substitutions linéaires (type 8);

c) groupe cyclique d'ordre 8 correspondant à un groupe 6) sur les racines de $\varphi = 0$:

$$(x' = ix\,, y' = \sqrt{i}\,y\,;\ \sqrt{i} = e^{(\pi i)/2}),$$

d) groupe d'ordre 8 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 4 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 9).

En outre il y a en a) de sous–groupes des types I), III), IV).

67. *Comment on passe des groupes de la courbe de genre 2, à ceux de la surface de Jacobi associée.* Etant donnée une courbe f appartenant à l'un des types I), ···, VI), à chaque groupe de transformations de f on peut faire correspondre au moins un groupe de transformations de la surface de Jacobi F associée à f, et cela de la façon suivante: remplaçons tout couple de f par le point homologue F; à toute transformation de f, considérée comme opérant sur les couples de la courbe, répondra ainsi une transformation de F; pourtant on aura sur F un groupe de transformations isomorphe à celui de f, et qui laisse invariant le point homologue à la g_2^1 de f.

Réciproquement, si l'on a un groupe de transformations de F, qui laissent invariant un même point uni O de la surface, on peut toujours considérer une courbe f associée à F de façon qu'au point O corresponde la g_2^1 de f; cette courbe f admet un groupe de transformations isomorphe au groupe de F (n. 65), et celui–ci prendra naissance du groupe de f, par la construction précédente.

Cependant il peut arriver qu'à un groupe de f (appartenant à un des types que nous avons analysés) correspondent plusieurs groupes de F, isomorphes entre eux, mais birationnellement distincts; dans ce cas il y aura des groupes de F n'admettant pas des points unis communs à toutes leurs transformations. Ce cas ne saurait donc se présenter lorsqu'il s'agit de groupes cycliques, car toute transformation cyclique T de la surface F, associée à une courbe f irréductible, a des points unis (n. 58), qui sont unis aussi pour les puissances de T.

D'après ces remarques, nous aurons lieu d'analyser les types différents de groupes de F, qui peuvent correspondre à un meme groupe de f, lorsqu'il s'agit d'un groupe qui n'est pas cyclique.

Mais parmi les groupes de F il y en a qui donnent lieu à des involutions représentées par des surfaces réglées; ce sont là des cas de surfaces hyperelliptiques que nous devons écarter d'après le n. 4.

Nous commençons par l'examen de ce cas.

68. *Cas à écarter.* En premier lieu considérons le cas I, b).

On obtient sur F une transformation périodique d'ordre 2, qui admet une courbe de points unis; en effet ce sont des points unis pour cette transformation les ∞^1 points de F qui représentent les couples de l'involution elliptique engendrée sur f par la transformation

$$x' = -x\,, \qquad y' = y.$$

Ainsi le cas I, b) nous amène à une involution qui ne correspond pas à une surface hyperelliptique proprement dite (n. 4).

Or les groupes I, a); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), renferment tous un sous–groupe d'ordre 2 du type I, b); partant les involutions correspondantes à ces groupes possèdent un nombre infini de coïncidences, et amènent à des surfaces qu'on peut transformer en des réglées (n. 35). On en conclut que les cas I); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a) sont à écarter.

Nous venons d'écarter une première série de cas qui nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes. Pour ce qui concerne les autres types, on reconnait d'abord aisément qu'ils correspondent à des involutions ayant un nombre fini de coïncidences, et par suite régulières (n. 37).

Mais on verra que les cas cycliques II) et VI, c) donnent lieu à des involutions rationnelles et pour cette raison doivent être écartés ainsi que les précédents.

A cet effet il faut calculer la valeur du genre $p_a = p_g$ appartenant à chacune des involutions que nous venons de construire sur F.

Ce calcul peut être fait de deux manières différentes: on peut calculer le p_a, ou bien le p_g; nous savons que les deux valeurs sont égales.

Pour calculer le p_a on peut procéder de la manière suivante.

Soit Φ une surface représentant une involution donnée sur F. Considérons un faisceau de courbes appartenant à Φ et le faisceau homologue sur F; en considérant dans chaque faisceau les courbes douées d'un point double, on pourra évaluer les invariants de Zeuthen–Segre de Φ, F; celui de Φ se trouvera exprimé par celui de F, et d'après la formule connue on en tirera la valeur du genre numérique p_a de Φ (45).

Ce calcul présente une seule difficulté remarquable: c'est qu'aux points de coïncidence de l'involution donnée sur F, correspondent des points singuliers et il s'agit de reconnaître combien de fois les courbes du faisceau considéré sur Φ, qui passent par ces points, doivent être comptées parmi celles qui ont un point double (il est sous entendu que le faisceau dont on parle n'a pas comme points–base ces points singuliers).

La difficulté que nous venons de signaler se ramène d'ailleurs à la question suivante: étant donné sur F un système linéaire de courbes appartenant à l'involution, reconnaître quelles singularités acquièrent les courbes du système lorsque on leur impose de passer par des points de coïncidence.

Nous aurons lieu de traiter en détail cette question qui se rattache à la construction effective des surfaces hyperelliptiques que nous venons de classifier. Nous verrons alors que les types III, b); IV, b); V, d); VI, b), d) nous amènent à des surfaces de genre $p_a = 1$.

Ce même procédé de construction nous a fait découvrir que les surfaces correspondantes aux types II) et VI, c) sont rationnelles. Mais sans répéter ici cette construction qui nous amène en somme à un résultat négatif, nous verrons que ce résultat peut être établi plus simplement aussitôt que l'on ait reconnu que $p_a = p_g = 0$.

A cet effet on peut s'appuyer sur une simple remarque de MM. Bagnera et de Franchis, remarque qui permet d'évaluer le p_g des surfaces Φ.

(45) Ce procédé fournit en général la relation entre les genres numériques de deux surfaces en correspondance [1 n], c'est–à–dire la formule de M. Severi que nuos employerons dans les ch. suivants.

Cette remarque consiste en ce que s'il a une integrale double de première espèce attachée à Φ, cette intégrale devra se réduire à $\iint du\,dv$ lorsqu'on exprime les coordonnées des points de Φ par des fonctions rationnelles des points de F, et par conséquent par des fonctions hyperelliptiques de u, v. Il s'ensuit que si l'involution (cyclique) représentée par Φ est engendrée par la transformation

$$u' = \alpha u + \beta v$$
$$v' = \gamma u + \delta v,$$

le déterminant Jacobien de cette transformation sera

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ceci posé, il suffit de reconnaître la forme des substitutions linéaires sur u, v engendrant les involutions des différents types considérés sur F.

Envisageons d'abord le cas II, b).

La courbe

$$y^2 = x(x^5 + 1)$$

possède deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y}, \qquad v = \int \frac{dx}{y}.$$

Par la substitution

$$x' = \varepsilon x, \qquad y' = \varepsilon^3 y \qquad (\varepsilon = e^{(2\pi i)/5})$$

qui transforme la courbe en elle-même les intégrales u, v viennent changées en

$$u' = \varepsilon^4 u, \qquad v' = \varepsilon^3 v.$$

La même substitution subissent les somme donnant lieu aux intégrales attachées à la surface de Jacobi F, qui correspond à la courbe. Comme le déterminant de cette substitution est $\varepsilon^2 \neq 1$, on en conclut que la surface Φ correspondante à l'involution du type II, b) a le genre $p_g = 0$.

Par conséquent il en est de même de la surface correspondante au type II, a), qui représente une involution appartenante à la surface II, b).

Envisageons maintenant le cas VI, c).

La courbe

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

possède les deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y}, \qquad v = \int \frac{dx}{y},$$

et par la substitution

$$x' = ix, \qquad y' = \sqrt{i}\,y$$

il vient

$$u' = \frac{-1}{\sqrt{i}}\, u\,, \qquad v' = \sqrt{i}\, v\,,$$

de sorte que le déterminant de la substitution est -1. On en déduit que l'involution cyclique d'ordre 8 correspondante au type VI, c), a $p_g = 0$.

Le procédé que nous avons rapidement exquissé nous amène à la conclusion que les involutions correspondantes aux cas II) et VI, c) ont le genre

$$p_a = p_g = 0.$$

Nous allons prouver en outre que leur bigenre n'est pas $P_2 = 1$, de sorte que, d'après le n. 31, on pourra conclure que ces involutions sont rationnelles.

Posons-nous d'abord dans le cas II, b), et en supposant $P_2 = 1$, construisons une surface Φ image de l'involution, qui ne possède pas des courbes exceptionnelles.

Étant $P_2 = 1$, il y aura sur Φ deux systèmes linéaires $|C|, |C'|$, sans points-base, adjoint l'un à l'autre, auxquels correspondent sur F deux systèmes linéaires renfermés dans le même système complet; on a donc

$$|5\,C| = |5\,C'|$$

et par suite

$$P_5 = 1.$$

Cette conclusion est absurde attendu que la surface Φ, ayant $p_g = 0$ et étant dépourvue de courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on doit avoir (n. 31)

$$P_5 = 0.$$

Maintenant on peut affirmer aussi que la surface correspondant au cas II, a), est rationnelle. En effet cette surface vient représentée par une involution de couples de points appartenant à la surface qui correspond au cas II, b); et, d'après M. Castelnuovo, toute involution sur une surface rationnelle est rationnelle.

Considérons enfin le cas VI, c).

La surface Φ vient représentée par une involution de couples de points, I_2, appartenant à la surface régulière Φ' qui correspond au cas III, b); et il est aisé de remarquer qu'il y a sur Φ' des coïncidences correspondant à la g_2^1 de f. D'après le n. 38 on conclut donc que cette involution I_2 est rationnelle, puisqu'elle ne saurait avoir $P_2 = 1$.

En résumant les résultats obtenus nous dirons que le cas I); II); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), c) *correspondent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes, qui sont écartées de notre étude.*

69. *Genres des surfaces hyperelliptiques correspondantes aux types qui ne sont pas dégénérescentes.* – En calculant la valeur du déterminant des substitutions linéaires périodiques d'ordre 3, 4 qui forment les groupes III, b);

IV, b); V, d); VI, b), d), on reconnaît que ces types nous amènent à des surfaces de genre $p_g = 1$. Ainsi donc nous pouvons énoncer dès à présent la conclusion suivante qui sera établie à posteriori dans la suite:

Les cas III, b); IV, b); V, d); VI, b), d), *correspondent à des surfaces hyperelliptiques de genres*

$$p_a = p_g = 1 \qquad (P_2 = 1).$$

Parmi ces cas nous avons déjà remarqué que les groupes cycliques [tels que III), IV)] correspondent chacun à un type bien déterminé d'involution sur la surface de Jacobi F, involution possédant un point uni pour toutes les transformations du groupe.

Il reste à classifier les types qu'on peut appeler *bi–diédriques* et *bi–tetraédriques*, c'est–à–dire les types correspondants à des groupes bidiédriques d'ordre 8 (VI, d) et 12 (V, d) et les types correspondants à des groupes bi–tetraédriques (VI, b).

70. *Analyse des groupes bi–diédriques et bi–tetraédriques, d'odre* 8, 24, *appartenant à une surface de Jacobi.* – Considérons une surface F correspondante au cas VI). On aura sur F plusieurs types de groupes G_8 et G_{24} isomorphes au groupe bi–diédrique d) et au sgroupe bi–tetraédrique b) de f. Tâchons de construire ces types.

Un groupe G_8 se trouvant en isomorphisme diédrique avec un G_4 engendré par deux involutions échangeables (Vierergruppe), on pourra l'engendrer par deux transformations cycliques d'ordre 4, U_1, U_2, qui ne seront pas échangeables, mais dont l'une transformera l'autre en son inverse; U_1^2, U_2^2 donneront lieu à la même transformation K, qui sera une transformation ordinaire de 1re espèce de la surface F. On peut supposer que dans la correspondance point par couple entre la surface F et la courbe f, K réponde à la g_2^1 de f.

Ceci posé, rappelons–nous que la transformation K possède 16 coïncidences (n. 46). En ayant égard aux propriétés des points unis de la transformation périodique d'ordre 4 qui résulte définie sur f, on déduit aisément, au moyen de considérations qu'on trouvera développées en détail au n. 84, qu'une transformation hermitienne donnant pour carré K, laisse invariant quatre coïncidences de K et distribue les autres coïncidences en six cycles de 2de ordre.

Soient P, Q, R, S les points unis de la transformation U_1. Comme U_2 doit transformer U_1 en son inverse, U_2 changera en lui–même le groupe P, Q, R, S.

Il y aura donc à distinguer quatre hypothèses:

1) La transformation U_2 laisse invariant P. Alors toutes les transformations du Groupe G_8 engendré par U_1, U_2, ont en commun le point uni P et par suite elles laissent invariant la variété ∞^1 – birationnellement identique à f (n. 21) – formée par les courbes C passant par P et appartenant à un système

Σ quelconque. Le groupe G_8 vien correspondre ainsi, au moyen de la correspondance point par couple entre F, f, au groupe bi–diédrique d).

Dans ce cas on voit de plus (n. 92) que U_2 laisse aussi invariant les autres points unis Q, R, S de U_1.

2) Les couples (P, Q) (R, S) donnent deux cycles de 2de ordre de la transformation U_2. Un groupe G_8 de ce type existe effectivement.

En effet pour le construire il suffit de considérer les substitutions U_1, U_2 génératrices du type 1) et de poser

$$U_1' \equiv U_1, \qquad U_2' \equiv U_2 A,$$

A étant la transformation de 2de espèce qui fait correspondre Q à P.

Nous désignerons par G_8' le groupe engendré par U_1', U_2' en réservant le symbole G_8 pour le type 1).

3) Les couples (P, R) (Q, S) donnent deux cyles de U_2. On obtient le groupe G_8'' correspondant à ce cas, en prenant pour substitutions génératrices

$$U_1'' \equiv U_1, \qquad U_2'' \equiv U_2 B,$$

B étant la transformation de 2de espèce qui amène P en R.

4) Les couples (P, S) (Q, R) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G_8''' correspondant, en posant

$$U_1''' \equiv U_1, \qquad U_2''' \equiv U_2 C,$$

où C est la transformation de 2de espèce qui fait correspondre S à P.

On a ainsi à priori sur la surface F 4 types de groupes bi–diédriques formés par des transformations hermitiennes.

Une analyse plus approfondie, que nous renvoyons à un autre chapitre de ce mémoire, nous montrera que les quatre points unis P, Q, R, S de la transformation U_1, se distribuent en deux couples (P, Q) (R, S), de sorte que les points d'un couple jouissent des mêmes propriétés et ils se comportent de la même façon par rapport aux points de l'autre couple.

On verra ainsi que les types G_8'', G_8''' ne sont pas distincts. On aura donc en définitive *trois types de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi–diédriques d'ordre 8 de la surface F* [cas VI)].

Il est aisé maintenant de construire sur F les différents types de groupes G_{24} isomorphes au groupe bi–tetraédrique VI, b) de f.

On partira de la remarque que tout groupe G_{24} renferme un sous–groupe invariant bi–diédrique G_8.

Or donnons–nous sur F un groupe bi–diédrique appartenant à l'un des types que nous venons de définir, et tâchons de construire un groupe bi–tetraédrique qui le renferme comme sous–groupe invariant.

On aura les cas suivant:

1) Le groupe bi–diédrique donné est le G_8 du type 1), dont toutes les substitutions laissent invariant les points P, Q, R, S.

Dans ce cas le G_{24} cherché échangera entr'eux les points P, Q, R, S suivant un groupe de substitutions G_r, qui se trouve en isomorphisme mériédrique avec G_{24}. Comme au G_8 correspond en cet isomorphisme la transformation identique, on aura $r = 3$, et par conséquent le groupe $G_r = G_3$ sur (P, Q, R, S) sera cyclique d'ordre 3, et laissera invariant un point parmi les quatre: par exemple le point P.

Il s'ensuit que le groupe G_{24} a sur F un point uni que l'on peut supposer correspondant à la g_2^1 de f; on a ainsi un premier type bien défini de groupe bi–tetraédrique.

2) Le groupe bi–diédrique donné est le groupe $G_8^{(j)}$ du type j) où $j = 2, 3, 4$.

Les trois substitutions

$$U_1^{(j)}, \quad U_2^{(j)}, \quad U_1^{(j)} U_2^{(j)},$$

(d'ordre quatre) existant en $G_8^{(j)}$ possèdent trois groupes de 4 points unis, qui n'ont pas des points communs.

Sur le groupe des quatre coïncidences restant de la transformation K, les substitutions de $G_8^{(j)}$ produisent un groupe diédrique G_4.

Les mêmes quatre points devront être échangés entr'eux par le groupe bi–tetraédrique cherché – que nous désignerons par $G_{24}^{(j)}$ – suivant les substitutions d'un groupe tetraédrique G_{12}, qui renferme G_4 comme sous–groupe invariant.

Or ce groupe G_{12} résulte ainsi bien déterminé, et l'on en déduit que le groupe $G_{24}^{(j)}$ résulte aussi bien déterminé.

On en conclut qu'il y a tant de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi–tetraédriques, que de surfaces distinctes correspondantes aux groupes bi–diédriques, c'est–à–dire qu'il y aura sur F (cas VI) *trois types différents de groupes bi–tetraédriques d'ordre 24, amenant à des surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes.*

71. *Groupes bi–diédriques d'ordre 12.* – La courbe f appartenant au type V), elle admet un groupe de transformations en elle–même V, d), c'est–à–dire un groupe G_{12} bi–diédrique d'ordre 12.

Combien de groupes isomorphes à G_{12} peut–il y avoir sur la surface de Jacobi F associée à f?

Il est aisé de répondre à cette question en remarquant que G_{12} admet un sous–groupe invariant G_6 cyclique d'ordre 6; en effet dans le groupe diédrique d'ordre 6 qui est en isomorphisme émi–édrique avec G_{12}, il y a un sous–groupe invariant d'ordre 3, et à celui–ci correspond en G_{12} un G_6 du type IV, b).

Ceci posé remarquons encore que le G_6 du type IV, b) donne lieu à un groupe de trasformations de F ayant *un seul* point uni qui correspond à la g_2^1 de f; il s'ensuit qu'un groupe d'ordre 12 de F renfermant un tel sous–groupe invariant, a un point uni (invariant par rapport à toutes les transfor-

mations du groupe). En rappelant ce que nous avons dit au n. 67 on en conclut que:

Sur une surface F associée à la courbe f (cas V) *il y a un seul type de groupe bi–diédrique d'ordre 12, en considérant comme identiques deux groupes amenant a des surfaces hyperelliptiques en correspondance birationnelle entre elles.*

72. *Résumé et programme de l'étude qui suit.* – En résumant les résultats obtenus nous énoncerons le théorème suivant:

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ *et de diviseur* $\delta = 1$, *admettant une représentation propre des fonctions* Θ *irréductibles, sont des surfaces régulières de genres* $p_a = p_g = P_2 = \cdots = 1$. *Elles se partagent en 11 familles birationnellement distinctes, correspondantes à des groupes de transformations d'une courbe de genre 2 en elle–même. Ces familles sont indiquées par le tableau suivant*:

surfaces dépendantes de trois modules:

I) $r = 2$ (*surface de Kummer*);

surfaces dépendantes d'un module:

II) $r = 3$ (*groupe cyclique d'ordre* 3);
III) $r = 4$ (*groupe cyclique d'ordre* 4);
IV) $r = 6$ (*groupe cyclique d'ordre* 6);

surfaces n'ayant pas de modules:

V, VI, VII) $r = 8$ (*groupes bi–diédriques d'ordre* 8);
VIII) $r = 12$ (*groupe bi–diédrique d'ordre* 12);
IX, X, XI) $r = 24$ (*groupes bi–tetraédriques d'ordre* 24).

Les nombres I–IX (qui n'ont rien à faire avec ceux employés avant dans la classification des courbes de genre 2 admettant des transformations en elles–mêmes), nous servirons dans la suite pour désigner les différents types de surfaces hyperelliptiques que nous proposons d'étudier en détail.

Pour chaque type nous allons construire une surface projectivement définie (dépendant suivant les cas de modules arbitraires), à laquelle toute surface hyperelliptique du type donné peut être ramenée par une transformation birationnelle.

Les surfaces modèles que nous allons construire pour $r > 2$, seront des surfaces d'ordre $2r$ appartenant à des espaces S_{r+1} de dimension > 3, et seront caractérisées par certaines configurations de points singuliers et de hyperplans ayant un certain contact suivant des courbes rationnelles.

Il sera aisé d'ailleurs de projeter de telles surfaces dans l'espace ordinaire, et même d'en abaisser l'ordre (jusqu'à 4). Cependant les surfaces d'ordre plus éléve d'un hyperspace, auxquelles nous nous rapportons, sont en général les plus simples de leur classe à ce point de vue, que leur configuration caractéristique jouit de la plus grande symétrie possible.

PARTE II: Acta Mathematica, *32* (1910), pp. 321–403.

VIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 3 (type II).

73. *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre trois.* – Soit F une surface de Jacobi admettant une, et par conséquent ∞^2, transformations hermitiennes périodiques d'ordre 3, correspondant à une transformation τ d'ordre 3 de la courbe associée f.

Rappelons–nous que la transformation singulière τ jouit des propriétés suivantes:

a) Le groupe formé par un point ξ de f et par les points ξ', ξ'' correspondants à ξ au moyen de τ et de τ^2, donne, au varier de ξ, une série linéaire g_3^1 de la courbe f.

b) La transformation τ admet *quatre* points de coïncidence qui se distribuent en deux couples de la g_2^1 appartenant à f.

La transformation τ peut être envisagée aussi comme une transformation birationnelle entre les couples de points de f: on a ainsi sur la surface de Jacobi F une transformation de Hermite T, qui correspond à τ. Pour déterminer le nombre des points de coïncidence de T, il faut chercher les couples de points de f, qui sont invariant par rapport à la transformation τ.

Soient

$$A_1, \quad A_2, \quad B_1, \quad B_2$$

les quatre points de coïncidence de τ; A_1, A_2 et B_1, B_2 étant respectivement conjugués par rapport à la g_2^1.

Désignons d'une façon générale par $2P$ le couple donné par deux points coincidant avec P, et par $P+Q$ le couple donné par les points P, Q. On a alors les couples $2A_1, 2A_2, 2B_1, 2B_2, A_1+A_2, B_1+B_2, A_1+B_1, A_2+B_2, A_1+B_2, A_2+B_1$, invariant par rapport à τ; et on ne peut pas avoir d'autres couples jouissant de la même propriété, car tout couple $P+Q$ qui est ramené en lui–même par τ, doit être formé par deux points de coïncidence de la transformation:

$$\tau^2 \equiv \tau^{-1}.$$

Il semble au premier abord qu'on aura sur F, 10 points de coïncidence de la transformation T. Mais il ne faut pas oublier que si la surface F n'a pas de courbes exceptionnelles (n. 17), la correspondance entre les points de F et les couples de f, n'est pas biunivoque sans exception, car tout couple de la g_2^1 vient représenté par un même point de F (n. 14, c); ainsi donc les deux couples

$$A_1+A_2, \qquad B_1+B_2$$

appartenant à la g_2^1 correspondent à un même point de coincidence de T sur F. Pourtant *on a sur F neuf points de coïncidence de la transformation T.*

Envisageons maintenant le système complet Σ, déterminé par les courbes C de F répondant aux couples de f qui renferment un même point. La T change en lui–même le système Σ et fait correspondre les courbes de celui–ci, conçues comme les éléments d'une variété hyperelliptique, suivant une transformation hermitienne d'ordre 3.

En vertu de la dualité entre les points de F et les courbes du système (n. 23), on peut affirmer tout de suite que *T change en elles–mêmes neuf courbes du système Σ.*

Entre ces courbes et les neuf points de coïncidence, il y a des relations remarquables, que nous allons établir.

Soit O un des points de coïncidence, et H le système ∞^1 formé des courbes C issues par O.

La transformation T change en lui–meme le système H, et elle donne naissance à une transformation singulière d'ordre 3 entre les courbes du système H, conçu comme une variété ∞^1 d'éléments, birationnellement identique à la courbe f (n.22). On a donc *quatre* éléments de H qui demeurent invariant par rapport à la transformation T, c'est–à–dire que des neuf courbes C unies, quatre passent par le point O.

Les quatre éléments unis, en vertu de la propriété b) rappelée ci–dessus, se distribuent en deux couples de la série g_2^1 appartenant à la variété H.

Comme les couples de cette série sont donnés par les couples de courbes C se touchant en O, on en conclut que les courbes unies issues par O se distribuent en deux couples a, b et c, d de courbes tangentes.

En considérant d'une façon analogue la transformation d'ordre 3 déterminée par T sur une des courbes unies, on trouve sur cette courbe quatre points de coïncidence distribués en deux couples de la g_2^1 relative à la courbe envisagée.

Mais il y en a davantage. Deux courbes unies se coupent certainement en deux points de coïncidence, car ces points doivent être unis par rapport à la transformation

$$T^2 \equiv T^{-1}.$$

Or ces points peuvent être distincts ou coincidents.

On a par exemple le premier cas relativement aux courbes a, c et le second relativement aux courbes a, b.

Analoguement par deux points de coïncidence il peut passer deux courbes unies, distinctes ou coïncidentes. Les second cas se présente seulement lorsque les points unis envisagés sont conjugués par rapport à la g_2^1 de la courbe unie.

Dans la suite nous dirons que *deux points de coïncidence sont conjugués* lorsqu'il appartiennent à une seule courbe unie; et nous dirons aussi que *deux courbes unies sont conjuguées* lorsqu'elles se touchent.

En résumant, la configuration formée par les courbes et les points unis de la transformation T, jouit des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre courbes, distribuées en deux couples de courbes conjugués.

Deux points appartiennent à une ou à deux courbes, suivant qu'ils sont ou qu'ils ne sont pas conjugués.

Une courbe renferme quatre points, distribués en deux couples de points conjugués.

Deux courbes se coupent en un ou en deux points, suivant qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas conjuguées.

Ces propriétés peuvent s'exprimer d'une façon élégante et complète au moyen de l'algorithme suivant, qui a une très grande analogie avec l'algorithme adopté par M. Humbert pour la cfg. des points et des plans singuliers d'une surface de Kummer (n. 46).

Envisageons les deux séries de nombres

$$1, \quad 2, \quad 3 \qquad \text{et} \qquad 1', \quad 2', \quad 3',$$

et désignons par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \qquad \text{et} \qquad \alpha', \quad \beta', \quad \gamma'$$

deux permutations quelconque de ces séries. On peut représenter les neuf courbes et les neuf points unis de la transformation T de F, respectivement par les symboles

$$11', \quad 12', \quad 13', \quad 21', \quad 22', \quad 23', \quad 31', \quad 32', \quad 33'$$

$$(11'), \quad (12'), \quad (13'), \quad (21'), \quad (22'), \quad (23'), \quad (31'), \quad (32'), \quad (33');$$

et cela de façon que

1) *Les points appartenant à la courbe* $\alpha\alpha'$, *soient*

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma).$$

2) *Les courbes passant par le point* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma$$

3) *Deux points ou deux courbes soient conjuguées lorsque les symboles relatifs ont un caractère commun*

[par exemple $\alpha\beta', \alpha\gamma'$ et $(\alpha\beta'), (\alpha\gamma')$].

On voit que les points conjugués au point $(\alpha\alpha')$ ont les symboles

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma),$$

et par suite ils appartiennent à la courbe $\alpha\alpha'$. Analoguement les courbes conjuguées à une courbe donnée $\alpha\alpha'$ passent par le point $(\alpha\alpha')$.

On exprimera ce rapport en disant que *le point* $(\alpha\alpha')$ *et la courbe* $\alpha\alpha'$ *sont conjugués*. Nous verrons dans la suite comment on peut rattacher l'algorithme que nous avons défini, aux propriétés des fonction Θ appartenant à la surface de Jacobi F.

74. *Propriétés infinitésimales d'un point uni de la transformation* T. Il nous sera utile de connaître ce qui se passe dans le domaine d'un point de coïncidence O de la transformation T.

On établit aisément que la transformation T détermine une homographie périodique d'ordre 3 entre les points appartenant au domaine du point uni O, et que les coïncidences de cette homographie tombent en les points de contact des couples de courbes unies passant par O.

En effet la transformation T ne peut pas changer entre elles deux courbes arbitraires C de Σ se touchant en O, car dans l'hypothèse contraire ces courbes résulteraient invariantes par rapport à la transformation

$$T^2 \equiv T^{-1},$$

et par suite elles seraient des courbes unies de la transformation T.

Il s'ensuit que T change tout couple de courbes C se touchant en O, en un couple analogue, mais distinct du premier.

Il faudra donc que T change un point arbitraire appartenant au domaine de O, en un *autre* point du même domaine. Ce point à son tour ne pourra pas être changé en le premier, car autrement T^2 donnerait lieu à une homographie identique dans le domaine de O.

On en conclut que T détermine dans le domaine de O une homographie de 3^{me} ordre, dont les coïncidences tombent évidemment dans les points communs aux couples de courbes unies.

75. *L'involution* I_3 *engendrée par la transformation* T. En associant à tout point P de F les points P', P'' correspondants à P par rapport aux transformations T, T^2, on obtient une involution I_3, possédant neuf groupes de coïncidences, dont chacun est formé de trois coïncidents.

Nous nous proposons d'étudier la surface régulière Φ qui représente (sans exception) les groupes de I_3.

Disons C', C'' les courbes de F transformées d'une courbe C de Σ, par rapport à T, T^2, et observons que la courbe réductible

$$D = C + C' + C''$$

appartient à l'involution I_3, c'est-à-dire que les points conjugués de tout point de D, appartiennent aussi à cette courbe.

La correspondance (1, 3) entre les points de Φ et les points de F, transforme la courbe C de F en un courbe Γ de Φ birationnellement identique a C: eh bien cette courbe Γ est aussi la transformée des courbes C', C'', c'est-à-dire qu'elle *représente* la série des groupes de I_3 appartenant à la courbe D.

La courbe Γ a deux points doubles, car il existe sur C deux couples de points conjuguées par rapport à I_3, qui sont donnés par les quatre intersections des courbes C', C'' avec C.

Lorsque C décrit le système Σ, la courbe Γ décrit un système continu; et comme la surface Φ ne possède pas d'intégrales simples de première espèce, d'aprés M. Humbert ce système continu doit être renfermé en un système linéaire $|\Gamma|$ de courbes du même ordre.

Faisons maintenant les remarques suivantes:

1) Le système $|\Gamma|$ n'a pas de points–base. En effet la correspondance [1, 3] entre Φ, F n'ayant pas des points fondamentaux sur la surface Φ – c'est–à–dire des points de Φ auxquels correspondent des courbes de F – au système Σ dépourvu de point–base, correspond sur Φ un système jouissant de la même propriété.

2) Le *genre* du système $|\Gamma|$ est

$$\pi = 4.$$

En effet le genre d'une courbe arbitraire du système linéaire, est égal au genre d'une courbe Γ répondant à une courbe C, augmenté du nombre des points doubles de Γ.

3) Le *degré* de $|\Gamma|$ (c'est–à–dire le nombre des intersections de deux Γ) est

$$n = 6.$$

En effet les 18 points communs à deux courbes D, se partagent en six groupes de l'involution I_3.

4) La dimension de $|\Gamma|$ est

$$r \geq 3,$$

car ce système linéaire doit renfermer un système continu ∞^2, non linéaire, de courbes douées de deux points doubles.

5) Le système $|\Gamma|$ est un système *simple*, c'est–à–dire que les courbes Γ passant par un point quelconque de la surface Φ, ne vont passer en conséquence par d'autres points mobiles avec celui–ci.

Etant donnés sur Φ deux points quelconque M, N, il suffira de prouver qu'il y a des courbes Γ passant par M et non par N.

Soient

$$P\,P'P'', \qquad Q\,Q'Q''$$

les deux groupes de I_3 répondant aux points M, N de Φ. Comme les courbes C passant par P n'ont d'autres points communs, on pourra fixer une de ces courbes, qui ne passe par aucun des points Q, Q', Q''. Alors les courbes C', C'' transformées de C, viennent passer respectivement par les points

P', P'', mais non par Q, Q', Q''. On a ainsi sur Φ une courbe Γ – image de la courbe

$$D = C + C' + C'' —$$

qui passe par M et non par N.

Comme il est bien connu, en vertu des propriétés 4) et 5) on pourra transformer birationnellement la surface Φ en une surface de l'espace à r dimensions, de telle façon qu'aux courbes du système $|\Gamma|$ répondent les sections hyperplanes de la surface transformée, qui résultera d'ordre 6, 6 étant le dégré de $|\Gamma|$.

Dans la suite (aucune ambiguité n'étant pas possible) nous désignerons encore par Φ, ou par Φ_6, la surface d'ordre 6 de l'espace S_r, et par Γ ses sections hyperplanes, qui seront des courbes de genre 4.

76. *La surface* Φ_6. – Remarquons d'abord que la dimension r de l'éspace renfermant la surface Φ_6, ne peut pas être plus grande que 4, car les sections hyperplanes de la surface, étant des courbes d'ordre 6 et de genre 4, ne peuvent pas appartenir à un espace de dimension > 3. On aura donc

$$r = 3 \qquad \text{ou} \qquad r = 4.$$

La première valeur de r sera écartée, lorsque nous aurons démontré que « la surface Φ ne peut renfermer des lignes multiples »; car une section hyperplane *arbitraire* de Φ résultera alors une courbe d'ordre 6 et de genre 4, dépourvue de points multiples, et par suite elle ne pourra pas appartenir à un plan. Pour établir le fait énoncé, observons que, si P est un point de la surface de Jacobi F, distinct des neuf points de coïncidence, on peut toujours construire deux courbes D passant par le groupe $P\,P'P''$ déterminé par P, et se coupant, hors de ce groupe, en 5 groupes distincts de l'involution I_3. Il suffit en effet de choisir deux courbes arbitraires C, C_0 de Σ passant par P, et de considérer les courbes C', C'' ; C_0', C_0'' qui leur correspondent au moyen de T et de T^2. On a ainsi deux courbes D

$$C + C' + C'', \qquad C_0 + C_0' + C_0''$$

satisfaisant à la condition enoncée.

Designons par M le point de Φ image du groupe $P\,P'P''$.

Les courbes D envisagées ont pour images deux sections hyperplanes de Φ, issues par le point M et se coupant *hors* de M en *cinq* points: on en conclut que M est un point simple de Φ, c'est-à-dire qu'à tout point P de F, ne tombant pas en un point uni de la transformation T, correspond un point simple M de la surface Φ; et par suite que cette surface n'a que neuf points multiples (au plus).

Il s'agit maintenant d'examiner la nature des points de Φ qui correspondent aux points de coïncidence.

Soit O le point de Φ correspondant au point de coïncidence $(11')$, ayant adopté pour les points et pour les courbes unis de la transformation T l'algorithme introduit au n. 73.

Lorsque la courbe C variable dans le système Σ, vient coïncider avec la courbe $12'$ issue par $(11')$, les courbes C', C'' transformées de C par rapport à T et à T^2, viennent aussi coïncider avec $12'$, de sorte que la courbe $12'$ comptée trois fois, donnera une courbe totale du système linéaire $|D|$.

Il s'ensuit qu'en comptant trois fois la courbe de Φ correspondante à la courbe $12'$, on obtient une section hyperplane de Φ; pourtant à $12'$ correspondra sur Φ une conique, et il y aura un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec la surface Φ en tout point de cette conique.

On a ainsi sur Φ quatre coniques passant par le point O, et correspondant aux quatre courbes unies, issues par $(11')$.

Nous désignerons ces coniques avec les mêmes symboles qui appartiennent aux courbes unies correspondantes.

Un hyperplan arbitraire passant par O coupe la conique $12'$, hors de O, en *un* point: donc la courbe D correspondante à la section hyperplane envisagée, doit couper la courbe $12'$ en *trois* points différents de $(11')$; c'est-à-dire que le point $(11')$ doit absorber 3 parmi les 2.3 intersections des courbes D et $12'$.

La même conclusion peut être rapportée aux courbes $13'$, $1'2$, $1'3$.

Il s'ensuit que la courbe D a en $(11')$ un point multiple d'ordre

$$s = 2 \qquad \text{ou} \qquad s = 3;$$

dans le premier cas les deux branches de la courbe D touchent les couples de courbes conjuguées $12'$, $13'$, et $1'2$, $1'3$, tandis que dans le second cas on n'a pas des contacts de ces courbes avec D.

On voit tout de suite que le cas $s = 3$ est réellement possible. En effet les courbes C', C'' transformées d'une courbe C passant par (11), mais ne touchant aucune des courbes unies, passent aussi par $(11')$ de sorte que la courbe particulière

$$D = C + C' + C''$$

vient passer par $(11')$ avec trois branches non tangentes entre elles. Les points de ces branches infiniment prochains à $(11')$ donnent un groupe de I_3, c'est-à-dire un cycle de l'homographie périodique d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$ (n. 74).

Remarquons encore que la courbe Γ de genre deux répondant à la courbe $C + C' + C''$, n'a qu'un point double distinct du point O; en effet la courbe C renferme deux couples de points conjugués par rapport à I_3, dont l'un est formé par deux points coïncidents avec $(11')$, et l'autre par les intersections ultérieures de la courbe C avec C', C''.

Comme une courbe gauche Γ d'ordre 6 et de genre 2, ayant un point double, ne peut pas posséder un autre point multiple d'ordre > 2, on en

conclut que Γ a en O un point double, et par suite que O ne peut pas être un point multiple d'ordre > 2 pour la surface. Cette conclusion conduit tout naturellement aux propriétés suivantes:

1) Une courbe *arbitraire* D passant par $(11')$, c'est–à–dire une courbe répondant à une section hyperplane Γ, issue arbitrairement par O, a en $(11')$ un point multiple d'ordre 2 dont les deux branches touchent respectivement les couples de courbes tangentes

$$12', \quad 13' \qquad \text{et} \qquad 1'2, \quad 1'3.$$

En effet si pour une D arbitraire l'on avait $s = 3$, deux courbes D auraient communs, hors de $(11')$, seulement

$$18 - 3 \cdot 3 = 9$$

points, et par suite deux sections hyperplanes arbitraires Γ passant par O, se couperaient, hors de O, en $\frac{9}{3} = 3$ points, c'est–à–dire que O serait un point triple de la surface Φ.

2) Au système linéaire des sections de Φ avec les hyperplanes passant par O, répond sur F un système linéaire H de courbes D ayant en $(11')$ un point–base double avec deux points–base simples infiniment voisins, qui sont les points de contact des couples de courbes $12'$, $13'$ et $1'2$, $1'3$.

On ne peut pas avoir d'autre points–base *successifs*, car le point O étant double pour la surface Φ, le point $(11')$ doit absorber seulement 3.2 intersections de deux courbes D, répondant à deux sections hyperplanes issues par O.

3) Un hyperplan arbitraire passant par O coupe Φ suivant une courbe Γ ayant en O un point double *nodale* (intersection de deux branches ou cycles non tangentes) car sur la courbe D correspondante à Γ, on a *deux* groupes distincts de I_3 formés par des points infiniment voisins à $(11')$. On obtient ces groupes en comptant trois fois les points–base simples, c'est–à–dire les points unis de l'homographie d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$.

Cette propriété nous montre que le point O ne peut pas être un point double uniplanaire de la surface Φ (c'est–à–dire un point où le cône tangent se réduit à un plan double), car en cette hypothèse une section hyperplane arbitraire issue par O, aurait en O un point double avec une seule tangente.

Nous démontrerons que *le point O est un point double biplanaire*, c'est–à–dire un point où le cone se réduit à deux plans. Il suffira de prouver qu'il y a un système linéaire ∞^1 d'hyperplans issus par O, donnant des sections qui ont en O un point double avec une seule tangente.

En effet, de la propriété 2) on tire que les courbes D ayant en $(11')$ un point triple, forment un système linéaire ∞^2, car en imposant à une courbe D du système linéaire $\infty^3 H$ la condition de toucher en $(11')$ une

droite différente des deux tangentes fixes, on obtient une courbe ayant en $(11')$ un point triple.

Comme sur une telle courbe il y a un seul groupe de I_3 formé par des points infininement voisins à $(11')$, à cette courbe répondra une courbe Γ passant par O avec une seule branche; et par suite le point double O, étant origine d'un seul cycle, résultera un point de rebroussement de Γ. On a ainsi un système linéaire de ∞^2 hyperplans coupant Φ suivant des courbes douées d'un point de rebroussement en O, et d'une même tangente o en celui–ci. Il s'ensuit que le cône tangent à Φ en O se réduit à deux plans se coupant dans la droite o. En outre il est aisé de voir que le point o est un *point biplanaire ordinaire*, c'est–à–dire que le point de rebroussement d'une des courbes sections hyperplanes par o, est de première espèce [46], ou, en d'autres termes, que la droite o a un contact de second ordre avec la surface Φ.

En effet considérons deux courbes D arbitraires ayant un point triple en $(11')$; comme ces courbes se coupent, hors de $(11')$, en 9 points, deux courbes Γ arbitraires passant par la droite o se coupent, hors de O, en $\frac{9}{3} = 3$ points.

Pour achever l'analyse du point double O, il faut encore remarquer que, en disant E_1 le point de F infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes unies $12'$, $13'$, la correspondance T vient déterminer dans le domaine de E_1 une homographie identique, de sorte que E_1 résulte une *coïncidence parfaite* de la transformation T. En effet une des branches d'une courbe D ayant en $(11')$ un point double, contient trois points unis *successifs* de la transformation T: deux de ces points – c'est–à–dire $(11')$ et E_1 – restent fixes au varier de D; tandis que le troisième décrit le domaine de E_1. On peut répéter les mêmes remarques pour le point E_2 infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes $1'2$, $1'3$.

De tout ce qui précède on tire qu'aux points « de Φ infiniment voisins à O sur les deux plans tangents à la surface, répondent respectivement les points de F appartenant aux domaines de E_1 et de E_2, tandis qu'aux points de Φ infiniment voisins au point simple O_1 successif à O suivant la direction o, répondent des ternes de points appartenant au domaine de $(11')$ ».

Les propriétés de la correspondance [1, 3] entre Φ et F résultent ainsi définies d'une façon complète.

Comme sur F les courbes unies $12'$, $13'$ passent par E_1, tandis qu'elles n'ont pas d'autres points communs successifs à E_1, il s'ensuit que les coniques $12'$, $13'$ issues par O, touchent un même plan tangent suivant deux directions distinctes entre elles et de la direction o.

Analoguement les coniques $1'2$, $1'3$ touchent l'autre plan tangent.

Désignons les neuf points doubles et les neuf coniques de Φ par les mêmes symboles qui représentent les points et les courbes correspondants de la sur-

(46) Voir p. ex. n° 88 de: P. APPELL – E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, t. I, Gauthier Villars, Paris (1895). [Deux. édition (1929); N.d.R.].

face F et appelons conjugués deux éléments de la cfg. considérée sur Φ, lorsqu'ils sont les images de deux éléments conjugués de la cfg. de F (n. 73); on pourra énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 3 et du type II, peut être transformée birationnellement en une surface Φ_6, d'ordre 6, appartenant à l'espace à quatre dimensions. Les sections hyperplanes de cette surface sont des courbes canoniques de genre 4. Il y a neuf points doubles biplanaires ordinaires et neuf coniques, qui forment une configuration jouissant des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre coniques.

Deux points appartiennent à une ou deux coniques.

Dans le premier cas les 2 points s'appellent *conjugués*.

Une conique renferme quatre points.

Deux coniques se coupent suivant un ou deux points.

Dans le premier cas les 2 coniques s'appellent *conjuguées*.

On peut représenter respectivement les neuf points et les neuf coniques avec les symboles $(\alpha\alpha'), \cdots$ *et* $\alpha\alpha', \cdots$ ($o\grave{u}$ $\alpha, \alpha', \cdots = 1, 2, 3; 1', 2', 3'$), *de façon que*:

1) *Les points appartenant à la conique* $\alpha\alpha'$, *soient*

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma).$$

2) *Les coniques passant par* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

3) *Les points conjugués à* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma).$$

4) *Les coniques conjuguées à* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

Les coniques $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ *passant par* $(\alpha\alpha')$, *touchent un même plan tangent à* Φ *en* $(\alpha\alpha')$, *tandis que les coniques* $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$ *touchent l'autre plan tangent en* $(\alpha\alpha')$.

Toute conique $\alpha\alpha'$ *de la cfg. appartient à un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec* Φ *suivant la conique* $\alpha\alpha'$.

Remarquons enfin que *les 4 points doubles de* Φ *appartenant à une même conique, ont sur celle-ci un rapport anharmonique qui ne dépend pas de la conique considérée et qui est l'invariant de la courbe de genre 2 associée à* Φ (courbe représentée sur la conique triple ayant 4 points de diramation dans les points indiqués).

77. *Les genres de la surface* Φ_6. En nous rapportant à la surface Φ_6 qui fournit le modèle des surfaces hyperelliptiques du type II, il est aisé de reconnaître à postériori que *ces surfaces ont les genres*

$$p_a = p_g = 1.$$

Remarquons d'abord que la surface Φ_6 est l'intersection d'une variété quadrique et d'une variété cubique de S_4; c'est là une conséquence de ce que toute section hyperplane de genre 4 de Φ_6 est l'intersection de deux surfaces d'ordre 2, 3 (47). Or la surface intersection de deux variétés d'ordre 2, 3 en S_4 a en général les genres $p_a = p_g = 1$ (48); mais comme notre surface Φ_6 n'a pas des points singuliers abaissant le genre numérique, on en conclut que le genre numérique de Φ_6 sera aussi

$$p_a = 1.$$

Il s'ensuit que

$$p_g = 1;$$

ce qui d'ailleurs se reconnaît aussi directement en montrant que le système linéaire $|\Gamma|$ est adjoint à lui même.

78. *La surface hyperelliptique Φ_6 caractérisée par la configuration de ses points et hyperplans singuliers.* Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique du type II peut être ramenée par une transformation birationnelle à une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres 1 en S_4, qui possède 9 points biplanaires et 9 hyperplans ayant un contact d'ordre 2 suivant des coniques; ces points et hyperplans singuliers forment une configuration que nous avons définie au n. 76.

Donnons-nous maintenant une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, en S_4, et supposons que cette surface possède une configuration de 9 points et de 9 hyperplans singuliers satisfaisant aux conditions établies; il s'agit de reconnaître si Φ_6 est une surface hyperelliptique de rang 3.

A cet effet nous procéderons par la même méthode que nous avons employé au n. 49.

Nous tâcherons de construire une surface hyperelliptique de rang 1, F, qui soit représentée sur la surface Φ_6 comptée trois fois; on obtiendra une telle surface F en opérant sur les points de Φ_6 par l'extraction d'une racine cubique portant sur une fonction rationnelle de ces points.

Soient $f_1(x_1, \cdots, x_5) = 0$, $f_2(x_1, \cdots, x_5) = 0$, les équations homogènes (d'ordre 2, 3) qui represent la surface Φ_6 dans l'espace $S_4(x)$.

Considérons une forme cubique $\varphi(x_1, \cdots, x_5)$ et construisons en S_5 la surface F qui est représentée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \cdots, y_5 = x_5, \qquad y_6 = \sqrt[3]{\varphi}. \\ f_1 = 0, \qquad f_2 = 0. \end{cases}$$

(47) Cfr. F. ENRIQUES, *Ricerche di geometrie sulle superficie algebriche*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *44* (1893); § V, 5.

(48) Ibidem, § III, 6.

Nous voulons démontrer que, par un choix convenable de φ, la surface F qui se trouve représentée sur la Φ_6 comptée 3 fois, aura les genres

$$p_a = -1, \qquad p_g = P_4 = 1,$$

et sera donc une surface hyperelliptique de rang 1 (et même en ce cas une surface de Jacobi).

Faisons d'abord les remarques générales suivantes.

Si l'on prend φ d'une façon arbitraire, on obtient une surface F qui est représentée sur Φ_6 comptée 3 fois et l'on a sur cette dernière surface une courbe de diramation découpée par

$$\varphi = 0.$$

Cependant:

1) Si de cette courbe fait partie une composante comptée 3 fois, celle-ci n'est pas lieu de points de diramation, mais seulement de points critiques apparents de la surface triple. Pourtant il faudra retrancher de la section de $\varphi = 0$ toute composante qui soit comptée $3s$ fois; et on pourra compter comme simple toute composante qui figure $3s + 1$ ou $3s + 2$ fois dans la même courbe.

2) Si $\varphi = 0$ passe par un point double (biplanaire) O de Φ_6, on aura que le domaine de Φ_6, sur chaque nappe de la surface, pourra constituer ou non une courbe de diramation infiniment petite; c'est le premier cas qui a lieu si toute branche linéaire de courbe appartenant à cette nappe a $t = 3s + 1$ ou $3s + 2$ intersections avec $\varphi = 0$; au contraire on tombe dans le deuxième cas si $t = 3s$.

3) La surface F ne saurait être réductible s'il y a sur Φ_6 des points de diramation.

Ceci posé on peut choisir trois hyperplans tangents à Φ_6 suivant des coniques, de façon que ces coniques se coupent deux à deux en trois couples de points doubles appartenant à un même triangle, et qu'elles renferment dans leur ensemble tous les 9 points doubles de Φ_6. Il suffit de considérer trois hyperplans qui dans notre symbolisme sont représentés par

$$\alpha\alpha', \quad \alpha\beta', \quad \alpha\gamma'.$$

On peut supposer que les équations de ces hyperplans soient respectivement

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

Posons

$$\varphi = x_1 x_2 x_3,$$

et considérons la surface F qui est représentée par

$$y_1 = x_1, \cdots, y_5 = x_5, \qquad y_6 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}, \qquad (f_1 = f_2 = 0).$$

On voit d'abord que, n'existant pas des courbes de diramation propres sur Φ_6, aux sections hyperplanes de Φ_6 correspondent sur F des courbes se coupant en des groupes canoniques, et par conséquent les genres géométriques de F sont égaux à 1:

$$p_g = P_2 = \cdots = 1 , \qquad p^{(1)} = 1.$$

En outre les courbes de diramation infiniment petites de Φ_6 donnent lieu sur F, ou sur une transformée de celle–ci, à des courbes exceptionnelles qui se partagent en 9 couples de courbes se coupant en un point; pourtant chaque couple se ramène à un point simple sur une surface de la classe convenablement choisie.

Il s'agit de prouver que le genre numérique de F est

$$p_a = -1.$$

A cet effet il faut montrer que les domaines des points doubles (biplanaires) de Φ_6 comptent tous comme des courbes de diramation infiniment petites de la surface triple.

Il y a deux sortes de points doubles de Φ_6; des points tels que $(\alpha\beta')$; $(\alpha\alpha')$, $(\alpha\gamma')$ appartenant à deux parmi les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, et des points appartenant à un seul parmi ces hyperplans.

Considérons d'abord le point $(\alpha\beta')$.

Les hyperplans associés $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$ qui renferment ce point, ont commun le plan tangent à une nappe de la surface. Or une section hyperplane de celle–ci aura en $(\alpha\beta')$ un point double; et la tangente à une de deux branches étant une droite double pour $\varphi = 0$, cette branche aura 4 intersections avec $\varphi = 0$, tandis que l'autre branche en aura 2. Il s'ensuit que le domaine du point double sur chacune des deux nappes de la surface, compte comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il en est de même pour un point, tel que $(\alpha'\beta)$, appartenant à un seul hyperplan parmi ceux qui composent φ. En effet en ce cas le plan tangent à une des deux nappes appartient simplement à φ; ainsi donc en considérant une section hyperplane par le point double, on trouve qu'une branche a 2 intersections, et l'autre *une* intersection avec φ.

Ceci posé on peut évaluer l'invariant de Zeuthen–Segre I de F.

Considérons un faisceau de sections hyperplanes C de Φ_6; à celles–ci correspondent sur F des courbes K de genre $\pi = 10$, ayant $n = 18$ points–base.

En désignant par δ le nombre des courbes K douées d'un point double, on aura

$$I = \delta - n - 4\pi = \delta - 58;$$

et d'ailleurs, puisque le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 1$,

$$I = 12\, p_a - p^{(1)} + 9 = 12\, p_a + 8;$$

pourtant

$$\delta = 66 + 12\, p_a .$$

Il s'agit d'évaluer δ.

On aura

$$\delta = 3\delta' + 9h,$$

en désignant par δ' le nombre des courbes C qui ont un point double hors des points–biplanaires de la surface, et en supposant qu'en un point simple de F (ou d'une transformée) correspondant à un point biplanaire de Φ_6, il y ait un point multiple pour une courbe K, équivalent à h points doubles.

Mais en calculant l'invariant de Zeuthen–Segre de Φ_6 on trouve

$$I' = \Delta - 6 - 4 \cdot 4 = 20,$$

où

$$\Delta = 42$$

désigne le nombres des C qui sont douées d'un point double. En ce nombre Δ figurent les 9 points biplanaires de la surface, chacun à compter 3 fois d'après l'abaissement qu'il produit sur la classe de la surface; ainsi donc

$$\Delta = 42 = \delta' + 3 \cdot 9,$$
$$\delta' = 15.$$

Il s'ensuit

$$3 \cdot 15 + 9h = 66 + 12 p_a, \qquad 9h = 12 p_a + 21,$$

d'où $(-1 \leq p_a \leq 1)$

$$h = 1, \qquad p_a = -1;$$

par conséquent le genre numérique de F est

$$p_a = -1. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

En conclusion on pourra énoncer le théorème suivant:

La surface hyperelliptique Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, est caractérisée, parmi les surfaces du même ordre et du meme genre de S_4, par la configuration de ses 9 points doubles et de ses 9 hyperplans singuliers.

Etant données les équations algébriques de la surface, la méthode précédente nous apprend aussi à *représenter les coordonnées de ses points par des fonctions hyperelliptiques* de deux paramètres u, v; ces paramètres s'introduisent en construisant les deux intégrales simples de première espèce attachée à la surface F définie ci–dessus.

Dans la suite nous aurons lieu d'étudier en détail cette représentation paramétrique.

Remarque. Il y a lieu de remarquer que l'énoncé du théorème précedent renferme des conditions surabondantes.

En effet la condition de posséder 9 points biplanaires entraîne 18 équations auxquelles on doit satisfaire par les 19 modules appartenant à une

surface d'ordre 6 et de genre 1 (intersection d'une variété cubique et d'une quadrique) en S_4. Cette remarque nous fait comprendre que: *la surface hyperelliptique Φ_6, dépendant d'un module, résulte déjà caractérisée par la condition de posséder 9 points doubles biplanaires.*

79. *La configuration caractéristique de Φ_6 rattachée à une configuration connue: équations algébriques de Φ_6.* Pour étudier de plus près la configuration caractéristique de Φ_6, il convient de la rattacher à une configuration connue, considérée par MM. Segre [49] et Castelnuovo [50], c'est-à-dire à la configuration qui est formée par les 9 *points doubles d'un faisceau de variétés cubiques et par les 9 plans appartenant à ces variétés.*

D'après MM. Segre et Castelnuovo, il y a en S_4 ∞^{24} groupes de 9 points G_9, qui sont doubles pour une variété cubique; il y a toujours un faisceau de variétés analogues possédant les mêmes points doubles de G_9 et renfermant 9 plans; G_9 ne renferme pas des modules.

Nous allons montrer que: *Toute variété cubique passant doublement par les 9 points d'un G_9, renferme deux surfaces hyperelliptiques Φ_6 ayant comme points biplanaires les points du même G_9.*

Toute Φ_6 ainsi définie dépend d'un module qui est simplement lié au paramètre dont dépendent les variétés du faisceau considéré; pourtant toute surface hyperelliptique Φ_6 du type II peut être obtenue par la construction indiquée, c'est-à-dire que:

Les 9 points biplanaires d'une surface hyperelliptique Φ_6, sont les points doubles de ∞^1 variétés cubiques formant un faisceau.

Considérons les 9 points d'un G_9. D'après M. Catselnuovo (l. c. 15, p. 24) on pourra les représenter très simplement en ajoutant aux coordonnées $x_1, \cdots, x_5$ des points de S_4, la coordonnée auxiliaire x_6, où

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

On a un faisceau de variétés cubiques

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0, \tag{1}$$

qui ont les 9 points doubles

$$\begin{array}{lll} (1\,0\,0 - 1\,0\,0) & (1\,0\,0\,0 - 1\,0) & (1\,0\,0\,0\,0 - 1) \\ (0\,1\,0 - 1\,0\,0) & (0\,1\,0\,0 - 1\,0) & (0\,1\,0\,0\,0 - 1) \\ (0\,0\,1 - 1\,0\,0) & (0\,0\,1\,0 - 1\,0) & (0\,0\,1\,0\,0 - 1) \end{array}$$

que nous désignerons respectivement par 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9).

(49) C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni...*, Memorie Accad. Torino, (2) *39* (1888).

(50) G. CASTELNUOVO, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni* (II. Memoria), Atti Istituto Veneto, (6) *6* (1888).

Les 9 points, formant un groupe G_9, se trouvent quatre à quatre sur 9 plans tels que

$$x_1 = x_4 = 0\,, \qquad x_1 = x_5 = 0\,, \cdots$$

et ces plans appartiennent aux mêmes variétés cubiques de notre faisceau.

Entre les 9 points doubles et les 9 plans–base des (1), il y a les mêmes relations qui passent entre les points doubles d'une surface Φ_6 et les plans de ses coniques.

Or parmi les variétés du faisceau (1) il y en a *une* douée de 10 *points* doubles, le dixième point tombant en $P = (1\ 1\ 1 - 1 - 1 - 1)$.

Considérons ce point P, covariant du groupe G_9, et formons la quadrique polaire de P par rapport à la variété

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda' x_4 x_5 x_6 = 0$$

on trouvera

$$(2) \qquad x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 + \lambda' (x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0.$$

Cette quadrique coupe le plan

$$x_1 = x_4 = 0$$

suivant la conique

$$x_2 x_3 + \lambda' x_5 x_6 = 0$$

qui renferme les quatre points 5) 6) 8) 9).

Il est aisé d'evaluer le rapport anharmonique que ces quatre points forment sur la conique; il suffit de les projeter par le point 8) suivant les droites

$$x_3 = 0\,, \qquad x_5 = 0\,, \qquad x_3 + x_5 = 0\,, \qquad x_3 - \lambda' x_5 = 0.$$

En prenant les points dans l'ordre 5) 6) 9) 8), on obtient le rapport anharmonique $-\lambda'$.

Cette valeur ne dépend pas des indices de x; par conséquent la quadrique (2) coupe les 9 plans–base du faisceau (1) suivant de coniques qui renferment quatre points $1)\cdots 9)$, ayant sur la conique respective le même rapport anharmonique.

On obtient ainsi une configuration de 9 points et de 9 coniques satisfaisant aux mêmes conditions que la configuration caracteristique d'une surface hyperelliptique Φ_6.

Nous allons reconnaître qu'il y a toujours dans le faisceau (1) une variété coupant la quadrique (2) suivant une surface Φ_6 qui renferme les 9 coniques et qui a 9 points biplanaires en $1)\cdots 9)$.

A cet effet, étant donnée la quadrique (2), tâchons de déterminer une variété (1) de façon qu'un des points $1)\cdots 9)$, par exemple le point 1), soit un point biplanaire pour le surface intersection de (1), (2).

Remarquons que le cône tangent à (1) en (1 , 0 , 0 — 1 , 0 , 0) est

$$x_2 x_3 - \lambda x_5 x_6 = 0; \tag{3}$$

d'autre côté l'hyperplan tangent à (2) est

$$x_2 + x_3 - \lambda' (x_5 + x_6) = 0. \tag{4}$$

Il faut exprimer que l'hyperplan (4) est tangent à la quadrique (3). En éliminant x_2 entre (3), (4), on obtient la quadrique

$$x_3^2 - \lambda' x_3 x_5 - \lambda' x_3 x_6 + \lambda x_5 x_6 = 0;$$

et en annullant le discriminant de cette quadrique, on trouve la condition de contact de (1), (2) sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda' & -\lambda' \\ -\lambda' & 0 & \lambda \\ -\lambda' & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut être divisée par λ ($\lambda = 0$ correspond à une variété (1) réductible à trois hyperplans), et l'on obtient

$$\lambda = \lambda'^2.$$

Cette condition ne depend pas du point 1) que nous avons choisi parmi les 9 points de notre G_9. Par conséquent elle exprime que les variétés (1), (2), correspondantes aux paramètres λ'^2, λ' se coupent suivant une surface Φ_6 qui a 9 points biplanaires en les points de G_9.

Ainsi donc Φ_6 sera notre surface hyperelliptique du type II, et on obtiendra même la surface la plus générale de cette famille dépendant d'un module arbitraire. Par suite *la surface hyperelliptique* Φ_6 *pourra être représentée très simplement par les équations suivantes*

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0 \\ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \pm \sqrt{\lambda}\,(x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

80. *Homographies qui ramènent en elle–même la surface* Φ_6. La surface Φ_6 admet un groupe remarquable de transformations homographiques en elle–même. Nous nous proposons d'étudier ce groupe et en particulier d'établir quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite, pour l'analyse du type IV.

Rappelons–nous que sur la surface de Jacobi F, les transformations de 1re ed de 2de espèce qui ramènent en lui–même le groupe des coïncidences d'une transformation quelconque T, ramènent aussi en elle–même cette transformation (n. 62).

En particulier, dans notre cas, les transformations de 1re et de 2de espèce qui changent en lui–même le groupe des 9 points unis de la transformation cyclique de 3me ordre T, changent aussi en elle–même l'involution I_3 engendrée par T, et par suite elles donnent naissance à des transformations birationnelles entre les points de la surface Φ_6 image de I_3.

On aura ainsi sur F exactement neuf transformations de 1re espèce et neuf transformations de 2de espèce, parmi ces dernières étant comprise la transformation identique.

Comme les 18 transformations indiquées laissent invariant le système Σ des courbes C, elles laisseront invariant aussi le système linéaire $|D|$ renfermant les courbes $C+C'+C''$; par conséquent le transformations homologues qu'on obtient entre les points de Φ laissent invariant le système $|\Gamma|$, c'est–à–dire qu'elles sont des homographies de l'espace S_4.

En ayant égard aux propriétés des 18 transformations de 1re et de 2de espèce qui changent en elle–même l'involution I_3, on arrive tout de suite au théorème suivant:

La surface Φ est transformée en elle–même par les homographies d'un groupe G_{18} d'ordre 18, renfermant 9 involutions, et 8 transformations cycliques d'ordre 3 qui, avec l'idendité, forment un sous–groupe G_9.

Le produit de deux homographies involutoires est une homographie de G_9, tandis que le produit d'une involution par une homographie de G_9, est encore une involution.

Le groupe des neuf points doubles et le groupe de neuf coniques appartenant à Φ sont ramenés évidemment en eux–mêmes par toute homographie du groupe G_{18}.

Nous voulons préciser quelles sont les permutations produites par ces homographies entre les points doubles et les coniques. Nous considérerons en particulier les permutations produites par une homographie involutoire du groupe G_{18}, car cela nous sera utile pour l'examen du type IV.

Il suffit de voir comment sont permutés les points et les courbes de coïncidences de la transformation T existant sur F, par une des 9 transformations de 1re espèce qui changent T en elle–même.

Soit K la transformation de 1re espèce envisagée. Elle est définie par la condition qu'un des 16 points unis de K coïncide avec un des 9 points unis de T.

Désignons ce point uni commun, par le symbole $(\alpha\alpha')$; et observons que les courbes $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ étant tangentes en $(\alpha\alpha')$, sont correspondantes par rapport à K. De même K transforme la courbe $\alpha'\beta$ en $\alpha'\gamma$.

Il s'ensuit qu'au point $(\beta\beta')$ commun aux courbes $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ hors de $(\alpha\alpha')$, correspond le point $(\gamma\gamma')$ commun aux courbes $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma$, hors de $(\alpha\alpha')$; au point $(\alpha\beta')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de la courbe $\alpha\gamma'$, correspond le point $(\alpha\gamma')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de $\alpha\beta'$, au point $(\beta\gamma')$ commun aux courbes $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$, correspond le point $(\gamma\beta')$ commun aux courbes $\alpha\beta'$, $\alpha'\gamma$ etc. On trouve ainsi que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'),\quad (\beta\beta'),\quad (\alpha\beta'),\quad (\alpha'\beta),\quad (\beta\gamma')$$

en les points

$$(\alpha\alpha'),\quad (\gamma\gamma'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha'\gamma),\quad (\beta'\gamma);$$

et les courbes

$$\alpha\alpha',\quad \beta\beta',\quad \alpha\beta',\quad \alpha'\beta,\quad \beta\gamma'$$

en les courbes

$$\alpha\alpha',\quad \gamma\gamma',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha'\gamma,\quad \beta'\gamma.$$

Donc:

Chacun des points doubles de Φ est uni par rapport à une involution de G_{18}. Cette involution fait correspondre deux à deux les autrez points doubles. Elle laisse invariant la conique de Φ qui est conjuguée au point uni et fait correspondre deux à deux les 8 coniques restant.

Dans la suite il nous faudra aussi connaître le nombre des points de coïncidence d'une des involutions qui transforment en elle–même la surface Φ. Cela revient à chercher le nombre des groupes de l'involution I_3 de F, qui sont invariant par rapport à la transformation de 1re espèce K.

Nous avons déjà établi qu'entre les neuf groupes de I_3 formés par des points coincidant, il y en a *un* qui reste invariant par rapport à K: c'est le groupe formé par le point uni $(\alpha\alpha')$ compté trois fois.

Cherchons maintenant s'il peut exister des groupes invariants formés par trois points distincts.

Comme K est une transformation cyclique de 2de ordre, entre les trois points d'un groupe invariant, on trouvera nécessairement une coïncidence de K, et parsuite les deux points restant seront aussi unis par rapport à K, car la transformation T, étant permutable avec K, doit ramener en lui–même le groupe des 16 points unis de K.

Les 15 points unis distincts du point $(\alpha\alpha')$ – qui ne sont pas unis par rapport à T, se distribuent ainsi en cinq groupes invariants de I_3.

On en conclut que sur la surface Φ l'homographie ω, *image* de la transformation K, laisse invariants six points de Φ: le point double $(\alpha\alpha')$ et cinq points *simples* de la surface.

Mais un examen plus approfondi nous montre qu'au point de vue des transformations birationnelles, le point double $(\alpha\alpha')$ est équivalent à trois coïncidences, c'est–à–dire que sur une surface dépourve de points multiples et de courbes exceptionnelles, qui soit birationnellement identique a Φ, *la transformation correspondante à ω possède huit coïncidences distinctes.*

A cet effet il s'agit de prouver qu'entre les points de Φ infiniment voisins au point $(\alpha\alpha')$, il y en a trois qui sont unis par rapport à ω.

Remarquons d'abord que la droite d commune aux plans tangents à Φ en $(\alpha\alpha')$ doit être unie, et par suite que le point successif à $(\alpha\alpha')$ suivant la direction de cette droite, est aussi uni.

Comme l'homographie ω change la conique $\alpha\beta'$ en la conique $\alpha\gamma'$ qui touche le même plan tangent π, elle changera en lui–même ce plan tangent,

et entre les droites tangentes issues par le point $(\alpha\alpha')$ sur le plan π, elle engendrera une involution non identique, un couple de cette involution étant donné par les droites distinctes r, s tangents aux coniques $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$. Les deux droites unies de cette involution sont: la droite d et la droite d' conjuguée harmonique à d par rapport à r, s.

On trouve analoguement que l'homographie ω a une autre droite unie d'', sur l'autre plan tangent à Φ en $(\alpha\alpha')$.

On a ainsi en correspondance aux droites d, d', d'', trois points simples, successifs à $(\alpha\alpha')$, qui sont unis par rapport à ω. c.q.f.d.

81. *Représentation analytique de la transformation T.* Nous voulons achever ce Ch. en étudiant de plus près la représentation paramétrique de la surface Φ.

Commençons par représenter analytiquement la transformation T d'ordre 3, qui donne naissance à cette surface.

Rapportons-nous donc à la surface de Jacobi F, que T transforme en elle-même, et tâchons d'écrire la substitution linéaire produite par T sur les intégrales normales u, v.

Ainsi que nous l'avons rappelé au n. 66, les périodes normales de u, v sont [51]:

$$(1) \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{matrix} \qquad \left(gg' = -\frac{1}{12}\right).$$

Soit

$$u' = \lambda u + \mu v$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v$$

la substitution linéaire représentant T; il s'agit de calculer les constantes λ, μ, λ', μ'.

Ces constantes s'expriment au moyen des périodes g, h, g' par les relations (1) du n. 45, et les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) auxquelles conduit l'élimination de λ, μ, λ', μ' entre ces relations, doivent actuellement se réduire aux relations singulières (de Humbert)

$$h = \frac{1}{2}, \qquad gg' = -\frac{1}{12}$$

c'est-à-dire à

$$2h - 1 = 0, \qquad 12gg' + 1 = 0.$$

(51) O. Bolza, *On binary sexticts with linear transformations into themselves*, American Journal of Math., *10* (1888), pp. 47-70,.

En exprimant que les équations (A), (B), (C), (D) deviennent des identités pour $h = \frac{1}{2}, gg' = -\frac{1}{12}$, on obtient entre les 16 entiers a_i, b_i, c_i, d_i les relations

$$a_1 = b_0 = a_3 = b_2 = c_3 = d_2 = c_1 = d_0 = 0,$$
$$3(c_0 + d_1) = -(a_2 + b_3) = 2(a_0 - d_3) = 2(b_1 - c_2).$$

Ces relations, comparées aux (1) du n. 59, (caractérisant les transformations de Hermite d'ordre 1), permettent de calculer les valeurs des entiers a_i, b_i, c_i, d_i. On trouve ainsi:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1 & a_1 = 0 & a_2 = -3 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = 1 & b_2 = 0 & b_3 = -3 \\ c_0 = 1 & c_1 = 0 & c_2 = -2 & c_3 = 0 \\ d_0 = 0 & d_1 = 1 & d_2 = 0 & d_3 = -2, \end{array}$$

ou bien:

$$\begin{array}{llll} a_0 = -2 & a_1 = 0 & a_2 = 3 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = -2 & b_2 = 0 & b_3 = 3 \\ c_0 = -1 & c_1 = 0 & c_2 = 1 & c_3 = 0 \\ d_0 = 0 & d_1 = -1 & d_2 = 0 & d_3 = 1. \end{array}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h = -1/2 \\ \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h = -3g \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g' = -3g' \\ \mu' &= b_1 + b_3 h + b_2 g' = -1/2, \end{aligned}$$

ou bien

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \qquad \mu = 3g, \qquad \lambda' = 3g', \qquad \mu' = -\frac{1}{2},$$

et par suite on a les substitutions linéaires périodiques d'ordre 3

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \frac{1}{2}v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u + 3gv \\ v' = 3g'u - \frac{1}{2}v, \end{cases}$$

qui sont l'une inverse de l'autre, ou l'une le carré de l'autre.

On remarquera que le déterminant $\frac{1}{4} - 9gg'$ de ces substitutions, est égal à l'unité. On pourra désigner par T la première parmi les substitutions que nous avons écrites; alors T^2 désignera la seconde.

Nous avons déjà démontré que la substitution T a neuf points de coïncidence (n. 73); nous pouvons maintenant retrouver ce résultat en calculant aussi les valeurs des intégrales u, v aux points de coïncidence.

Soit (u, v) un point uni de T: on aura

$$u \equiv -\frac{1}{2}u - 3gv$$

$$v \equiv -3g'u - \frac{1}{2}v,$$

les congruences ayant lieu par rapport aux périodes. On en tire

$$\frac{1}{2}u + gv = \frac{\vartheta_1}{3}$$

$$g'u + \frac{1}{2}v = \frac{\vartheta_2}{3}$$

ϑ_1, ϑ_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v. De là on déduit

$$u = \frac{1}{2}\vartheta_1 - g\vartheta_2$$

$$v = \frac{1}{2}\vartheta_2 - g'\vartheta_1,$$

qui donnent seulement neuf couples incongrus par rapport aux périodes, c'est-à-dire les couples

$$(0\ 0), \quad \left(0\ \frac{1}{3}\right), \quad \left(0\ \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}\ 0\right), \quad \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right),$$
$$\left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}\ 0\right), \quad \left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\right).$$

On obtient le premier couple pour $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, le second pour $\vartheta_1 = g$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}$, le troisième pour $\vartheta_1 = 2g$, $\vartheta_2 = 1$, etc.

82. *Equations des courbes C de Σ qui sont invariant par rapport à T.* Considérons la fonction thêta normale à caractéristique nulle, d'ordre 1, définies par les conditions fonctionnelles

$$(2) \qquad \begin{cases} \vartheta(u+1, v) = \vartheta(u, v+1) = \vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+g, v+h) = e^{-\pi i(2u+g)}\vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+h, v+g') = e^{-\pi i(2v+g')}\vartheta(u, v) \end{cases}$$

où les périodes appartiennent au tableau de Bolza (n. 81). Comme il est bien connu, ces conditions déterminent *une seule fonction*, à un facteur constant près (n. 28).

La substitution hermitienne T change toute courbe C en une courbe C, c'est-à-dire toute fonction thêta de premier ordre en une fonction analogue: il s'agit de trouver, en particulier, la fonctions thêta correspondante à la D normale envisagée.

On voit tout de suite que la fonction

$$\varphi(u, v) = \vartheta\left(-\frac{1}{2} - 3gv, -3g'u - \frac{1}{2}v\right) e^{3\pi i(3gv^2+uv+3g'u^2)}$$

satisfait elle-même aux conditions fonctionnelles (2). On aura par conséquent

$$\varphi(u, v) = c\,\vartheta(u, v)$$

où c est un facteur constant à calculer.

Il est aisé de prouver que $c = 1$. En effet étant $\vartheta(0, 0) \neq 0$ (52), il vient

$$\varphi(0, 0) = \vartheta(0, 0) = c\vartheta(0, 0)$$

d'où l'on tire $\vartheta = 1$.

On a donc la relation

$$\vartheta(u', v')\, e^{3\pi i(3gv^2+uv+3g'u^2)} = \vartheta(u, v),$$

où l'on a posé

$$u' = -\frac{1}{2}u - 3gv$$

$$v' = -3g'u - \frac{1}{2}v.$$

En changeant u en $u - \alpha$, v en $v - \alpha'$, on obtient

$$\vartheta(u' - \beta, v' - \beta')\, e^{3\pi i[3g(v-\beta)^2+(u-\alpha)(u-\beta)+3g'(u-\alpha)^2]} = \vartheta(u - \alpha, v - \alpha') \text{ (53)}$$

(β, β') étant le point de F qui correspond à $(\alpha\alpha')$ par rapport à T.

Cette relation montre que *la transformation T change la courbe*

$$\vartheta(u - \alpha, v - \alpha') = 0$$

qui est une courbe quelconque C de Σ, dans la courbe

$$\vartheta(u - \beta, v - \beta') = 0$$

$(\beta\beta')$ étant le point homologue de $(\alpha\alpha')$.

(52) Voir p.e. G. HUMBERT, *Mem. cité* (14), p. 40.

(53) Voir C. HERMITE, Comptes rendus, *40* (1855), p. 366.

Il s'ensuit que, si $(\alpha\alpha')$ est un point uni de T, l'équation

$$\vartheta(u-\alpha, v-\alpha') = 0$$

vient représenter une courbe C invariant par rapport à T.

On peut donc énoncer que:

Etant donnée une surface de Jacobi correspondante au tableau

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{matrix} \qquad \left(gg' = -\frac{1}{12}\right)$$

il y a une transformation hermitienne périodique d'ordre 3

$$(T) \qquad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \frac{1}{2}v \end{cases}$$

qui ramène la surface en elle-même; cette transformation possède neuf coïncidences en les points.

$$u = \frac{\alpha}{3}, \qquad v = \frac{\alpha'}{3} \qquad (\alpha, \alpha' = 0, 1, 2)$$

et laisse invariant neuf courbes C ayant les équations

$$\vartheta\left(u - \frac{\alpha}{3}, v - \frac{\alpha'}{3}\right) = 0,$$

où ϑ est la fonction thêta normale du 1^{r} *ordre à caracteristique nulle.*

En poursuivant l'analyse on arrive aussi à démontrer que *la courbe*

$$\vartheta\left(u - \frac{\alpha}{3}, v - \frac{\alpha'}{3}\right)$$

contient les quatre points unis

$$\frac{\alpha}{3}\,\frac{\beta'}{3}, \quad \frac{\alpha}{3}\,\frac{\gamma'}{3}, \quad \frac{\alpha'}{3}\,\frac{\beta}{3}, \quad \frac{\alpha'}{3}\,\frac{\gamma}{3},$$

où $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont deux permutations des nombres 0, 1, 2.

On retrouve ainsi le symbolisme introduit par une voie différente au n. 73.

83. *Représentation paramétrique de la surface Φ_6.* La correspondance [1, 3] entre la surface Φ_6 de l'espace à quatre dimensions et la surface de Jacobi F, transforme le système linéaire découpé sur Φ par les hyperplans, dans le système linéaire

$$|D| = |C + C' + C''|$$

C', C'' étant les courbes de Σ correspondantes à une C donnée par rapport à T, T^2 (n. 75). Si

$$\vartheta(u-\alpha, v-\alpha') = 0$$

est l'équation de C, l'équation de $C + C' + C''$ résulte (n. préc.):

$$\vartheta(u-\alpha, v-\alpha')\,\vartheta(u-\beta, v-\beta')\,\vartheta(u-\gamma, v-\gamma') = 0$$

où l'on a posé:

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\alpha - 3g\alpha' \\ \beta' = -3g'\alpha - \frac{1}{2}\alpha' \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}\alpha + 3g\alpha' \\ \gamma' = 3g'\alpha - \frac{1}{2}\alpha'. \end{cases}$$

Soient C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 cinq positions de la courbe C telles que les cinq courbes D:

$$C_i + C_i' + C_i'' \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

représentées par les équations

$$\Theta_i(u, v) = \vartheta(u-\alpha_i, v-\alpha_i')\,\vartheta(u-\beta_i, v-\beta_i')\,\vartheta(u-\gamma_i, v-\gamma_i') = 0$$
$$(i = 0, 1, \cdots, 4)$$

résultent linéairement indépendantes. Comme toute courbe du système $|D|$ est linéairement dépendante des cinq courbes fixées, l'équation d'une courbe D quelconque aura la forme

$$\lambda_0\Theta_0(u, v) + \lambda_1\Theta_1(u, v) + \cdots + \lambda_4\Theta_4(u, v) = 0.$$

Dans l'espace S_4 de Φ_6 prenons comme hyperplans d'equations

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 0, \cdots, x_4 = 0$$

les cinq hyperplans qui renferment les courbes Γ répondant aux courbes $C_i + C_i' + C_i''$.

On obtient alors les formules

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, \cdots, 4)$$

qui donnent la représentation de la surface Φ_6 au moyen des paramètres u, v.

IX. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 4 (type III).

84. *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre quatre.* – Soit τ une transformation singulière, cyclique d'ordre 4, appartenant à la courbe de genre deux f. La surface de Jacobi F attachée à f, possède une transformation hermitienne T (correspondante à τ) appartenant à une série continue ∞^2 de transformations semblables.

Des propriétés de τ on déduit de suite les propriétés de T. Cherchons en particulier le nombre des points de coïncidence de la transformation T. On doit chercher combien y a–t–il de couples de points de f, qui soient changés en eux–mêmes par τ. Remarquons que τ laisse invariant deux points M, N de f, qui sont aussi unis par rapport à la g_2^1 de f, et que les quatre points unis restant de la g_2^1, se distribuent en deux couples de points homologues $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ par rapport à la τ; on obtient ainsi les couples unis

$$2M, \quad 2N, \quad M+N, \quad A_1+A_2, \quad B_1+B_2.$$

Partant sur la surface F il y a quatre points de coïncidence de la transformation T, car la F, étant toujours supposée dépourvue de courbes exceptionnelles, les couples $2M, 2N$ sont représentés par un même point de F (n. 5).

Comme la transformation τ^2 coïncide avec la correspondance déterminée par la g_2^1 entre les points de f, la transformation T^2 de F sera une transformation K de la 1re espèce.

Cette transformation K possède 16 points unis, dont quatre tombent en les points unis de T; les 12 qui restent correspondent aux couples de points de f:

$$\begin{array}{llll} A_1+M, & A_2+M; & A_1+N, & A_2+N; \quad B_1+M, \quad B_2+M \\ B_1+N, & B_2+N; & A_1+B_1, & A_2+B_2; \quad A_1+B_2, \quad A_2+B_1. \end{array}$$

On a ainsi 6 couples de points de F qui forment de cycles d'ordre 2 par rapport à T.

Envisageons maintenant le système Σ qui contient totalement les courbes C de F correspondantes aux séries des couples de f qui renferment un point fixé; tâchons de déterminer les courbes de Σ qui sont invariantes par rapport à T et les liens entre ces courbes et les points unis de la même transformation. Il nous sera ici très utile le symbolisme introduit par M. Humbert (n. 46). Désignons donc par $(\alpha\alpha')$ et respectivément par $\alpha\alpha'$ – où $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $\alpha' = 1', 2', 3', 4'$ – les points et les courbes invariants par rapport à la transformation de la 1re espèce K. Soit $(11')$ un des 4 points unis qui sont aussi invariants par rapport à T, et H le système de courbes C issues par $(11')$.

La transformation T établit entre les éléments (courbes) de la variété H, une correspondance singulière cyclique d'ordre 4, parfaitement analogue à la transformation τ donnée sur la courbe f.

Rappelons–nous que les couples de courbes C issues par $(11')$ et conjuguées par rapport à K, forment la g_2^1 appartenant à la variété de genre deux H qui a pour éléments ces ∞^1 C; il s'ensuit que parmi les six courbes

$$12', \quad 13', \quad 14', \quad 1'2, \quad 1'3, \quad 1'4$$

passant par le point envisagé et unies par rapport à K, deux seront aussi unies par rapport à T et les quatre restant se partageront en deux cycles de 2d ordre par rapport à cette dernière transformation.

Soient $12'$, $1'2$ les courbes unies, et

$$13',\quad 1'3\,;\qquad 14',\quad 1'4$$

les deux cycles d'ordre 2. Il s'ensuit que les points $(22')$, $(33')$, $(44')$ où se coupent ces couples de courbes hors du point $(11')$, sont des points unis par rapport à T. On considérera alors la correspondance établie par T entre les courbes C passant par $(22')$, et on trouvera deux nouveaux cycles de 2^d ordre de la transformation T. Ce raisonnement pouvant être répété pour les autres points unis, on arrivera à la conclusion qui est exprimée par le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 2^d ordre
$(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$	$(12')$, $(1'2)$; $(13')$, $(2'4)$; $(14')$, $(2'3)$; $(23')$, $(1'4)$; $(24')$, $(1'3)$; $(34')$, $(3'4)$.

Courbes C

unies	cycles de 2^d ordre
$12'$; $1'2$, $34'$, $3'4$	$13'$, $1'3$; $14'$, $1'4$; $23'$, $2'3$; $24'$, $2'4$; $11'$, $22'$; $33'$, $44'$.

On voit de suite que les cycles de 2^d ordre formés par les points ou par les courbes de notre tableau ne jouent pas un rôle symétrique.

On a en effet quatre cycles de points, c'est-à-dire les cycles

(1) $\quad (13')$, $(2'4)$; $\quad (14')$, $(2'3)$; $\quad (23')$, $(1'4)$; $\quad (24')$, $(1'3)$

qui appartiennent à des courbes unies, tandis que les cycles restant

(2) $\qquad\qquad (12')$, $(1'2)$; $\quad (34')$, $(3'4)$,

n'appartiennent à aucune courbe unie. Analoguement on a quatre cycles de courbes

(3) $\qquad 13',\quad 1'3\,;\qquad 14',\quad 1'4\,;\qquad 23',\quad 2'3\,;\qquad 24',\quad 2'4,$

qui passent par des points unis, tandis que les cycles

(4) $\qquad\qquad 11',\quad 22'\,;\qquad 33',\quad 44'$

ne jouissent pas de cette propriété.

Les cycles (1), (3) seront nommés *cycles de rang* 1, et les cycles (2), (4) *cycles de rang* 2.

85. *L'involution I_4 engendrée par la transformation T et la surface Φ_8, d'ordre 8, qui en donne l'image projective.* – Considérons l'involution engendrée sur la surface de Jacobi F par la transformation T; c'est-à-dire l'invo-

lution dont un groupe quelconque est formé en associant à un point P de F les points P', P'', P''' correspondants à P par rapport à T, T^2, T^3.

En suivant la même marche qu'aux n. 75 on établit tout de suite:

1) Que l'involution I_4 possédant un nombre fini de points de coïncidence (c'est-à-dire quatre points 4-ples et douze points doubles, donnant six groupes de I_4), toute surface Φ qui représente birationnellement les groupes de I_4, est régulière.

2) Que dans la correspondance [1, 4] entre les surfaces Φ, F, au système linéaire $|D|$ appartenant à l'involution I_4 et renfermant totalement la courbe $C + C' + C'' + C'''$ (où C', C'', C''' sont les transformées de C par rapport à T, T^2, T^3) correspond sur Φ un système linéaire simple $\infty^2 |\Gamma|$, dépourvu de points-base, ayant le genre 5 et le degré 8.

La variété ∞^2 des groupes de I_4 pourra donc être représentée par une surface Φ_8 de l'espace S_2 de façon que le système linéaire complet $|\Gamma|$ soit decoupé sur Φ_8 par les hyperplans de S_2.

Comme sur une surface régulière, telle que Φ_8 tout système linéaire complet a la série caractéristique complète, la dimension r du système $|\Gamma|$, c'est-à-dire de l'espace renfermant Φ_8, sera égale à 5 ou à 4 suivant que cette série caractéristique sera la série canonique ou bien une série non-speciale; le premier cas aura lieu si le genre de la surface $p_g = 1$, le second si $p_g = 0$.

On verra dans la suite que $p_g = 1$ et par conséquent $r = 5$.

86. *Relations entre la surface Φ_8 et la surface de Kummer attachée à la même courbe de genre 2. – Genre de la surface Φ_8.* – Pour calculer la valeur du genre de Φ_8, remarquons d'abord que:

On peut établir une correspondance birationnelle entre les points de la surface Φ_8 et les couples d'une certaine involution I_2 appartenant à la surface de Kummer ψ qui est attachée à la courbe de genre deux f.

En effet les points P, P', P'', P''' d'un groupe de I_4 se distribuent en deux couples P, P'' et P', P''' de points homologues par rapport à la transformation de 1re espèce $K \equiv T^2$, de sorte qu'à tout groupe de I_4 répondent deux groupes de l'involution I_2 engendrée par K, et réciproquement à tout groupe de I_2 répond un seul groupe de I_4. Comme les surfaces Φ, ψ dont on parle ci-dessus, sont birationnellement identiques aux variétés I_4, I_2 on aura entre les points de ces surfaces une correspondance faisant répondre à un point de Φ, deux points de ψ, et à un point de ψ un seul point de Φ c.q.f.d.

On dira que la correspondance involutoire qu'on a entre deux points de ψ correspondant à un même point de Φ, est l'image de la correspondance T qu'on a établi sur la surface F.

On démontre de plus que *l'involution d'ordre 2 que nous avons définie sur la surface de Kummer ψ, est engendrée par une homographie involutoire*

qui transforme en elle–même la surface ψ, et laisse invariant quatre points doubles de celle–ci.

Pour établir cette proposition, il faut remarquer d'abord que dans la correspondance [1, 2] entre les points de la surface de Kummer ψ et de la surface de Jacobi F, aux sections planes de ψ répondent les courbes d'un système linéaire $|G|$ renfermant totalement la courbe $C + C''$ ainsi que la $C' + C'''$.

Comme la transformation T change la courbe $C + C''$ en $C' + C'''$, la correspondance involutoire ω, image de T, changera la section plane de ψ répondant à $C + C''$, dans la section répondant à $C' + C'''$, et par suite elle changera en lui–même le système (complet) des sections planes de ψ. On en conclut que ω est une homographie (involutoire).

Les points de ψ qui sont unis par rapport à ω répondent aux groupes de l'involution I_2, engendrée par K, qui demeurent invariant par rapport à T. En se rappelant que $K \equiv T^2$, on voit tout de suite que les seuls groupes de K qui restent invariant par rapport à T, sont formés par les points unis $(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$, dont chacun doit être compté deux fois.

Comme à ces groupes de points coïncidant répondent quatre des 16 points doubles de la surface ψ on arrive ainsi à la conclusion énoncée.

Ceci posé, remarquons que l'homographie ω (par laquelle vient définie I_2 sur ψ) ne saurait être une homologie, car autrement on aurait sur ψ une courbe de points de coïncidences; pourtant ω sera une homographie harmonique à deux axes, et ces axes seront les deux côtés opposés du quadrilatère gauche formé par les quatre points unis nommés ci–dessus.

Or d'après le lemme que nous avons établi au n. 38 on pourra calculer le genre $(p_a = p_g)$ de Φ en déterminant s'il y a, ou s'il n'y a pas, des points de coïncidence de l'involution I_2 sur ψ; on aura

$$p_a = p_g = 1$$

dans la première hypothèse, tandis que la seconde hypothèse amenerait à

$$p_a = p_g = 0.$$

On dirait au premier abord qu'il existe sur ψ quatre coïncidences de I_2 tombant dans les quatre points doubles qui se trouvent sur les deux de ω.

Mais il ne faut pas oublier qu'au point de vue des transformations birationnelles, un point double conique doit être considéré comme une courbe rationnelle (de degré -2), de sorte que les points de cette courbe qu'on aurait sur une transformée convenable de la surface, répondent aux points appartenant au domaine du point double, ou, si l'on veut, aux génératrices du cône tangent.

On aura donc à chercher le nombre des génératrices de quatre cones tangents, qui restent invariant par rapport à ω. Soit M un point double uni et n l'axe de l'homographie ω qui ne renferme pas M: on voit que les deux droites tangentes en M à la surface ψ et appuyées à l'axe n, sont les seules

génératrices du cône tangent, qui restent invariant par rapport à ω. L'involution I_2 engendrée par ω possède donc $4 \cdot 2 = 8$ coïncidences, et par suite *la surface* Φ_8 *a le genre* $p_a = p_g = 1$.

On en déduit que *la surface normale* Φ_8, *d'ordre* 8, *appartient à un espace à cinq dimensions* (n. 92).

87. *Remarque.* – Dans le raisonnement qui précède, le lemme du n. 38 nous conduit à la conclusion que le genre de Φ est > 0, et par conséquent $= 1$, aussitôt que l'on a reconnu qu'il y a $x > 0$ points de coïncidence de I_2. Il est intéressant de remarquer qu'on peut calculer directement le genre numérique $p_a (= p_g)$ de Φ en fonction du nombre x, d'après le procédé suivant.

Considérons en général une surface ψ de genre numérique P_a, renfermant une involution I_2; soit x le nombre des points de coïncidence de I_2 (nombre qu'on suppose fini, ≥ 0) et soit p_a le genre numérique de cette involution, ou d'une surface Φ qui en fournit une image.

Remarquons d'abord que les coïncidences de I_2 sont nécessairement *parfaites*, c'est-à-dire que dans le domaine de tout point uni on a une homographie identique.

Supposons en effet que dans le domaine du point uni U on ait une involution possédant deux coïncidences, et désignons par $|A|$ un système linéaire quelconque tracé sur ψ et par $|A'|$ le système transformé de $|A|$ par rapport à I_2. Soit $|B|$ le système linéaire *appartenant à l'involution* I_2, et renfermant les courbes réductibles $A + A'$. Une courbe B quelconque que l'on oblige à passer par U, passera nécessairement par ce point avec deux branches tangentes à deux directions distinctes; et celles-ci seront conjuguées par rapport à l'involution qui résulte définie dans le domaine de U. On en déduit que l'involution d'ordre 2 appartenant à la courbe considérée B, n'aura pas des coïncidences, car à un point qui se meut sur B s'approchant à U sur l'une des deux branches de la courbe, correspond en I_2 un point qui se meut sur l'autre branche. Or on a sur B une involution γ_2^1 (formée par les couples de I_2) dont on pourra désigner le genre par ϱ; en désignant par ϱ' le genre (effectif) de B on a la formule bien connue de M. Zeuthen

$$4(\varrho - 1) = 2(\varrho' - 1) \qquad \text{d'où} \qquad \varrho' = 2\varrho - 1.$$

Comme la B que nous avons considérée possède un point double en U, le genre effectif d'une B arbitraire ne passant pas par U sera $\varrho' + 1 = 2\varrho$. Mais c'est là une conclusion absurde, car cette B renferme aussi une involution sans coïncidences, formée par les couples de I_2, et en appliquant à celle-ci la formule de Zeuthen, on trouve que le genre de la courbe est un nombre impair.

Ceci posé considérons la correspondance [1 2] entre les surfaces Φ, ψ (Φ étant une image de I_2). On déduit aisément de ce qui précède, qu'aux points unis de I_2 répondent sur Φ des courbes rationnelles de degré -2. On a alors tous les éléments pour écrire la relation, que M. Severi a établie,

entre les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance algébrique; cette relation sera

$$x + 4P_a = 8p_a + 4.$$

Dans le cas particulier qui nous interesse ici, on a $P_a = 1$; la formule précédente nous donne alors

$$p_a = 1, \qquad x = 8$$

ou bien

$$p_a = 0, \qquad x = 0$$

(le cas $x < 0$, qui répondrait à une involution I_2 douée d'une infinité de coïncidences, est ici écarté à priori).

Par cette remarque se trouve établi le théorème suivant qui renferme celui que nous avons établi au n. 38.

Soit I_2 une involution d'ordre 2, appartenant à une surfaces de genre numérique 1, et possédant un nombre fini x (≥ 0) de coïncidences; le genre numérique de I_2 est

$$p_a = 0 \qquad ou \qquad p_a = 1,$$

et on a respectivement

$$x = 0 \qquad ou \qquad x = 8.$$

En nous rapportant à la I_2 donnée sur une surface de Kummer (I_2 qui est représentée par la surface hyperelliptique Φ_8) nous avons trouvé effectivement

$$x = 8;$$

ainsi la déduction $p_a = 1$ se trouve confirmée.

88. *Configuration des points doubles et des courbes rationnelles appartenant à la surface Φ_8.* – Considérons sur la surface de Jacobi F les 10 groupes de l'involution I_4, qui renferment des points multiples, c'est-à-dire les 4 groupes formés par des points quadruples et les six groupes formés par les cycles de 2^d ordre, dont chacun soit compté deux fois (n. 84). A ces groupes répondent 10 points singuliers de la surface Φ_8, formant une configuration remarquable que nous nous proposons d'étudier.

De même que sur F les relations essentielles entre les points unis de la transformation T, se rapportent aussi aux corbes C unies, sur la surface Φ, la cfg. des points singuliers résultera étroitement liée à la cfg. formée par les courbes répondant aux courbes unies.

On voit tout d'abord que cette dernière cfg. contient: quatre coniques, répondant aux courbes unies $12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$; quatre courbes de quatrième ordre (que nous dirons de *rang* 1) répondant aux cycles de rang 1; et deux

courbes de 4me ordre (que nous dirons de *rang* 2) répondant aux cycles de rang 2. On démontre aisément que les six courbes de 4me ordre sont rationnelles.

Ainsi par exemple la courbe répondant au cycle $13'$, $1'3$, est rationnelle car ses points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de la série g_2^1, déterminée sur la courbe $13'$ (ou $1'3$) par la transformation $T^2 \equiv K$.

On peut aussi ajouter qu'il existe 4 hyperplans qui touchent Φ le long des quatres coniques avec un contact de 3me ordre, et six hyperplans touchant Φ le long des six quartiques avec un contact de 1r ordre. En effet toute conique comptée 4 fois, doit donner une courbe du système *complet* $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les hyperplans, car une des courbes unies $12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$ comptée 4 fois donne sur F une courbe D; et analoguement pour les quartiques.

Après ces remarques relatives à la cfg. des courbes rationnelles, passons à examiner la nature des 10 points singuliers.

Démontrons d'abord que ces points ne sauraient pas être multiples d'un ordre > 2.

On a plus généralement que: *une surface régulière normale des genres* $p_a = p_g = P_2 = 1$, *dépourvue de courbes exceptionnelles, ne peut pas posséder des points multiples d'ordre* > 2.

Rappelons que toute surface normale de genres 1, dépourvue de courbes exceptionnelles, jouit des propriétés suivantes:

a) elle appartient à un espace S_r dont la dimension r est égale au genre r des sections hyperplanes (canoniques) de la surface;

b) elle est d'ordre $2r - 2$;

c) elle ne possède pas des courbes multiples ou des points multiples n'abaissant pas le genre des sections hyperplanes.

Si la surface renferme un point multiple O, en la projetant de O on obtiendra une nouvelle surface de S_{r-1} qui ne contient pas des courbes exceptionnelles (54) de sorte que cette projection devra satisfaire aux propriétés a) et b); il s'ensuit que le point multiple O ne saurait pas être d'ordre > 2.

Remarque. – On voit de plus que les points doubles de la surface de genres 1, *abaissent le genre des sections hyperplanes d'une seule unité.*

Ceci posé revenons à notre surface Φ_8 de l'espace S_5.

Appelons P le point de Φ répondant au point uni $(11')$ de F. Des 10 courbes rationnelles appartenant à Φ, il y en a quatre qui passent par P: c'est-à-dire les coniques homologues aux courbes unies $12'$, $1'2$, et les quartiques de rang 1 répondant aux cycles de rang 1, $13'$, $1'3$ et $14'$, $1'4$ (voir le tableau du n. 84).

Comme une section hyperplane arbitraire issue par P, coupe chaque conique hors de P en *un seul point*, sur la surface F une courbe D issue arbi-

(54) En effet le genre des sections hyperplanes étant $i' \leq r - 1$, on en déduit $\pi' = r - 1$ ($p_g > 0$); cette égalité ne saurait pas subsister s'il y avait sur la surface des courbes exceptionnelles parce qu'en ce cas on aurait $\pi' > r - 1$.

trairement par (11′) coupera les courbes 12′, 1′2, hors de (11′), *en quatre points*, de sorte qu'elle aura quatre intersections avec ces courbes, réunies en (11′). On en conclut que le point (11′) est un point de multiplicité $s \geq 2$ pour la courbe D envisagée. Mais dans l'hypothèse $s > 2$ deux courbes D arbitraires issues par (11′) auraient t intersections réunies en (11′), où

$$t \geq s^2 \geq 9,$$

et par suite deux sections hyperplanes de Φ, issues par P, auraient $\frac{t}{4} > 2$ intersections réunies en P, et ce point résulterait de multiplicité > 2. En vertu de la proposition établie ci–dessus, on en déduit que $s = 2$.

En tenant compte de ce que la D envisagée a quatre intersections réunies en (11′), avec les courbes 12′, 1′2, on reconnait que les deux branches de D passant par (11′), doivent avoir respectivement un contact de 2^{d} ordre avec les courbes susdites. On peut exprimer cette propriété en disant que les courbes D issues par P forment un système linéaire ayant le point–base double P et deux points base simples successifs sur chacune des courbes 12′, 1′2. (Voir la figure). Ce système linéaire, que nous désignerons par $|D_1|$ est formé par les courbes D de F répondant aux sections hyperplanes de Φ, qui passent par P.

Supposons maintenant qu'un point M de F, se mouvant sur la courbe 13′, s'approche à (11′), et considérons les ∞^3 courbes de $|D_1|$ qui passent par M, courbes que nous nommerons D_2. Comme le système $|D_1|$ appartient à l'involution I_4, ces courbes que nous avons obligées à passer par M, passeront en consequence par les points M', M'', M''' homologues à M en T, T^2, T^3. En se rappelant que $T^2 \equiv K$, on déduit que le point M'' se meut sur 13′, tandis que les points M', M''' se meuvent sur 1′3. De là on tire qu'à la limite, lorsque M coincide avec (11′), les courbes D_1 envisagées viennent avoir au moins deux nouvelles intersections réunies en (11′) avec les courbes 13′, 1′3, de sorte qu'elles ont avec ces courbes au moins quatre intersections, tombant en (11′). Comme les D_1 ont aussi *quatre* intersections en (11′) avec les courbes 12′, 1′2, il s'ensuit que le point (11′) est quadruple pour les ∞^2 courbes D_2.

On pourrait douter que les D_2 aient en (11′) un point multiple d'ordre > 4; mais on se passe de ce doute en observant que la courbe $C + C' + C'' + C'''$ composée d'une C passant par (11′) et de ses transformées par rapport à T, T^2, T^3, est une particulière D_2 qui possède en (11′) un point quadruple. On voit de plus que les D_2 n'ont pas des tangentes fixes en (11′), car la courbe $C + C' + C'' + C'''$ envisagée, a ses tangentes variables au varier de C.

Aux courbes D_2 répondent sur Φ les sections hyperplanes d'un système linéaire ∞^3 contenu dans le système ∞^4 des sections hyperplanes qui passent par P, c'est–à–dire les sections produites par des hyperplans renfermant une certaine droite p par P.

Comme le genre de ces sections doit être égal à la dimension 3 du système complet auquel elles appartiennent, on arrive à la conclusion que la surface

possède un point double P_1 infiniment prochain à P, suivant la direction p. Si l'on ajoute qu'une section hyperplane arbitraire par P, passe par ce point avec deux branches non tangentes entre elles – répondant aux branches d'une courbe D_1 en $(11')$ – on en déduit que le point P est biplanaire et que p est la droite commune aux deux plans tangents.

La circostance que les courbes D_2, répondant aux sections hyperplanes par p, ont les quatres variables, nous montre aisément qu'il ne peut pas exister un troisième point double P_2, successif à P_1.

On peut aussi établir tout de suite le comportement en P des quatre courbes rationnelles passant par ce point. Il suffit à cet effet de rappeler les propriétés des courbes D_1, D_2 au point $(11')$.

Ainsi par exemple de ce que les D_1, D_2 ont quatre intersections en $(11')$ avec les $12', 1'2$, on deduit que les coniques répondant à $12', 1'2$ passent par P d'une façon telle que chacune d'elles touche un des deux plans tangents et non la droite p; etc. etc.

Passons maintenant à étudier la nature du point Q de Φ qui répond au cycle de rang 1: $(13')$, $(2'4)$. Une courbe D issue d'une façon arbitraire par le point $(13')$ doit passer en conséquence par $(2'4)$; il s'agit d'établir les propriétés de cette D dans le domaine de $(13')$ et de $(2'4)$. A ce but remarquons que par Q passent les coniques répondant aux courbes $12'$, $3'4$, et qu'une section hyperplane par Q coupe ces coniques, hors de Q, en un seul point. Il s'ensuit qu'une D par $(13'), (2'4)$ doit avoir deux intersections avec les courbes $12', 3'4$ en chacun des points $(13'), (2'4)$, et par suite que la D doit avoir un point double en $(13')$ et un autre point double en $(2'4)$.

Soit $|D_1|$ le système linéaire ∞^4 formé par les courbes D répondant aux sections hyperplanes par Q. On voit aisément que les D_1 ont en $(13')$, $(2'4)$ les deux couples de tangentes variables, car en transformant au moyen de T, T^2, T^3 une courbe C issue par $(13')$, on obtient une particulière D_1 ayant les tangentes variables. En poursuivant l'analyse on établit que le point Q est un point double conique.

Ce résultat découle des remarques suivantes:

1) Une section hyperplane arbitraire passant par Q, possède un point double origine de deux branches *non tangentes* correspondantes aux branches de la courbe homologue D_1 par $(13')$, $(2'4)$.

2) Les points de Φ appartenant au domaine de Q, forment une variété algébrique irréductible, car ils correspondent biunivoquement aux couples de l'involution formée par les tangentes des courbes D_1 en $(13')$, $(2'4)$.

On conduit d'une façon parfaitement analogue la discussion relative au point R de Φ, correspondant à un cycle de rang 2, tel que $(12')$, $(1'2)$. On arrive de même à la conclusion que R est un point double conique.

Pour compléter la recherche des relations qui passent entre les 10 courbes rationnelles et les points doubles de Φ, il suffira de remarquer que toute relation entre les courbes et les points unis sur F, se transporte sans aucune difficulté aux éléments singuliers de Φ.

En résumant on arrive à la conclusion suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang 4 et du type III, peut être transformée birationnellement en une surface Φ_8 de genres 1 appartenant à l'espace à cinq dimensions, et possédant des sections hyperplanes d'ordre 8 et de genre 5.

La Φ_8 jouit des propriétés suivantes: Elle possède 10 points doubles et 10 courbes rationnelles remarquables. Des 10 points doubles quatre sont biplanaires et les six restant sont coniques. Dans le domaine de 1^r ordre de tout point biplanaire on a un autre point double.

Les points doubles coniques se partagent en deux classes jouissant de propriétés différentes: 4 points coniques de rang 1 et 2 de rang 2. Des 10 courbes rationnelles quatre sont des coniques et six des quartiques. Le long de toute conique il y a un hyperplan ayant avec Φ_8 un contact d'ordre 3, et le long d'une quartique un hyperplan ayant un contact simple. Les quartiques se partagent en deux classes: 4 de rang 1 et 2 de rang 2.

Les 10 points doubles et les 10 courbes satisfont aux relations qui suivent:

Par un point biplanaire passent 2 coniques et 2 quartiques de rang 1.

Par un point conique de rang 1 passent 2 coniques, 2 quartiques de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point conique de rang 2 passent les 4 quartiques de rang 1 et 1 de rang 2.

Une conique renferme 2 points biplanaires et 2 points coniques de rang 1.

Une quartique de rang 1 renferme 2 points biplanaires, 2 points coniques de rang 1 et les 2 de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 4 points coniques de rang 1 et passe doublement par 1 point conique de rang 2.

89. *La surface Φ_8 caractériseé par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers.* – Soit une surface Φ_8, d'ordre 8 à section canoniques en S_5 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), possédant 10 points doubles et 10 hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles, de façon que ces points et ces courbes forment une cfg. jouissant des propriétés établies au n. précédent. On peut démontrer que Φ_8 est une surface hyperelliptique du type III, de façon que *la configuration que nous avons définie joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface.*

A cet effet nous procéderons par une méthode analogue à celle que nous avons développée aux nn. 49, 78.

Nous tâcherons de construire une surface birationnellement identique à la surface de Kummer, qui soit représentée sur la Φ_8 comptée deux foix.

Faisons d'abord les remarques suivantes.

Ainsi que nous l'avons expliqué au n. 86, la surface Φ_8 correspond à une involution I_2 d'ordre 2 appartenant à une surface de Kummer. Transformons celle-ci en faisant correspondre aux quadriques de S_3 les hyperplans

de S_9; on aura ainsi une surface ψ_{16} de S_9 possédant 16 points doubles et 16 S_8 tangents suivant des courbes rationnelles d'ordre 4.

La surface ψ_{16} transformée de la surface de Kummer renferme une involution I_2 qui est engendrée par une homographie de S_9. Cette homographie possède un S_3 de points unis ne rencontrant pas ψ_{16}; et de cet espace S_3 la surface vient projetée en notre Φ_8.

Ceci posé nous allons montrer comment on peut construire réciproquement ψ_{16} étant donnée Φ_8.

A cet effet remarquons que parmi les 4 hyperplans tangents à Φ_8 suivant les quartiques de rang 1, on peut choisir deux hyperplans ayant communs 4 points coniques, et renfermant dans leur ensemble les 4 points biplanaires.

Supposons que de tels hyperplans soient représentés par

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0.$$

Construisons la surface de S_6

$$(1) \qquad y_1 = x_1\,, \cdots, y_6 = x_6\,, \qquad y_7 = \sqrt{x_1 x_2}$$

($x_1, \cdots, x_6$ satisfaisant aux équations de Φ_8). Comme la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$ est tangente à la surface double, Φ_8, il n'y aura pas sur celle-ci des courbes de diramation proprement dites; par conséquent la surface (1) que nous venons de construire est d'ordre 16, et ses sections hyperplanes sont de genre 9 et se coupent deux à deux en des groupes canoniques: il s'ensuit que cette surface a tous les genres géométriques égaux à 1 ($p_g = P_2 = \cdots = 1$). Or il y aura une surface normale d'ordre 16 (que nous désignerons par ψ) dont la surface (1) de S_6, est une projection.

Nous voulons prouver: d'abord que le genre numérique de ψ [ou de (1)] est $p_a = 1$ et par conséquent que ψ appartient à un S_9; ensuite que ψ est identique à la surface ψ_{16} que nous avons obtenue en transformant une surface de Kummer.

A cet effet faisons les remarques suivantes:

1) Un point biplanaire de Φ_8 appartient à un des deux hyperplans de diramation $x_1 = 0\,, x_2 = 0$, de sorte que le domaine de ce point sur chaque nappe de la surface donne lieu à une courbe de diramation infiniment petite.

2) Les points coniques communs à $x_1 = 0\,, x_2 = 0$, sont doubles pour la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$; on voit donc qu'il n'y a pas des points de diramation dans le domaine de ces points coniques.

3) Il en est de même pour les deux points coniques de Φ_8 qui n'appartiennent pas à la quadrique $x_1 x_2 = 0$.

Ceci posé on voit d'abord qu'aux 16 points coniques de Φ_8 correspondent autant de couples de points coniques de ψ, ce qui fait 12 points doubles coniques de cette surface.

A chaque point biplanaire (de diramation) de Φ_8 répondra un point de ψ, et nous supposerons qu'il s'agisse d'un point singulier abaissant la classe de la surface d'un certain nombre $h\ (\geq 0)$.

Or en répétant le raisonnement que nous avons développé aux nn. 49, 78, tâchons d'évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface ψ. Ce calcule nous amène à l'équation

$$4 + 4h = 12\,p_a$$

p_a désignant le genre numérique de ψ.

Cette équation doit être résolue en nombres entiers, et on doit avoir

$$h \geq 0\,, \qquad p_a \leq 1;$$

pourtant on aura

$$h = 2\,, \qquad p_a = 1.$$

Il s'ensuit qu'aux 4 points biplanaires de Φ correspondent 4 points doubles coniques de ψ.

Nous venons de prouver que *la surface ψ est une surface de genre $p_a = 1$ possédant 16 points doubles coniques*. Il est aisé de reconnaître qu'elle possède aussi 16 S_8 tangents suivant des quartiques C_4.

Ces courbes C prennent naissance de la façon suivante:

1) Chaque quartique de Φ_8 donne lieu à deux C_4 (ce qui fait 12 C_4). En effet on peut reconnaître qu'une telle quartique ne renferme pas des points de diramation.

2) Chaque conique de Φ_8 donne lieu à une courbe irréductible d'ordre 4, parce qu'il y a sur la conique deux points de diramation. On a ainsi 4 C_4 à ajouter aux 12 déjà trouvées.

Ceci posé on voit que *la surface ψ de S_9 est une transformée de la surface de Kummer*; le système transformant est le système linéaire auquel appartiennent les 16 quartiques de ψ comptées deux fois.

X. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 6 (type IV).

90. *L'involution I_6 engendrée par une transformation hermitienne cyclique d'ordre* 6. – Sur la surface de Jacobi F considérons la transformation hermitienne T périodique d'ordre 3, envisagée au n. 73, et désignons par K la transformation ordinaire de 1re espèce qui laisse invariant un des 9 points unis de T. On remarquera tout d'abord que les transformations T, K sont échangeables, car T doit transformer K en elle–même (voir le n. 62).

La transformation hermitienne singulière

$$S \equiv TK \equiv KT$$

résulte par conséquent périodique d'ordre 6, car on a

$$S^6 \equiv T^6 K^6 \equiv 1.$$

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les surfaces représentant l'involution I_6, engendrée sur F par la transformation S.

En parcourant la marche suivie dans les cas précédénts, on aura d'abord à chercher les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à la transformation S ou à une de ses puissances, les C étant courbes d'un système Σ.

A ce but il faut chercher:

a) La permutation produite par K entre les points et les courbes C invariant par rapport à T.

b) La permutation produite par T entre les points et les courbes C invariant par rapport à K.

La première recherche a été déjà effectuée au n. 80. En désignant par $(\alpha\alpha')$ le point uni de T, qui est aussi par rapport à K, on a trouvé que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\beta\beta'), \quad (\alpha\beta'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\beta\gamma')$$

en les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\gamma\gamma'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\gamma), \quad (\beta'\gamma),$$

et les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \alpha\beta', \quad \alpha'\beta, \quad \beta\gamma'$$

en les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \gamma\gamma', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\gamma, \quad \beta'\gamma.$$

Passons donc maintenant à la recherche b). Désignons les courbes et les points unis de K au moyen des symboles de M. Humbert, en combinant les deux séries de caractères

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \qquad \text{et} \qquad a', \quad b', \quad c', \quad d'.$$

Soit $(aa') = (\alpha\alpha')$ le point uni de K, qui est aussi uni par rapport à T. Entre les éléments de la variété ∞^1 formée par les C qui passent par $(a\alpha')$, il y a une transformation singulière périodique d'ordre 3 définie par S; partant les six courbes unies de K:

$$ab', \quad ac', \quad ad', \quad a'b, \quad a'c, \quad a'd$$

qui passent par (aa'), se partageront en deux cycles de la transformation T:

$$ab', \quad ac', \quad ad' \qquad \text{et} \qquad a'b, \quad a'c, \quad a'd.$$

Ceci posé, on voit toute de suite que la T fait correspondre au point (bb') le point (cc') et à ce dernier le point (dd'), car (bb') peut être envisagé comme le point commun aux courbes $ab', a'b$, hors de (aa'); le point (cc') comme le point commun aux courbes $ac', a'c$ correspondantes aux courbes précé-

dentes, et enfin le point (dd') comme l'intersection, hors de (aa'), de deux courbes ad', $a'd$.

En poursuivant l'analyse par des considérations analogues, on arrive à la conclusion que les termes de points

$$(aa')(aa')(aa') - (bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad')$$
$$(bc')(cd')(db') - (cb')(dc')(bd') - (ca')(da')(ba'),$$

et les termes de courbes ayant les mêmes symboles, forment des cycles de la transformation T.

En résumant, on voit que *l'involution I_6 engendrée sur F par la transformation hermitienne S, cyclique d'ordre 6, possède* 10 *groupes renfermant des points multiples: c'est-à-dire un groupe formé par un point 6-ple, quatre groupes dont chacun est formé par deux points 3-ples, cinq groupes dont chacun est formé par trois points doubles.*

En considérant l'involution I_6 engendrée par S entre les courbes C d'un système Σ, on a d'une façon parfaitement analogue 10 *groupes renfermant des courbes comptées plusieurs fois. Les algorithmes introduits ci-dessus donnent d'une façon complète les relations entre ces groupes de points et de courbes.*

91. *La surface Φ_{12} d'ordre* 12 *modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type IV.* – Pour construire un modèle projectif des surfaces birationnellement identiques à l'involution I_6, on procédera en suivant la marche plusieurs fois indiquée. On considérera d'abord le système linéaire $|D|$ appartenant à I_6 et renfermant la courbe $D = C + C' + \cdots + C^{(5)}$ composée avec C et ses transformeés par rapport à $S, S^2, \cdots, S^5$; à ce système répond sur une surface hyperelliptique Φ de la classe envisagée, un système linéaire simple $|\Gamma|$, dépourvu de points-base, de sorte qu'on pourra supposer que $|\Gamma|$ soit le système des sections hyperplanes de Φ.

La surface Φ_{12} ainsi obtenue a l'ordre 12 et ses sections hyperplanes ont le genre 7.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur du genre arithmétique p_a de Φ_{12}.

A cet effet il suffit de développer des considérations étroitement analogues à celles qu'on a exposées en calculant le genre p_a du type précédent.

Soit Φ_6 une surface de l'espace S_4 (type II) image projective de l'involution I_3 engendrée sur F par la transformation T; on aura sur Φ_6 une involution I_2 de 2$^{\text{d}}$ ordre, dont les groupes correspondent birationnellement aux points de la surface Φ_{13}.

En effet un groupe

$$P, P', P'', P''', P^{IV}, P^{V}$$

de I_6, obtenu du point P au moyen des opérations

$$S, \quad S^2 = T^2, \quad S^3 = K, \quad S^4 = T, \quad S^5 = KT^2$$

donne deux groupes

$$P, P^{IV}, P'' \qquad \text{et} \qquad P''', P', P^{V}$$

de l'involution I_3.

Comme le second de ces groupes s'obtient du premier au moyen de la transformation K — qui change en elle–même T et par suite I_3 — l'involution I_2 dont on parle ci–dessus sera engendrée sur Φ_6 par une des 9 homographies involutoires qui changent en elle–même cette surface (n. 80).

En se rappelant que l'involution I_2 possède 8 coïncidences (n. 80) on en conclut (nn. 38, 87) que la *surface* Φ_{12} *a le genre* $p_a = 1$ $(= p_g = P_2)$; et par suite *qu'elle appartient à l'espace* S_7 *et que ses sections hyperplanes sont des courbes canoniques*. Les 10 groupes de I_6 renfermant des points multiples sont représentés par 10 points singuliers de la surface Φ_{12}, et les 10 groupes de I_6 renfermant des courbes multiples, par 10 courbes rationnelles de la même surface.

Ces courbes sont rationnelles parce que l'involution I_6 établit sur chacune des courbes unies de S, T, K, une série linéaire (d'ordre 6, 3, 2 respectivement). On trouve aisément l'ordre des 10 courbes appartenant à Φ_{12}. Ainsi p. e. on voit qu'à la courbe $aa' = \alpha\alpha'$ répond une conique, car en comptant six fois la aa' on obtient une courbe D; à la courbe $\beta\beta' + \gamma\gamma'$ répond une quartique, car la courbe $3(\beta\beta' + \gamma\gamma')$ est une D; etc.

On a donc sur Φ_{12} une conique, 4 quartiques et 5 courbes de sixième ordre. Les 10 points singuliers de Φ_{12} ne peuvent pas avoir une multiplicité plus grande que 2 (n. 88): on voit aisément par des considérations désormais connues, que les 4 groupes de I_6 renfermant des points 3–ples sont représentés par 4 points biplanaires ordinaires de Φ_{12}, et que les 5 groupes de I_6 renfermant des points 2–ples sont représentés par 5 points doubles coniques.

Arrêtons–nous sur le point P de Φ_{12}, qui répond au groupe de I_6 renfermant le point 6–ple $(a\alpha') = (\alpha a')$, car l'analyse de la singularité que la surface Φ_{12} possède en P, se présente moins simple.

À priori une courbe D satisfaisant à la condition de passer par le point $(a\alpha')$, pourra avoir une branche tangente à une direction arbitraire d issue par $(a\alpha')$, ou bien une branche tangente à une des courbes $a\beta', \beta\alpha'$. Dans le premier cas la D doit posséder deux autres branches tangentes aux directions d', d'' correspondantes à d par rapport à T, T^2, et par suite la D viendra avoir en $(a\alpha')$ un point de multiplicité ≥ 3.

L'involution d'ordre 6 appartenant à D aura autant de points doubles qu'il y a de branches passant par $(a\alpha')$: comme, d'après la formule de Zeuthen, une involution possède nécessairement un nombre pair de points doubles, le nombre des branches par $(a\alpha')$ devra être pair, et par suite égal à six (car il doit résulter un multiple de 3). Mais alors, en désignant par x le genre de l'involution donnée sur D, on obtient

$$6 + 12(x - 1) = 2(22 - 1)$$

car le genre d'une D arbitraire étant égal à 37, une D douée d'un point 6–ple aura le genre $37 - 15 = 22$. La relation précédente donne $x = 4$, ce qui est absurde, parce qu'une section hyperplane de Φ_{12}, issue arbitrairement par P, doit avoir le genre $7 - 1 = 6$.

Il faut donc conclure qu'une D passant de la façon la plus générale par le point $(\alpha\alpha')$, a une branche tangente à la courbe $\alpha\beta'$ (ou à $\alpha'\beta$). Mais si la D possédait en $(\alpha\alpha')$ une seule branche, l'involution définie sur D aurait seulement un point 6–ple équivalent à 5 points doubles, contrairement à la formule de Zeuthen. On doit donc supposer que D passe par $(\alpha\alpha')$ avec une branche tangente à $\alpha\beta'$ et avec une autre branche tangente à $\alpha'\beta$.

Il s'ensuit que le point P ne peut pas être simple, et par suite qu'il est double (n. 88). Deux courbes D correspondantes à deux sections hyperplanes de Φ_{12} issues par P, auront donc en $(\alpha\alpha')$ la multiplicité d'intersection $6 \cdot 2 = 12$. On en tire que leurs branches ont deux à deux un contact d'ordre 4, c'est–à–dire qu'aux sections de Φ_{12} passant par P répondent sur F les courbes d'un système linéaire $|D_1|$ ayant en $(\alpha\alpha')$ un point–base double et quatre points–base simples sur chacune des branches de ce point double.

Si l'on considère les courbes D_1 passant par un point de F s'approchant à $(\alpha\alpha')$ suivant une direction différente des directions des tangentes fixes, en faisant toujours jouer la formule de Zeuthen, on trouve un système linéaire $\infty^5 |D_2|$ de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 4–ple avec deux points doubles infiniment voisins suivant les directions de $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$.

Le genre de l'involution appartenant à une D_2 résulte égal à 5: donc aux courbes D_2 répondent sur Φ_{12} des sections hyperplanes de genre 5, passant par une certaine droite p issue par P. Il s'ensuit que Φ_{12} possède un point double P_1 infiniment voisin de P suivant la direction p. Le point P resultera donc biplanaire, car une section hyperplane arbitraire issue par P possède deux branches non tangentes, correspondantes aux deux branches d'une courbe D_1.

Les courbes D_2 passant par un point de F infiniment voisin à $(\alpha\alpha)$ suivant une direction arbitraire, forment un système linéaire $|D_3|$, ∞^4, de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 6–ple, les six tangentes en ce point étant variables. Comme le genre de l'involution donnée sur une D_3 est égal à 4, on aura sur Φ_{12} en correspondance aux courbes D_3 de F, des sections de genre 4 découpées par des hyperplans qui passent par un certain plan π renfermant p. La surface Φ_{12} possédera donc un autre point double P_2 infiniment voisin à P_1.

Ainsi l'analyse du point singulier P est achevée. Nous l'avons exposée avec quelque détail, car cela nous dispensera de développer dans la suite les considérations conduisant à des résultats analogues.

En tenant compte des relations entre les courbes et les points unis de la cfg. appartenant à F, on arrive au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang 6, et du type IV, peut être transformée en une surface Φ_{12}, de genres 1, de l'espace S_7, ayant des

sections hyperplanes d'ordre 12 et de genre 7. La Φ_{12} jouit des propriétés suivantes:

Elle possède 10 *points doubles* et 10 *courbes rationnelles* remarquables. Parmi les 10 points doubles il y a un point biplanaire singulier possédant deux points doubles successifs, 4 points biplanaires ordinaires, et 5 points coniques. Parmi les 10 courbes il y a une conique, 4 quartiques, 5 courbes d'ordre 6. Le long de la conique, des quartiques, des sextiques, on a respectivement des hyperplans ayant de contact d'ordre 5, 2, 1 avec la surface Φ_{12}.

Par rapport aux propriétés de la cfg. on a 2 points biplanaires ordinaires de rang 1; 2 points biplanaires ordinaires de rang 2; 2 points coniques de rang 1 et 3 points coniques de rang 2; 2 quartiques de rang 1 et 2 de rang 2; 2 sextiques de rang 1 et 3 de rang 2.

Entre les éléments de la cfg. on a les relations suivantes:

Par le point biplanaire singulier passent les 2 quartiques et les 2 sextiques de rang 1.

Par un point biplanaire de rang 1 passent la conique, une quartique de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent les 2 quartiques de rang 1 et 1 quartique de rang 2. Cette dernière possède un point double en le point biplanaire.

Par un point conique de rang 1 passe la conique, 1 sextique de rang 2. La sextique de rang 1 passe doublement par le point envisagé.

Par un point conique de rang 2 passent les 2 sextique de rang 1 et 2 sextiques de rang 2. Ces dernières passent doublement par le point conique.

La conique renferme les 2 points biplanaires et les 2 points coniques de rang 1.

Un quartique de rang 1 renferme le point singulier, un point biplanaire de rang 1, et les 2 points biplanaires de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 2 points biplanaires de rang 1 et 1 point biplanaire de rang 2.

Une sextique de rang 1 renferme le point singulier, un point conique de rang 1 et les 3 points coniques de rang 2.

Une sextique de rang 2 renferme les 2 points doubles de rang 1 et 2 points doubles de rang 2.

Remarquons enfin que:

La surface hyperelliptique Φ_{12} est caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers formant la configuration que nous avons définie.

Pour le prouver il suffit de montrer que étant donnée Φ_{12}, on peut construire une surface représentée sur celle–ci comptée deux fois et birationnellement identique à la surface Φ_6 (type II).

Le procédé que nous avons employé déjà en des cas analogues (nn. 49, 78, 89) ne presente ici aucune nouveauté. Pourtant nous pourrons nous dispen-

ser de répéter une analyse qui réussirait un peu longue à suivre dans les détails.

Il suffira d'indiquer qu'on obtiendra une surface du type II (transformée de Φ_6), en posant

$$y_1 = x_1, \cdots, y_8 = x_8, \qquad y_9 = \sqrt{x_1 x_2},$$

où $(x_1, \cdots, x_8)$ est un point mobile sur Φ_{12} et où l'on suppose que

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

représentent es hyperplans de S_7 tangents à Φ_{12}, suivant les sextiques de rang 1.

XI. Surfaces hyperellitpiques régulières de rang 8 (types V, VI, VII).

92. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bidiédriques d'ordre 8.* – D'après l'analyse développée au n. 70 une surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1)$$

possède à priori quatre groupes bidiédriques distincts de transformations hermitiennes: les groupes que nous avons désignés par G_8, G_8', G_8'', G_8'''. Chacun de ces groupes est en isomorphisme oloédrique avec le groupe bidiédrique Γ_8 formé par les transformations birationnelles

$$(x' = -x, y' = \pm iy) \qquad \left(x' = \frac{1}{x}, y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right)$$

$$\left(x' = -\frac{1}{x}, y' = \pm \frac{y}{x^3}\right) \qquad (x' = x, y' = \pm y)$$

qui changent en elle–même la courbe f.

On peut prendre comme substitutions génératrices du groupe Γ_8 les $x' = -x, y' = iy$; $x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{iy}{x^3}$, dont l'une change l'autre en son inverse. En les appelant u_1, u_2, le groupe contiendra les substitutions suivantes:

$$u_1, u_2, u_1 u_2, u_1^3, u_2^3, u_1 u_2^3, u_1^2 \equiv u_2^2, u_1^4 \equiv u_2^4 \equiv 1.$$

Nous désignerons toujours dans la suite par U_1, U_2 ; U_1', U_2' ; U_1'', U_2'' ; U_1''', U_2''', les transformations de G_8, G_8', G_8'', G_8''' qui répondent respectivement aux transformations u_1, u_2 de Γ_8.

Étudions tout d'abord les propriétés du groupe G_8 par rapport aux points de F qui restent invariant vis–à–vis des transformations du groupe.

Rappelons–nous que G_8 est le transformé du groupe Γ_8 au moyen d'une correspondance point par couple établie entre la surface F et la courbe f, de sorte que toutes les transformations de G_8 ont en commun le point uni qui représente tout couple de la série g_2^1.

En désignant par

$$A_1 , A_2 ; \quad B_1 , B_2 ; \quad C_1 , C_2$$

les trois couples de points unis des transformations u_1, u_2, $u_1 u_2$ – qui donnent les six coïncidences de la g_2^1 – on voit (n. 84) que u_1 laisse invariant les couples

$$2 A_1 , 2 A_2 , A_1 + A_2 , B_1 + B_2 , C_1 + C_2 ;$$

u_2 les couples:

$$2 B_1 , 2 B_2 , A_1 + A_2 , B_1 + B_2 , C_1 + C_2 ;$$

et $u_1 u_2$ les couples:

$$2 C_1 , 2 C_2 , A_1 + A_2 , B_1 + B_2 , C_1 + C_2 .$$

Les transformations U_1, U_2 de la surface F ont donc les mêmes points unis, c'est-à-dire les 4 points répondant aux couples:

$$A_1 + A_2 , B_1 + B_2 , C_1 + C_2 , 2 A_1 \equiv 2 B_1 \equiv 2 C_1 \equiv 2 A_2 \equiv 2 B_2 \equiv 2 C_2 .$$

Il s'ensuit que les quatres transformations $U_1 U_2$, U_1^3, U_2^3, $U_1 U_2^3$ ont aussi ces mêmes coïncidences.

Envisageons maintenant la transformation de 1re espèce

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_2^2 ,$$

et le système Σ qui renferme totalement toute courbe C répondant aux couples de f qui ont un point fixe. En désignant par les symboles de Humbert les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à K, on a ce tableau se rapportant à U_1 (n. 84).

Points

unis	cycles de 2d ordre
$(11') , (22') , (33') , (44')$	$(12')(1'2) - (13')(2'4) - (14')(2'3) -$ $- (23')(1'4) - (24')(1'3) - (34')(3'4).$

Courbes C

unies	cycles de 2d ordre
$12' - 1'2 - 34' - 3'4$	$13', 1'3 - 14', 1'4 - 23', 2'3 - 24',$ $2'4 - 11', 22' - 33', 44'.$

Soit $(11')$ le point uni qui représente la g_2^1: par ce point doivent passer deux courbes unies de U_2 donnant un cycle de 2d ordre de la transformation U_1; soient $13'$, $1'3$ ces courbes unies, de sorte que $12'$, $1'2$ et $14'$, $1'4$ donneront deux cycles de 2d ordre de la transformation U_2.

En raisonnant comme au n. 84 on arrive au tableau

Points

unis	cycles de 2d ordre
$(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$	$(13')(1'3) - (12')(3'4) - (14')(3'2) - -(32')(1'4) - (34')(1'2) - (24')(2'4)$.

Courbes C

unies	cycles de 2d ordre
$13' - 1'3 - 24' - 2'4$	$12', 1'2 - 14', 1'4 - 32', 3'2 - 34', 3'4 - 11', 33' - 22', 44'$

se rapportant à U_2.

Comme toute substitution de G_8 s'obtient par multiplication de U_1, U_2, on en déduit sans difficulté que l'involution I_8 engendrée entre les points de F par les transformations du groupe bidiédrique G_8, possède 7 groupes doués de points multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les points

$$(11'), \quad (22'), \quad (33'), \quad (44'),$$

comptés 8 fois, et par les quaternes

$$(12')(1'2)(3'4)(34') - (13')(1'3)(24')(2'4) - (14')(1'4)(23')(2'3)$$

comptés 2 fois; tandis que l'involution J_8 engendrée par G_8 entre les courbes C, possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les couples

$$12', \quad 1'2 - 34', \quad 3'4 - 13', \quad 1'3 - 24', \quad 2'4 - 14', \quad 1'4 - 23', \quad 2'3$$

comptés 4 fois, et la quaterne

$$11', \quad 22', \quad 33', \quad 44',$$

comptés 2 fois.

93. Étudions maintenant le groupe G_8'. On sait (n. 70) qu'en désignant par A la transformation de 2de espèce (périodique d'ordre 2) qui amène $(11')$ en $(22')$, le groupe G_8' est engendré par les substitutions

$$U_1' \equiv U_1, \qquad U_2' \equiv U_2 A.$$

Il s'agit de voir comment se distribuent par rapport à U_1', U_2' les points et les courbes unies de la transformation de 1re espèce

$$K \equiv U_1'^2 \equiv U_2'^2.$$

La transformation U_1' étant identique à U_1 on n'a ici qu'à imaginer reproduit le 1r tableau du n. préc. Le tableau relatif à U_2' se déduit aisément du 2d tableau, lorsqu'on connait les permutations produites entre les points et les courbes unies de K par la transformation A.

Or, comme A change en elle-même la transformation K ne laissant pas invariant aucun point ni aucune courbe C, les courbes 12′, 1′2 passant par les points (11′), (22′), doivent se changer entre elles au moyen de A. En se rappelant que A est permutable avec U_1' (n. 62) on voit de plus qu'elle change (33′) en (44′) et par suite que les courbes 34′, 3′4 doivent aussi se changer entre elles.

Comme la courbe 12′ renferme les cycles

$$(13'), \quad (2'4) - (14'), \quad (2'3),$$

et la 1′2 les cycles

$$(1'3), \quad (24') - (1'4), \quad (23'),$$

appartenant à U_1', aucun de ces cycles ne pourra pas être ramené en lui-même par A.

D'autre côté la $U_1'A$ doit avoir 4 points unis entre les 16 coïncidences de K, c'est-à-dire que U_1' et A doivent avoir deux cycles de 2d ordre communs, donc les deux cycles restant

$$(12'), \quad (1'2) - (34'), \quad (3'4)$$

doivent appartenir aussi à la transformation A.

On en tire que A change la courbe 13′ renfermant les points (11′), (12′), (3′4), en la courbe 24′ renfermant les points (22′), (1′2), (34′); la courbe 1′3 renfermant les points (11′), (1′2), (3′4), en la courbe 2′4 renfermant les points (22′), (12′), (3′4); la courbe 14′ renfermant les points (11′), (12′), (34′), en la courbe 23′ renfermant (22′), (1′2), (3′4), et la courbe 1′4 renfermant (11′), (1′2), (3′4), en la courbe 2′3 renfermant (22′), (12′), (34′).

Il s'ensuit enfin que A change entre elles les courbes 11′, 22′ et 33′, 44′ qui se coupent respectivement en les points (12′), (1′2) et (34′), (3′4).

On complète aisément l'analyse pour ce qui concerne les points unis de K.

Ainsi au point (13′) appartenant aux courbes 11′, 12′, 3′4 répond le point (24′) appartenant au courbes 22′, 1′2 , 34′; etc. etc.

En résumant on peut dire que les 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles de A:

$$(11'), \quad (22') - (33'), \quad (44') - (12'), \quad (1'2) - (34'), \quad (3'4) - (13'),$$
$$(24') - (1'3), \quad (2'4) - (14'), \quad (23') - (1'4), \quad (2'3),$$

et les 16 courbes unies, en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On arrive ainsi à construire le tableau se rapportant à U_2', que nous omettrons de reproduire, car il se déduit tout de suite des tableaux relatifs à U_2 et A.

La conclusion est la suivante:

L'involution I'_8 engendrée sur F par le groupe G'_8 possède 6 groupes formés des couples

$$(11'), \quad (22') - (33'), \quad (44') - (13'), \quad (2'4) - (1'3),$$
$$(24') - (14'), \quad (2'3) - (1'4), \quad (23')$$

comptés quatres fois, et un groupe formé de la quaterne

$$(12'), \quad (1'2), \quad (34'), \quad (3'4)$$

comptée deux fois: tandis que l'involution J'_8 engendrée entre les C de Σ par G'_8, possède 4 groupes formés des courbes

$$12', \quad 1'2, \quad 34', \quad 3'4$$

comptées huit fois, et trois groupes formés des quaternes

$$11', \quad 22', \quad 33', \quad 44' - 13', \quad 1'3, \quad 24', \quad 2'4 - 14', \quad 1'4, \quad 23', \quad 2'3$$

comptées deux fois.

Remarque. – On voit que les groupes G_8, G'_8 sont liés par cette relation: qu'on passe des propriétés de l'un aux propriétés de l'autre en remplaçant les points de F avec les courbes C de Σ. On peut donc dire brièvement *que les deux groupes* G_8, G'_8 *se correspondent au moyen de la dualité que nous avons signalée entre les points de* F *et les courbes* C *d'un système* Σ (n. 23).

94. Passons à étudier le groupe G''_8. En disant B la transformation de 2de espèce faisant passer de $(11')$ à $(33')$, les transformations génératrices de G''_8 sont

$$U''_1 \equiv U_1, \qquad U''_2 \equiv U_2 B.$$

On doit ici établir les permutations produites entre les points et les courbes C unies de la transformation

$$K \equiv U''^2_1 \equiv U''^2_2,$$

par la transformation B.

Pour celà on n'a qu'à répéter les considérations analogues à celles qu'on a exposées dans le n. préc.

Comme B change en elles-mêmes les transformations K, U_2, on aura les cycles

$$(11'), \quad (33') - (22'), \quad (44') - 13', \quad 1'3 - 24', \quad 2'4,$$

appartenant à B.

Mais comme $13'$ renferme les cycles

$$(12'), \quad (3'4) - (14'), \quad (23')$$

et $1'3$ les cycles

$$(1'2)\,,\quad (34')-(1'4)\,,\quad (2'3)$$

de la transformation U_2, ces cycles ne pourront pas être invariant par rapport à B, et par suite les cycles restants

$$(13')\,,\quad (1'3)-(24')\,,\quad (2'4)$$

devront appartenir à B; etc., etc.

On voit ainsi que le 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles:

$$(11')\,,\quad (33')-(22')\,,\quad (44')-(13')\,,\quad (1'3)-(24')\,,\quad (2'4)-(12')\,,$$
$$(34')-(14')\,,\quad (32')-(1'4)\,,\quad (3'2)-(1'2)\,,\quad (3'4)$$

de B, et que les 16 courbes se distribuent en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On en déduit aisément le tableau relatif à la transformation U_2'' et comme on possède déjà le tableau relatif à U_1'', il s'ensuit enfin que:

L'involution I_8'' engendrée par G_8'' entre les points de F possède 6 groupes formés par les couples

$$(11')\,,\quad (33')-(22')\,,\quad (44')-(13')\,,\quad (2'4)-(1'3)\,,$$
$$(24')-(12')\,,\quad (1'2)-(34')\,,\quad (3'4)$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$(14')\,,\quad (1'4)\,,\quad (23')\,,\quad (2'3)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J_8'' engendrée par G_8'' entre les courbes C possède 6 groupes formés par les couples

$$12'\,,\quad 3'4\,,\quad -1'2\,,\quad 34'-13'\,,\quad 1'3-24'\,,\quad 2'4-11'\,,\quad 22'-33'\,,\quad 44'$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$14'\,,\quad 1'4\,,\quad 23'\,,\quad 2'3\,,$$

comptée deux fois.

Remarque. – L'analyse développée nous montre qu'au *moyen de la dualité établie entre les points de F et les courbes C de Σ, au groupe* G_8'' *répond un groupe doué des mêmes propriétés.* On peut dire que G_8'' *est correlatif à lui-même.*

95. Nous allons enfin achever l'étude des groupes bidiédriques, en remarquant que *les groupes* G_8'' et G_8''' *conduisent au même type de surface hyperelliptique* (VII).

C'est ce qu'on peut établir tout naturellement en répétant par G_8''' l'analyse développeé par les autres groupes: mais on peut aussi arriver à la même conclusion par des considérations *à priori.*

Les quatre points unis

$$(11'),\quad (22'),\quad (33'),\quad (44')$$

communs aux transformations U_1, U_2, se distribuent en deux couples

$$(11'),\quad (22')-(33'),\quad (44')$$

ouissant des mêmes propriétés par rapport à chacune des transformations U_1, U_2.

En effet par rapport à U_1 chacun de ces couples peut se définir comme le couple des points *unis* communs à deux courbes unies, tandis qu'*aucun* des couples envisagés ne jouit pas de la même propriété par rapport à U_2.

Il s'ensuit que les transformations de 2de espèce déterminées par les couples

$$(11'),\quad (33') \qquad \text{et} \qquad (11'),\quad (44')$$

se comportent de la même façon par rapport à U_1, U_2, et par suite que les groupes G_8'', G_8''' ne sont pas essentiellement distincts.

96. En résumant on conclut que *sur la surface F il y a trois groupes bidiédriques birationnellement distincts qui se trouvent en isomorphisme oloédrique entre eux; ce sont les groupes* G_8, G_8', G_8''. *Le premier est caractérisé par la condition de laisser invariant un point de F, le second (correlatif à* G_8*) par la condition de laisser invariant une courbe C, le troisième (correlatif à lui-même) par la condition de ne laisser invariant aucun point ni aucune courbe C.*

Les trois types de surfaces hyperelliptiques correspondantes aux groupes G_8, G_8', G_8'' seront désignés respectivement par V, VI, VII.

97. *Genre des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII.* – La méthode suivie pour calculer le genre $p_a = p_g$ des surfaces hyperelliptiques répondant à des groupes cycliques G_4, G_6, s'étend aisément aux surfaces relatives à G_8, G_8', G_8''.

Examinons tout d'abord une surface hyperelliptique Φ image de l'involution I_8 engendrée sur F par G_8; et démontrons qu'on peut poser une correspondance birationnelle entre les points de Φ et les groupes d'une certaine involution d'ordre 2 existant sur la surface ψ, d'ordre 8, qui répond au groupe cyclique G_4 engendré par U_1.

Soient $P, P', P'', P''', P^{IV}, P^V, P^{VI}, P^{VII}$ les points d'un groupe de I_8: ces points s'obtiennent de P au moyen des transformations

$$(1) \qquad 1, U_1, U_2, U_1U_2, U_1^3, U_2^3, U_1U_2^3, U_1^2,$$

et par suite ils se distribuent en les quaternes

$$P, P', P^{IV}, P^{VII} \qquad \text{et} \qquad P^V, P''', P'', P^{VI}$$

engendrées par le groupe

$$1\ ,\ U_1\ ,\ U_1^2\ ,\ U_1^3,$$

c'est–à–dire qu'ils donnent deux groupes de l'involution I_4 engendrée par U_1. On passe de la première quaterne à la seconde au moyen de la transformation U_2^3.

Il s'ensuit que tout groupe de I_8 vient être représenté par un couple de points de la surface ψ image de I_4. On voit aisément que la transformation involutoire qu'on trouve ainsi entre les points de ψ, comme image de la transformation U_2^3, est une homographie. En effet en disant C, C', C'', C''', $\cdots$ $\cdots$, C^{VII} les courbes de Σ, obtenues de C au moyen des transformations (1), les courbes réductibles

$$C + C' + C^{IV} + C^{VII} \qquad \text{et} \qquad C^{V} + C''' + C'' + C^{VI},$$

correspondantes entre elles par rapport à U_3^2, sont homologues à deux sections hyperplanes de ψ dans la correspondance [1, 4] qu'on a entre ψ et F. On en tire que la transformation involutoire appartenant à ψ change toute section hyperplane en une section hyperplane, et par suite qu'elle est une homographie.

Les tableaux relatifs aux transformations U_1, U_2 permettent très aisément de trouver les permutations produites par cette homographie entre les éléments de la configuration caractéristique de la surface ψ.

On arrive au résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V répondant au groupe bi–diédrique G_8, est birationnellement identique à une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface hyperelliptique ψ_8 d'ordre 8, du type III.

L'homographie ω engendrant I_2 laisse invariant les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8, change par couples les 4 points coniques de rang 1 et les 4 coniques de la surface, change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ *huit coïncidences* distinctes au point de vue des transformations birationnelles. En effet comme il n'y a pas des coniques invariant par rapport à l'homographie ω, et comme les deux coniques issues par un point biplanaire P de ψ ne touchent pas le même plan tangent, l'homographie I_2 changera entre eux les plans tangents en P, et par suite n'aura pas sur ces plans d'autre droite unie que leur intersection p. Le point double conique P_1 infiniment voisin à P, suivant la direction p, reste invariant par rapport à I_2, et dans le domaine de P_1 on aura une involution douée de 2 coïncidences. On trouve ainsi *deux* coïncidences dans le domaine (d'ordre 2) de tout point biplanaire, et par suite, en total huit coïncidences.

D'une façon semblable on arrive aux résultats analogues se rapportant aux groupes G_8', G_8'':

Toute surface hyperelliptique du type VI répondant au groupe bi–diédrique G_8' peut se transformer birationnellement en une involution I_2 engendrée par une homographie ω' qui change en elle–même une surface ψ_8 du type III.

L'homographie ω' change par couples les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8, laisse invariant les 4 points coniques de la surface, et change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences: en chacun des 4 points doubles de rang 1 tombent 2 coïncidences, c'est-à-dire les points unis de l'involution engendrée par I_2 dans le domaine du point double.

Toute surface hyperelliptique du type VII (répondant au groupe G_8'') est identique à une involution I_2 engendreé par une homographie ω'', qui change en elle-même la surface ψ_8 envisagée ci-dessus.

L'homographie ω'':

fait correspondre par couples les 4 points biplanaires,

laisse invariant 2 points coniques de rang 1, changeant entre eux les deux restant,

laisse invariant les 2 points coniques de rang 2.

fait correspondre par couples les 4 coniques,

laisse invariant 2 quartiques de rang 1, changeant entre elles les deux restant,

laisse invariant les 2 quartiques de rang 2.

On a encore huit coïncidences de I_2, tombant à couples en chacun des 4 points doubles coniques.

Il s'ensuit que *le genre $p_a (= p_g)$ de toute surface répondant à un groupe bi-diedrique est égal à 1* (n. 86).

98. *Les modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques* V, VI, VII. Pour obtenir un modèle projectif simple de la classe des surfaces répondant à un des groupes bi-diédriques, on n'a qu'à suivre le procédé développé plusieurs fois.

On commence à considérer le système linéaire

$$|D| = |C + C' + \cdots + C^{VII}|$$

qui appartient à l'involution engendrée sur F par le groupe envisagé, $C', C'', \cdots, C^{VII}$ étant les courbes correspondantes à une C au moyen des transformations du groupe.

La correspondance [8, 1] entre la surface de Jacobi F et une surface image de l'involution, transforme le système $|D|$ en un système linéaire simple $|\Gamma|$, ayant le degré 16, le genre 9 et la dimension 9 (55), de sorte que l'on peut prendre comme modèle de la surface image de l'involution, une surface Φ_{16} d'ordre 16 de l'espace S_9.

(55) Le calcul de la dimension se fait tout de suite car on connait le genre de la surface renfermant $|\Gamma|$.

Les points singuliers de Φ correspondent aux groupes de l'involution doués d'éléments multiples: l'analyse de la singularité en chacun de ces points vient être facilitée, car on sait *à priori* qu'il s'agit de points doubles (n. 88). A la configuration des points doubles vient liée la cfg. des courbes rationnelles répondant aux courbes C qui admettent des transformations du groupe.

Nous omettrons l'étude de ces points et de ces courbes, car à présent le lecteur est en mesure de développer cet étude par lui même; et nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants:

Toute surface hyperelliptique du type V peut être transformée birationnellement en un surface Φ_{16}, d'ordre 16, appartenant à l'espace S_9. Cette surface possède 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables. Parmi les points doubles 4 sont des points uniplanaires ordinaires, et les restants sont des points coniques; parmi les courbes rationnelles 6 sont des quartiques et une est une courbe d'ordre 8. La configuration de ces points et de ces courbes jouit des propriétés suivantes:

Par toute point uniplanaire passent simplement 3 quartiques, dont chacune renferme aussi un des 3 points doubles infiniment voisins au point uniplanaire.

Par tout point conique passent 4 quartiques et la courbe d'huitième ordre: les premières y passent simplement, la seconde doublement.

Toute quartique renferme deux points uniplanaires et deux points coniques, tandis ques la courbe d'huitième ordre renferme (doublement) les 3 points coniques.

Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VI, est une surface Φ'_{16}, d'ordre 16, de l'espace S_9, qui renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles. Parmi les points doubles, 6 sont des points biplanaires dont chacun possède un point double infiniment voisin, et le restant est un point double conique; parmi les courbes, 4 sont des coniques et 3 des courbes d'ordre 8. La configuration relative est caracterisée par les propriétés suivantes:

Par un point biplanaire passent (simplement) deux coniques et deux courbes d'8^{me} ordre.

Par le point conique passent doublement les 3 courbes d'8^{me} ordre.

Une conique renferme 3 points biplanaires, tandis qu'une courbe d'8^{me} ordre renferme (simplement) 4 points biplanaires et (doublement) le point conique.

Toute surface hyperelliptique de rang 8 et du type VII peut être transformée en une surface Φ''_{16} d'ordre 16, appartenant à l'éspace S_9 et renfermant 7 points doubles et 7 courbes rationnelles.

Parmi les points doubles, 6 sont des points biplanaires (possédant un point double dans leurs domaines de 1^r ordre) et le restant est un point conique.

Parmi les courbes rationnelles, 6 sont des quatriques et la courbe restant est ordre 8.

La configuration appartenant à Φ''_{16} *est caractérisée par les propriétés suivantes*:

Par toute point biplanaire passent (simplement) 3 quartiques et la courbe d'ordre 8.

Par le point conique passent (simplement) les 6 quartiques.

Toute quartique renferme 3 points biplanaires et le point conique.

La courbe d'ordre 8 renferme les 6 points biplanaires.

En chacun des cas V, VI, VII, il y a des hyperplans tangents à notre surface-modèle (Φ, Φ', ou Φ''). Et précisément il y a un hyperplan ayant un *contact d'ordre* $(16|m) - 1$ *le long de toute courbe rationnelle d'ordre* m $(= 2, 4, 8)$.

99. *Les surfaces* Φ_{16}, Φ'_{16}, Φ''_{16}, *caractérisée par leurs configuration de points et de hyperplans singuliers*. En nous rapportant d'abord au cas V, nous allons prouver que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ_{16}.

Pour le prouver nous procédons par la même méthode que nous avons expliquée en des cas analogues.

Nous supposons donnée la surface Φ_{16}. Parmi ses 6 quartiques on peut en choisir deux qui n'aient pas commun un point uniplanaire de la surface (ce choix peut être fait de trois façons différentes, correspondantes aux trois partages des quatre points uniplanaires en deux couples). On peut supposer que les hyperplans renfermant ces deux quartiques soient

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0.$$

Etant $(x_1, \cdots, x_{10})$ un point mobile de S_9, posons

$$y_1 = x_1, \cdots, y_{10} = x_{10}, \qquad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ces équations représentent une surface décrite par le point (y), surface qui est birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

Ici encore nous nous épargnerons de développer la démonstration dans ses détails. Il suffira de remarquer que la surface double que nous avons définie par les équations précédentes n'a pas de points de diramation dans le domaine d'un point conique de Φ_{16}, tandis qu'il y a diramation en tout point infiniment voisin à un point uniplanaire, sauf en deux points de ce domaine. On en déduit qu'aux 3 points coniques de Φ_{16} correspondent 6 points coniques, aux 4 points uniplanaires correspondent 4 points biplanaires etc. de la surface normale d'ordre 32 en S_{14}, qui a pour projection la surface (y).

D'une façon analogue on aura que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ'_{16}.

Etant donnée une telle Φ'_{16} considérons deux hyperplans tangents à Φ'_{16} suivant des quartiques qui se coupent en deux points biplanaires et en le point conique; soient

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0$$

les équations de ces hyperplans. Posons

$$y_1 = x_1\,, \cdots, y_{10} = x_{10}\,, \qquad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}\,.$$

La surface ainsi définie résultera birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

De même que dans les cas précédents *la configuration de points et d'espaces que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique* Φ''_{16}.

En effet étant donnée une Φ''_{16} possédant une telle configuration, on obtiendra une surface hyperelliptique du type III (identique à notre Φ_8), en posant

$$y_1 = x_1 \cdots y_{10} = x_{10}\,, \qquad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}\,,$$

où l'on suppose que

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0,$$

soient deux parmi les trois hyperplans tangents à Φ''_{16} suivant des courbes d'ordre 8.

XII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 12 (type VIII).

100. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes* G_{12}. Envisageons la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x^6 - 1,$$

qui admet le groupe des 12 transformations birationnelles

$$(x' = \varepsilon x\,,\ y' = \pm y) \qquad \left(x' = \frac{1}{x}\,,\ y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \qquad \left(x' = \frac{\varepsilon}{x}\,,\ y' = \frac{\pm \varepsilon}{x^3}\right)$$

$$\left(x' = \frac{\varepsilon^2}{x}\,,\ y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \qquad (x' = \varepsilon^2 x\,,\ y' = \pm y) \qquad (x' = x\,,\ y' = \pm y)$$

où:

$$\varepsilon = e^{(2\pi i)/3};$$

et soit G_{12} le groupe de F répondant au groupe de f au moyen de la correspondance point par couple existant entre la courbe et la surface.

En représentant respectivement par T, U les transformations hermitiennes de F correspondantes aux transformations

$$(x' = \varepsilon x\,,\ y' = y)\,, \qquad \left(x' = \frac{1}{x}\,,\ y' = \frac{iy}{x^3}\right),$$

le groupe G_{12} renfermera les substitutions $T, U, K, TK, UK, UT, UTK, T^2, T^2K, UT^2, UT^2K$, 1, où l'on a posé

$$K \equiv U^2.$$

On remarquera que U change T en T^2, et que parmi les 11 transformations non identiques de G_{12} une, K, est cyclique de 2d ordre; deux T, T^2, sont cycliques d'ordre 3; six $U, UK, UT, UTK, UT^2, UT^2K$, d'ordre 4; et les deux restant, TK, T^2K d'ordre 6.

Nous désignons encore par Σ le système complet renfermant totalement les courbes C de F qui répondent aux séries des couples ayant un point fixe.

Il s'agit tout d'abord de chercher les points et les courbes C qui restent invariant par rapport aux transformations du groupe et d'établir les relations entre ces éléments invariants.

Ainsi que nous l'avons remarqué, les transformations du groupe G_{12} de F auront un même point uni, qui correspond à la série g_2^1, invariant par rapport aux transformations de f.

Pour désigner les points et les courbes invariant de la transformation K, nous adopterons le symbolisme de M. Humbert, en construisant les symboles au moyen des deux séries de nombres

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \qquad \text{et} \qquad a', \quad b', \quad c', \quad d';$$

tandis que les éléments invariants de T seront désignés par le symbolisme introduit au Chapitre VIII, en combinant les deux séries

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \qquad \text{et} \qquad \alpha', \quad \beta', \quad \gamma'.$$

On pourra toujours supposer qu'au point uni commun répondent les symboles

$$(aa') \qquad \text{et} \qquad (a\alpha'),$$

de sorte que les six courbes invariants de K qui passent par (aa') seront

$$ab', \quad ac', \quad ad', \quad a'b, \quad a'c, \quad a'd,$$

tandis que les quatre courbes invariants de T par le même point seront

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

Cherçons quelles sont les permutations produites par U entre les points et les courbes invariant de T; et les permutations produites par T, U entre les éléments invariant de K.

Comme U change entre eux les deux points unis de T appartenant au domaine de $(a\alpha')$, le couple des courbes $\alpha\beta', \alpha\gamma'$ sera changé en le couple $\alpha'\beta, \alpha'\gamma$: soit par exemple $\alpha'\beta$ la transformée de $\alpha\beta'$, et $\alpha'\gamma$ la transformée de $\alpha\gamma'$. En tenant compte du fait que la transformation de 1re espèce $K \equiv U^2$ change entre elles les $\alpha\beta', \alpha\gamma'$ et les $\alpha'\beta, \alpha'\gamma$,on déduit que

$$\alpha\beta', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\gamma$$

est un cycle de 4me ordre par rapport à U.

Il s'ensuit que le point $(\beta\beta')$ commun aux courbes $\alpha'\beta$, $\alpha\beta'$ hors de $(\alpha\alpha')$, vient changé en le point $(\beta\gamma')$ commun aux courbes homologues $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$ et analoguement que $(\beta\gamma')$ vient changé en $(\gamma\gamma')$ et ce point en $(\beta'\gamma)$; de sorte que l'on a le cycle d'ordre 4

$$(\beta\beta') \quad (\beta\gamma') \quad (\gamma\gamma') \quad (\beta'\gamma).$$

La U change le point $(\alpha\gamma')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de la courbe $\alpha\beta'$, en le point $(\alpha'\gamma)$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ sur la courbe homologue $\alpha'\beta$; et analoguement $(\alpha'\gamma)$ en $(\alpha\beta')$, et $(\alpha\beta')$ en $(\alpha'\beta)$, de sorte qu'on a le cycle

$$(\alpha\gamma') \quad (\alpha'\gamma) \quad (\alpha\beta') \quad (\alpha'\beta).$$

Comme ces 4 points appartiennent à la courbe $\alpha\alpha'$, on en tire que cette courbe est unie par rapport à U. On déduit de plus que les 4 courbes restant forment le cycle

$$\beta\beta', \quad \beta\gamma', \quad \gamma\gamma', \quad \beta'\gamma,$$

car à la courbe $\beta\beta'$ renfermant les points $(\beta\alpha')(\beta\gamma')(\beta'\alpha)(\beta'\gamma)$, répond la courbe $\beta'\gamma$ renfermant les points correspondants, etc.

En résumant on a par rapport à U le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 4^{me} ordre
$(\alpha\alpha')$	$(\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma) - (\beta\beta')(\beta\gamma')(\gamma\gamma')(\beta'\gamma).$

Courbes

unies	cycles de 4^{me} ordre
$\alpha\alpha'$	$\alpha\beta', \alpha'\beta, \alpha\gamma', \alpha'\gamma - \beta\beta', \beta\gamma', \gamma\gamma', \beta'\gamma.$

Le tableau qui sert à indiquer les permutations produites par T entre les éléments invariant de K, se construit aisément en supposant que les ternes

$$ab', \quad ac', \quad ad' \qquad \text{et} \qquad a'b, \quad a'c, \quad a'd$$

donnent deux cycles de T. On n'a ici qu'à rappeler le résultat obtenu au n. 90:

Points

unis	cycles de 3^{me} ordre
$(aa') = (\alpha\alpha')$	$(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad') - (bc')(cd')(db') - (cb')(dc')(bd') - (ca')(da')(ba')$

Courbes

unies	cycles de 3^{me} ordre
$aa' = \alpha\alpha'$	$bb', cc', dd' - ab', ac', ad' - bc', cd', db' - cb', dc', bd' - ca', da', ba'.$

On reconnaît aisément que parmi les 6 courbes invariant par rapport à K, qui passent par $(aa)'$, les ab', $a'b$ sont aussi unies par rapport à U, et que les

$$ac', \quad ad' - a'c, \quad a'd$$

forment deux cycles de 2d ordre; ceci posé on aura par rapport à U le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 2de ordre
(aa'), (bb'), (ab'), $(a'b)$	$(ac')(ad') - (a'c)(a'd) - (b'c)(b'd) -$ $(bc')(bd') - (c'd)(cd') - (cc')(dd')$

Courbes

unies	cycles de 2de ordre
$aa', bb', ab', a'b$	$ac', ad' - a'c, a'd - b'c, b'd - bc', bd' - c'd$ $cd' - cc', dd'.$

En appliquant les opérations du groupe G_{12} à tout point et à toute courbe appartenant aux configurations relatives à T et à K, on conclut que:

L'involution I_{12} engendrée sur F par G_{12} possède:

1) Un groupe formé du point 12–ple $(aa') = (aa')$;

2) Trois groupes formés des ternes

$$(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad')$$
$$(a'b)(a'c)(a'd)$$

comptés 4 fois;

3) Deux groupes formés des quaternes

$$(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\beta\gamma')(\beta'\gamma) -$$
$$- (\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma)$$

comptés 3 fois.

4) Un groupe formé par les 6 points doubles:

$$(bc')(cd')(b'd)(bd')(b'c)(dc')$$

L'involution J_{12} engendrée par G_{12} entre les courbes de Σ possède:

1) Un groupe formé par la courbe $aa' = aa'$ comptée 12 fois.

2) Trois groupes formés d'éléments 4–ples

$$bb', cc', dd' - ab', ac', ad' -$$
$$- a'b, a'c, a'd.$$

3) Deux groupes formés d'éléments 3–ples:

$$\beta\beta', \gamma\gamma', \beta\gamma', \beta'\gamma -$$
$$- \alpha\beta', \alpha'\beta, \alpha\gamma', \alpha'\gamma.$$

4) Un groupe formé d'éléments doubles:

$$bc', cd', b'd, bd', b'c, dc'.$$

101. *Le genre de la surface hyperelliptique du type* VIII. Remarquons que les transformés d'un point de F, au moyen des transformations du groupe G_{12}, se partagent en deux groupes homologues par rapport à U, grou-

pes qui sont engendrés par la transformation TK, d'ordre 6; on en déduit que toute surface hyperelliptique Φ, image de l'involution I_{12}, pourra être transformée birationnellement en une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface ψ_{12} du type IV. On peut établir, comme avant, que la I_2 vient engendrée sur ψ par une homographie involutoire, etc., etc., de sorte que l'on obtient le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique répondant au groupe G_{12}, c'est-à-dire toute surface hyperelliptique du type VIII, est birationnellement identique à une involution I_2 engendrée sur une surface ψ_{12} d'ordre 12, du type IV, par une homographie involutoire.

Cette homographie:	
Laisse invariant le point biplanaire singulier, les deux points coniques de rang 1 et un point conique de rang 2 appartenant à la surface;	Laisse invariant la conique, les deux sextiques de rang 1 et une sextique de rang 2 appartenant à la surface;
change entre eux les deux points biplanaires de rang 1, les deux points biplanaires de rang 2 et les deux points coniques restant de rang 2.	change entre elles les deux quartiques de rang 1, les deux quartiques de rang 2 et les deux sextiques restant de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences distinctes au point de vue des transformations birationnelles: deux coïncidences tombent dans le domaine du *dernier* point double conique infiniment voisin au point biplanaire singulier, et deux coïncidences dans le domaine de tout point double conique invariant.

Il s'ensuit (n. 87) que « le genre $p_a = p_g$ de toute surface hyperelliptique VIII est égal à 1 ».

102. *Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VIII.* La surface Φ_{24} dont les sections hyperplanes répondent aux courbes du système linéaire

$$|D| = |C + C' + \cdots + C^{(XI)}|$$

tracé sur F, est d'ordre 24.

Comme la Φ_{24} a le genre $p = 1$ et ses sections hyperplanes sont des courbes de genre 13, la dimension de l'espace renfermant Φ_{24} résulte égale à 13.

Aux 7 groupes de I_{12} doués d'éléments multiples répondent 7 points doubles de Φ, et aux 7 groupes singuliers de I_{12} répondent 7 courbes rationnelles.

L'étude des points doubles et de la configuration formée par ces points et par les courbes rationnelles se fait en suivant la marche plusieurs fois indiquée.

On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type VIII peut être transformée en une surface Φ_{24}, *d'ordre* 24, *appartenant à l'espace* S_{13}. *Cette surface renferme* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire*:

Un point uniplanaire singulier, possédant trois points doubles successifs (dans les domaines de 1^{r}, 2de, 3^{me} ordre); trois points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double infiniment voisin; deux points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'ordre 2, trois courbes d'ordre 6, deux d'ordre 8 et un d'ordre 12.

Par rapport aux propriétés de la configuration appartenant à Φ_{24}, on a deux points biplanaires singuliers de rang 1 et un de rang 2; un point biplanaire ordinaire de rang 1 et un de rang 2; deux sextiques de rang 1 et une de rang 2; une courbe d'ordre 8 et rang 1, une de rang 2.

Par le point uniplanaire passent simplement les deux sextiques de rang 1 et la courbe d'ordre 8 et rang 1 avec un point de rebroussement.

Par un point biplanaire singulier de rang 1 passent la conique, une sextique de rang 1, la sextique de rang 2, et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire singulier de rang 2 passent les deux sextiques de rang 1 et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent la conique et les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 2, y passe doublement.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 1 y passe doublement.

Par le point conique passent les trois sextiques et la courbe d'ordre 12. La sextique de rang 2 et la courbe d'ordre 12 y passent doublement.

La conique renferme les deux points biplanaires singuliers de rang 1 et le point biplanaire ordinaire de rang 1.

Une sextique de rang 1 renferme, le point uniplanaire, un point biplanaire singulier de rang 1, le point biplanaire singulier de rang 2 et le point conique.

La sextique de rang 2 renferme les deux points biplanaires singuliers de rang 1 et le point conique.

La courbe d'ordre 8 et de rang 1 renferme le point uniplanaire et les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 8 et de rang 2 renferme les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 12 renferme les trois points biplanaires singuliers et le point conique.

Ajoutons que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers qui touchent Φ_{24}, suivant ses courbes rationnelles, joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface hyperellitique.

Pour le prouver on se donnera une surface possédant une telle configuration de points et de hyperplans singuliers, et on tâchera de construire une surface ψ représentée sur la Φ_{24} comptée deux fois, qui appartienne au type IV.

On devra obtenir sur ψ une involution I_2, qui agira d'une façon connue sur les éléments de la configuration caractéristique de ψ (n. 101).

En s'aidant par cette connaissance on trouvera qu'on peut obtenir une surface ψ transformée de la Φ_{12} du type IV, en procédant de la façon suivante.

Soient

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 0$$

les hyperplans tangents à Φ_{24} suivant les deux sextiques de rang 1, et posons

$$y_1 = x_1 , \cdots , y_{14} = x_{14} , \qquad y_{15} = \sqrt{x_1 x_2} .$$

La surface définie par ces formules résultera birationnellement identique à la Φ_{12} (type IV).

C'est ce qu'on montrerait par une analyse détaillée dont nous croyons de pouvoir nous passer, attendu qu'elle ne présenterait aucune nouveauté.

XIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 24 (types IX, X, XI).

103. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-tétraédriques.* On a ici à considérer la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x (x^4 - 1) ,$$

qui admet le groupe bi-tétraédrique:

$$(x' = -x , y' = \pm iy) \quad \left(x' = \frac{1}{x} , y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \quad \left(x' = -\frac{1}{x} , y' = \pm \frac{y}{x^3}\right)$$

$$(x' = x , y' = \pm y) \quad \left(x' = \frac{i-x}{i+x} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3}\right) \quad \left(x' = \frac{x+i}{x-i} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(x-i)^3}\right)$$

$$\left(x' = \frac{x-i}{x+i} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(x-i)^3}\right) \quad \left(x' = \frac{i+x}{i-x} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(i-x)^3}\right)$$

$$\left(x' = i\frac{1+x}{i-x} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(1-x)^3}\right) \quad \left(x' = i\frac{x+1}{x-1} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(x-1)^3}\right)$$

$$\left(x' = i\frac{1-x}{1+x} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(1+x)^3}\right) \quad \left(x' = i\frac{x-1}{x+1} , y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+1)^3}\right).$$

Ce groupe est engendré par les 3 substitutions

$$(1) \qquad (x' = -x\,,\ y' = iy) \quad \left(x' = \frac{1}{x}\,,\ y' = \frac{iy}{x^3}\right) \quad \left(x' = \frac{i-x}{i+x}\,,\ y' = \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3}\right),$$

dont les deux premières sont cycliques d'ordre 4 et la troisième d'ordre 3 ou 6, suivant que l'on prend

$$\sqrt{2i} = -(i+1) \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{2i} = i+1.$$

Nous désignerons par G_{24} le groupe de F qui répond au groupe envisagé de f au moyen de la correspondance point par couple entre la courbe et la surface. On peut prendre comme substitutions génératrices de G_{24} les transformations hermitiennes U_1, U_2, S_1 correspondantes aux transformations (1), où l'on a pris $\sqrt{2i} = -(i+1)$.

Le groupe G_{24} renferme le sous-groupe bi-diédrique G_8 engendré par U_1, U_2: hors des substitutions de ce sous-groupe on a en G_{24} 8 transformations cycliques d'ordre 3 $S_1 S_2 S_3 S_4 S_1^2 S_2^2 S_3^2 S_4^2$, et 8 cycliques d'ordre 6 qu'on obtient de ces dernières en les multipliant par la transformation de 1re espèce:

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_2^2.$$

Les transformations de G_{24} ont un point uni commun répondant aux couples de la g_2^1.

En désignant les éléments unis de K (points et courbes C du système Σ) par les symboles obtenus en combinant les nombres des deux séries

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4 \qquad \text{et} \qquad 1'\,,\ 2'\,,\ 3'\,,\ 4'\,,$$

et les éléments unis de S_i par les symboles obtenus en combinant les caractères des deux séries

$$a_i\,,\ b_i\,,\ c_i\,, \qquad \text{et} \qquad a_i'\,,\ b_i'\,,\ c_i'\,,$$

on peut toujours supposer qu'au point uni commun appartiennent les symboles:

$$(11')\,,\ (a_1 a_1')\,,\ (a_2 a_2')\,,\ (a_3 a_3')\,,\ (a_4 a_4')\,.$$

Il y a sur F 48 points qui restent invariant par rapport à des transformations de G_{24}: c'est-à-dire le point uni commun, les 32 points unis appartenant ulteriéurement aux transformations $S_1 S_2 S_3 S_4$ et les 15 points unis appartenant ultérieurement à K. Les permutations produites par U_1, U_2 entre les points et les courbes unies de K sont données par les tableaux au n. 92: il s'agit donc d'établir quelles sont les permutations produites par S_1, entre les éléments unis de K, et par U_1, U_2 entre les éléments unis de $S_1 S_2 S_3 S_4$.

En faisant usage de considérations analogues à celles qu'on a exposées plusieurs fois dans l'analyse des types précédents, on arrive aisément aux tableaux cherchés que nous omettrons de transcrire ici.

La conclusion à laquelle on est amené par l'examen de ces tableaux est la suivante:

L'involution I_{24} engendrée par G_{24} entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

1) Un groupe formé par le point uni commun compté 24 fois.

2) Un groupe formé par les 12 points doubles:

$$(12')\,(1'2)\,(13')\,(1'3)\,(14')\,(1'4)\,(23')\,(2'3)\,(34')\,(3'4)\,(24')\,(2'4)\,.$$

3) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a_1\,b_1')\,(a_1\,c_1')\,(a_2\,b_2')\,(a_2\,c_2')\,(a_3\,b_3')\,(a_3\,c_3')\,(a_4\,b_4')\,(a_4\,c_4')\,.$$

4) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a_1'\,b_1)\,(a_1'\,c_1)\,(a_2'\,b_2)\,(a_2'\,c_2)\,(a_3'\,b_3)\,(a_3'\,c_3)\,(a_4'\,b_4)\,(a_4'\,c_4)\,.$$

5) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1\,b_1')\,(c_1\,c_1')\,(b_2\,b_2')\,(c_2\,c_2')\,(b_3\,b_3')\,(c_3\,c_3')\,(b_4\,b_4')\,(c_4\,c_4')\,.$$

6) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1\,c_1')\,(b_1'\,c_1)\,(b_2\,c_2')\,(b_2'\,c_2)\,(b_3\,c_3')\,(b_3'\,c_3)\,(b_4\,c_4')\,(b_4'\,c_4)\,.$$

7) Un groupe formé par les 3 points 8-ples:

$$(22')\quad(33')\quad(44')\,.$$

L'involution J_{24} engendrée par G_{24} entre les courbes C du système Σ, possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

1) Un groupe formé par les 4 courbes 6-ples:

$$11' \equiv a_1\,a_1'\,,\ 22' \equiv a_2\,a_2'\,,\ 33' \equiv a_3\,a_3'\,,\ 44' \equiv a_4\,a_4'\,.$$

2) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$12',\ 1'2\,,\ 13',\ 1'3\,,\ 14',\ 1'4\,.$$

3) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$23',\ 2'3\,,\ 24',\ 2'4\,,\ 34',\ 3'4\,.$$

4) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a_1\,b_1'\,,\ a_1\,c_1'\,,\ a_2\,b_2'\,,\ a_2\,c_2'\,,\ a_3\,b_3'\,,\ a_3\,c_3'\,,\ a_4\,b_4'\,,\ a_4\,c_4'\,.$$

5) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a_1'\,b_1\,,\ a_1'\,c_1\,,\ a_2'\,b_2\,,\ a_2'\,c_2\,,\ a_3'\,b_3\,,\ a_3'\,c_3\,,\ a_4'\,b_4\,,\ a_4'\,c_4\,.$$

6) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1\,b_1'\,,\ c_1\,c_1'\,,\ b_2\,b_2'\,,\ c_2\,c_2'\,,\ b_3\,b_3'\,,\ c_3\,c_3'\,,\ b_4\,b_4'\,,\ c_4\,c_4'\,.$$

7) Un groupe formé par les 8 courbes 3–ples:

$$b_1\,c_1'\,,\ b_1'\,c_1\,,\ b_2\,c_2'\,,\ b_2'\,c_2\,,\ b_3\,c_3'\,,\ b_3'\,c_3\,,\ b_4\,c_4'\,,\ b_4'\,c_4\,.$$

Disons quelques mots du groupe G_{24}' qui renferme le sous–groupe bi–diédrique invariant G_8', engendré par les substitutions

$$U_1' \equiv U_1\,, \qquad U_2' \equiv U_2\,A\,,$$

A étant une convenable transformation de 2de espèce (n. 70).

Comme G_8' répond à G_8 au moyen de la dualité entre les points de F et les courbes C du système Σ, le groupe G_{24}' sera correlatif à G_{24}, et l'on pourra par conséquent obtenir les propriétés de la configuration relative à G_{24}' en changeant entre elles dans le dernier énoncé les involutions I_{24} et J_{24} et les symboles entre ( ) en symboles sans ( ), et réciproquement.

Considérons maintenant le groupe G_{24}'', correlatif à lui–même, qui renferme le sous–groupe invariant G_8'' (n. 70) engendré par

$$U_1'' \equiv U_1\,, \qquad U_2'' \equiv U_2\,B\,.$$

Comme

$$K'' \equiv U_2''^{\,2} \equiv U_1^2 \equiv K\,,$$

on trouve tout de suite les permutations produites par U_1'', U_2'' entre les éléments unis de K''. Pour construire les tableaux restant, on commencera à remarquer que le groupe G_{24}'' étant oloédriquement isomorphe à G_{24}, on doit trouver en G_{24}'' une substitution S_1'', répondant à S_1 et changeant U_1'' en U_2'', etc. etc.

En ce cas la conclusion relative à la configuration des éléments unis est la suivante:

L'involution I_{24}'' engendrée par G_{24}'' entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est–à–dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6–ples:

$$(14')\,(1'4)\,(23')\,(2'\,3) \equiv (a_1\,a_1')\,(a_2\,a_2')\,(a_3\,a_3')\,(a_4\,a_4')\,.$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4–ples

$$(11')\,(33')\,(12')\,(1'2)\,(13')\,(2'4) — (22')\,(44')\,(1'3)\,(24')\,(34')\,(3'4)\,.$$

Quatre groupes formés par 8 éléments 3–ples:

$$(a_1\,b_1')\,(a_2\,b_2')\,(a_3\,b_3')\,(a_4\,b_4')\,(a_1\,c_1')\,(a_2\,c_2')\,(a_3\,c_3')\,(a_4\,c_4')\,,$$

$$(a_1'\,b_1)\,(a_2'\,b_2)\,(a_3'\,b_3)\,(a_4'\,b_4)\,(a_1'\,c_1)\,(a_2'\,c_2)\,(a_3'\,c_3)\,(a_4'\,c_4)\,,$$

$$(b_1\,b_1')\,(b_2\,b_2')\,(b_3\,b_3')\,(b_4\,b_4')\,(c_1\,c_1')\,(c_2\,c_2')\,(c_3\,c_3')\,(c_4\,c_4')\,,$$

$$(b_1\,c_1')\,(b_2\,c_2')\,(b_3\,c_3')\,(b_4\,c_4')\,(b_1'\,c_1)\,(b_2'\,c_2)\,(b_3'\,c_3)\,(b_4'\,c_4)\,.$$

L'involution J''_{24} engendrée par G''_{24} entre les courbes C du système Σ, renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est–à–dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6–ples:

$$14', 1'4, 23', 2'3 \equiv a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3, a_4 a'_4.$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4–ples:

$$11', 22', 12', 3'4, 13', 1'3 — 33', 44', 1'2, 34', 24', 2'4.$$

Quatre groupes formés par 8 éléments triples. Ces groupes ont les mêmes symboles des 4 groupes correspondant de I''_{24}.

Dans la suite nous désignerons respectivement par IX, X, XI les classes de surfaces hyperelliptiques correspondantes aux groupes $G_{24}, G'_{24}, G''_{24}$.

104. *Modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques* IX, X, XI. – Toute surface hyperelliptique Φ, image de l'involution I_{24}, peut aussi représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ, d'ordre 16, du type V. En effet les points d'un groupe de I_{24} se partagent en trois groupes engendrés par les transformations du sous–groupe bidiédrique G_8 renfermé en G_{24}. On passe d'un des trois groupes aux deux restant au moyen des transformations S_1, S_1^2, de sorte que tout groupe de I_{24} vient être représenté par un groupe de trois points de ψ, formant un cycle de l'homographie ω, périodique d'ordre 3, image de S_1.

On voit très aisément quelles sont les permutations produites entre les points doubles et les courbes rationnelles de ψ par l'homographie ω, car il suffit de chercher les permutations produites par S_1 entre les groupes singuliers des involutions I_8 et J_8 engendrées sur F et sur le système Σ, par le sous–groupe G_8.

On remarquera que la transformation S_1 laisse invariant quatre groupes de I_8 renfermant 8 points distincts: c'est–à–dire les groupes qui appartiennent aussi à I_{24}, lorsque on compte trois fois chacun de leurs points; de sorte que la ω laissera aussi invariant quatre points simples de ψ. On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique Φ répondant au groupe bi–tétraédrique G_{24} peut représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ_{16} du type V: cette involution étant engendrée par une homographie ω périodique d'ordre 3, qui change en elle–même ψ. L'homographie ω change en lui–même un point uniplanaire de ψ et distribue les trois uniplanaires restant, ainsi que les trois points coniques de ψ, en deux cycles; elle laisse invariant la courbe d'huitième ordre et distribue en deux cycles les six quartiques tracées sur ψ. Hors des points doubles il y a encore sur ψ quatre points unis de ω.

Au point de vue des transformations birationnelles on a sur ψ six coïncidences, car dans le domaine du point uniplanaire invariant P, il existe deux points unis simples, qui sont les coïncidences de la correspondance projective

(dont un cycle est formé par les trois points doubles infiniment voisins à P) existant dans le domaine de P.

En connaissant le nombre des coïncidences de I_3 on pourrait calculer le genre p_a de la surface image de I_3, et l'on trouverait $p_a = 1$.

Cette conclusion s'accorde avec la propriété, dont jouit un modèle convenable de la surface Φ, de ne posséder que des points doubles abaissant d'une unité le genre des sections hyperplanes qui les renferment. On peut établir ce résultat directement de la façon suivante.

Soit, comme d'habitude,

$$|D| = |C + C' + \cdots + C^{(23)}|$$

le système linéaire de F qui renferme toute courbe C et ses transformées par rapport aux transformations de G_{24}. Désignons encore par Φ ou par Φ_{48} la surface d'ordre 48, dont les sections hyperplanes répondent aux courbes D. L'espace renfermant Φ aura la dimension $r = 25$; cette valeur étant la seule possible lorsque le genre p_a de Φ est égal à 1. En vertu de la correspondance [1, 3] entre les surfaces Φ et ψ, aux sections hyperplanes Γ de Φ répondent sur ψ les courbes d'un système lineaire $|\Delta|$ renfermant les courbes réductibles formées de toute section hyperplane de ψ et de ses transformées par rapport à ω , ω^2.

Les points singuliers de Φ répondent:

1) Au point uniplanaire invariant P.

2) Au cycle formé par les trois points uniplanaires restant.

3) Au cycle formé par les trois points coniques.

4) A chacun des 4 points unis simples de la surface ψ.

On voit aisément qu'au cycle 2) répond un point uniplanaire *ordinaire* de Φ, car le domaine de ce point vient correspondre *biunivoquement* au domaine d'un quelconque des trois points uniplanaires ordinaires qui lui sont homologues. Et d'une façon analogue on conclut qu'au cycle 3) répond un point double conique de Φ.

Comme la ω établit entre les points appartenant au domaine d'un point uni simple Q, une homographie cyclique d'ordre trois ayant deux points unis, au point Q répondra sur Φ un point biplanaire ordinaire: les deux domaines de ce point répondant aux deux points unis susdits, et le domaine du point simple infiniment voisin suivant la direction de la droite commune aux deux plans tangents, répondant aux cycles de ω infiniment voisins à Q.

Il s'agit enfin d'étudier le point P' de Φ qui répond au point uniplanaire P de ψ.

On voit par des considérations désormais habituelles qu'aux sections hyperplanes issues par P' répondent sur ψ des courbes Δ ayant en P un point triple dont les trois branches renferment les trois points doubles de ψ infiniment voisins à P. On en tire tout de suite que les sections hyperplanes susdites ont en P' un point de rebroussement (ordinaire) de sorte que le point P' est un point uniplanaire (non tacnodale). On peut ainsi poursuivre

l'analyse du point singulier P'; mais ce qu'on a établi suffit pour affirmer que « la surface n'a que des points doubles abaissant d'une seule unité le genre des sections hyperplanes issues arbitrairement par un de ces points ».

Par la même marche plusieurs fois indiquée, on arrive à compléter l'étude de la configuration des points doubles et des courbes rationnelles existant sur Φ; de sorte que l'on peut enoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 correspondant à un groupe G_{24} *(type IX) peut être transformée birationnellement en une surface* Φ_{48}, *d'ordre 48, appartenant à l'espace* S_{23}. *Cette surface renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire*:

Un point uniplanaire singulier, un point uniplanaire ordinaire, quatre points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'huitième ordre, deux courbes de 12^{me} ordre, quatre de 16^{me} ordre.

La surface Φ_{48} renferme de plus trois points doubles infiniment voisins à chacun des deux points uniplanaires: ces points doubles appartenant au domaine de 1^{r} ordre ou aux domaines successifs de 1^{r}, 2^{d}, 3^{me} ordre, suivant qu'il s'agit du point uniplanaire ordinaire ou du point singulier.

Par rapport aux propriétés de la configuration existant sur Φ_{48}, on a deux points biplanaires de rang 1 et deux de rang 2; une courbe de 12^{me} ordre et rang 1, une courbe de 12^{me} ordre et rang 2, deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1 et deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point uniplanaire singulier passent la courbe de 12^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2. Chacune de ces courbes passe par le point en question avec un rebroussement.

Par le point uniplanaire ordinaire passent les deux courbes de 12^{me} ordre: la courbe de rang 1 y passe simplement et la courbe de rang 2 doublement.

Par un point biplanaire de rang 1 passent simplement la courbe d'huitième ordre, une courbe de 16^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent simplement les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1, doublement une courbe de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point conique passent doublement la courbe d'8^{me} ordre et les deux courbes de 12^{me} ordre.

La courbe d'ordre 8 renferme le point conique (point nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (points simples).

La courbe d'ordre 12 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (point de rebroussement), le point conique (point nodal), le point uniplanaire ordinaire (point simple).

La courbe d'ordre 12 et rang 2 renferme le point conique (nodal) et le point uniplanaire ordinaire (simple).

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (rebroussement), un point biplanaire de rang 1 et deux points biplanaires de rang 2 (simples).

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme un point biplanaire de rang 2 (nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (simples).

105. Pour les surfaces répondant aux groupes G'_{24}, G''_{24} on a des résultats analogues, que nous nous bornerons à énoncer:

Toute surface hyperelliptique répondant à G'_{24} est birationnellement identique à une involution I_3 engendrée par une homographie ω' de troisième ordre, qui change en elle-même une surface ψ', d'ordre 16, du type VI. La ω' change en lui même le point conique de ψ' et distribue en deux cycles les six points biplanaires; change en elle-même une des quatres coniques de ψ' et distribue en deux cycles les 3 coniques restant et les trois courbes d'ordre 8. Hors du point conique invariant il y a encore sur ψ' quatre points unis simples.

On a ainsi sur ψ' six coïncidences de I_3, dont deux tombent dans le domaine du point conique invariant.

Partant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 correspondant à G'_{24} (type X) *peut être ramenée à une surface Φ'_{48} d'ordre 48, appartenant à S_{25} et renfermant 7 points doubles biplanaires et 7 courbes rationnelles.*

Parmi les points doubles il y en a un qui possède un point double infiniment voisin dans chacun des domaines de 1^r et de 2^d ordre, deux possèdent un point double dans leurs domaines de 1^r ordre et les 4 restant sont des points biplanaires ordinaires. Parmi les courbes rationnelles une est d'ordre 2, une ordre 6, quatre d'ordre 16 et une d'ordre 24.

Par rapport aux propriétés de la configuration, on a un point biplanaire de rang 1 (c'est le premier point biplanaire singulier dont on a parlé ci-dessus), un point biplanaire singulier de rang 2 et un point de rang 3; deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2. Les courbes d'ordre 12 se distribuent en deux classes: deux de rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un *oscnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 2 passent simplement la conique et la courbe d'ordre 6 et doublement (avec un *tacnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 3 passent doublement la courbe d'ordre 6 (avec un *node*) et la courbe d'ordre 24 (avec un *tacnode*).

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la conique, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les deux courbes d'ordre 16 et rang 2.

Par le point ordinaire de rang 2 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un *node*) une courbe d'ordre 16 et rang 2.

La conique renferme le point singulier de rang 2 et les 2 points ordinaires de rang 1.

La courbe d'ordre 6 renferme les trois points singuliers de rang 2 et 3.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

La courbe d'ordre 24 renferme les 3 points singuliers.

106. *Toute surface hyperelliptique répondant à* G''_{24} *correspond aussi à une involution* I_3 *appartenant à une surface* ψ''_8 *du type VII; cette involution étant engendrée par une homographie cyclique* ω'' *d'ordre 3. – La* ω''

distribue en deux cycles les 6 points biplanaires de ψ'';
ramène en lui–même le point conique de la surface.

distribue en deux cyles les 6 quartiques de ψ'';
ramène en elle–même la courbe d'ordre 8 de la surface.

Il y a sur ψ'', *hors du point conique invariant, quatre points unis simples.*

Il s'ensuit encore que I_3 possède six coïncidences, dont deux tombent dans le domaine du point conique, et par suite que le genre p_a de toute surface répondant à G''_{24} est égal à 1.

Après cela on a que:

Toute surface hyperelliptique répondant à G''_{24} *(type XI) peut être transformée en une surface* Φ''_{48} *d'ordre 48, appartenant à l'espace* S_{25} *et renfermant 7 points doubles biplanaires et 7 courbes rationnelles remarquables. On a précisément*:

Un point biplanaire singulier possédant deux points doubles successifs, deux points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double successif, et quatre points biplanaires ordinaires.

Parmi les 7 courbes une est d'ordre 8, deux d'ordre 12, quatre d'ordre 16.

Par rapport aux propriétés de la configuration, le premier point biplanaire singulier, dont on parle ci–dessus, est de rang 1, et les deux points singuliers restant sont de rang 2. On a ensuite deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2, deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les 2 courbes d'ordre 12 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1.

Par un point singulier de rang 2 passent simplement une courbe d'ordre 8 et une d'ordre 12 et doublement la courbe restant d'ordre 12.

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la courbe d'ordre 8, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 2.

La courbe d'ordre 8 renferme les points singuliers de rang 2 et les points ordinaires de rang 1.

Une courbe d'ordre 12 renferme les 3 points singuliers.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Par un point ordinaire de rang 2 passent simplement les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement une courbe d'ordre 16 et rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

107. *Les surfaces hyperelliptiques* Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48} *caractérisées par la configuration de leurs points et de leurs hyperplans singuliers.* – Nous venons de construire trois surfaces–modèles représentant les types IX, X, XI; ce sont les surfaces Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}.

Chacune de celles–ci possède une configuration de points doubles et de hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles; plus précisement toute courbe rationnelle C d'ordre m (= 2, 6, 8, 12, 16, 24) appartient à un hyperplan qui a un contact d'ordre $(48/m) - 1$ le long de C.

Or il y a lieu de reconnaître que « si une surface d'ordre 48, à sections hyperplanes de genre 25 en S_{25}, possède des points et des hyperplans singuliers formant une configuration qui jouit des propriétés correspondantes à celles de Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}, cette surface est hyperelliptique et appartient respectivement aux types IX, X, XI ».

C'est ce que l'on exprime en disant que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers joue un rôle caractéristique par rapport aux surfaces hyperelliptiques Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}.

Rapportons nous d'abord à une surface Φ_{48}. Il s'agit de montrer que la configuration des points et des hyperplans singuliers permet de représenter paramétriquement les coordonnées des points de la surface par des fonctions hyperelliptiques Θ. Et cette question se ramène à la question analogue concernant une surface du type V, que l'on construit par le procédé suivant.

Soient

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0,$$

les deux hyperplans tangents suivant des courbes C_{16} d'ordre 16 et de rang 1. Posons

$$y_1 = x_1, \cdots, y_{26} = x_{26}, \qquad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}.$$

Par ces formules on définit une surface qui possède 3 points coniques correspondants au point conique de Φ_{48}, 3 points uniplanaires correspondants au point uniplanaire ordinaire de Φ_{48}, et un quatrième point uniplanaire (ordinaire) correspondant au point uniplanaire singulier de Φ_{48}; tout point biplanaire de rang 1, 2 de Φ_{48} résulte un point de diramation sur chaque nappe de Φ_{48} qui le contient, et correspond à un point simple de la surface qui est représentée sur la Φ_{48} comptée trois fois. Une analyse approfondie montre que cette surface est birationnellement identique à la Φ_{16} du type V.

On procédéra par la même méthode par rapport à une surface Φ'_{48}.

Analoguement à ce que nous avons fait pour le type IX, nous choisirons les deux hyperplans tangents suivant les courbes C_{16} de rang 1. Ces hyperplans étant représentés par

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 0 ,$$

nous poserons

$$y_1 = x_1 , \cdots , y_{26} = x_{26} , \qquad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2} .$$

Nous obtiendrons ainsi une surface renfermant 6 points biplanaires singuliers correspondants à ceux de rang 2, 3 de Φ'_{48} et un point conique correspondant au point singulier de rang 1 (qui est un point de diramation sur chaque nappe de Φ'_{48}). Cette surface résulte birationnellement identique à la Φ'_{16} (type VI).

Soit enfin une surface possédant la même configuration que la Φ''_{48} du type XI.

Choisissons de même les hyperplans

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 0 ,$$

tangents suivant des courbes C_{16} de rang 1.

En posant

$$y_1 = x_1 , \cdots , y_{26} = x_{26} , \qquad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2} ,$$

on obtient une surface birationnellement identique à la Φ''_{16} (type VII).

XIV. Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II , ··· , XI.

108. *Transformation des surfaces-modèles* II , ··· , XI *en des surfaces du quatrième ordre.* Nous avons choisi modèles des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, II , ··· , XI des surfaces d'ordre $2r$, Φ_{2r}, appartenant à des hyperespaces.

Or toute Φ_{2r} peut être projetée successivement par ses points doubles, ou par quelques unes de ses courbes rationnelles remarquables. Par ce procédé on peut toujours transformer une surface hyperelliptique Φ_{2r} en une surface d'ordre 4 de l'espace ordinaire.

Pour ce qui concerne les surfaces II , ··· , VIII, il suffit de les projeter successivement par des points doubles. Dans le cas IX considérons par exemple l'espace S_{15} qui renferme une courbe C_{16} de rang 2 et projetons de S_{16} la Φ_{48} en une surface Φ_{14} de S_8 ; Φ_{14} possède 4 points doubles infiniment voisins, un point uniplanaire ordinaire (auquel sont voisins trois points doubles), un point biplanaire et un point conique, de sorte que elle pourra être projetée en une surface d'ordre 4 de S_3 en prenant successivament comme centres de projection 5 points doubles.

D'une façon analogue on réussit à projeter en une surface d'ordre 4 les autres surfaces Φ'_{48} , Φ''_{48}.

109. *Représentation sur un plan double.* – Les surfaces du quatrième ordre auxquelles on est amené de plusieurs façons différentes par des projections successives de nos Φ_{2r}, possèdent des points doubles; en prenant un de ces points comme centre de projection on ramenera la surface à un plan double ayant une courbe de diramation d'ordre 6.

Par les remarques qui précédent se trouve établi le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r > 1$ admettant une représentation paramétrique propre par des Θ irréductibles relatives à un tableau de périodes primitives

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix},$$

peut être transformée en une surface du quatrième ordre, ou, si l'on aime mieux, en une surface du sixième ordre

$$z^2 = f(x, y).$$

La surface du quatrième ordre aura en général des points doubles et des surfaces tangentes suivant des courbes rationnelles; ces points et ces courbes formerons une configuration caractéristique qui dépend non seulement du type auquel appartient la surface hyperelliptique donnée, mais aussi des liens en partie arbitraires qui rattachent cette configuration à celle de la surface typique correspondante, Φ_{2r}.

De meme les courbes $f = 0$, d'ordre 6, correspondantes à des surfaces hyperelliptiques $z^2 = f(x, y)$ auront des points doubles et des courbes pluritangentes jouant un rôle caractéristique.

110. *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de rang* 3 (type II). – Considérons la surface hyperelliptique Φ_6 (type II).

En la projetant par le point double $(11')$ on aura une surface du quatrième ordre qui renfermera quatre droites $1'2$, $12'$, $13'$, $1'3$, contenant chacune trois points doubles biplanaires, et formant un quadrilatère gauche, dont les sommets sont les points doubles $(22')$ $(2'3)$ $(33')$ $(3'2)$.

Ainsi donc on obtient *une surface du quatrième ordre possédant 8 points biplanaires qui sont situés trois par trois sur* 4 *droites*. Il y a en outre 5 coniques appartenant à la surface et renfermant chacune 4 points biplanaires etc.

Il est aisé d'écrire l'équation de cette surface du quatrième ordre.

En supposant que Φ soit représentée par les équations (5) du n. 79, et que le centre de projection tombé en le point $(1, 0, 0, -1, 0, 0)$, posons

$$y_1 = x_1 + \varepsilon, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3,$$
$$y_4 = x_4 - \varepsilon, \quad y_5 = x_5, \quad y_6 = x_6.$$

Supposons que la projection soit faite sur l'hyperplan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0;$$

il faudra poser

$$\varepsilon = -(x_1 + x_2 + x_3).$$

On aura

$$y_1 y_2 y_3 + \lambda y_4 y_5 y_6 - \varepsilon (y_2 y_3 - \lambda y_5 y_6) = 0$$
$$y_1 y_2 + \cdots + \sqrt{\lambda} y_4 y_5 + \cdots - \varepsilon (y_4 \sqrt{\lambda} - y_1) = 0.$$

Eliminons ε, remplaçons y_3, y_6 par $-y_1 - y_2, -y_4 - y_5$, et enfin posons

$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad z = y_4, \quad 1 = y_5;$$

on aura *l'équation de la surface du quatrième ordre sous la forme suivante*:

$$[y(x+y) - \lambda(z+1)]\,[xy - (x+y^2) + \sqrt{\lambda} z - \sqrt{\lambda}(z+1)^2] -$$
$$- [xy(x+y) + \lambda z(z+1)] = 0.$$

111. *Quelques exemples de surfaces hyperelliptiques* $z^2 = f(x, y)$. Reprenons la surface hyperelliptique du quatrième ordre du type II considérée ci-dessus et projetons-là sur un plan double en prenant comme centre de projection le point $(22')$.

Sur le plan double on trouvera une courbe de diramation d'ordre 6 possédant 7 point doubles $(13')$ $(2'3)$ $(1'3)$ $(23')$ $(33')$ $(12')$ $(1'2)$, parmi lesquels il y a deux couples de points infiniment voisins $(13')(2'3)$, $(1'3)(23')$; il y aura deux droites renfermant chacune trois points doubles et se coupant en le point double $(33')$ etc.

Nous ne développerons pas l'étude de ce plan double qui en somme n'est pas très élégant à cause du défaut de symétrie de sa configuration caractéristique. Il suffira de remarquer que la projection du modèle que nous avons construit en un hyperespace, conduit en ce cas, aussi bien que dans les cas successifs, à déterminer les plans doubles correspondants au type hyperelliptique donné.

Parmi les autres types de surfaces hyperelliptiques, il y en a un qui amène à un plan double extrémement simple et très élégant. Nous nous arreterons sur cet exemple.

Considérons la surface Φ_{16} de S_9 (type V). Elle possède 4 points doubles uniplanaires ordinaires (dont chacun a 3 points doubles infiniment voisins) et 3 points coniques; en projetant de ceux 7 points doubles la surface vient représentée sur un plan double. La courbe de diramation de celui-ci sera une courbe C_6, d'ordre 6, possédante 12 points doubles qui se réunissent en 6 couples de points infiniment voisins, c'est-à-dire en 6 tacnodes correspondants aux quartiques de Φ. Les 6 tacnodes se trouveront trois à trois sur une droite représentant le domaine d'un point uniplanaire de Φ.

En conclusion la surface Φ vient représentée sur un plan double dont la courbe de diramation C_6 passe doublement par les 6 sommets d'un quadrilatère complet, et a en ces points des tacnodes.

Il est aisé de caractériser une telle C_6.

D'abord son genre (numérique) étant -2, la courbe se décompose en trois parties, et son peut reconnaître que ces parties sont des coniques.

Or il s'agit de construire trois coniques se touchant deux à deux deux fois, de façon que les points de contact tombent en les sommets d'un quadrilatère complet. Ces conditions suffisent à déterminer un triplet de coniques, bien défini au point de vue projectif.

Par une transformation homographique du plan on peut ramener le quadrilatère à un carré; alors, parmi les trois coniques, deux deviendront des hyperboles équilatères éguales ayant les mêmes asymptotes, et la troisième devient un cercle passant par les quatre sommets du carré, qui sont aussi les sommets de nos hyperboles.

Ainsi donc la courbe C_6 se réduit à

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = 0;$$

le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

qui touche en deux points chaque conique faisant partie de C_6, représente sur le plan double la courbe d'ordre 8 de Φ (courbe qui passe doublement par les 3 points coniques de cette surface).

En conclusion on a le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V (premier cas bi-diédrique) peut être transformée birationnellement en la surface

$$z^2 = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1).$$

Indice della Memoria precedente

§ I. Introduction . . . . . Pag. 84
§ II. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1 . . . . . » 90
§ III. Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi . . » 120
§ IV. Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ . . . . . » 129
§ V. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires . . . . . » 136
§ VI. Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$ . . . . . » 151
§ VII. Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation paramétrique propre par des fonctions θ irreductibles . . . . . » 163
§ VIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 3 (type II) . . . . . » 186
§ IX. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 4 (type III) . . . . . » 210
§ X. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 6 (type IV) . . . . . » 222
§ XI. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 8 (types V, VI, VII) . . » 228
§ XII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 12 (type VIII) . . . . . » 239
§ XIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 24 (types IX, X, XI) . . » 245
§ XIV. Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II, . . ., XI . . . . . » 255

XLVIII.

COMPLEMENTI ALLA TEORIA DELLA BASE PER LA TOTALITÀ DELLE CURVE DI UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 30_2 (1910), pp. 265–288.

Mi propongo di esporre qui qualche utile complemento alle mie ricerche sulla base delle curve (algebriche) di una superficie (algebrica) [1].

Per costruire sopra una superficie F una base minima, cioè un sistema di un numero finito di curve, da cui tutte le altre si possano dedurre per somma e sottrazione – operando sui sistemi continui, anziché sui sistemi lineari, se la superficie è irregolare – ho già avuto bisogno di considerare l'operazione di *divisione* d'una curva (o di un sistema continuo, cui essa appartenga) per un numero intero (positivo). Se λA e B son due curve di un medesimo sistema algebrico (irriducibile) tracciato su F, o, in simboli, se

$$\lambda A \equiv B,$$

si dice che A è ottenuta «dividendo» B per l'intero λ. L'operazione di divisione non è evidentemente sempre possibile, qualunque sieno λ e B; e, quando è possibile, non è detto che riesca univoca. Ho però provato (nella 3ª Memoria citata) che in ogni caso il numero delle curve distinte (algebricamente) che s'ottengono dalla divisione d'una curva per un intero, non supera un certo limite intero σ, che risulta indipendente dalla curva considerata e dal numero per cui la si divide. Questo limite σ si presenta pertanto come un carattere della superficie.

Nel caso d'una superficie regolare F la divisione per λ d'un sistema, necessariamente lineare, si riduce ad operare sulle funzioni razionali del punto di F, con un'operazione analoga all'estrazione di radice, d'indice λ,

(1) F. SEVERI: *a*) *Sur la totalité courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 140_1 (1905), pp. 361–363 (séance du 6 février 1905) [Nota XXII, vol. I, p. 288; N.d.R.]; *b*) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Mathematische Annalen, *62* (1906), pp. 194–225 [Memoria XXIX, vol. I, p. 332; N.d.R.]; *c*) *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure (Paris), (3) *25* (1908), pp. 449–468 [Memoria XL, vol. I, p. 462; N.d.R.]. — Più recentemente il sig. Poincaré è giunto al teorema circa l'esistenza della base (système de *courbes primitives*) per una via diversa da quella ch'io avevo seguito. Cfr. la Nota: *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 149_2 (1909), pp. 1026–1027 (sèance du 6 décembre 1909), e la Memoria dallo stesso titolo negli Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure (Paris), (3) *27* (1910), pp. 55–108.

da una funzione razionale d'una variabile. Vi ha però questa differenza: che cioè, contrariamente a quanto può accadere per le funzioni razionali sopra una superficie, per le funzioni razionali di una variabile l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice dello stesso indice, si elidono producendo soltanto irrazionalità aritmetiche.

Qualche esempio m'aveva fatto prevedere che, pur sulle superficie con $\sigma > 1$, se l'intero per cui si divide non ha particolari relazioni aritmetiche col carattere σ, la divisione riesce univoca. Mi si presentava perciò la questione di caratterizzare gl'interi in corrispondenza ai quali cessa l'univocità della divisione. Ed ho stabilito che *la condizione necessaria e sufficiente affinché la divisione di una curva per un intero, riesca univoca, è che* λ *sia primo col carattere* σ *della superficie su cui la curva è tracciata.*

Il concetto cui s'ispira la dimostrazione di questo teorema, è semplicissimo. Osservo in primo luogo che, se la curva B ammette una sottomultipla A (secondo λ) il grado virtuale delle curve equisummultiple ed il numero delle loro intersezioni con A, debbon risultare uguali al grado virtuale di A. Ora le curve distinte della superficie F, le quali soddisfanno rispetto ad A a queste due condizioni aritmetiche, sono in numero di σ e derivano tutte da A mediante le operazioni di un certo gruppo abeliano G_σ, d'ordine σ, che possiamo chiamare il *gruppo fondamentale della divisione*. Le curve sottomultiple di B secondo λ, si ottengono tutte da A applicando quelle operazioni del gruppo fondamentale, che hanno per periodo i divisori di λ (tali operazioni formano un sottogruppo di G_σ): onde, se λ è primo con σ, l'operazione da applicare ad A riducesi alla sola identità, e quindi la divisione di B per λ riesce univoca.

Il reciproco si dimostra profittando della proprietà ben nota di un gruppo abeliano d'ordine σ, di possedere sottogruppi d'ordine uguale ad un qualunque divisore di σ.

Espongo poi alcune considerazioni sulle basi intermediarie [*l. c.* (1) *c*)], per giungere alla conclusione che la determinazione delle curve (di grado positivo) di una data superficie, riducesi al problema aritmetico di rappresentare un intero mediante una forma quadratica a dati coefficienti interi.

Ad ogni base intermediaria vien così coordinata una forma quadratica « fondamentale » rispetto a quella base. Si può anzi parlare addirittura della *forma quadratica fondamentale della superficie*, perché le forme relative alle diverse basi intermediarie sono equivalenti tra loro (rispetto alle sostituzioni lineari intere di modulo ± 1).

La considerazione della forma quadratica fondamentale mi pare essenziale nello studio delle superficie che ammettono gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali. È questo un argomento ben degno di richiamare l'attenzione dei geometri (2), se non altro perché qualche indi-

(2) Per una bibliografia in proposito vedi, ad esempio: SNYDER, *Infinite discontinuous groups of birational transformations which leave certain surfaces invariant*, Transactions of the American Mathematical Society, *11* (1910), pp. 15–24.

zio [3] fa presagire la possibilità di rappresentare parametricamente, per funzioni analitiche uniformi, ampie classi di tali superficie. S'otterrebbero così nuove trascendenti di 2 argomenti, legate da relazioni algebriche. E forse queste trascendenti avrebbero comune colle funzioni iperellittiche la proprietà di non possedere singolarità essenziali a distanza finita [4].

Ma queste non sono che congetture, che azzardo soltanto pel desiderio che ho di vedere studiare questo bell'argomento.

Il legame tra le proprietà aritmetiche della forma quadratica fondamentale φ d'una superficie, la quale resti invariante per le trasformazioni birazionali di un gruppo discontinuo infinito G, e le proprietà geometriche di questo gruppo, dipende da ciò che, almeno nel caso in cui la superficie sia regolare, il gruppo G è isomorfo ad un gruppo di sostituzioni lineari intere (di modulo ± 1), che mutano in sé la forma φ.

Tale proprietà mi dà il mezzo di studiare in modo completo, mediante l'applicazione di classici risultati di teoria dei numeri, *il gruppo* (*infinito, discontinuo*) G' *di* TUTTE *le trasformazioni birazionali che lasciano invariante una superficie* F *del* 4° *ordine, passante per una sestica di genere* 2. Ed è forse questo il primo caso in cui si perviene alla determinazione di un gruppo completo (infinito, discontinuo) di trasformazioni birazionali appartenenti ad una superficie. Ad ogni modo l'esempio è certo notevole, e mi è sembrato perciò che valesse la pena di trattenervisi su, anche per mostrare in un caso concreto la portata delle considerazioni generali sopra esposte.

La superficie di cui sto discorrendo fu considerata prima dal Fano [5], il quale mostrò l'esistenza di trasformazioni non periodiche che la mutano in sé.

La determinazione di tutte le curve tracciate sulla superficie F (n° 8), mi permette di concludere che F non contiene curve ellittiche (prive di punti multipli). Resta così giustificata una previsione fatta da Enriques, che esistano cioè superficie senza curve ellittiche, possedenti gruppi discontinui di trasformazioni birazionali [6].

Un'altra questione cui non posso pel momento rispondere, si riferisce al modo di operare sui punti di F delle trasformazioni di G'. Si tratta cioè di sapere se nell'intorno d'un punto generico di F, il gruppo G' sia propriamente o impropriamente discontinuo. Tale questione può illuminare il problema della rappresentazione parametrica di F.

(3) A questo proposito si vedano le Note I e IV alla fine del II volume della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di E. PICARD et G. SIMART (Paris, Gauthier–Villars, 1906), pp. 465–469 e 479–484.

(4) La ricerca di trascendenti che godano di questa proprietà forma oggetto d'uno dei temi a concorso che l'Accademia di Francia dovrà giudicare quest'anno.

(5) *Sopra alcune superficie del* 4° *ordine rappresentabili sul piano doppio,* Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *39* (1906), pp. 1071–1086.

(6) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali,* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 15_2 (1906), pp. 665–669.

§ 1. – La divisione e il suo gruppo fondamentale.

1. *Il gruppo abeliano G_σ fondamentale per la divisione.* – Per rimuovere casi d'eccezione che allungherebbero inutilmente il discorso, faccio uso della nozione di curve virtuali [7].

Nel mio lavoro sulla base minima ho dimostrato che, se A_1 è una curva effettiva della superficie F, tale che ogni curva virtuale d'ordine, grado, genere uguali a quelli di A_1, sia necessariamente effettiva e *individui* il proprio sistema continuo completo [8], si possono costruire precisamente σ curve effettive, algebricamente distinte,

$$A_1 , A_2 , \cdots , A_\sigma , \tag{1}$$

soddisfacenti alle condizioni

$$[A_i A_k] = [A_i A_i] = [A_k A_k] \qquad (i , k = 1 , 2 , \cdots , \sigma), \tag{2}$$

ove $[A_i A_k]$ è il numero dei punti comuni alle A_i , A_k ed $[A_i A_i]$ è il grado virtuale della curva A_i. E si sa [*l. c.* (1) *b*), § 2] che le condizioni aritmetiche (2) equivalgono a ciò, che esiste un intero λ per cui

$$\lambda A_1 \equiv \lambda A_2 \equiv \cdots \equiv \lambda A_\sigma . \tag{3}$$

Per brevità, in seguito una curva nelle condizioni di A_1, la chiamerò *aritmeticamente effettiva.*

Consideriamo le σ curve virtuali d'ordine zero:

$$M_1 = A_1 - A_1 , \qquad M_2 = A_1 - A_2 , \cdots , M_\sigma = A_1 - A_\sigma . \tag{4}$$

Se B_1 è un'altra curva aritmeticamente effettiva, le curve

$$B_1 \equiv B_1 + M_1 , \qquad B_2 \equiv B_1 + M_2 , \cdots , B_\sigma \equiv B_1 + M_\sigma$$

sono effettive, distinte e soddisfanno alle condizioni analoghe alle (2). Il che significa che s'ottengono le stesse curve (4) a partire da ogni curva aritmeticamente effettiva. Le (4) si posson perciò considerare, indipendentemente dalle curve A che ne dànno la prima definizione, come *tutte le possibili summultiple della curva zero* M_1. I simboli

$$+ M_1 , + M_2 , \cdots , + M_\sigma \tag{5}$$

(7) Cfr. F. Severi, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, (2) *38* (1905), pp. 859–865 [Nota XXVII, vol. I p. 325; N.d.R.]. Cfr. pure l'altra mia Nota, *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *68* (1908–1909), parte II, pp. 829–838, n. 9 [Nota XLIV, vol. II, p. 64; N.d.R.].

(8) Cfr. F. Severi, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *65* (1905–1906), parte II, pp. 625–643, n. 7 [Nota XXXI, vol. I p. 398; N.d.R.].

posson pertanto pensarsi come rappresentativi di certe σ operazioni, le quali fanno passare da ogni curva A aritmeticamente effettiva, all'insieme I di di quelle σ curve (pure aritmeticamente effettive) che soddisfanno con A alle condizioni del tipo (2).

Se si nota che le σ curve di un insieme I costituiscono – per ciò stesso che la definizione di I è simmetrica rispetto a ciascuna delle sue curve – un sistema che può esser costruito aggiungendo le (4) ad una *qualunque* di queste curve, se ne trae che *le operazioni* (5) *formano un gruppo* G_σ. E poiché le operazioni stesse sono a due a due permutabili, per la proprietà commutativa della somma di più sistemi continui di curve aritmeticamente effettive, così si conclude che *il gruppo* G_σ *è abeliano*. L'identità corrisponde al simbolo $+M_1$.

Osservazione. – Se s'applicano le operazioni di G_σ ad una curva qualunque di F, non sempre si perviene a curve effettive; ma ciò che si è detto sopra per le curve aritmeticamente effettive, s'applica a curve qualunque, purché il campo delle curve di F s'intenda ampliato coll'aggiunta delle curve virtuali.

2. *Condizione per l'univocità della divisione sopra una superficie con* $\sigma > 1$. – Passo ora alla dimostrazione del teorema enunciato nella prefazione.

Sia λ un intero primo con σ, e sia D una curva effettiva summultipla secondo λ di C. Se E è un'equisummultipla, così che

$$\lambda D \equiv \lambda E, \tag{6}$$

per dimostrare che la divisione per λ è univoca, occorrerà provare che da (6) segue

$$D \equiv E. \tag{7}$$

E invero dalla (6) si trae che l'operazione

$$+N = +(D - E),$$

applicata ad una curva aritmeticamente effettiva A, conduce ad una curva dello stesso insieme I, sopra definito. Onde l'operazione $+N$ coincide con una, e sia per esempio $+M_i$, delle (5). Se μ_i è il periodo di $+M_i$, risulterà pertanto

$$\mu_i D \equiv \mu_i E, \tag{8}$$

e $\mu_i D$, $\mu_i E$ saranno le due equisummultiple minime di D , E, algebricamente equivalenti tra loro. Dal confronto delle (6), (8), segue perciò che μ_i è un divisore di λ.

D'altra parte μ_i, come ordine d un sottogruppo (ciclico) contenuto in G_σ, è un divisore di σ; dunque, per l'ipotesi che λ e σ sieno primi tra loro, è $\mu_i = 1$, e si ha la (7).

Viceversa, se λ non è primo con σ, la divisione non è univoca. Sia infatti $\mu_i (> 1)$ un divisore primo comune a λ e σ, e inoltre sia

$$\lambda D \equiv C. \tag{9}$$

Dico che esiste una E, distinta da D, tale che

$$\lambda E \equiv C. \tag{10}$$

Infatti in G_σ può sempre trovarsi un sottogruppo, necessariamente ciclico, di ordine μ_i [9]. Sia $+M_i$ l'operazione di G_σ generatrice di questo sottogruppo. Allora la curva

$$E \equiv D + M_i,$$

distinta da D, perché la $+M_i$ non è identica, soddisfa alla condizione

$$\mu_i E \equiv \mu_i D$$

e quindi alla (10).

Si può anzi precisare maggiormente: Le operazioni del gruppo abeliano G_σ i cui periodi, primi o no, dividono λ, formano un sottogruppo G_μ, il cui ordine μ è multiplo del massimo comun divisore λ_1 di λ e σ, perché G_μ, alla sua volta, contiene come sottogruppo ogni gruppo d'ordine λ_1 di G_σ.

Orbene, μ *esprime il numero delle curve distinte che s'ottengono nella divisione per l'intero* λ.

Osservazione. – Si noterà che quando la curva C sia divisibile per λ, sicché esista una curva effettiva D soddisfacente alla (9), alcune delle curve derivanti da D mediante le operazioni di G_σ, posson tuttavia risultare virtuali; ma si può sempre scegliere C in modo che quelle curve risultino tutte effettive.

3. Poche parole ancora sulla divisione applicata ai sistemi lineari, beninteso nel caso delle superficie irregolari, chè altrimenti valgono le cose sopra esposte pei sistemi continui.

E anzitutto si rileverà che *la divisione per un intero, applicata ad un sistema lineare, non può condurre che ad un numero finito di sistemi lineari.* Il solo dubbio che potrebbe nascere è che nella divisione del sistema lineare $|C|$ per l'intero λ, si producessero infiniti sistemi lineari d'un medesimo sistema continuo. Ma il dubbio si rimuove osservando che le curve C/λ si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici irriducibili e ciascuno di questi (se è almeno ∞^1) è costituito da curve equivalenti, perché sono pure equivalenti i multipli secondo λ delle sue curve [*l. c.* [8]]. Ne deriva che i sistemi $|C/\lambda|$ si distribuiscono in gruppi costituiti ciascuno da un numero finito di sistemi algebricamente equivalenti e il numero di tali gruppi non potrà superare il carattere σ.

Quanto a quelli di un medesimo gruppo, il loro numero si trova subito. Infatti se una curva C/λ, che indicheremo con D, è aritmeticamente effettiva, il sistema continuo completo $\{D\}$, come insieme dei suoi sistemi lineari, è birazionalmente identico alla varietà V di Picard, relativa alla data superfi-

(9) Vedi per esempio L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Pisa, Spoerri, 1900), p. 71.

cie F. La curva λD definisce entro $\{D\}$ (o entro alla corrispondente varietà V) una involuzione $g_\lambda^{\lambda-1}$ [nel senso di Castelnuovo (10)] costituita dai gruppi di λ sistemi lineari, tolti da $\{D\}$, la cui somma equivale a $|C|$. I sistemi $|C/\lambda|$ algebricamente equivalenti a D, son perciò tanti quanti gli elementi λ-pli della suddetta involuzione, cioè sono in numero di λ^{2p}, p essendo l'irregolarità della superficie. La rappresentazione analitica mediante gl'integrali semplici di 1ª specie, mostra poi subito che questi λ^{2p} sistemi son tra loro distinti.

Che se poi la curva D non è aritmeticamente effettiva, talché il sistema $\{D\}$ non è necessariamente identico alla varietà V, il numero dei sistemi $|C/\lambda|$ algebricamente equivalenti a D non può superare λ^{2p}, perché aggiungendo e togliendo due tali sistemi ad una sistema aritmeticamente effettivo $|E|$ si perviene ad un sistema $|E_1|$ tale che

$$|\lambda E| = |\lambda E_1|.$$

Dunque *il numero dei sistemi lineari che s'ottengono dividendo per un intero λ un dato sistema lineare, non supera il limite $\sigma\lambda^{2p}$ (p essendo l'irregolarità della superficie) ed esistono sistemi per cui il limite è raggiunto.*

Sulle superficie irregolari ($p > 0$) non può pertanto assegnarsi alcun limite finito che valga ad esprimere il massimo numero di sistemi lineari distinti ottenibili colla divisione da un dato.

§ 2. – Determinazione delle curve di dato grado virtuale tracciate sopra una superficie: la forma quadratica fondamentale delle basi intermediarie.

4. *Il problema aritmetico della determinazione delle curve di dato grado virtuale.* – Sia $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ una base intermediaria della totalità delle curve appartenenti ad una superficie F e sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \cdots n_{1\varrho} \\ n_{21} & n_{22} \cdots n_{2\varrho} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_{\varrho 1} & n_{\varrho 2} \cdots n_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} \qquad (n_{ik} = [C_i\, C_k])$$

il determinante [*l. c.* (1) *b*), § 6] di quella base.

Indichiamo inoltre con π_i, m_i il genere virtuale e l'ordine della curva C_i ($i = 1, 2, \cdots, \varrho$).

Se una curva C di F s'esprime mediante la base colla relazione:

$$\lambda C \equiv \lambda(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho), \tag{11}$$

(10) *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Nota I), Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, *14*$_1$ (1905), pp. 545–556.

il grado virtuale n di C vale

$$n = \sum_{i,k=1}^{\varrho} n_{ik} \lambda_i \lambda_k , \tag{12}$$

onde, quando $n > 0$, gl'interi $\lambda_1 , \cdots , \lambda_\varrho$ rendono positiva la forma quadratica del 2° membro.

Poniamoci ora la questione inversa: Se gl'interi $\lambda_1 , \cdots , \lambda_\varrho$ soddisfanno alla relazione (12), ove n è un intero *positivo*, esiste nessuna curva di F, che sia legata alla data base da una relazione del tipo (11)?

Evidentemente se non ci preoccupassimo di ottenere curve *effettive*, dovremmo rispondere senz'altro in modo affermativo; anzi l'ipotesi $n > 0$ sarebbe superflua. Ma ciò che veramente interessa sono le curve effettive e ad esse pertanto dobbiamo riferirci.

E anzitutto sbarazziamo il terreno dal caso $\varrho = 1$. Questo caso va infatti trattato a parte, perché la base (C_1) può ridursi ad una curva virtuale, di grado n_{11} e d'ordine m_1, positivi [*l. c.* (1) *c*), n° 2]. La relazione (12) in tal caso diviene

$$n = n_{11} \lambda_1^2 ,$$

e qualunque sia l'intero positivo λ_1, la curva $\lambda_1 C_1$ ha l'ordine e il grado positivi, onde per λ abbastanza grande esiste una curva $\lambda\lambda_1 C_1$ aritmeticamente effettiva.

Nel caso generale $\varrho > 1$, tra le curve (tutte effettive) della base intermediaria, si può sempre supporre ve ne sia una, per esempio C_1, aritmeticamente effettiva [*l. c.* (1) *c*), n° 1].

Ciò premesso, sia $(\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_\varrho)$ una soluzione in numeri interi dell'equazione (12). Se

$$\lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_\varrho n_{1\varrho} \neq 0 ,$$

cambiando eventualmente di segno a tutte le λ – con che s'ottiene ancora una soluzione della (12) – si può far in modo che l'espressione precedente sia positiva, cioè che la curva virtuale

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho$$

tagli C_1 in un numero positivo di punti. Poiché C_1 (od un multiplo conveniente) può supporsi variabile in un sistema continuo – anzi lineare – ne deriva che un multiplo assai elevato di C è una curva aritmeticamente effettiva.

Ci resta da considerare l'ipotesi

$$\lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_\varrho n_{1\varrho} = 0 ,$$

In tal caso non potrà risultare per ogni i $(i = 1 , 2 , \cdots , \varrho)$

$$\lambda_1 n_{i1} + \lambda_2 n_{i2} + \cdots + \lambda_\varrho n_{i\varrho} = 0 .$$

perché, essendo le λ non tutte nulle $(n > 0)$, dovrebbe esser nullo il determinante Δ della base, il che, sappiamo, non può accadere [*l. c.* (1) *b*), n° 10,

il grado virtuale n di C vale

$$n = \sum_{i,k=1}^{\varrho} n_{ik}\,\lambda_i\,\lambda_k, \tag{12}$$

onde, quando $n > 0$, gl'interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$ rendono positiva la forma quadratica del 2° membro.

Poniamoci ora la questione inversa: Se gl'interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$ soddisfanno alla relazione (12), ove n è un intero *positivo*, esiste nessuna curva di F, che sia legata alla data base da una relazione del tipo (11)?

Evidentemente se non ci preoccupassimo di ottenere curve *effettive*, dovremmo rispondere senz'altro in modo affermativo; anzi l'ipotesi $n > 0$ sarebbe superflua. Ma ciò che veramente interessa sono le curve effettive e ad esse pertanto dobbiamo riferirci.

E anzitutto sbarazziamo il terreno dal caso $\varrho = 1$. Questo caso va infatti trattato a parte, perché la base (C_1) può ridursi ad una curva virtuale, di grado n_{11} e d'ordine m_1, positivi [*l. c.* (1) *c*), n° 2]. La relazione (12) in tal caso diviene

$$n = n_{11}\,\lambda_1^2,$$

e qualunque sia l'intero positivo λ_1, la curva $\lambda_1 C_1$ ha l'ordine e il grado positivi, onde per λ abbastanza grande esiste una curva $\lambda\lambda_1 C_1$ aritmeticamente effettiva.

Nel caso generale $\varrho > 1$, tra le curve (tutte effettive) della base intermediaria, si può sempre supporre ve ne sia una, per esempio C_1, aritmeticamente effettiva [*l. c.* (1) *c*), n° 1].

Ciò premesso, sia $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho)$ una soluzione in numeri interi dell'equazione (12). Se

$$\lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_\varrho n_{1\varrho} \neq 0,$$

cambiando eventualmente di segno a tutte le λ – con che s'ottiene ancora una soluzione della (12) – si può far in modo che l'espressione precedente sia positiva, cioè che la curva virtuale

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho$$

tagli C_1 in un numero positivo di punti. Poiché C_1 (od un multiplo conveniente) può supporsi variabile in un sistema continuo – anzi lineare – ne deriva che un multiplo assai elevato di C è una curva aritmeticamente effettiva.

Ci resta da considerare l'ipotesi

$$\lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_\varrho n_{1\varrho} = 0,$$

In tal caso non potrà risultare per ogni i $(i = 1, 2, \cdots, \varrho)$

$$\lambda_1 n_{i1} + \lambda_2 n_{i2} + \cdots + \lambda_\varrho n_{i\varrho} = 0.$$

perché, essendo le λ non tutte nulle $(n > 0)$, dovrebbe esser nullo il determinante Δ della base, il che, sappiamo, non può accadere [*l. c.* (1) *b*), n° 10,

teorema VII]. Sia per esempio

$$\lambda_1 n_{21} + \lambda_2 n_{22} + \cdots + \lambda_\varrho n_{2\varrho} \neq 0$$

e quindi, cambiando eventualmente il segno alle λ, sia l'espressione stessa positiva. Allora per μ intero positivo assai elevato, la curva $\mu C_1 + C_2$, che è segata da C in un numero positivo di punti, risulta aritmeticamente effettiva, onde si può concludere ancora come nel caso precedente.

Si aggiunga che, detto λC un multiplo aritmeticamente effettivo di C, le σ curve:

$$\lambda C + M_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

son pure effettive e legate alla base data mediante gli stessi interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$, che hanno servito alla costruzione della curva C. Viceversa, è chiaro che due curve aritmeticamente effettive legate alla base mediante gli stessi interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$, hanno per differenza una delle curve M_i definite al n° 1.

Riassumendo si ha il teorema:

La determinazione delle curve di grado positivo $\lambda^2 n$, d'una superficie F, si riduce al problema aritmetico di rappresentare il numero n mediante la forma quadratica

$$\sum_{i,k=1}^{\varrho} n_{ik} \lambda_i \lambda_k ,$$

n_{ik} denotando il numero dei punti comuni alle curve C_i, C_k d'una base intermediaria $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$. Ad ogni soluzione rispondono infinite curve, le quali, per un dato valore di λ (maggiore d'un conveniente limite), si distribuiscono in σ sistemi continui distinti, deducibili tutti da uno mediante le operazioni del gruppo abeliano G_σ.

Beninteso, che la soluzione di cui si parla nell'enunciato è determinata a meno del segno.

La forma quadratica (12), si chiamerà in seguito la forma «fondamentale» della data base intermediaria.

5. *Equivalenza delle forme quadratiche fondamentali relative alle diverse basi intermediarie.* – Sieno:

$$(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho), \qquad (\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$$

due basi intermediarie della superficie F e

$$\lambda_i \Gamma_i \equiv \lambda_i \lambda_{1i} C_1 + \cdots + \lambda_i \lambda_{i\varrho} C_\varrho \qquad (i = 1, \cdots, \varrho) \tag{13}$$

le relazioni che esprimono la seconda base per la prima.

In forza del legame che intercede tra i determinanti di due basi [*l. c.* (1) *b*), formola (19)], il valore del determinante

$$\Delta = |\lambda_{ik}|$$

risulta uguale a ± 1. Ciò posto, consideriamo le forme quadratiche fondamentali relative alle due basi date:

$$(14) \qquad \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\varrho) = \sum_{i,k=1}^{\varrho} n_{ik}\, \varepsilon_i\, \varepsilon_k,$$

$$(15) \qquad \psi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\varrho) = \sum_{r,s=1}^{\varrho} \nu_{rs}\, \eta_r\, \eta_s.$$

Si vede facilmente che la sostituzione a coefficienti interi

$$(16) \qquad \varepsilon_i = \sum_{r=1}^{\varrho} \eta_r\, \lambda_{ir} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho),$$

la quale ha lo stesso modulo della sostituzione (13) *salvo lo scambio delle linee colle colonne*, muta la forma φ nella ψ. E infatti, mediante (16) la φ diviene

$$\varphi = \sum_{i,k} \sum_{r,s} \eta_r\, \eta_s\, \lambda_{ir}\, \lambda_{ks}\, n_{ik} = \sum_{r,s} \eta_r\, \eta_s \sum_{i,k} n_{ik}\, \lambda_{ir}\, \lambda_{ks}.$$

Ora dalle (13) segue senz'altro:

$$\nu_{rs} = \sum_{i,k} n_{ik}\, \lambda_{ir}\, \lambda_{ks},$$

e quindi, in definitiva:

$$\varphi = \psi.$$

Si conclude che:

Le forme quadratiche fondamentali relative alle diverse basi intermediarie, sono tutte equivalenti, propriamente o impropriamente, cioè che si passa dall'una all'altra mediante una sostituzione lineare a coefficienti interi, di modulo ± 1.

Riferendosi ad un rappresentante generico della *classe* di tutte queste forme quadratiche, si può dunque parlare di *forma quadratica fondamentale della superficie*.

6. *Il gruppo delle trasformazioni lineari in sè indotto sulla forma quadratica fondamentale dalle trasformazioni birazionali appartenenti ad una superficie regolare.* – Consideriamo ora una superficie regolare F che possegga una trasformazione birazionale in sé, T. Senza introdurre restrizioni essenziali, si può supporre che F non contenga curve eccezionali. Com'è noto quest'ipotesi non sarebbe lecita soltanto quando F appartenesse alla classe delle superficie razionali (Castelnuovo–Enriques); ma questo caso nello studio che ci proponiamo non ha interesse.

Sia dunque $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ una base intermediaria di F e $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ la base intermediaria corrispondente alla data, mediante T. Sussistono allora le relazioni

$$(17) \qquad \lambda_i\, \Gamma_i \equiv \lambda_i\, \lambda_{1i}\, C_1 + \cdots + \lambda_i\, \lambda_{\varrho i}\, C_\varrho \qquad (i = 1, \cdots, \varrho),$$

ove, come abbiamo già avvertito, il determinante Δ degl'interi λ_{ik} vale ± 1.

Dico anzitutto che *se T non è periodica, la sostituzione* (17) *non può esser identica*; *non possono cioè sussistere le relazioni*

$$\lambda_{ii} = 1 , \qquad \lambda_{ik} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Infatti, se sussistessero tali relazioni, i sistemi lineari $|\lambda_i C_i|$ sarebbero invarianti per T, e poiché uno almeno di essi, o un suo multiplo, potrebbe supporsi semplice e di dimensione ≥ 3, la F risulterebbe birazionalmente identica ad una superficie, la quale, possedendo una trasformazione proiettiva non periodica, sarebbe razionale (Enriques–Fano).

Ad ogni trasformazione T non periodica resta dunque associata una trasformazione (17) non identica.

Poiché le Γ rispondono mediante T alle C di eguale indice, sussisteranno le relazioni

$$\nu_{ik} = n_{ik} \qquad (i , k = 1 , 2 , \cdots , \varrho),$$

ν_{ik} , n_{ik} denotando rispettivamente i numeri delle intersezioni delle coppie di curve corrispondenti Γ_i , Γ_k e C_i , C_k. E quindi, in forza di quanto s'è stabilito nel n° precedente, mediante la sostituzione

$$\varepsilon_i = \sum_{r=1}^{\varrho} \eta_r \lambda_{ir} ,$$

il cui modulo differisce da quello di (17) solo per lo scambio delle righe colle colonne, la forma φ si muterà in sé stessa (col solo cambiamento del nome delle variabili).

Ma non è detto che, viceversa, ogni trasformazione di modulo ± 1 della φ in sé stessa, risponda ad una trasformazione birazionale della superficie. Vedremo anzi in seguito, sopra un esempio, che ciò non accade sempre (n° 13).

Comunque, se si passa mediante T dalla base intermediaria $(C_1 , C_2 , \cdots , C_\varrho)$ alla $(\Gamma_1 , \Gamma_2 , \cdots , \Gamma_\varrho)$ e da questa alla $(D_1 , D_2 , \cdots , D_\varrho)$ mediante un'altra trasformazione S della F, indicando con $(\mu_i \mu_{1i} , \cdots , \mu_i \mu_{\varrho i})$ i coefficienti del legame tra la curva D_i e la base $(\Gamma_1 , \Gamma_2 , \cdots , \Gamma_\varrho)$, i coefficienti del legame tra D_i e la base $(C_1 , C_2 , \cdots , C_\varrho)$ saranno $(\pi_i \pi_{1i} , \cdots , \pi_i \pi_{\varrho i})$, ove le π_i son convenienti interi e

$$\pi_{ki} = \sum_{l=1}^{\varrho} \lambda_{kl} \mu_{li} . \tag{18}$$

Le trasformazioni T, S , TS dànno luogo rispettivamente alle sostituzioni lineari

$$\varepsilon_i = \sum_r \eta_r \lambda_{ir} , \qquad \varepsilon_i = \sum_r \eta_r \mu_{ir} , \qquad \varepsilon_i = \sum_r \eta_r \pi_{ir} ,$$

che mutano in sé la φ e per le formole (18) la terza è il prodotto delle prime due. Dunque:

Se una superficie regolare F possiede un gruppo discontinuo infinito di trasformazioni birazionali, quel gruppo si rispecchia in un gruppo isomorfo

infinito di trasformazioni lineari a coefficienti interi, di modulo ± 1, *che mutano in sé la forma quadratica fondamentale della data superficie.*

Da quanto precede risulta pure che l'isomorfismo di cui si parla in questo enunciato, sarà oloedrico quando nel gruppo delle trasformazioni birazionali di F non ci sieno sottogrupi d'ordine finito, o più in generale quando non esista nel gruppo nessuna trasformazione che lasci simultaneamente invarianti multipli convenienti di tutte le curve della base; mentre in caso contrario sarà meriedrico, ma con indice di meriedria finito, perché non possono esistere infinite trasformazioni che lascino fisso un medesimo sistema lineare di F, senza che la superficie risulti razionale.

Gl'interi λ_{ir} che compariscono nelle formole precedenti, si diranno gl'*interi caratteristici della trasformazione* T.

Osservazione. – Le considerazioni precedenti, *quando* F *sia irregolare*, non permettono di affermare l'esistenza di un gruppo infinito di sostituzioni lineari, mutanti in sé la forma quadratica fondamentale, subordinato da un dato gruppo infinito discontinuo della superficie. Bisognerebbe perciò caratterizzare le superficie che posseggono una trasformazione non periodica rispetto alla quale rimanga invariante non un sistema lineare, ma un sistema continuo di curve.

(Per tali superficie il genere lineare è ≤ 1, perché altrimenti ci sarebbe un sistema lineare canonico o pluricanonico invariante).

§ 3. – Esempio: Determinazione del gruppo infinito discontinuo di tutte le trasformazioni birazionali che lasciano invariante una certa superficie del 4° ordine.

7. *Osservazioni preliminari sulle superficie regolari di generi* 1. – *a*) Il teorema del n° 4 acquista maggior comprensione nel caso delle superficie regolari con curva canonica d'ordine zero (superficie con tutti i generi uguali ad 1), giacché *su queste superficie ogni curva virtuale d'ordine positivo e di grado positivo o nullo, è effettiva.*

È per ciò sottinteso che la superficie di cui si parla sia già stata trasformata in guisa da non contenere curve eccezionali.

Diciamo F una tale superficie. Allora tra il grado n e il genere π di ogni curva, virtuale o effettiva, C tracciata su F, passa la relazione

$$n = 2\pi - 2,$$

e, poiché la C non può essere speciale, se ha l'ordine maggiore di zero, la dimensione virtuale di $|C|$ risulta

$$n - \pi + p_a + 1 = \pi,$$

che è ≥ 1, se $n \geq 0$. Onde la C esiste effettivamente [*l. c.* (7)] ed appartiene ad un sistema, autoaggiunto, di dimensione π.

Si osservi inoltre che, sulle superficie che stiamo considerando, la divisione è un'operazione univoca ($\sigma = 1$) [*l. c.* (1) *c*), n° 4], cosicché ogni base intermediaria è pure una base minima. Da tutto ciò segue che « nel caso in esame ad ogni soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica fondamentale

$$n = \Sigma n_{ik}\,\lambda_i\,\lambda_k \qquad (n \geq 0),$$

risponde uno (ed un solo) sistema lineare effettivo ».

Basterà al più cambiare il segno di tutte le λ. E precisamente occorrerà scegliere il segno delle λ in modo che risulti

$$\Sigma \lambda_i\, m_i > 0,$$

$m_1, \cdots, m_\varrho$ denotando gli ordini delle curve della base.

b) Un'altra osservazione che ci conviene di premettere sulle superficie regolari con curva canonica d'ordine zero, si riferisce al caso in cui il numero base della superficie valga $\varrho = 2$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie di generi 1 *e col numero base* $\varrho = 2$, *possegga curve ellittiche* (*prive di punti multipli*), *è che il determinante di una e quindi di ogni altra base sia un quadrato perfetto.*

E difatti se la superficie F, con $\varrho = 2$, possiede una curva C di grado virtuale 0, detta (C_1, C_2) una base di F, anche non minima, dalla relazione

$$\lambda C \equiv \lambda_1\, C_1 + \lambda_2\, C_2,$$

che lega C alla base, esprimendo il grado di λC, che è zero, in funzione dei gradi virtuali di C_1, C_2 si ricava

$$n_{11}\,\lambda_1^2 + 2\, n_{12}\,\lambda_1\,\lambda_2 + n_{22}\,\lambda_2^2 = 0. \tag{19}$$

Il discriminante $n_{12}^2 - n_{11}\, n_{22}$ di quest'equazione, la quale per l'ipotesi è soddisfatta da valori interi, *non ambedue nulli*, di λ_1, λ_2, dovrà essere il quadrato di un numero intero $n\,(>0)$ e il determinante della base varrà perciò $-n^2$.

Viceversa, se il determinante d'una base vale $-n^2$, il determinante di ogni altra in virtù d'una nota relazione [*l. c.* (1) *b*), formola (19)]: varrà $-q^2$ (q intero >0) e in particolare ciò accadrà pel determinante d'una base minima (C_1, C_2). Onde l'equazione (19) ottenuta uguagliando a zero la forma quadratica fondamentale di questa base, sarà soddisfatta per valori interi, non ambedue nulli, di λ_1, λ_2. Si avranno anzi due sole soluzioni (λ_1, λ_2), ove si considerino come identiche due soluzioni proporzionali. Scegliendo le due soluzioni in modo che i numeri di ciascuna coppia sieno in valore assoluto i più piccoli possibili e tali inoltre da rendere positiva l'espressione $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2$, formata cogli ordini m_1, m_2 di C_1, C_2, si avranno, per l'osservazione *a*), due fasci effettivi $|\lambda_1\, C_1 + \lambda_2\, C_2|$ di curve ellittiche.

Si vede anzi che *quando la condizione di cui si parla nell'enunciato precedente è soddisfatta, la superficie contiene soltanto i due fasci di curve ellittiche*

$$|\alpha C_2 - \beta C_1|\,, \qquad |\gamma C_1 - \delta C_2|\,,$$

ove δ è il m.c.d. di n_{11} e di $n_{12} - q$ (che come si prova facilmente risulta ≥ 0) ed $\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma$ son definiti dalle

$$n_{11} = \delta\alpha\,, \qquad n_{12} - q = \delta\beta\,, \qquad q + n_{12} = \gamma\alpha\,, \qquad n_{22} = \gamma\beta.$$

8. *La base minima sopra una superficie generale del* 4° *ordine passante per una sestica di genere due.* – Passiamo ora a studiare la superficie più generale F, del 4° ordine, che contiene una sestica di genere 2. Come ho già accennato nella prefazione, il Fano ha già dimostrato che la superficie F possiede un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali. Io qui riprenderò la questione con metodo diverso, cercando di pervenire ad una caratterizzazione completa del gruppo di *tutte* le trasformazioni birazionali che mutano in sé la F.

Comincierò dal dimostrare che *sulla superficie F la base minima è formata dalla sestica e da una sezione piana.*

Che la sestica C_1 ed una sezione piana C_2 formino su F una base, risulta da ciò che la più generale superficie del 4° ordine non contenendo altre curve all'infuori delle sezioni piane e dei loro multipli, una superficie del 4° ordine condotta genericamente per la sestica C_1 non conterrà che curve composte mediante C_1 e C_2. Ma potrebbe dubitarsi che la base $(C_1\,,\ C_2)$ non fosse minima. Per rimuovere questo dubbio, occorrerà provare che non esiste su F alcuna base avente il determinante più piccolo (in valore assoluto) del determinante di $(C_1\,,\ C_2)$.

Intanto questo determinante, poiché i gradi virtuali rispettivi di $C_1\,,\ C_2$ valgono $2\,,\ 4$ $(n = 2\pi - 2)$, è dato da

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -28\,.$$

Se la base $(C_1\,,\ C_2)$ non fosse minima, il determinante Δ d'una base minima $(\Gamma_1\,,\ \Gamma_2)$, come segue dalla relazione più volte citata tra i determinanti di 2 basi, sarebbe un divisore (negativo) di D. Dunque per Δ risulterebbero a priori possibili i valori

$$\Delta = -2\,, \qquad -4\,, \qquad -7\,, \qquad -14.$$

Il valore -4 si scarta subito, perché altrimenti anche D dovrebbe essere un quadrato perfetto (n° 7, Oss. *b*). Con altrettanta facilità si scartano i valori -2, -14, osservando che i gradi virtuali $\nu_{11}\,,\ \nu_{22}$ di $\Gamma_1\,,\ \Gamma_2$ son necessariamente pari, e quindi, se fosse pari Δ, dovrebbe esserlo pure ν_{12} (numero dei punti comuni a $\Gamma_1\,,\ \Gamma_2$). Ma allora Δ risulterebbe in conseguenza multiplo di 4.

Esaminiamo infine il valore -7. Tenendo sempre conto che ν_{11} , ν_{22} son pari, verrà:

$$\nu_{12}^2 = 4h + 7 \qquad (h \text{ intero positivo}),$$

onde ν_{12}^2 diviso per 4 darebbe per resto 3, il che è assurdo perché un quadrato perfetto diviso per 4 non può dare per resto che 0 od 1.

Si conclude che la base (C_1 , C_2) è minima e di più, poiché il suo determinante non è un quadrato perfetto, si può affermare che *la superficie del 4° ordine più generale passante per una sestica di genere 2, non contiene curve ellittiche (prive di punti multipli)*.

Aggiungeremo che *la superficie stessa non contiene neppure curve razionali (prive di punti multipli)*.

Una curva razionale di F non potendo essere eccezionale (chè altrimenti sopra una trasformata di F, priva di curve eccezionali, si avrebbe un sistema lineare di grado n, genere π con $n > 2\pi - 2$), dovrà avere il grado -2. Le curve razionali di F, se esistono, si ottengono pertanto in corrispondenza alle soluzioni dell'equazione quadratica (n° 4):

$$2\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2 = -2,$$

cioè:

$$\lambda^2 + 6\lambda\mu + 2\mu^2 = -1. \tag{20}$$

Vedremo nel n° seguente che la forma

$$\lambda^2 + 6\lambda\mu + 2\mu^2$$

è *equivalente* alla forma

$$t^2 - 7u^2,$$

talché, se esistessero soluzioni intere (λ , μ) della (20), esisterebbero pure soluzioni intere (t , u) della

$$t^2 - 7u^2 = -1.$$

Ora quest'equazione non è risolubile in numeri interi, perché un quadrato perfetto t^2, diviso per 7, non può dare resti diversi da 1 , 2 , 4.

9. *Curve di genere virtuale due tracciate sulla F.* – Proponiamoci ora di determinare tutte le curve di grado virtuale 2 e quindi di genere virtuale 2, tracciate sulla nostra superficie del 4° ordine. Dovremo perciò risolvere in numeri interi (λ , μ) l'equazione:

$$2\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2 = 2$$

ovvero:

$$\lambda^2 + 6\lambda\mu + 2\mu^2 = 1 . \tag{21}$$

Ad ogni soluzione (λ, μ) il cui segno sia scelto in modo che

$$6\lambda + 4\mu > 0, \qquad \text{cioè:} \qquad 3\lambda + 2\mu > 0,$$

risponderà una curva effettiva $\lambda C_1 + \mu C_2$ di genere 2.

Siamo dunque ricondotti ad una questione di teoria dei numeri. La teoria dell'equivalenza delle forme quadratiche [11] c'insegna a trasformare la forma

$$\varphi(\lambda, \mu) = \lambda^2 + 6\lambda\mu + 2\mu^2$$

in una forma equivalente del tipo

$$t^2 - 7u^2 .$$

Basta operare su φ colla sostituzione modulare intera

$$\begin{cases} \lambda = t - 3u, \\ \mu = u. \end{cases} \tag{22}$$

Allora ogni soluzione intera di (21) mutasi in una soluzione intera dell'*equazione di Fermat–Pell*

$$t^2 - 7u^2 = 1, \tag{23}$$

e viceversa. Ora la minima soluzione positiva di quest'equazione è

$$t_1 = 8, \qquad u_1 = 3,$$

onde ogni altra soluzione positiva t_n, u_n è data dalla *formola di Lagrange*

$$(8 + 3\sqrt{7})^n = t_n + u_n\sqrt{7} \qquad (n \text{ intero positivo}).$$

A queste soluzioni si debbono aggiungere le soluzioni negative, che si ottengono cambiando il segno ad uno o ad ambedue i numeri t_n, u_n, e la soluzione $t_0 = 1$, $u_0 = 0$.

Conoscendosi le soluzioni della (23) si possono ritenere note senz'altro – mediante sostituzione (22) – le soluzioni intere di (21). E fra queste soluzioni bisognerà scegliere quelle per cui

$$3\lambda + 2\mu > 0,$$

cioè:

$$3t - 7u > 0. \tag{24}$$

Se (t, u) è una soluzione intera positiva di (23), la condizione (24) è conseguenza di (23). Se invece t, u sono ambedue negativi

$$t = -t', \qquad u = -u', \qquad (t', u' > 0),$$

(11) P. G. DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von R. DEDEKIND [Braunschweig, Vieweg und Sohn (1894), Vierte Auflage, S. 151].

la condizione (24) si muta nella

$$7\,u' > 3\,t',$$

che è manifestamente incompatibile colla relazione

$$t'^2 - 7\,u'^2 = 1\,.$$

Se $t > 0$ e $u = -u'$ $(u' > 0)$, la (24) mutasi in

$$3\,t + 7\,u' > 0,$$

la quale è senz'altro soddisfatta. E infine se $t = -t'$ $(t' > 0)$, $u > 0$, la (24) dà

$$-3\,t' - 7\,u > 0,$$

che è assurda.

Si conclude che le soluzioni intere di (21) soddisfacenti alla condizione $3\lambda + 2\mu > 0$, si ottengono in corrispondenza alle soluzioni (t, u) di (23), per le quali $t > 0$ e u è positivo o negativo. E possiamo enunciare:

Sulla superficie F vi sono infinite reti di genere 2 (e grado 2), le quali sono TUTTE *date da*

$$|(t - 3\,u)\,C_1 + u\,C_2|,$$

ove C_1, C_2 *denotano rispettivamente la sestica ed una sezione piana di F, e t, u sono interi (di cui il primo positivo) soddisfacenti all'equazione di Fermat–Pell*

$$t^2 - 7\,u^2 = 1.$$

Così in corrispondenza alle soluzioni

$$t_0 = 1,\quad u_0 = 0;\qquad t_1 = 8,\quad u_1 = 3;\qquad t_2 = 127,\quad u_2 = 48;\ \cdots$$

si hanno le reti

$$|C_1|,\quad |3\,C_2 - C_1|,\quad |48\,C_2 - 17\,C_1|,\cdots$$

degli ordini rispettivi 6, 6, 90, $\cdots$; e in corrispondenza alle soluzioni

$$t_1 = 8,\quad u_{-1} = -3;\qquad t_2 = 127,\quad u_{-2} = -48;\ \cdots$$

le reti

$$|17\,C_1 - 3\,C_2|,\quad |271\,C_1 - 48\,C_2|,\cdots$$

degli ordini rispettivi 50, 796, $\cdots$

L'esistenza di queste infinite reti di grado 2, porta già a concludere che *su F esiste un'infinità (necessariamente discontinua) di trasformazioni birazionali*, giacché si hanno ivi se non altro le infinite involuzioni razionali di 2° ordine generate dalle reti suddette.

Prima di passare a studiare il gruppo completo delle trasformazioni birazionali che lasciano invariante la F, converrà studiare (n° 6) le trasformazioni lineari intere della forma $\varphi(\lambda, \mu)$ in sé.

10. *Il gruppo discontinuo infinito delle trasformazioni lineari intere di modulo* ± 1 *che mutano in sé la forma fondamentale* $\varphi(\lambda, \mu) = \lambda^2 + 6\lambda\mu + 2\mu^2$. – Dalla teoria aritmetica delle forme quadratiche segue [*l. c.* (11), pag. 151] che ogni sostituzione *modulare* intera

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

che muti in sé la φ, è data da

$$\alpha = t - 3u, \qquad \beta = -2u, \qquad \gamma = u, \qquad \delta = t + 3u,$$

(t, u) essendo al solito una soluzione dell'equazione

$$t^2 - 7u^2 = 1.$$

Le trasformazioni modulari, che così s'ottengono, costituiscono un gruppo, infinito e discontinuo, Γ.

Esistono sostituzioni intere di modulo -1, che lascino immutata la φ? Perché ve ne sieno occorre e basta che la φ e la forma

$$\psi(\lambda, \mu) = \lambda^2 - 6\lambda\mu + 2\mu^2,$$

impropriamente equivalente a φ, che s'ottiene da φ mediante la sostituzione di modulo -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

risultino anche *propriamente* equivalenti. Ora dal noto criterio d'equivalenza di due forme quadratiche a determinante positivo [*l. c.* (11), pag. 175] si trae che le forme (a, b, c) e $(a, -b, c)$ sono propriamente equivalenti allorché uno dei coefficienti estremi a, c è uguale ad 1. Se per esempio $a = 1$, la sostituzione modulare

$$\begin{pmatrix} 1 & -2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

muta la prima forma nella seconda.

Nel nostro caso precisamente $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, onde la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

muta φ in ψ. Ne segue che la sostituzione di modulo -1:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

prodotto di una che muta φ in ψ per un'altra che muta ψ in φ, trasforma in sé la φ considerata.

Dunque il gruppo G di tutte le sostituzioni di modulo ± 1 appartenenti a φ, è più ampio del gruppo Γ; quest'ultimo è anzi contenuto in G come sottogruppo invariante.

Se ora s'osserva che $S^2 \equiv 1$ e che il prodotto di S per una sostituzione T di modulo -1, che muti in sé φ, è una sostituzione modulare, pure appartenente a φ, si conclude che *le trasformazioni di modulo* -1 *mutanti in sé la* φ *si ottengono tutte dal prodotto della* (25) *per le singole trasformazioni* (*modulari*) *del gruppo* Γ *sopra definito.*

Costruiamo ora le sostituzioni fondamentali del gruppo G. E anzitutto, poiché il gruppo infinito delle sostituzioni modulari che lasciano invariante una forma *indefinita* – come φ – è ciclico, troviamo la sostituzione generatrice del nostro gruppo ciclico Γ. Com'è noto, essa s'ottiene dalle formole scritte al principio del n° sostituendovi, al posto di (t, u), la minima soluzione positiva

$$t_1 = 8, \qquad u_1 = 3$$

dell'equazione

$$t^2 - 7u^2 = 1.$$

Detta dunque T la sostituzione generatrice di Γ, verrà

$$T \equiv \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Si conclude che:

Il gruppo infinito discontinuo G *di tutte le sostituzioni lineari intere di modulo* ± 1, *che lasciano immutata la forma indefinita*

$$\varphi = \lambda^2 + 6\lambda\mu + 2\mu^2,$$

è generato dalle due sostituzioni fondamentali

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T \equiv \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 17 \end{pmatrix},$$

la seconda delle quali da sola genera un sottogruppo ciclico (*infinito*) Γ *invariante in* G.

Aggiungiamo anche, perché ci servirà in seguito, che *le sostituzioni di modulo* -1 *contenute in* G *sono tutte involutorie.*

E invero le sostituzioni di modulo -1 contenute in G, essendo del tipo

$$\begin{pmatrix} t-3u & -2u \\ u & t+3u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t-3u & 6t-16u \\ u & -t+3u \end{pmatrix}, \qquad (t^2 - 7u^2 = 1),$$

hanno nullo l'invariante $\alpha + \delta$ e quindi sono involutorie.

Viceversa, *ogni sostituzione involutoria contenuta in* G *è necessariamente di modulo* -1, perché il gruppo Γ, essendo ciclico d'ordine *infinito*, non può contenere sostituzioni cicliche d'ordine finito.

11. *Determinazione di tutte le trasformazioni birazionali involutorie che mutano in sé la superficie F.* – Già sappiamo che sulla F esistono infinite trasformazioni involutorie, generate dalle reti di genere 2 tracciate sulla superficie (n° 9). Ci proponiamo ora di provare che queste sono tutte le trasformazioni involutorie di F in sé.

Indichiamo con U una qualunque trasformazione birazionale involutoria appartenente ad F e con Γ_1, Γ_2 le trasformate rispettive, mediante U, delle curve C_1, C_2 della base minima definita al n° 8. Avremo le relazioni:

$$(26) \qquad \begin{cases} \Gamma_1 \equiv \alpha C_1 + \beta C_2, \\ \Gamma_2 \equiv \gamma C_1 + \delta C_2, \end{cases}$$

ove il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ è, in valore assoluto, uguale ad 1.

La U dà luogo alla sostituzione lineare

$$(27) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

che muta in sé la forma quadratica fondamentale φ (n° 6) e che ha lo stesso modulo di (26), salvo lo scambio delle righe colle colonne. Poiché U è involutoria, la sostituzione (27) a causa dell'isomorfismo che intercede tra il gruppo delle trasformazioni birazionali di F e il gruppo delle sostituzioni lineari che mutano φ in sé, dovrà pur essere involutoria e quindi (n° prec.):

$$(28) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = -1, \qquad \alpha + \delta = 0.$$

Dalle (26), mediante le (28), si traggono le espressioni di C_1, C_2 mediante la base minima (Γ_1, Γ_2):

$$(26') \qquad \begin{cases} C_1 \equiv \alpha \Gamma_1 + \beta \Gamma_2, \\ C_2 \equiv \gamma \Gamma_1 + \delta \Gamma_2. \end{cases}$$

Ciò posto, si consideri una curva D di F invariante rispetto ad U, cioè appartenente all'involuzione I_2 generata da U su F, e sia

$$(29) \qquad D \equiv lC_1 + mC_2.$$

La D può esprimersi mediante (Γ_1, Γ_2) in due modi diversi:

$$D \equiv l\Gamma_1 + m\Gamma_2,$$
$$D \equiv (l\alpha + m\gamma)\Gamma_1 + (l\beta - m\alpha)\Gamma_2.$$

La prima di queste espressioni deriva da ciò che Γ_1, Γ_2 sono per ipotesi le trasformate mediante U di C_1, C_2; mentre la seconda s'ottiene dalla (29) per mezzo delle (26'). Poiché le curve Γ_1, Γ_2 sono indipendenti, dalle precedenti espressioni si trae

$$(30) \qquad \begin{cases} l\alpha + m\gamma = l, \\ l\beta - m\alpha = m. \end{cases}$$

Otteniamo così quattro relazioni fra i sei interi incogniti α , β , γ , δ , l , m: le (28), (30). Si osserverà però che, almeno quando $\gamma \neq 0$, dalle prime tre segue la quarta. Comunque noi possiamo aggiungere alle precedenti la nuova relazione

$$\gamma^2 - 6\gamma\alpha + 2\alpha^2 = 2 , \tag{31}$$

che si ricava dalla

$$C_2 \equiv \gamma \Gamma_1 - \alpha \Gamma_2$$

uguagliando i gradi virtuali dei due membri.

E *cominciamo dal discutere l'ipotesi* $\beta = 0$. Risulta allora $\alpha\delta = -1$ e quindi α , δ, in valore assoluto, uguali ad 1. Poiché C_1 in questo caso mutasi mediante U nella $\Gamma_1 \equiv \alpha C_1$, sarà $\alpha > 0$, e quindi

$$\alpha = 1 , \qquad \delta = -1 .$$

Dalla (31), ponendovi $\alpha = 1$, si trae

$$\gamma = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \gamma = 6 .$$

Il valore $\gamma = 0$ deve scartarsi, perché altrimenti, come mostra la seconda delle (26), la curva *effettiva* C_2 sarebbe mutata da U in una curva *non effettiva* $-C_2$. Si hanno dunque, riassumendo, i seguenti valori:

$$\alpha = 1 , \qquad \beta = 0 , \qquad \gamma = 6 , \qquad \delta = -1 . \tag{32}$$

E dalla prima delle (30) segue $m = 0$, e quindi

$$D \equiv lC_1 .$$

Ma dal momento che $\Gamma_1 = C_1$, la rete $|C_1|$ è mutata in sé da U e quindi si potrà prendere $l = 1$ oppure $l = 2$, secondo che U subordina sulla rete $|C_1|$ l'identità o una trasformazione involutoria, non identica.

Se la trasformazione U muta in sé ogni C_1, essa coincide evidentemente colla trasformazione involutoria generata dalla rete $|C_1|$. Se, invece, $l = 2$, la U muta in sé l'involuzione J_2 con cui è composta $|C_1|$, e sul piano doppio, i cui punti rispondono alle doppie di J_2, la U viene a subordinare un'*omografia* involutoria, che muta in sé la sestica di diramazione. Nel numero successivo dimostreremo che un piano doppio siffatto dipende da 11 moduli, talchè il caso $l = 2$ non può presentarsi sulla nostra superficie F, la quale dipende da 18 moduli.

Dunque « quando $\beta = 0$ la U coincide necessariamente colla trasformazione generata dalla rete $|C_1|$, e i valori dei relativi interi caratteristici sono dati dalle (32) ».

Discutiamo ora l'ipotesi $\beta \neq 0$. Si osservi anzitutto che $l \neq 0$, perché altrimenti la curva invariante D sarebbe multipla d'una sezione piana C_2 e quindi – a causa dell'univocità della divisione su F – la U muterebbe in sé il sistema delle sezioni piane. Allora la F ammetterebbe un'omografia invo-

lutoria, non potendo il sistema delle sezioni piane essere composto coll'involuzione I_2 generata da U. Ma ciò, come vedremo nel n° seguente, porterebbe a concludere che la F dipende da 11 e non da 18 moduli.

Da $\beta \neq 0$, $l \neq 0$, in forza delle (28), (30), segue poi

$$m \neq 0, \qquad \alpha \neq -1 .$$

E si hanno quindi le espressioni di β, δ, γ in funzione di α, l, m:

$$\beta = \frac{m(1+\alpha)}{l}, \qquad \gamma = \frac{l(1-\alpha)}{m}, \qquad \delta = -\alpha .$$

Sostituendo in (31) verrà

$$\alpha^2 (l^2 + 6lm + 2m^2) - 2\alpha (l^2 + 3lm) + l^2 - 2m^2 = 0 .$$

Le due radici di quest'equazione sono:

$$\alpha = 1, \qquad \alpha = \frac{l^2 - 2m^2}{l^2 + 6lm + 2m^2} .$$

La prima è inaccettabile, perché risulterebbe

$$\gamma = 0, \qquad \delta = -1$$

e la curva C_2 si muterebbe per la U in una curva non effettiva $-C_2$. Si hanno dunque in definitiva le formole:

$$\alpha = \frac{l^2 - 2m^2}{l^2 + 6lm + 2m^2}, \qquad \beta = \frac{2m(l+3m)}{l^2 + 6lm + 2m^2},$$

$$\gamma = \frac{2l(3l+2m)}{l^2 + 6lm + 2m^2}, \qquad \delta = \frac{2m^2 - l^2}{l^2 + 6lm + 2m^2} .$$

Ora si osservi che l, m *possono supporsi primi fra loro*. Infatti, se fosse k un loro divisore comune (positivo):

$$l = l'k, \qquad m = m'k,$$

la curva virtuale $l' C_1 + m' C_2$ avendo il grado positivo $\left(= \frac{\nu}{k^2}, \nu \text{ grado di } D\right)$ e l'ordine pure positivo $\left(= \frac{\mu}{k}, \mu \text{ ordine di } D\right)$, sarebbe effettiva (n° 7, *a*), e, data l'univocità della divisione su F, il sistema $|l' C_1 + m' C_2|$ sarebbe mutato in sé da U. In questo sistema esisterebbe perciò qualche curva D' invariante rispetto ad U, ed allora alla D cui s'è riferito il nostro ragionamento, potremmo sostituire la D'.

Ciò premesso, dobbiamo esprimere che le α, β, γ, δ son numeri interi. Poniamo

$$\eta = l^2 + 6lm + 2m^2 ,$$

ed osserviamo che, dal momento che η divide $l^2 - 2m^2$, dovrà pur dividere

$$\eta - l^2 + 2m^2 = 2m(3l + 2m).$$

Ma η ed m sono primi fra loro, perché un loro fattore comune dividerebbe pure $\eta - 6lm - 2m^2$, cioè l^2 e quindi l, mentre l, m sono primi fra loro. Tenendo conto della precedente uguaglianza e dell'espressione di β, si conclude che η divide

$$2(3l + 2m), \qquad 2(l + 3m).$$

Se dunque η è dispari, dovrà dividere $3l + 2m$ ed $l + 3m$ e quindi

$$3(l + 3m) - (3l + 2m) = 7m.$$

E ciò, tenendo inoltre conto della circostanza che η, m sono primi tra loro, dà come possibili per η i due valori:

$$\eta = 1; \quad 7.$$

Se invece η è pari ($= 2\tau$), le considerazioni precedenti si potranno ripetere per τ e verrà pertanto

$$\eta = 2; \quad 14.$$

Si deve ora ricercare quali di questi valori sono effettivamente possibili. Sia anzitutto $\eta = 14$. Allora poiché le forme

$$l^2 + 6lm + 2m^2, \qquad t^2 - 7u^2$$

sono equivalenti (n° 9), esisterebbero due interi t, u tali che

$$t^2 - 7u^2 = 14.$$

Ne seguirebbe $t = 7t'$ (t' intero) e la precedente relazione diverrebbe

$$u^2 - 7t'^2 = -2,$$

la quale mostra che u^2 diviso per 7 darebbe per resto 5, mentre invece un quadrato diviso per 7 non può dar resti diversi da 1, 2, 4. Il valore $\eta = 14$ deve dunque scartarsi.

Similmente si vede che non può essere $\eta = 7$, perché risulterebbe

$$t^2 - 7u^2 = 7, \qquad t = 7t' \ (t' \text{ intero}), \qquad u^2 - 7t'^2 = -1$$

ed u^2 diviso per 7 darebbe per resto 6.

Discutiamo infine il valore $\eta = 2$. Allora la curva D, invariante per U, ha il grado $2\eta = 4$ e quindi il genere 3. Il sistema $|D|$ è irriducibile, perché lo spezzamento di una D non potrebbe avvenire che in curve di genere virtuale o od 1, mentre F non contiene curve siffatte (n° 8). Inoltre $|D|$ non ha punti base, perché la sua serie caratteristica è canonica. Se pertanto il sistema ∞^3 $|D|$, che è mutato in sé da U, è semplice, la F, mediante $|D|$, potrà trasformarsi in un'altra superficie del 4° ordine possedente un'omografia involutoria,

imagine di U. Ciò è assurdo, perché allora F dipenderebbe da 11 moduli (n. seguente).

Se poi il sistema $|D|$ è composto, le curve D sono iperellittiche e la involuzione con cui $|D|$ è composto, subordina su ciascuna di esse la relativa g_2^1. Nel n. successivo si vedrà che in tal caso F contiene necessariamente un fascio di curve ellittiche. Ciò contraddice alla conclusione del n. 8.

Resta dunque soltanto come possibile il valore $\eta = 1$. In questo caso $|D|$ è una rete di genere 2 e poiché, come sopra s'è già avvertito discutendo il caso $\beta = 0$, la U non può mutare una curva generica D in una D da quella distinta (chè altrimenti F dipenderebbe da 11 moduli) così si conclude che la trasformazione U coincide con quella generata dalla rete $|D|$.

Possiamo dunque in definitiva enunciare il teorema:

Le sole trasformazioni birazionali involutorie che mutano in sé una superficie generica del 4° ordine passante per una sestica di genere due, sono quelle generate dalle infinite reti di genere due esistenti sulla superficie. – Gl'interi caratteristici della trasformazione U generata da una $|D|$ di queste reti, la quale sia legata alla base minima (C_1, C_2) dalla relazione

$$D \equiv l\,C_1 + m\,C_2$$

sono dati da

$$\alpha = l^2 - 2m^2, \qquad \beta = 2m(l + 3m), \qquad \gamma = 2l(3l + 2m), \qquad \delta = 2m^2 - l^2.$$

Le reti di genere due si ottengono poi tutte, ricordiamo, mediante il teorema del n. 9.

12. *Dimostrazione di alcune proprietà occorse nel ragionamento precedente.*

a) Un piano doppio di generi 1, con sestica di diramazione, la quale sia mutata in sé da un'omografia involutoria, dipende (al più) da 11 moduli.

Sia D la sestica di diramazione (necessariamente priva di punti multipli) la quale sia mutata in sé da un'omologia armonica U. Poiché le omologie armoniche sono tutte proiettivamente identiche, per contare quante sono le curve D invarianti per una data omologia armonica, possiamo supporre che quest'omologia sia ridotta alla simmetria rispetto all'asse x. Allora nell'equazione di una D dovranno mancare i termini con potenze dispari di x, che sono in numero di 12. La D conterrà dunque soltanto $27 - 12 = 15$ coefficienti distinti. Ma le omologie armoniche del piano sono ∞^4; onde saranno in totale ∞^{19} le sestiche trasformate in sé da omologie armoniche. Queste sestiche si distribuiscono in ∞^{11} sistemi di curve proiettivamente identiche; sicché la curva di diramazione D e quindi il piano doppio, dipenderanno da 11 moduli (al più).

b) Una superficie F del 4° ordine, che sia trasformata in sé da un'omografia involutoria, dipende (al più) da 11 moduli.

Consideriamo contemporaneamente il caso in cui l'omografia U è un'omologia (armonica) o un'omografia biassiale (armonica). Poiché le omografie

di ciascuna di queste famiglie sono proiettivamente identiche, potremo contare anzitutto l'infinità delle superficie F invarianti per una data omologia armonica o per una data omografia biassiale armonica, che supporremo ridotte rispettivamente alla simmetria rispetto al piano $z = 0$ e alla simmetria rispetto all'asse z. Nel primo caso nell'equazione di F mancano i termini con z a grado dispari, che sono 14; nel 2° caso mancano i termini con x , y complessivamente a grado dispari, che son 16. Restano dunque rispettivamente $34 - 14 = 20$ e $34 - 16 = 18$ coefficienti distinti. Ma poiché le omologie armoniche sono ∞^6, mentre le omografie biassiali armoniche sono ∞^8, così in definitiva s'otterranno in ambedue i casi ∞^{26} superficie F invarianti rispetto ad un'omografia involutoria di una specie o dell'altra. Queste ∞^{26} superficie di 4° ordine si distribuiscono in ∞^{11} sistemi di superficie proiettivamente identiche; onde F dipende da 11 moduli (al più).

c) Una superficie di generi 1 contenente un sistema lineare composto, di genere 3, possiede in conseguenza fasci di curve ellittiche.

La dimostrazione è immediata. Mediante il sistema composto di genere 3, la superficie F si muta in una quadrica doppia Q, perché quel sistema di grado 4, avendo la serie caratteristica canonica, è necessariamente composto con un'involuzione di 2° ordine subordinante su ogni curva la relativa g_2^1. La curva di diramazione su Q è dell'8° ordine. Alle generatrici d'una schiera di Q rispondono su F le curve di un fascio di grado zero, che sono dunque curve ellittiche.

13. *Il gruppo completo di tutte le trasformazioni birazionali che mutano in sé una superficie del 4° ordine passante per una sestica di genere due.* – Le trasformazioni di F in sé possono dividersi in due specie: *trasformazioni di 1ª specie*, che rispondono a trasformazioni di modulo — 1, le quali mutano φ in sé; *trasformazioni di 2ª specie*, che rispondono invece alle trasformazioni analoghe di modulo 1.

La trasformazioni di 1ª specie sono già state determinate nel n. 11. Quanto alle trasformazioni di 2ª specie, se s'osserva che il prodotto d'una trasformazione di 2ª specie per una di 1ª specie, è di 1ª specie, se ne tre che tutte le trasformazioni di 2ª specie possono ottenersi facendo i prodotti a due a due delle trasformazioni di 1ª specie; od anche che le trasformazioni di 1ª specie s'ottengono tutte moltiplicando una di esse per le trasformazioni di 2ª specie.

Giovandosi dei risultati ottenuti nei nn. 10, 11 proveremo che il gruppo delle trasformazioni birazionali appartenenti ad F, può generarsi a partire da *due sole* trasformazioni birazionali di 1ª specie.

Consideriamo infatti su F le reti di genere 2 (n. 9):

$$|C_1|, \qquad |3C_2 - C_1|,$$

e indichiamo con S_1 , S_1' le due trasformazioni di 1ª specie da esse generate. Gl'interi caratteristici di tali trasformazioni sono dati dal teorema del n. 11

(ove si faccia rispettivamente $l = 1$, $m = 0$; $l = -1$, $m = 3$):

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 6, \quad \delta = -1,$$
$$\alpha = -17, \quad \beta = 48, \quad \gamma = -6, \quad \delta = 17.$$

Le S_1, S_1' dànno luogo, nel modo spiegato (n. 6), alle due sostituzioni lineari di modulo -1:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S' \equiv \begin{pmatrix} -17 & -6 \\ 48 & 17 \end{pmatrix},$$

che mutano in sé la forma quadratica fondamentale φ, e la trasformazione di 2^a specie

$$U_1 \equiv S_1' S_1,$$

dà luogo alla sostituzione modulare

$$U \equiv \begin{pmatrix} -17 & -6 \\ 48 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -17 & -96 \\ 48 & 271 \end{pmatrix}.$$

Componendo la U colla sostituzione T del n. 10 si trova

$$U \equiv T^2 \equiv \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}^2,$$

sicché intanto si può affermare che fra le sostituzioni modulari che mutano in sé la solita forma φ, le potenze pari (positive o negative) di T provengono certo da trasformazioni birazionali (di 2^a specie) di F.

Ed è anche ormai facile mostrare come *alle potenze dispari di T non corrispondano trasformazioni birazionali di F.*

Se invero una trasformazione birazionale V_1 desse luogo ad una potenza dispari di T, moltiplicando V_1 per una conveniente potenza di U_1, avremmo una trasformazione birazionale (sempre di 2^a specie) W_1, cui corrisponderebbe la T stessa e che pertanto muterebbe la base (C_1, C_2) nella base (Γ_1, Γ_2), ove:

$$\Gamma_1 \equiv -C_1 + 3C_2,$$
$$\Gamma_2 \equiv -6C_1 + 17C_2.$$

Moltiplicando W_1 per la trasformazione di 1^a specie generata dalla rete di genere 2 $|\Gamma_1|$, avremmo una trasformazione di 1^a specie permutante fra loro le curve C_1, Γ_1. Onde questa trasformazione muterebbe in sé il sistema $|3C_2| = |C_1 + \Gamma_1|$, e quindi – a causa dell'univocità della divisione su F – il sistema delle sezioni piane $|C_2|$, talché F ammetterebbe un'omografia involutoria, mentre ciò è già stato escluso nel n. precedente. Si conclude pertanto che:

Il gruppo discontinuo infinito delle trasformazioni birazionali che lasciano invariante una superficie del 4^o ordine contenente una sestica di genere 2, è

oloedricamente isomorfo al gruppo di sostituzioni lineari generato dalle sostituzioni di modulo — 1:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S' = \begin{pmatrix} -17 & -6 \\ 48 & 17 \end{pmatrix}.$$

Al gruppo ciclico d'ordine infinito generato dalle potenze della sostituzione modulare

$$U \equiv S' S \equiv \begin{pmatrix} -17 & -96 \\ 48 & 271 \end{pmatrix},$$

risponde il sottogruppo delle trasformazioni birazionali di 2^a *specie che appartengono ad* F, *mentre ai prodotti di* S *per le potenze di* U, *rispondono le trasformazioni di* 1^a *specie* (*che sono tutte involutorie*). *In particolare alle* S , S' *rispondono le involuzioni generate dalle due reti di genere due e di sesto ordine tracciate su* F.

XLIX.

SUL METODO DI MAYER PER L'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI AI DIFFERENZIALI TOTALI

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 69_2 (1910) ,pp. 419–425 (*).

Nel corso di Matematiche superiori che svolgo quest'anno all'Università di Padova, avendo avuto occasione di occuparmi del noto metodo di Mayer per l'integrazione delle equazioni lineari ai differenziali totali, ho osservato come la dimostrazione che il Mayer ne dà (1) – e della quale non conosco modificazioni sostanziali che la rendano più perspicua – per quanto elegante ed abbatanza semplice, lascia un po' sorpresi coloro che la ascoltano per la prima volta. Se ne apprezza l'ingegnosità, ma non ci si sente sufficientemente illuminati sul perché del suo successo. Mi è sembrato perciò utile, dal punto di vista didattico, di comporre una dimostrazione, direi quasi più naturale, e di accompagnarla colla relativa interpretazione geometrica (2).

Mi sia permesso di esporre qui questa breve dimostrazione, la quale riconduce in modo immediato il teorema di esistenza degli integrali di un sistema lineare ai differenziali totali, al teorema d'esistenza degli integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, e costituisce, si può dire, la naturale estensione del procedimento che nel calcolo elementare si usa per cercar le condizioni d'integrabilità di un'espressione differenziale del tipo $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$.

1. Sia il sistema ai differenziali totali

$$(1) \qquad dx_{p+s} = \sum_{i=1}^{p} a_{i,p+s}\,dx_i \qquad (s = 1, 2, \cdots, n-p),$$

ove le $x_1, \cdots, x_p$ son le variabili indipendenti, le $x_{p+1}, \cdots, x_n$ le funzioni incognite e le a sono in generale funzioni di tutte le x (3).

(*) Adunanza del 19 dicembre 1909.

(1) A. MAYER, Mathematische Annalen, 5 (1872), pp. 448–470. – Cfr. pure E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivees partielles de premier ordre*, Hermann Paris (1891), p. 74, od anche E. VON WEBER, *Vorlesungen über das Pfaffsche Problem*, Teubner Leipzig (1900), § 5, p. 107.

(2) Un'altra interpretazione geometrica trovasi in S. LIE, Mathematische Annalen, 9 (1876), ma si riferisce in modo più particolare alla trasformazione di Mayer, mentre quella qua indicata s'ispira ad un concetto diverso, che sembra più semplice e più generale.

(3) È appena necessario avvertire che suppongo per le funzioni che considero tuttele proprietà di cui faccio uso nei calcoli (derivabilità, invertibilità nell'ordine delle derivazioni, ecc.).

Si dice che (1) è *illimitatamente integrabile* quando le relazioni

$$\frac{da_{i,p+s}}{dx_h} = \frac{da_{h,p+s}}{dx_i} \qquad (i, h = 1, \cdots, p),$$

ove le derivate indicate son derivate totali rispetto alle variabili (cioè si devon calcolare tenendo conto che $x_{p+1}, \cdots, x_n$ son funzioni di $x_1, \cdots, x_p$), riduconsi a identità nelle $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Si vede subito – e non val la pena di trattenervisi su – che le condizioni d'illimitata integrabilità son *necessarie* affinché esistano delle funzioni $x_{p+1}, \cdots, x_n$ soddisfacenti alle (1) e delle quali si possano assegnare arbitrariamente i valori iniziali in corrispondenza a valori iniziali arbitrari delle variabili (4).

Qui si tratta di provare che le *condizioni stesse son sufficienti*. Perciò si mostrerà addirittura come si possano effettivamente costruire le funzioni $x_{p+1}, \cdots, x_n$.

Comincio dal supporre che il sistema (1) goda di questa proprietà particolare: che esista un valore x_1^0 di x_1 che annulli identicamente tutte le $a_{i,p+s}$ $(i > 1,\ s = 1, \cdots, n - p)$.

Ciò posto, considero $x_2, \cdots, x_p$ come parametri, in guisa che (1) riducesi al sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$dx_{p+s} = a_{1,p+s}\, dx_1 , \qquad (s = 1, \cdots, n - p). \tag{2}$$

Sieno

$$\varphi_{p+s}(x_1, \cdots, x_n) = c_{p+s}(x_2, \cdots, x_p) \qquad (s = 1, \cdots, n - p), \tag{3}$$

ove c_{p+s} son funzioni arbitrarie dei parametri, le equazioni che rappresentano l'integrale di (2).

Si possono scegliere le c_{p+s} in tal guisa che le (3), quando in esse si considerino le $x_2, \cdots, x_p$ non più come parametri, ma come variabili, rappresentino l'integrale di (1)?

Proviamo che per ciò basta porre

$$c_{p+s} = \varphi_{p+s}(x_1^0, x_2, \cdots, x_p, x_{p+1}^0, \cdots, x_n^0),$$

le $x_{p+1}^0, \cdots, x_n^0$ essendo valori arbitrari attribuiti ad $x_{p+1}, \cdots, x_n$. Insomma noi vogliamo dimostrare che le $x_{p+1}, \cdots, x_n$ tratte dalle equazioni

$$\varphi_{p+s}(x_1, \cdots, x_n) = \varphi_{p+s}(x_1^0, x_2, \cdots, x_p, x_{p+1}^0, \cdots, x_n^0), \tag{4}$$

verificano le relazioni

$$\frac{\partial x_{p+s}}{\partial x_i} = a_{i,p+s}. \tag{5}$$

(4) S'intende che l'arbitrarietà nella scelta dei valori iniziali di $(x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n)$ può eventualmente valere soltanto in un certo campo ad n dimensioni, e non nell'intero spazio. Sottintendo in seguito un'analoga osservazione.

In virtù delle (2) queste relazioni son vere per $i = 1$; dobbiamo dimostrarle per $i > 1$.

Si ha evidentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_{p+s}}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial x_{p+s}}{\partial x_1}\right) = \frac{da_{1,p+s}}{dx_i} = \frac{da_{i,p+s}}{dx_1},$$

onde la differenza $a_{i,p+s} - \frac{\partial x_{p+s}}{\partial x_i}$ risulta funzione delle $x_2, \cdots, x_p$ e non di x_1:

$$a_{i,p+s} = \frac{\partial x_{p+s}}{\partial x_i} + \psi(x_2, \cdots, x_p). \tag{6}$$

Ma le (4) ci dicono che per $x_1 = x_1^0$ la x_{p+s} assume il valore x_{p+s}^0 *indipendente* da $x_2, \cdots, x_p$; se dunque nella (6) si pone $x_1 = x_1^0$, in virtù dell'ipotesi che $a_{i,p+s}$ s'annulli identicamente, risulterà pur nulla identicamente ψ. Si hanno dunque in definitiva le (5). c.d.d.

Le $n - p$ costanti $x_{p+1}^0, \cdots, x_n^0$ che compajono nell'integrale (4) sono evidentemente essenziali.

Dunque: *Quando si conosca un valore x_1^0 di x_1 che annulli identicamente le $a_{i,p+s}$ $(i > 1)$, per avere l'integrale di* (1) *colle sue $n - p$ costanti arbitrarie, basta integrare il sistema di equazioni differenziali* (2).

2. Se ora si suppone che il sistema (1) sia qualunque, assoggettandolo alla *trasformazione di* Mayer:

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_1 y_2, \cdots, x_p = y_1 y_p, \tag{7}$$

si avrà un sistema trasformato:

$$dx_{p+s} = \sum a'_{i,p+s}\, dy_i, \tag{1'}$$

pure illimitatamente integrabile, in cui

$$a'_{i,p+s} = y_1\, a_{i,p+s} \quad (i > 1).$$

Onde questo sistema è nelle condizioni speciali considerate al n. 1, giacché per $y_1 = 0$ le $a'_{i,p+s}$ si annullano identicamente.

Il sistema (1') ha un integrale con $n - p$ arbitrarie, che si calcola integrando il sistema (2')

$$dx_{p+s} = a'_{1,p+s}\, dy_1;$$

da questo integrale, colla trasformazione inversa della (7), si risale all'integrale di (1).

Resta così dimostrato che *l'integrazione di* (1) *si riconduce subito, con operazioni in termini finiti, all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.* E si ha la *regola di Mayer.*

Osservazione. – Il teorema d'esistenza pel sistema (1) è così ricondotto al teorema d'esistenza per un sistema di equazioni differenziali ordinarie. La dimostrazione esposta conduce pure nel modo più rapido al teorema di esistenza degli $n - p$ integrali indipendenti del sistema jacobiano di equazioni lineari a derivate parziali, *aggiunto* ad (1), e quindi al teorema analogo per un qualunque sistema completo di equazioni lineari a derivate parziali di 1° ordine.

3. *Interpretazione geometrica.* – Non facciamo alcuna supposizionere strittiva su (1). L'ipotesi per l'illimitata integrabilità equivale ormai alla esistenza di ∞^{n-p} varietà integrali V_p a p dimensioni dello spazio $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ (una di queste V_p è rappresentata dalle (4) per dati valori di $x_{p+1}^0, \cdots, x_n^0$).

Chiameremo per brevità *sistema subordinato* ad (1), il sistema – pure illimitatamente integrabile – che s'ottiene da (1) prendendo come parametri alcune delle varibili. Due sistemi subordinati, che si ottengano l'uno dall'altro scambiando di ufficio le variabili ed i parametri, si diranno *complementari*. Si verifica subito – e del resto è ben noto – che una V_p integrale di (1) contiene tutta la varietà integrale di un sistema subordinato qualunque, la quale passi per un punto dato di V_p. Le varietà integrali dei sistemi subordinati saranno da considerarsi come *varietà caratteristiche* rispetto al sistema totale, nel senso che una V_p integrale può generarsi, come ora preciseremo, con una famiglia di varietà caratteristiche.

È anzitutto chiaro che due varietà caratteristiche complementari (relative cioè a sistemi complementari) appartenenti ad una medesima V_p integrale, si taglino in *un* punto; e viceversa, due varietà complementari che si taglino in un punto, stanno in una medesima V_p integrale. Ciò posto, una V_p integrale può generarsi così: conoscendosi una determinata V_p caratteristica, si consideri una V_{p-r} complementare, la quale varii appoggiandosi sempre a quella V_r; il luogo delle ∞^r V_{p-r} sarà una V_p integrale.

Questa semplice osservazione ci mostra l'intima origine del metodo di Mayer, anzi di un metodo un po' più generale; e lo fa in sostanza rientrare nel concetto del *metodo delle caratteristiche*.

E invero, se vogliamo tradurre analiticamente l'osservazione, dobbiamo dir così: Si conosca la varietà integrale V_r del sistema subordinato A che si ottiene per *dati* valori di

$$x_1, \cdots, x_{p-r} \qquad (x_1 = x_1^0, \cdots, x_{p-r} = x_{p-r}^0)$$

e sia questa rappresentata dalle equazioni, risolute rispetto ad $x_{p+1}, \cdots, x_n$:

$$x_{p+s} = f_{p+s}(x_{p-r+1}, \cdots, x_p ; k_1, k_2, \cdots, k_{n-p}), \tag{8}$$

le k essendo le $n - p$ arbitrarie dell'integrale.

S'integri il sistema B complementare di A (che si ottiene considerando $x_{p-r+1}, \cdots, x_p$ come parametri) e sieno:

$$\varphi_{p+s}(x_1, \cdots, x_n) = c_{p+s}(x_{p-r+1}, \cdots, x_p) \tag{9}$$

le equazioni della V_{p-r} integrale. Allora per ottenere la V_p integrale di (1) colle sue $n-p$ arbitrarie, basterà scegliere le c_{p+s} in guisa che la V_{p-r} (9) al variare dei parametri s'appoggi sempre alla V_r (8). Perché ciò accada, interpretando nelle (9) le $x_{p-r+1}, \cdots, x_p$ come variabili, e quindi considerando le (9) come equazioni di una V_p di S_n, si dovrà avere come sezione di questa V_p collo $S_{n-p+r}\,(x_1 = x_1^0, \cdots, x_{p-r} = x_{p-r}^0)$ la V_r (8); cioè le equazioni:

$$\varphi_{p+s}\,(x_1^0, \cdots, x_{p-r}^0, x_{p-r+1}, \cdots, x_n) = c_{p+s}\,(x_{p-r+1}, \cdots, x_p)$$

dovranno esser soddisfatte identicamente ponendo in luogo di $x_{p+1}, \cdots, x_n$ le (8).

Se ne conclude che la c_{p+s} dovrà scegliersi così:

$$c_{p+s} = \varphi_{p+s}\,(x_1^0, \cdots, x_{p-r}^0, x_{p-r+1}, \cdots, x_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)\,.$$

Sicché in definitiva le equazioni:

$$\varphi_{p+s}\,(x_1, \cdots, x_n) = \varphi_{p+s}\,(x_1^0, \cdots, x_{p-r}^0, x_{p-r+1}, \cdots, x_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)$$

rappresenteranno l'integrale V_p di (1) colle sue $n-p$ arbitrarie $k_1, \cdots, k_{n-p}$.

Dunque: *Se si sa integrare un sistema subordinato di* (1) *per dati valori dei relativi parametri ed il sistema complementare* (*coi relativi parametri arbitrari*), *si può scrivere subito l'integrale del sistema* (1).

Per $r = p - 1$ si vede perciò che l'integrazione di (1) si riduce all'integrazione del sistema B di equazioni differenziali ordinarie (2), qualora si conosca l'integrale del sistema complementare A per un dato valore x_1^0 di x_1. Orbene, nel caso cui ci siamo riferiti al n. 1 – e a cui ci si riconduce colla trasformazione di Mayer – essendo per $x_1 = x_1^0$ nulle identicamente tutte le $a_{i,p+s}$ $(i > 1)$, l'integrale di A per $x_1 = x_1^0$ si ottiene subito ponendo costanti le $x_{p+1}, \cdots, x_n$. La varietà integrale corrispondente è cioè lo $S_{p-1}\,(x_1 = x_1^0,$ $x_{p+1} = \text{cost}, \cdots, x_n = \text{cost})$. Ed ecco così che il metodo di Mayer viene a rientrare nella osservazione geometrica già esposta.

Si noterà che, qualora sia già stato stabilito in modo qualunque pel sistema (1), il teorema di esistenza, *il ragionamento svolto in questo numero costituisce una dimostrazione geometrica del metodo di Mayer.*

L.

ALCUNE RELAZIONI DI EQUIVALENZA TRA GRUPPI DI PUNTI D'UNA CURVA ALGEBRICA O TRA CURVE DI UNA SUPERFICIE

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 70_2 (1910–11), pp. 373–382 (*).

I criteri che in passato ebbi occasione di esporre per decider sull'equivalenza di curve tracciate sopra una superficie algebrica F, dall'esame dei gruppi ch'esse staccano sopra altre curve della superficie, si possono classificare in due tipi:

a) Date due *curve* A , B di F, si domanda di riconoscer la loro equivalenza esaminando i gruppi di punti ch'esse segnano sulle curve C di un fascio (razionale o irrazionale). E si risponde che, se le A , B segano sulle C gruppi equivalenti, esse pure sono equivalenti o differiscono per curve totali o parziali del fascio (1).

b) Assegnato *tutto un sistema continuo* di curve A, si domanda di riconoscer la loro equivalenza prendendo in esame *soltanto* i gruppi staccati dalle A sopra una curva data C. E si risponde che le A sono equivalenti, a patto però che C appartenga ad un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale (2).

Ma il criterio *a*) lascia in disparte il caso più generale: che cosa si può dire di *due* curve A , B le quali seghino gruppi equivalenti sulle curve C di un sistema continuo qualunque Σ, anche diverso da un fascio?

Di tale questione intendo appunto occuparmi in questa Nota, ove pervengo alla conclusione che le curve A , B sono equivalenti o differiscono per curve *fondamentali* di Σ (curve non aventi intersezioni variabili colle C) (3).

(*) Adunanza del 29 gennaio 1911.

(1) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica pura ed applicata, (3) *12* (1905), n. 6 [Memoria XXV, vol. I, p. 296; N.d.R.].

(2) F. SEVERI, *loc. cit.* in (1), n. 9, e: *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *21* (1905), n. 13 [Memoria XXX, vol. I, p. 363; N.d.R.]; *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *65* (1906), n. 2 [Memoria XXXI, vol. I, p. 390; N.d.R.].

(3) Un criterio *trascendente* del tipo *a*) e in cui si prendono in esame i gruppi staccati dalle A , B sulle C di un sistema Σ d'indice qualunque, trovasi ai nn. 10, 11 della mia Memoria citata, *Intorno al teorema d'Abel*...; ma se da un lato questo criterio richiede pei gruppi (CA), (CB) qualcosa meno della equivalenza, d'altro lato esso impone alle A , B d'appartenere ad un medesimo sistema continuo e permette soltanto di concludere che sono equivalenti due multipli opportuni delle A , B e non le curve stesse.

Questo nuovo criterio può riuscire utile in molte circostanze, come utilissimi sono già stati in varie questioni gli altri criteri che ho sopra ricordati.

La presente Nota s'apre con un'osservazione concernente l'equivalenza dei gruppi (o delle curve) di livello costante d'una funzione algebrica a $\nu(\geq 1)$ valori, del punto variabile sopra una curva (o rispettivamente sopra una superficie). Quest'osservazione non era strettamente necessaria pel mio scopo (come rilevasi dal n. 5), ma tuttavia mi è sembrato valesse la pena di sottolinearla in modo esplicito.

Chiudo accennando ad alcune applicazioni del nuovo criterio di equivalenza, opportunamente esteso alle varietà superiori.

1. *Equivalenza dei gruppi di ugual livello d'una funzione algebrica sopra una curva.* Una proprietà che si collega subito con un'altra già dimostrata da Enriques, relativa alla mutua equivalenza dei gruppi d'una serie razionale ∞^1 sopra una curva algebrica, è la seguente:

I gruppi di livello costante d'una funzione algebrica (a $\nu \geq 1$ valori) del punto variabile sopra una curva algebrica, sono tra loro equivalenti.

È appena necessario di precisare ciò che intendiamo parlando di punti x' , x'' di egual livello per una funzione algebrica a più valori $y(x)$, x essendo il punto scorrente sulla data curva algebrica C: fra i ν valori $y(x')$ che la funzione assume in x', ve n'è *uno* o *più* che sono rispettivamente uguali ad *altrettanti* valori $y(x'')$.

Ciò posto, sia $G = (x' , x'' , \cdots , x^{(n)})$ un gruppo generico di punti di egual livello per la funzione y, ed $\varepsilon \geq 1$ il numero delle determinazioni di y che vengono ad assumere lo stesso valore nei punti del gruppo G. Allora, al variare di G, tra le posizioni di questo gruppo e i valori di y si ha una corrispondenza $(1 , \varepsilon)$. Assegnato infatti per y il valore λ, resta ben determinato *un* gruppo G nei cui punti y assume quel valore, ma lo stesso gruppo proviene da altri $\varepsilon - 1$ valori di y, generalmente distinti da λ.

Comunque sia, la funzione y dovrà soddisfare ad un'equazione algebrica di grado ν, a coefficienti funzioni razionali di x. Questa equazione, se C appartiene allo spazio S_r – ove s'indichino con $x_0 , x_1 , \cdots x_r$ le coordinate omogenee di punto –, si può scrivere sotto la forma

$$(1) \qquad f(x_0 , x_1 , \cdots , x_r ; y) \equiv a_0(x_0 , x_1 , \cdots , x_r)\, y^\nu + a_1(x_0 , x_1 , \cdots , x_r)\, y^{\nu-1} + \\ + \cdots + a_\nu(x_0 , x_1 , \cdots , x_r) = 0 ,$$

le a essendo polinomi omogenei dello stesso grado nelle $x_0 , \cdots , x_r$.

Se si escludono gli eventuali punti x di C che annullano tutte le a, i ν valori assunti da y in ogni altro punto $x(x_0 , x_1 , \cdots , x_r)$, son dati dall'equazione (1); onde, assegnato per y il valore λ, il gruppo omologo G verrà staccato su C fuori dei suddetti punti eccezionali, della forma

$$a_0 \lambda^\nu + a_1 \lambda^{\nu-1} + \cdots + a_\nu = 0 ,$$

appartenente al sistema lineare

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{\nu} \varrho_i \, a_i(x_0 , x_1 , \cdots , x_r) = 0 .$$

Sicchè insomma i gruppi G fanno parte della serie lineare segnata su C, fuori di eventuali punti base, dal sistema (2); cioè sono equivalenti tra loro.

Osservazione. – Dati due gruppi G, corrispondenti ai valori λ_1 , λ_2 di y, la funzione razionale del punto di C, che ha nel primo di essi il gruppo degli zeri e nell'altro il gruppo dei poli, è

$$\frac{f(x_0 , x_1 , \cdots , x_r ; \lambda_1)}{f(x_0 , x_1 , \cdots , x_r ; \lambda_2)} .$$

2. Come dicevamo in principio, si può ravvicinare la proposizione dimostrata all'osservazione di Enriques, relativa alla equivalenza dei gruppi di una serie razionale [4], giacchè infine, anche quando il numero ε sia > 1, per un notissimo teorema di Lüroth, la serie dei gruppi G risulta razionale, dal momento che i gruppi stessi vengon determinati algebricamente, in modo univoco, coi valori del parametro λ. E la dimostrazione del n. 1 non è altro appunto che la *via più naturale e più rapida per stabilire l'equivalenza dei gruppi d'una serie razionale.*

3. Si può richiedere quanti sieno i gruppi G che passano per un punto generico x di C. È facile rispondere che sono in numero di ν/ε, perché le ν determinazioni di y in x, si debbon distribuire in tanti sistemi, costituiti ognuno da ε valori, cui corrisponde lo stesso gruppo di egual livello.

Reciprocamente: si abbia sopra una curva C una serie razionale di indice ν/ε, formata da gruppi G di n punti, e si faccian corrispondere birazionalmente i gruppi G ai gruppi di una g^1_ε fissata sopra la retta C', ove si distende il parametro y. Allora ad ogni punto x di C verranno a corrispondere ν punti di C': e precisamente quelli che costituiscono i ν/ε gruppi di g^1_ε omologhi ai G per x. E a quei ν punti di C' rispondono altrettanti valori di y, che risulta così funzione algebrica a ν valori del punto x. È poi evidente che i G risultano gruppi di livello costante per questa funzione.

Possiamo dunque dire:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie di ∞^1 gruppi di punti sopra una curva, costituisca l'insieme dei gruppi di egual livello d'una funzione algebrica a ν valori, è che la serie stessa sia razionale. L'indice η della serie è un divisore di ν, e si può sempre sceglier la funzione algebrica in guisa che sia $\eta = \nu$.

Se $\varepsilon > 1$ e si costruisce – riferendo birazionalmente i gruppi G ai valori d'un parametro z – una funzione z a $\eta = \nu/\varepsilon$ valori, della quale i G sieno i

(4) F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 10 (1896). Ved. pure F. SEVERI, *Lezioni di geometria algebrica* [Padova, Draghi, (1908)], p. 205 e p. 332.

gruppi di livello, y risulterà funzione razionale (d'ordine ε) della variabile z. Insomma, data una, z, delle funzioni algebriche d'indice di polidromia minimo, corrispondenti ad una data serie di gruppi di livello, *tutte le altre funzioni algebriche, aventi quei dati gruppi di livello, son funzioni razionali di* z.

Osservazione. – Le considerazioni finora esposte si trasportano immediatamente con semplici cambiamenti di parole, *alle funzioni algebriche del punto scorrente sopra una superficie o sopra una varietà.* Ci dispensiamo, per brevità, dal trascrivere gli enunciati relativi.

4. *Costruzione d'una funzione algebrica a* ν *valori che divenga rispettivamente infinita e nulla lungo le curve* A , B *segnanti gruppi equivalenti sulle* C *d'un sistema continuo d'indice* ν.

Veniamo ora alla questione che forma l'oggetto principale di questa Nota. Che cosa si può dire di due curve A , B, tracciate sopra una superficie algebrica F, le quali seghino gruppi equivalenti sulle curve C di un sistema algebrico $\Sigma\,\infty^1$, di grado ≥ 0 e d'indice $\nu \geq 1$?

Il caso in cui il sistema Σ sia un fascio, razionale o irrazionale, come ho ricordato nella prefazione, l'ho già trattato altrove. Tuttavia qui gioverà di riprendere la questione *ex novo*.

Se x denota il punto variabile sulla C, fissata genericamente in Σ, possiamo costruire la funzione razionale $y(x)$ che ha in $(C\,A)$ il gruppo dei poli e in $(B\,C)$ il gruppo degli zeri [5]. Ma conviene avvertire che la y risulta determinata a meno di un fattore, costante lungo la C; pel nostro scopo occorre trovare il mezzo di determinare *razionalmente* questo fattore sopra ogni curva di Σ.

A tal uopo, si fissi su F una curva D, e, indicati con x_1 , x_2 , $\cdots$, x_m i punti del gruppo $(C\,D)$, si consideri la funzione

$$Y(x) = \frac{y(x)}{y(x_1) + y(x_2) + \cdots + y(x_m)}, \tag{3}$$

che, come la $y(x)$, ha in $(C\,A)$ il gruppo dei poli e in $(C\,B)$ il gruppo degli zeri. Nella Y non si ha più l'ambiguità della costante moltiplicativa, perché Y non s'altera, comunque si scelga y tra le funzioni che hanno quei dati poli e quei dati zeri.

Designando con Γ una curva i cui punti rappresentino birazionalmente gli elementi (curve) di Σ, la Y risulterà dunque funzione razionale del punto x variabile su C e del punto ξ variabile su Γ; e poichè il punto ξ è alla sua volta funzione algebrica a ν valori del punto x variabile sulla F, la Y darà luogo in definitiva ad una funzione algebrica a ν valori, $Z(x)$, del punto scorrente su F.

(5) Per questa e per tutte le considerazioni seguenti non occorre mai invocare proprietà della teoria delle funzioni analitiche, trattandosi di proposizioni che si stabiliscono colla massima facilità anche nel campo puramente algebrico.

S'osserverà che Z subordina sopra C una funzione algebrica a ν rami spezzata nella funzione razionale (3) e in una funzione a $\nu - 1$ valori. Le curve A , B vengono ad esser rispettivamente luogo di poli e di zeri della Z, e, se pure questa funzione ammette altri poli od altri zeri, fuori delle curve suddette, o deve accadere che le relative curve luogo taglino una generica C nei medesimi punti (sicchè i punti stessi risultino d'indeterminazione per la funzione algebrica subordinata da Z su quella C) oppure esse non debbono segare affatto la C generica. In ogni caso dunque queste ulteriori curve polari o di livello zero son *fondamentali* pel sistema Σ, nel senso che non ne incontrano una curva generica fuori degli eventuali punti base.

È poi facile provare che le curve $Z =$ costante tagliano una generica C in νn punti variabili, ove con n s'indica il numero dei punti dei gruppi $(C\,A)$ e $(C\,B)$.

Infatti la curva corrispondente a $Z = \infty$, astrazion fatta da eventuali punti d'indeterminazione, che son punti base per la famiglia delle curve di livello, taglia C nei punti del gruppo $(C\,A)$, ciascun dei quali deve contarsi ν volte, perché in esso diviene infinita ognuna delle ν determinazioni di Z, mentre in due altri punti di egual livello per Z – come sarebbero per esempio due punti d'un gruppo della g^1_n individuata su C da $(C\,A)$ e $(C\,B)$ – generalmente non sono uguali che due dei valori di Z. La cosa analoga potendo ripetersi in relazione alla curva $Z = 0$, in forza della proprietà dimostrata prima (n. 3), si perviene alla conclusione che « le curve νA e νB sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali del sistema Σ ».

5. *Costruzione d'una funzione razionale che divenga infinita e nulla (del 1° ordine) lungo le* A , B. Una maggior determinazione s'ottiene considerando la funzione razionale (funzione algebrica ad un valore):

$$\Phi(x) = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_\nu ,$$

ove Z_1 , Z_2 , $\cdots$, Z_ν denotano i valori della Z sopra definita, nel punto x variabile su F. E invero Φ non ha certamente curve polari diverse da quelle di Z, ma è di più facile provare che A è una curva polare di 1° ordine per la funzione Φ.

Costruiscasi perciò, in uno degl'infiniti modi possibili, una funzione razionale $\Psi(x)$, la cui curva polare – di 1° ordine – contenga come parte A, e si indichi con ψ la funzione da essa subordinata sopra una C. Poichè Y e ψ divengono infinite del 1° ordine in $(C\,A)$, la Y/ψ resterà ivi finita, talchè in ogni punto x di A resterà pure finita la funzione Φ/Ψ, dal momento che il suo valore in x è la somma dei valori ivi assunti dalle funzioni Y/ψ relative alle ν curve C uscenti da x. Le Φ e Ψ hanno dunque in A una curva polare dello stesso ordine.

Se si tien conto inoltre del fatto che Φ si annulla lungo la curva B, si conclude che, fuori di eventuali punti d'indeterminazione, la Φ stacca sulla C generica una funzione razionale con n poli di 1° ordine in $(C\,B)$. Ciò significa:

1°) Che B è per Φ una curva zero di 1° ordine.

2°) Che le eventuali curve di livello zero della Φ, diverse da B, o non segano affatto la C generica o la segano (se Σ ha punti fissi) in punti base del fascio $\Phi = \text{cost}$. Si può dunque enunciare la proposizione seguente:

Avendosi sopra una superficie F due curve A , B, le quali seghino gruppi equivalenti sopra le curve C di un sistema algebrico ∞^1 (d'indice ≥ 1 e digrado ≥ 0), esse sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali del sistema.

Non si esclude che le A , B siano riducibili e che una o entrambe, contengano parti multiple. Se per esempio A contenesse una parte K, da contarsi s volte, il ragionamento precedente si dovrebbe modificare soltanto in ciò, che, costruendo la funzione Ψ, si dovrebbe sceglierla in modo che avesse K come curva polare d'ordine s.

Si osserverà pure che *la seconda alternativa dell'enunciato precedente resta esclusa, quando il sistema Σ sia privo di curve spezzate e non sia un fascio irrazionale.*

6. Il risultato si trasporta subito alle varietà superiori. Anzi il ragionamento stesso vale più in generale a dimostrare che:

Se entro una varietà V_k, due varietà a $k-1$ dimensioni staccano varietà equivalenti sulle V_h di un sistema algebrico Σ, ∞^{k-h} ($h \leq k-1$), d'indice $\nu \geq 1$, esse sono equivalenti o differiscono per varietà fondamentali di Σ [6].

Una varietà a $k-1$ dimensioni dicesi *fondamentale* per Σ, quando non ha intersezioni variabili colla V_h generica.

7. *Applicazioni.* Una prima applicazione del nuovo criterio d'equivalenza, dà modo di estendere ai sistemi continui non lineari, una nota proprietà che caratterizza le curve canoniche d'una superficie, rispetto ai sistemi lineari di curve ivi tracciati. Ed ecco come:

Il sistema canonico d'una superficie F può caratterizzarsi colla condizione di segare sopra una curva C, variabile in un sistema continuo di grado > 0, privo di curve spezzate, una serie residua delle serie caratteristica di C rispetto alla serie canonica.

In quest'enunciato non si esclude che la generica C possegga punti multipli, purchè in tal caso i gruppi caratteristici s'intendano depurati da quelle intersezioni di C con una curva infinitamente vicina, che cadono nei punti multipli stessi [7].

(6) Un caso particolare di questa proposizione trovasi nella Nota di L. GODEAUX, *Le théorème fondamental d'adjonction su une variété algébrique à trois dimensions*, Mémoires de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut, (7) 61 (1909); n. 1. Ma l'enunciato è incompleto e la dimostrazione contiene inesattezze non lievi.

(7) Ricorrendo ad una proiezione sopra un piano e tenendo presente la prima formola di Plücker estesa a singolarità qualunque [ved. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa, Spoerri (1907), nota a piè della pag. 398], non sarebbe difficile provare che quelle intersezioni della generica C con una curva infinitamente vicina, che cadono

Il teorema consta di due proposizioni inverse l'una dell'altra: la proposizione diretta, che cioè le curve canoniche di F godono della proprietà enunciata, è già nota [8], e del resto si potrebbe anche stabilire colla considerazione della curva dei contatti di un fascio lineare, privo di curve spezzate, con un altro fascio lineare contenente una sola curva spezzata in C ed in una parte residua [9]; la proposizione inversa, dopo ciò, segue immediatamente dal criterio d'equivalenza stabilito al n. 5.

Osservazione 1. – La proposizione diretta rimane vera anche se il sistema continuo, in cui C è variabile, contiene curve spezzate o è di grado zero.

Osservazione 2. – Il sistema canonico di cui si parla nel teorema, *non* deve esser depurato dalle eventuali curve eccezionali della superficie.

Osservazione 3. – Quando F possedesse una curva canonica d'ordine zero, il teorema dovrebbe intendersi nel senso che ogni gruppo caratteristico di C (fuori dei punti multipli), sarebbe un gruppo canonico.

Osservazione 4. – Il teorema si estende, con analogo procedimento, ai sistemi continui di V_{k-1} appartenenti ad una V_k.

Ne deriva il seguente corollario:

Una varietà algebrica V_k la quale contenga una V_h di genere geometrico nullo, variabile in un sistema continuo ∞^i $(i \geq k - h)$, che invada tutta la V_k, ha essa stessa il genere geometrico nullo.

Se è anzitutto $h = k - 1$, $i \geq 1$, la proprietà enunciata segue senz'altro dal fatto che, ove esistesse su V_k una varietà canonica (d'ordine ≥ 0), aggiungendo alla sua intersezione con V_{k-1} una varietà caratteristica di V_{k-1}, si otterrebbe ivi una varietà canonica, contro il supposto che V_{k-1} sia di genere zero.

Sia dunque $h = k - 2$, $i \geq 2$. Entro al nostro sistema di V_{k-2} se ne assuma uno, Σ, ∞^2, e rappresentiamo gli elementi (V_{k-2}) di Σ coi punti d'una superficie Φ. Ad una curva di Φ variabile in un sistema continuo, risponde in Σ un sistema ∞^1 di V_{k-2}, le quali riempiono una V_{k-1} che, per l'ipotesi fatta che Σ invada tutta la varietà data, risulta variabile, entro V_k, in un sistema continuo. Se la generica V_{k-2} ha il genere zero, risulta nullo anche il genere della V_{k-1} e quindi quello della V_k.

Quando sia $h = k - 3$, si risale prima a varietà V_{k-2} contenute in V_k, poi a varietà V_{k-1} e infine alla V_k. E similmente si procede per h qualunque.

nei punti multipli variabili di C, sono in numero di $\sum s(s-1) + \sum(\alpha - 1)$ ove il 1° sommatorio si estende a tutti i punti multipli, distinti o infinitamente vicini, di C, e l'altro alle origini dei rami di ordine $\alpha > 1$ (ved. anche le mie *Lezioni* citate, p. 30).

(8) F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, (1904), n. 3 [Memoria XVIII, vol. I, p. 238; N.d.R.].

(9) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria*... (citata), nota a pie' della p. 629 [Memoria XXXI, vol. I, p. 393; N.d.R.].

LI.

SULLE SUPERFICIE E VARIETÀ ALGEBRICHE IRREGOLARI DI GENERE GEOMETRICO NULLO

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *20*$_1$ (1911), pp. 537–546 (*).

Lo studio esauriente delle superficie algebriche irregolari di genere geometrico zero, fu già fatto da Enriques fin dal 1905 (1) partendo dal legame, allora da poco scoperto (2), tra l'irregolarità di una superficie ed il numero de' suoi integrali semplici di 1ª specie. La proprietà fondamentale da cui occorre muovere per quello studio, è data dall'esistenza di un fascio irrazionale di curve, sopra una superficie irregolare F di genere zero (3).

In questa Nota mi propongo di pervenire a tale proprietà per una via geometrica, che è applicabile anche alle varietà superiori (nn. 6, 7, 8), mentre il procedimento finora seguìto per le superficie, non sembra facilmente estendibile. La dimostrazione cui alludo, oltre ad esser concettualmente assai semplice, parmi anche più appropriata alla natura del risultato da stabilirsi.

Posso qui riassumerne in brevi parole il concetto informativo.

Sulla superficie F di genere $p_g = 0$ e d'irregolarità $q \geq 1$, si assuma un sistema algebrico $\Sigma\, \infty^1$, di curve C non equivalenti tra loro: ν sia l'indice del sistema, e D la curva composta colle ν curve C uscenti da un punto x di F. Le ∞^2 curve D, che si ottengono al variare di x, non possono essere a due a due equivalenti, perché lo sarebbero le C. Restano quindi, a priori, possibili due ipotesi:

1) Le D si distribuiscono in gruppi di un numero finito $n\,(\geq 1)$ di curve equivalenti.

2) Esse distribuisconsi invece in una semplice infinità di sistemi ∞^1, ciascuno dei quali è costituito da curve D equivalenti.

Orbene, si dimostra che l'ipotesi 1) è da scartarsi.

Ciò è evidente senz'altro, quando $q = 1$, perchè i sistemi lineari $|D|$, che appartengono ad un medesimo sistema continuo, non possono essere più

(*) Seduta del 23 aprile 1911.

(1) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *20* (1905).

(2) Le citazioni relative si trovano ad esempio nell'articolo di Castelnuovo–Enriques alla fine del t. II della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di E. PICARD et G. SIMART (Paris, Gauthier–Villars, 1906), pag. 494.

(3) L'esistenza di un tal fascio era già stata dimostrata da Castelnuovo, sotto l'ipotesi, rivelatasi poi superflua, che F possedesse integrali semplici di 1ª specie.

che ∞^q tra loro distinti. Nel caso $q > 1$, se fosse possibile l'ipotesi 1), la superficie F o più generalmente una sua involuzione I_n – i cui gruppi sarebbero dati dai punti x di un medesimo sistema di curve D equivalenti – risulterebbe birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi V_p, rappresentante i gruppi di p elementi dell'ente $\infty^1 \Sigma$, di genere p; mentre invece sulla V_p non possono esistere superficie di genere zero.

In ogni caso resta dunque possibile soltanto l'ipotesi 2). I punti del sistema H formato da ∞^1 curve D equivalenti, riempiono una curva algebrica M, la quale, variando H, descrive sulla F il fascio irrazionale di cui volevasi provare l'esistenza.

1. *Esistenza d'un fascio irrazionale sulle superficie d'irregolarità* $q = 1$. Consideriamo anzitutto una superficie F d'irregolarità 1 (e di genere geometrico qualunque). Si dimostra assai facilmente che la F contiene un *fascio ellittico* di curve.

Si assuma infatti su F un sistema algebrico $\infty^1 \Sigma$ di curve C non equivalenti tra loro: ciò è sempre possibile appunto perché F è irregolare (4). I gruppi di ν curve C uscenti dai punti della superficie, dànno luogo ad un sistema Σ' di ∞^2 curve D, le quali non possono essere tutte equivalenti tra loro, perché lo sarebbero anche le C (5). Né può darsi che in Σ' vi sia soltanto un numero finito (zero incluso) di curve equivalenti ad una generica D, perché si otterrebbe in tal caso su F un sistema continuo formato da ∞^2 sistemi lineari distinti. Ne deriva che, data una generica D, vi sono in Σ' ∞^1, e soltanto ∞^1, curve a quelle equivalenti.

I punti di F da cui escono i gruppi di curve C formanti queste ∞^1 curve D equivalenti, riempiono una curva M, la quale, variando la generica D, da cui siamo partiti, varia su F descrivendo un fascio, giacchè è ben chiaro che per *ogni* punto di F non può passare che una M.

Poiché la serie algebrica segata sopra una data M dalle ∞^1 curve D ad essa relative, è formata da gruppi equivalenti, lo stesso accadrà della serie segata su quella M dalle C (6). Se pertanto il fascio delle M fosse lineare, dal momento che le C segnano sulle sue curve gruppi equivalenti, ne seguirebbe l'equivalenza di tutte le C (7).

(4) F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna (1904). Vedi pure F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, (1905) [Nota XXIII, vol. I, p. 291; N.d.R.].

(5) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (1905), n. 9 [Memoria XXV, vol. I, p. 296; N.d.R.]. Il teorema I di questa Memoria, sopra cui si fonda la proposizione applicata nel testo, fu poi dimostrato geometricamente da Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

(6) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel*, ecc., Teorema I; G. CASTELNUOVO (Rendiconti dei Lincei, 1906).

(7) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel*, ecc., n. 6. Il criterio d'equivalenza applicato è ivi dimostrato per via geometrica.

Dunque il fascio delle M è di genere > 0 e quindi, dato il valore dell'irregolarità di F, di genere 1 [8].

2. *Esistenza d'un fascio irrazionale sopra le superficie di genere geometrico zero e d'irregolarità $q > 1$.* Abbiasi ora una superficie F di genere $p_g = 0$ e d'irregolarità $q > 1$. Assumasi ancora su di essa un sistema Σ ∞^1, d'indice $\nu > 1$, di curve C non equivalenti. Si può sempre supporre che il genere p di Σ, come ente ∞^1 sia > 1. Ciò equivale ad affermare che sulla varietà V_q di Picard inerente ad F – varietà i cui punti rappresentano gli ∞^q sistemi lineari contenuti in un generico sistema continuo completo di curve tracciate su F – si possono costruire curve di genere > 1. Per convincersene basta per esempio considerare le curve caratteristiche del sistema lineare formato nella sezioni iperpiane di V_q o di un multiplo abbastanza elevato di questo sistema (curve comuni a $q - 1$ varietà del sistema). Aggiungeremo inoltre l'ipotesi, non restrittiva, che il sistema Σ non sia composto con un'involuzione.

Ciò posto, si considerino le ∞^2 curve D formate coi gruppi di ν curve C uscenti dai punti di F. Per brevità, nel seguito, un punto di F lo chiameremo « il punto ν–plo » della D composta colle ν curve C che escono da quello. Dimostreremo che, entro all'ente Σ, le serie lineari individuate dai *gruppi* D, non possono essere ∞^2 tra loro distinte.

Potremo allora concludere che ogni gruppo D, entro all'ente Σ, ne ha ∞^1, e soltanto ∞^1, equivalenti, perché se i gruppi D, entro Σ, fossero tutti equivalenti tra loro lo stesso accadrebbe delle curve C su F [9].

3. Se le serie lineari, individuate entro Σ dai gruppi D, sono ∞^2, distinte tra loro, vuol dire che ogni gruppo D è equivalente ad $n - 1$ (≥ 0) gruppi analoghi, e su F si ha un'involuzione d'ordine n (≥ 1) i cui gruppi sono formati dai punti ν–pli di quelle n curve D.

Ma, anche qualora fosse $n > 1$, ogni superficie Φ che rappresentasse birazionalmente l'involuzione suddetta, avrebbe evidentemente il genere geometrico nullo [10]. Or io dico che la totalità delle ∞^2 serie lineari d'ordine ν, individuate in Σ dalle D, si può riferire birazionalmente ad una varietà ∞^2 di gruppi di P elementi dell'ente Σ, talchè ne seguirà che Φ è birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi V_p, imagine dei gruppi di P elementi dell'ente Σ, o meglio delle ∞^p serie lineari distinte, individuate da questi gruppi [11].

(8) F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, (1904). Vedi alla fine del n. 6 [Memoria XVIII, vol. I, p. 244; N.d.R.].

(9) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel*, ecc., n. 9, teorema *b*). Questo teorema è dimostrato geometricamente.

(10) Basta ricordare come si trasformano per una corrispondenza $(1, n)$ le curve canoniche d'una superficie (Enriques–Severi).

(11) Lo studio geometrico d'una tal varietà trovasi in G. CASTELNUOVO, Rendiconti del R. Istituto lombardo, (1892). Prendendo come elementi di V_p le serie lineari g_p dell'ente Σ, si ottiene una V_p priva di varietà eccezionali.

Introduciamo per brevità una curva S, i cui punti rappresentino le curve di Σ, e indichiamo con G il gruppo di ν punti rappresentante una D fissata genericamente, con G' il gruppo omologo d'una D variabile, e infine con H un gruppo non speciale di P punti della S. Poichè la serie lineare $|G+H|$, d'ordine $\nu+p$, è non speciale, esisterà, per ogni posizione di G', la serie $|G+H-G'|$ e si ridurrà generalmente ad un gruppo *non speciale* H' di P punti, perché questa circostanza si verifica in particolare quando G' coincide con G. La varietà delle serie $|G'|$ vien così riferita birazionalmente alla varietà dei gruppi H' o meglio delle serie $|H'|$.

4. Resta quindi stabilito che la superficie Φ, di genere geometrico nullo, è birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi V_p, priva di varietà eccezionali. Trasformando Φ mediante il gruppo continuo ∞^p delle trasformazioni birazionali di 2ª specie, che appartengono a V_p [12], data la transitività del gruppo, il sistema algebrico T costituito dalle trasformate di Φ, invaderà tutta la V_p, e sarà quindi almeno di dimensione $p-2$.

Ma ciò è assurdo, perché la V_p risulterebbe allora di genere geometrico nullo [13], mentre invece il suo genere geometrico vale 1 (n. 5).

Si conclude pertanto che, dato un gruppo D, entro all'ente Σ, ve ne sono ∞^1 altri, e soltanto ∞^1, ad esso equivalenti. I punti ν–pli delle relative curve D riempiono una curva algebrica M e, al variare della D considerata, M descrive un fascio Γ (per *ogni* punto di F passa una sola M).

Poiché la corrispondenza tra una M e l'ente Σ, ove si chiamino omologhi un punto di M e una curva C quando si appartengano, è a valenza zero nel passaggio da M a Σ, sarà a valenza zero anche nel senso inverso [14] il che significa che le C segano sopra ogni M gruppi equivalenti.

Consideriamo ora il sistema continuo completo $\{C\}$ – costituito da ∞^q sistemi lineari distinti – cui appartiene Σ. Poiché Σ si può, senza restrizione, supporre variabile entro $\{C\}$ in tal guisa che risultino assegnabili ad arbitrio in $\{C\}$ due delle curve di Σ, e poichè d'altronde, variando Σ, il fascio Γ, che è già un sistema completo (di grado zero), non può variare ne consegue che due *qualunque* C segano sopra ogni M gruppi equivalenti talchè, se esse non sono equivalenti, differiscono per curve del fascio [15].

Trattandosi di curve dello stesso ordine, una di quelle C si otterrà dunque dall'altra aggiungendo e togliendo due gruppi di un egual numero di curve di Γ. Il sistema $\{C\}$ conterrà pertanto altrettanti sistemi lineari distinti,

(12) Vedi G. CASTELNUOVO, *loc. cit.*

(13) F. SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie*, Atti del R. Istituto veneto, (1911), n. 7, oss. 4ª [Memoria L, vol. II, p. 297; N.d.R.].

(14) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel*, ecc., teorema II.

(15) Ibidem, n. 6.

quante serie lineari di dato ordine ($\geq p$) son contenute in Γ, e quindi sarà $p = q$. Concludendo:

Ogni superficie di genere geometrico nullo e d'irregolarità $q \geq 1$, contiene un fascio irrazionale di genere q, di curve algebriche (16).

5. *Digressione sul genere geometrico della varietà di Jacobi.* Nel n. precedente abbiamo dovuto far uso del fatto che una varietà di Jacobi ha il genere 1. Questa proprietà si stabilisce agevolmente per via trascendente (17); ma, dato che qui si tratta di esporre una dimostrazione geometrica dell'esistenza di una fascio irrazionale sopra una superficie irregolare di genere zero, occorrerà che cerchiamo di giungere alla proprietà invocata in modo conforme al nostro scopo.

Dimostreremo che sulla V_q delle q–ple di punti di una curva C di genere p ($q \leq p$), la varietà M_{q-1} delle q–ple tolte dai singoli gruppi di una g^{q-1}_{2p-2} canonica, è una varietà canonica (18).

Poiché il teorema è vero per $q = 1$, lo supporremo dimostrato per le varietà dei gruppi di $q - 1$ punti e lo stabiliremo per le varietà V_q.

La V_q contiene ∞^1 varietà W_{q-1}, irriducibili e birazionalmente identiche, ognuna delle quali rappresenta le q–ple con un punto fisso. Cerchiamo di caratterizzare l'intersezione di una W_{q-1} relativa al punto P, colla M_{q-1} di cui si parla nell'enunciato.

Nella corrispondenza tra le $(q-1)$–ple di C e i punti di W, alle $(q-1)$–ple tratte dalla g^{q-2}_{2p-3} residua del punto P rispetto alla fissata g^{q-1}_{2p-2}, risponde una varietà, la quale, addizionata a quella che rappresenta le $(q-1)$–ple aventi il punto fisso P, pel teorema ammesso, dà una varietà canonica di W. E invero, quando una g^{q-2}_{2p-2} si muove tendendo alla serie $g^{q-2}_{2p-3} + P$, la varietà delle $(q-1)$–ple tratte dalla prima serie, tende alla varietà delle $(q-1)$–ple che impongono $q-2$ condizioni ai gruppi della serie limite, la qual varietà è appunto costituita dalle $(q-1)$–ple tolte dalla g^{q-2}_{2p-3} e da quelle che hanno il punto fisso P.

E poiché queste ultime sono rappresentate dai punti comuni alla W_{q-1} fissata e alla sua varietà infinitamente vicina, la M_{q-1} viene a segnare su W_{q-1} una varietà residua della varietà caratteristica rispetto al sistema canonico. Ne segue che M_{q-1} è una varietà canonica di V_q (19).

In particolare per $p = q$ si ha come varietà canonica la M_{p-1} delle p–ple speciali, la quale si riduce addirittura ad un punto (semplice) di V_p, se, invece di assumere i punti della varietà di Jacobi come immagini delle

(16) Che poi queste curve sieno *razionali* quando $q > 1$, è dimostrato per via geometrica in F. ENRIQUES (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2) 3, p. 83).

(17) F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, (1903) n. 9 [Memoria XII, vol. I, p. 119; N.d.R.].

(18) Ibidem, n. 10.

(19) F. SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza*, ecc., n. 7.

p–ple, si assumono come immagini delle serie lineari d'ordine P appartenenti a C.

Sicchè, insomma, sulla V_p priva di varietà eccezionali, il sistema canonico è d'ordine zero, e quindi il genere geometrico di V_p è uguale ad 1.

6. *Estensione delle cose precedenti alle varietà. Esame delle V_k che hanno l'irregolarità superficiale $q < k$.* Si assuma sopra la V_k d'irregolarità superficiale q [20] minore della dimensione k, un sistema $\Sigma\infty^1$ di varietà V_{k-1} non equivalenti. Gli ∞^k gruppi di ν varietà V_{k-1} uscenti dai punti di V_k, dànno luogo a varietà riducibili W, non equivalenti tra loro, perché altrimenti sarebbero equivalenti i gruppi segati da W sopra una curva qualunque di V_k e quindi anche i gruppi segati sulla stessa curva dalle V_{k-1} [21], il che porterebbe all'equivalenza di queste ultime varietà [22]. Ne deriva che, data una W, ve ne sono ∞^i $(1 \leq i \leq k-1)$ equivalenti a quella.

Il luogo dei punti ν–pli di queste W equivalenti, è una M_i algebrica, la quale, al variare di W, descrive entro V_k un sistema Γ, ∞^{k-i}, d'indice 1.

Sopra ogni M_i le V_{k-1} staccano delle N_{i-1} equivalenti tra loro, perché la varietà formata dalle ν N_{i-1} che escono da un punto variabile di M_i, si muove in un sistema lineare.

Ciò può anche esprimersi dicendo che le V_{k-1} segano sopra una curva qualunque C di genere π, tracciata su M_i, una serie γ_n^1 con $2\nu(n+\pi-1)$ punti doppî [23].

Se ora si suppone che Σ possa variare in modo continuo in un sistema completo $\{V_{k-1}\}$, costituito da ∞^q sistemi lineari, per ogni posizione di Σ i caratteri numerativi della serie segata su C si mantengono inalterati, onde le varietà di Σ staccheranno sempre su C e quindi [24] anche sopra M_i, varietà equivalenti. Poiché nulla ci vieta di supporre che l'ente Σ sia variabile entro $\{V_{k-1}\}$ in un sistema algebrico tale che due varietà qualunque del sistema continuo completo determinino una (o più) posizioni di Σ, così si conclude che le V_{k-1} del dato sistema completo, staccano varietà equivalenti sopra ogni M_i.

Tutte le V_{k-1} si otterranno dunque da una di esse aggiungendo e togliendo due varietà di dimensione $k-1$, appartenenti ad un sistema continuo H, *composto* mediante le M_i. Indicando con γ una varietà a $k-i$ dimensioni, i cui punti sieno le immagini delle M_i di Γ, le varietà di H corrisponderanno

(20) G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, Annales de l'École normale supérieure de Paris, (1906). Vedi pure la mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, (1909), n. 14 [Memoria XLIII, vol. II, p. 22; N.d.R.].

(21) F. SEVERI, *Il teorema d'Abel*, ecc.; G. CASTELNUOVO (Rendiconti dei Lincei, 1906).

(22) F. SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza*, ecc.; n. 6.

(23) G. CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, Rendiconti dei Lincei, (1906).

(24) F. SEVERI, loc. ultimamente citato.

a varietà di dimensione $k-i-1$, costituenti un sistema continuo h di γ. Sicchè, tanti saranno i sistemi lineari distinti di $\{V_{k-1}\}$, quanti i sistemi lineari distinti contenuti nel sistema, eventualmente completato, h.

Insomma la varietà V_k e il sistema Γ avranno la stessa irregolarità bidimensionale q (si dovrà dire che q è uguale al genere della curva γ, se $i = k-1$).

Si conclude che:

Ogni varietà algebrica V_k d'irregolarità superficiale $q < k$, contiene un sistema ∞^{k-i} d'indice 1, di varietà M_i ($1 \leq i \leq k-1$), avente anche esso l'irregolarità bidimensionale q.

Si aggiunga che *i valori di i, da 1 a $k-1$, sono tutti quanti possibili (non beninteso sopra la stessa varietà)*: basta ad esempio considerare la varietà V_k delle coppie di punti di una V_{k-1} d'irregolarità superficiale q e di uno spazio lineare S_i.

7. *Varietà V_k di genere zero e d'irregolarità superficiale $q \geq k$.* Scelto su V_k un sistema $\Sigma\infty^1$ di varietà V_{k-1}, e considerate le varietà W composte colle ν V_{k-1} che escono dai punti di V_k, si prova, come nel n. precedente, che entro V_k esiste un sistema $\Gamma\infty^{k-i}$, d'indice 1 e d'irregolarità bidimensionale q, di varietà M_i ($1 \leq i \leq k-1$) su cui le V_{k-1} del sistema continuo completo cui appartiene Σ, staccano varietà equivalenti. Tutto ciò però a condizione che si sia già dimostrato che gli ∞^k sistemi lineari $|W|$ non possono essere tra loro distinti.

Ora questo fatto si stabilisce con un'ovvia estensione del ragionamento esposto, nel caso delle superficie, nei nn. 3, 4. Se cioè i sistemi $|W|$ fossero ∞^k, la varietà V_k o una sua involuzione – che sarebbe ancora di genere zero – si potrebbe trasformare birazionalmente in una varietà appartenente alla V_p di Jacobi, che corrisponde all'ente Σ, il quale può sempre supporsi di genere $p \geq k$; mentre invece sulla V_p, che è di genere 1, non possono esistere varietà di genere zero.

Si può dunque enunciare che:

Ogni varietà V_k di genere geometrico nullo e d'irregolarità superficiale q, contiene un sistema d'indice 1 di varietà M_i ($1 \leq i \leq k-1$), avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale q.

Osservazione. – S'avvertirà che è sempre lecito supporre $q \geq k-i$. Sia infatti $q < k-i$ e indichiamo con V_{k-i} una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le M_i del sistema Γ. Pel teorema del n. 6, sulla V_{k-i} esisterà un sistema Γ', $\infty^{k-i-i'}$, d'indice 1 e d'irregolarità q, costituito da varietà $M_{i'}$, e nella corrispondenza tra V_{k-i} e V_k, al sistema Γ' risponderà un sistema Γ_0, $\infty^{k-i-i'}$, d'indice 1 e d'irregolarità q, costituito da varietà $M_{i+i'}$ composte col sistema Γ. Se non è ancora $q \geq k-i-i'$, si potrà similmente proseguire, finchè non si pervenga ad un sistema d'indice 1 e di dimensione non superiore a q.

8. *Proprietà degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una V_k di genere zero.* La nota dimostrazione dell'esistenza di un fascio irrazionale sopra una superficie F di genere zero, fa capo in sostanza all'identità di Noether, che lega ogni coppia d'integrali semplici di 1ª specie ad un integrale doppio di 1ª specie, sopra una qualunque superficie (25).

Non sembra facile estendere alle varietà la relazione di Noether, tanto più perché, a quanto pare, non una, ma $k-1$ identità debbono ottenersi sopra una V_k, in corrispondenza ad altrettanti legami fra gl'integrali semplici e gl'integrali doppî, tripli, $\cdots$, k–pli di 1ª specie.

Comunque, il risultato del n. precedente ci dà modo di stabilir subito l'estensione di quel fatto che sulle superficie di genere zero consegue dalla identità di Noether, e cioè:

Data una V_k di genere zero e d'irregolarità superficiale $q > 0$, esiste un intero i $(1 \leq i \leq k-1)$, tale che $k-i+1$ integrali semplici di 1ª specie di V_k son sempre funzionalmente dipendenti, mentre non lo sono in generale un numero inferiore di essi.

Sia infatti Γ il sistema ∞^l $(l = k-i)$, d'irregolarità bidimensionale q, costituito da varietà M_i appartenenti a V_k. Per l'osservazione con cui si chiude il n. precedente, si potrà sempre supporre che sia $q \geq l$.

Fissiamo il modello proiettivo di V_k nello spazio $S_{k+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})$, in tal guisa che V_k sarà un'ipersuperficie

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = 0$$

di questo spazio; e sia inoltre

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{l+1}) = 0$$

l'equazione di una V_l – dello $S_{l+1}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{l+1})$ – i cui punti rappresentino birazionalmente le M_i di Γ. Essendo Γ d'indice 1, le ξ risulteranno funzioni razionali del punto x variabile su V_k, e gl'integrali semplici di 1ª specie di V_k, dal momento che V_k e V_l hanno la stessa irregolarità superficiale q, proverranno *tutti* dagl'integrali semplici di 1ª specie di V_l, mediante la sostituzione razionale:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}), \cdots, \xi_l = \xi_l(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}).$$

Presi pertanto $l+1$ integrali linearmente indipendenti di V_l (con che si viene implicitamente a supporre che sia $q > l$):

$$\int A_{1s}\, d\xi_1 + A_{2s}\, d\xi_2 + \cdots + A_{ls}\, d\xi_l, \qquad (s = 1, 2, \cdots, l+1),$$

la matrice jacobiana dei corrispondenti integrali di V_k, considerati come

(25) Vedi l'osservazione di Castelnuovo alla fine di una Memoria di F. ENRIQUES pubblicata negli Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2) 3.

funzioni delle variabili indipendenti $x_1, \cdots, x_k$, sarà

$$\left\| \sum_{r=1}^{l} A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_1}, \sum_{r=1}^{l} A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_2}, \cdots, \sum_{r=1}^{l} A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_k} \right\| \quad (s = 1, 2, \cdots, l+1),$$ (26)

ove, beninteso, le derivate si calcolino tenendo conto che x_{k+1} è funzione algebrica di $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

Consideriamo un determinante d'ordine $l+1$ estratto da questa matrice, per esempio:

$$\left| \sum A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_1}, \sum A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_2}, \cdots, \sum A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_{l+1}} \right| \quad (s = 1, \cdots, l+1).$$

Esso uguaglia il prodotto delle due matrici:

$$\| A_{1s}, A_{2s}, \cdots, A_{ls} \|, \quad \left\| \frac{d\xi_1}{dx_s}, \frac{d\xi_2}{dx_s}, \cdots, \frac{d\xi_l}{dx_s} \right\| \quad (s = 1, \cdots, l+1);$$

e poichè in queste il numero delle orizzontali supera il numero delle verticali, il determinante prodotto risulterà identicamente nullo. Ciò vale per ogni determinante di ordine massimo estratto dalla matrice funzionale di $l+1$ integrali qualunque di V_k; dunque gl'integrali stessi son funzionalmente dipendenti.

Ci resta da considerare l'ipotesi $q = l$. Se la varietà V_l non ha i suoi integrali di 1ª specie funzionalmente distinti, si conclude facilmente, come sopra, che $l'+1 < l+1$ integrali di 1ª specie di V_k son sempre funzionalmente dipendenti.

Altrimenti, assunto sopra V_l un sistema $\infty^1 \Sigma'$ di varietà V_{l-1} non equivalenti, e considerato l'insieme ∞^l delle varietà W' composte colle ν' V_{l-1} che escono dai singoli punti di V_l, si vede che i sistemi lineari $|W'|$ debbon essere ∞^l, tra loro distinti, perché altrimenti (n. 6) V_l conterrebbe un sistema $\Gamma' \infty^{l-i'}$ d'indice 1 e d'irregolarità l, di varietà $M_{i'}$, e gl'integrali semplici di V_l non sarebbero più funzionalmente distinti.

Ma dunque i sistemi $|W'|$ si distribuiscono in ∞^l gruppi, ognuno dei quali è formato da $n\,(\geq 1)$ sistemi $|W'|$ equivalenti, sicchè gli n punti ν'–pli di n varietà W' tra loro equivalenti, formano un gruppo variabile in una involuzione I_n, birazionalmente identica alla varietà di Picard annessa a V_l (27). Poiché dalla varietà di Picard relativa a V_l o, ciò che è lo stesso, a V_k, si passa a V_l con una trasformazione razionale, e da V_l si risale a V_k con un'altra sostituzione razionale, così si conclude che:

Il teorema precedente cade in difetto allora e solo allora che, essendo $q < k$, V_k è una trasformata razionale della propria varietà di Picard.

Questo caso d'eccezione può presentarsi effettivamente: basta per esempio considerare la varietà V_k delle coppie di punti di una varietà di Picard, semplice o multipla, V_l, e di uno spazio lineare S_{k-l}.

(26) Indichiamo la matrice scrivendo soltanto la sua orizzontale s–esima.

(27) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rendiconti dei Lincei, (1905), n. 4.

LII.

SUR LES INTÉGRALES SIMPLES DE PREMIÈRE ESPÈCE ATTACHÉES À UNA SURFACE ALGÉBRIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *152*$_1$ (1911), pp. 1079–1081.(*)

On sait, d'après M. Picard, que la construction des intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique irrégulière f, se ramène à la détermination de trois polynomes, d'un ordre déterminé, satisfaisant à une équation différentielle, qui revient, en dernière analyse, à la condition d'intégrabilité (Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 119).

Toutefois, pour achever la théorie, il faut déterminer d'une façon géométrique les fonctions rationnelles A , B qui entrent dans une différentielle totale de première espèce, $Adx + Bdy$, attachée à f. En d'autres termes, il s'agit de caractériser les A , B par rapport aux singularités de f, en donnant ainsi l'extension aux différentielles totales algébriques, de la construction classique des différentielles abéliennes de première espèce au moyen des courbes adjointes.

J'arrive à la construction suivante: soit m d'ordre de la surface f douée de singularités ordinaires et d'équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Considérons d'abord une surface adjointe $P = 0$, d'ordre $m - 2$, passant par la droite à l'infini du plan $y = 0$ et par les points de contact des plans $y = \text{const.}$, tangents à f. Une telle surface $P = 0$ doit exister nécessairement dès que f possède des intégrales simples de première espèce. Soit D la courbe d'ordre $m - 3$ coupée ultérieurement par $P = 0$ sur le plan à l'infini. Considérons ensuite une autre surface adjointe d'ordre $m - 2$, $Q = 0$, passant par la droite à l'infini du plan $x = 0$, par les points de contact des plans $x = \text{const.}$ et par la courbe D. Ces conditions déterminent la surface Q d'une façon unique et l'expression

$$\frac{Pdx + Qdy}{f'_z}$$

est une différentielle totale de première espèce attachée à f. En variant le polynôme P sous les conditions posées, on obtient ainsi toutes les différentielles de première espèce.

(*) Présentée par E. Picard dans la séance du 24 avril 1911.

La démonstration s'appuie sur le théorème suivant: *La condition pour qu'une intégrale abélienne de première ou de deuxième espèce*

$$\int A(x, y, z)\, dx, \tag{2}$$

déterminée rationnellement sur la courbe irréductible (1), *où y est envisagé comme un paramètre, ait les périodes indépendantes de y, c'est que l'intégrale ne devient jamais de troisième espèce pour des valeurs particulières du paramètre.*

Je vais exposer ici brièvement la démonstration de ce théorème.

Soit R_y la surface de Riemann de genre p, qui représente la fonction z de x, définie par l'équation (1), lorsque y est envisagé comme un paramètre. On sait que tout cycle de R_y peut s'exprimer au moyen d'une combinaison à coefficients entiers de $2p$ cycles distincts, parmi lesquels r cycles invariants, dont chacun revient en lui-même par toute circulation de y, $2p-r$ autres cycles, dont chacun, σ, peut se réduire à un point simple de la surface f par une variation convenable de y et par suite de R_y (Picard et Simart, t. II, p. 332, 397).

Cela rappelé, supposons que l'intégrale (2) demeure de deuxième (ou de première) espèce quel que soit y et que la courbe $A = \infty$ ne renferme aucune des sections $y = \text{const.}$ Soit (a, b, c) le point de f (point de contact d'un plan $y = b$ tangent à f) auquel se réduit le cycle σ lorsque y aboutit à b. Comme l'intégrale (2), quel que soit y, n'a pas de périodes polaires sur la surface R_y, on aura tout d'abord $\omega(b) = 0$, $\omega(y)$ étant la période de (2) le long de σ. Mais je dis qu'on a aussi

$$\omega'(b) = \omega''(b) = \cdots = 0,$$

de sorte que $\omega(y)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine de b, *résulte identiquement nulle.*

Pour ce but il suffit de remarquer que les intégrales

$$\int \frac{dA}{dy}\, dx, \qquad \int \frac{d^2A}{dy^2}\, dx, \cdots, \tag{3}$$

les dérivées $\frac{dA}{dy}, \frac{d^2A}{dy^2}, \cdots$ étant calculées en tenant compte que z est fonction de y, demeurent elles-mêmes de deuxième espèce quel que soit y. Il s'ensuit que les périodes $\omega'(y), \omega''(y), \cdots$ des intégrales (3) le long du cycle σ, aboutissent à zéro pour $y = b$.

Cette conclusion étant valable pour tout cycle du type σ, on en tire que l'intégrale (2) ne peut avoir de périodes différentes de zéro qu'aux cycles invariants, et comme ces périodes sont des fonctions uniformes et partout finies de y, on en conclut qu'elles sont des constantes. C.Q.F.D.

Une conséquence remarquable, au point de vue invariantif, est la suivante:

Soit $|C|$ un faisceau linéaire irréductible de courbes tracées sur une surface d'irrégularité $q = p_g - p_a$, et soit $|C'|$ le système adjoint à $|C|$. Les courbes indépendantes $C + C'$ qui passent par les points base et par les points doubles isolés des courbes du faisceau, sont justement au nombre de q.

LIII.

SUL PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DEL NUMERO

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *33*$_1$ (1912), pp. 313–327 (*).

Nella geometria numerativa uno degl'istrumenti di uso più largo è il cosidetto principio della conservazione del numero (Princip der Erhaltung der Anzahl), che lo Schubert ha enunciato fin dal 1874 sotto la forma seguente (1):

Abbiasi una varietà ∞^k di enti Γ, ai quali s'imponga una condizione di dimensione k, che sia definita da assegnate relazioni tra l'ente Γ e un certo altro ente Γ' di data definizione. Allora il numero (finito) degli enti Γ che soddisfano a quella condizione, si conserva inalterato particolarizzando comunque l'ente Γ', purché però il numero stesso non divenga infinito. Si sottintende che trattasi di condizioni e di enti *algebrici*.

Questo principio presuppone in sostanza il fatto che la determinazione degli enti Γ richiesti, si possa far dipendere dalla risoluzione di un'equazione algebrica di grado n, nei cui coefficienti compariscano dei parametri. Se, per un gruppo di valori particolari dei parametri, quest'equazione ha più di n radici (contando ogni radice col suo ordine di molteplicità), essa riducesi addirittura ad un'identità.

Recentemente lo Study e il Kohn hanno sollevato contro questo principio esplicite obiezioni, le quali mostrano come il principio stesso non sia sempre vero, nella forma, un pò indeterminata, che ho sopra riferito (2). Di ciò credo si rendesse conto ognuno: tant'è vero che nessun errore si è riscontrato finora nelle applicazioni che non furon fatte con intento critico.

Comunque, in questo caso si tratta di qualcosa più che un semplice scrupolo di eccessivo rigore; e la critica non è poi troppo esigente se richiede sia

(*) Adunanza del 10 marzo 1912.

(1) H. SCHUBERT: *a*) *Die Charakteristiken der ebenen Curven dritter Ordnung im Raume* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1874, pp. 267–283], p. 274; *b*) *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1879), § 4. Il principio stesso può considerarsi come incluso nel *principio di continuità* di Poncelet, di cui già lo stesso Poncelet, nonchè Salmon, Steiner, Jonquières, Chasles, Cayley, etc. avevano fatte applicazioni enumerative.

(2) E. STUDY, *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, Teubner, 1903), p. 378; G. KOHN, *Ueber das Princip von der Erhaltung der Anzahl*, Archiv der Mathematik und Physik, (3) *4* (1903), pp. 312–316; E. STUDY, *Über das sogenannte Prinzip der Erhaltung der Anzahl*, ibid., (3) *8* (1905), pp. 271–278; E. STUDY, *Über das Prinzip der Erhaltung der Anzahl*, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker–Kongresses in Heidelberg (1904), pp. 388–395.

circoscritto con precisione il campo di validità del principio [3]. Di tale delimitazione intendo appunto occuparmi in questo lavoro.

Un primo studio in proposito fu già fatto dal Giambelli [4], valoroso cultore della geometria numerativa. Ma in verità a me non sembra che questo tentativo possa dirsi felice, giacchè la questione, almeno com'io la vedo, piuttosto che nella ricerca di principî più generali, che abbraccino i casi in cui il numero non si conserva, consiste nel dare una formulazione chiara e precisa delle ipotesi, sotto cui il principio può applicarsi senza eccezioni, conservandogli la semplice forma originaria, ed evitando convenzioni e definizioni più o meno arbitrarie o nebulose, le quali finirebbero collo scoraggiare i geometri dall'applicare il principio stesso, qualora essi non volessero addirittura continuare a fidarsi dell'intuizione.

Non mi pare che la definizione di « particolarizzazione uniforme » di una condizione e l'enunciato del principio dati dal citato Autore, rispondano a questi requisiti [5].

Riferirò il punto di vista dal quale io mi son posto nello studiar la questione e la delimitazione che riterrei più opportuna pel principio di Schubert. La natura dell'argomento è tale che, volendolo trattar subito in generale ed in modo completo, per quanto non occorrano considerazioni concettualmente molto difficili, si andrebbe incontro ad un'esposizione pesante, a causa della soverchia generalità del linguaggio, che converrebbe usare. Reputo utile pertanto di far prima un'esposizione induttiva, giustificando sopra esempi ciascuna delle affermazioni generali. Riserbo ad una seconda parte le dimostrazioni complete.

PARTE I

Esposizione induttiva dei concetti e delle conclusioni

1. *Concetto di condizione algebrica irriducibile.* Comincio dall'osservare che, come del resto è implicito nell'enunciato di Schubert, ogni condizione

(3) La questione fu posta all'ordine del giorno da D. Hilbert durante il Congresso matematico di Parigi del 1900, nella conferenza: *Sur les problèmes futurs des Mathématiques* [Comptes rendus du deuxième Congrès international des Mathématiciens, Paris (1900), pp. 58–114].

(4) G. Z. Giambelli: *a*) *Sul principio della conservazione del numero*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, *13* (1904), pp. 545–556; *b*) *Sul principio della conservazione del numero e sul calcolo simbolico di Hermann Schubert*, Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, *4* (1909), pp. 18–27. Cfr. anche le chiare considerazioni sugli esempi di Study e di Kohn, dovute a R. Sturm, *Das Prinzip der speziellen Lage*, Archiv der Mathematik und Physik, (3) *12* (1907), pp. 113–117.

(5) Né lo spirito degli ingegnosi esempi contraddicenti al principio, dati specialmente dallo Study, vien sufficientemente illuminato dal risultato del Giambelli. Veggansi infatti le spiegazioni date da questo Autore dell'esempio concernente il numero delle proiettività che lasciano invariata una quaderna di punti della retta [(4) *a*)] e dell'esempio relativo al numero dei punti comuni a due curve tracciate sopra un cono quadrico [(4) *b*)].

variabile [anche di dimensione inferiore a k (6)] imposta agli enti Γ d'una varietà algebrica V, ∞^k, si traduce in una *corrispondenza algebrica* tra gli elementi Γ di V e gli elementi Γ' di un'altra varietà algebrica V', la cui dimensione k' non ha a priori alcuna relazione con k. Fissando uno degli elementi Γ', i Γ omologhi del dato Γ', son quelli che soddisfanno ad una *particolarizzazione* della condizione variabile.

Così per esempio la condizione imposta ad una retta Γ dello spazio di trisecare una curva algebrica Γ' di dato ordine n, si traduce in una corrispondenza algebrica tra la varietà V_4 delle rette Γ e la varietà algebrica V' (generalmente riducibile e costituita anche da parti di diverse dimensioni) delle curve Γ' di ordine n, assumendosi omologhe una retta Γ ed una curva Γ', quando Γ triseca Γ'.

La condizione perché una retta Γ dello spazio si appoggi ad una quaderna Γ' di rette – in questo caso l'elemento Γ' è composto – dà luogo similmente ad una corrispondenza algebrica tra la V_4 delle rette e la V'_{16} delle quaderne di rette.

La condizione perché una proiettività sopra la retta lasci invariata una data quaderna di punti, dà luogo ad una corrispondenza tra la V_3 delle proiettività e la V'_4 delle quaderne; etc. (7).

Una *corrispondenza* algebrica tra due varietà V, V' di elementi Γ, Γ', dicesi *irriducibile*, quando è irriducibile la varietà che ha per elementi le coppie Γ, Γ' di enti omologhi nella corrispondenza (per il che bisogna, ma non basta, che sieno irriducibili le V, V' stesse).

Chiamo irriducibile ogni condizione che si traduca in una corrispondenza algebrica irriducibile.

Così ad esempio è irriducibile la condizione imposta ad una retta di appoggiarsi ad una curva algebrica di una data famiglia (irriducibile).

È invece riducibile la condizione affinchè una proiettività Γ sopra una retta, muti in sé una data quaderna Γ', perché tale condizione si traduce in una corrispondenza tra la V'_4 delle quaderne e una varietà a due dimensioni, spezzata in tre parti distinte (pure a due dimensioni) aventi rispettivamente per elementi le involuzioni, le proiettività cicliche di 3° ordine, e le proiettività cicliche di 4° ordine.

Ma anche se ci limitassimo a considerare la condizione c che s'impone ad un'*involuzione* Γ di lasciar fissa una quaderna Γ' assegnata genericamente, pur avendosi in tal modo una corrispondenza tra una V'_4 e una V_2 ambedue irriducibili, la corrispondenza sarebbe ancora riducibile. E invero, partendo da una data involuzione Γ, vi sono due varietà *distinte*, di differenti dimensioni, costituite da quaderne Γ' invarianti per Γ, e cioè la varietà ∞^1 delle

(6) Una condizione imposta agli enti Γ di una varietà ∞^k si dice *di dimensione* a, quando vi sono ∞^{k-a} enti Γ che la verificano.

(7) Veramente, com'è avvertito anche più sotto, la corrispondenza ha luogo soltanto tra V'_4 e una varietà subordinata a V_3. Non è questo il solo caso in cui la condizione non agisce che su una parte dei Γ.

quaderne formate dai due punti doppi e da una coppia di Γ, e la varietà ∞^2 i cui elementi son le quaderne formate mediante due coppie dell'involuzione Γ. Allorquando Γ si muove entro V_2, quest'ultima varietà ∞^2 di elementi Γ', descrive *tutta* la V_4' delle quaderne. La prima varietà ∞^1 descrive invece la V_3' subordinata, avente per elementi i gruppi armonici. Così che la corrispondenza che tra V_2 e V_4' vien posta dalla condizione sopra definita, risulta la *somma* di due corrispondenze irriducibili: l'una tra V_2 e V_4', ove si chiamino omologhi un elemento Γ ed un elemento Γ' quando l'involuzione Γ lascia fissa la quaderna Γ', scambiando però di posto ogni punto della quaderna; l'altra tra V_2 e la varietà V_3' subordinata a V_4', chiamandosi omologhi un Γ ed un Γ' quando O lascia fisso Γ', mutando tra di loro due soli punti della quaderna.

Insomma la corrispondenza ω_ε cui dà luogo la condizione ε imposta ad una proiettività Γ di lasciar fissa una quaderna Γ', si scinde nella somma delle seguenti corrispondenze irriducibili:

1°) Corrispondenza ω_α che intercede tra le involuzioni e le quaderne formate con due coppie di ciascuna di esse.

2°) Corrispondenza ω_β tra le involuzioni e i gruppi armonici.

3°) Corrispondenza ω_γ tra le proiettività cicliche di 3° ordine e i gruppi equianarmonici.

4°) Corrispondenza ω_δ tra le proiettività cicliche di 4° ordine e i gruppi armonici.

Nella ω_α la varietà dei Γ' è di dimensione 4, mentre le varietà dei Γ' su cui agiscon ω_β , ω_γ , ω_ε son di dimensione 3.

2. *Condizioni di validità del principio di Schubert.* L'ultimo esempio esaminato è singolarmente istruttivo per la nostra ricerca, giacché chiarisce nel modo più concreto, le cose che dovremo poi esporre. Come si vedrà, tutti gli argomenti che giuocano per arrivare alla conclusione generale, si trovano già in germe nell'esame approfondito di questo caso particolare, che lo Study ha saputo scegliere con mano felice.

La introduzione dei concetti indicati, *che derivano nel modo più naturale dall'algebricità* (nelle questioni algebriche il concetto dominante è infatti sempre quello di riducibilità o irriducibilità), permette di concludere in generale che: *quando si abbia una condizione, imposta a dati enti Γ, la quale si traduca in una corrispondenza ω tra gli enti Γ e certi altri enti Γ', il principio della conservazione del numero ed il relativo calcolo simbolico sono applicabili senza riserve, allora e solo allora che la corrispondenza ω sia irriducibile oppure si scinda nella somma di più corrispondenze irriducibili tali che*:

1°) *Gli elementi Γ in esse corrispondenti ad un generico Γ', si distribuiscano in varietà della stessa dimensione.*

2°) *Le varietà dei Γ' omologhe della varietà di tutti i Γ nelle corrispondenze medesime, abbiano, esse pure, la stessa dimensione.*

Circoscritto così il campo di validità del principio, *la delimitazione risponde bene all'esempio che già una vaga intuizione fa capire esser il tipo dei casi in cui il numero non si conserva.* Il caso cioè in cui si cerchi, entro uno spazio S_r, il numero dei punti giacenti simultaneamente sopra un S_{r-k} e sopra una varietà algebrica V_k costituita da parti di differenti dimensioni ($\leq k$). Il numero cercato aumenta, senza peraltro diventare infinito, quando, a partire da una posizione generica, lo S_{r-k} venga ad appoggiarsi a qualche parte di V_k di dimensione $< k$.

In quest'esempio si posson prendere come enti Γ' gli S_{r-k} di S_k e come enti Γ i punti di V_k, e chiamare omologhi un Γ ed un Γ' quando si appartengono. La corrispondenza si scinde allora nelle somme di tante corrispondenze quante sono le parti di V_k ed ogni parte di dimensione $h (\leq k)$ dà luogo ad una corrispondenza tale che la varietà dei Γ' su cui essa agisce ha la dimensione $h + k(r - k)$.

Cosicchè in questo caso, essendovi qualche $h < k$, non è soddisfatta la 2ª delle ipotesi sopra enunciate, mentre è soddisfatta la 1ª (a un generico Γ' risponde infatti un gruppo di un numero finito di Γ).

Mediante la nozione di *somma* di più condizioni [8], l'enunciato precedente, come vedremo, si può anche presentar così:

Il principio di Schubert vale soltanto per quelle condizioni che si risolvono in somme di condizioni irriducibili della stessa dimensione.

Nell'esempio di Study, che consideravo poco fa, la condizione ε affinchè una proiettività (non identica) sulla retta muti in sé una quaderna di punti, si spezza nella somma delle seguenti condizioni irriducibili:

1°) Condizione α affinchè una proiettività sia involutoria e lasci invariata una quaderna permutandone tutti i punti.

2°) Condizione β affinchè una proiettività sia involutoria e lasci fissa una quaderna, permutandone 2 soli punti.

3°) Condizione γ affinchè una proiettività sia ciclica di 3° ordine e lasci invariata una quaderna.

4°) Condizione δ affinchè una proiettività sia ciclica di 4° ordine e lasci invariata una quaderna.

Quando s'intenda di fissare le condizioni α, β, γ, δ collo stesso grado di genericità con cui si vuol fissare la condizione ε complessiva, assegnando cioè in modo affatto generico la quaderna invariante, le β, γ, δ risultan di dimensione superiore alla dimensione di ε (e di α). Ed è appunto questa circostanza che non permette di applicare alla ε il principio della conservazione del numero scegliendo la quaderna in modo che sia armonica od equianarmonica (nel primo caso il numero delle proiettività, che lasciano invariata

(8) Così chiamasi nel calcolo simbolico la condizione che s'impone ad un ente volendo che soddisfaccia all'una o all'altra delle condizioni componenti, prese separatamente.

la quaderna, sale da 4 a 8 e nel secondo caso sale da 4 a 6). Il principio stesso è invece applicabile alle singole condizioni α , β , γ , δ, beninteso allorquando tali condizioni si riferiscano a varietà di enti (proiettività) la cui definizione sia con esse compatibile.

Come si vede *il principio di Schubert è in sostanza applicabile ad ogni condizione, purché si determini l'enunciato di questa in tal guisa, che non abbracci più le eventuali condizioni incompatibili col grado di variabilità che si vuol lasciare agli enti cui s'intende di riferire la data condizione.*

Così nell'esempio dello Study la genericità della quaderna è senz'altro incompatibile colle condizioni β , γ , δ, e l'enunciato della condizione, depurata da queste condizioni incompatibili, riducesi all'enunciato di α. Il numero delle involuzioni che lasciano invariata una quaderna permutandone tutti i punti, riman sempre eguale a 3, comunque si particolarizzi la quaderna (beninteso in modo che il numero resti finito).

La opportunità di considerar le cose dal punto di vista esposto riescirà evidente, oltrechè dagli esempi qui approfonditi, anche dalla facilità con cui si prova per esempio che il principio di Schubert è applicabile al cosidetto problema degli spazi secanti (n. 8).

3. *Esame di alcuni esempi che sembrano sfuggire alla delimitazione precedente.* Alcuni altri esempi addotti contro il principio di Schubert, a prima vista sembra che sfuggano alla delimitazione di validità, che ho sopra indicata, perché contraddicono al principio stesso, nonostante si riferiscano a condizioni irriducibili! Ma non è difficile convincersi che in questi casi, più che di eccezioni al principio, si tratta di *interpretazioni che menomano l'algebricità delle condizioni considerate.*

Così Kohn osserva che il numero delle rette appoggiate in 4 punti *distinti* ad una quaderna generica di rette date nello spazio, si riduce da due ad uno, quando due delle 4 rette vengono ad incontrarsi. Ma qui si tratta di *una condizione che, così com'è enunciata, non è più algebrica*, giacchè il fatto che i punti sieno distinti non si esprime con un'equazione, ma con una disuguaglianza. Tanto varrebbe voler addurre come un caso d'eccezione al principio di Schubert, il fatto che il numero dei punti *distinti* comuni ad una retta e ad una curva algebrica piana, può diminuire per posizioni speciali della retta.

È ben noto che nel computo del numero delle soluzioni di ogni problema algebrico, si deve tener conto delle *soluzioni multiple* e delle *soluzioni degeneri*. Queste ultime in verità non si presentano se non quando la condizione sia enunciata in modo da non definire tutta una varietà algebrica, ma soltanto la varietà – non algebrica – ottenuta escludendo alcuni elementi da una varietà algebrica. E sono precisamente gli elementi esclusi, i quali, rispetto a ciò che la condizione esigeva, appariscon *degeneri*.

Della stessa natura, per quanto un pò più riposta, è la spiegazione di un altro esempio (addotto dallo Study), che pel momento mi limito a riferire in un caso particolare.

Si tratta del numero dei punti comuni a due cubiche gobbe A , B, fuori del vertice O di un cono quadrico F, su cui esse son tracciate. Si vede subito (considerando per esempio la cubica B come intersezione parziale di F col cono quadrico che proietta B da un suo punto generico), che le due cubiche, fuori di O, si tagliano in 4 punti.

Ebbene, lo Study osserva che spezzando la cubica B in tre generatrici del cono – e questa degenerazione è effettivamente possibile – il numero delle intersezioni, *fuori di* O, si abbassa a 3.

Ma anche in tal caso si rileverà che la condizione imposta ad un punto del cono F, di appartenere simultaneamente ad A , B e *di esser diverso da* O, *non è algebrica*, se non a patto che non si escludano le eventuali intersezioni di A , B, che, variando A o B o ambedue le curve, vengano infinitamente vicine ad O. Si tratta insomma di non escludere dal computo le eventuali soluzioni degeneri (degeneri di fronte al requisito richiesto che le intersezioni sieno diverse da O).

Effettivamente un esame più accurato mostra che, quando B tende con continuità alla curva composta da 3 generatrici del cono, una delle 4 intersezioni che prima eran distinte da O, viene infinitamente vicina al vertice nella direzione della tangente in O alla cubica A. Ciò si vede analiticamente o con una trasformazione birazionale del cono F, la quale sciolga l'intorno di 1° ordine del punto O, mutandolo in una curva (per esempio trasformando F in una rigata di 6° ordine dello spazio S_7, mediante il sistema lineare delle quadriche per O).

PARTE II

Dimostrazione completa delle conclusioni precedenti

4. *Applicabilità del principio di Schubert alle condizioni irriducibili.* Data una varietà algebrica V di enti Γ, indichiamo con c una condizione algebrica imposta ai Γ, e suscettibile di una variazione continua. Ad ogni particolarizzazione $\bar{c}$ della condizione, risponde una varietà algebrica $\overline{M}$, costituita dagli enti Γ, che soddisfanno a $\bar{c}$. Variando $\bar{c}$ nel proprio campo algebrico, si ha un sistema algebrico di varietà M. La c si può allora enunciare dicendo che « è la condizione affinchè un Γ di V appartenga ad una M ». In tal guisa si vien a porre una corrispondenza algebrica tra gli enti Γ e le varietà M, essendo omologhi un Γ ed una M che si appartengano. Al sistema delle M si potrà anche sostituire, se si vuole, una qualunque varietà V' i cui elementi Γ' rispondano birazionalmente agli elementi M del sistema algebrico. Ed allora la c si potrà enunciare dicendo che « è la condizione affinchè un Γ risponda a un dato Γ' nella corrispondenza algebrica tra V e V' ».

Così per esempio quando si considera la condizione c affinchè una retta Γ si appoggi ad una curva Γ' di ordine n, la varietà $\overline{M}$, relativa ad una $\bar{c}$, è costituita dal complesso delle rette appoggiate ad una curva $\overline{\Gamma'}$ di ordine n. Alla totalità dei complessi ottenuti al variare di $\overline{\Gamma'}$, si potrà sostituire la totalità

delle Γ' stesse, perché si tratta appunto di una varietà riferita birazionalmente al sistema dei complessi M.

È ovvio che le considerazioni precedenti valgono indipendentemente dalla irriducibilità delle varietà considerate.

La condizione c si scinderà anzitutto in una somma di condizioni, ciascuna delle quali, ε, sarà relativa ad una parte irriducibile di V'; ε sarà cioè la condizione affinchè un Γ corrisponda a un dato elemento di una parte assegnata di V'.

Così la condizione affinchè una retta Γ si appoggi ad una curva Γ' di dato ordine, si scinde nelle somme di tante condizioni, quante sono le famiglie (irriducibili) in cui le Γ' si distribuiscono. Si avvertirà che le ε e le parti irriducibili di V', non hanno necessariamente la stessa dimensione.

Fissiamo ora l'attenzione sopra una ε, la quale si traduce in una corrispondenza ω_ε tra una parte irriducibile W_d di V ed una parte irriducibile $W'_{d'}$ di V'. Supponiamo dapprima che la ω_ε sia essa pure irriducibile.

Se a un Γ' generico risponde in W una varietà N di dimensione e (e ad un Γ risponde in W' una varietà N' di dimensione e'), sarà $d - e$ $(= d' - e')$ la dimensione della condizione ε (ed anche la dimensione della condizione reciproca definita coll'imporre a un Γ' di esser omologo d'un generico Γ).

La suddetta varietà $\overline{N}$, corrispondente ad una particolarizzazione generica $\bar{\varepsilon}$ di ε, quando $\overline{\Gamma'}$ tende a Γ'_0, ha per limite la varietà N_0 dei Γ omologhi di Γ'_0; potendo al più accadere che la varietà limite venga a contenere delle componenti multiple. Ma, comunque, quando si contino debitamente le molteplicità delle soluzioni limiti, le due condizioni $\bar{\varepsilon}$ ed ε_0 relative a $\overline{\Gamma'}$ e a Γ'_0, saranno simbolicamente equivalenti, cioè si potrà scrivere

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 ,$$

nel senso che, moltiplicando le due condizioni per una qualunque condizione σ, di dimensione e, da esse *indipendente*, i *numeri* $\bar{\varepsilon}\sigma$ ed $\varepsilon_0\sigma$ dei Γ che soddisfanno simultaneamente alle $\bar{\varepsilon}$, σ o alle ε_0, σ, *saranno uguali* [9]. Invero i Γ stessi si otterranno determinando le intersezioni rispettive delle due varietà $\overline{N}$, N_0, di dimensione e, appartenenti ad uno stesso sistema continuo, colla varietà H, di dimensione $d - e$, che è costituita dai Γ soddisfacenti a σ.

(9) Qui si fa uso dei principî fondamentali su cui poggia il calcolo simbolico della geometria numerativa, che ha tante analogie col calcolo logico [cfr. H. SCHUBERT, *loc. cit* (1)), *b*, § 5, pag. 19]. Definita la *somma* di due condizioni (e ripetiamo che con ciò si intende la condizione ottenuta imponendo ad un ente di soddisfare all'una o all'altra delle condizioni date) e il *prodotto* di due condizioni (condizione risultante dalla coesistenza delle due), si dicono *uguali* i simboli di due condizioni di dimensione α, applicate ad un ente che dipenda da k costanti, quando moltiplicando le due condizioni per una medesima di dimensione $k - \alpha$, *comunque* scelta, purchè da loro indipendente, s'ottengono *sempre* come risultati numeri uguali. Si osserverà che gli enti che verifican la condizione somma di due altre, formano la varietà *somma* di quelle costituite dagli enti che verifican le condizioni componenti; mentre gli enti che verificano la condizione prodotto costituiscono la varietà *intersezione* di quelle definite dalle condizioni componenti.

In tutto ciò è sottinteso che l'elemento limite Γ'_0 verso cui abbiam fatto avvicinare l'elemento $\overline{\Gamma}'$, non sia un *elemento fondamentale* nella corrispondenza ω_ε, cioè che non abbia più che ∞^e elementi Γ omologhi, perché, nell'ipotesi contraria, la varietà H_{d-e}, conterrebbe infiniti elementi Γ associati al dato Γ'_0, sicchè, passando da $\overline{\Gamma}'$ a Γ'_0, il numero $\bar{\varepsilon}\sigma$ diverebbe infinito.

Avvertiamo incidentalmente che anche in questo caso non sarebbe impossibile di valutare il numero $\bar{\varepsilon}\sigma$, ricorrendo alla particolarizzazione ε_0: basterebbe avvicinarsi a Γ'_0 con una *direzione* diversa da quelle che congiungono Γ'_0 coi Γ' fondamentali che gli sono infinitamente vicini, giacchè allora la varietà $\overline{N}$ avrebbe una ben determinata varietà limite della stessa dimensione.

Da quanto precede può trarsi intanto la conclusione che: *il principio della conservazione del numero ed il calcolo coi simboli di condizione valgono senza riserve per le condizioni irriducibili.*

Di più si vede come: *un'uguaglianza tra più simboli di condizione (della stessa dimensione) non è che un modo diverso di scrivere che, entro una varietà irriducibile di elementi Γ, ai quali quelle condizioni s'impongano, esiste un legame algebrico tra le varietà costituite dai Γ che ad esse soddisfanno* [10].

5. *Di nuovo sulle condizioni di validità del principio di Schubert.* Consideriamo ora il caso in cui la corrispondenza ω_ε tra W e W' sia riducibile. Allora è chiaro che se ad un $\overline{\Gamma}'$ generico, diverso dai fondamentali, risponde una varietà $\overline{N}$, sia pur riducibile, ma costituita da parti della stessa dimensione; e di più se non accade *mai* che quando $\overline{\Gamma}'$ va verso una posizione limite non fondamentale Γ'_0, compaiano *nuovi* elementi Γ omologhi, i quali cioè non sien limiti di quelli che corrispondono al Γ' variabile da $\overline{\Gamma}'$ a Γ'_0, si può ripeter tutto quanto s'è detto nel n. 4.

Ora, quand'è che posson verificarsi le due ipotesi scartate nell'affermazione che precede?

La prima, cioè che $\overline{N}$ contenga parti di diversa dimensione, si verifica evidentemente quando le corrispondenze irriducibili di cui ω_ε è la somma, fanno corrispondere ad un Γ' generico varietà di dimensioni diverse.

La seconda, cioè che esista qualche Γ'_0 *non fondamentale*, a cui rispondano dei Γ che non si possan considerare come limiti dei Γ omologhi ad un Γ' generico, si verifica quando una almeno delle corrispondenze irriducibili che compongono ω_ε, ha luogo tra una varietà Z', di dimensione $l' < d'$, contenuta in W'_d, e un'altra varietà Z, di dimensione $l \leq d$, contenuta o coincidente con W_d.

(10) Più varietà H, di dimensione $h \leq d - 1$, contenute in una W_d, diconsi *algebricamente legate*, quando una combinazione lineare, a coefficienti interi e positivi, non tutti nulli, di alcune tra esse, sta in un medesimo sistema algebrico irriducibile con una combinazione analoga delle rimanenti. Vedi F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Mathematische Annalen, *62* (1906), pp. 194–225 [Memoria XXIX, vol I, p. 332; N.d.R.].

Un esempio del primo tipo si ha considerando tra due superficie algebriche irriducibili W e W' la somma $\pi + \varrho$ di una corrispondenza π che faccia passare da un punto di W' a un gruppo di un numero finito di punti di W (e quindi da un punto di W a un numero finito di punti di W'), e di un'altra corrispondenza ϱ che associ ai punti di W' le curve C di un sistema ∞^2 tracciato su W (e faccia quindi passare da un punto di W ad una curva di W').

Un esempio del secondo tipo si ha considerando tra le medesime superficie W e W' la somma $\varrho + \tau$ della corrispondenza ϱ sopra definita, colla corrispondenza τ fra i punti di una curva Z', tracciata su W', e le curve D di un sistema algebrico ∞^1 tracciato su W. Finchè un punto Γ' di W' si mantiene esterno a Z' e diverso dai punti fondamentali della corrispondenza, ad esso risponde una curva C di W; mentre, quando Γ' cade in Z', ad esso risponde una curva $C + D$.

Né è cosa arbitratia e artificiosa la considerazione di corrispondenze riducibili siffatte tra le varietà W_d e W'_d, perché effettivamente non mancano esempi di condizioni algebriche che ad esse conducano.

Ecco l'esempio di una condizione del primo tipo: Consideriamo sopra una retta le quaderne di punti di cui fa parte un punto fissato A e che son mutate in sé da una data involuzione. In questo caso l'elemento Γ è una quaderna di punti contenente A, l'elemento Γ' è un'involuzione, le varietà (irriducibili) W e W' son rispettivamente a tre e a due dimensioni. A un dato Γ' risponde in W *un elemento* Γ, costituito dal punto A, dal coniugato A' di A nell'involuzione data e dai punti doppî U, V della medesima; e inoltre *una varietà* ∞^1, costituita dalle quaderne contenenti A, A' e un'altra coppia arbitraria dell'involuzione.

Un esempio di una condizione del 2° tipo vien dato, come già s'è visto, dalla condizione affinchè un'involuzione Γ di punti della retta, lasci invariata una data quaderna Γ'. In questo caso W è di dimensione 2 e W' di dimensione 4. La corrispondenza traducente la condizione, risulta la somma di una corrispondenza irriducibile tra W' e W e d'un'altra tra la varietà delle quaderne armoniche e W.

6. Ritorniamo alle considerazioni generali ed esaminiamo anzitutto il primo tipo di condizioni.

Se e è la dimensione d'una parte P di N, di dimensione massima, ed $f < e$ la dimensione di un'altra parte Q, la condizione ε, che s'impone ad un Γ volendo che giaccia in N, si scinde nella somma di più condizioni, tra cui vi sono le condizioni π, χ affinchè Γ giaccia in P o in Q.

La prima di queste ha la dimensione $d - e$, mentre la seconda ha la dimensione $d - f > d - e$: si può dunque dire che in tal caso la condizione considerata si scinde nella somma di condizioni che non hanno tutte la stessa dimensione.

Orbene, il principio della conservazione del numero non è incondizionatamente applicabile alla condizione ε, perché moltiplicando ε per una generica condizione σ di dimensione e, cioè intersecando N con una generica H

di dimensione $d - e$, al numero $\varepsilon\sigma$ portano contributo soltanto i termini del tipo $\pi\sigma$, mentre gli altri, del tipo $\chi\sigma$, sono nulli. Invece, quando, pur conservandosi la σ *indipendente* da ε, cioè tale che i Γ soddisfacenti ad $\varepsilon\sigma$ sieno in numero finito, la varietà H viene ad appoggiarsi a Q, il numero $\varepsilon\sigma$ cresce, perché ad esso porta un contributo maggior di zero, anche il termine $\chi\sigma$.

Esaminiamo il secondo tipo di condizioni. S'indichi ancora con N_e la varietà dei Γ omologhi di un Γ' generico. La condizione complessiva ε, imposta inizialmente ai Γ, pel modo com'è enunciata, richiede *a priori* che i Γ abbiano con un *generico* Γ' o la relazione μ espressa dalla corrispondenza tra W e W' o la relazione ν espressa dalla corrispondenza tra la varietà Z di W ed una varietà Z' subordinata a W'. Quest'ultima condizione, come risulta *a posteriori*, è incompatibile colla scelta generica di Γ', cioè con una particolarizzazione generica di ε. Ciò si può esprimere in breve dicendo che « ν, considerata come parte di ε ($\varepsilon = \mu + \nu$), ha la dimensione superiore ad ε (e a μ) ». Ma la cosa ha un senso puramente convenzionale, perché in realtà della condizione ν non si dovrebbe parlare, finché non si scegliesse Γ' in Z'. E in fondo, qualora la condizione ε si enunciasse correttamente, essa non dovrebbe includere condizioni incompatibili colla libertà che si vuol lasciare all'elemento Γ'. L'esempio di Study, relativo alle proiettività sopra una retta, illumina chiaramente questa circostanza.

Comunque, qualora l'enunciato della condizione ε si lasci nella sua forma iniziale, non si potrà più pretendere che alla ε sia sia applicabile senza restrizioni il principio di Schubert. Si moltiplichi infatti ε per una generica condizione σ, di dimensione e, cioè s'intersechi la varietà dei Γ omologhi d'un dato Γ', con una varietà H, di dimensione $d - e$. Finchè Γ' è generico, il numero $\varepsilon\sigma$ risulterà uguale a $\mu\sigma$, che è precisamente il numero delle intersezioni di H con N; mentre quando Γ' cade in Z', anche se σ resta indipendente da $\varepsilon = \mu + \nu$, H potrà incontrare la varietà dei Γ che sono omologhi a Γ' nella corrispondenza tra Z' e Z, sicchè il numero $\varepsilon\sigma$ riceverà un nuovo contributo dal prodotto $\nu\sigma$, che in generale era zero.

La discussione fatta ci permette dunque di affermare che: *il principio di Schubert non è applicabile, senza opportune cautele, alle condizioni riducibili, che si risolvano in somme di condizioni di diversa dimensione. A tali condizioni, se si volesse, si potrebbe continuare ad applicare il calcolo simbolico; ma non ne varrebbe la pena, perché quando si passasse dai simboli ai numeri, il valore di questi non risulterebbe indipendente dalla particolare scelta degli elementi che definiscon le condizioni in giuoco. Mentre è proprio tale indipendenza che rende utile ed espressivo il calcolo simbolico.*

Mi sembra pertanto che sia inutile la ricerca di un principio – non più della conservazione, ma della variazione del numero – che sia applicabile a tutte le condizioni algebriche.

Tanto più che enunciata una qualunque condizione, si può farne un'analisi preventiva, in guisa da sceverare le condizioni irriducibili in essa contenute ed applicare il principio di Schubert ed il calcolo simbolico separatamente a ciascuna di queste.

Le condizioni di validità del principio si posson porre evidentemente, anche sotto la forma indicata nella Parte I, e cioè che la corrispondenza ω_ε imagine della condizione ε, si scinda nella somma di più corrispondenze irriducibili tali che:

1°) La varietà dei Γ omologhi di un generico Γ' in queste corrispondenze, abbian la stessa dimensione.

2°) Anche le varieta dei Γ' trasformate della varietà completa dei Γ, mediante le corrispondenze suddette, abbian la stessa dimensione.

Infatti, se non è soddisfatta la 1ª o la 2ª ipotesi, si cade rispettivamente nel 1° o nel 2° tipo di condizioni sopra esaminate.

Osservazione. – Per riconoscere *quand'è che una data condizione è irriducibile*, dopo aver verificato la irriducibilità delle varietà di elementi Γ e Γ', tra le quali essa pone una corrispondenza, bisognerà verificare la irriducibilità della varietà delle coppie omologhe Γ, Γ'. A tal uopo basta evidentemente verificare la irriducibilità della varietà degli elementi Γ (o Γ') che corrispondono ad un generico Γ' (o Γ). Che se poi né la varietà dei Γ corrispondenti ad un genrico Γ', né la varietà dei Γ' omologhi di un generico Γ, sono irriducibili, non si potrà ancora concluder nulla circa la irriducibilità o meno della nostra corrispondenza. Ciò accade per esempio allorquando la corrispondenza ha *indici* finiti, cioè fa passare da un generico Γ (o Γ') ad un numero finito (> 1) di elementi Γ' (o Γ).

In questo caso la irriducibilità della corrispondenza si desume da ciò, che fissata *comunque* una coppia Γ_0, Γ'_0 di elementi omologhi (non fondamentali), facendo circolare Γ (o Γ') a partire dalla posizione iniziale Γ_0 (o Γ'_0) e ritornando ad essa, si può scambiare l'elemento Γ'_0 (o Γ_0) con ognuno degli altri Γ' omologhi di Γ_0 (o Γ'_0).

7. *Esame più completo di un esempio addotto dallo Study.* Riprenderò ora a trattare in modo completo dell'esempio relativo al numero dei punti comuni a due curve tracciate sopra un cono quadrico, per mostrare *che effettivamente in questo caso si tratta di una condizione irriducibile e che l'unica ragione dell'apparente contraddizione col principio di Schubert, sta nel fatto che non si tiene il debito conto delle soluzioni degeneri.*

Sieno dunque A, B due curve algebriche tracciate sopra un cono quadrico F di vertice O, le quali passino pel vertice colle molteplicità rispettive μ, ν e incontrino una generica generatrice G, fuori di O, in m, n punti; sicchè insomma sieno $2m + \mu$, $2n + \nu$ gli ordini di A, B.

Trasformiamo il cono F in una rigata razionale normale Φ, di 6° ordine, dello spazio S_7, mediante il sistema delle quadriche per O, e diciamo O' la conica di Φ trasformata dell'intorno di O; A', B' le curve corrispondenti ad A, B e G' una generatrice di Φ, trasformata della generatrice G di F.

Poichè su Φ la *base* è costituita da una generatrice e dalla conica O', unisecante le generatrici [11], le A', B' apparterranno a sistemi lineari esprimibili mediante combinazioni lineari di $|G'|$ ed $|O'|$. Avremo cioè

$$A' \equiv \alpha G' + \beta O', \tag{1}$$

$$B' \equiv \gamma G' + \delta O', \tag{2}$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son interi da determinarsi.

Segando i due membri dell'equivalenza (1) colle curve O', G', avremo rispettivamente le relazioni numeriche:

$$[A' O'] = \alpha [G' O'] + \beta [O' O'], \qquad [A' G'] = \alpha [G' G'] + \beta [O' G'],$$

ove $[A' O'], \cdots$ denotano il numero dei punti comuni alle A', O', etc.

Poichè:

$$[A' O'] = \mu, \quad [G' O'] = 1, \quad [O' O'] = -2, \quad [A' G'] = m, \quad [G' G'] = 0,$$

verrà:

$$\mu = \alpha - 2\beta, \qquad m = \beta,$$

sicchè in definitiva la (1) può scriversi sotto la forma:

$$A' \equiv (2m + \mu) G' + mO'.$$

E similmente la (2) dà:

$$B' \equiv (2n + \nu) G' + nO'.$$

La condizione imposta ad un punto P, distinto da O e giacente sulla curva irriducibile A, volendo che giaccia pure sulla curva variabile B, si traduce in una corrispondenza tra i punti di A e le curve del sistema $\infty^r |B|$, chiamandosi omologhi un punto P ed una curva B quando si appartengono. La corrispondenza è manifestamente irriducibile, perché ha luogo tra due varietà irriducibili (la curva A ed un sistema lineare) e perché la varietà delle coppie di elementi omologhi, è pure irriducibile (è birazionalmente identica alla varietà delle coppie di punti di A e di uno spazio lineare S_r).

Il trasporto della condizione considerata e della relativa corrispondenza, sulla superficie Φ, è immediato.

Quando B' tende alla curva composta da $2n + \nu$ generatrici e dalla conica O' contata n volte, il numero dei punti

$$[A' B'] = (2m + \mu)(2n + \nu)[G' G'] + (2m + \mu) n [G' O'] +$$
$$+ (2n + \nu) m [G' O'] + mn [O' O'] = 2mn + n\mu + m\nu,$$

(11) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *54* (1904), pp. 1–49, n. 14 [Memoria XV, vol. I, p. 173; N.d.R.].

comuni alle A' , B', non s'altera e i punti stessi tendono ai $(2n + \nu)m$ punti d'intersezione con A' delle generatrici in cui si spezza B' e ai μ punti comuni ad A' , O', contati ciascuno n volte.

Il che significa che quando B, sul cono F, tende a spezzarsi in $2n + \nu$ generatrici, le sue intersezioni con A tendono ai punti ove queste generatrici incontrano A, fuori di O, e ai punti infinitamente vicini ad O sopra i rami di A, contati ognuno n volte.

Il numero delle intersezioni si conserva pertanto costante quando si tenga conto di queste ultime intersezioni, le quali, rispetto alla condizione posta che P sia un punto comune alle A , B, fuori di O, sono degeneri.

8. *Applicabilità del principio di Schubert al problema degli spazi secanti.* Mi occuperò per ultimo di mostrare come il principio di Schubert sia applicabile al cosidetto *problema degli spazi secanti* (12). Richiamo brevemente le nozioni relative.

Dicesi *forma fondamentale* di S_k, la totalità degli S_k che hanno con un dato S_{a_0} un punto comune, con un dato S_{a_1} una retta, $\cdots$, con un dato $S_{a_{k-1}}$ un S_{k-1}, e che giacciono in un dato S_{a_k}, per ogni valore di i verificandosi il fatto che lo spazio S_{a_i} contiene lo spazio $S_{a_{i-1}}$. Una tal figura s'indica col simbolo $[a_0 , a_1 , \cdots , a_k]$, e col simbolo $(a_0 , a_1 , \cdots , a_k)$ s'indica la condizione di dimensione

$$(k+1)r - \frac{k(k+1)}{2} - \sum a_i ,$$

che s'impone ad un S_k di un dato S_r $(r \geq a_k)$, volendo che appartenga ad una data forma $[a_0 , a_1 , \cdots , a_k]$.

La considerazione delle condizioni $(a_0 , a_1 , \cdots , a_k)$ è fondamentale nella geometria numerativa degl'iperspazi, perché si dimostra che le condizioni stesse si posson assumere come *caratteristiche* per la varietà degli S_k di S_r, nel senso cioè che ogni condizione algebrica imposta agli S_k di S_r, può esprimersi mediante una somma delle suddette condizioni (13).

Orbene, il problema degli spazi secanti riducesi in ultima analisi a ciò: esprimere il prodotto di due condizioni caratteristiche qualunque $(a_0 , a_1 , \cdots , a_k)$, $(b_0 , b_1 , \cdots , b_k)$, mediante una somma di condizioni caratteristiche.

Per ottenere una tale espressione potrà applicarsi senza riserve il principio di Schubert? Potremo cioè particolarizzare comunque la mutua posizione

(12) Cfr. G. Z. GIAMBELLI, *Risoluzione del problema degli spazi secanti*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *52* (1903), pp. 171–211. La risoluzione ivi esposta poggia sopra una formola ottenuta da Schubert mediante la conservazione del numero.

(13) H. SCHUBERT, *Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension*, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, *1* (1886), pp. 134–155; F. SEVERI, *Le coincidenze di una serie algebrica* $\infty^{(k+1)(r-k)}$ *di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 9_2 (1900), pp. 321–326 [Nota IV, vol. I, p. 6; N.d.R.].

delle due forme cui riferisconsi le condizioni date (sempre però in modo che non aumenti l'infinità degli S_k ad esse comuni)? La risposta è affermativa.

Prendiamo infatti come elemento Γ un S_k della forma fissa $A = [a_0, a_1, \cdots, a_k]$ e come elemento Γ' la forma variabile $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$, e chiamiamo omologhi un Γ ed un Γ' quando la forma Γ' contiene lo spazio Γ. Se, come supponiamo, per ogni posizione di Γ' vi sono S_k comuni a Γ' e ad A, la corrispondenza ha luogo tra la varietà V dei Γ appartenente ad A e la varietà V' di *tutte* le forme Γ' di dato simbolo $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$. Tanto l'una che l'altra sono varietà irriducibili.

E invero, quanto alla V, si osserverà che per individuare un Γ di V, si può scegliere in S_{a_0} un punto P_0, poi un punto P_1 sopra un S_{a_1-1} genericamente fissato in S_{a_1}, un punto P_2 sopra un S_{a_2-2} genericamente fissato in $S_{a_2}, \cdots$, fino a scegliere un punto P_k sopra un S_{a_k-k} genericamente fissato in S_k. Per modo che i Γ vengon riferiti biunivocamente alle $(k+1)$-ple di punti scelti rispettivamente in $S_{a_0}, S_{a_1-1}, S_{a_2-2}, \cdots, S_{a_k-k}$. La varietà V è pertanto irriducibile (e razionale).

Quanto alla V', si osserverà che per individuare una Γ' di V', si può scegliere in S_r un S_{b_k}, poi entro a questo un $S_{b_{k-1}}$, entro a questo un $S_{b_{k-2}}$ e così via, fino a scegliere entro S_{b_1} un S_{b_0}. Per modo che le Γ' vengon riferite biunivocamente ai gruppi di spazi $S_{b_k}, S_{b_{k-1}}, \cdots, S_{b_0}$ scelti rispettivamente entro $S_r, S_{b_k}, \cdots, S_{b_1}$, onde anche V è irriducibile (e razionale).

Se la Γ' di V' si vuol determinare in guisa che contenga un S_k *comunque* dato, bisognerà scegliere gli spazi precedenti $S_{b_k}, S_{b_{k-1}}, \cdots, S_{b_0}$ in guisa che S_{b_k} passi per lo S_k; $S_{b_{k-1}}$ si appoggi allo S_k secondo un S_{k-1}, etc; ma con ciò, al variare degli elementi che sono arbitrari in questa costruzione, verremo ancora ad ottenere una varietà irriducibile (e razionale) di elementi Γ'. Tanto basta per concludere, in base all'osservazione con cui si chiude il n. 6, che è irriducibile anche la varietà delle coppie di elementi Γ, Γ' omologhi nella corrispondenza dianzi definita, e quindi *non soltanto è irriducibile una condizione caratteristica imposta agli S_k di S_r, ma è pure irriducibile la condizione prodotto di due (o più) condizioni caratteristiche genericamente fissate. Il principio di Schubert è pertanto applicabile senza riserve al problema degli spazi secanti.*

LIV.

SULLE CONGRUENZE SOLENOIDALI

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, *71* (1912), pp. 769–774 (*).

Consideriamo un raggio a di una congruenza rettilinea Σ ed il tubetto infinitesimo τ_a riempito dalle rette della congruenza situate intorno ad a. Se le sezioni di τ_a con due qualunque piani normali ad a, hanno la stessa area, e ciò accade per ogni raggio di Σ, la congruenza dicesi *solenoidale*.

Il prof. Cisotti ha già caratterizzato queste congruenze, dimostrando, coi metodi analitici della geometria differenziale, che *ogni congruenza solenoidale è costituita dalle rette tirate sui piani osculatori di una curva, parallelamente alle relative tangenti*; *e che ogni congruenza siffatta è solenoidale* (1). Nel caso in cui l'equivalenza tra le sezioni di τ_a si riduce addirittura ad una uguaglianza, la congruenza Σ diviene una stella impropria.

Esporrò qui una semplice dimostrazione sintetica di questo risultato.

1. Occupiamoci anzitutto della seguente questione preliminare: Date nello spazio tre rette a, b, c (non complanari) e un piano π che le incontri in punti propri non allineati A, B, C, quali condizioni, relative alle tre rette ed eventualmente alla giacitura di π, debbon esser soddisfatte, perché l'area del triangolo ABC resti costante allorquando π si sposta parallelamente a se stesso?

È questo un problemino che si lascierebbe risolvere in modo automatico coi metodi elementari della geometria analitica o proiettiva. Ma non val la pena di seguire le soluzioni che così ci verrebbero offerte, perché troppo minute nei dettagli.

Per rispondere alla questione nel modo più rapido, procediamo invece come segue. Determinata la posizione del punto A, variabile su a, mediante i valori d'un parametro λ, l'area del triangolo ABC risulta uguale ad una funzione razionale $f(\lambda)$ – funzione algebrica ad un valore – che si riconosce subito essere un polinomio in λ, perché non diviene mai infinito per λ finito. Le radici dell'equazione $f(\lambda) = 0$, si ottengono in corrispondenza alle posizioni di π per cui accade che i tre punti A, B, C sieno allineati, cioè in corrispondenza ai punti di appoggio su a, delle generatrici comuni ai due paraboloidi iperbolici $(a\,b\,d)$, $(a\,c\,d)$ (2), ove d è la retta impropria di π. Poichè

(*) Adunanza del 28 gennaio 1912.

(1) Cfr. U. Cisotti, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5) *19* (1910), p. 325.

(2) Con $(a\,b\,d)$, e analoghe, denotiamo la quadrica che ha per direttrici le a, b, d.

i due paraboloidi già si segano lungo le direttrici a , d, essi avranno ulteriormente in comune *due* generatrici g , g', e quindi $f(\lambda)$ sarà un trinomio di 2° grado [3]. Affinchè $f(\lambda)$ riducasi ad una costante, occorre e basta che le due radici di $f(\lambda)$ divengano infinite, cioè che le generatrici g , g' si appoggino ad a nel relativo punto improprio A_∞. Poichè il lato BC del triangolo variabile ABC, non può mai passare per A_∞ finchè π è proprio, ne segue che le g , g' coincidono in una generatrice impropria lungo cui i due paraboloidi si toccano [4].

Ciò vale quando le rette a , b , c sieno sghembe a due a due [5]: in caso contrario uno almeno dei tre paraboloidi $(a\,b\,d)$ $(a\,c\,d)$ $(b\,c\,d)$ degenera. Quando due (almeno) delle a , b , c son complanari, e sieno per esempio le b , c, perché $f(\lambda)$ non si annulli mai per λ finito, bisogna che le b , c sieno parallele – perché altrimenti quando π passasse pel punto proprio ad esse comune $f(\lambda)$ si annullerebbe – e inoltre che a sia parallela al piano bc – perché altrimenti quando π passasse pel punto proprio comune ad a e a bc, $f(\lambda)$ si annullerebbe. Viceversa, se queste due condizioni son soddisfatte, $f(\lambda)$ non si annulla al finito.

Che se poi tra le a , b , c vi sono due coppie, per esempio a , b e b , c di rette complanari, per le ragioni sopra addotte, tanto le a , b come le b , c, dovranno esser tra di loro parallele, sicchè infine le a , b , c saranno tre rette parallele.

Troviamo in tal modo tre casi in cui l'area del triangolo ABC può restare costante. Fer quanto non sia necessario pel seguito, convien di presentare sotto forma elementare la condizione trovata nel primo caso più generale.

Anzitutto i punti impropri delle a , b , c sono allineati, cioè le a , b , c son distribuite sopra tre piani paralleli α , β , γ. Poichè ogni piano ϱ parallelo ad α , β , γ, tocca in uno stesso punto della $g \equiv g'$ i tre paraboloidi $(a\,b\,d)$ $(b\,c\,d)$ $(c\,a\,d)$, così le tre direttrici c' , a' , b' in cui ϱ taglia i paraboloidi stessi, dovranno esser tra di loro parallele; e viceversa. Prendendo $\varrho \equiv \alpha$ e considerando due posizioni ABC, $A'B'C'$ del triangolo variabile, ciò equivale a dire che i punti ove BC, $B'C'$ tagliano α, debbon essere equidistanti da a. Si conclude che:

Date tre rette non complanari a , b , c e un piano π che le seghi in punti propri non allineati A , B , C, le condizioni affinchè l'area ABC rimanga costante quando π varia parallelamente a se stesso, son le seguenti:

1) *Se le rette a , b , c sono sghembe a due a due: ch'esse sieno situate sopra tre piani paralleli α , β , γ e che, prese due posizioni ABC, $A'B'C'$ del triangolo variabile, i punti ove α è tagliato dai lati BC, $B'C'$ sieno equidistanti da a.*

(3) Preso il raggio a come asse z e i piani di giacitura d, come piani $z = \text{cost.}$, poichè le coordinate di A , B , C risultano funzioni lineari intere di λ, si trova di nuovo, per via più elementare, che l'area di ABC viene uguale ad un trinomio di 2° grado in λ.

(4) Si osserverà che, per ragioni di simmetria, anche il paraboloide restante $(b\,c\,d)$ tocca i due precedenti lungo la stessa generatrice impropria.

(5) Veramente ciò che è strettamente necessario pel ragionamento precedente, è che le b , c sieno sghembe con a.

2) *Se due sole b, c delle a, b, c son complanari: che le b, c sieno parallele ed a parallela al loro piano.*

3) *O infine che le a, b, c sieno parallele tra loro.*

La condizione 1) *si può anche enunciare dicendo che i tre paraboloidi iperbolici generati dai lati AB, BC, CA del triangolo variabile, si toccano lungo una medesima generatrice impropria.*

Ma sotto la prima forma la condizione 1) offre subito il modo di costruire terne di rette a, b, c ad essa soddisfacenti.

Osservazione 1ª. – Nel caso in cui π segasse sempre a, b, c in punti allineati, si potrebbe ancora dire che il triangolo ABC ha area costante (nulla). Ciò accadrebbe quando le a, b, c, d giacessero sopra un medesimo paraboloide.

Osservazione 2ª. – Le condizioni 2) 3) vincolano soltanto le posizioni delle rette a, b, c, ma non vincolano affatto la giacitura d, che può esser qualunque, purchè non appartenente ad una delle tre rette. Invece la condizione 1) vincola mutuamente le a, b, c e la giacitura di π.

Osservazione 3ª. – Il solo caso in cui al variare di π il triangolo ABC si mantiene congruo a se stesso, è il caso 3), perché se AB resta costante al variare di π, le a, b debbon esser parallele. E così dicasi delle b, c.

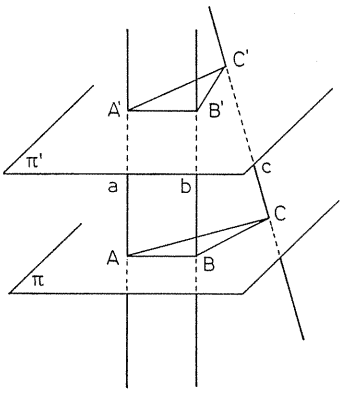
2. Veniamo ora alla questione che forma l'oggetto principale di questa Nota.

Preso un raggio a della congruenza solenoidale Σ e considerati due piani π, π' perpendicolari ad a in due punti generici A, A', la corrispondenza Ω determinata fra π, π' dalle rette di Σ, in quanto si limiti agl'intorni di A, A', è un'affinità, per ipotesi equivalente. Esaminiamo dapprima il caso in cui la corrispondenza stessa sia un'eguaglianza (congruenza). Allora le sezioni con π, π' della terna di rette formata da a e da due raggi b, c di Σ infinitamente vicini ad a, sono triangoli uguali, onde (nº prec., Oss. 3ª) le a, b, c, risultano parallele. Tutte le rette di Σ infinitamente vicine ad a, e quindi tutte le rette di Σ, son parallele a questa retta, cioè *la congruenza riducesi ad una stella impropria.*

3. Supponiamo ora che Ω non sia un'eguaglianza. Preso un generico raggio c di Σ appartenente all'intorno di a, c sarà sghembo con a, perché altrimenti (nº prec.) dovrebbe esser parallelo ad a, e si ricadrebbe nel caso già esaminato. Sieno C, C' le intersezioni di c con π, π'. Condotto per a il piano α parallelo a c, si consideri un punto B, infinitamente vicino ad A, appartenente all'intersezione di π e di α, ed il raggio b di Σ uscente da B, il quale seghi π' in B'. Per ipotesi i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono equivalenti, talchè, tenuto fisso π, e fatto variare π', l'area $A'B'C'$ conservasi costante.

Le rette a, b, c non si trovan nella posizione 3) indicata dal teorema del n. 1 e non si trovan neppure nella posizione 1), perché la retta b non è

parallela al piano α condotto per a parallelamente alla c: dovranno dunque due delle a, b, c esser parallele e l'altra sghemba con entrambe, ma parallela al loro piano. Poiché la c è sghemba con a, le due rette parallele della terna saranno le a, b o le b, c. Ma le b, c non posson essere, perché la b passando pel punto B del piano α parallelo a c, giacerebbe su questo piano e non sarebbe pertanto sghemba con a. Ne viene che le a, b, son le due rette parallele della terna a, b, c e che b è contenuta in α.



Il piano α risulta dunque un piano focale della congruenza, avente il relativo foco nel punto improprio O di a. Al variare di c nell'intorno di a, dovrà sempre la c mantenenrsi parallela al piano focale α, perché tenendo fissa insieme alla a anche la b, le a, b, c dovran sempre dare una terna nella condizione 2) del teorema precedente. Da ciò segue che per a passa il *solo* piano focale α, perché se ce ne passasse un altro β, il relativo foco, pel teorema del n. 1, dovrebbe ancora esser O, ed ogni raggio c dovrebbe risultar parallelo anche a β, cioè parallelo ad a. E si ricadrebbe nel caso della stella impropria. Sopra ogni raggio di Σ si ha dunque un sol foco improprio, cui spetta un *sol* piano focale.

4. I fochi (impropri) delle rette di Σ non posson riempire tutto il piano all'infinito, perché altrimenti questo piano sarebbe una falda focale della congruenza e dovrebbe esser toccato dalle rette di Σ. I fochi stessi son dunque distribuiti sopra una curva impropria k e da ogni punto di questa escono ∞^1 raggi di Σ, formati un cilindro. Il cilindro Δ delle rette di Σ, che escono da O, tocca il piano focale α. Questo piano poi contiene (n. prec.) anche il punto improprio P di c, il qual punto, sopra k, è infinitamente vicino ad O. Ciò significa che α tocca in O la curva k. Poiché i piani tangenti di Δ son piani focali delle relative generatrici di contatto, per le quali si può ripeter ciò che si è detto per la a, ne segue che i piani tangenti di Δ passan tutti per la retta $t \equiv OP$, tangente in O a k, e quindi il cilindro Δ riducesi al piano $a\,t$.

Le rette della congruenza son pertanto distribuite in tanti fasci impropri situati sui piani Δ, i quali inviluppano una sviluppabile K passante per k. Le rette di Σ appariscon così come le tangenti a K nei punti di k, e quindi tutti i raggi di Σ, che appartengono ad un piano Δ, il quale osculi in un certo punto R lo spigolo di regresso Γ di K, son paralleli alla tangente in R a Γ.

5. Viceversa, se consideriamo la congruenza Σ delle rette distribuite sui piani osculatori ad una curva, Γ, parallelamente alle relative tangenti, si ha una congruenza solenoidale. Preso infatti un generico raggio a di Σ e detto α il piano osculatore su cui a giace, R, r il relativo punto di osculazione e la relativa tangente, c una retta di Σ infinitamente vicina ad a, cioè situata in un piano γ, che osculi Γ nel punto S infinitamente prossimo ad R, i due

piani α , γ si tagliano lungo la tangente a Γ in S, cioè lungo una retta parallela a c, sicchè c risulta parallela ad α. Considerando insieme ad a , c la retta b di Σ infinitamente vicina ad a sul piano α, avremo una terna di rette a , b , c soddisfacente alla condizione 2) del teorema del n. 1 e quindi lungo a si conserverà costante l'area della sezione normale della terna a , b , c, cioè la congruenza sarà solenoidale.

Si vede anzi, in base all'Osservazione 2ª del n. 1, che *il tubetto τ_a formato coi raggi di una congruenza solenoidale Σ, situati attorno ad un generico raggio a della congruenza, dà sezioni equivalenti sopra due piani paralleli qualunque.*

Terminerò osservando che il ragionamento dei nn. 3, 4 si potrebbe presentare sotto una forma ancor più semplice, senza neppur premettere il Lemma del n. 1, qualora si sapesse a priori che la congruenza Σ possiede piani focali *reali*. Ora ciò si potrebbe stabilire agevolmente ricorrendo al concetto di *densità* di una congruenza lungo uno de' suoi raggi; ma così toglieremmo alla dimostrazione esposta il suo carattere elementare.

LV.

LES CORRESPONDANCES ALGÉBRIQUES EXISTANT SUR LES COURBES D'UN SYSTÈME LINÉAIRE TRACÉES SUR UNE SURFACE

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, *156*$_1$ (1913), pp. 287–289 (*).

1. Soit d'abord F une surface algébrique régulière ($p_g = p_a$) et $|C|$ un système linéaire irréductible ∞^r ($r \geqq 1$), dont le degré soit > 0, de courbes de genre p, tracées sur la surface.

Je me suis proposé de caractériser, autant qu'il était possible, les correspondances algébriques entre les points d'une courbe C d'un tel système. Et j'ai obtenu ce résultat inattendu:

Toute correspondance existant entre les points de la courbe générale d'un système linéaire $|C|$ *dont le degré soit* > 0, *tracé sur une surface régulière, est douée d'une valeur* (*Werthigkeit*) γ.

C'est-à-dire qu'étant donnée une correspondance (α, β) entre les points x, y de la courbe générale C du système, on peut toujours déterminer un nombre entier γ ($\gtrless 0$), tel que le groupe formé par les β points $y', y'', \cdots, y^\beta$, correspondant au point x variable sur C et par le point même, compté γ fois, se meut dans une série linéaire.

En particulier on a que: *toute courbe plane variable dans un système linéaire ne possède d'autres correspondances que des correspondances à valeur.* Il va sans dire qu'une courbe particulière du système peut admettre aussi des correspondances n'ayant pas une *valeur* (*correspondances singulières*).

Une conséquence remarquable du théorème énoncé, c'est que les relations quadratiques, données par M. Hurwitz dans un Mémoire classique (*Math. Annalen, 28*), liant les $\frac{p(p+1)}{2}$ périodes des intégrales normales de première espèce d'une courbe de genre p, possédant des correspondances singulières, sont tout à fait *indépendantes* des $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relations *inconnues*, qui doivent être satisfaites pour que $\frac{p(p+1)}{2}$ quantités puissent être regardées comme les périodes des intégrales normales d'une courbe de genre p. De sorte que les relations de M. Hurwitz ne sont pas satisfaites pour la courbe la plus générale de genre p.

(*) Présentée par E. Picard dans la séance du 27 janvier 1913.

La démonstration du théorème énoncé s'appuie sur les considérations suivantes:

Au moyen du système $|C'|$ adjoint à $|C|$, on détermine rationnellement p intégrales abéliennes indépendantes de première espèce sur toute courbe C: soit $u_1, u_2, \cdots, u_p$. On peut ensuite définir sur toute courbe C, les périodes normales $(\omega_{h1}, \omega_{h\cdot p+1}), (\omega_{h2}, \omega_{h\cdot p+2}), \cdots, (\omega_{hp}, \omega_{h\cdot 2p})$, de l'intégrale u_h, relatives aux cycles $(\sigma_1, \sigma_{p+1}), (\sigma_2, \sigma_{p+2}), \cdots, (\sigma_p, \sigma_{2p})$ d'un système de rétrosections riemanniennes. Lorsque ces rétrosections dérivent par continuité des rétrosections fixées sur une courbe particulière C, de genre p, les périodes ω sont définies sur toute courbe C, par un certain groupe G de substitutions linéaires unimodulaires à coefficients entiers près.

En se bornant à la considération d'un faisceau Σ de $|C|$, et en désignant par λ le paramètre qui détermine la courbe C dans le faisceau, le groupe G se réduit au groupe de l'équation différentielle E de Fuchs–Picard, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de λ, à laquelle satisfont les périodes d'une intégrale abélienne de C, aux cycles σ.

Une correspondance $T(\alpha, \beta)$ existant sur C et variable avec la courbe est représentée par les relations

$$(1) \qquad u_h(y') + \cdots + u_h(y^\beta) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\, u_i(x) + \pi_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

les π_{hi} étant, *a priori*, des fonctions de λ, indépendantes de la position de x sur C. Des relations (1) on déduit tout de suite

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\, \omega_{ir} = \sum_{s=1}^{2p} a_{sr}\, \omega_{hs} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \cdots, 2p \\ h = 1, 2, \cdots, p \end{pmatrix},$$

où les a sont des entiers indépendants de l'indice h (entiers caractéristiques de T).

Lorsque les ω sont données, on démontre que les π, a sont déterminées univoquement les unes par les autres.

Cela étant posé, faisons circuler le paramètre λ, à partir d'une valeur initiale et en y revenant. La T aboutit en général à une nouvelle correspondance T', dont les indices sont toujours (α, β). Mais comme dans la variation *continue* de C et de T, les *entiers* a ne sauraient pas varier, les entiers caractéristiques de T' par rapport aux périodes transformées ω', seront toujours les a; tandis que les entiers caractéristiques de T, par rapport aux ω, sont en général des nombres a' différents des a. Toutefois, on prouve que, quoique le groupe discontinu G soit d'ordre infini, les entiers a' ne peuvent recevoir qu'un nombre *fini* de systèmes de valeurs, car les correspondances aux mêmes indices (α, β), se distribuent sur C en un nombre fini de systèmes continus.

D'un autre côté, en opérant sur les ω avec les substitutions génératrices de G, dont M. Picard a donné la forme, on trouve, dans le cas d'une surface régulière, que pour que les a' ne puissent recevoir qu'un nombre fini de sy-

stème de valeurs, il faut que

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{2p\cdot 2p} = -\gamma\,, \qquad a_{rs} = 0 \quad (r \neq s)\,.$$

Cela signifie que la correspondance T a la *valeur* γ.

2. *Lorsque la surface F a l'irrégularité $q = p_g - p_a > 0$*, en déterminant rationnellement sur toute C les intégrales $u_1, u_2, \cdots, u_p$, au moyen du système adjoint $|C'|$ et des q intégrales simples de première espèce, attachées à F, on arrive d'une façon semblable à la conclusion que *les systèmes continus de correspondances singulières existant sur la courbe générale C d'un système linéaire $|C|$, dont le degré soit > 0, tracé sur F, sont univoquement déterminés par les systèmes continus de correspondances singulières existant sur la variété de Picard attachée à F*, de sorte que, lorsque cette variété est tout à fait arbitraire, on a toujours seulement sur C des correspondances à valeur.

En se rappelant la notion de *dépendance* entre plusieurs correspondances d'une même courbe (voir A. HURWITZ, *loc. cit.*, et mon Mémoire dans les *Memorie della R. Acc. di Torino*, 1903 (**)), on voit de plus que *le nombre des correspondances indépendantes existant sur la susdite courbe C, ne peut pas dépasser $2q^2$ et l'on peut toujours construire des surfaces F, pour lesquelles cette limite est atteinte.*

(**) Memoria XV, vol. I, p. 186; N.d.R.

LVI.

LE CORRISPONDENZE FRA I PUNTI DI UNA CURVA VARIABILE IN UN SISTEMA LINEARE SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA [1]

Mathematische Annalen, *74* (1913), pp. 515–544.

A fondamento delle sue classiche ricerche sulle corrispondenze algebriche [2], il sig. Hurwitz pone, com'è ben noto, una rappresentazione trascendente di una qualunque corrispondenza T fra i punti di una curva algebrica C, di genere $p > 0$, dalla quale seguono p^2 relazioni (quadratiche e a coefficienti interi) fra i $\frac{p(p+1)}{2}$ periodi dei p integrali normali di 1ª specie appartenenti a C. Tali relazioni riduconsi a identità, allora e solo allora che la corrispondenza T è a *valenza* (Wertigkeit) γ, cioè quando, detti x, x' due punti arbitrari di C e Y, Y' i gruppi rispettivi degli omologhi di x, x' nella T, si ha la equivalenza:

$$Y + \gamma x \equiv Y' + \gamma x' ,$$

ove γ è un intero (positivo, negativo o nullo).

Nel caso in cui le p^2 relazioni che conseguono dalla T, non sono tutte identità, Hurwitz chiama la corrispondenza *singolare*; ed osserva che una tal corrispondenza non può presentarsi se non quando i *moduli* della curva sono particolari. In altri termini insomma, nella varietà algebrica di dimensione $3p - 3$, i cui elementi sono le classi di curve algebriche di genere p, birazionalmente equivalenti, gli elementi che rappresentan classi di curve

(1) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria, trovasi nella mia Nota, *Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracées sur une surface*, Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences de Paris, *156* (1913), p. 287 [Nota LV, vol. II, p. 329; N.d.R.].

(2) Cfr. A. HURWITZ: a) *Uber algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip*, Math. Ann., *28* (1886), p. 561; b) *Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Math. Ann., *31* (1888), p. 290. I risultati principali della Memoria a) trovansi pure esposti in F. KLEIN–R. FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* [Teubner, Leipzig (1892), *2*, p. 518] e in H. F. BAKER, *Abel's theorem and the allied theory* [University Press, Cambridge (1897), p. 639]. Lo studio generale per via sintetica, delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, forma l'oggetto della mia Memoria, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2) *54* (1903) [Memoria XV, vol. I p. 173; N.d.R.], alla quale rinvio per altre citazioni sulla teoria delle corrispondenze. Questa Memoria nel seguito verrà citata brevemente colla sola parola « *Corrispondenze* ».

con corrispondenze singolari, formano una varietà subordinata; sicchè sulla curva più generale di genere p, tutte le corrispondenze sono a valenza. In altre parole ancora, si può dire che le funzioni abeliane a moltiplicazione complessa, son singolari, anche nel caso delle funzioni abeliane, che Poincaré chiama *speciali* (cioè delle funzioni abeliane provenienti da una curva di genere p).

Ma in verità per stabilire in modo completo questa conclusione, che per Hurwitz del resto è puramente incidentale, non adempiendo essa ad alcun ufficio nello sviluppo delle sue Memorie citate, occorre provare che le p^2 relazioni quadratiche, cui sopra si è alluso, sono del tutto *indipendenti* dalle $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relazioni che legano, qualunque sia C, i $\frac{p(p+1)}{2}$ periodi degl'integrali normali di 1ª specie (3).

Il presente lavoro è nato appunto da tale questione. È chiaro che per dimostrare la indipendenza suddetta, basta far vedere che, per ogni valore di p, esistono curve di genere p, prive di corrispondenze singolari. Poichè qualche sintomo mi lasciava intuire che avrei trovato ampie classi di curve senza corrispondenze singolari, sulle superficie algebriche regolari (e in particolare sul piano), così mi proposi di caratterizzare, per quanto fosse possibile, le corrispondenze fra i punti di una curva tracciata sopra una superficie regolare (4).

Tale questione è certamente molto più larga di quella da cui ho preso le mosse; ma non credo però che la ricerca, *per ogni valor di p*, di classi anche assai ristrette, di curve prive di corrispondenze singolari, offrirebbe difficoltà meno lievi. A prescindere da ciò, io ho creduto opportuno di trattare il problema più ampio, perché mi sembra che presenti di per sé un interesse innegabile, anche in vista delle sue possibili applicazioni alla geometria sopra una superficie.

Il risultato da me ottenuto è il seguente:

Ogni corrispondenza fra i punti della curva generica di un sistema lineare $|C|$, *almeno* ∞^2, *tracciato sopra una superficie regolare, è dotata di valenza* (n. 7). In particolare si ha che *ogni curva piana, variabile in un sistema lineare almeno* ∞^2, *possiede soltanto corrispondenze a valenza.*

È appena necessario di avvertire che curve particolari del sistema $|C|$ (formanti entro $|C|$ una varietà *algebrica* subordinata) posson ben possedere corrispondenze singolari. Dal teorema precedente segue subito (n. 8) che *per ogni valor di p, una curva di genere p a moduli generali, non possiede corrispondenze singolari.*

(3) Per $p = 4$ queste relazioni (una) sono state scritte esplicitamente da W. SCHOTTKY, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln*, J. f. Math., *102* (1888), p. 304.

(4) Per la distinzione delle superficie algebriche in regolari ed irregolari, nonchè per altre proprietà di geometria sopra una superficie, di cui faccio uso nel corso di questo lavoro, rinvio alle due Monografie di G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, delle quali l'una pubblicata nei Math. Ann., *48* (1896), p. 214, e l'altra, contenente i più recenti risultati della teoria, a p. 485 (t. II) del trattato di Picard et Simart, più innanzi citato.

Non bisogna però credere che una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie regolare, sia necessariamente a moduli generali; chè anzi è facile costruire esempi in contrario (n. 8).

La dimostrazione del teorema principale del presente lavoro, è assai laboriosa; e vi si pongono in opera i più recenti risultati ottenuti nella geometria sopra una superficie. In essa adempie ad un ufficio essenziale, oltre alla rappresentazione di Hurwitz, la considerazione dell'equazione differenziale E, di Fuchs–Picard, alla quale soddisfanno i periodi di un integrale abeliano di 1ª (o di 2ª) specie, appartenente ad una curva, i cui coefficienti dipendan razionalmente da un parametro.

Mi occupo poi (§ 3) di caratterizzare le corrispondenze fra i punti di una curva tracciata sopra una superficie irregolare, e, dopo aver introdotto il concetto di *corrispondenze a doppia valenza*, escludendo queste dal novero delle singolari, trovo che *i sistemi continui di corrispondenze singolari esistenti fra i punti della curva generica d'un sistema lineare* $|C|$, *almeno* ∞^2, *tracciato sopra una superficie irregolare* F, *sono biunivocamente coordinati ai sistemi continui di corrispondenze singolari fra i punti della varietà di Picard* V, *relativa ad* F [5], per guisa che, quando i moduli di V son generali, G non possiede che corrispondenze a valenza, semplice o doppia (nn. 12, 13). Si deduce pure che il numero delle corrispondenze *indipendenti* che appartengono alla generica C, non può superare $2q^2 + 1$, q essendo l'irregolarità della F.

Nel § 4 espongo infine una trattazione geometrica della questione precedentemente risoluta per via trascendente; e ciò mi dà anche occasione di indicare qualche nuova proprietà. Provo anzitutto che quando sulla generica C di un sistema lineare infinito, tracciato sopra una superficie (regolare o irregolare), esiste una corrispondenza singolare, si può staccar razionalmente su C un sistema continuo di corrispondenze singolari; ed inoltre che su C si può staccare una sola corrispondenza singolare, quando sulla curva stessa sieno razionalmente dati un punto ed un gruppo non speciale di p punti (nn. 15, 17).

Da questo teorema segue facilmente l'inesistenza di corrispondenze singolari fra i punti della curva generica di un sistema lineare $\infty^2 |C|$, tracciato sopra una superficie regolare.

Il teorema stesso poteva anche applicarsi al caso in cui il sistema $|C|$ fosse tracciato sopra una superficie irregolare; ma non ho creduto che valesse la pena di intrattenermi lungamente su ciò.

§ 1. – Proposizioni preliminari

1. *Notazioni.* Indicheremo sempre con C una curva algebrica irriducibile di genere p, con $(\sigma_1, \sigma_{p+1}), (\sigma_2, \sigma_{p+2}), \cdots, (\sigma_p, \sigma_{2p})$ p coppie di retrosezioni riemanniane di C – o più precisamente della relativa superficie di Riemann –

(5) Per la definizione e le proprietà della varietà di Picard annessa ad una superficie irregolare F, ved. G. Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) *14* (1905).

e con $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \cdots, \omega_{h\cdot 2p}$ i periodi (normali) lungo i cicli σ, di un integrale abeliano di 1ª specie u_h, appartenente a C.

Denoteremo inoltre con Φ la superficie delle coppie ordinate x, y dei punti di C, con $\{K_x\}, \{K_y\}$ i due fasci unisecantisi di genere p, le cui curve rappresentano rispettivamente le coppie con un dato x o con un dato y, e con K la curva, unisecante le K_x, K_y, che rappresenta le coppie x, y costituite da due punti coincidenti (6).

2. *Un lemma sui periodi normali degl'integrali di 1ª specie.* Dimostriamo anzitutto il seguente lemma:

Fra i periodi normali $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \cdots, \omega_{h\cdot 2p}$ $(h = 1, 2, \cdots, p)$ *di* p *integrali indipendenti di 1ª specie* u_h $(h = 1, 2, \cdots, p)$ *appartenenti alla curva* C, *di genere* p, *non posson mai sussistere* p *relazioni del tipo*

$$\sum_{s=1}^{2p} a_s \omega_{hs} = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, p) \tag{1}$$

per valori reali, non tutti nulli, delle a (7).

Suppongasi infatti che fra le ω sussistano le relazioni (1) per valori reali delle a: dovremo allora provare che le a son tutte nulle.

Costruiamo a tal uopo i p integrali normali di 1ª specie $I_1, I_2, \cdots, I_p$ corrispondenti alle retrosezioni σ; cioè poniamo:

$$I_h = \lambda_{h1} u_1 + \lambda_{h2} u_2 + \cdots + \lambda_{hp} u_p \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

ove le λ soddisfanno alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{h1} \omega_{1s} + \lambda_{h2} \omega_{2s} + \cdots + \lambda_{hp} \omega_{ps} = 0, \\ &\lambda_{h1} \omega_{1h} + \lambda_{h2} \omega_{2h} + \cdots + \lambda_{hp} \omega_{ph} = 1 \end{aligned}\right\} \quad (s = 1, 2, \cdots, h-1, h+1, \cdots, p).$$

E poniamo inoltre:

$$\tau_{hr} = \lambda_{h1} \omega_{1\cdot p+r} + \lambda_{h2} \omega_{2\cdot p+r} + \cdots + \lambda_{hp} \omega_{p\cdot p+r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, p),$$

sicchè le τ saranno i periodi degl'integrali normali ai cicli $\sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_{2p}$, e fra esse sussisteranno le note relazioni

$$\tau_{hr} = \tau_{rh}. \tag{2}$$

(6) Per lo studio della superficie Φ, e più in generale della superficie rappresentante le coppie di punti di due curve, cfr. a) A. MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, *38* (1903); b) M. DE FRANCHIS, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, *17* (1903). Pei legami tra la teoria delle corrispondenze che esistono sulla curva C, e le proprietà della superficie Φ, cfr. F. SEVERI, *Corrispondenze*.

(7) Nel testo citato di KLEIN–FRICKE a pag. 540, Bd. II, il lemma trovasi dimostrato nel caso in cui gl'integrali u_h sieno essi stessi normali. L'estensione al caso più generale da noi considerato, è assai facile.

Moltiplicando i due membri della (1) per λ_{rh} e sommando da $h = 1$ ad $h = p$, avremo:

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{2p} a_s \sum_{h=1}^{p} \lambda_{rh}\, \omega_{hs} = 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, p).$$

Poichè $\sum_{h=1}^{p} \lambda_{rh}\, \omega_{hs}$ è il periodo di I_r lungo il ciclo σ_s, le (3) si ridurranno alle

$$(4) \qquad a_r + \sum_{s=1}^{p} a_{p+s}\, \tau_{rs} = 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, p).$$

Se ora formiamo l'integrale di 1ª specie

$$J = a_{p+1} I_1 + \cdots + a_{2p} I_p,$$

il cui periodo lungo σ_r $(r = 1, 2, \cdots, p)$ è a_{p+r}, in forza delle (2), (4) il suo periodo lungo σ_{p+s} $(s = 1, 2, \cdots, p)$, è $-a_s$, sicchè J, avendo tutti i periodi reali, deve ridursi ad una costante e le a debbon esser tutte nulle.

3. *Rappresentazione trascendente d'una corrispondenza. Interi caratteristici* (8). Fra i punti di C consideriamo una corrispondenza algebrica T, d'indici (α, β), la quale cioè faccia passare da un punto x a β punti y, mentre la sua inversa T^{-1}, fa passare da y ad α punti x.

Poichè la somma dei valori d'un integrale u_h ai punti $y', y'', \cdots, y^{\beta}$ corrispondenti ad x, è un integrale di 1ª specie al punto x, avremo le relazioni:

$$(5) \qquad u_h(y') + \cdots + u_h(y^{\beta}) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\, u_i(x) + \pi_h \quad \text{(modd. periodi)},$$

ove le π son costanti, indipendenti dalla posizione di x.

Facendo descrivere ad x il ciclo σ_r $(r = 1, 2, \cdots, 2p)$ e uguagliando le variazioni dei due membri della (5), viene

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\, \omega_{ir} = \sum_{s=1}^{2p} a_{sr}\, \omega_{hs} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \cdots, 2p \\ h = 1, 2, \cdots, p \end{pmatrix},$$

in cui le a sono interi dipendenti solo dal ciclo σ_r considerato, e non dall'integrale u_h, che figura nella (5).

Siccome il determinante dei periodi ω ai cicli $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_h$, non è nullo, si potranno risolvere le prime p delle (6), per un valor fissato di h, rispetto alle $\pi_{h1}, \pi_{h2}, \cdots, \pi_{hp}$; e similmente essendo non nullo il determinante delle ω corrispondenti ai cicli $\sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_{2p}$, si potranno risolvere le ultime p delle (6), rispetto alle medesime π. Dai due gruppi di relazioni così ottenuti, si elimi-

(8) La rappresentazione cui si allude trovasi già, sotto l'ipotesi che gl'integrali u_h sieno normali, nella citata Memoria a) di Hurwitz. Qui occorre qualche lieve modificazione alle formole di Hurwitz, giacchè, per gli scopi ulteriori, ci è necessario di supporre che gl'integrali u_h sieno qualunque.

neranno allora le $\pi_{h1}, \cdots, \pi_{hp}$ e si perverrà in tal modo a p^2 relazioni algebriche fra le ω, che indicheremo con

$$R_{hl}(a, \omega) = 0 \qquad (h, l = 1, 2, \cdots, p). \tag{7}$$

Vediamo anzitutto per quali valori delle a le (7) riduconsi a *identità* nelle ω.

Se le (7) sono identiche rispetto alle ω, assegnando valori zero a tutte le ω, tranne che ad ω_{hr}, dalle (6) si trae:

$$\pi_{hh} = a_{rr};$$

e assegnando valori zero a tutte le ω, eccezion fatta per ω_{ir} $(i \neq h)$, dalle (6) segue

$$\pi_{hi} = 0 \qquad (i \neq h).$$

Sicchè le (6) divengono

$$a_{rr}\,\omega_{hr} = \sum_s a_{sr}\,\omega_{hs},$$

e dovendo anche queste essere identità rispetto alle ω, ne deriva

$$a_{sr} = 0 \qquad (s \neq r).$$

Ponendo pertanto

$$\pi_{hh} = a_{rr} = -\gamma \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, p \\ r = 1, 2, \cdots, 2p \end{pmatrix},$$

ove γ è un intero $(\gtrless 0)$, le (5) dànno:

$$u_h(y') + \cdots + u_h(y^\beta) + \gamma u_h(x) \equiv \pi_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

cioè la corrispondenza T è a valenza γ (9).

Proviamo reciprocamente che, se la corrispondenza data ha la valenza γ, le a definite dalle (6), hanno necessariamente i valori

$$a_{rr} = -\gamma, \quad a_{sr} = 0 \qquad (s \neq r;\ r, s = 1, 2, \cdots, 2p),$$

talchè insomma le (7) riduconsi a identità.

Proveremo anzi più in generale che:

Quando le ω son date, ogni soluzione $a = a^0$ delle (7) è univocamente determinata dai corrispondenti valori $\pi_{hi} = \pi^0_{hi}$ delle quantità π, legate agl'interi a dalle (6).

Se infatti le (6) potesser esser soddisfatte ponendo una volta

$$\pi_{hi} = \pi^0_{hi}, \qquad a_{sr} = a^0_{sr}$$

e un'altra volta

$$\pi_{hi} = \pi^0_{hi}, \qquad a_{sr} = a'_{sr},$$

(9) Per la definizione trascendente di corrispondenze a valenza, ved. la Memoria a) di Hurwitz. Per la definizione geometrica ved. per esempio la mia Memoria, *Corrispondenze*, § 2.

ove le a'_{sr} non fossero ordinatamente uguali alle a^0_{sr}, dalle (6) medesime si trarrebbero i legami

$$\sum_{s=1}^{2p} (a^0_{sr} - a'_{sr})\,\omega_{hs} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, p \\ r = 1, 2, \cdots, 2p \end{pmatrix},$$

per valori non tutti nulli delle $a^0_{sr} - a'_{sr}$. E ciò è assurdo pel lemma del n. 2.

In particolare dunque:

Le (7) *riduconsi a identità nelle* ω, *allora e solo allora che la corrispondenza* T *è dotata di valenza.*

Poichè ogni corrispondenza T, una volta scelti gl'integrali u_h e i cicli normali σ_r, *individua* i valori degl'interi a, questi posson chiamarsi gl'*interi caratteristici* della T (rispetto a quella determinata scelta degl'integrali e dei cicli).

4. *Lemma sui sistemi continui di corrispondenze appartenenti ad una curva* C. Stabiliamo ora un'altra proposizione che ci servirà per le ricerche ulteriori:

Sopra una curva C, *le corrispondenze algebriche di indici dati* α, β, *si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui.*

Consideriamo la superficie Φ definita al n. 1. Ogni corrispondenza (α, β), fra i punti x, y di C, ha per imagine una curva T di Φ incontrante le K_x, K_y rispettivamente in β ed α punti.

Presa entro al fascio delle K_x una serie lineare semplice g^r_n $(r \geqq 2)$ e un'altra serie semplice g^s_m $(s \geqq 2)$ nel fascio delle K_y, le curve composte coi gruppi tolti dalla g^r_n e dalle g^s_m, saranno contenute in un medesimo sistema lineare $|L|$ semplice, di dimensione $t > r + s \geqq 4$. E la T taglierà le curve L in $m\alpha + n\beta$ punti.

Considerando la superficie Φ' di ordine $2mn$, appartenente allo spazio S_t e birazionalmente identica a Φ, le cui sezioni iperpiane son le corrispondenti delle curve L, noi vediamo che la curva T' di Φ', omologa di T, ha precisamente l'ordine $m\alpha + n\beta$. Si conclude pertanto che le corrispondenze d'indici (α, β) vengon rappresentate da curve del medesimo ordine tracciate sulla superficie Φ' e quindi ch'esse distribuisconsi in un numero finito di sistemi continui.

La proposizione dimostrata può completarsi colla seguente:

Osservazione. – *Per le corrispondenze algebriche di dati indici* α, β *sulla curva* C, *le quantità* π_{hi} *delle relazioni* (5), *non possono assumere che un numero finito di gruppi distinti di valori.*

E invero, quando una corrispondenza (α, β) rappresentata dalle (5) varia in un sistema continuo di corrispondenze analoghe, gl'interi a definiti dalle relazioni (6) non posson mutare, perché, se mai variassero, lo dovrebbero fare con continuità. E quindi non posson mutare neppure le quantità π_{hi}. Sicchè ogni sistema continuo di corrispondenze (α, β) dà luogo ad un sol gruppo di valori per le π_{hi}. In forza della proposizione precedente si conclude allora nel modo enunciato.

Ricordando infine che gl'interi a sono univocamente determinati dalle quantità π_{hi}, possiamo anche dire che *per le corrispondenze di dati indici* (α, β), *gl'interi a posson assumer soltanto un numero finito di gruppi distinti di valori.*

§ 2. – Le corrispondenze fra i punti di una curva C variabile in un sistema lineare sopra una superficie regolare

5. *Modo di variare dei periodi spettanti a p integrali di 1ª specie fissati razionalmente su C.* Suppongasi ora che la curva C sia tracciata sopra una superficie regolare F e sia variabile ivi entro un sistema lineare irriducibile $|C|$, almeno ∞^1, di grado > 0, e tale che le curve di un fascio generico Σ, scelto entro $|C|$, non abbian, fuori dei punti base – assegnati con moltiplicità virtuale eguale all'effettiva – che punti doppi nodali.

Poichè il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ sega sulla C la serie canonica completa [10], potremo fissare p curve aggiunte linearmente indipendenti, per guisa che sulla generica C resteranno determinati *razionalmente* p integrali abeliani di 1ª specie $u_1, u_2, \cdots, u_p$.

Fissato sopra una particolare C_0 di Σ – che non abbia genere minore di p – un sistema (σ) di retrosezioni, risulterà definito per continuità un sistema di retrosezioni sopra ogni curva del fascio.

In realtà sopra ogni C i cicli σ, che noi intendiamo di considerare, restano definiti a meno delle sostituzioni (omologie) lineari (di modulo ± 1 e a coefficienti interi) di un certo gruppo G; perché appunto, quando C circola entro al fascio a partire da C_0 e ritornandovi, le retrosezioni iniziali subiscono una sostituzione lineare siffatta; ed eseguendo successivamente due circolazioni, si ottiene la sostituzione prodotto di quelle che corrispondono alle circolazioni stesse, prese singolarmente.

Il gruppo G non è infine altro che il gruppo dell'equazione differenziale E d'ordine $2p$ (di Fuchs–Picard) alla quale soddisfanno i periodi ciclici d'un integrale abeliano u, fissato razionalmente sulle C di Σ; ed i cui coefficienti son funzioni razionali del parametro λ, col quale s'individua la posizione di C entro al fascio [11]. Naturalmente queste funzioni razionali – e quindi l'equazione E – dipendono dalla scelta dell'integrale u. Ciò che rimane immutato, variando l'integrale, è il gruppo G dell'equazione stessa.

Aggiungeremo che anche i periodi $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \cdots, \omega_{h\cdot 2p}$ degl'integrali u_h $(h = 1, 2, \cdots, p)$, fissati razionalmente su C, subiscono per le circolazioni di C, le sostituzioni lineari medesime del gruppo G.

(10) G. Castelnuovo, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Memorie della Società italiana delle Scienze, (3) 10 (1896), n. 7.

(11) Per le proprietà dell'equazione E, veggasi il trattato di E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* [Paris, Gauthier–Villars (1897–1906), t. I, p. 93 e segg.; t. II, p. 387 e segg., p. 421–424].

6. L'ipotesi posta al principio del n. prec., che cioè il fascio Σ abbia il grado > 0, porta come conseguenza che:

1) Ogni ciclo lineare di F – o meglio della corrispondente riemanniana a quattro dimensioni R – può deformarsi con continuità sino a farlo stare sopra una generica C [12].

L'ipotesi che le C di Σ aventi genere $< p$, sieno dotate, fuori dei punti base, di soli punti doppi nodali, sicchè il loro genere effettivo risulta $p - 1$, porta alla sua volta alla conseguenza che:

2) Quando una C tende ad una particolare C_1, con un nodo P, distinto dai punti base, *due* e *due soli* punti di diramazione della superficie di Riemann corrispondente a C, tendono a riunirsi in P, che diviene un punto di combaciamento di due fogli della riemanniana [13].

Distendiamo il parametro λ, da cui dipende la posizione di C entro Σ, sopra un piano complesso, e segnamo ivi il punto generico λ_0 corrispondente a C_0 e i punti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\delta$, che corrispondono alle δ curve C, di genere $p - 1$. Allora in virtù di risultati stabiliti da Picard per un fascio di sezioni piane d'una superficie regolare, risultati che valgono anche nel caso che stiamo esaminando, perché essi poggiano essenzialmente sopra i fatti 1) e 2), si può affermare che:

a) I punti critici dell'equazione differenziale E sono $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\delta$ e ciascuno di essi corrisponde ad una radice doppia dell'equazione determinante fondamentale [14].

b) Detto $\overline{\sigma}_i$ il ciclo lineare *ben definito* di C_0, che circonda quei due punti di diramazione i quali tendono a coincidere col tender di λ a λ_i, lungo il cappio $\lambda_0 \lambda_i$, *tra i cicli* $\overline{\sigma}$ *ve ne sono precisamente* $2p$ *linearmente distinti*, e con questi si può formare un sistema di p retrosezioni [15].

Talchè insomma può sempre supporsi che le retrosezioni (σ), che noi abbiamo inizialmente considerato, sieno state appunto costruite nel modo ora definito.

Ciò posto sieno $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{2p}$ i periodi dell'integrale abeliano u, cui riferiscesi l'equazione E, lungo i cicli $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2p}$. Allora ogni periodo $\omega_l(\lambda)$, pel modo con cui è definito, si presenterà come *olomorfo* e corrispondente ad una radice doppia dell'equazione determinante, nell'intorno di uno o più punti critici: sia μ_l – coincidente con uno dei punti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\delta$ – uno di questi.

(12) Ved. F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 21 (1905), n. 2.

(13) È appena necessario di avvertire che la riemanniana corrispondente a C è completamente determinata, insieme ai suoi punti di diramazione, quando sia fissata razionalmente una g_n^1 sulla C medesima (per esempio una serie di sezioni piane od iperpiane di C)

(14) E. PICARD et G. SIMART, *l.c.*, t. I, p. 97.

(15) E. PICARD et G. SIMART, *l.c.*, t. II, p. 379 e p. 424.

Ad $\omega_l(\lambda)$ sarà *associato* un *altro* periodo, e sia $\omega_m(\lambda)$ $(l \neq m)$, *non olomorfo* nell'intorno di μ_l, ma tale anzi che, percorrendo il cappio $\lambda_0 \mu_l$, $\omega_m(\lambda)$ si muterà in

$$\omega_l(\lambda) + \omega_m(\lambda),$$

mentre tutti gli altri periodi si riprodurranno immutati. Allora girando attorno a μ_l si provocherà fra i cicli σ la sostituzione:

$$(S_{lm}) \quad \begin{cases} \sigma'_m \sim \sigma_l + \sigma_m \quad {}^{(16)}, \\ \sigma'_s \sim \sigma_s \end{cases} \qquad (s \neq m).$$

Le sostituzioni generatrici del gruppo G son tutte del tipo di S_{lm}.

7. *Determinazione delle corrispondenze esistenti su C.* Consideriamo adesso sulla generica C, di cui sopra, una corrispondenza algebrica T d'indici (α, β), la quale, quando C varia entro Σ, *sia suscettibile di variare con continuità*.

Fissata al solito, in modo generico, la curva C_0 di Σ, diciamo a^0 gl'interi caratteristici della T – che si ha su C_0 – in relazione agl'integrali u_h, fissati razionalmente sulla C di Σ, ed ai cicli σ or ora definiti. E, per quella particolar posizione di C, sieno π^0 i valori delle costanti π, che figurano nella rappresentazione (5) della corrispondenza T.

Allorchè C si muove con continuità entro Σ, a partire da C_0, i numeri *interi* a^0 – che dovrebbero variare con continuità – restano immutati, mentre i periodi ω variano nel modo già indicato. E restan pure costanti gl'indici (α, β) della T.

Le quantità π, tratte dalle (6), e corrispondenti alla T variabile, risultano a priori funzioni delle ω, le a restando costantemente uguali alle a^0. Per indagare il modo di variare delle π, occorre vedere quale effetto producan sulle (6) le sostituzioni generatrici del gruppo G.

Consideriamo ad esempio la sostituzione

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega'_{hm} = \omega_{hl} + \omega_{hm}, \\ \omega'_{hs} = \omega_{hs} \end{cases} \qquad (s \neq m)$$

corrispondente alla S_{lm}. Mediante essa la m–esima delle (6), che s'ottiene per $r = m$ (ed $a = a^0$), diviene:

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{p} \pi'_{hi} \omega_{il} + \sum_{i=1}^{p} \pi'_{hi} \omega_{im} = a^0_{mm} \omega_{hl} + \sum_{s=1}^{2p} a^0_{sm} \omega_{hs},$$

(16) Il segno $\sim$, che si legge « omologo a », è qui usato nel senso stesso datogli da Poincaré ne' suoi lavori sulla Analysis situs. Cfr. per esempio le mie *Lezioni di geometria algebrica* [Draghi (Padova, 1908), p. 275].

mentre le altre dànno:

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{p} \pi'_{hi}\,\omega_{ir} = a^0_{mr}\,\omega_{hl} + \sum_{s=1}^{p} a^0_{sr}\,\omega_{hs} \qquad (r = 1, 2, \cdots, m-1, m+1, \cdots, 2p),$$

ove π'_{hi} è il valore assunto da π_{hi} dopo la circolazione, che ha prodotto la sostituzione S_{lm}.

Sottraendo a membro a membro dalla (9) quella delle (10) che corrisponde ad $r = l$, e trascrivendo le altre relazioni (10) si ha:

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{p} \pi'_{hi}\,\omega_{ir} = \sum_{s=1}^{2p} a'_{sr}\,\omega_{hs} \qquad (r = 1, 2, \cdots, 2p),$$

in cui si è posto:

$$(12) \qquad \begin{aligned} a'_{lm} &= a^0_{lm} + a^0_{mm} - a^0_{ml} - a^0_{ll}, & a'_{sm} &= a^0_{sm} - a^0_{sl} & (s \neq l), \\ a'_{lr} &= a^0_{lr} + a^0_{mr} \quad (r \neq m), & a'_{sr} &= a^0_{sr} & (s \neq l,\ r \neq m). \end{aligned}$$

Le relazioni (11) dànno gl'interi caratteristici a', *rispetto ai periodi iniziali* ω, della corrispondenza T' trasformata della T, dopo la circolazione; mentre gl'interi caratteristici di T', *rispetto ai periodi trasformati* ω', sono le medesime a^0, che caratterizzavano T rispetto agli ω.

Ripetendo ν volte di seguito la circolazione precedente, e chiamando $\pi^{(\nu)}$, $a^{(\nu)}$ i nuovi valori delle π, a, e $T^{(\nu)}$ la corrispondenza trasformata della T, si avrà intanto dalle (12):

$$a^{(\nu)}_{sr} = a^0_{sr} \quad (s \neq l,\ r \neq m), \qquad a^{(\nu)}_{sm} = a^0_{sm} - \nu a^0_{sl} \quad (s \neq l),$$
$$a^{(\nu)}_{lr} = a^0_{lr} + \nu a^0_{mr} \quad (r \neq m).$$

E ciò prova che

$$a^0_{sl} = 0 \quad (s \neq l), \qquad a^0_{mr} = 0 \quad (r \neq m),$$

perché altrimenti per le $a^{(\nu)}_{sm}$, $a^{(\nu)}_{lr}$ si otterrebbero, al crescere di ν, quanti si vogliano gruppi distinti di valori, il che (n. 4, Oss.) è assurdo, dal momento che le corrispondenze

$$T, T', T'', \cdots, T^{(\nu)}, \cdots,$$

cui quegli interi si riferiscono, hanno tutte gli stessi indici (α, β).

Ne segue che:

$$a^{(\nu)}_{sm} = a^0_{sm} \quad (s \neq l), \qquad a^{(\nu)}_{lr} = a^0_{lr} \quad (r \neq m),$$

e quindi:

$$a^{(\nu)}_{lm} = a^0_{lm} + \nu(a^0_{mm} - a^0_{ll}).$$

E da ciò, per la stessa ragione ora addotta, deriva

$$a^0_{ll} = a^0_{mm}, \qquad a^{(\nu)}_{lm} = a^0_{lm}.$$

Si hanno pertanto in definitiva le relazioni:

$$(13) \qquad a^0_{sl} = 0 \quad (s \neq l), \qquad a^0_{mr} = 0 \quad (r \neq m), \qquad a^0_{ll} = a^0_{mm},$$

nelle quali l può assumere i valori $1, 2, \cdots, 2p$ ma m è determinato (in uno o più modi) da l.

Da queste relazioni e dalle analoghe provenienti dalle altre sostituzioni di G, si trarrebbe facilmente la conclusione che la corrispondenza T è a valenza, *qualora l'equazione differenziale E fosse irriducibile*; ma poichè ciò non consegue necessariamente dalla regolarità di F, così converrà invece tener conto del fatto che le $a^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ risultan ordinatamente eguali alle a^0, per modo insomma che gl'integrali caratteristici della trasformata di T, dopo una *qualsiasi* circolazione di C, son le a^0, tanto rispetto ai periodi trasformati, quanto rispetto agl'iniziali. Ne deriva che, se T accompagna C in una variazione entro Σ, le π_{hi} tratte dalle (6) per $a = a^0$, risultan funzioni *uniformi* (e quindi razionali, perché non hanno singolarità essenziali) del parametro λ, per modo che le relazioni

$$(14) \qquad u_h(y') + \cdots + u_h(y^p) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\, u_h(x) + \pi_h, \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

ove le π_h son costanti generiche ad $x, y', \cdots, y^p$ punti variabili di C, in base al teorema d'Abel, definiscon *razionalmente* sopra C, *un* sistema continuo di ∞^p corrispondenze algebriche $S(\alpha', p)$, alle quali competon gli stessi interi caratteristici della T. Le S saranno dunque singolari, se lo è T. Dopo ciò, mediante considerazioni geometriche che esporremo nei nn. 17, 18, 19, si prova assurda l'ipotesi che T sia singolare, quando C possa variare in un sistema lineare almeno ∞^2, e si conclude pertanto che:

Avendosi sopra una superficie regolare un sistema lineare irriducibile $|C|$, *almeno* ∞^2, *la curva generica di questo sistema non possiede che corrispondenze a valenza.*

Naturalmente curve speciali del sistema $|C|$ posson benissimo possedere corrispondenze algebriche singolari (prive di valenza).

Poichè il piano è una particolare superficie regolare, dal teorema dimostrato si trae il corollario:

Sulla curva generica di un sistema lineare irriducibile, almeno ∞^2, *di curve piane, tutte le corrispondenze algebriche sono a valenza.*

8. *Le corrispondenze fra i punti di una curva a moduli generali.* Come ho già avvertito nella prefazione, il teorema del n. 7 permette di rispondere, in modo esauriente, alla domanda se l'esistenza sopra una curva C di corrispondenze prive di valenza, porti una *particolarizzazione dei moduli* della curva.

A tale domanda si risponde subito, adducendo appunto l'esempio delle curve variabili entro sistemi lineari infiniti sopra una superficie regolare o in particolare sopra un piano. Di tali curve ne esistono per ogni valore del genere p.

Sicchè si può a fortiori enunciare che:

Sopra una curva a moduli generali, di genere qualunque p, non si trovan che corrispondenze a valenza.

Abbiamo detto « a fortiori », perché effettivamente le curve variabili entro sistemi lineari su di una superficie regolare, non son sempre a moduli generali. Così non sono a moduli generali le curve piane di ordine m e genere $p > \frac{3}{2}m - 3$ (17), variabili in sistemi lineari infiniti, né sono a moduli generali le curve staccate sopra una superficie F, di ordine $m > 4$, priva di punti multipli nello S_3, dalle superficie di un ordine l arbitrario (18); ecc.

È facile provare che *per una curva a moduli generali, le relazioni del tipo* (7) *riduconsi necessariamente ad identità.*

Suppongasi infatti che possa accadere il contrario; che cioè le (7), per $a = a^0$, valgano per qualunque curva C di genere p, senza tuttavia che la soluzione $a = a^0$ sia identica. Le relazioni medesime sussisteranno in particolare quando C sia variabile in un sistema lineare almeno ∞^2, sopra una superficie regolare F. Sieno $u_1, u_2, \cdots, u_p$ p integrali di 1ª specie, fissati razionalmente su C, nel modo già indicato (n. 5), e le ω sieno i periodi di questi integrali definiti al n. 5. Allora le relazioni:

$$u_h(y') + u_h(y'') + \cdots + u_h(y^p) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi^0_{hi} u_h(x) + \pi^0_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

ove le π^0_{hi} sono i valori delle π_{hi} tratti dalle (6) per $a = a^0$, le π^0_h son costanti generiche ed $x, y', y'', \cdots, y^p$ punti variabili di C, in base al teorema d'Abel, definiscono sopra la C, un sistema continuo di ∞^p corrispondenze algebriche T, di indici (α', p), le quali dunque sono suscettibili di variare con continuità insieme a C. Ora ciò, in forza del teorema stabilito al n. 7, non si concilia coll'ipotesi che la soluzione $a = a^0$ delle (7), non sia identica. E quindi risulta assurda la supposizione fatta.

§ 3. – Le corrispondenze fra i punti di una curva C variabile in un sistema lineare sopra una superficie irregolare.

9. *Determinazione razionale di p integrali di 1ª specie appartenenti a C e modo di variare dei loro periodi.* Passiamo ora ad esaminare le corrispondenze fra i punti della curva generica C di un sistema lineare irriducibile $|C|$,

(17) Giacchè sopra una curva a moduli generali di genere p, le g^2_m dipendon da $3(m-2)-2p$ costanti. Cfr. Brill e Noether, *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Ann., 7 (1874), § 9.

(18) Infatti, detti n, p l'ordine e il genere di quelle curve risulta $n = ml$, $p = \frac{1}{2}ml(m+l-4)+1$, e si vede che, per $m > 4$, è certo $p > \frac{4}{3}n - 4$ mentre, se si trattasse di curve a moduli generali, dovrebbe aversi $4(n-3) - 3p \geqq 0$. Cfr. A. Brill e M. Noether, *l.c.*

almeno ∞^1 e di grado > 0, tracciato sopra una superficie F, d'irregolarità $q = p_g - p_a > 0$. Il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$, sega sulla generica C una serie canonica di deficienza q [19], e quindi, mediante $p - q$ curve C' indipendenti, si potranno staccare razionalmente su ogni C soltanto $p - q$ integrali indipendenti di 1ª specie $u_{q+1}, u_{q+2}, \cdots, u_p$. Ad essi aggiungeremo gl'integrali $u_1, u_2, \cdots, u_q$, subordinati su ogni C dai q integrali semplici di 1ª specie, appartenenti ad F. Questi ultimi integrali non posson essere tra loro dipendenti sulla generica C [20], né dipendenti da $u_{q+1}, \cdots, u_p$ [21]. Cosicchè, complessivamente, si saran determinati, in modo razionale, sulla C generica, p integrali abeliani di 1ª specie $u_1, u_2, \cdots, u_p$, linearmente indipendenti.

Si può anzi scegliere su C un tal sistema di retrosezioni

$$(\sigma_1, \sigma_{q+1}), \cdots, (\sigma_q, \sigma_{2q}), \qquad (\varrho_1, \varrho_{p-q+1}), \cdots, (\varrho_{p-q}, \varrho_{2(p-q)})$$

– definite, al variare di C, a meno delle sostituzioni lineari intere unimodulari, di un certo gruppo G – che la tabella dei periodi (normali) degli u_h, ai cicli σ, ϱ, risulti [22]:

	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_{2q}	ϱ_1	ϱ_2	$\cdots$	$\varrho_{2(p-q)}$
u_1	ω_{11}	ω_{12}	$\cdots$	$\omega_{1\cdot 2q}$	0	0	$\cdots$	0
u_2	ω_{21}	ω_{22}	$\cdots$	$\omega_{2\cdot 2q}$	0	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$							
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$							
u_q	ω_{q1}	ω_{q2}	$\cdots$	$\omega_{q\cdot 2q}$	0	0	$\cdots$	0
u_{q+1}	0	0	$\cdots$	0	τ_{11}	τ_{12}	$\cdots$	$\tau_{1\cdot 2(p-q)}$
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$							
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$							
u_p	0	0	$\cdots$	0	$\tau_{p-q\cdot 1}$	$\tau_{p-q\cdot 2}$	$\cdots$	$\tau_{p-q\cdot 2(p-q)}$.

Il gruppo G opera identicamente – a meno di un'omologia fra cicli, *entro ogni* C – sui cicli σ; cosicchè in sostanza esso riducesi ad un gruppo G' di sostituzioni lineari, operanti soltanto sui cicli ϱ.

Suppongasi C variabile in un fascio generico Σ di $|C|$, e s'indichi con λ il parametro che individua la posizione di C nel fascio. Il gruppo G', riferito, anzichè ai cicli ϱ, ai periodi τ di un integrale di 1ª specie u fissato razionalmente sopra C, non è altro che il gruppo dell'equazione differenziale E', d'ordine $2(p-q)$, a coefficienti funzioni razionali di λ, cui soddisfanno i

(19) Cfr. F. SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) *17* (1908) [Nota XXXIX, vol. I, p. 456; N.d.R.].

(20) Ved. la mia Memoria citata, *Intorno al teorema d'Abel*, ecc., n. 2.

(21) Cfr. F. SEVERI, *Di alcuni recenti risultati sulla teoria delle superficie algebriche e sopra qualche problema ad essi collegato*. Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, Roma (1909), p. 241. [Memoria XLV, vol. II, p. 79; N.d.R.].

(22) E. PICARD et G. SIMART, *l.c.*, t. II, p. 433.

periodi τ, al variare di C in Σ. Gli altri periodi ω di u, ai cicli σ, son funzioni razionali di λ [23].

Facendo l'ipotesi che le C di Σ aventi il genere $< p$, abbiano ciascuna come nuova singolarità, rispetto alla generica C, un punto doppio nodale – fuori dei punti base – i punti critici di E', nel piano complesso rappresentativo dei valori di λ, saranno i valori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\delta$ corrispondenti alle suddette C, di genere $p - 1$.

E le sostituzioni elementari, generatrici del gruppo G' avranno la stessa forma della sostituzione S_{lm}, considerata nel n. 6.

Insomma tutto quanto dicemmo in quel n. 6 della equazione E, del suo gruppo G e delle relative sostituzioni, si può attualmente riferire all'equazione E' ed al suo gruppo G'. I cicli $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2p}$, che là consideravamo, vengono adesso sostituiti dai cicli $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_{2(p-q)}$, e i periodi ω dai periodi τ.

10. *Forma canonica delle relazioni che rappresentano una corrispondenza variabile insieme a C.* Procedendo parallelamente alla trattazione svolta nel caso di una superficie regolare, consideriamo sulla C, variabile in Σ, una corrispondenza T, d'indici (α, β), che accompagni C nella sua variazione continua. E sieno ancora le (5) le formole che rappresentano la T. A causa della particolare forma dei periodi normali degli attuali integrali u_h, le (6) si ridurranno soltanto alle $2q^2 + 2(p-q)^2$ relazioni:

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{q} \pi_{hi}\, \omega_{ir} = \sum_{s=1}^{2q} a_{sr}\, \omega_{hs} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \cdots, 2q \\ h = 1, 2, \cdots, q \end{pmatrix},$$

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{p-q} \varepsilon_{hi}\, \tau_{ir} = \sum_{s=1}^{2(p-q)} b_{sr}\, \tau_{sh} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \cdots, 2(p-q), \\ h = 1, 2, \cdots, p-q \end{pmatrix};$$

in cui

$$\varepsilon_{hi} = \pi_{q+h\cdot q+i}, \qquad b_{sr} = a_{2q+s,2q+r}.$$

In verità a priori dalle (6) deriverebbero pure le $4q(p-q)$ relazioni:

$$(15') \qquad \sum_{i=1}^{p-q} \pi_{h\cdot q+i}\, \tau_{ir} = \sum_{s=1}^{2q} a_{s\cdot 2q+r}\, \omega_{hs} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, q \\ r = 1, \cdots, 2(p-q) \end{pmatrix},$$

$$(16') \qquad \sum_{i=1}^{q} \pi_{q+h\cdot i}\, \omega_{ir} = \sum_{s=1}^{2(p-q)} a_{2q+s\cdot r}\, \tau_{hs} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, p-q \\ r = 1, \cdots, 2q \end{pmatrix};$$

ma non è difficile vedere che in queste le π – e per conseguenza le a (n. 3) – son tutte nulle. E infatti la conclusione stabilita al n. 7, che cioè gl'interi caratteristici della corrispondenza trasformata di T, dopo una circolazione

(23) Cfr. E. PICARD et G. SIMART, *l.c.*, t. II, p. 389, nonchè la mia comunicazione citata al Congresso internazionale di Roma.

di λ, son gli stessi tanto rispetto ai periodi iniziali, che rispetto ai trasformati, e quindi che *tutte* le π son funzioni razionali di λ, vale immutata nel caso attuale. Ciò premesso si ricordi che le ω, per essere i periodi degl'integrali semplici di 1ª specie di F, non dipendon da λ.

Ne segue, in virtù delle (15'), che l'integrale abeliano $\sum_{i=1}^{p-q} \pi_{h\cdot q+i}\, u_{q+i}$ ha i periodi indipendenti da λ, e quindi ch'esso è una costante, perché altrimenti [24] dovrebbe essere linearmente dipendente da $u_1, \cdots, u_q$; il che non può darsi (n. 9). Si conclude pertanto che

$$\pi_{h\cdot q+i} = 0 \quad (h = 1, \cdots, q\,;\, i = 1, 2, \cdots, p-q).$$

Quanto alle relazioni (16'), si osserverà che il 1° membro di ciascuna di esse risulta funzione razionale di λ, sicchè si avrà:

$$\sum_{s=1}^{2(p-q)} a_{2q+s\cdot r}\, \tau_{hs} = \sum_{s=1}^{2(p-q)} a_{2q+s\cdot r}\, \tau'_{hs},$$

ove le τ' son le trasformate delle τ dopo una circolazione di λ. Mediante una sostituzione generatrice di G', τ'_{h1}, per esempio, si muterà in $\tau_{h1} + \tau_{h2}$, le altre τ restando invariate; cosicchè risulterà $a_{2q+s\cdot 1} = 0$, non potendo tutte le τ_{h2} esser nulle, giacchè altrimenti gl'integrali $u_{q+1}, \cdots, u_p$ avrebbero meno di $2(p-q)$ periodi ridotti, il che non può avvenire [25]. Similmente si prova che son nulle le altre $a_{2q+s\cdot r}$. Poichè gl'integrali $u_1, \cdots, u_q$ sono indipendenti, ne segue $\pi_{q+h\cdot i} = 0$ $(h = 1, \cdots, p-q\,;\, i = 1, \cdots, q)$. Dobbiamo dunque in definitiva tener conto soltanto delle (15), (16).

D'altronde il lemma del n. 2 e la conseguenza trattane al n. 3, cioè il fatto che, una volta fissate le ω, i valori delle π_{hi}, individuano i valori degl'interi a, valgono anche nel caso attuale, non solo in quanto si riferiscano globalmente a tutte le relazioni (6), ma anche qualora si riferiscano singolarmente alle (15) o alle (16).

E ciò perché le argomentazioni addotte nella dimostrazione del lemma, continuano a reggere, a causa delle proprietà di cui godono i periodi degli integrali normali di 1ª specie, appartenenti ad F, ed i $2(p-q)$ periodi dei $p-q$ integrali riducibili $u_{q+1}, \cdots, u_p$ [26].

Ne deriva che le (15) dànno per le π_{hi} valori costanti. Poichè inoltre le ε_{hi} son funzioni razionali di λ, ragionando come al n. 7, si conclude che su C si può staccar *razionalmente* un sistema continuo di ∞^p corrispondenze $S(\alpha', p)$, aventi, rispetto alle ω, τ e a tutti i sistemi di periodi trasformati, gli stessi interi caratteristici a, b, che competono a T. Nel n. 20 dedurremo da ciò che, se C è variabile in un sistema lineare almeno ∞^2, le S e quindi T,

(24) E. PICARD et G. SIMART, *l.c.*, t. I, p. 102 e segg.

(25) Ved. ad esempio le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi 1908), p. 338.

(26) Ved. il n. 4 della mia Memoria, *Intorno al teorema d'Abel*, ecc.

hanno necessariamente una valenza γ, rispetto agli integrali riducibili $u_{q+1}, \cdots, u_p$, o, in altri termini, che:

Per ogni corrispondenza $T(\alpha, \beta)$ che accompagni C nella sua variazione continua entro un sistema lineare almeno ∞^2, le relazioni (5) *riduconsi alla forma*:

$$u_h(y') + \cdots + u_h(y^\beta) \equiv \sum_{i=1}^{q} \pi_{hi}\, u_i(x) + \pi_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, q),$$

$$u_{q+k}(y') + \cdots + u_{q+k}(y^\beta) + \gamma u_{q+k}(x) \equiv \pi_{q+k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, p - q),$$

ove le π_{hi} e γ restan costanti durante la variazione di C.

Sicchè la determinazione delle corrispondenze variabili insieme a C, riducesi allo studio delle (15), in cui, si ricordi, le ω non sono altro che i periodi degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad F.

11. *Determinazione razionale, su C, di una corrispondenza coordinata ad una soluzione $\pi_{hi} = \pi^0_{hi}$, $a_{rs} = a^0_{rs}$ delle* (15). Com'è noto [27], le equazioni

$$u_h(y') + u_h(y'') + \cdots + u(y^q) \equiv \text{cost. (modd. periodi } \omega) \quad (h = 1, 2, \cdots, q),$$

ove $y', y'', \cdots, y^q$ son q punti di C, al variare delle costanti dei secondi membri, definiscon sulla varietà dei gruppi di q punti di C, un'*involuzione abeliana* J_n, di un certo ordine n (cioè un'involuzione i cui gruppi posson rappresentarsi coi punti di una varietà abeliana o di Picard). Data pertanto una soluzione – eventualmente anche identica – $\pi_{hi} = \pi^0_h$, $a_{rs} = a^0_{rs}$, delle (15), le relazioni:

$$u_h(y') + \cdots + u_h(y^q) \equiv \sum_{i-1}^{q} \frac{\pi^0_{hi}}{n}\, u_h(x) + \pi^0_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, q),$$

dove x è un altro punto variabile su C e le π^0_h son costanti generiche, coordinano ad ogni posizione di x, nq punti:

$$y'_1, y''_1, \cdots, y^q_1; y'_2, y''_2, \cdots, y^q_2; \cdots; y'_n, y''_n, \cdots, y^q_n,$$

formanti un gruppo dell'involuzione J_n e tali quindi che:

$$u_h(y'_1) + \cdots + u_h(y^q_1) \equiv u_h(y'_2) + \cdots + u_h(y^q_2) \equiv \cdots \equiv u_h(y'_n) + \cdots + u_h(y^q_n).$$

Avremo così una corrispondenza algebrica T, d'indici (α, nq), tra i punti x, y, e varranno le relazioni:

$$u_h(y'_1) + \cdots + u_h(y^q_1) + u_h(y'_2) + \cdots + u_h(y^q_2) + \cdots + u_h(y'_n) + \cdots + u_h(y^q_n)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{q} \pi^0_{hi}\, u_i(x) + n\pi^0_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, q).$$

(27) Cfr. E. PICARD, *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes*, etc., Bull. de la Société Math. de France, *11* (1883).

Poichè questa corrispondenza resta staccata razionalmente sopra ogni C e quindi accompagna C nella sua variazione continua, così ne deriva (n. prec.) che fra i rimanenti integrali u dovran sussistere le relazioni:

$$u_{q+k}(y'_1) + \cdots + u_{q+k}(y''_n) + \gamma u_{q+k}(x) \equiv \pi_{q+k}.$$

Si conclude pertanto che:

Data una soluzione $\pi_{hi} = \pi^0_{hi}$, $a_{rs} = a^0_{rs}$ *delle* (15), *si può staccar razionalmente sulla generica C di un sistema lineare almeno* ∞^2, *una corrispondenza i cui interi caratteristici valgano*:

$$a_{rs} = a^0_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, 2q),$$

$$b_{ll} = -\gamma, \quad b_{lm} = 0 \qquad (l \neq m; l, m = 1, 2, \cdots, 2(p-q)).$$

Osservazione 1ª – Si noterà che *la T così costruita appartiene ad un sistema continuo* ∞^q, le cui corrispondenze provengono dalla variazione delle costanti π^0_h.

Osservazione 2ª – In base al teorema d'Abel, sulla generica C si può anche definire, non una sola corrispondenza, ma un sistema continuo di ∞^p corrispondenze $T(a', p)$, variabile insieme a C e coordinato ad una soluzione $\pi_{hi} = \pi^0_{hi}$, $a_{rs} = a^0_{rs}$ delle (15) e ad un valore intero *arbitrario* per γ. E ciò mediante le relazioni:

$$u_h(y') + \cdots + u_h(y^p) \equiv \sum_{i=1}^{q} \pi^0_{hi} u_i(x) + \pi^0_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, q),$$

$$u_{q+k}(y') + \cdots + u_{q+k}(y^p) + \gamma u_{q+k}(x) \equiv \pi^0_{q+k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, p-q).$$

Si osserverà che, se pure la soluzione considerata dalle (15) è identica, cioè se $\pi^0_{hh} = -\gamma'$ $(h = 1, 2, \cdots, q)$, $\pi^0_{hi} = 0$ $(h, i = 1, 2, \cdots, q; h \neq i)$, tuttavia *le T così costruite risultano singolari non appena sia* $\gamma' \neq \gamma$. Corrispondenze siffatte sulla generica C, le diremo *corrispondenze a doppia valenza* (γ, γ'). Nella parte restante di questo § per brevità riserberemo il nome di *singolari* soltanto a quelle corrispondenze che provengon da *soluzioni non identiche delle* (15).

12. *Coordinazione delle corrispondenze singolari esistenti sulla curva C, alle corrispondenze singolari fra i punti della varietà picardiana relativa alla superficie F.* Sia V' la varietà di Picard, a q dimensioni, i cui integrali semplici di 1ª specie hanno gli stessi periodi ω degl'integrali $u_1 u_2, \cdots, u_q$ (cioè infine degl'integrali semplici di 1ª specie di F). Ho già osservato altrove (28) come V' non coincida di necessità con quella che più precisamente si chiama la « varietà di Picard relativa alla superficie F », cioè colla varietà V, i cui punti

(28) *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di* 1ª *specie appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 72 (1913). [Nota pubblicata successivamente, LX, vol. II, p. 381; N.d.R.].

rappresentano gli ∞^q sistemi lineari contenuti in un sistema continuo completo di curve tracciate su F. Ma, ciò nonostante, pel momento fisseremo l'attenzione sulla V'.

Se indichiamo con $U_1, U_2, \cdots, U_q$ i q integrali semplici di 1ª specie di V', che hanno rispettivamente gli stessi periodi degli $u_1, u_2, \cdots, u_q$, ogni soluzione $\pi_{hi} = \pi^0_{hi}$, $a_{rs} = a^0_{rs}$ delle (15), darà luogo ad un sistema continuo di ∞^q corrispondenze algebriche

$$U_h(\eta) \equiv \sum_{i=1}^{q} \pi^0_{hi} U_i(\xi) + \pi_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, q), \tag{17}$$

fra i punti ξ, η di V'; ciascuna di queste corrispondenze essendo individuata dai valori delle π_h. Ma una tale corrispondenza potrà esser su V' non singolare, in quanto la soluzione considerata delle (15) dia luogo su C, secondo l'Oss. 2ª del n. prec., ad una corrispondenza a doppia valenza.

Ad ogni punto ξ, pel teorema d'inversione sulla V', risponderà un sol punto η e ad ogni punto η risponderà un numero finito α di punti ξ.

Viceversa, ogni sistema continuo di ∞^q *corrispondenze singolari* fra i punti di V', darà luogo ad una soluzione *non identica* $\pi_{hi} = \pi^0_{hi}$, $a_{rs} = a^0_{rs}$ delle (15) [talchè al dato sistema si potrà, mediante le (17), sostituire – se si vuole – un sistema di ∞^q corrispondenze singolari $(\alpha, 1)$] e quindi (n. prec.) ad esso resterà coordinato un sistema di ∞^q corrispondenze singolari fra i punti di C.

Concludendo:

I sistemi continui di corrispondenze singolari esistenti sulla curva generica C d'un sistema lineare almeno ∞^2, *tracciato sopra una superficie d'irregolarità* $q > 0$, *sono biunivocamente determinati dai sistemi continui di corrispondenze singolari esistenti sulla varietà abeliana V', i cui integrali semplici di 1ª specie hanno gli stessi periodi degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad F.*

13. Profittando della circostanza che la varietà di Picard V, annessa ad F, qualora non coincida con V', è birazionalmente identica ad una involuzione, I_δ, generata su V' da un gruppo finito H_δ di trasformazioni di 2ª specie (trasformazioni del gruppo continuo abeliano ∞^q, che muta V' in sé) [29], si prova che ad ogni sistema continuo di corrispondenze singolari, appartenenti a V', resta coordinato un sistema continuo di corrispondenze analoghe, fra i punti di V; e viceversa. Converrà far per gradi il passaggio da V' a V nel modo che brevemente indichiamo.

Si consideri anzitutto una trasformazione S_1, ciclica d'ordine $\delta_1 > 1$ (δ_1 divisore di δ) contenuta in H_δ, e l'involuzione abeliana, I_{δ_1}, generata da S_1. Allora la I_δ risulterà *composta* colla I_{δ_1}, per modo che, indicando con W_1 la varietà abeliana i cui punti rappresentano i gruppi di I_{δ_1}, la V risulterà

(29) Ved. la mia Nota ultimamente citata.

birazionalmente identica ad un'involuzione I_{δ/δ_1}, generata su W_1 da un gruppo di δ/δ_1 trasformazioni di 2ª specie.

La tabella dei periodi normali (primitivi) di un sistema d'integrali normali di W_1 si desume dalla tabella analoga relativa agl'integrali di V (30), e si ha modo allora di associare ad ogni corrispondenza singolare di V' una corrispondenza singolare di W_1 e viceversa. Si consideri poi una trasformazione S_2, ciclica di ordine $\delta_2 > 1$ (δ_2 divisore di δ/δ_1), che appartenga al gruppo generatore dell'involuzione I_{δ/δ_1}. Si costruisca la varietà abeliana W_2, che rappresenta l'involuzione generata su W_1 da S_2; e così si prosegua fino ad arrivare a V.

La conclusione sarà che *i sistemi continui di corrispondenze singolari esistenti sulla generica C – di cui nell'enunciato precedente – restano anche coordinati ai sistemi continui di corrispondenze singolari esistenti sulla varietà di Picard V, annessa ad F.*

Osservazione. – Poichè quando la varietà V (o la V') è a moduli generali, cioè quando i periodi de' suoi integrali semplici sono affatto arbitrari (compatibilmente colla nota condizione che sia definita positiva una certa forma quadratica) le relazioni fra le ω che si deducon dalle (15) eliminando le π_{hi} – relazioni analoghe alle (7) – devono ridursi ad identità (cfr. col. n. 8), può anche dirsi che:

Quando la varietà di Picard V annessa ad F è a moduli generali, sulla generica C, di cui sopra, non esistono che corrispondenze a valenza (semplice o doppia). Effettivamente *sopra la generica C esistono corrispondenze a doppia valenza (γ, γ'), con γ, γ' interi arbitrari* (n. 11, Oss. 2ª). Fa eccezione soltanto il caso in cui $p = q$, che si verifica ad esempio quando $|C|$ è un sistema lineare di unisecanti delle generatrici di una rigata di genere q.

14. *Limite superiore pel numero delle corrispondenze indipendenti fra i punti della generica C.* Consideriamo ora q integrali *normali* di 1ª specie della superficie F (31); e, per non moltiplicar le notazioni, indichiamoli con $u_1, u_2, \cdots, u_q$. Sia:

$$\begin{array}{c|cccc} u_1 & \frac{1}{e_1} & 0 & \cdots & 0 \quad \varrho_{11} \cdots \varrho_{1q} \\ u_2 & 0 & \frac{1}{e_2} & \cdots & 0 \quad \varrho_{21} \cdots \varrho_{2q} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_q & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{e_q} \quad \varrho_{q1} \cdots \varrho_{qq} \end{array} \qquad (\varrho_{rs} = \varrho_{sr})$$

(30) Ved. F. ENRIQUES–F. SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, Acta Mathematica, *32* (1909), pp. 283–392 [Memoria XLVII, vol. II, p. 84; N.d.R.], ove al n. 11 (p. 295) la cosa è sviluppata diffusamente per $q = 2$. Il ragionamento si estende subito, qualunque sia q.

(31) Ved. il n. 5 della mia Memoria citata, *Intorno al teorema d'Abel*, ecc.

la tabella dei periodi normali di questi integrali, ove $e_1, e_2, \cdots, e_q$ son numeri interi positivi. Le relazioni (15), mediante cui si determinan le corrispondenze singolari sulla C (o sulla V'), tenuto conto degli speciali valori dei periodi normali, assumono adesso la forma:

$$\frac{\pi_{hr}}{e_r} = \frac{a_{hr}}{e_h} + \sum_{s=1}^{q} a_{q+s\cdot r}\, \varrho_{hs} \qquad (h, r = 1, 2, \cdots, q).$$

$$\sum_{i=1}^{q} \pi_{hi}\, \varrho_{ir} = \frac{a_{h\cdot q+r}}{e_h} + \sum_{s=1}^{q} a_{q+s\cdot q+r}\, \varrho_{hs}$$

Da ciò si desume molto facilmente un limite superiore pel numero delle corrispondenze indipendenti che esistono su C (32).

Ricordiamo anzitutto che più corrispondenze $T_1, T_2, \cdots, T_k$, sopra una curva C, diconsi *indipendenti*, quando una loro combinazione lineare qualunque $\lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$ a coefficienti interi λ, non tutti nulli (ma anche, eventualmente, in parte negativi, sicchè la corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$ può risultar *virtuale*), non è mai a valenza zero (33). Se le $T_1, T_2, \cdots, T_k$ corrispondono ai valori $\pi'_{hr}, \pi''_{hr}, \cdots, \pi^{(k)}_{hr}$ delle π_{hr} ed ai valori rispettivi $-\gamma', -\gamma'', \cdots, -\gamma^{(k)}$ per le b_{rr}, esse son dipendenti o indipendenti, secondo che è o non è possibile soddisfare alle equazioni

$$(18) \qquad \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\, \pi^{(t)}_{hr} = 0\,, \qquad \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\, \gamma^{(t)} = 0 \qquad (h, r = 1, 2, \cdots, q),$$

per valori interi non tutti nulli delle λ. In forza del lemma del n. 2, che, come abbiamo già osservato, vale anche per gl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie, le prime q^2 delle (18) equivalgono alle $2q^2$ equazioni

$$\sum_{t=1}^{k} \lambda_t\, a^{(t)}_{hr} = 0\,, \qquad \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\, a^{(t)}_{q+h,r} = 0 \qquad (h, r = 1, 2, \cdots, q),$$

e da ciò segue senz'altro che:

Il numero delle corrispondenze indipendenti che esistono sulla curva generica C d'un sistema lineare infinito di grado > 0, tracciato sopra una superficie d'irregolarità $q > 0$, non può superare $2q^2 + 1$ (34).

§ 4. – Trattazione geometrica della questione

15. *Determinazione razionale, sulla generica C, di un sistema continuo di corrispondenze, a partire da una particolare corrispondenza che accompagni C nella sua variazione continua.* Senza distinguere pel momento le superficie

(32) Qui si applica il procedimento stesso indicato da Hurwitz, in un caso analogo, a p. 582 della Memoria a).

(33) Ved. la mia Memoria, *Corrispondenze*, § 3.

(34) La questione di ricercare se questo limite superiore possa esser raggiunto, resta insoluta. Quando pubblicai la Nota riassuntiva dei C.R., credevo invece di poter rispondere affermativamente.

regolari dalle irregolari, consideriamo al solito sulla F un fascio Σ, tolto genericamente da un sistema lineare irriducibile $|C|$ ∞^r, privo di ∞^{r-1} curve spezzate, tracciato sulla superficie medesima; e supponiamo, come al n. 7, che sulla C generica di Σ, esista una corrispondenza *irriducibile* $T(\alpha, \beta)$, suscettibile di variare con continuità insieme alla C.

Fisseremo l'attenzione non sulla sola T, ma su tutto il sistema continuo completo $\{T\}$ di corrispondenze (α, β) definito su C dalla T (35).

Allorchè C circola entro Σ, a partire da una posizione iniziale e ritornandovi, la T conserva gli stessi indici, e quindi il sistema continuo $\{T\}$ si muta in un sistema continuo, eventualmente coincidente con $\{T\}$, di corrispondenze (α, β). Ricordando il lemma geometrico del n. 4, si vede dunque che, quando C circola entro Σ, $\{T\}$ si può al più scambiare con un numero finito di sistemi continui analoghi. Sieno

$$\{T_1\}, \{T_2\}, \cdots, \{T_k\},$$

i sistemi continui distinti che posson venire a coincidere con uno, $\{T_1\} = \{T\}$, di essi, mediante le circolazioni di C; e indichiamo cogli stessi simboli T, usati per le corrispondenze, le curve imagini di queste, sulla superficie Φ delle coppie ordinate x, y dei punti di C (36). Il grado virtuale della curva $T_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ – che coincide col numero delle coppie x, y comuni a due corrispondenze T_i dello stesso sistema continuo, quando T_i non sia una curva isolata – si mantiene immutato durante le circolazioni di C, cosicchè sarà

$$\nu = [T_1 T_1] = [T_2 T_2] = \cdots = [T_k T_k] \text{ (37)}.$$

Vogliamo ora provare di più che anche i numeri delle coppie comuni a due corrispondenze T_i, T_l di differenti sistemi, sono uguali tra loro ed a ν; ossia che

$$\nu = [T_i T_l] \qquad (i, l = 1, 2, \cdots, k).$$

Consideriamo infatti l'ente algebrico $\infty^1 \Gamma$ che ha per *elementi* i sistemi continui derivanti da $\{T_1\}, \cdots, \{T_k\}$, quando C descrive Σ. L'ente Γ è *irriducibile*, perché due qualunque de' suoi elementi, pel modo stesso con cui son definiti, si possono scambiare fra loro con una conveniente circola-

(35) Considerando la superficie Φ definita al n. 1, il sistema continuo $\{T\}$, ha per imagine un sistema continuo completo di curve tracciate su Φ. E l'infinita dei sistemi lineari distinti contenuti in questo sistema, è generalmente $2p$, perchè tale è l'irregolarità di Φ.

(36) A qualche lettore potrà riuscir più chiaro il ragionamento seguente, qualora venga prima fissato razionalmente, a partire da C, il *modello projettivo* della superficie Φ. Se la F s'imagina in un iperspazio $S_r (r + 3)$, per costruire un siffatto modello, si trasformerà F, mediante un'omografia di S_r, nella superficie F'. Detta C' la curva omologa di C, si potrà prendere come superficie Φ la sezione, con un dato iperpiano, della varietà delle ∞^2 rette appoggiate a C, C'.

(37) Ved. per le notazioni e per le proprietà di cui avremo da far uso, la mia Memoria, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Math. Ann., *62* (1906), p. 194 [Memoria XXIX, vol. I, p. 332; N.d.R.].

zione di C; e inoltre il gruppo dei k elementi di Γ che appartengono ad una C di Σ, al variare di C nel fascio, descrive entro Γ un'involuzione di grado k, *razionale*, cioè una serie lineare g^1_k. Ne deriva che due qualunque sistemi $\{T\}$ posson portarsi a coincidere sopra qualche curva (irriducibile) del fascio [38] e quindi che due curve T_1 di due diversi sistemi, s'incontrano in un numero di punti uguale al loro grado virtuale. Da ciò segue inoltre che, se $k > 1$, è necessariamente $\nu > 0$, perché se fosse $\nu = 0$, tutte le corrispondenze *irriducibili* T non potrebbero che appartenere ad un unico fascio. Son pertanto soddisfatte le condizioni aritmetiche

$$[T_i T_i] = [T_i T_l] = [T_l T_l] > 0 \qquad (i, l = 1, 2, \cdots, k),$$

e quindi [39] due equimultipli convenienti λT_i, λT_l delle curve T_i, T_l appartengono ad un medesimo sistema continuo. A priori l'intero positivo λ dipende dagl'indici i, l; ma considerando il minimo comune multiplo μ di tutti i possibili λ relativi alle coppie T_i, T_l, si avrà, a fortiori o a egual ragione:

$$\mu T_i \equiv \mu T_l \qquad (i, l = 1, 2, \cdots, k),$$

ove μ è un intero positivo indipendente dagl'indici i, l.

E le stesse relazioni varranno anche se in μ s'intende incluso un fattore intero di grandezza arbitraria.

Ma per dedurre da ciò che le curve $\mu T_1, \mu T_2, \cdots, \mu T_k$ appartengono ad uno *stesso* sistema continuo, occorre provare che il sistema continuo $\{\mu T_1\}$, per esempio, è perfettamente individuato. A tale scopo si osservi che, detto π il genere virtuale di T_1, e ν_μ, π_μ il grado ed il genere virtuali di μT_1, si ha:

$$\nu_\mu - \pi_\mu + 1 = \binom{\mu + 1}{2} \nu - \mu(\pi - 1).$$

Essendo $\nu > 0$, al crescere di μ, l'espressione del 2° membro, e quindi $\nu_\mu - \pi_\mu + 1$, si posson rendere tanto grandi quanto si vuole; e quindi per μ sufficientemente alto, si può supporre positiva la « dimensione virtuale » della curva μT_1. Ciò basta per affermare che il sistema continuo $\{\mu T_1\}$ è individuato [40] e quindi che:

$$\mu T_1 \equiv \mu T_2 \equiv \cdots \equiv \mu T_k .$$

(38) Sopra un ente algebrico irriducibile (curva) Γ, due punti di un medesimo gruppo di g^1_k posson sempre portarsi a coincidere. Dall'ipotesi opposta segue infatti che la g^1_k è composta con un'involuzione γ^1_h, i cui gruppi son formati da quei punti, coniugati in g^1_k, che posson venire a coincidere tra loro. E poichè due gruppi di γ^1_h, facenti parte d'un medesimo gruppo di g^1_k, per la loro stessa definizione, non posson mai coincidere, così, sulla curva imagine della γ^1_h, si avrebbe una serie *lineare* $g^1_{k/h}$, priva di elementi multipli.

(39) Ved. la mia Memoria citata, *Sulla totalità delle curve*, ecc., § 2.

(40) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 65 (1906), n. 7 [Memoria XXXI, vol. I, p. 398; N.d.R.].

Si conclude che la corrispondenza μT, multipla [41] secondo μ della T inizialmente considerata, quando C circola entro Σ, si muta in una corrispondenza dello stesso sistema continuo, cioè che:

Se sulla curva C variabile in un sistema lineare infinito, tracciato sopra una superficie algebrica F, esiste una corrispondenza T, variabile con continuità insieme a C, un multiplo conveniente μT di quella corrispondenza, definisce un sistema continuo completo $\{\mu T\}$ di corrispondenze, razionalmente determinato sopra ogni C.

Si avvertirà che se T è singolare, lo è pure μT [42] ed ogni altra corrispondenza dello stesso sistema continuo [43] e quindi che:

Quando sulla generica C, di cui sopra, esiste qualche corrispondenza singolare, si può definir razionalmente sopra ogni C, un sistema continuo completo di corrispondenze singolari.

Nel seguito, per non moltiplicar le notazioni, chiameremo ancora $\{T\}$ – anzichè $\{\mu T\}$ – il sistema continuo di corrispondenze singolari, razionalmente determinato su C, a partire da una data corrispondenza singolare, che accompagna C nella sua variazione continua.

16. Poichè la corrispondenza $T(\alpha, \beta)$, appartenente al sistema continuo $\{T\}$ razionalmente staccato su C, è singolare – e quindi in particolare non è a valenza zero – al sistema $\{T\}$ resta associato un sistema continuo $\{S\}$ di corrispondenze, non degeneri, aventi uno degl'indici uguali a p.

Scelta infatti su C una generica serie lineare $g^{\beta}_{p+\beta}$, non speciale, e indicato con Y il gruppo dei β punti y che corrispondono ad x in una data T, basta associare ad x il gruppo (non speciale) Z di p punti, residuo di Y rispetto alla $g^{\beta}_{p+\beta}$; si ha così fra le posizioni di x e i punti del gruppo variabile Z, una corrispondenza S, d'indici (α', p), che diremo brevemente *la corrispondenza complementare* di T, giacchè la somma $S + T$ è a valenza zero.

Il sistema continuo $\{S\}$ rimane in tal modo razionalmente definito a partire da $\{T\}$. Sulla superficie Φ, l'imagine di $\{S\}$ è il sistema costituito dalle curve residue delle T rispetto al sistema continuo, ben determinato, delle curve L a valenza zero, che segano rispettivamente in $\beta + p$ ed in $\alpha + \alpha'$ punti le curve K_x, K_y dei due fasci unisecantisi, appartenenti a Φ.

Se T è singolare, S lo è pure, perché se S avesse la valenza γ, T dovrebbe avere la valenza $-\gamma$.

Si conclude pertanto che:

Se sulla generica C, di genere p, variabile nel modo suddetto su F, esiste qualche corrispondenza singolare, sopra ogni C può definirsi razionalmente un sistema continuo completo di corrispondenze singolari, di indici (α', p).

(41) Pel concetto di « multiplo » di una data corrispondenza, ved. la mia Memoria, *Corrispondenze*, n. 2.

(42) Cfr. la mia Nota: *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *48* (1913), n. 3 [Nota pubblicata successivamente, LXI, vol. II, p. 391; N.d.R.].

(43) Ibidem, n. 5.

17. *Condizioni affinchè sulla generica C si possa staccar razionalmente una corrispondenza singolare.* Abbiamo già osservato (n. 15) che una corrispondenza S fra i punti di C, appartiene ad un sistema continuo completo, il quale contiene generalmente ∞^{2p} sistemi *lineari* distinti di corrispondenze.

Su Φ il sistema continuo $\{S\}$ è il luogo dei sistemi lineari

$$|S + K'_x - K^0_x + K'_y - K^0_y|, \tag{19}$$

ove K^0_x, K^0_y son due gruppi genericamente fissati di p curve dei fasci $\{K_x\}, \{K_y\}$ e K'_x, K'_y due gruppi variabili di p curve dei fasci stessi. Com'è noto (44), il sistema lineare (19) esiste sempre che la « dimensione virtuale » della curva S sia non negativa.

Quando però la corrispondenza S abbia, come nel n. prec., gl'indici (α', p), e faccia corrispondere al generico x un gruppo non speciale di p punti, cioè quando la curva S seghi K_x in gruppi non speciali di p punti, è ben chiaro che non potrà mai esistere il sistema (19), perché una sua curva S_2 dovrebbe segare sopra ogni K_x un gruppo (non speciale) coincidente con quello ivi staccato da una curva S_1 del sistema lineare $|S + K'_y - K^0_y|$. Sarebbe quindi $S_2 = S_1$, cioè $K'_x \equiv K^0_x$, il che, essendo K^0_x generico, e perciò non speciale, non può avvenire se K'_x non coincide con K^0_x.

Una generica curva del sistema continuo $\{S\}$, di cui si parla al n. 16, determina un sistema lineare completo $|S|$, ∞^0, perché ogni curva di $|S|$ deve segare *un* gruppo determinato di punti sopra ciascuna K_x. A causa delle osservazioni precedenti si può pertanto affermare che il sistema continuo $\{S\}$ è ∞^p. Ciò che del resto è ben d'accordo col fatto che gli ∞^p sistemi $|T|$, le cui curve segano gruppi equivalenti di β punti sulle K_x, e che si ottengono tutti da uno di essi mediante le ∞^p operazioni $+ K'_x - K^0_x$, dànno come residuo, rispetto al sistema $\{L\}$, definito al n. 16, una medesima curva S.

In verità potrebbe dubitarsi che la dimensione di $\{S\}$ si riducesse ulteriormente, se non esiste sempre il sistema $|S + K'_y - K^0_y|$. Ma un tal dubbio si rimuove osservando che, pel modo con cui le S furon costruite, ve n'è sempre qualcuna che passa per un gruppo di p punti generici scelti sopra una K_x assegnata, giacchè ciò equivale ad affermare che c'è sempre *qualche* corrispondenza S in cui ad un punto fissato x di C, corrisponde un dato gruppo generico Z di p punti.

Quest'osservazione sarebbe sufficiente per le deduzioni successive; ma non è inopportuno di precisar la cosa ulteriormente, provando che per p punti generici di una K_x passa una sola curva S o, in altri termini, che dato su C un punto x_0 ed un gruppo Z_0 di p punti generici, vi è una sola corrispondenza del sistema continuo $\{S\}$, che faccia corrispondere ad x_0 i punti y del gruppo Z_0. Questo fatto si stabilisce facilmente per via trascendente. Invero nelle equazioni (5) di una corrispondenza $S(\beta = p)$, le π_{hi} si conser-

(44) F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2) *38* (1905). [Nota XXVII, vol. I, p. 325; N.d.R.].

vano inalterate quando S varia in $\{S\}$, giacchè non mutan gl'interi a, i quali determinano univocamente le π_{hi}. Due S diverse differiscon pertanto pei valori delle costanti π_h, indipendenti dalla posizione di x su C, e quindi esse fanno corrispondere ad *ogni* x due gruppi *distinti* di p punti. Si conclude che:

Da ogni sistema continuo completo di corrispondenze singolari (α', p) *razionalmente determinato sopra ciascuna* C, *si può sempre staccare una corrispondenza, appena sulla* C *sieno razionalmente dati un punto ad un gruppo non speciale di* p *punti.*

18. *Determinazione razionale di una corrispondenze singolare sulla curva generica* C *di un fascio.* Proviamo ora che:

Se sulla generica C *del fascio* Σ, *tracciato sulla superficie* F, *esiste qualche corrispondenza singolare, si può sempre fissar razionalmente sulla stessa* C *una ben determinata corrispondenza singolare.*

Si consideri infatti una curva D di F, la quale sia generica rispetto al fascio Σ, nel senso che il gruppo dei punti (C, D) non contenga nessuno dei punti di Weierstrass relativi alla generica C (punti p–pli della serie canonica). Costruito razionalmente su C un sistema continuo $\{S\}$ di corrispondenze singolari di indici (α', p) (n. 16), e indicati con $x_1, x_2, \cdots, x_t$ i t punti del gruppo (C, D), assegnando come punti y omologhi del punto $x_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ i p punti (coincidenti) del gruppo non speciale px_i, si staccherà da $\{S\}$ *una* determinata corrispondenza S_i (n. prec.). Sicchè la corrispondenza d'indici $(t\alpha', tp)$:

$$T = S_1 + S_2 + \cdots + S_t ,$$

resterà razionalmente determinata sopra ogni C. Proviamo ch'essa è singolare. Osserviamo a tal uopo, anzitutto, che, detto u il numero dei punti uniti delle corrispondenze S e 2μ il loro grado virtuale (necessariamente pari), il numero u' dei punti uniti di T e il grado $2\mu'$ della corrispondenza medesima risultano espressi da

$$u' = tu , \qquad 2\mu' = 2t^2\mu ;$$

perché sulla superficie Φ, T ha gli stessi caratteri d'una curva tS. Se quindi la corrispondenza T fosse a valenza, verrebbe [45]:

$$(u' - t\alpha' - tp)^2 = 4p(t^2\alpha' p - t^2\mu),$$

donde segue:

$$(u - \alpha' - p)^2 = 4p(\alpha' p - \mu) ,$$

la quale prova [46] che ogni corrispondenza S sarebbe essa pure a valenza, contrariamente al supposto.

Ne deriva che T è singolare, ed il teorema enunciato risulta perciò stabilito.

(45) Ved. la mia Nota citata, *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze.*
(46) Ibidem, n. 5.

Osservazione. – Abbiamo detto nel n. 17 che pei nostri scopi bastava soltanto sapere che il sistema continuo completo $\{S\}$ ha la dimensione p, ossia che per p punti generici di una K_x passa un numero finito $\varepsilon \geqq 1$ di curve S. Mentre nel ragionamento precedente abbiamo profittato della circostanza più precisa che $\varepsilon = 1$. Ma in realtà si può anche farne a meno. Basta all'uopo considerare invece della corrispondenza T sopra definita, la corrispondenza

$$T_\varepsilon = S_1' + S_1'' + \cdots + S_1^{(\varepsilon)} + S_2' + S_2'' + \cdots + S_2^{(\varepsilon)} + \cdots + S_t' + S_t'' + \cdots + S_t^{(\varepsilon)},$$

ove $S_i', S_i'', \cdots, S_i^{(\varepsilon)}$ sono le ε corrispondenze di $\{S\}$ che fanno passare dal punto x_i al gruppo dei p punti y coincidenti con px_i. Alla T_ε è applicabile lo stesso ragionamento sopra sviluppato per la T: si conclude cioè che la T_ε è singolare. E d'altronde è chiaro che anche T_ε resta razionalmente staccata sopra ogni C.

19. *Determinazione delle corrispondenze fra i punti di una C variabile in un sistema lineare sopra una superficie regolare.* Facciamo adesso l'ipotesi che la superficie F sia regolare, e che la curva C su essa tracciata, di genere p, sia variabile in una rete H, di grado n. Dimostreremo allora che non può esistere su C una corrispondenza singolare, variabile colla curva. Invero, dall'ipotesi che esista una corrispondenza siffatta, segue (n. prec.) che sopra ogni C si può fissare razionalmente una corrispondenza singolare T. Ciò posto, scelto un punto generico x di F, consideriamo la curva D_x riempita dagli omologhi y di x nelle corrispondenze T, relative alle ∞^1 curve C passanti per x. La curva D_x abbia la molteplicità s nel punto x e le molteplicità t – necessariamente eguali per ragioni di simmetria – in ciascuno degli $n - 1$ punti z in cui le C per x si segano fuori di x e dei punti base della rete. Inoltre D_x passerà pei punti base della rete con certe molteplicità, che non occorre neppure tener presenti, giacchè al variare di x sopra una fissata C, esse dànno luogo ad intersezioni fisse della C colla D_x. Le intersezioni variabili, oltre al punto x, contato s volte, sono il gruppo Y dei punti y corrispondenti ad x nella C considerata, e il gruppo Z dei punti z, contati ciascuno t volte. Nè posson esservi altre intersezioni variabili, come subito si vede tenendo conto del fatto che la rete H è un sistema d'indice 1.

Al variare di x sulla fissata C, si ottiene un sistema continuo ∞^1 di curve D_x, che, a causa della regolarità di F, dovranno esser contenute totalmente in un medesimo sistema lineare [47]. Sicchè detto x' un altro punto di C, Y', Z' i gruppi Y, Z relativi, i due gruppi $sx + Y + tZ$, $sx' + Y' + tZ'$, essendo staccati su C, fuori di punti fissi, da due curve equivalenti $D_x, D_{x'}$, saranno essi pure equivalenti:

$$sx + Y + tZ \equiv sx' + Y' + tZ'.$$

(47) F. ENRIQUES, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, *13* (1899).

Ma poichè evidentemente

$$x + Z \equiv x' + Z',$$

dal confronto colla precedente si trae:

$$Y + (s - t)\,x \equiv Y' + (s - t)\,x',$$

la quale prova che la corrispondenza T ha la valenza $s - t$, contro il supposto. È dunque assurdo ammettere che su C esistano corrispondenze singolari variabili. Si conclude cioè che:

Ogni corrispondenza algebrica esistente sulla curva generica C di un sistema lineare, almeno ∞^2, sopra una superficie regolare, è a valenza.

Osservazione. – Il teorema del n. 15, che costituisce il fondamento della trattazione geometrica svolta in questo §, richiede che la curva C sia variabile in un sistema lineare $|\,C\,|\,\infty^r$ $(r \geq 1)$, privo di ∞^{r-1} curve spezzate; mentre per la trattazione trascendente occorre soltanto che le curve di un fascio generico del sistema $|\,C\,|$ (che deve però in tal caso avere la dimensione $r \geqq 2$), non abbian fuori dei punti base, che punti doppi nodali. Da questa condizione deriva una notevole semplicità pei calcoli esposti al n. 7; ma non è perciò detto ch'essa sia essenziale. Comunque, poichè le due ricordate condizioni non hanno fra loro alcun legame, così è legittimo indurne che nell'enunciato definitivo si possa astrarre da entrambe, lasciando soltanto, come abbiamo già fatto, la condizione che C sia variabile in un sistema lineare almeno ∞^2.

20. *Caso delle superficie irregolari.* I teoremi dimostrati in questo §, sino al n. 18 incluso, non richiedono affatto la regolarità della superficie F e posson pertanto servire di fondamento ad una trattazione geometrica della questione risoluta per via trascendente al n. 13. Non crediamo opportuno di dilungarci ulteriormente in proposito, perché il punto fondamentale della trattazione geometrica riman sempre, anche nel caso delle superficie irregolari, il teorema del n. 18. Ci limiteremo soltanto ad osservare – poiché la cosa occorre per completare il teorema del n. 10 – che:

Ogni corrispondenza algebrica esistente sulla generica curva di un sistema lineare almeno ∞^2, sopra una superficie d'irregolarità q, è a valenza rispetto al sistema di integrali riducibili $u_{q+1}, \cdots, u_p$, definiti al n. 9.

Per dimostrare ciò basta ripetere il ragionamento del n. precedente, sostituendo soltanto all'affermazione che le D_x son contenute in un medesimo sistema lineare, l'altra ch'esse staccano su C una serie algebrica di gruppi di punti *equivalenti* rispetto al sistema di integrali $u_{q+1}, \cdots, u_p$, cioè tali che la somma di ognuno di questi integrali nei punti di uno dei gruppi suddetti, resta costante al variare del gruppo [48]. Le equivalenze scritte del n. prec. debbono adesso intendersi come equivalenze rispetto al sistema $u_{q+1}, \cdots, u_p$.

(48) Questo fatto si troverà stabilito in un mio prossimo lavoro sulle corrispondenze a doppia valenza.

LVII.

RELAZIONI TRA GL'INTEGRALI SEMPLICI E GL'INTEGRALI MULTIPLI DI I^a SPECIE DI UNA VARIETÀ ALGEBRICA

Annali di Matematica, (3) *20* (1913), pp. 201–216.

Per quanto Lagrange si sia occupato di integrali di differenziali algebrici in una sola Memoria (1), che ha per iscopo principale la rettificazione dell'ellisse e dell'iperbole, non parrà fuor di luogo la pubblicazione in questo Volume, dedicato al sommo Analista (2), di un lavoro sugl'integrali appartenenti ad una superficie o varietà algebrica, tanto più che il concetto medesimo di forma differenziale *integrabile*, che giuoca in modo più o meno esplicito nella mia ricerca, potendosi esprimere mediante una condizione al contorno, si riattacca anche alle celebri Memorie di Lagrange sul calcolo delle variazioni.

Allorchè si conoscono sopra una superficie algebrica, due integrali semplici di I^a specie, funzionalmente indipendenti, si può formare, con Noether (3), un ben determinato integrale doppio di I^a specie, che deriva razionalmente da quelli.

Nei più recenti sviluppi di geometria sopra una superficie, tale relazione tra integrali semplici e doppi, ha costituito spesso il punto di partenza di notevoli applicazioni.

In questo lavoro mi propongo di mostrare l'esistenza di legami analoghi tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di I^a specie – doppi, tripli, $\cdots$, k–pli – di una varietà algebrica W_k, a k dimensioni: legami che permettono appunto di costruire razionalmente, in modo immediato, un integrale s–plo di I^a specie, appena sieno noti s integrali semplici di I^a specie, funzionalmente indipendenti.

(1) *Sur une nuovelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré*, Mémoires de l'Ac. royale de Turin, *2* (1784–85); *Oeuvres*, t. II, p. 253.

(2) Un aneddoto, forse poco noto, che riconferma la grande considerazione in cui Lagrange era tenuto anche da' suoi contemporanei, è raccolto dal Brunacci. « Napoleone, essendo in Milano, volle sostenere al Brunacci, che la Francia primeggiava sopra l'Italia in forza di matematiche. Il Brunacci rispose francamente: *che se gli rendeva Lagrange – Italiano – si sarebbe battuto* ». (Ved. MORENA, *Vittorio Fossombroni economista*, Arezzo, tipografia Bellotti, 1896).

(3) *Über die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, Math. Ann., *29* (1886). Vedi pure: E. PICARD et G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, Gauthier–Villars, t. I (1897), p. 139.

La via che si segue per stabilire la relazione di Noether sulle superficie, si può senza dubbio estendere, senza troppe difficoltà; e conduce ad un legame tra gl'integrali semplici e gl'integrali k–pli. Ma nei casi intermedi degli integrali doppi, tripli, $\cdots$, $(k-1)$–pli, la via stessa è, per ora almeno, addirittura impraticabile, se non altro perché non si sanno assegnare le *forme normali* di questi integrali intermedi.

Io dunque ho creduto opportuno di riprendere *ex–novo* la questione anche per le superficie, cercando di riattaccare la relazione di Noether a proprietà geometriche della superficie, piuttosto che a proprietà algoritmiche di certi polinomi, come nella trattazione consueta. Ed in tal modo ho ottenuto un procedimento estensibile agl'integrali multipli, di ogni rango, appartenenti ad una varietà.

Dimostro in primo luogo, per via sintetica, che una superficie F d'irregolarità $p > 0$, può sempre considerarsi come la trasformata razionale di una superficie Φ, *di eguale irregolarità*, appartenente alla varietà di Picard V_p, annessa ad F. Va eccettuato soltanto il caso in cui F possegga un fascio irrazionale di genere p: in tal caso F è la trasformata razionale di una curva di genere p, tracciata su V_p, e tutti gl'integrali semplici di 1ª specie di F son funzioni di uno tra essi.

Indicando con u_1, u_2 due dei p integrali semplici di 1ª specie di V_p, gli integrali doppi di 1ª specie della varietà (che è abeliana) saran del tipo $\iint du_1\, du_2$; e gli uni e gli altri subordineranno su Φ integrali semplici e doppi, i quali alla lor volta si trasformano in integrali analoghi di F. Anzi, dal momento che Φ, F hanno la stessa irregolarità, *tutti* gl'integrali semplici di 1ª specie di F, si ottengono nel modo indicato dagl'integrali semplici u di V_p (mentre lo stesso non potrebbe dirsi degl'integrali doppi).

Eseguendo la sostituzione razionale che fa passare da Φ ad F, ne segue subito che il determinante jacobiano di due integrali semplici di 1ª specie della F – supposta immersa in S_3 e di equazione $F(x, y, z) = 0$ – rispetto alle due variabili indipendenti x, y, è la funzione integranda di un integrale doppio di 1ª specie. Ed è questo appunto il legame scoperto da Noether.

Estendo poi alle varietà il procedimento sviluppato per le superficie, provando prima che la data W_k, d'irregolarità superficiale $p > 0$, può considerarsi come la trasformata razionale di una varietà Φ_k, di eguale irregolarità superficiale, tracciata sulla varietà di Picard V_p, relativa a W_k; a meno che non accada che W_k contenga un sistema ∞^{k-i} $(1 \leq i \leq k-1)$ d'indice 1, di varietà M_i, avente la stessa irregolarità bidimensionale p. Nel qual caso W_p è la trasformata razionale di una Φ_{k-i}, d'irregolarità superficiale p, tracciata su V_p e $k-i+1$ integrali semplici di 1ª specie di W_k son sempre funzionalmente dipendenti.

Da ciò, tenendo conto che gl'integrali doppi, tripli, ..., di 1ª specie di V_p, son del tipo:

$$\iint du_1\, du_2\,, \qquad \iiint du_1\, du_2\, du_3\,, \cdots,$$

ove $u_1, u_2, \cdots$, sono i p integrali semplici di 1ª specie, deduco la costruzione razionale di integrali doppi, tripli, . . ., di 1ª specie della W_p, a partire da' suoi integrali semplici.

Il teorema geometrico che pongo a fondamento della ricerca, è già di per sé interessante, in quanto da esso possono trarsi varie conseguenze, tra le quali cito, a titolo d'esempio, questa: una superficie irregolare non può possedere un'infinità (neanche discontinua) di curve razionali, senza essere trasformabile birazionalmente in una rigata (irrazionale). La proprietà analoga non sussiste per le superficie regolari.

1. *Caratterizzazione d'una superficie F d'irregolarità $p > 0$, che contenga un fascio di genere p, mediante i sistemi continui ∞^1 di curve tracciate su F.* Supponiamo anzitutto che sulla F esista un sistema algebrico ∞^1, Σ, di curve algebriche A non equivalenti, tale che fra le ∞^2 curve B costituite dalle A passanti pei singoli punti di F, ve ne sieno ∞^1 equivalenti ad una prefissata B, che provenga da un punto generico P di F. Allora i punti P relativi alle ∞^1 B equivalenti tra loro, riempiono una curva algebrica C, variabile in un fascio, necessariamente irrazionale, perché altrimenti (4) le B, e quindi le A, sarebbero a due a due equivalenti.

Prendiamo ora su F un sistema continuo completo $\{A\}$, di curve A, costituito da ∞^p sistemi lineari distinti, e supponiamo che, scelto *comunque* entro $\{A\}$ un sistema algebrico ∞^1, Σ, esso goda *sempre* della proprietà sopra indicata. Esisterà allora un fascio irrazionale $\{C\}$, tale che le curve di Σ passanti per un punto P di una C, segheranno ivi un gruppo, il quale, al variare di P su C, si muoverà entro una serie lineare. Donde segue (5) che le A di Σ tagliano su una C qualunque gruppi equivalenti, cioè (6) che esse differiscono per curve C.

Nulla ci vieta di supporre che il sistema Σ possa variare entro $\{A\}$ in una serie algebrica di sistemi analoghi, che invadano complessivamente tutto $\{A\}$, e che contengano una curva fissa A_0. Ciò invero equivale ad affermare che la varietà irriducibile V_p, i cui punti rappresentano gli ∞^p sistemi lineari $\{A\}$, può descriversi tutta mediante una famiglia algebrica di curve (algebriche) passanti per un punto di V_p. In realtà ad ognuna delle curve di quella famiglia, risponderebbe su F non un sistema ∞^1 di curve A, ma una serie ∞^1 di sistemi lineari completi $|A|$. Poiché i sistemi generici $|A|$ hanno la stessa dimensione r, fissati su F r punti generici,

(4) Cfr. F. SEVERI, a) *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* Questi Annali, (3), *12* (1905), nn. 1, 6 [Memoria XXV, vol. I, p. 296; N.d.R.] ed anche: b) *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, *65* (1906) [Memoria XXXI, vol. I, p. 390; N.d.R.].

(5) Loc. cit. (4) *a*) n. 1. Vedi pure la dimostrazione geometrica di G. CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5) *15* (1906).

(6) Loc. cit. (4) *a*), n. 6.

si staccherà da ogni $|A|$ una curva e così ci ridurremo a sistemi ∞^1, Σ, di curve A.

Quando Σ descrive il sistema continuo $\{A\}$, il fascio irrazionale $\{C\}$ non può variare, perché altrimenti descriverebbe un sistema continuo più ampio, mentre $\{C\}$ è già completo. Sopra ogni C le curve di un sistema Σ segano una serie di gruppi equivalenti al gruppo fisso $(A_0\, C)$; cioè tutte le curve di $\{A\}$ staccano sopra una C gruppi equivalenti, ed esse, pertanto, differiscono a due a due per curve C.

Ciò significa insomma che i sistemi $\{A\}$ si ottengono tutti da uno generico di essi, e sia $|A_0|$, aggiungendo e togliendo gruppi di un egual numero ν di curve C.

Osserviamo ora che se si sostituisce ad uno di questi due gruppi di ν curve C, un gruppo equivalente (entro l'ente $\infty^1\{C\}$), il sistema $|A|$, che si ottiene da $|A_0|$, non s'altera, per guisa che i sistemi distinti $|A|$ risultano tanti quante le serie lineari distinte d'ordine ν, entro l'ente $\infty^1\{C\}$. Sia π il genere del fascio. Se fosse $\nu < \pi$, le suddette serie d'ordine ν sarebbero ∞^ν, cioè sarebbe $p < \pi$, il che è assurdo. È dunque $\nu \geq \pi$ e le serie d'ordine ν, sono ∞^π. Ne segue $p = \pi$.

La proprietà s'inverte subito. Presa infatti sulla F d'irregolarità p, una curva A d'ordine maggiore delle eventuali curve canoniche di F (non depurate dalle curve eccezionali) e di dimensione virtuale non negativa, potrà sempre considerarsi il sistema lineare $|A+H-K|$ [7], ove H, K siano due qualunque gruppi di p curve C di un fascio di genere p, esistente su F. Tenendo fisso H e facendo variare K, si otterranno così tutti gli ∞^p sistemi lineari costituenti il sistema continuo completo $\{A\}$, il che significa che le A tagliano gruppi a due a due equivalenti sopra ogni C. Ne deriva che, preso entro $\{A\}$ un sistema ∞^1, Σ, di curve non equivalenti, se si chiamano omologhi un punto di una fissata C ed una curva di Σ, quando si appartengono, la corrispondenza tra i due enti $\infty^1\, C$, Σ, è a valenza zero in un senso e quindi [8] anche nel senso opposto; cioè i gruppi di curve A passanti pei singoli punti di C sono equivalenti entro l'ente Σ, e sono perciò equivalenti, anche come curve di F.

Possiamo pertanto enunciare:

I. *Sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, le due proprietà:*

1) *Ogni sistema ∞^1 di curve A, non equivalenti, tolte da un sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari, è tale che la curva composta dalle A per un punto generico di F, è equivalente ad ∞^1 curve analoghe;*

2) *La superficie contiene un fascio irrazionale di genere p; sono l'una conseguenza dell'altra.*

(7) F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rend. del R. Ist. Lombardo, (2) *38* (1905), p. 864 [Nota XXVII, vol. I, p. 329; N.d.R.].

(8) *Il teorema d'Abel*, ecc. (citato), n. 2.

2. *Trasformazione di una superficie irregolare F in un'altra appartenente alla varietà picardiana di F.* Sia ora una superficie d'irregolarità $p > 1$, non contenente un fascio di genere p (9). Allora considerando su F un sistema completo $\{A\}$ di ∞^p sistemi lineari (non composti con un'involuzione di F), un generico sistema Σ ∞^1, formato da curve A, non equivalenti, *non* godrà della proprietà 1) dell'enunciato precedente; e poichè neppur può darsi che sieno equivalenti a due a due le ∞^2 curve B formate colle $m\,(>1)$ A uscenti dai punti di F (10), accadrà che ogni B sarà equivalente ad un numero finito $n \geq 1$ di curve analoghe. Indicheremo con Σ' il sistema delle ∞^2 B.

Se la dimensione virtuale di un sistema lineare $|A|$ non è negativa, risulterà *a fortiori* non negativa la dimensione virtuale di un sistema lineare $|B|$, perché essa uguaglia quella di $|mA|$, onde (11) i $|B|$ apparterranno ad un sistema continuo completo contenente ∞^p sistemi lineari distinti.

Consideriamo la varietà V_p di Picard, i cui punti rappresentano i sistemi $|B|$. Alle curve B di Σ' o meglio ai sistemi $|B|$ da esse individuati, risponde in V una *superficie* Φ, la quale risulta riferita razionalmente ad F, ad ogni punto di F rispondendo una B di Σ' e quindi un punto di Φ, mentre ogni punto di Φ proviene dagli n punti di F relativi a curve B equivalenti tra loro. Si conclude che:

II. *Una superficie F d'irregolarità $p > 0$ o contiene un fascio di genere p, oppure può considerarsi come la trasformata razionale di una superficie, di eguale irregolarità, appartenente alla varietà picardiana di F* (12).

L'affermazione, inclusa in quest'enunciato, che la Φ abbia la stessa irregolarità di F, verrà subito giustificata nelle linee seguenti.

3. *Deduzione dell'identità di Noether.* Conserviamo ancora le ipotesi e le notazioni del numero precedente, e osserviamo, in primo luogo, che gli integrali semplici di 1ª specie, $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_p$, appartenenti a V, staccano su Φ altrettanti integrali di 1ª specie linearmente *indipendenti*, perché in caso contrario Φ apparterrebbe ad una varietà invariante per un sottogruppo (algebrico) del gruppo abeliano formato dalle ∞^p trasformazioni birazionali che mutano in sé V_p, e quindi il sistema Σ di curve A, dal quale siamo partiti, sarebbe particolare entro $\{A\}$ (13).

(9) L'ipotesi $p = 1$ rientra nell'analisi del numero precedente, perché in tal caso F possiede sempre un fascio ellittico di curve.

(10) *Il teorema d'Abel*, ecc., n. 9, *c*).

(11) F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann–Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino, *40* (1905), n. 6 [Nota XXVI, vol. I, p. 323; N.d.R.].

(12) Pel caso $p = 2$, cfr. G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) *14* (1905), p. 661.

(13) È questa un'affermazione pressochè intuitiva, la quale del resto trovasi completamente giustificata, sotto altra forma, in G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici*, ecc., n. 12, p. 657.

I p integrali che così s'ottengono su Φ, mediante la sostituzione razionale tra Φ, F, si mutano nei p integrali distinti di 1ª specie della F: $I_1, I_2, \cdots, I_p$ Alla lor volta i $\binom{p}{2}$ integrali doppi di 1ª specie appartenenti a V, che son del tipo [14]

$$\iint du_1\, du_2 , \tag{1}$$

staccano su Φ degli integrali doppi di 1ª specie, che però posson ridursi a costanti o essere linearmente dipendenti. Comunque sia gl'integrali doppi che così s'ottengono su Φ, si trasformano razionalmente in altrettanti integrali di F, ciascuno dei quali, appunto perché proviene, mediante una sostituzione razionale, da un integrale del tipo (1), avrà la forma:

$$\iint \frac{D(I_1, I_2)}{D(x, y)}\, dx\, dy ,$$

ove si supponga che

$$F(x, y, z) = 0$$

sia l'equazione della F (in S_3) e $\dfrac{D(I_1, I_2)}{D(x, y)}$ denoti il determinante funzionale di I_1, I_2 rispetto alle variabili indipendenti x, y.

Scrivendo gl'integrali I_1, I_2 sotto la forma

$$I_1 = \int \frac{A_1 dx + B_1 dy}{F_z'} , \qquad I_2 = \int \frac{A_2 dx + B_2 dy}{F_z'} ,$$

ove $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ son superficie d'ordine $n - 2$, aggiunte alla F, d'ordine n, e soddisfacenti alle debite condizioni [15], perveniamo dunque alla relazione

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = F_z' Q ,$$

ove $Q = 0$ è una superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta ad F.

Resta così dimostrata, in modo sintetico, la ben nota relazione di Noether.

È appena necessario d'avvertire che questa relazione vale anche nel caso escluso dal ragionamento precedente, cioè quando F contiene un fascio di genere p, poichè in tal caso gl'integrali semplici di F son funzioni l'uno dell'altro e si ha identicamente:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 ,$$

che è un caso particolare della precedente relazione (Q è identicamente nullo).

(14) Cfr., per esempio F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie dei punti di una curva algebrica*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *38* (1903), n. 9 [Memoria XII, vol. I, p. 128; N.d.R.].

(15) F. SEVERI, *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique*, Comptes rendus, *152* (1911), p. 1079 [Nota LII, vol. II, p. 307; N.d.R.].

4. *Alcune conseguenze del teorema II.* Prima di passare ad estendere la relazione stessa alle varietà superiori, rileviamo in modo esplicito qualche interessante conseguenza del teorema II.

Poichè una varietà di Picard non contiene curve razionali, neppur la Φ, di cui si parla al n. 2, potrà possedere curve razionali e quindi F potrà contenere al più un numero finito di curve razionali provenienti dagli eventuali punti fondamentali della trasformazione tra Φ, F.

Che se poi F possiede un fascio di genere p, è evidente che ogni curva razionale di F è fondamentale pel fascio.

Consideramo ora una F, d'irregolarità $p > 0$, possedente un'infinità (anche discontinua) di curve razionali. Non potendo allora esistere la superficie Φ, di cui sopra, F dovrà contenere un fascio di genere p. La generica curva C di questo fascio potrà supporsi irriducibile, perché altrimenti le C sarebbero composte colle curve di un fascio di genere π, e da un lato, per la formola di Zeuthen, non potrebbe essere $p > \pi$, e d'altro lato, pel fatto che p è l'irregolarità di F, non potrebbe essere $\pi > p$. Cosicchè risulterebbe $\pi = p = 1$ e, ad ogni modo, la superficie F, d'irregolarità 1, conterrebbe un fascio irriducibile di genere uguale all'irregolarità.

Ciò premesso, suppongasi, se è possibile, che il genere delle C sia $\varrho > 0$. Allora nel fascio vi saranno infinite curve riducibili, contenenti come parti le curve razionali di F. Ma ciò è assurdo, perché un fascio irriducibile possiede soltanto un numero finito (≥ 0) di curve riducibili.

Si conclude pertanto che, nel caso in esame, F contiene un fascio di genere p di curve razionali, e quindi [16] ch'essa è birazionalmente identica ad una rigata. Riassumendo:

Una superficie d'irregolarità $p > 0$ che contenga una curva razionale (non eccezionale) o possiede un'involuzione d'irregolarità p o un fascio di genere p.

Una superficie d'irregolarità $p > 0$, che contenga una infinità (anche discontinua) di curve razionali, è trasformabile birazionalmente in una rigata [17].

Per una superficie regolare il fatto analogo non si verifica, se non quando le infinite curve razionali sieno eccezionali. Per esempio una superficie del 4° ordine possedente una conica, possiede in conseguenza infinite curve razionali, e non è trasformabile in una rigata.

(16) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, Math. Annalen, *52* (1899), p. 449.

(17) Nel caso in cui le curve razionali formino un sistema continuo, la cosa era nota. Vedi G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Questi Annali, (3) *6* (1901), n. 17. Dal teorema del testo segue in particolare il teorema di Castelnuovo–Enriques, che *una superficie con infinite curve eccezionali, appartiene alla classe delle rigate* (razionali o no). Basta infatti presupporre il teorema di Castelnuovo, circa le condizioni di razionalità d'una superficie ($p_a = P_2 = 0$) per dedurre subito il teorema riferito, anche per le superficie regolari (il teorema del testo risolvendo la questione soltanto per le superficie irregolari). E invero una superficie regolare con infinite curve eccezionali ha necessariamente tutti i generi nulli.

Osserviamo inoltre che se F, cioè la varietà di Picard V_p e quindi anche la superficie Φ, non posseggono integrali riducibili, sulla Φ non possono esistere curve in cui i p integrali semplici di 1ª specie sieno linearmente dipendenti [18]: donde segue che F non potrà contenere curve di genere $\pi < p$, all'infuori delle eventuali curve isolate fondamentali per l'involuzione J_n, i cui punti rispondono a quelli di Φ. E ciò perché ad una curva di genere $\pi < p$ di F, che non fosse fondamentale per J_n, risponderebbe su Φ una curva di genere $\varrho \leq \pi$, e sulla curva stessa i p integrali semplici di Φ non potrebbero esser indipendenti.

Nel caso poi in cui F possegga un fascio di genere p, è ben chiaro che ogni curva di genere $\pi < p$, tracciata su F, è fondamentale pel fascio e quindi isolata. Si conclude che:

Sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, che non possegga sistemi d'integrali semplici di 1ª specie riducibili, il genere di una curva tracciata su F e variabile in un sistema continuo, non può scendere al disotto di p. E qualora esistano curve (isolate e non eccezionali) di genere $\pi < p$, la superficie contiene in conseguenza o un'involuzione d'irregolarità p o un fascio di genere p.

5. *Caratterizzazione d'una varietà irregolare che contenga un sistema d'indice 1, della stessa irregolarità, di varietà subordinate.* Il ragionamento del n. 1 si estende facilmente. Se sopra una varietà irriducibile W_k, a k dimensioni, d'irregolarità superficiale $p > 0$, esiste un sistema algebrico ∞^1, Σ, di varietà a $k-1$ dimensioni, A, tale che fra le ∞^k varietà B formate dalle A passanti pei singoli punti di W, ve ne sieno ∞^i ($1 \leq i \leq k-1$) equivalenti ad una di esse, che provenga da un punto P di W, i punti P relativi alle B equivalenti, riempiono una varietà C ad i dimensioni, variabile in un sistema ∞^{k-i} d'indice 1.

Supponiamo che la proprietà stessa sia verificata allorquando Σ sia scelto comunque entro un sistema algebrico $\{A\}$, formato da ∞^p sistemi lineari distinti. Allora, ripetendo un ragionamento che ho già esposto altrove [19], si vede che le varietà A segano varietà equivalenti sopra le ∞^{k-i} varietà C di dimensione i, di un sistema Γ d'indice 1, talchè esse differiscono per varietà composte mediante le C [20]. E si conclude, come nella mia Nota lincea citata, che il sistema Γ, considerato come varietà di elementi C, ha la stessa irregolarità p di W_k (si dovrà dire che p è il genere di Γ, quando $i = k-1$).

La proprietà s'inverte come al n. 1, con pochi cambiamenti. Basta prendere sulla W_k, d'irregolarità p, un sistema continuo $\{A\}$ costituito da ∞^p sistemi lineari e contenente parzialmente tutto un sistema $\{H\}$ composto

(18) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici*, ecc. (citato), p. 594.

(19) *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5) *20* (1911), n. 6 [Nota LI, vol. II, p. 303; N.d.R.].

(20) F. SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie*, Atti del R. Ist. Veneto, *70* (1911), n. 6.

mediante le C e costituito pure da ∞^p sistemi lineari. A tal uopo si potrà scegliere per esempio come sistema $\{A\}$ quello determinato dalle sezioni di W_k colle forme d'un ordine abbastanza alto, rispetto all'ordine delle H prefissate. Dette allora H_0, H_1 due particolari H, esisterà il sistema lineare $|A + H_0 - H_1|$ e, al variare di $|H_1|$ in $\{H\}$, questo sistema lineare descriverà tutto il sistema $\{A\}$, le cui varietà verranno pertanto a segare sulle C varietà equivalenti.

Si conclude che:

III. *Per una varietà W_k d'irregolarità bidimensionale $p > 0$, le due proprietà:*

1) *Ogni sistema ∞^1 di varietà A, a $k - 1$ dimensioni, non equivalenti, tolto da un sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari, tracciati su W, è tale che la varietà costituita dalla A per un punto generico, è equivalente ad ∞^i $(1 \leq i \leq k - 1)$ varietà analoghe.*

2) *La W contiene un sistema ∞^{k-i} d'indice 1 di varietà ad i dimensioni, avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale p;*

sono conseguenza l'una dell'altra.

6. *Trasformazione razionale d'una varietà irregolare W_k in un'altra appartenente alla varietà picardiana di W_k.* Escludiamo che la W, di irregolarità $p \geq k$, contenga un sistema come quello indicato in III 2) [21]. Si potrà allora estendere parola per parola il ragionamento del n. 2, con questa sola avvertenza: che per concludere, com'è necessario, che il sistema completo $\{B\}$ contiene ∞^p sistemi lineari distinti, basterà prendere come sistema $\{A\}$ quello che contiene totalmente le sezioni di W colle forme di un ordine così alto, che i sistemi continui determinati da esse e dalle sezioni colle forme degli ordini successivi, sieno tutti costituiti da ∞^p sistemi lineari.

Si potrà pertanto enunciare:

IV. *Una varietà W_k d'irregolarità bidimensionale $p > 0$ o contiene un sistema ∞^{k-i}, d'indice 1, di varietà ad i dimensioni, avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale p $(1 \leq i \leq k - 1)$, oppure può considerarsi come trasformata razionale di una varietà Φ, della stessa irregolarità superficiale, e appartenente alla varietà picardiana di W. Si verifica sempre la prima parte dell'alternativa, quando $p < k$.*

7. *Relazioni tra integrali semplici e multipli di 1ª specie di una varietà.* Quando W è birazionalmente identica ad una varietà Φ, a k dimensioni, tracciata sulla varietà di Picard V_p, relativa a W, ogni integrale t–plo $(t \leq k)$ di 1ª specie di V_p, che è del tipo

$$\int du_1 \, du_2 \cdots du_t \,, \tag{2}$$

(21) Se $p < k$, si ha necessariamente una W_k soddisfacente alle proprietà 1) 2) del teor. III. Cfr. *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari*, ecc. (citato), n. 6.

ove $u_1, u_2, \cdots, u_p$ sono i p integrali semplici di 1ª specie appartenente a V, stacca su Φ un integrale di 1ª specie (in particolare costante). Per cui se

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = 0$$

è l'equazione di W_k (nello S_{k+1}) e si prendono come variabili indipendenti $x_1, x_2, \cdots, x_k$, mediante la sostituzione razionale tra Φ e W, da (2) ricaveremo un integrale t–plo di 1ª specie di W:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t} \frac{D(I_1, I_2, \cdots, I_t)}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \cdots, x_{\lambda_t})} dx_{\lambda_1} dx_{\lambda_2} \cdots dx_{\lambda_t},$$

ove $I_1, I_2, \cdots, I_p$ sono i p integrali semplici di 1ª specie di W – che corrispondono agli integrali $u_1, u_2, \cdots, u_p$ di V_p — $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t$ rappresenta una disposizione semplice degli indici $1, 2, \cdots, k$ e $\dfrac{D(I_1, I_2, \cdots, I_t)}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \cdots, x_{\lambda_t})}$ è il determinante funzionale delle $I_1, \cdots, I_t$ rispetto alle variabili indipendenti $x_{\lambda_1}, \cdots, x_{\lambda_t}$.

Ponendo:

$$I_h = \int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, dx_j \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

verrà:

$$(3) \qquad J = \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} & A_{1\lambda_2} & \cdots & A_{1\lambda_t} \\ A_{2\lambda_1} & A_{2\lambda_2} & \cdots & A_{2\lambda_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t\lambda_1} & A_{t\lambda_2} & \cdots & A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} dx_{\lambda_1} dx_{\lambda_2} \cdots dx_{\lambda_t}.$$

Agl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti a W, restano pertanto associati degli integrali doppi, tripli, $\cdots$, k–pli di 1ª specie, che si costruiscono razionalmente, in modo ben determinato, a partire dagl'integrali semplici. Un integrale del tipo (3) riducesi ad una costante allora e solo allora che i t integrali $I_1, I_2, \cdots, I_t$, considerati come funzioni delle $x_1, x_2, \cdots, x_k$, son fra loro funzionalmente dipendenti.

8. Lo stesso modo di costruzione indicato per gl'integrali multipli di 1ª specie vale anche nel caso, che ora vogliamo esaminare, in cui W contenga un sistema $\Gamma\infty^l$ ($l = k - i$, $1 \leq i \leq k - 1$), d'indice 1, d'irregolarità bidimensionale p, costituito da varietà C ad i dimensioni.

Anzitutto in quest'ipotesi si vede agevolmente, come ho mostrato al n. 8 della mia Nota lincea citata, che $l + 1$ integrali semplici di 1ª specie di W son sempre funzionalmente dipendenti, eccettuato il caso ovvio in cui, essendo $p < k$, W contiene un sistema $\Gamma\infty^p$ ($l = p$), d'irregolarità bidimensionale p, formato da varietà a $k - p$ dimensioni. Nel caso generale si può dire senz'altro che l'integrale (3), per $t \geq l + 1$, è di 1ª specie (è anzi una costante);

nel caso eccezionale d'altra parte è sempre $t \leq l$. Cosicchè, per dimostrare in ogni caso che un integrale del tipo (3) è sempre di 1ª specie, basterà che ci limitiamo all'ipotesi $t \leq l$.

Diciamo V_l una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le varietà C di Γ e supponiamo d'avere stabilito la relazione in questione per tutte le varietà irregolari di dimensione $< k$, e quindi in particolare per V_l.

Sieno

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = 0, \qquad \varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{l+1}) = 0$$

le equazioni di W_k, V_l, che supponiamo rispettivamente immerse in S_{k+1} e in S_{l+1}. Gl'integrali semplici di 1ª specie di W_k proverranno *tutti* dagl'integrali semplici

$$\int \sum_{j=1}^{l} B_{sj}\, d\xi_j \qquad (s = 1, 2, \cdots, p) \tag{4}$$

di 1ª specie di V_l, mediante la sostituzione razionale:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, \cdots, x_{k+1}), \cdots, \xi_{l+1} = \xi_{l+1}(x_1, \cdots, x_{k+1}), \tag{5}$$

che lega W a V. E similmente dagl'integrali doppi di 1ª specie di V si otterranno integrali doppi di 1ª specie (ma non necessariamente tutti quelli di W_k); e così per gli altri integrali multipli.

Consideriamo l'integrale t-plo $(t \leq l)$ di 1ª specie di V_l:

$$\int \sum_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_t} \begin{vmatrix} B_{1\mu_1} B_{1\mu_2} \cdots B_{1\mu_t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{t\mu_1} \cdots\cdots B_{t\mu_t} \end{vmatrix} d\xi_{\mu_1} d\xi_{\mu_2} \cdots d\xi_{\mu_t}. \tag{6}$$

Operando colla sostituzione (5), questo si trasformerà nell'integrale di W_k:

$$J = \int \sum_{\mu_1 \cdots \mu_l} \begin{vmatrix} B_{1\mu_1} \cdots B_{1\mu_t} \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{t\mu_1} \cdots B_{l\mu_t} \end{vmatrix} \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_t} \frac{D(\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2}, \cdots, \xi_{\mu_t})}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \cdots, x_{\lambda_t})}\, dx_{\lambda_1} dx_{\lambda_2} \cdots dx_{\lambda_t} =$$

$$= \int \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_t} \left\| \begin{matrix} B_{11} B_{12} \cdots B_{1l} \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{t1} B_{t2} \cdots B_{tl} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{d\xi_1}{dx_{\lambda_1}} \cdots \frac{d\xi_l}{dx_{\lambda_1}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\xi_1}{dx_{\lambda_t}} \cdots \frac{d\xi_l}{dx_{\lambda_t}} \end{matrix} \right\| dx_{\lambda_1} dx_{\lambda_2} dx_{\lambda_t}.$$

Facendo il prodotto per orizzontali delle due matrici, verrà:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} A_{1\lambda_2} \cdots A_{1\lambda_t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{t\lambda_1} A_{t\lambda_2} \cdots A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} dx_{\lambda_1} dx_{\lambda_2} dx_{\lambda_t},$$

ove si è posto:

$$A_{hr} = \sum_{s=1}^{l} B_{hs} \frac{d\xi_s}{dx_r} .$$

E poichè gl'integrali semplici

$$\int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, dx_j \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

sono, come si è detto, tutti gl'integrali semplici di 1ª specie di W_k, possiamo infine enunciare il teorema generale:

V. *Sieno*

$$\int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, dx_j \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

gl'integrali semplici di 1ª specie, appartenenti ad una varietà W a k dimensioni, d'irregolarità superficiale $p > 0$. *Allora a W appartengono in conseguenza alcuni integrali doppi, tripli* $, \cdots,$ *k–pli di 1ª specie, che si formano razionalmente a partire dagl'integrali suddetti. Quest'integrali multipli son del tipo:*

$$\int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} & \cdots & A_{1\lambda_t} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ A_{t\lambda_1} & \cdots & A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} dx_{\lambda_1} dx_{\lambda_2} \cdots dx_{\lambda_t} \qquad (t = 2, \cdots, k),$$

ove $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_t$ *è una disposizione semplice degli indici* $1, 2, \cdots, k$.

9. *Verificazione diretta delle condizioni d'integrabilità.* Il fatto che gl'integrali multipli costruiti secondo il teorema V, soddisfacciano alle condizioni d'integrabilità assegnate da Poincaré (22), è senz'altro implicitamente racchiuso nel teorema dimostrato. Ma val la pena di osservare che questo fatto è indipendente dall'algebricità della questione. Si può cioè stabilire in generale che:

Se le p forme differenziali lineari, linearmente indipendenti

$$du_1 = \sum_{r=1}^{k} A_{1r}\, dx_r , \cdots, \; du_p = \sum_{r=1}^{k} A_{pr}\, dx_r ,$$

ove le A son funzioni analitiche qualunque delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \cdots, x_k$, *soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, lo stesso accade per le forme del tipo*

$$\sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)} dx_r\, dx_s , \qquad \sum_{r,s,t} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_r, x_s, x_t)} dx_r\, dx_s\, dx_t , \quad \text{ecc.}$$

(22) Acta mathematica, 9.

Per brevità espongo la dimostrazione nel caso della forma quadratica

$$\sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, dx_r\, dx_s , \tag{7}$$

giacchè anche in generale il ragionamento corre allo stesso modo.

Osserviamo anzitutto che le condizioni d'integrabilità sono invarianti di fronte ad un cangiamento di variabili. Per convincersene basta per esempio riflettere ch'esse equivalgono ad affermare che il valore dell'integrale

$$\iint \sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, dx_r\, dx_s \tag{8}$$

si conserva immutato per una variazione continua della superficie d'integrazione (per modo da non traversare punti singolari delle A), fermo restando il contorno della superficie stessa.

Possiamo supporre che le u_1, u_2 sieno funzionalmente indipendenti, giacchè altrimenti si cadrebbe nel caso ovvio in cui l'integrale (8) riducesi ad una costante. Sarà dunque per esempio non identicamente nullo:

$$\frac{D(u_1, u_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(u_1, u_2, x_3, \cdots, x_k)}{D(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)} ,$$

e quindi si potrà passare dalle variabili $x_1, x_2, \cdots, x_k$ alle $u_1, u_2, x_3, \cdots, x_k$. Con ciò la forma quadratica (7) si muta nella $du_1\, du_2$, per cui sono evidentemente soddisfatte le condizioni d'integrabilità [23].

In forza dell'invarianza di queste condizioni di fronte ai cangiamenti di variabili, risultano soddisfatte le condizioni stesse anche per la forma (7).

Osservazione. – Ciò vale nell'intorno di un punto generico del campo di esistenza delle A. Quando le A – come nel caso del teorema V – son funzioni razionali del punto corrente sopra una varietà algebrica irriducibile W, a k dimensioni, ne segue agevolmente che le condizioni d'integrabilità son soddisfatte in ogni punto di W. Infatti esse si esprimono uguagliando a zero certe funzioni razionali, delle quali, per quanto precede, si sa già che posseggono ∞^k zeri (complessi) intorno ad un punto generico di W. Le dette funzioni razionali risultano perciò identicamente nulle su tutta la varietà.

(23) Non occorre neppure di scrivere in modo esplicito queste condizioni. Basta osservare soltanto ch'esse s'ottengono uguagliando a zero certe espressioni composte linearmente mediante le derivate dei coefficienti della forma.

LVIII.

RISPOSTA AD UN'OSSERVAZIONE DEL SIG. DE FRANCHIS

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 36_2 (1913), pp. 226–232 (*).

1. Il sig. De Franchis ha asserito (1) che un mio recente lavoro sulle superficie e varietà algebriche (2) è inteso a stabilire una proprietà che « non abbisogna di dimostrazione ». La proprietà di cui trattasi è la seguente (3):

Se una superficie $F[F(x, y, z) = 0]$ *è dotata di* p *integrali semplici di* 1ª *specie* $u_1, u_2, \cdots, u_p$, *qualsiasi integrale doppio del tipo* $\int du_1 du_2$ *è, sulla superficie, un integrale di* 1ª *specie* (*in particolare una costante*).

Il sig. De Franchis crede che, a provar ciò, bastino le seguenti argomentazioni: « L'integrale $\int du_1 du_2$ è finito su tutta la F, perché ivi sono finiti $u_1, u_2, \cdots, u_p$, ed ha l'elemento differenziale algebrico, perché tali sono $du_1, du_2, \cdots, du_p$; quindi esso, se non è una costante (cioè se l'elemento differenziale non è zero), è di 1ª specie ».

Ora è bensì ovvio che, se si distendono le variabili complesse $u_1, u_2, \cdots, u_p$ in uno spazio lineare S, a $2p$ dimensioni, l'integrale $\int du_1 du_2$ è finito sopra ogni area finita d'integrazione dello spazio S; ma *ciò non equivale affatto ad affermare ch'esso sia finito su tutta la* F.

Per stabilire ciò occorre *dimostrare* che $\int du_1 du_2$ può considerarsi come integrale d'area anche sopra F (cioè sulla corrispondente riemanniana R a quattro dimensioni) o, in altri termini, che, presa entro R un'area A, si può definire nello spazio S un'area (necessariamente finita) A', i cui punti siano univocamente determinati da quelli di A. Ciò esige un'analisi accurata, che mi propongo di esporre brevemente alla fine di questa Nota.

Giacchè insomma la relazione

$$\int du_1 du_2 = \int \Delta dx\, dy \,, \tag{1}$$

(*) Adunanza del 22 giugno 1913.

(1) M. De Franchis, *Intorno ad un recente lavoro sugl'integrali multipli di* 1ª *specie*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 36_2 (1913), p. 140.

(2) F. Severi, *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di* 1ª *specie di una varietà algebrica*, Annali di Matematica pura ed applicata, (3) *20* (1913), pp. 201–215 [Memoria LVII, vol. II, p. 360; N.d.R.].

(3) Restringo la questione alle *superficie*, per quanto il mio lavoro si riferisca alle *varietà*, giacchè il punto di dissenso si localizza bene anche in questo caso speciale.

ove Δ è il determinante funzionale di u_1, u_2 rispetto ad x, y, *non ha di per sè senso*, finchè non si sia fissato il modo di associare le aree a cui si vogliono estendere quegl'integrali. Concedo che, da un punto di vista *larghissimamente* sintetico, possa considerarsi *a priori* come legittimo il cangiamento di variabili espresso dalla (1), quando ci si trovi in una regione della riemanniana R, in cui Δ non sia né nullo né infinito o, come diremo brevemente, in una regione che non contenga *punti singolari*. S'intuisce infatti che tutto si possa opportunamente precisare, nonostante la polidromia delle funzioni u_1, u_2, dal momento che in tal caso ad un intorno di un punto non singolare di R si può far corrispondere, in modo continuo e biunivoco, una piccola regione quadridimensionale, dello spazio S; ma da ciò, se mai, deriverebbe soltanto il fatto che $\int \Delta dx\,dy$ è finito sopra ogni area di R priva di punti singolari, e nulla si saprebbe così circa il valore dell'integrale sopra un'area che contenesse punti siffatti (escluso il caso ovvio in cui Δ fosse dovunque nullo su R).

Ora su tutto ciò il sig. De Franchis salta a piè pari, contentandosi delle argomentazioni che ho sopra riportate tra virgolette.

E si noti che io vengo in tal modo a pormi dal suo punto di vista. Perché in realtà io non incontro le difficoltà qui segnalate, giacché nel mio lavoro [loc. cit. (2)] provo prima che, se tutti gl'integrali $u_1, u_2, \cdots, u_p$ non sono funzionalmente dipendenti da uno di essi, F si può considerare come trasformata razionale di una superficie algebrica Φ, appartenente alla varietà di Picard V_p annessa ad F (4); e dopo ciò ragiono così:

L'integrale $\int du_1\,du_2$ è di 1ª specie su V_p (*questo si che è evidente*, perché la riemanniana di V_p è biunivocamente rappresentata sul parallelepipedo M dei periodi): esso subordina su Φ un integrale di 1ª specie, il quale, mediante la sostituzione razionale da Φ ad F, si muta in un integrale doppio di 1ª specie della superficie F:

$$\int \Delta\,dx\,dy\,.$$

Talchè la (1) ha, in questo caso, un senso ben determinato. E ciò mi conduce alla *relazione di Noether*, come dirò più specificatamente tra breve.

Il sig. De Franchis, leggendo la mia dimostrazione, ha creduto ch'essa si potesse atteggiare in modo da rendere addirittura evidente la relazione di Noether; mentre invece, se avesse meglio riflettuto, si sarebbe contentato di far vedere che l'idea direttiva del mio procedimento si poteva sfruttare in modo da giungere ancor più rapidamente alla relazione medesima.

Si sarebbe trattato in ogni caso di una semplificazione del mio ragionamento, ma sempre di una vera e propria dimostrazione, Giacchè, in ultima analisi, per provare che $\int du_1\,du_2$ può considerarsi come integrale d'area anche su F, io pongo in corrispondenza razionale i punti di F (cioè della

(4) *Loc. cit* (2), prefazione.

sua riemanniana R) coi punti di una varietà (che può considerarsi come riemanniana di Φ) appartenente al parallelepipedo M dei periodi; mentre, come ho già accennato, si può più semplicemente limitarsi a studiare la corrispondenza fra i punti di un'area di R e i punti della corrispondente area di S.

Se questo avesse fatto il sig. De Franchis, io sarei stato lietissimo che un'idea da me esposta, gliene avesse suggerita un'altra più luminosa; ma siccome egli ha considerato come evidente ciò che non è, così mi trovo costretto a dar io la dimostrazione anche dal nuovo punto di vista.

2. Mi sia però prima consentito di rilevare che la difesa del mio lavoro [loc. cit. (2)] si può anche sostenere con argomenti, dirò così, storici.

La *relazione di Noether*, cui sopra ho alluso (n. 1), consiste in ciò: Posti i due integrali u_1 , u_2 sotto la forma

$$u_1 = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{F'_z} , \qquad u_2 = \int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{F'_z} , \tag{2}$$

in cui P , Q , P' , Q' sono polinomi convenienti in x , y , z (di ordine $n - 2$, se n è l'ordine di F), si ha

$$PQ' - P'Q = F'_z \varphi , \tag{3}$$

ove φ è un polinomio (d'ordine $n - 4$) tale che

$$\int \frac{\varphi}{F'_z}\, dx\, dy \tag{4}$$

è un integrale doppio di 1ª specie sulla F.

Come ognun vede, questa relazione segue immediatamente, una volta ammesso che $\int du_1\, du_2$ possa considerarsi come un integrale d'area sopra F, giacchè allora è legittima la (1), che *equivale* alla (3). Orbene, *nessuno ha mai considerato come evidente la relazione di Noether*; chè anzi, quando io pubblicai il mio lavoro [loc. cit. (2)], la sola dimostrazione conosciuta della (3) era quella originaria di Noether (5), riprodotta con qualche variante, che non ne altera la sostanza, nel trattato di Picard e Simart (6).

Il concetto della dimostrazione di Noether è questo: una volta stabilito a quali condizioni (razionali nei coefficienti) debbono soddisfare i polinomi P , Q , P' , Q' affinchè le espressioni (2) rappresentino sopra F due integrali semplici di 1ª specie, se ne deduce, mediante considerazioni algebriche, che $PQ' - P'Q$ è divisibile per F'_z, e si prova che il polinomio quoziente φ soddisfa alle condizioni algebriche che si richiedono affinchè l'integrale (4) sia di 1ª specie.

(5) M. NOETHER, *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, Mathematische Annalen, *29* (1887), pp. 339–381.

(6) E. PICARD et G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier–Villars), t. I (1897), p. 136 e seguenti.

Come vedesi, questo procedimento non ha alcun punto di contatto col mio, né con quello che il sig. De Franchis avrebbe potuto desumere dal mio.

Ho affermato che nessuno ha finora considerato come evidente la (3); neanche il sig. De Franchis, il quale ha avuto più volte occasione di usare la relazione di Noether e non ha mai notato che la relazione stessa poteva ritenersi evidente in forza delle argomentazioni che egli ha ora addotte. Chè anzi, in proposito, egli ha sempre citato il libro dei sigg. Picard e Simart [7].

Ho dunque ragione di asserire che, se la cosa fosse evidente, l'evidenza sarebbe saltata agli occhi del sig. De Franchis ora, dopo la lettura del mio lavoro, al quale, anche in questa dannata ipotesi, qualche merito dovrebbe pur restare.

Taluno potrebbe però dubitare che, se la proprietà non era evidente prima, possa esserlo diventata in questi ultimi tempi, per le attuali più ampie conoscenze nel campo delle funzioni algebriche di due variabili. Ma questo dubbio non sarebbe fondato, in quanto le argomentazioni addotte dal sig. De Franchis avrebbero avuto valore in ogni momento di sviluppo della teoria, perché esse poggian soltanto sulle definizioni di integrali semplici e doppi di 1ª specie, le quali sono state date rispettivamente negli anni 1884 e 1868. E quindi fin dagli inizi l'evidenza sarebbe dovuta balzar fuori.

3. Debbo ancora rispondere ad un'altra osservazione relativa al teorema che afferma la possibilità di trasformare razionalmente la data superficie F in una superficie algebrica Φ appartenente alla varietà di Picard V_p annessa ad F.

Il sig. De Franchis afferma che questo teorema si dimostra assai semplicemente per via trascendente; ed io non lo contesto. Ma basta leggere la prefazione al mio lavoro [loc. cit. [2]], per vedere come io mi sia proposto di stabilire il teorema stesso per via esclusivamente geometrica, riattaccandolo alle più elementari proprietà dei sistemi continui di curve sopra una superficie. E mi sia lecito di confessare che, come autore, è questa la parte della Memoria che mi piace di più.

La dimostrazione cui allude il sig. De Franchis è semplice, ma non altrettanto elementare, perché presuppone il teorema di esistenza di un corpo di funzioni abeliane aventi i medesimi periodi degli integrali semplici di 1ª specie della F, e, com'è noto, la dimostrazione di questo teorema è tutt'altro che agevole. Inoltre il procedimento accennato dà molto meno del mio. Chè se mi fossi voluto limitare a stabilire soltanto la proprietà, cui il sig. De Franchis allude, avrei io pure potuto, ben più elementarmente, racchiudere il mio ragionamento geometrico in brevi parole.

(7) Vedi, ad esempio: M. DE FRANCHIS, *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *20* (1905), pp. 49–54, nota (**) a piè della pag. 53; M. DE FRANCHIS, *Sugl'integrati di Picard relativi ad una superficie doppia,* Ibid., *20* (1905), pp. 331–334, nota (*) a piè della pag. 333.

Preso su F un sistema algebrico ∞^1 (non composto) d'indice ν, di curve C, si considerino le ∞^2 curve D formate dalle ν C pei singoli punti di F. La totalità degli ∞^2 (eventualmente ∞^1) punti imagini dei sistemi $|D|$, sulla varietà di Picard V_p, rappresentatrice dei sistemi lineari tolti dal sistema completo $\{D\}$, costituisce una superficie Φ (o in particolare una curva) trasformata razionale di F.

Comunque sia, anche il teorema da me dimostrato geometricamente e che il sig. De Franchis vuol presentare ora come un'ovvia osservazione, non era stato segnalato prima se non in un caso particolare [8]. E se nessuno vi si era fermato, non era certamente perché non ne valesse la pena. Da quel teorema infatti deduconsi molte interessanti conseguenze, anche a prescindere dalla relazione di Noether. Cito a titolo d'esempio queste: la esistenza di un fascio irrazionale sopra una superficie irregolare di genere geometrico nullo [9]; la riferibilità ad una rigata di una superficie irregolare con un'infinità, anche discontinua, di curve razionali [10]; la riduzione a tipi dei piani ciclici irregolari [11].

Intanto il sig. De Franchis provi, e vedrà che il modestissimo e discusso teorema fornisce rapidamente la determinazione dei piani doppi irregolari, che costituisce uno dei suoi bei risultati. Con ciò non intendo affatto di menomare il merito della ricerca del sig. De Franchis, giacchè egli allora non avrebbe potuto seguire la via più semplice che ho adesso indicata.

4. E passo infine a dimostrare direttamente che $\int du_1\, du_2$ si può considerare come un integrale d'area sopra F. Prendiamo entro la riemanniana R un'area A. Senza leder la generalità, poiché abbiamo di mira una questione d'integrali d'area, la A potrà sempre supporsi semplicemente connessa. Aggiungasi ch'essa sarà finita, anche quando sia l'imagine di un continuo a due dimensioni di F, contenente punti all'infinito della superficie; e ciò perché la R è una varietà chiusa. Insomma A è del tipo sfera o del tipo cerchio, secondo che è un'area chiusa o aperta.

Sulla A assumiamo un fascio di linee λ, passanti per un medesimo punto X_0 e generanti semplicemente l'area, per guisa che il fascio delle λ sia tutto quanto percorribile, a partire da una posizione iniziale λ_0 e ritornandovi. Fissato nello spazio S il punto X_0' che rappresenta un prescelto gruppo di valori assunti in X_0 da $u_1, u_2, \cdots, u_p$ (fra gl'infiniti possibili punti X_0' si può ad esempio sceglier quello interno al parallelepipedo M), a partire da X_0, facciamo

(8) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, *14*$_1$ (1905), pp. 545-556, 593-598, 655-663, n. 15.

(9) F. SEVERI, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, *20*$_1$ (1911), pp. 537-546 [Nota LI, vol. II, p. 298; N.d.R.].

(10) F. SEVERI, *loc. cit.* [2].

(11) Di quest'ultimo argomento mi propongo di occuparmi prossimamente.

muovere un punto X sopra ciascuna λ, le λ intendendosi ordinate nel modo suddetto.

Si verrà così a definire *per continuità* un certo insieme A' di punti X', corrispondenti ai punti X suddetti [12] ed è ben chiaro che A' sarà un'area (necessariamente finita) finchè su A non cadano punti singolari del determinante Δ, perché in tale ipotesi vi sarà corrispondenza biunivoca (continua) fra l'intorno di un punto X di A e l'intorno del punto X' corrispondente nell'insieme A' [13].

Nel caso escluso, in cui A contenga punti singolari, può darsi: o che ve ne sia un gruppo discreto o una semplice infinità continua o infine che tutta l'area o un suo pezzo sia costituito da punti singolari.

Presa allora un'area α sufficientemente prossima ad A, ma priva di punti singolari, e considerata l'area α' determinata in S, nel modo indicato, come omologa di α, a causa della continuità della corrispondenza, mentre α tende ad A, con una legge prefissata, α' tenderà ad un insieme limite ben definito A', che sarà o un'area o una linea o un punto.

Sicchè sarà legittimo scrivere in ogni caso

$$\int_{A'} du_1\, du_2 = \int_{A} \Delta\, dx\, dy\,, \tag{5}$$

intendendosi che l'integrale del 1° membro, e quindi anche quello del 2°, si annullino quando A' degenera in una linea o in un punto. E ciò a noi basta.

Esaminando più dettagliatamente la cosa, si vede che l'area A' può degenerare soltanto nel caso in cui la A contenga ∞^2 punti singolari.

Le considerazioni esposte rendono legittima in ogni caso la (1) e *si conclude pertanto che* $\int \Delta\, dx\, dy$ *è un integrale di* 1ª *specie sopra* F.

In verità potrebbe nascere il dubbio che il valore dell'integrale sopra A non fosse determinato, in quanto il passaggio da A ad A' implica una certa arbitrarietà, cosicchè l'area A' non è individuata. Ma quel che a noi premeva di far vedere era che, presa comunque la A, si poteva definire un'area A' tale che valesse la (5), perché ciò basta per concludere che $\int \Delta\, dx\, dy$ è finito, qualunque sia A.

Si potrà al più aggiungere, per quanto sia superfluo, che, una volta data A, essendo ben determinato il valore del 2° membro della (5) (Δ è funzione razionale di x, y, z) e valendo la (5) comunque si disponga degli elementi arbitrari che compaiono nella costruzione di A', il valore del 1° membro risulta in definitiva indipendente da questi elementi.

(12) Si badi che, se pure il punto X'_0 iniziale è interno ad M, gli altri punti X' non godono tutti necessariamente della stessa proprietà.

(13) Il fascio delle λ' tracciate su A' in corrispondenza alle λ non è però necessariamente rientrate in sé, cosicchè, per esempio, A' può essere aperta, anche se A è chiusa.

5. Un'ultima osservazione. Per dare un senso alla relazione (1), si potrebbe profittare anche delle considerazioni seguenti:

In un punto X di F (o di R) le $u_1, u_2, \cdots, u_p$ assumono infiniti gruppi di valori e quindi ad X rispondono in S, infiniti punti; ma *uno solo* interno al parallelepipedo M. Ai punti di F si possono così far corrispondere univocamente, entro M, ∞^4 punti reali, costituenti una varietà T. Le $u_1, u_2, \cdots, u_p$, in tal modo definite sulla T, risultano funzioni uniformi del punto X e, pel tramite di tali funzioni, il legame tra gl'integrali dei due membri della (1) acquista un senso preciso.

Ma, evidentemente, per questa via non si farebbe che travestire il concetto del procedimento esposto nel mio lavoro [loc. cit. (2)], giacchè la T non è altro che un'immagine riemanniana della superficie Φ da me considerata.

LIX.

SULLE SUPERFICIE IRREGOLARI CON INFINITE CURVE RAZIONALI

Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, *29* (1913).

In un recente lavoro sulle superficie e varietà algebriche [1], ho stabilito, come corollario immediato del teorema geometrico che sta alla base di quel mio lavoro, la possibilità di trasformare birazionalmente in una rigata, ogni superficie irregolare con un infinità, anche discontinua, di curve razionali.

Il sig. De Franchis in una Nota in questi giorni pubblicata [2], considera la proprietà stessa come un « caso particolare » della seguente:

« Su una superficie d'irregolarità p le curve di genere $\pi < p$, se esistono, « si distribuiscono in un numero finito di fasci irrazionali e di curve isolate ».

Questo teorema non è giusto! Gli è che il sig. De Franchis riguarda come *evidente* che una superficie algebrica non possa contenere che un numero finito di fasci irrazionali; mentre si conoscon superficie d'irregolarità $p > 1$, con *infiniti* fasci irrazionali di curve di genere $\pi = 1$: per esempio la superficie delle coppie di punti di due curve ellittiche birazionalmente identiche [3].

(1) F. SEVERI, *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica*, Annali di matematica pura ed applicata, (3) *20* (1913), p. 201–215 [Memoria LVII, vol. II, p. 360; N.d.R.]. Il sig. De Franchis ha creduto di poter asserire che il teorema formante l'oggetto principale di questa mia Memoria « non abbisogna di dimostrazione ». Ved. M. DE FRANCHIS, *Intorno ad un recente lavoro sugl'integrali multipli di 1ª specie*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *36* (1913), p. 140. Gli ho risposto, contestando la sua asserzione, nella Nota: *Risposta ad un'osservazione del sig. De Franchis*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *36* (1913) [Nota LVIII, vol. II, p. 373; N.d.R.].

(2) *Alcune osservazioni sulle superficie irregolari*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *36* (1913), pp. 223–225.

(3) Cfr. A. COMESSATTI, *Sui piani tripli ciclici irregolari*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *31* (1911), pp. 369–386, nota 14ª a pie' della pag. 281. Ved. pure R. TORELLI, *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, *21*$_1$ (1912), pp. 453–457.

LX.

UN TEOREMA D'INVERSIONE PER GLI INTEGRALI SEMPLICI DI I^a SPECIE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, *72* (1913), pp. 765–772 (*).

Sopra una curva algebrica C, di genere $p > 0$, il problema d'inversione di Jacobi può enunciarsi sotto la seguente forma più ristretta della consueta: Dato un punto generico x di C, vi sono altri punti della curva, in cui tutti gl'integrali abeliani di I^a specie di C, assumon valori rispettivamente congrui a quelli assunti in x? A questa domanda, com'è ben noto, si risponde negativamente. Ed è poi facile vedere come tale risposta derivi dalla forma consueta del teorema d'inversione, che cioè, salvo gruppi *speciali*, si ha una corrispondenza biunivoca tra i gruppi di p punti della curva e i valori delle somme – definite a meno dei periodi – che p integrali indipendenti di I^a specie, dànno nei p punti d'un gruppo; talchè la varietà dei gruppi di p punti risulta *abeliana*.

Picard, cercando di estendere alle superficie algebriche il teorema d'inversione, si è chiesto se, data una superficie F, si può determinare un intero p, tale che l'insieme dei gruppi di p punti di F, sia una varietà abeliana. E ha concluso negativamente, salvo il caso in cui la superficie sia iperellittica; nel qual caso è $p = 1$ (1).

Il teorema d'inversione, sotto la forma più ristretta da noi enunciata, ha invece il suo analogo sulle superficie, in quanto si dimostra, come appunto io faccio in questa Nota, che, se sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, si considera un punto generico x, la condizione imposta ai p integrali semplici di I^a specie di F, di dare in qualche altro punto della superficie valori rispettivamente congrui a quelli assunti in x, è *algebrica*. E si hanno due casi distinti, secondo che i p integrali suddetti assumon gli stessi valori in un numero finito $m\ (\geq 1)$ o in infiniti punti di F.

Nel primo caso gli ∞^2 gruppi di m punti, di egual livello pei p integrali, costituiscono un'involuzione I_m, della *stessa irregolarità* p di F, e che, per la sua stessa definizione, è invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della superficie. Nel 2° caso invece le ∞^1 curve algebriche, lungo le quali son costanti i p integrali, formano un fascio di genere p.

(*) Adunanza del 23 febbraio 1913.

(1) Vedi la Nota II alla fine del vol. II (pag. 469) delle *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, di E. PICARD et G. SIMART. (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

Ho dimostrato altrove [2], che se una superficie F, d'irregolarità $p > 0$, non contiene un fascio di genere p, essa è la trasformata razionale di una superficie Φ, *della stessa irregolarità*, tracciata sulla varietà di Picard V_p, annessa ad F, per modo che tra F, Φ si ha una corrispondenza $(l, 1)$. I periodi primitivi degl'integrali semplici di 1ª specie delle superficie F, Φ, non sono necessariamente *equivalenti*, nel senso che dagli uni si possa passare agli altri con una sostituzione lineare *unimodulare* a coefficienti interi; poichè si può dire soltanto che i periodi appartenenti ad un integrale di F, sono combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi appartenenti al corrispondente integrale di Φ, senza però che il modulo M della sostituzione lineare, sia di necessità uguale $a \pm 1$. In altri termini insomma *gl'integrali semplici di 1ª specie, relativi alla superficie F e alla sua varietà di Picard, non hanno necessariamente gli stessi periodi.*

Quando sia $M = \pm 1$, l'involuzione J_l, che corrisponde su F ai punti di Φ, coincide coll'involuzione I_m sopra definita; in caso contrario la J_l è composta colla I_m.

Ma, comunque, si può sempre trasformare razionalmente F in una superficie Ψ, della stessa irregolarità p, e situata sopra una varietà di Picard V'_p, i cui integrali semplici di 1ª specie, abbian gli stessi periodi di quelli che competono agl'integrali di F.

Avrò presto occasione di applicare il teorema d'inversione sopra formulato, sia al problema di determinare i piani ciclici irregolari, sia allo studio delle corrispondenze algebriche esistenti fra i punti della curva generica d'un sistema lineare, tracciato sopra una superficie irregolare [3].

1. Consideriamo una superficie F, d'irregolarità $p > 0$, che non possegga un fascio irrazionale di genere p, di curve algebriche. Come ho già detto, nell'ipotesi posta, F si può porre in corrispondenza birazionale con una superficie l-pla, Φ, d'irregolarità p, appartenente alla varietà di Picard V_p, relativa ad F.

Sia J_l l'involuzione d'ordine l, che corrisponde su F ai punti di Φ, e sieno $u_1, u_2, \cdots, u_p$ i p integrali semplici di 1ª specie di V_p. Questi integrali subordinano altrettanti integrali indipendenti sulla Φ: li indicheremo cogli stessi simboli $u_1, u_2, \cdots, u_p$. Mediante la trasformazione razionale che fa passare da Φ ad F, gl'integrali $u_1, u_2, \cdots, u_p$ si mutano in p integrali semplici di 1ª specie, $v_1, v_2, \cdots, v_p$, appartenenti ad F. Indicati complessivamente con ω i periodi degl'integrali u, e con θ i periodi degl'integrali v, gl'integrali v non riprenderanno necessariamente, nei punti di un gruppo di J_l, valori congrui

(2) In un lavoro dal titolo: *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1ª specie, d'una varietà algebrica*, in corso di stampa negli «Annali di Matematica» [Memoria LVII, vol. II, p. 360; N.d.R.].

(3) Il risultato relativo a quest'ultima questione trovasi in una mia recentissima Nota dei Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séance du 27 janvier 1913) [Nota LV, vol. II, p. 329; N.d.R.].

rispetto ai loro periodi θ, ma sibbene valori congrui rispetto al sistema di moduli ω. E viceversa, poiché in due punti distinti di V_p, e quindi anche di Φ, gl'integrali u non posson riprender valori congrui rispetto alle ω, così due punti di F in cui gl'integrali v assuman valori congrui rispetto alle ω, son coniugati nella J_l.

In particolare, dal momento che i periodi θ di un integrale v, son legati ai periodi ω del corrispondente integrale u, mediante una sostituzione lineare S, a coefficienti interi – e indipendente dall'integrale considerato – due punti x, y di F, in cui gl'integrali v assumono rispettivamente gli stessi valori, a meno dei propri periodi θ, apparterranno a un medesimo gruppo di J_l.

Ciò significa, in altri termini, che i punti di F dove gl'integrali v riprendon ciascuno il medesimo valore, sono in numero finito $m \geq 1$, e che, se $m > 1$, gli ∞^2 gruppi di livello che in tal modo s'ottengono, formano un'involuzione I_m, con cui è composta la J_l precedentemente considerata.

Tutto ciò nell'ipotesi che F non contenga un fascio di genere p. Se invece F contiene un fascio Σ, di genere p, di curve Γ irriducibili, lungo ogni Γ gl'integrali v di F son costanti, e vi son pertanto infiniti punti nei quali ognuno degl'integrali v riprende lo stesso valore che nel punto generico x. Ma oltre ai punti della Γ passante per x, vi posson essere altri punti di F, in cui ognuno dei v riprenda il valore assunto in x (a meno dei periodi dei v)?

Dicasi D una curva algebrica i cui punti rappresentino birazionalmente le curve Γ ed $u_1, u_2, \cdots, u_p$ i p integrali abeliani di 1ª specie di D, corrispondenti agl'integrali $v_1, v_2, \cdots, v_p$ di F. Poichè ad un ciclo lineare di F risponde un ciclo lineare di D, ogni periodo di un integrale v, è un periodo di un integrale u. Ed è vero, in tal caso, anche il fatto reciproco.

Infatti, ogni cammino aperto σ di F, cui corrisponda un ciclo lineare σ' di D, avrà i due estremi x, x' sopra una medesima curva Γ, e quindi lungo esso un integrale v assumerà lo stesso valore che nel ciclo lineare ottenuto aggiungendo a σ un cammino tracciato su Γ e congiungente x con x', perché da x ad x' il valore dell'integrale è nullo.

Se pertanto vi fossero due curve Γ distinte, in cui ogni v riprendesse valori congrui, rispetto ai periodi dei v, su D vi sarebbero due punti distinti in cui ogni u riprenderebbe valori congrui, rispetto ai periodi degli u, e ciò è assurdo. Dunque:

Scelto genericamente sopra una superficie F, d'irregolarità $p > 0$, un punto x, gli ulteriori punti della superficie, in cui gl'integrali semplici di 1ª specie di F assumono ciascuno il valore stesso assunto in x (a meno dei periodi) o sono in numero finito ($m - 1 \geq 0$), oppure riempiono una curva algebrica irriducibile Γ passante per x. Nel 1° caso, al variare di x, il suddetto gruppo di livello, descrive su F un'involuzione I_m, d'irregolarità p; nel 2° caso invece la curva Γ, descrive su F un fascio di genere p.

2. Nell'ipotesi che F non contenga un fascio di genere p, sieno $x_1, x_2, \cdots, x_l$ i punti d'un medesimo gruppo G_l di J_l. Congiungendo x_1 con $x_2, x_3, \cdots, x_l$, mediante $l - 1$ cammini $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_l$, contenuti in F, a questi cammini

corrisponderanno, su Φ, $l-1$ cicli lineari (chiusi) $\sigma'_2, \sigma'_3, \cdots, \sigma'_l$, passanti pel punto ξ di Φ che rappresenta il gruppo G_l.

Indichiamo con $\mu_{h2}, \mu_{h3}, \cdots, \mu_{hl}$ i valori (periodi) dell'integrale u_h rispettivamente lungo $\sigma'_2, \sigma'_3, \cdots, \sigma'_l$. Allora verrà:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} v_h(x_2) &\equiv v_h(x_1) + \mu_{h2} \\ v_h(x_3) &\equiv v_h(x_1) + \mu_{h3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_h(x_l) &\equiv v_h(x_1) + \mu_{hl} \end{aligned}\right\} \text{(modd. } \theta\text{)}, \quad (h = 1, 2, \cdots, p).$$

Variando con continuità il punto ξ e i cicli $\sigma'_2, \sigma'_3, \cdots, \sigma'_l$ su Φ, restano immutati i periodi $\mu_{h2}, \cdots, \mu_{hl}$, sicchè le (1) valgono per ogni gruppo di J_l, nel senso che, chiamato x_1 un punto qualsiasi di questo gruppo, vi è nel gruppo stesso un punto x_2 tale che

$$v_h(x_2) \equiv v_h(x_1) + \mu_{h2},$$

un punto x_3 tale che

$$v_h(x_3) \equiv v_h(x_1) + \mu_{h3},$$

e così via.

Da ciò segue che, se per una variazione continua di ξ, i due punti x_1, x_2 di uno stesso gruppo di J_l posson venire a coincidere, dovrà essere

$$\mu_{h2} \equiv 0 \text{ (modd. } \theta\text{)},$$

cioè x_1 ed x_2 saranno coniugati nell'involuzione I_m, di cui al n. precedente.

Quando dunque due qualsiasi punti prefissati di un gruppo di J_l, posson venire a coincidere per una variazione continua del gruppo, l'involuzione J_l coincide colla I_m e il valore di un integrale v_h, lungo un cammino che congiunga quei due punti, è congruo a zero (modd. θ), cioè si esprime con una combinazione lineare a coefficienti *interi* dei periodi θ.

In tal caso la sostituzione lineare S, definita al n. prec., ha necessariamente il modulo $M = \pm 1$, cioè gl'integrali semplici di 1ª specie delle F, Φ (e quindi anche di V_p), hanno gli stessi periodi (a meno d'una sostituzione intera unimodulare).

Che se invece $M \neq \pm 1$, i periodi degl'integrali di F non sono equivalenti ai periodi degl'integrali di V_p, ed allora J_l non coincide con I_m, chè anzi due gruppi di I_m, che faccian parte di un medesimo gruppo di J_l, non posson mai venire a coincidere.

Supposto che i gruppi di I_m contenuti nel gruppo considerato $(x_1, x_2, \cdots, x_l)$, sieno:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_m), (x_{m+1}, \cdots, x_{2m}), \cdots, (x_{(n-1)m+1}, \cdots, x_{nm}),$$

ove si è posto $l/m = n$, le prime $m-1$ delle μ saranno congrue a zero (modd. θ), le successive m saran congrue tra loro, le m successive a

questa, pure congrue tra loro, e così via. Sicchè le (1) potranno scriversi sotto la forma:

$$\begin{aligned} &v_h(x_{i_1}) \equiv v_h(x_1) \quad , && (i_1 = 2, \cdots, m) \\ &v_h(x_{i_2}) \equiv v_h(x_1) + \lambda_{h2} \, , && (i_2 = m+1, \cdots, 2m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &v_h(x_{i_n}) \equiv v_h(x_1) + \lambda_{hn} \, , && (i_n = (n-1)m + 1, \cdots, nm) \, , \end{aligned} \qquad \text{(modd. } \theta\text{)}.$$

ove si è posto

$$\lambda_{h2} = \mu_{h \cdot m+1} \, , \cdots , \lambda_{hn} = \mu_{h \cdot (n-1)m+1} \, .$$

Sempre nella ipotesi $M \neq \pm 1$, dicasi Ψ la superficie che rappresenta i gruppi di I_m. I periodi degl'integrali di 1ª specie di F e di Ψ, saranno evidentemente equivalenti e la Φ verrà rappresentata su Ψ, mediante un'involuzione K_n, *priva di coincidenze*.

Risulta da tutto ciò una condizione necessaria affinchè i periodi degl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie F, d'irregolarità $p > 0$, non contenente un fascio di genere p, non sieno equivalenti ai periodi degl'integrali analoghi, che appartengono alla corrispondente varietà di Picard V_p: giacchè la F si deve poter rappresentare sulla superficie multipla Ψ, possedente una involuzione d'irregolarità p, senza coincidenze.

Ma l'esistenza effettiva di una superficie F, i cui integrali abbian periodi non equivalenti ai periodi degl'integrali di V_p, non resta ancor provata, giacchè non siamo in grado d'indicare un esempio di superficie siffatte.

3. Comunque si osserverà che, a causa della disuguaglianza riemanniana, a cui soddisfanno le parti reali ed imaginarie dei periodi di un integrale semplice di 1ª specie di F [4], si può sempre costruire una varietà di Picard V_p' i cui integrali semplici di 1ª specie abbian periodi equivalenti a quelli degli integrali di F. Indicheremo gl'integrali semplici di 1ª specie di V_p' cogli stessi simboli, $v_1, v_2, \cdots, v_p$, con cui si denotano gl'integrali corrispondenti di F.

La varietà di Picard V_p annessa ad F, risulterà allora birazionalmente identica ad un'involuzione d'ordine n, generata su V_p' da un gruppo abeliano G_n di n trasformazioni di 2ª specie, ciascuna delle quali vien rappresentata da una delle congruenze:

$$\begin{aligned} &v_h' \equiv v_h \, , \\ &v_h' \equiv v_h + \lambda_{h2} \, , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &v_h' \equiv v_h + \lambda_{hn} \, , \end{aligned}$$

(4) Cfr. F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *21* (1906); n. 4 [Memoria XXX, vol. I, p. 372; N.d.R.].

ove v_h , v'_h, per $h = 1 , 2 , \cdots , p$, denotano i valori assunti dall'integrale v_h in due punti corrispondenti di V'_p. E la superficie Ψ, sopra definita, sarà alla sua volta birazionalmente identica ad una superficie (semplice) di V'_p, mutata in sé dal gruppo G_n.

Sicchè, *se pure i periodi degl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie F, non sono equivalenti ai periodi degl'integrali analoghi, relativi alla varietà di Picard V_p annessa ad F, si può sempre costruire una nuova varietà di Picard V'_p rappresentata sulla V_p multipla, senza punti di diramazione, per guisa che i periodi degl'integrali di F, sieno equivalenti ai periodi degl'integrali di V'_p, e che la F, sia la trasformata razionale d'una superficie, d'irregolarità p, appartenente a V'_p.*

LXI.

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ ARITMETICHE DELLE CORRISPONDENZE FRA I PUNTI DI UNA CURVA ALGEBRICA [1]

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *48* (1913), pp. 660–674 (*).

Il punto di partenza delle mie ricerche sulla base per la totalità delle curve di una superficie algebrica F [2], è un criterio aritmetico per decidere se due equimultipli opportuni delle curve A, B, tracciate su F sieno o no equivalenti (linearmente o algebricamente) [3]. E credo che, nella geometria algebrica, sia stato questo il primo esempio di deduzione d'una proprietà funzionale, da una proprietà puramente aritmetica.

Poco dopo Castelnuovo assegnò un utilissimo criterio aritmetico, per riconoscere se i gruppi di una data serie algebrica sopra una curva, sieno o no equivalenti [4]. Qui mi propongo di stabilire un'altra proposizione dello stesso tipo, dimostrando che:

Il numero u dei punti uniti di una corrispondenza qualunque T, d'indici (α, β) *e grado – necessariamente pari –* 2μ [5] *sopra una curva C di genere p,*

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 30 marzo 1913.

(1) Nel comporre una seconda dimostrazione (geometrica) del teorema relativo alla determinazione delle corrispondenze tra i punti di una curva variabile in un sistema lineare, sopra una superficie – teorema di cui ho già esposto succintamente una prima dimostrazione (trascendente) nei « Comptes rendus » (27 janvier 1913) [Nota LV, vol. II, p. 329; N.d.R.] – ho dovuto stabilire, come premessa, il teorema che qui pubblico a parte, perché mal s'inquadrerebbe nel lavoro che sto preparando intorno all'accennato argomento.

(2) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Mathematische Annalen, *52* (1906), p. 194 [Memoria XXIX, vol. I, p. 332; N.d.R.].

(3) Precisamente si ha $lA \equiv lB$ o in particolare $lA \equiv lB$, allorquando i gradi virtuali di A, B uguaglino il numero (> 0) dei punti comuni ad A, B.

(4) G. CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5) *15* (1906), p. 341.

(5) « Grado » di T è il grado virtuale della curva imagine di T sulla superficie F delle coppie di punti (ordinate) di C. Cfr., ad esempio, la mia Memoria, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) *54* (1903). Quando T appartenga ad un sistema continuo di corrispondenze, il « grado » di T uguaglia il numero delle coppie comuni a due corrispondenze del sistema. La formola (15) [dovuta a M. DE FRANCHIS; cfr. *Sulla varietà delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, *17* (1903), n. 8], contenuta nel n. 12 della mia Memoria citata, mostra che *il grado d'una corrispondenza è necessariamente pari.*

soddisfa sempre alla disuguaglianza

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p(\alpha\beta - \mu),$$

il segno $=$ *valendo allora e solo allora che la corrispondenza* T *è a valenza.*

Questa proprietà si collega tanto al mio criterio citato, quanto a quello di Castelnuovo. Anzi quest'ultimo criterio può esso pure considerarsi come un corollario della condizione aritmetica di dipendenza fra due curve di una superficie, giacchè, applicando appunto tale condizione ad una superficie con due fasci unisecantisi, si dimostra che « il grado di una corrispondenza (α, β) fra due curve – distinte o coincidenti – non supera mai $2\alpha\beta$ e che il limite $2\alpha\beta$ è raggiunto allora e solo allora che la corrispondenza sia a valenza zero ». Per passare da questa proposizione (equivalente in sostanza al criterio di Castelnuovo) al teorema sopra enunciato, occorre prima provare che « se un multiplo lT di una corrispondenza T fra i punti di C, possiede una valenza, anche T è a valenza ». Di questo fatto, stabilito geometricamente nel n. 3 di questa Nota, dò pure una dimostrazione trascendente al n. 4 [6].

1. Cominciamo a dimostrare di nuovo che:

Se sopra una curva C, *di genere* p, *si ha una serie* Σ (*irriducibile*) ∞^1 *di gruppi* G, *che sieno sottomultipli, secondo un certo intero* l, *di una stessa serie lineare, i gruppi* G *sono essi stessi equivalenti.*

Questa proposizione può considerarsi come un corollario del criterio di Castelnuovo [7]. Dal punto di vista trascendente essa è pressochè immediata [8]. Ci conviene tuttavia di esporre qui una diretta dimostrazione geometrica, volendo anche ottenere di nuovo, per altra via, il risultato di Castelnuovo.

Fissato su C un gruppo *non speciale* K, di p punti, la serie completa $|K + G|$ contiene ogni altro gruppo G' della serie Σ, e il residuo sarà *un* gruppo K' generalmente non speciale, poiché, quando G' tende a G, K' tende al gruppo non speciale K. Se il gruppo K' è indipendente dalla posizione di G' in Σ, sarà $G \equiv G'$ e il teorema risulterà dimostrato. Proviamo dunque assurda l'ipotesi che K' varii con G'. Se ciò avvenisse, il luogo dei gruppi K' sarebbe una serie Π, ∞^1, di gruppi, generalmente non speciali, di p punti. E poichè

$$lK' \equiv lK + lG - lG', \qquad lG \equiv lG',$$

risulterebbe $lK \equiv lK'$. La serie $|lK|$, di cui i gruppi K' sono sottomultipli secondo l, è una $g_{lp}^{(l-1)p}$ non speciale, semplice e tale che, mediante essa, la

(6) Dal criterio di Castelnuovo si deduce [Cfr. le mie *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, Atti del R. Istituto Veneto, 65 (1906), n. 4] che se lT ha la valenza $l\gamma$, T ha la valenza γ. Il teorema del testo dice di più: se lT ha la valenza γ', deve necessariamente risultare γ' multiplo di l.

(7) Ved. la mia Nota ultimamente citata, n. 4.

(8) Cfr. F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, 21 (1906), n. 12 [Memoria XXX, vol. I, p. 388; N.d.R.].

C può trasformarsi birazionalmente in una curva Γ di $S_r (r = (l-1)p)$ priva di punti multipli, sulla quale la serie corrispondente a $|lK|$ sia segata dagl'iperpiani [9]. Continuando ad indicare su Γ con K, K' i gruppi imagini di K, K', avremo che gli ∞^1 gruppi lK' saranno staccati su Γ da un sistema ∞^1 di iperpiani, ciascuno dei quali conterrà gli S_{l-1} osculatori a C nei punti del gruppo K' relativo.

Detto P un punto del gruppo K, I l'iperpiano che stacca lK, K' un gruppo variabile ed I' l'iperpiano corrispondente, facciamo tendere I' ad I. Quando I' giunge infinitamente vicino ad I, lo S_{l-2} osculatore in P viene ad essere comune ad I e ad I', cosicchè la serie g^1_{lp}, che congiunge i gruppi equivalenti lK, lK', viene a contenenre p punti $(l-1)$-pli fissi. Astraendo da questi, si ottiene una g^1_p cui appartiene il gruppo K, che risulta pertanto speciale, contro il supposto.

È dunque assurda l'ipotesi fatta e si conclude in ogni caso $G \equiv G'$.

2. Passiamo ora a dimostrare che:

Una corrispondenza (α, β) *fra due curve – distinte o coincidenti – ha sempre il grado* $\nu \leq 2\alpha\beta$, *il segno* $=$ *valendo allora e solo allora che la corrispondenza sia a valenza zero* [10].

Dicasi F la superficie delle coppie di punti delle due curve C_1, C_2, di generi p_1, p_2, tra le quali intercede la data corrispondenza, e indicato con x un punto variabile su C_1 e con y un punto variabile su C_2, denotiamo con K_x (o K_y) le curve di F che rappresentano le coppie con un fissato x (o y) [11]. Sia infine T la curva imagine della data corrispondenza e ν il suo grado. Volendo provare che $\nu \leq 2\alpha\beta$, dimostreremo assurda la ipotesi

$$\nu = 2\alpha\beta + 2k, \qquad (k > 0) \quad [12]. \tag{1}$$

Detto ϱ il genere virtuale di T, in quest'ipotesi viene anzitutto [13]:

$$\varrho = \beta(p_2 - 1) + \alpha(p_1 - 1) + \alpha\beta + k + 1 .$$

Fissiamo un sistema lineare (semplice, almeno ∞^3) somma di due serie lineari g^r_n, g^s_m prese rispettivamente entro i fasci irrazionali $\{K_x\}$, $\{K_y\}$.

(9) Ved. per esempio le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 173.

(10) Ricordo che una corrispondenza (α, β) fra due curve C_1, C_2, dicesi « a valenza zero » nel senso da C_1 a C_2, quando ai punti di C_1 rispondono in C_2 gruppi equivalenti di β punti. Si dimostra che se la corrispondenza è a valenza zero in un senso, lo è anche nel senso opposto. Cfr. F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (3) *12* (1905), n. 2 [Memoria XXV, vol. I, p. 296; N.d.R.].

(11) Cfr. M. DE FRANCHIS, *loc. cit.* e la mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc. Per quanto segue, converrà tener presente il § 1 (II Parte) di questa mia Memoria.

(12) Si ricordi che ν è pari.

(13) Ved. la formola (15) al n. 12 della mia Memoria, *Sulle corrispondenze*, ecc.

Rispetto a questo sistema, T ha l'*ordine* $m\alpha + n\beta$ e quindi un multiplo λT sufficientemente alto di T, avrà l'ordine $\lambda(m\alpha + n\beta)$ maggiore di quello

$$2n(p_1 - 1) + 2m(p_2 - 1),$$

delle curve canoniche di F. Sicchè ogni curva – anche virtuale [14] – avente lo stesso ordine di λT, sarà non speciale. Ora, poichè λT ha gl'indici $\alpha' = \lambda\alpha$, $\beta' = \lambda\beta$ e il grado $\nu' = \lambda^2\nu$, la curva λT soddisfa alla condizione:

$$\nu' = 2\alpha'\beta' + 2\lambda^2 k$$

analoga alla (1).

Potremo quindi supporre, nelle considerazioni ulteriori, che le curve dello stesso ordine di T sieno non speciali (bastando eventualmente sostituire a T un suo multiplo abbastanza alto).

Ciò posto, costruiamo la curva virtuale

$$T_l = T + l(T - \alpha K_x - \beta K_y)$$

e indichiamo con μ_l, π_l il suo grado e il suo genere virtuali. A calcoli fatti viene:

$$\mu_l = \nu + 4kl + 2kl^2$$
$$\pi_l = \varrho + 2kl + kl^2,$$

sicchè la dimensione virtuale della curva T_l, che ha lo stesso *ordine* di T, ed è quindi non speciale, è espressa da:

$$r_l = \mu_l - \pi_l + p_a + 1 = s + 2kl + kl^2,$$

in cui p_a è il genere aritmetico $(= p_1 p_2 - p_1 - p_2)$ di F ed s è un intero indipendente da l. Poichè per $l \geq l_0$, ove l_0 è un conveniente limite, risulta $r_l \geq 0$, per ogni valore di $l \geq l_0$, esisterà la curva T_l [15] ed il sistema lineare $|T_l|$ avrà la dimensione

$$R_l \geq r_l .$$

Ora, quando si fa crescere l, a partire da l_0, r_l cresce oltre ogni limite. Si arriva dunque alla conclusione che la dimensione di $|T_l|$, col crescere di l, può crescere indefinitamente. E questa conclusione è incompatibile col fatto che le curve dello stesso ordine di T si distribuiscano su F in un numero *finito* di sistemi continui. È dunque assurda l'ipotesi $k > 0$, ed è pertanto vero che

$$\nu \leq 2\alpha\beta .$$

(14) Ved. la mia Nota, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2) *58* (1905) [Nota XXVII, vol. I, p. 325; N.d.R.].

(15) Loc. ultimamente citato, n. 6.

Ci resta da provare che se $\nu = 2\alpha\beta$, la corrispondenza data è a valenza zero, cioè che la curva T appartiene al sistema lineare somma di una serie lineare g_β del fascio $\{K_y\}$ e di una serie lineare g_α di $\{K_x\}$.

Detta S una curva appartenente ad un tale sistema, il grado virtuale di S e il numero delle sue intersezioni con T, risultano evidentemente eguali al grado ν di T, cosicchè due equimultipli opportuni delle due curve T, S sono algebricamente equivalenti, ovvero, in simboli

$$\lambda T \equiv \lambda S \text{ (16)}.$$

Se ora si osserva che il sistema continuo completo $\{\lambda S\}$ è formato dalla totalità dei sistemi lineari risultanti dalla somma di due serie lineari complete $g_{\lambda\alpha}$, $g_{\lambda\beta}$, prese rispettivamente in $\{K_x\}$ e $\{K_y\}$, si conclude che si può scegliere una S tale che risulti λT linearmente equivalente a λS:

$$\lambda T \equiv \lambda S .$$

Il che significa, in altri termini, che la corrispondenza di indici $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$, avente per imagine λT, è a valenza zero.

In virtù della proposizione del n. 1, ne segue che è a valenza zero anche la corrispondenza (α, β), di cui la precedente è multipla secondo λ.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. La disuguaglianza $\nu \leq 2\alpha\beta$ può esser sostituita coll'altra equivalente:

$$\varrho \leq \alpha(p_1 - 1) + \beta(p_2 - 1) + \alpha\beta + 1 ,$$

che coincide, salvo le notazioni, colla formola (8) della Nota citata di Castelnuovo (17). Questa relazione alla sua volta, come ha già avvertito lo stesso Castelnuovo, è equivalente al suo criterio aritmetico. Il ponte di passaggio è costituito dalla formola di Zeuthen.

3. Prima di stabilire la disuguaglianza che è oggetto principale della presente Nota, occorre premettere ancora la proposizione seguente:

Se il multiplo secondo l d'una corrispondenza (α, β) fra i punti di una curva C, ha la valenza γ, risulta γ multiplo di l, e la data corrispondenza ha essa pure una valenza $(= \gamma/l)$.

(16) Ved. la mia Memoria citata, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, n. 2.

(17) Si badi bene che in questa formola ϱ è il genere *virtuale* della curva T, imagine della data corrispondenza. Se pertanto la formola stessa si vuol interpretare come una limitazione del genere *effettivo* ϱ_0 di una curva cui appartengano due involuzioni di gradi α, β e di generi p_1, p_2, occorre togliere dal secondo membro il numero μ delle coppie comuni alle due involuzioni, μ essendo il numero dei punti doppi *equivalenti* all'eventuale gruppo dei punti multipli della curva T.

Nel seguito indicheremo indifferentemente con T la data corrispondenza e la sua curva imagine sulla superficie F, delle coppie ordinate dei punti di C. E quanto alla superficie F, conserveremo le notazioni del n. precedente, indicando inoltre con K la curva, unisecante le K_x e le K_y, imagine della corrispondenza identica.

Supposto che γ ($\gtrless 0$) non sia multiplo di l, indichiamo con θ il massimo comun divisore di l, γ. Dal fatto che è a valenza γ la corrispondenza lT, segue (n. 1) che la corrispondenza $\frac{l}{\theta}T$ è a valenza $\frac{\gamma}{\theta}$. Sicchè nulla ci vieta di supporre addirittura che i due interi l, γ, di cui si parla nell'enunciato del teorema, sieno primi fra loro. Esisteranno allora due altri interi (positivi o negativi), l_1, γ_1, tali che

$$l\gamma_1 - l_1\gamma = 1 . \tag{2}$$

Consideriamo la curva, eventualmente virtuale,

$$T_1 = l_1 T + \gamma_1 K .$$

L'ipotesi che lT abbia la valenza γ si traduce nella equivalenza algebrica:

$$lT + \gamma K \equiv (l\alpha + \gamma) K_x + (l\beta + \gamma) K_y \quad (18).$$

Confrontando questa colla precedente, i cui due membri sieno stati moltiplicati preventivamente per l, si ottiene, in virtù della (2),

$$lT_1 - K \equiv l_1 (l\alpha + \gamma) K_x + l_1 (l\beta + \gamma) K_y .$$

Se pertanto la curva $l_1 T + \gamma_1 K$ è effettiva, la corrispondenza T_1, da essa rappresentata, sarà tale che lT_1 avrà la valenza -1. Che se poi non esistesse la curva $l_1 T + \gamma_1 K$, esisterebbe tuttavia la curva $l_1 T + \gamma_1 K + S$ ove S è una corrispondenza (curva) a valenza zero, d'indici (α', β') sufficientemente alti; e ponendo allora

$$T_1 = l_1 T + \gamma_1 K + S ,$$

si avrebbe similmente

$$lT_1 - K \equiv [l_1 (l\alpha + \gamma) + l\alpha'] K_x + [l_1 (l\beta + \gamma) + l\beta'] K_y ,$$

e quindi si potrebbe anche in tal caso affermare che il multiplo secondo l della corrispondenza effettiva T_1, ha la valenza -1.

Ciò posto, sieno x_i, x_i' due punti qualunque di C e Y_i, Y_i' i gruppi dei β_1 punti y corrispondenti rispettivamente ad x_i, x_i' nella T_1 (della quale indichiamo con α_1, β_1 gl'indici), cosicchè sarà:

$$lY_i - x_i \equiv lY_i' - x_i' .$$

(18) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc. (cit.), n. 19.

Facendo $i = 1, 2, \cdots, p$ (p è il genere di C) e sommando a membro a membro le equivalenze (lineari) ottenute, avremo:

$$l(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p) - X \equiv l(Y_1' + Y_2' + \cdots + Y_p') - X',$$

ove si è posto:

$$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_p, \qquad X' = x_1' + x_2' + \cdots + x_p'.$$

Fissata una generica serie lineare $g^{\beta_1 p}_{\beta_1 p + p}$, per ogni posizione del gruppo X nella C, potremo considerare il residuo Z rispetto alla $g^{\beta_1 p}_{\beta_1 p + p}$, del gruppo di $\beta_1 p$ punti, $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p$, corrispondente ad X mediante T_1. In questo modo dalla T_1 prenderà origine una corrispondenza S tra i gruppi di p punti di C, ad ogni X corrispondendo un solo Z e ad ogni Z corrispondendo un certo numero δ di gruppi X.

Dalla equivalenza lineare precedente, tenendo conto che:

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p + Z \equiv Y_1' + Y_2' + \cdots + Y_p' + Z',$$

si trae facilmente la relazione:

$$lZ + X \equiv lZ' + X',$$

che lega due coppie $(X, Z), (X', Z')$ di gruppi di p punti omologhi nella S.

Sia, se è possibile, $l > 1$. Scelta una generica $g^{(l-1)p}_{lp}$ e presi due (distinti) dei duoi l^{2p} gruppi dotati di p punti l–pli, indichiamo con Z, Z' i gruppi di p punti che, ripetuti l volte, costituiscono quei due gruppi equivalenti di lp punti. Se X (od X') è uno dei gruppi omologhi del suddetto Z (o rispettivamente Z') nella S^{-1}, a causa dell'ultima relazione ottenuta, poichè $lZ \equiv lZ'$, sarà $X \equiv X'$. Ma dal momento che la $g^{(l-1)p}_{lp}$, e quindi Z, sono stati scelti genericamente, il gruppo X, che dipende da p parametri (tanti quanti quelli da cui dipende Z), non può essere speciale. Ne deriva che X coincide con X' e quindi Z con Z', contro il supposto. È quindi assurda l'ipotesi $l > 1$. Si conclude che $l = 1$.

Questa conclusione è relativa al caso in cui gl'interi l, γ, di cui si parla nell'enunciato del teorema, sien ridotti ad esser primi fra loro. Ciò significa che, se $l > 1$, γ deve necessariamente esser multiplo di l.

4. Il fatto stabilito ora per via geometrica, si dimostra assai facilmente per via trascendente.

Sieno $u_1, u_2, \cdots, u_p$ i p integrali normali di 1ª specie di C, e sieno $(\sigma_1, \sigma_{p+1}), \cdots, (\sigma_2, \sigma_{2p})$ le p retrosezioni riemanniane, che dànno luogo ai periodi normali degli u. E precisamente l'integrale u_k abbia il periodo 1 lungo σ_k, il periodo τ_{ks} ($s = 1, 2, \cdots, p$) lungo σ_{p+s} e tutti gli altri periodi nulli. Per ipotesi si ha:

$$(3) \qquad l \sum_{i=1}^{\beta} u_k(y^i) + \gamma u_k(x) \equiv \pi_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, p),$$

ove le π_k son costanti indipendenti da x e $y', y'', \cdots, y^\beta$ i β punti y omologhi di x in T. Quando il punto x descrive il ciclo σ_r $(r = 1, 2, \cdots, p)$, $\sum u_k(y^i)$ aumenta di

$$a_{kr} + \sum_{s=1}^{p} b_{rs}\tau_{ks} \qquad (k = 1, 2, \cdots, p),$$

in cui le a_{kr}, b_{sr} son interi.

E poichè $u_k(x)$ aumenta di $\gamma\varepsilon_r$, ove $\varepsilon_r = 1$ per $r = k$ ed $\varepsilon_r = 0$ per $r \neq k$, avremo:

$$la_{kr} + l\sum_{s=1}^{p} b_{sr}\tau_{ks} + \gamma\varepsilon_r = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, p).$$

Da queste relazioni seguono, com'è noto [19], le altre:

(4) $\qquad la_{kr} + \gamma\varepsilon_r = 0,$ $\qquad$ (5) $\qquad b_{sr} = 0 \qquad (k, r = 1, 2, \cdots, p).$

Dalle (4) per $k = r$, risulta:

$$\gamma = -la_{rr} \qquad (r = 1, 2, \cdots, p)$$

e per $k \neq r$:

$$a_{kr} = 0.$$

E ponendo $-a_{rr} = \gamma'\left(= \frac{\gamma}{l}\right)$, se ne trae subito:

$$\sum_{i=1}^{\beta} u_k(y^i) + \gamma' u_k(x) \equiv \lambda_k,$$

ove le λ_k son costanti indipendenti da x. Ciò prova che T ha la valenza $\gamma' = \frac{\gamma}{l}$.

5. Stabiliamo infine il criterio aritmetico enunciato nella prefazione alla presente Nota.

Detto u il numero dei punti uniti di una corrispondenza qualunque T, di indici (α, β), della curva C, e conservando per tutto il resto le notazioni del n. 3, fissiamo l'attenzione sulla curva

$$2pT + cK,$$

ove si è posto $c = u - \alpha - \beta$. E supponiamo dapprima che questa curva sia *effettiva* (il che accade sempre quando $c \geq 0$). Essa taglia una K_x in $2p\beta + c$ punti ed una K_y in $2p\alpha + c$ punti. Il suo grado virtuale η, in virtù del teorema del n. 2, soddisferà pertanto alla disuguaglianza:

(6) $$\eta \leq 2(2p\alpha + c)(2p\beta + c).$$

(19) Ved. F. KLEIN–R. FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen* (Leipzig, Teubner, 1892), Bd. II, p. 518 e seguenti.

Ma detto $\nu\,(=2\mu)$ il grado virtuale di T si ha:

$$\eta = 4p^2\nu - 2c^2(p-1) + 4puc\,,$$

perché la curva K ha il grado virtuale $-2(p-1)$ [20]; dunque:

$$2p^2\nu - c^2(p-1) + 2puc \leq (2p\alpha + c)(2p\beta + c)\,.$$

Sviluppando e riducendo viene:

$$c^2 \leq 4p(\alpha\beta - \mu)\,. \tag{7}$$

Se nella (7) vale il segno $=$, anche nella (6) vale il segno $=$ e la corrispondenza effettiva $2pT + cK$ è a valenza zero (n. 2). Ciò significa che la corrispondenza $2pT$ è a valenza c e quindi (n. 3) c è divisibile per $2p$ e la corrispondenza T risulta a valenza $\gamma = c/2p$.

Tutto questo vale nell'ipotesi che la curva $2pT + cK$ sia effettiva. Se $2pT + cK$ è una curva virtuale, si potrà determinare una corrispondenza a valenza zero T_0 d'indici (α', β') così alti, che esista la curva $2pS + cK$, essendo $S = T + T_0$. Detti $\alpha_0, \beta_0, c_0, \mu_0$ i caratteri di S analoghi ai caratteri α, β, c, μ di T, applicando il procedimento esposto, si avrà:

$$c_0^2 \leq 4p(\alpha_0\beta_0 - \mu_0)\,. \tag{8}$$

Ma:

$$c_0 = c\,, \qquad \alpha_0\beta_0 = (\alpha + \alpha')(\beta + \beta')$$
$$2\mu_0 = 2\mu + 2\alpha'\beta' + 2[TT_0]\,,$$

ove $[TT_0]$ denota il numero dei punti comuni alle curve T, T_0. E poichè:

$$T_0 \equiv \alpha' K_x + \beta' K_y\,,$$

così si trae:

$$[TT_0] = \alpha'[K_x T] + \beta'[K_y T] = \alpha'\beta + \beta'\alpha$$

e quindi:

$$\mu_0 = \mu + \alpha'\beta' + \alpha'\beta + \beta'\alpha\,.$$

Ne deriva che:

$$\alpha_0\beta_0 - \mu_0 = \alpha\beta - \mu\,.$$

La (8) allora si riduce senz'altro alla (7).

Che se poi nella (8) – ossia nella (7) – vale il segno $=$, il grado virtuale η_0 di $2pS + c_0K$ soddisferà alla relazione:

$$\eta_0 = 2(2p\alpha_0 + c_0)(2p\beta_0 + c_0)$$

(20) Ponendo infatti nella formola (15) più volte citata della mia Memoria, *Sulle corrispondenze*, ecc., $p = p_1 = p_2$, $\varrho = p$, $\alpha = \beta = 1$, si trova il valore $-2(p-1)$ del grado virtuale di K.

e la corrispondenza $2pS + c_0 K$ sarà pertanto (n. 2) a valenza zero, ossia la corrispondenza $2pS$ avrà la valenza $c_0 = c$. Ne deriva (n. 3) che c è divisibile per $2p$ e che S ha la valenza $\gamma = c/2p$ e quindi anche T ha la valenza γ.

Si giunge pertanto in ogni caso alla disuguaglianza:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p(\alpha\beta - \mu)$$

il segno $=$ *valendo allora e solo allora che la corrispondenza data* T *è a valenza* $\left(= \dfrac{u - \alpha - \beta}{2p}\right)$.

Ed è precisamente questo il risultato definitivo cui miravamo.

Padova, 8 marzo 1913.

Nel momento di licenziare le bozze di stampa, mi accorgo che *la disuguaglianza*:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p(\alpha\beta - \mu),$$

che intercede fra i caratteri T della corrispondenza di cui sopra si parla, *si può far derivare anche dai risultati trascendenti di Hurwitz sulla teoria delle corrispondenze* (Math. Annalen, *82* e *32*) [21]. Ricordiamo che, detti $u_1, u_2, \cdots, u_p$ i p integrali normali di 1ª specie appartenenti a C e τ_{ki} i periodi normali ($\tau_{ki} = \tau_{ik}$) di questi integrali (cfr. col n. 4), una qualunque corrispondenza $T(\alpha, \beta)$, fra i punti di C, vien rappresentata da relazioni del tipo:

$$\sum_{r=1}^{\beta} u_k(y^r) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, p),$$

ove le π sono costanti indipendenti dalla posizione di x su C, ed $y', y'', \cdots, y^\beta$ sono i β punti y corrispondenti ad x mediante T.

Si hanno inoltre le relazioni:

$$\begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_i g_{il}\,\tau_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki}\,\tau_{il} &= H_{kl} + \sum_i G_{il}\,\tau_{ki} \end{aligned} \qquad (k, l = 1, 2, \cdots, p),$$

ove le h, g, H, G son numeri interi, *caratteristici* della data corrispondenza. Avendosi un'altra corrispondenza $T'(\alpha', \beta')$, il numero delle coppie x, y comuni a T, T', è espresso da:

$$(9) \qquad \alpha\beta' + \alpha'\beta - \sum_{i,k} [h_{ik} k'_{ki} + g_{ik} H'_{ki} + H_{ik} g'_{ki} + G_{ik} G'_{ki}],$$

ove h', g', H', G' sono gl'interi caratteristici di T'^{-1}.

(21) Comunque a me interessava [ved. la nota (1)] di pervenire al risultato per via geometrica, la quale del resto può apparire a taluno più luminosa.

Se pertanto la T appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze analoghe, alle quali spettano evidentemente gl'interi caratteristici medesimi inerenti a T, il numero delle coppie comuni a due corrispondenze di un tal sistema, cioè il «grado virtuale» 2μ di T, sarà dato dalla formola (9), ove si ponga $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e si prendano per h', g', H', G' gl'interi caratteristici di T^{-1}, che, com'è noto, son dati da:

$$h'_{kl} = G_{lk}, \qquad g'_{il} = -g_{li}, \qquad H'_{kl} = -H_{lk}, \qquad G'_{il} = h_{li}.$$

Sicchè viene:

$$2\mu = 2\alpha\beta - 2\sum_{i,k}(G_{ik}h_{ik} - g_{ik}H_{ik}). \tag{10}$$

Questa relazione vale anche quando T sia una corrispondenza isolata. Detta infatti S una corrispondenza (α', β') a valenza zero, tale che, sulla superficie F delle coppie ordinate dei punti di C, il sistema lineare $|T + S|$ sia infinito e irriducibile, il grado virtuale di $|T + S|$ sarà espresso da:

$$2\mu + 2\alpha'\beta' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

giacchè $2\alpha'\beta'$ è il grado virtuale di S ($\equiv \alpha' K_x + \beta' K_y$) ed $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ è il numero delle coppie comuni alle corrispondenze T, S, cioè il numero dei punti comuni alle curve T, S su F. D'altra parte ad ogni corrispondenza del sistema lineare $|T + S|$ – o più generalmente del sistema continuo $\{T + S\}$ – spettano i medesimi interi h, g, H, G, che son relativi a T, perché gl'interi caratteristici di S son tutti nulli.

Applicando quindi la (10) ad una corrispondenza irriducibile del sistema continuo $\{T + S\}$, la quale è d'indici $(\alpha + \alpha', \beta + \beta')$, avremo:

$$2\mu + 2\alpha'\beta' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = 2(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') - \\ - 2\sum_{i,k}(G_{ik}h_{ik} - g_{ik}H_{ik}).$$

Facendo le riduzioni, questa formula diventa la (10), che vale dunque in ogni caso.

Ricordando la disuguaglianza:

$$4p\sum_{i,k}(G_{ik}h_{ik} - g_{ik}H_{ik}) > \left[\sum_{k}(h_{kk} + G_{kk})\right]^2,$$

soddisfatta sempre che T non sia a valenza (Hurwitz, § 11 della Memoria nei «Math. Ann.», *28*), e la formola:

$$u = \alpha + \beta - \sum_{k}(h_{kk} + G_{kk}), \tag{11}$$

che dà il numero u dei punti uniti di T, viene quindi, mediante la (10):

$$4p(\alpha\beta - \mu) > (u - \alpha - \beta)^2.$$

Che se invece T ha la valenza γ, cioè se tutte le h, g, H, G son nulle, eccezione fatta per le h_{kk}, G_{kk}, che sono uguali $a - \gamma$, la (10) porge:

$$\mu = \alpha\beta - \gamma^2 p$$

e la (11):

$$(u - \alpha - \beta)^2 = 4\gamma^2 p ,$$

cosicchè si ha:

$$4p(\alpha\beta - \mu) = (u - \alpha - \beta)^2 .$$

E si giunge pertanto al criterio aritmetico stabilito geometricamente in questa Nota.

Aggiungeremo ancora un'osservazione, circa un altro significato geometrico della differenza $\alpha\beta - \mu$.

Chiamiamo *corrispondenza complementare* R di T, una corrispondenza d'indici (α', p), che faccia passare da un x generico ad un gruppo *non speciale* di p punti y, e inoltre tale che $T + R$ sia a valenza zero. La R si ottiene fissando una $g^p_{\beta+p}$ di C e associando ad ogni x il residuo, rispetto alla $g^p_{\beta+p}$ del gruppo dei β punti y corrispondenti ad x nella T. *Una* corrispondenza complementare di T è rappresentata dalle relazioni:

$$\sum_{r=1}^{p} u_k(y^r) \equiv -\sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, u_i(x) + \lambda_k ,$$

cioè essa ha come numeri caratteristici quelli stessi di T, ma col segno cambiato. Al variare della λ_k si ottengono tutte le ∞^p corrispondenze complementari di T. L'indice α' di R è espresso, come è provato in Hurwitz, da:

$$\alpha' = \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}) .$$

Si ha quindi, in virtù della (10):

$$\alpha\beta - \mu = \alpha' ,$$

cioè:

Il primo indice della corrispondenza complementare di una data corrispondenza (α, β), *di grado virtuale* 2μ, *uguaglia* $\alpha\beta - \mu$.

LXII.

SUGLI INTEGRALI ABELIANI RIDUCIBILI

NOTA I: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *23*$_1$ (1914), pp. 581–587 (*).

È noto che sopra una curva algebrica C, non può esistere un'infinità continua di sistemi lineari (completi) d'integrali abeliani di 1ª specie, riducibili (1).

Picard e Poincaré hanno da tempo indicato esempî di curve di genere $p > 1$, possedenti un'infinità discontinua d'integrali ellittici (integrali con due periodi ridotti) (2). In questa Nota mi propongo di mostrare l'esistenza di curve contenenti infiniti sistemi lineari di q (≥ 1) integrali con $2q$ periodi ridotti; e ciò anche all'infuori dei sistemi che s'ottengono ovviamente, sulle curve di Picard–Poincaré, combinando linearmente a due a due, a tre a tre, ecc., i loro integrali ellittici. Resta però sottinteso che, nel caso $q > 1$, non potrà esigersi, come accade sempre per $q = 1$, che ognuno degli infiniti sistemi sia riducibile al genere q (3), cioè che provenga da un'involuzione di genere q della curva sostegno, giacchè si sa anzi che non può esistere una curva algebrica con infinite involuzioni irrazionali di genere $q > 1$ (4).

(*) Seduta del 19 aprile 1914.

(1) Pei concetti fondamentali relativi agl'integrali riducibili, veggansi, ad esempio, le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908). Ved. in particolare a p. 340.

(2) E. PICARD, *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes*, etc., Bulletin de la Société math. de France, *11* (1883), p. 47; H. POINCARÉ, *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, Comptes rendus, *99* (1884), p. 853; *Sur les fonctions abéliennes*, American Journal, *8* (1886), p. 289.

(3) Nel trattato di A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903) pag. 493; e nelle mie *Lezioni* citate, q integrali indipendenti, di 1ª specie, di una curva C di genere p ($> q$) diconsi *riducibili al genere* q, quando, mediante una sostituzione razionale, essi possono mutarsi nei q integrali di 1ª specie di una curva di genere q. Poincaré invece adotta questa locuzione anche quando si sappia soltanto che i q integrali hanno $2q$ periodi ridotti. In generale ciò non porta l'esistenza su C di un'involuzione di genere q, di gruppi di punti, ma sibbene l'esistenza di un'involuzione *abeliana*, sulla varietà dei gruppi di q punti di C.

(4) M. DE FRANCHIS, *Un teorema sulle involuzioni irrazionali*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *36* (1913), p. 368. Noterò di passaggio che oltre alla via, del resto assai semplice, indicata dal De Franchis, per stabilire la citata proposizione, si può seguire quest'altra. È chiaro (formola di Zeuthen) che le involuzioni di genere $q > 1$, sopra una C di genere p, hanno l'ordine limitato. Ma poichè le corrispondenze di dati indici, sopra una curva, si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui (ved. il lemma geometrico

Darò qui un cenno della via seguìta e dei risultati ottenuti nel presente lavoro.

Per brevità un sistema lineare d'integrali riducibili, i cui periodi ridotti sieno in numero doppio a quello dell'integrali indipendenti contenuti nel sistema, si dirà un sistema *regolare*. Esso è necessariamente completo [5].

Se sulla curva C, di genere p, esistono due sistemi regolari d'integrali riducibili, si presenta spontanea la considerazione del loro sistema lineare « congiungente » K, e del loro sistema lineare « intersezione » H. Poggiandomi sulle ricerche di Castelnuovo intorno alle varietà di Picard [6] e sopra una disuguaglianza fra il numero degl'integrali indipendenti (di 1ª specie) di un sistema d'integrali riducibili ed il numero dei loro periodi ridotti [7], dimostro che i sistemi H, K sono regolari, come i due sistemi dati (n. 1).

Ciò posto, si rappresentino gli ∞^{p-1} integrali di 1ª specie di C [8], coi punti di uno spazio lineare S_{p-1}, sicchè i sistemi regolari d'integrali riducibili, abbiano per imagini certi spazî lineari di S_{p-1}. Dalla proposizione riferita, segue subito che gli spazi successivamente dedotti, mediante proiezioni e sezioni, a partire da un gruppo di spazî imagini di più sistemi regolari, rappresentano nuovi sistemi regolari.

Ne deriva un'immediata ed elegante dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, circa l'esistenza d'infiniti integrali ellittici sopra una curva di genere p, che possegga $\mu + 1$ integrali ellittici dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$) [9]. Nel caso $\mu = 3$, per esempio, sul piano rappresentativo del sistema che congiunge i 4 integrali ellittici dati, si hanno 4 punti, a tre a tre indipendenti, A_1, A_2, A_3, A_4, imagini di quei 4 integrali. Orbene, le intersezioni a due a

al n. 4 della mia Memoria, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica*, Math. Annalen, 74 (1913), [Memoria LVI, vol. II, p. 332; N.d.R.]); così ne segue, in forza di un noto teorema di Humbert–Castelnuovo, che le involuzioni di genere >1 sono esse pure in numero finito.

A proposito della mia Memoria citata dei Math. Annalen, colgo l'occasione per avvertire che negli enunciati dei nn. 19 e 20, relativi ad una corrispondenza T variabile colla curva generica di un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^2, sopra una superficie, regolare o irregolare, F, va aggiunto in modo esplicito che, qualora $|C|$ sia composto con una involuzione I_n, la corrispondenza T non deve *far parte* della corrispondenza simmetrica $S(n-1, n-1)$, generata da I sopra ogni C. Del resto la dimostrazione del n. 19 esclude in modo evidente questo caso, da che in essa si suppone che il luogo dei punti omologhi di un dato x delle T relative alle ∞^1 curve della rete $|C|$, che passan per x, sia una *curva*; mentre nel caso da escludersi, il luogo suddetto ridurrebbesi ad un gruppo di punti. I teoremi dei nn. 19, 20 valgono evidentemente, anche senza quest'esclusione esplicita, purchè si riferiscano a sistemi lineari *semplici* $|C|$, almeno ∞^3.

(5) Cfr. le mie *Lezioni*, p. 340.

(6) G. CASTELNUOVO, *Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5) *14* (1905), p. 593.

(7) Ved. le mie *Lezioni*, p. 338.

(8) Consideriamo come identici due integrali che differiscano per una costante, additiva o moltiplicativa.

(9) *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), p. 305; A. KRAZER (trattato citato), p. 489.

due delle rette congiungenti due degli A, o due dei nuovi punti che da essi via via deduconsi (rete di Möbius), rappresentano infiniti integrali ellittici contenuti nel sistema.

In generale si trova (restringendo leggermente la portata del teorema del n. 4) che se una curva C, di genere p, possiede $\mu + 1$ (≥ 3) sistemi regolari, a μ a μ indipendenti, d'integrali riducibili, tali che uno, A, di essi, di dimensione $q - 1$ (≥ 0), sia contenuto nel sistema che congiunge gli altri, la curva contiene in'infinità discontinua di sistemi analoghi ad A. Resta anche ben determinata la struttura di tale infinità, poichè si prova che quei sistemi possono coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$ (individuata da $\mu + 1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$). Va considerato in modo speciale soltanto il caso $\mu = 2$, perché allora il gruppo degli spazî rappresentativi dei tre dati sistemi, non è capace di definirne altri, come A, mediante operazioni *interne* di proiezione e sezione. Ma da $\mu = 2$ si risale agevolmente a $\mu = 3$, con un'opportuna operazione di *ampliamento* (n. 2) del sistema congiungente i tre dati. La rete di Möbius (di specie 1) coordinata alla totalità dei sistemi regolari ∞^{q-1} esistenti su C, è allora costituita dai punti d'una retta derivanti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Allorquando i $\mu + 1$ sistemi dati sieno della stessa dimensione $q - 1$ – e a questo caso ci si può sempre ridurre – gl'infiniti sistemi regolari che da essi derivano, costituiscono quella che chiamo una *configurazione normale di sistemi d'integrali riducibili*. Tale configurazione è studiata al n. 5 (Nota II) ove si determina anche il minimo continuo, cui appartengono tutti i suoi sistemi regolari.

Naturalmente questi risultati possoni riferirsi, non soltanto agl'integrali abeliani propriamente detti, ma anche agl'integrali semplici di prima specie d'una varietà. Basta considerare, in luogo d'una varietà di Jacobi, una varietà di Picard.

Il n. 7 (Nota II) è dedicato a stabilire l'esistenza effettiva di varietà (o curve) algebriche soddisfacenti ai teoremi sopra riferiti. E nel n. 8 (Nota II) espongo infine una dimostrazione analitica del teorema generale del n. 4.

1. *Sistemi congiungente e intersezione di due dati sistemi regolari. Sistemi complementari.* Sia V una varietà di Picard (o di Jacobi) a p dimensioni, la quale possegga due sistemi regolari A_1, A_2, contenenti rispettivamente q_1, q_2 integrali riducibili di prima specie, indipendenti.

Gl'integrali di A_1 sono allora costanti lungo le varietà *algebriche* W' a $p - q_1$ dimensioni di un sistema ∞^{q_1}, d'indice 1, appartenente a V (10),

(10) Che le W' sieno *algebriche* risulta da un teorema di Picard, contenuto nel lavoro citato. Viceversa Castelnuovo ha dimostrato che, se q_1 integrali semplici di 1ª specie di V si mantengono costanti lungo una curva o superficie o varietà algebrica, essi individuano un sistema regolare ∞^{q_1-1}. Ved. Nota citata, pag. 594.

e, similmente, le varieta W'', di livello costante degl'integrali di A_2, sono algebriche, a $p - q_2$ dimensioni, e formano un sistema ∞^{q_2}, pure d'indice 1.

Sulla varietà *algebrica* W a $d (\leq p)$ dimensioni, riempita dalle W'' che escono dai punti di una W' genericamente fissata, son costanti tutti gl'integrali eventualmente comuni ai due sistemi, giacchè essi lo sono tanto lungo le W' come lungo le W''.

Pel teorema di Castelnuovo, or ora citato a pie' di pagina, ne deriva che il sistema, evidentemente lineare, formato da tutti gli eventuali integrali comuni ai due sistemi A_1, A_2, è regolare. Dunque:

Il sistema intersezione di due dati sistemi regolari d'integrali riducibili, è regolare.

Passiamo a considerare il sistema congiungente dei due dati sistemi $A_1 . A_2$, cioè il minimo sistema lineare d'integrali semplici di 1ª specie di V, che li contiene entrambi.

Qualora si rappresenti il sistema lineare S degli ∞^{p-1} integrali di V, coi punti di uno spazio S, a $p - 1$ dimensioni, e s'indichino colle stesse lettere A_1, A_2 gli spazî a $q_1 - 1$ ed a $q_2 - 1$ dimensioni, imagini dei sistemi A_1, A_2, il sistema intersezione H ed il sistema congiungente K, verranno rappresentati rispettivamente dallo spazio intersezione H e dallo spazio congiungente K di A_1, A_2.

Sicchè le dimensioni $r - 1$ ed $s - 1$ di H, K saranno legate alle dimensioni di A_1, A_2 dalla relazione

$$r + s = q_1 + q_2 ,$$

e, se non esiste H, il sistema K avrà la dimensione $q_1 + q_2 - 1$.

Consideriamo anzitutto il caso in cui H manchi. Allora scrivendo i periodi di una combinazione lineare generica degl'integrali di A_1, A_2, cioè di un integrale generico di K, si vede subito che K è un sistema di $q_1 + q_2$ integrali indipendenti con *al più* $2(q_1 + q_2)$ periodi ridotti. Diciamo « al più », perché *a priori* potrebbe dubitarsi che questi periodi fossero ulteriormente riducibili.

Ma se si ricorda che il doppio del numero degl'integrali indipendenti (di 1ª specie) contenuti in un dato sistema lineare d'integrali riducibili, non può mai superare il numero dei periodi ridotti [11], si conclude che i periodi ridotti, ulteriormente irriducibili, degl'integrali di K, son proprio in numero di $2(q_1 + q_2)$, e quindi che K è regolare.

Prima di passare ad esaminare il caso in cui H esista, convien premettere la nozione di *sistema complementare* (regolare) di un dato sistema regolare.

Picard [12] e Poincaré [13] hanno dimostrato che se una varietà con p integrali semplici di 1ª specie, possiede q_1 integrali semplici di 1ª specie

(11) *Lezioni*, p. 338.

(12) Memoria cit. p. 43. Ivi trovasi il teorema cui si allude nel testo per le curve di genere 2.

(13) *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), p. 302. Ved. pure, G. CASTELNUOVO, *loc. cit.*, p. 598.

riducibili, a $2q_1$ periodi ridotti, essa possiede in conseguenza un sistema di $p - q_1$ integrali di 1ª specie con $2(p - q_1)$ periodi ridotti.

E di più i due sistemi (regolari) non hanno alcun integrale comune, sicchè sono rappresentati in S da due spazî duali, indipendenti. Due sistemi siffatti si chiameranno *complementari* l'uno dell'altro. Non è però detto che un sistema regolare individui il suo complementare (n. 4 Oss.); comunque ciò non pregiudica affatto le nostre ulteriori considerazioni.

Un sistema regolare M, di dimensione $d - 1$, il quale sia contenuto in un altro sistema regolare N, di dimensione $l - 1$ $(l > d)$, *ammette anche entro N un sistema complementare*, di dimensione $l - d - 1$, cioè un sistema regolare ∞^{l-d-1}, non avente con M alcun integrale comune. Esso non è altro che l'intersezione di N col complementare di M, entro al sistema totale S.

Ciò premesso, si esaurisce subito anche il caso in cui esista il sistema intersezione H dei due dati sistemi regolari A_1, A_2. Costruiscasi in A_1 un sistema B_1, di dimensione $q_1 - r - 1$, complementare di H: B_1 è indipendente da H e quindi anche da A_2. Ed è chiaro che il sistema K, congiungente A_1 ed A_2, coincide con quello che congiunge B_1 ed A_2. Dall'esame del caso precedente, segue pertanto che K è esso stesso un sistema regolare. E si conclude:

Anche il sistema congiungente di due dati sistemi regolari d'integrali riducibili, è regolare.

2. *Ampliamento di un sistema regolare.* Se la varietà picardiana V, di dimensione p, possiede un sistema regolare A, ∞^{q-1}, d'integrali riducibili, si può sempre costruire una picardiana W, di dimensione q, a cui *spettino* quegl'integrali, cioè tale che gl'integrali semplici di 1ª specie di W, abbiano gli stessi periodi degl'integrali appartenenti ad A. I punti di W sono le imagini delle ∞^q varietà tracciate su V, lungo cui sono costanti quegl'integrali ed il punto corrente su W è funzione razionale del punto corrente su V.

Posto ciò, consideriamo un'altra picardiana W', di dimensione q', e sia Φ la picardiana, di dimensione $q + q'$, che rappresenta la varietà delle coppie di punti di W, W'. La Φ contiene due sistemi regolari complementari, rispettivamente di ∞^{q-1} e $\infty^{q'-1}$ integrali riducibili: i primi hanno gli stessi periodi ridotti degl'integrali di W, ossia di A, e i secondi gli stessi periodi ridotti degl'integrali di W'.

Si è così costruito un sistema regolare più ampio B, $\infty^{q+q'-1}$, cui appartiene un sistema regolare *identico* al dato sistema $\infty^{q-1}A$. E quando parliamo di sistemi « identici » d'integrali riducibili, intendiamo alludere a sistemi i cui elementi (integrali) si possono riferire (omograficamente) per guisa che due integrali corrispondenti abbiano gli stessi periodi ridotti. Due varietà di Picard, di dimensione q, a cui spettino rispettivamente due dati sistemi regolari ∞^{q-1}, fra loro identici, sono birazionalmente equivalenti.

Diremo per ciò che *il sistema regolare B è un ampliamento del sistema regolare A*, ottenuto per *proiezione* dal sistema lineare degl'integrali di W'.

3. *Dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, relativo alle curve (o varietà) con infiniti integrali ellittici.* Dalle proposizioni del n. 1 discende che se, entro alla totalità S degli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di una varietà algebrica V, esistono più sistemi regolari d'integrali riducibili, *ogni sistema lineare dedotto da essi con operazioni interne di proiezione e di sezione, è un sistema regolare d'integrali riducibili.*

Supponiamo che V possegga $\mu+1$ integrali ellittici $u_1, u_2, \cdots, u_{\mu+1}$, linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$). Senza introdurre un'effettiva restrizione, si può ritenere che fra i suddetti integrali non se ne trovino mai μ dipendenti fra loro.

Il sistema regolare congiungente quegl'integrali, ha perciò la dimensione $\mu - 1$, e viene rappresentato da uno spazio lineare K, in cui sono segnati $\mu+1$ punti $u_1, u_2, \cdots, u_{\mu+1}$, a μ a μ indipendenti, imagini dei dati integrali. A partire allora da quei $\mu+1$ punti, con operazioni interne di proiezione e di sezione, se ne possono ottenere infiniti altri (com'è ben noto, si ottengono così tutti e soli i punti « razionali » rispetto al gruppo dei $\mu+1$ dati, i quali si assumano come vertici della piramide fondamentale delle coordinate proiettive). Si conclude pertanto col teorema di Poincaré:

Se una varietà (o curva) algebrica con p integrali semplici di 1ª specie, contiene $\mu+1$ integrali ellittici linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$) ne contiene infiniti altri.

Nel caso $\mu = 3$, come già abbiamo detto nell'introduzione, gl'infiniti integrali ellittici vengono rappresentati dai vertici della rete di Möbius che, sul piano rappresentativo K, è definita dai punti, a 3 a 3 indipendenti, imagini dei 4 integrali ellittici dati. Le rette della rete corrispondono a sistemi regolari di 2 integrali riducibili con 4 periodi. Se a è una retta della rete, il corrispondente sistema ∞^1 contiene alla sua volta infiniti integrali ellittici, rappresentati dai vertici della rete che cadono su a. Tali vertici, come si sa, s'ottengono tutti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Nel caso di μ qualunque, potremo similmente dire che gl'infiniti integrali ellittici vengono coordinati ai vertici di *una rete di Möbius di specie $\mu-1$, avente come base un gruppo di $\mu+1$ punti a μ a μ indipendenti.* Le rette, i piani, ..., gli $S_{\mu-1}$ della rete, rappresentano rispettivamente sistemi regolari di 2 integrali con 4 periodi, di 3 integrali con 6 periodi, ..., di $\mu-1$ integrali con $2(\mu-1)$ periodi; e su ognuno degli spazî subordinati della rete, il quale abbia la dimensione k ($k = 1, 2, \cdots, \mu-2$), resta subordinata una rete di Möbius di specie k, i cui elementi rappresentano sistemi regolari d'integrali riducibili. In particolare sopra una retta della rete si hanno, come prima, infiniti punti imagini d'integrali ellittici, i quali s'ottengono tutti da 3 di essi, mediante costruzioni di quarti armonici. Una tal totalità di punti si chiamerà brevemente *una rete di Möbius di specie 1*, avente come base una terna di punti (allineati).

Osservazione. – La dimostrazione esposta cade in difetto nel caso estremo $\mu = 2$, perché allora lo spazio K riducesi ad una retta, su cui sono segnati

3 punti distinti u_1, u_2, u_3. E da questi non se ne possono dedurre altri, con operazioni interne di proiezione e di sezione. Tuttavia proveremo che anche in tal caso la varietà V possiede infiniti integrali ellittici, rappresentati dai punti della rete di Möbius di specie 1, definita da (u_1, u_2, u_3).

A tale scopo si operi l'ampliamento del sistema K, mediante proiezione di questo sistema da un integrale ellittico u_4 identico ad u_3 (n. 2), talchè la varietà Φ del n. prec., verrà in tal caso ad esser la varietà delle terne dei punti tolti da tre curve ellittiche $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, alle quali spettino rispettivamente tre integrali identici ad u_1, u_2, u_3. Il sistema ampliato ∞^2, B, contiene un sistema (identico a) K e un altro sistema ∞^1, L, congiungente u_3 ed u_4. Ed è evidente che ad L appartengono infiniti integrali ellittici, ottenibili tutti combinando linearmente u_3, u_4, mediante coefficienti interi (o razionali).

Se pertanto sul piano B, imagine di B, si segnano le rette K, L (le quali si incontrano in u_3), uno, u_5, degl'infiniti punti di L (diversi da u_3, u_4), che rappresentano integrali ellittici, costituirà insieme ad u_1, u_2, u_4 una quaderna d'integrali ellittici, e tre a tre indipendenti. Saremo perciò ricondotti al caso $\mu = 3$, e si concluderà che la retta K, appartenente alla rete definita da (u_1, u_2, u_4, u_5), contiene infiniti vertici della rete stessa, formanti una rete di Möbius di specie 1; il che dimostra appunto quanto abbiamo asserito.

NOTA II: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 23_1 (1914), pp. 641–651 (**).

4. *Dimostrazione geometrica del teorema generale.* Le condizioni più generali sotto cui una varietà algebrica può possedere un'infinità (discontinua) di sistemi regolari d'integrali riducibili, sono espresse dal seguente teorema:

I. *Quando sopra una varietà (o curva) algebrica possedente p integrali semplici di 1ª specie, esistono μ (≥ 2) sistemi regolari indipendenti di $q_1, q_2, \cdots, q_\mu$ integrali riducibili (ove $q_1 + \cdots + q_\mu \leq p$), ed un altro sistema regolare ∞^{q-1}, indipendente da ciascuno di essi, ma contenuto nel loro sistema congiungente, la varietà possiede un'infinità discontinua di sistemi regolari di q integrali riducibili.*

Dicendo che i μ sistemi dati, $A_1, A_2, \cdots, A_\mu$, sono *indipendenti*, intendiamo che non esista alcun legame lineare (a coefficienti non tutti nulli) fra i loro integrali, cioè che il loro sistema congiungente (regolare) K, abbia la dimensione $\sum_{i=1}^{\mu} q_i - 1$. L'ulteriore sistema regolare ∞^{q-1}, che si suppone contenuto in K, verrà indicato con A.

(**) Seduta del 3 maggio 1914.

Ricorrendo, al solito, alla rappresentazione degli integrali della data varietà, coi punti dello spazio S, a $p-1$ dimensioni, avremo ivi gli spazi $A, A_1, \cdots, A_\mu$, K imagini dei sistemi omonimi. Nelle ipotesi poste, gli spazî $A_1, A_2, \cdots, A_\mu$ sono tra loro indipendenti, ed A è indipendente da ciascuno di essi.

Indicato con Σ_h lo spazio, a $\sum q_i - q_h - 1$ dimensioni, congiungente i $\mu - 1$ sistemi $A_1, \cdots, A_{h-1}, A_{h+1}, \cdots, A_\mu$, si prova facilmente, con elementari considerazioni iperspaziali (14), che gli spazî $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\mu$ non hanno punti comuni. È questa un'osservazione che ci gioverà al n. 8.

Dico ora che per dimostrare il teorema I, basta limitarsi a considerare il caso in cui i $\mu + 1$ sistemi $A, A_1, \cdots, A_\mu$, sono a μ a μ indipendenti. Supponiamo, perciò, che il teorema sia già stato dimostrato sotto questa condizione, e si consideri il caso in cui la condizione stessa non è soddisfatta. Allora lo spazio A s'appoggerà a qualcuno degli spazî $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\mu$. Si appoggi, per esempio, a Σ_μ, e sia A' lo spazio a $q' - 1$ ($q' \leq q$) dimensioni, intersezione di A e di Σ_μ. Avremo entro al sistema regolare Σ_μ, congiungente dei sistemi indipendenti $A_1, A_2, \cdots, A_{\mu-1}$, un sistema regolare A', indipendente da ciascuno di essi. Se i μ sistemi $A', A_1, \cdots, A_{\mu-1}$ sono a $\mu - 1$ a $\mu - 1$ indipendenti, si potrà applicare il teorema I; se no, si proseguirà similmente, passando da μ sistemi a $\mu - 1$, e così via.

Si perverrà infine ad un sistema regolare $A^{(j)}$, di dimensione $q^{(j)} - 1$, contenuto in A, e a cui sarà applicabile il teorema I, per modo che $A^{(j)}$ apparterrà ad un'infinità discontinua di sistemi analoghi.

Detto $B^{(j)}$ un complementare di $A^{(j)}$ in A, i sistemi che congiungono $B^{(j)}$ con quelli della suddetta infinità discontinua, saranno altrettanti sistemi regolari di dimensione ∞^{q-1}. E il teorema I risulterà pertanto stabilito, anche a prescindere dalla restrizione posta.

Esaminiamo dunque il caso in cui gli spazî $A, A_1, \cdots, A_\mu$ sono a μ a μ indipendenti. Da ogni punto di A esce allora (15) uno, ed un solo spazio, $S_{\mu-1}$, appoggiato ulteriormente in un punto ad $A_1, A_2, \cdots, A_\mu$. Fissato uno, C, di questi $\infty^{q-1} S_{\mu-1}$, su esso, $A, A_1, \cdots, A_\mu$ segnano rispettivamente $\mu + 1$ punti indipendenti $a, a_1, \cdots, a_\mu$, i quali possono assumersi come base di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$; ed è chiaro che gli spazî dedotti da $A, A_1, \cdots, A_\mu$ con operazioni interne di proiezione e di sezione, restano biunivocamente coordinati alle loro traccie su C, cioè agli spazî $S_0, S_1, \cdots, S_{\mu-2}$, appartenenti alla suddetta rete. Cosicchè quegli spazî risultano in numero infinito come queste traccie. In particolare, agl'infiniti vertici della rete restano coordinati infiniti S_{q-1}, rappresentanti altrettanti sistemi regolari.

(14) Cfr., per esempio, E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, ecc. (Pisa, Spoerri, 1907), pp. 12–13. Qui veramente, si considera lo spazio comune alle proiezioni di $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_\mu$ da un generico punto di K. Ma, nel caso nostro, vale lo stesso ragionamento.

(15) Ved. E. BERTINI, *loc. cit.*

Resta così dimostrato il teorema I, e *si vede inoltre come gl'infiniti sistemi regolari* ∞^{q-1}, *deducibili dai* $\mu + 1$ *sistemi dati, possan coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie* $\mu - 1$.

Ciò dà l'esatta struttura dell'infinità discontinua formata dai sistemi regolari ∞^{q-1}, appartenenti alla nostra varietà: gli elementi di quell'infinità sono infatti assimilabili ai *punti razionali* di uno spazio $S_{\mu-1}$.

L'unico caso che sfugge alla dimostrazione precedente, è quello $\mu = 2$, giacchè allora C è una retta. Ma in tal caso si procederà come nell'osservazione alla fine del n. 3. Si comincerà cioè coll'ampliare il sistema K, facendone la proiezione da un sistema B d'integrali riducibili, identico, per esempio, ad A; e si osserverà che il sistema L, ∞^{2q-1}, congiungente A, B, contiene infiniti sistemi analoghi ad A, B, ognuno dei quali si ottiene combinando linearmente, con due prefissati coefficienti intieri, le coppie d'integrali corrispondenti di A, B. Si può pertanto assumere in L un sistema A' – indipendente da A, B – per guisa che i quattro sistemi A', B, A_1, A_2 siano a tre a tre indipendenti. Si ricade allora nel caso $\mu = 3$, e si conclude che nel sistema K esistono infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, biunivocamente coordinati ai vertici di una rete di Möbius di specie 1.

Osservazione. – Se la varietà V possiede almeno due sistemi regolari indipendenti A, B d'integrali riducibili, tali che B sia indipendente anche da un complementare C di A, poichè A, C sono pur essi indipendenti, e, d'altra parte, al loro sistema congiungente S appartiene B, applicando il teorema precedente ($\mu = 2$), si ha che:

Una varietà algebrica, la quale possegga due sistemi regolari indipendenti A, B *d'integrali riducibili, tali che l'uno,* B, *di essi, sia indipendente anche dal sistema complementare di* A, *contiene in conseguenza tutta un'infinità discontinua di sistemi regolari, della stessa dimensione di* A *o di* B.

Da ciò segue che *se il complementare di un dato sistema regolare* A, *non è individuato, la varietà contiene infiniti sistemi regolari, della stessa dimensione di* A. Invero, se B, C son due diversi complementari di A, e se essi son tra loro indipendenti, vale quanto precede. Se invece B, C hanno in comune un sistema (regolare) D, il complementare E di D, per esempio, entro C, è indipendente da A e da B, e quindi si ricade ancora nel caso precedente.

5. *Configurazioni normali di sistemi d'integrali riducibili.* La costruzione geometrica esposta nel n. 4, si può determinare ulteriormente, qualora si supponga che gli spazî $A, A_1, \cdots, A_\mu$, a μ a μ indipendenti, abbiano la stessa dimensione $q - 1$.

Ma prima di occuparci di ciò, mostriamo come a questo caso ci si possa sempre ridurre, quando V possegga infiniti sistemi regolari d'integrali riducibili.

È invero ben chiaro, anzitutto, che, in tale ipotesi, esisteranno sempre $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) sistemi regolari $A, A_1, \cdots, A_\mu$ nelle condizioni dell'enunciato

del teorema I. Si può inoltre ammettere (n. 4) che gli spazî $A, A_1, \cdots, A_\mu$ siano a μ a μ indipendenti, e, quindi (poichè il loro spazio congiungente K ha la dimensione $\sum q_i - 1$), che $q \leq q_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$.

Poniamo precisamente $q \leq q_1 \leq q_2 \cdots \leq q_\mu$. Allora lo spazio Σ, congiungente $A, A_1, \cdots, A_{\mu-1}$, incontra A_μ in uno spazio A'_μ di dimensione $q - 1$, per modo che entro a Σ si hanno $\mu + 1$ sistemi $A, A'_\mu, A_1, \cdots, A_{\mu-1}$, di dimensioni rispettive $q - 1$, $q - 1$, $q_1 - 1, \cdots, q_{\mu-1} - 1$, a μ a μ indipendenti. Lo spazio Σ' congiungente $A, A'_\mu, \cdots, A_{\mu-2}$, incontra similmente $A_{\mu-1}$ secondo uno spazio $A'_{\mu-1}$, di dimensione $q - 1$; ecc. *Così proseguendo, si ottengono, entro uno spazio a* $\mu q - 1$ *dimensioni,* $\mu + 1$ *spazî a* $q - 1$ *dimensioni, che indicheremo ancora con* $A, A_1, \cdots, A_\mu$, *a* μ *a* μ *indipendenti, e rappresentanti altrettanti sistemi regolari d'integrali riducibili.*

Gl'infiniti sistemi regolari dedotti da $A, A_1, \cdots, A_\mu$, con operazioni interne di proiezione e di sezione, si diranno costituire una *configurazione normale di sistemi* ∞^{q-1} *d'integrali riducibili.*

6. *Il minimo continuo cui appartengono gl'infiniti sistemi di una configurazione normale.* Nello spazio K, di dimensione $\mu q - 1$, sieno $A, A_1, \cdots, A_\mu$ i dati spazî a $q - 1$ dimensioni, a μ a μ indipendenti, imagini di altrettanti sistemi regolari.

Vi sono ∞^{q-1} spazî C, a $\mu - 1$ dimensioni, i quali s'appoggiano (in un punto) a ciascuno degli A. Essi riempiono una varietà, evidentemente razionale, M, a $\mu + q - 2$ dimensioni, di cui vogliamo indicare rapidamente le più importanti proprietà, che si stabiliscono con elementari considerazioni di geometria proiettiva iperspaziale.

Due spazî A sono punteggiati omograficamente dagli spazî C, così che *la varietà* M *può anche definirsi come il luogo degli spazî congiungenti le* μ*–ple di punti omologhi tolti da* μ *spazî* S_{q-1} *omografici.* Ne deriva che q generici spazî C sono indipendenti, e che ogni S_{q-1}, il quale incontri $q + 1$ spazî C generici (vi sono $\infty^{\mu-1}$ spazî S_{q-1} siffatti), incontra ogni altro C, cioè appartiene ad M.

La varietà M *viene pertanto a contenere due schiere* H_a, H_c, *rispettivamente* $\infty^{\mu-1}, \infty^{q-1}$ *di spazî* $S_{q-1}, S_{\mu-1}$: per ogni punto di M passa uno spazio dell'una schiera e uno spazio dell'altra; μ o, rispettivamente, q spazî generici della 1ª o della 2ª schiera sono tra loro indipendenti; due spazî di una schiera sono punteggiati omograficamente da quelli dell'altra. Alla schiera H_x appartengono evidentemente gli spazî A dati.

Indichiamo, al solito, con Σ_i $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ lo spazio che congiunge $A_1, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_\mu$. Per Σ_i passa un sistema lineare L_i, ∞^{q-1} di spazî $S_{(\mu-1)q}$ e, preso uno spazio di ciascuno degli L, resta individuato, come intersezione dei μ spazî scelti, un $S_{\mu-1}$, il quale appoggiasi ad $A_1, A_2, \cdots, A_\mu$ [16]. Ne deriva che *gli spazî generatori della schiera* H_c *possono tutti ottenersi come*

(16) E. BERTINI, *loc. cit.*, pp. 12–13.

intersezioni di μ $S_{(\mu-1)q}$ omologhi in una prospettività, che nasce tra i sistemi L, prendendo per corrispondenti due spazî uscenti da un medesimo punto di A. *In maniera analoga si potrebbero ottenere gli spazî della schiera H_a*, a partire da $q+1$ spazî generatori di H_c.

Se indichiamo con

$$v_1 f_1^{(i)} + \cdots + v_q f_q^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \mu)$$

le equazioni dei sistemi lineari di iperpiani passanti per $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\mu$, e supponiamo le f scelte in modo che nella prospettività d'asse A sieno omologhi μ iperpiani corrispondenti agli stessi valori delle v, la M viene rappresentata dall'annullare i minori di secondo ordine della matrice delle f, ed ha quindi [17] l'ordine $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.

È chiaro che uno spazio S_{q-1}, il quale sia deducibile con operazioni interne di proiezione e di sezione (in particolare, mediante costruzioni di quarti armonici), dagli spazî $A, A_1, \cdots, A_\mu$, appoggiasi in un punto a ciascuno dei C e quindi giace nella schiera H_a. Gl'infiniti spazî generatori di H_a, che si ottengono con tali operazioni, si può dire che formano una rete R di Möbius, la quale ha come « base » $\mu+1$ spazî S_{q-1} a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu q-1}$ (mentre quella considerata al n. 3, aveva come base un gruppo di $\mu+1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$).

Ogni varietà *continua*, che, entro allo spazio ambiente S_{p-1}, contenga tutti gli S_{q-1} di R, dovrà contenere anche gli *spazî-limiti* di quelli, cioè *tutti* gli spazî generatori di H_a.

Si conclude pertanto:

II. *Quando una varietà (o curva) algebrica V contiene $\mu+1$ sistemi regolari $A, A_1, \cdots, A_\mu$ $(\mu \geq 2)$, ∞^{q-1}, a μ a μ indipendenti, ma congiunti da un sistema K, $\infty^{\mu q-1}$, d'integrali riducibili di 1ª specie, essa contiene in conseguenza infiniti altri sistemi regolari ∞^{q-1}, i quali costituiscono la rete di Möbius, di specie $\mu-1$, che ha come base $A, A_1, \cdots, A_\mu$. Il minimo continuo contenente quest'infiniti sistemi, entro alla totalità degl'integrali semplici di 1ª specie di V, è una varietà razionale M, di dimensione $\mu+q-2$ e di ordine $\binom{\mu+q-2}{q-1}$.*

Ogni varietà algebrica con infiniti sistemi d'integrali riducibili, possiede, per convenienti valori degl'interi μ, q, una siffatta configurazione di sistemi regolari.

7. *Esistenza effettiva di varietà algebriche soddisfacenti alle ipotesi dei precedenti teoremi.* I teoremi fin qui dimostrati lasciano in sospeso la questione d'esistenza di varietà, godenti delle proprietà indicate.

(17) Cfr. C. SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, (5) 9 (1900), p. 253.

Fissato il numero p degl'integrali semplici, indipendenti di 1ª specie, d'una varietà algebrica – cioè la dimensione della relativa varietà di Picard – e scelti $\mu+1$ interi positivi, non nulli, $q, q_1, \cdots, q_\mu$ $(q \leq q_1 \leq q_\mu)$, tali che $q_1 + \cdots + q_\mu \leq p$, si può costruire una varietà di Picard V_p, per la quale sieno soddisfatte le ipotesi del teorema I, e per conseguenza anche quelle del II?

Veramente, al n. 4 non si supponeva che q fosse il più piccolo dei $\mu+1$ interi fissati: ma, come abbiamo avvertito al n. 5, tale condizione, in realtà, non è restrittiva. La questione di ricercare se possa esistere una V_p contenente $\mu+1$ sistemi regolari, rispettivamente di $q, q_1, \cdots, q_\mu$, integrali riducibili, a μ a μ indipendenti fra loro, ma congiunti da un sistema di dimensione $\sum q_i - 1$, in sostanza riducesi a esaminare se le equazioni lineari omogenee a coefficienti interi, che, in virtù delle ipotesi poste, vengono a legare i periodi normali degl'integrali di V_p, sieno compatibili colle note disuguaglianze esprimenti appunto le condizioni di esistenza di V_p (18).

Noi verificheremo *a priori* tale compatibilità, mostrando come si possa costruire un particolare modello di V_p, soddisfacente alle suddette ipotesi.

A tal uopo si consideri anzitutto la varietà picardiana W, di dimensione μq, i cui elementi sono la μ–ple di punti tolti rispettivamente da μ varietà picardiane di dimensione q, *birazionalmente identiche* fra loro, ma del resto, affatto qualunque. A W appartengono μ sistemi regolari $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$:

$$u'_1, \cdots, u'_q \; ; \; u''_1, \cdots, u''_q \; ; \cdots ; \; u^{(\mu)}_1, \cdots, u^{(\mu)}_q ,$$

identici fra loro (n. 2). Si verifica subito che il sistema D, individuato dagli integrali.

$$v_1 = u'_1 + \cdots + u^{(\mu)}_1 , \cdots , \; v_q = u'_q + \cdots + u^{(\mu)}_q$$

ha la dimensione $q-1$, è regolare ed identico ai D_i. Inoltre è chiaro che $D, D_1, \cdots, D_\mu$ sono a μ a μ indipendenti. La W è insomma nelle condizioni contemplate dal teorema II, e contiene pertanto una configurazione normale di sistemi regolari ∞^{q-1}.

Ciò posto, fissiamo $\mu+1$ picardiane $V^{(0)}, V^{(1)}, \cdots, V^{(\mu)}$, di dimensioni rispettive $p - \sum q_i , q_1 - q , \cdots , q_\mu - q$; e consideriamo la picardiana Φ delle $(\mu+2)$–ple di punti tolti da esse e da W. Avremo in Φ $\mu+1$ sistemi regolari $D, D_1, \cdots, D_\mu$, imagini dei sistemi omonimi di W, e altri $\mu+1$ sistemi regolari $C, C_1, \cdots, C_\mu$ imagini dei sistemi d'integrali appartenenti rispettivamente a $V^{(0)}, V^{(1)}, \cdots, V^{(\mu)}$. Indichiamo con $A_1, \cdots, A_\mu$ i sistemi congiungenti rispettivamente di $C_1, D_1 ; \cdots ; C_\mu, D_\mu$. Allora i $\mu+1$ sistemi $A(=D), A_1, \cdots, A_\mu$ saranno a μ a μ indipendenti, ed il loro sistema congiungente, il cui complementare è C, avrà la dimensione $\sum q_i - 1$. La Φ soddisfa pertanto alle ipotesi del teorema I. Si conclude che *se* $q, q_1, \cdots, q_\mu$

(18) Ved. per esempio A. KRAZER, *op. cit.*, p. 17.

sono $\mu + 1$ *interi positivi, non nulli* $(q \leq q_1 \leq \cdots \leq q_\mu)$, *soddisfacenti alla disuguaglianza* $q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu \leq p$, *esiste sempre una varietà algebrica possedente* p (*e soltanto* p) *integrali semplici di* 1ª *specie, per la quale si verificano tutte le condizioni del teorema I.*

È superfluo di avvertire che questa conclusione non è senz'altro applicabile alle *curve* di genere $p > 3$, perché i periodi normali dei loro integrali di 1ª specie sono legati da $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relazioni, delle quali non si può *a priori* affermare la compatibilità colle condizioni suddette. È però certo che, una volta scelti gl'interi $q, q_1, \cdots, q_\mu$, si può sempre costruire una curva di genere $\pi\ (\geq p)$, abbastanza alto, soddisfacente al teorema I. Basterà all'uopo considerare una curva generica tracciata sopra una varietà con p integrali semplici di 1ª specie, che soddisfaccia al teorema suddetto.

Per le superficie (o varietà algebriche superiori) non havvi invece alcuna limitazione, perché, come hanno dimostrato Castelnuovo-Enriques [19], i periodi normali degl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie (o varietà) possono scegliersi del tutto ad arbitrio, compatibilmente colle già ricordate disuguaglianze.

Si può in conseguenza affermare per esempio che:

Dati ad arbitrio gl'interi positivi p, μ $(\mu \leq p)$, *esiste sempre una superficie algebrica* F, *d'irregolarità* p, *contenente un'infinità discontinua di fasci ellittici di curve, tale che gli elementi* (*fasci*) *di quest'infinità possano rappresentarsi biunivocamente coi punti razionali di uno spazio a* $\mu - 1$ *dimensioni.*

In particolare, *nel caso* $\mu = p$, *su* F *esistono infiniti integrali ellittici infinitamente vicini ad ogni integrale semplice di* 1ª *specie della superficie.*

8. *Dimostrazione analitica del teorema I.* Poniamoci ora nuovamente nelle ipotesi del teorema I, e conserviamo le notazioni del n. 4.

Siano $u_1^{(i)}, \cdots, u_{q_i}^{(i)}$ q_i integrali indipendenti di A_i $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$; $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2p}$ $2p$ cicli lineari primitivi della data varietà V, ed $\omega_{l1}^{(i)}, \cdots, \omega_{l\,2q_i}^{(i)}$ $(l = 1, 2, \cdots, q_i)$ i periodi ridotti di $u_l^{(i)}$, talchè il periodo di $u_l^{(i)}$ al ciclo σ_h $(h = 1, 2, \cdots, 2p)$ si potrà scrivere sotto la forma $\sum_{s=1}^{q_i} m_{hs}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$, ove le m sono interi non tutti nulli, *indipendenti, per un dato* i, *dall'indice* l. Allora l'integrale generico

$$u = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{q_i} \lambda_l^{(i)} u_l^{(i)} \tag{1}$$

di K, avrà lungo σ_h il periodo

$$\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{2q_i} m_{hs}^{(i)} \sum_{l=1}^{q_i} \lambda_l^{(i)} \omega_{ls}^{(i)},$$

(19) *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions,* Annales scientifiques de l'École normale supérieure de Paris, (3) *23* (1906), pp. 339-366.

sicchè i suoi $2(q_1 + \cdots + q_\mu)$ periodi ridotti, ulteriormente irriducibili (n. 1), saranno $\sum_{l=1}^{q_i} \lambda_l^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$ $(s = 1, 2, \cdots, 2q_i;\ i = 1, 2, \cdots, \mu)$; e la matrice della sostituzione lineare esprimente i $2p$ periodi fondamentali pei periodi ridotti, sarà:

$$(2) \qquad \left\| m'_{h1}, m'_{h2}, \cdots, m'_{h\cdot 2q_1}, \cdots, m^{(\mu)}_{h1}, m^{(\mu)}_{h2}, \cdots, m^{(\mu)}_{h\cdot 2q_\mu} \right\| \quad (h = 1, 2, \cdots, 2p).$$

Questa matrice è diversa da zero, cioè non sono nulli tutti i suoi minori d'ordine $2(q_1 + \cdots + q_\mu)$, perché altrimenti il numero dei periodi degl'integrali di K si ridurrebbe ulteriormente.

Suppongasi ora che al sistema K appartenga un altro sistema regolare A, ∞^{q-1}, il quale sia indipendente da $A_1, A_2, \cdots, A_\mu$. Sieno $\lambda_{lr}^{(i)}$ $(r = 1, 2, \cdots, q)$ i valori che vanno attribuiti alle $\lambda_l^{(i)}$ nella (1), per ottenere q integrali indipendenti di A e $\theta_{r1}, \theta_{r2}, \cdots, \theta_{r,2q}$ i periodi ridotti dell'integrale r-esimo $(r = 1, 2, \cdots, q)$. Sussisteranno allora le relazioni

$$(3) \qquad \sum_i \sum_s m_{hs}^{(i)} \sum_l \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2q} n_{hj} \theta_{rj}, \quad (r = 1, \cdots, q;\ h = 1, 2, \cdots, 2p),$$

le n essendo interi non tutti nulli, indipendenti dall'indice r. Considerando queste relazioni, per un r fissato, come equazioni lineari nelle $2(q_1 + \cdots + q_\mu)$ quantità $\sum_l \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$, poichè esse son soddisfatte per valori non tutti nulli di queste quantità (chè altrimenti l'r-esimo integrale di A si ridurrebbe ad una costante, in quanto avrebbe nulli tutti i suoi periodi ridotti), la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti delle suddette equazioni, dovrà essere nulla.

Se ora si tien conto che fra le θ_{rj} non può sussistere alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi (indipendenti dall'indice r), perché altrimenti gl'integrali di A avrebbero meno di $2q$ periodi ridotti, si conclude che è nulla la matrice

$$(4) \qquad \left\| m'_h, m'_{h2}, \cdots, m'_{h\cdot 2q_1}, \cdots, m^{(\mu)}_{h1}, \cdots, m^{(\mu)}_{h\cdot 2q_\mu}, n_{hj} \right\| \quad (h = 1, 2, \cdots, 2p),$$

per qualunque indice j $(j = 1, 2, \cdots, 2q)$.

Ciò posto, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu$, μ *interi arbitrarî tutti diversi da zero*, e con δ il loro minimo comune multiplo. Le (3) possono anche scriversi sotto la forma

$$(5) \qquad \sum_i \sum_s \overline{m}_{hs}^{(i)} \sum_l \alpha_i \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)} = \sum \overline{n}_{hj} \theta_{rj},$$

ove si è posto

$$\overline{m}_{hs}^{(i)} = \frac{m_{hs}^{(i)} \delta}{\alpha_i}, \qquad \overline{n}_{hj} = n_{hj} \delta.$$

Nelle (5), i determinanti d'ordine $2(q_1 + \cdots + q_\mu)$ estratti dalla matrice dei coefficienti $\overline{m}$, uguagliano evidentemente i corrispondenti determinanti della matrice (2), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta = \dfrac{\delta^{2(q_1 + \cdots + q_\mu)}}{\alpha_1^{2q_1} \alpha_2^{2q_2} \cdots \alpha_\mu^{2q_\mu}}$;

e quindi anche la matrice degl'interi $\overline{m}$ è diversa da zero. Similmente, i determinanti d'ordine $2(q_1+\cdots+q_\mu)+1$ estratti dalla matrice delle $\overline{m}$ e delle $\overline{n}$ (per un fissato j), uguagliano i determinanti corrispondenti estratti dalle (4), moltiplicati per l'intero non nullo $\beta\delta$; laonde la matrice delle $\overline{m}$, $\overline{n}$ è nulla, come la (4).

Ne segue che dalle (5), per r fissato, si possono ricavare le $2(q_1+\cdots+q_\mu)$ quantità $\sum_l \alpha_i \lambda_{lr}^{(i)} \omega_{ls}^{(i)}$ come combinazioni lineari *a coefficienti razionali indipendenti dall'indice* r, delle θ_{rj}. Ponendo $r = 1, 2, \cdots, q$, si hanno pertanto q integrali $v_r = \sum_i \sum_l \alpha_i \lambda_{lr}^{(i)} u_l^{(i)}$ coi $2q$ periodi ridotti – ma non generalmente primitivi – θ. Affinchè si possa però affermare che il sistema B individuato dagl'integrali v_r, è regolare, occorre provare che i q integrali stessi sono indipendenti, giacchè allora, e solo allora, ne seguirà che i $2q$ periodi θ sono ulteriormente irriducibili.

Non essendovi alcun legame lineare fra gl'integrali $u_l^{(i)}$, se vi fosse un legame lineare fra gl'integrali v_r, sussisterebbero, per valori non tutti nulli delle ν, le relazioni lineari

$$\sum_{r=1}^{q} \nu_r \lambda_{lr}^{(i)} = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots, q_i\,;\ i = 1, 2, \cdots, \mu),$$

ed allora sarebbero dipendenti anche gl'integrali scelti entro A. Pertanto il sistema B è regolare e ∞^{q-1}, qualunque sieno gl'interi non nulli $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu$.

Ma per poter da ciò dedurre che la varietà possiede infiniti sistemi regolari ∞^{q-1}, occorre provare che a due gruppi generici di valori delle α – e sieno $(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_\mu')$; $(\alpha_1'', \alpha_2'', \cdots, \alpha_\mu'')$ – corrispondono due sistemi regolari distinti B', B''.

Si ammetta, se è possibile, che B', B'' coincidano. Allora la matrice che ha per orizzontale r^{esima} $(r = 1, \cdots, q)$

$$(6) \qquad \alpha_1' \lambda_{1r}', \alpha_1' \lambda_{2r}', \cdots, \alpha_1' \lambda_{q_1 r}', \cdots, \alpha_\mu' \lambda_{1r}^{(\mu)}, \alpha_\mu' \lambda_{2r}^{(\mu)}, \cdots, \alpha_\mu' \lambda_{q_\mu r}^{(\mu)},$$

e per orizzontale $(q+1)^{esima}$

$$(7) \qquad \alpha_1'' \lambda_{1s}', \alpha_1'' \lambda_{2s}', \cdots, \alpha_1'' \lambda_{q_1 s}', \cdots, \alpha_\mu'' \lambda_{1s}^{(\mu)}, \alpha_\mu'' \lambda_{2s}^{(\mu)}, \cdots, \alpha_\mu'' \lambda_{q_\mu s}^{(\mu)},$$

ove s è un intero fissato nella successione $1, 2, \cdots, q$, dovrà esser nulla, giacchè il suo annullarsi esprime appunto che l'integrale di B'', corrispondente ai valori (7) dei parametri, è contenuto in B'. Sottraendo dall'orizzontale (7) la s^{esima} delle (6) moltiplicata per α_i''/α_i' (ove i è fissato), la nuova matrice, pure nulla, che così si ottiene, viene ad esprimere, col suo annullarsi, che B' ha un integrale comune col sistema Σ_i, definito al n. 4. Questo integrale comune corrisponde ai valori

$$(8) \qquad \frac{\alpha_1'' \alpha_i' - \alpha_i'' \alpha_1'}{\alpha_i'} \lambda_{1s}', \cdots, \frac{\alpha_1'' \alpha_i' - \alpha_i'' \alpha_1'}{\alpha_i'} \lambda_{q_1 s}', \cdots,$$

$$0, \cdots, 0, \cdots, \frac{\alpha_\mu'' \alpha_i' - \alpha_i'' \alpha_\mu'}{\alpha_i'} \lambda_{1s}^{(\mu)}, \cdots, \frac{\alpha_\mu'' \alpha_i' - \alpha_i'' \alpha_\mu'}{\alpha_i'} \lambda_{q_\mu s}^{(\mu)}$$

dei parametri. Facendo $s = 1, 2, \cdots, q$, si ottengono così q integrali comuni a B' ed a Σ_i, ed è facile vedere che sono integrali indipendenti. Infatti, qualora essi fossero dipendenti, sarebbe nulla la matrice di cui (8) è la orizzontale s^{esima} $(s = 1, \cdots, q)$, la qual matrice, previa la soppressione dei fattori *non nulli* (per la genericità delle α', α'') comuni alle sue singole verticali, riducesi a quella che ha per orizzontale s^{esima}

$$\lambda'_{1s}, \cdots, \lambda'_{q_1 s}, \cdots, 0, \cdots, 0, \cdots, \lambda^{(\mu)}_{1s}, \cdots, \lambda^{(\mu)}_{q_\mu s}.$$

L'annullarsi di questa matrice porterebbe a ciò: che l'integrale di A, $\sum_{r=1}^{q} \varepsilon_r \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{q_j} \lambda^{(j)}_{lr} u^{(j)}_l$, ove le ε son costanti convenienti non tutte nulle, si ridurrebbe ad una combinazione lineare dei soli integrali $u^{(i)}_1, \cdots, u^{(i)}_{q_i}$ di A_i, ed esisterebbe perciò un integrale comune ad A, A_i; contro il supposto.

Si può pertanto affermare che, se B' coincide con B'', il sistema B' ha in comune con Σ_i, qualunque sia i $(= 1, 2, \cdots, q)$, q integrali indipendenti, cioè che B' è contenuto in Σ_i. I sistemi $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_q$ vengono pertanto ad avere in comune (almeno) un sistema B' di dimensione $q - 1$ (> 0). Ora, come abbiamo già osservato al n. 4, ciò non può accadere, se i sistemi $A_1, \cdots, A_\mu$ dati son tra loro indipendenti. Resta così dimostrato, anche per via analitica, il teorema I.

LXIII.

TRASFORMAZIONE BIRAZIONALE DI UNA SUPERFICIE ALGEBRICA QUALUNQUE, IN UNA PRIVA DI PUNTI MULTIPLI

Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *23*$_2$ (1914), pp. 527–539 (*).

Il problema di trasformare birazionalmente una superficie algebrica qualunque F, in una priva di punti multipli, appartenente ad uno spazio lineare S_r (1), è stato oggetto di molte ricerche, tra le quali ricorderò quelle di Noether, Del Pezzo, Kobb, Segre, B. Levi (2), all'ultimo dei quali è dovuta la completa dimostrazione della possibilità di tale trasformazione.

Poiché trattasi di una questione che costituisce il presupposto fondamentale di quasi tutte le ricerche di geometria sopra una superficie algebrica, e che ha inoltre un interesse innegabile anche dal punto di vista della teoria delle funzioni analitiche (3), credo di far cosa utile esponendo qui una risoluzione, che è di gran lunga più semplice di quella conosciuta.

La mia dimostrazione si svolge fondandosi soltanto sul concetto di composizione delle singolarità, qual'è precisato nella Memoria del Segre, e sul

(*) Seduta del 20 dicembre 1914.

(1) Problemi equivalenti a questo sono, com'è noto, quello di costruire una superficie priva di punti multipli, di cui la data F possa considerarsi come proiezione (biunivoca), o quello di costruire una trasformata birazionale di F, che appartenga ad S_2 ed abbia soltanto singolarità ordinarie (linea doppia nodale e punti tripli su questa).

(2) Per le indicazioni bibliografiche rimando alla Memoria di C. SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, (2) *25* (1896), nonchè ai successivi lavori di B. LEVI, *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche*, ecc., ibidem, (2) *26* (1896); *Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari*, ecc., ibidem, (3) *2* (1899); *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie*, Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, *33* (1897); *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto*, ecc., ibidem, *35* (1899). La dimostrazione, cui ho alluso nel testo, è contenuta nel terzo di questi lavori (ved. anche un riassunto nei Comptes rendus, *134* (1902), p. 222), sul fondamento delle precedenti ricerche di Segre e degli ulteriori sviluppi dati dallo stesso Levi negli altri tre lavori.

(3) Se $F(x, y, z) = 0$ è l'equazione della superficie F, il teorema in questione permette di affermare che le soluzioni dell'equazione precedente, nell'intorno di una soluzione *qualsiasi* (x_0, y_0, z_0), possono rappresentarsi completamente mediante un numero *finito* di sviluppi in serie di potenze di 2 parametri. Donde poi segue (a causa dell'algebricità) che *tutte* le soluzioni di $F = 0$ sono rappresentabili con un numero finito di serie siffatte. Delle singolarità di una superficie analitica $F = 0$, nell'intorno di un suo punto (ove la funzione F sia regolare), si è occupato recentemente G. DUMAS (Comptes rendus, *151* (1911), p. 682; *154* (1912), p. 1495).

fatto, ivi dimostrato, che le prime polari dei punti dello spazio S_3, rispetto alla superficie F, contengono tutti i punti multipli, distinti ed infinitamente vicini della F. La linea direttiva del procedimento ch'io seguo, si può indicare in poche parole; e, se non si fosse trattato di argomento così delicato, che mi ha indotto ad approfondire anche le affermazioni di carattere più intuitivo (4), avrei potuto contenere questa Nota in limiti assai più ristretti.

Il concetto semplificatore è espresso soprattutto dalla proposizione che una curva C, variabile con continuità nello spazio, non può abbassarsi di genere, senza acquistare *nuovi* punti multipli (lemma β). Oltre a questo, premetto altri due lemmi: l'uno afferma, in sostanza, che la varietà razionale rappresentata nello spazio S_3 dal sistema di tutte le superficie d'ordine l assai alto, che passano con molteplicità *convenienti* per un dato gruppo base G, di un numero finito di punti – a distanza finita o infinitesima tra di loro – è priva di punti multipli (lemma α); e l'altro di riferisce alla natura delle singolarità che può presentare la curva intersezione di due superficie, le quali non abbiano alcuna linea multipla comune (lemma γ).

La difficoltà veramente essenziale, nella risoluzione delle singolarità di una superficie, è data dai *punti multipli proprî*, cioè da quei punti che abbassano il genere delle sezioni piane (o iperpiane) per essi. I punti multipli improprî invece, come vedremo, si fanno sparire con relativa facilità, mediante semplici considerazioni di geometria sopra una curva (5).

Un punto multiplo proprio P_1 della superficie F (che supponiamo in S_3) può esser origine di una o più *successioni di punti multipli proprî* infinitamente vicini, variamente ramificate a partire da P_1. Dicendo che i punti $P_1, P_2, \cdots, P_k$, *consecutivi* sopra un ramo di curva algebrica tracciato su F e avente l'origine in P_1, formano una successione di punti multipli proprî, intendo che alle curve sezioni di F colle superficie d'ordine l (convenientemente alto) i successivi passaggi per i punti della successione, importino sempre nuovi abbassamenti del genere.

A priori, naturalmente, non può affermarsi che ogni successione di punti multipli proprî di F, abbia un termine (né, quindi, che le successioni sieno in numero finito). Il ragionamento della prima parte di questa Nota è appunto diretto a provare, in sostanza, che ogni successione di punti multipli proprî

(4) Veggasi ad esempio l'osservazione del n. 8!

(5) Questa distinzione, dei punti multipli di una superficie, in proprî ed improprî, corrisponde ad un concetto familiare nella geometria sopra una superficie: quello cioè di curve fondamentali proprie ed improprie di un sistema lineare di curve [Ved. per esempio F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Memorie dei XL, (3) *10* (1896), n. 8]. Dal punto di vista proiettivo, ho già avuto occasione altra volta (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *15* (1901) [Memoria VI, vol. I, p. 14; N.d.R.]) di occuparmi della cosa. Ma non sembra che di tale distinzione, la quale parmi essenziale per la risoluzione delle singolarità delle superficie, si sia fatto uso sistematico nelle precedenti ricerche su questo argomento. Il concetto di punto multiplo *isolato*, non coincide infatti con quello di punto multiplo *proprio*. Un punto multiplo isolato, che appartenga ad una linea multipla di molteplicità inferiore, non è necessariamente proprio.

di F, è pur successione di punti base del sistema irriducibile $|C|$, staccato su F dal sistema $|\Delta|$ delle prime polari dei punti dello spazio (cosicchè ne segue che le successioni son tutte finite ed in numero finito), e dà il modo per fare sparire di colpo tutti i punti multipli proprî. Ed ecco brevemente come:

Si consideri il sistema $|A|$ staccato su F dalle superficie Φ di ordine l dello spazio, che hanno il comportamento fissato dal lemma α) rispetto al gruppo G dei punti base – distinti e infinitamente vicini – di $|C|$. Sia Q un punto *qualunque* di F, a distanza finita o infinitesima da punti di G, ma distinto da essi. Proviamo, anzitutto, che le A passanti per Q hanno *lo stesso genere* della generica A. Se, invero, il passaggio per Q abbassasse il genere delle A, ogni A per Q acquisterebbe (lemma α), rispetto alla A generica, qualche nuovo punto multiplo. Tenendo conto delle molteplicità d'intersezione in ciascun punto comune alla A variabile e ad una Δ fissata genericamente, e del fatto che Δ contiene *tutti* i punti multipli di F, si conclude che ogni nuovo punto multiplo, acquistato da A, assorbe qualcuna delle intersezioni variabili *semplici* di A con Δ; cioè qualcuna delle intersezioni variabili della superficie Φ, che stacca quella A, colla curva C comune ad F e a Δ, fuori delle linee multiple. Ma questo vuol dire che Q è un punto base di $|C|$, contro il supposto.

Ne deriva che, trasformando birazionalmente F in una superficie F' di S_r, mediante il sistema semplice $\infty^r |A|$, la F' viene ad esser priva di punti multipli proprî. Dopo ciò, si considerino le forme H di S_r soggette alla condizione di staccare sopra un generico iperpiano, passante per *ogni* punto *comunque* scelto su F', un'*aggiunta* [nel senso di Castelnuovo (6)] alla curva sezione A' di F' con quell'iperpiano. Prendendo sufficientemente alto l'ordine l delle forme H, mediante considerazioni di geometria sopra una curva (e tenendo conto, beninteso, che F' non ha punti multipli proprî), si riesce a soddisfare con facilità alle condizioni seguenti:

1ª) il sistema lineare completo $|M|$, contenente totalmente le sezioni delle H^l con F', stacca sulla generica sezione iperpiana A', per un punto qualunque di F', una serie lineare completa, priva di gruppi neutri (7);

2ª) i sistemi $|M|$ ed $|N| = |M - A'|$ non hanno punti base;

3ª) non esistono su F' gruppi di punti, a distanza finita tra loro, che sieno neutri pel sistema $|M|$.

Si trasformi allora F' in una superficie F'' di uno spazio S_d, mediante il sistema semplice $\infty^d |M|$. La trasformazione da F' ad F'' non introduce curve fondamentali, per guisa che ad un punto P, *comunque* scelto su F', risponde un numero finito di punti su F''. Sia P' uno di questi; A' una generica sezione iperpiana per P, ed N una curva di $|N|$ *che non passi*

(6) *Sui multipli di una serie lineare*, ecc., Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 7 (1893).

(7) Cioè di gruppi che presentino una sola condizione alle M.

per P. (Una tal curva esiste sempre, essendo soddisfatta la 2ª condizione). Alla curva composta $A'+N$ risponde su F'' una sezione iperpiana $A''+N'$ riducibile; e la parte N' – omologa di N –, essendo soddisfatta la 3ª condizione, *non passa per* P'. Quanto alla A'' – omologa di A' –, per la 1ª condizione, essa non ha punti multipli; cosicchè, complessivamente, la $A''+N'$ passa per P' con un punto semplice, e P' è perciò semplice anche per F''. Si è così ottenuta una trasformata F'' di F, priva di punti multipli.

Il metodo esposto può estendersi, senza gravi difficoltà, anche alle varietà superiori; ma di ciò mi occuperò in un'altra Nota.

1. *Proposizioni preliminari.* Affinchè il lettore possa subito seguire la linea fondamentale del procedimento, senza essere fin dall'inizio distratto dall'esame di questioni di dettaglio, premetterò l'enunciato di alcuni lemmi. riservandomi di dimostrarli alla fine.

α) Dato nello spazio un gruppo G di k punti $P_1, P_2, \cdots, P_k$ – a distanza finita o infinitesima tra di loro [8] – si posson sempre determinare tali molteplicità $s_1, s_2, \cdots, s_k$, da assegnarsi nei punti dati, che:

1) le superficie d'ordine, assai alto, l $(\geq L)$, passanti pei P_i colle molteplicità *assegnate* s_i, non posseggano di conseguenza altri punti base, ed abbiano nei punti P_i molteplicità *effettive* uguali alle assegnate;

2) imponendo alle superficie suddette l'ulteriore passaggio per un punto *qualunque* Q – a distanza finita o infinitesima da punti di G – non compaiano altri punti base, all'infuori di $Q, P_1, \cdots, P_k$, con ivi le molteplicità *effettive* $1, s_1, s_2, \cdots, s_k$.

β) *Una curva* A *variabile con continuità nello spazio, non può abbassarsi di genere senza acquistare un nuovo punto multiplo.*

È opportuno di chiarir subito che, quando parliamo di un *nuovo* punto multiplo che la A deve acquistare, intendiamo non soltanto che questo punto possa essere distinto dai limti dei punti singolari variabili, o infinitamente vicino ad uno di essi, ma che possa addirittura *sovrapporsi* ad uno di questi limiti, il quale, in tal caso, viene ad aumentare di molteplicità.

Consideriamo, ad esempio, nello S_4, la superficie F intersezione completa di due forme, che si tocchino in un punto P; e proiettiamo F sullo spazio ordinario, da un punto O della retta che congiunge P con un punto generico di F. La proiezione F' di F verrà a possedere in P', proiezione di P un punto triplo, che sarà doppio per la linea doppia di F', e tale, inoltre, che una sezione piana di F', condotta per P', avrà il genere inferiore di un'unità rispetto al genere della sezione piana generica A. Orbene, se A varia tendendo a passare per P', due punti doppî di A tendono a P'; e quando A viene a passare per P',

(8) È appena necessario di avvertire che un siffatto gruppo si assegna dando una curva algebrica che contenga i punti P_i (come semplici o multipli).

essa acquista un nuovo punto doppio, che si sovrappone ai due precedenti, dando luogo, insieme con essi, al punto triplo P'.

Insomma, se ogni punto s–plo di A si considera come «equivalente» ad $\frac{s(s-1)}{2}$ punti doppî, ciò che aumenta è il numero complessivo dei punti doppî equivalenti ai punti multipli di A.

γ) *Sia A la curva sezione di una superficie F dello spazio, dotata di singolarità qualunque, con una superficie Φ, la quale non contenga alcuna linea multipla di F, nè abbia con questa in comune alcuna linea infinitesima (semplice o multipla): allora in ogni suo punto la A presenta una molteplicità uguale al prodotto delle molteplicità, ivi, di F, Φ.*

2. *Trasformazione della superficie F in una priva di punti multipli proprî.* Consideriamo sulla nostra superficie F, dotata di singolarità arbitrarie nello spazio ordinario, il sistema lineare irriducibile [9] $|C|$ staccato, fuori delle linee multiple di F, dal sistema $|\Delta|$ delle prime polari dei punti dello spazio; e indichiamo con G l'insieme di tutti i punti semplici e multipli, distinti e infinitamente vicini, eventualmente comuni alle C. Si sottintende che, in G, ogni punto comune alle C viene contato una volta sola, a prescindere dalla molteplicità che in quel punto possiede la C variabile.

Indicheremo inoltre genericamente con Φ una superficie passante pei punti del gruppo base G, colle molteplicità richieste dal lemma α); e quando di questa superficie sia fissato l'ordine l, la designeremo con Φ^l. Intenderemo, inoltre, che sia sempre $l \geq L + 1$, ove L è il limite a partire dal quale le Φ^l soddisfanno ad α).

Il sistema $|\Phi^l|$, di tutte le Φ^l, stacca su F un sistema lineare *semplice* $\infty^r |A|$, che non ha altri punti base, all'infuori di quelli del gruppo G (taluni dei quali, eventualmente, posson esser multipli per la A generica). Ci proponiamo di dimostrare che *su F non esiste alcun punto Q, semplice o multiplo, a distanza finita o infinitesima da punti del gruppo base G, tale che le ∞^{r-1} curve del sistema $|A|$, passanti per Q, abbiano tutte genere inferiore rispetto a quello della generica A.*

Suppongasi, se è possibile, che un tal punto Q esista: e dicansi A_0, Φ_0 rispettivamente le A, Φ passanti per esso.

Allorchè la Φ^l variabile viene a passare per Q, la relativa curva A, pel lemma β), acquista (almeno) un *nuovo* punto multiplo M: nuovo, rispetto ai punti multipli fissi e ai limiti dei punti singolari variabili lungo le linee multiple di F.

Domandiamoci anzitutto: dove può cadere M? Suppongasi, dapprima, che M sia variabile con A_0. Allora, se M variasse coincidendo con (o conservandosi infinitamente vicino ad) un punto mobile lungo una linea multipla effettiva di F, quando una A, passante pel punto generico R di questa linea,

(9) La irriducibilità di $|C|$ apparisce subito, sotto la forma duale.

divenisse una A_0, si alterebbe la *composizione* della singolarità di A in R. Invece, questo non può accadere. Considerando infatti la curva A staccata su F da una Φ^l composta mediante una Φ^{l-1} variabile ed un piano *fisso* π, uscente da R, se Φ^{l-1} va a passare per Q, e diviene Φ_0^{l-1}, la composizione della singolarità di A in R non muta, giacchè Φ_0^{l-1} non passa per R (lemma α).

Né può darsi che M descriva una linea infinitesima appartenente all'intorno di un punto di G, perché, altrimenti, o la generica Φ^l incontrerebbe il luogo del punto M, *che dovrebbe esser multiplo per* F (n. 7, oss. 2ª), per lo meno in tanti punti variabili quanti son quelli in cui lo incontra la Φ_0^l (che è una particolare Φ^l), e quindi M non sarebbe per A_0 un punto multiplo essenzialmente nuovo; oppure il luogo di M sarebbe *fondamentale* pel sistema delle Φ^l, e quindi contenuto in ogni Φ_0^l. Cosicchè, in tal caso, il sistema delle Φ_0^l verrebbe ad avere altri punti base (cfr. coll'osservaz. 2ª, del n. 7), oltre quelli assegnati; contrariamente al lemma α). Se, pertanto, M è variabile, si muove di necessità nell'intorno di Q, che risulta allora multiplo per F, in quanto ad esso *succede* il punto M multiplo per F.

Se M resta fisso al variare di A_0, esso si sovrapporrà a Q o ad un punto P di G. Proviamo, intanto, che quest'ultima ipotesi è assurda. Invero. la A_0 avrebbe in P un punto di molteplicità superiore a quella che ivi presenta la generica A, e ciò significherebbe [lemma γ)] o che la Φ_0^l ha in P molteplicità superiore a quella della Φ^l generica, oppure che Φ_0^l ha in comune con F una linea infinitesima dell'intorno di P: circostanze ambedue incompatibili col lemma α).

Infine, se M è fisso e sovrapposto a Q, non può darsi che Q – il quale, si ricordi, è semplice per Φ_0^l [lemma α)] – sia pur semplice per F, chè altrimenti [lemma γ)] le F, Φ_0^l avrebbero in comune anche l'intorno di Q, contrariamente ad α).

Si conclude, pertanto, che il punto M coincide con Q, o si mantiene nell'intorno di Q, che in ogni caso è *multiplo per* F.

Si ricordi, ora, che la generica Δ contiene tutti i punti multipli, distinti e infinitamente vicini, di F: e quindi anche i punti Q , M. Ciò posto, facciamo variare una A, finchè essa venga a passare per Q e divenga, così, una A_0. La curva A_0 viene allora a possedere un *nuovo* punto multiplo su Δ, e s'accresce così il numero delle intersezioni di A_0 con Δ assorbite dai punti multipli di A_0 (10).

Tale accrescimento non può che avvenire a scapito delle intersezioni variabili *semplici* della A variabile con Δ, cioè delle intersezioni variabili della superficie Φ^l che stacca A, colla C segnata su F (fuori delle linee multiple) da Δ. Siccome, infine, le nuove intersezioni semplici, assorbite dai punti multipli di A_0, sono andate a finire nell'intorno di Q, si conclude

(10) Si tenga presente che la molteplicità d'intersezione di una superficie e di una curva – che non stia né tutta né in parte sulla superficie – in ognuno dei punti distinti e infinitamente vicini, ad esse comuni, si valuta come se i punti stessi fossero tutti distinti. Ved. C. SEGRE, *loc. cit.*, n. 5.

che Q appartiene a C. E poichè questo vale per la generica C, ne deriva che Q è un punto base di $|C|$, contro il supposto. L'ipotesi iniziale che le A_0 si abbassassero di genere, è pertanto assurda.

Osservazione. – Diciamo $P_1, P_2, \cdots, P_k$ una *successione* di punti infinitamente vicini di G, avente l'*origine* in P_1, e $\overline{G}$ il gruppo parziale costituito da quei punti. Supponiamo, inoltre, che nell'intorno di P_k non si trovino altri punti di G. Applicando allora il precedente ragionamento alle superficie Ψ^l d'ordine l assai alto, che passano con molteplicità convenienti pel gruppo $\overline{G}$, si prova che la generica curva sezione di F con una Ψ^l per un punto qualunque Q, dell'intorno di 1° ordine di P_k, ha lo stesso genere della sezione di F con una generica Ψ^l. Ciò significa che *tutte le successioni di punti multipli proprî della F, son contenute nel gruppo G*: conformemente a quanto abbiamo enunciato nella prefazione. Quest'osservazione non occorre affatto nel seguito; ma tuttavia abbiamo reputato opportuno di farla, perché illumina maggiormente il nostro procedimento.

3. Si trasformi ora birazionalmente la superficie F in una superficie F' dello S_r, sulla quale le curve A', omologhe delle A, sieno staccate dagli iperpiani dello spazio. La F' risulterà allora priva di punti multipli proprî, e si potrà enunciare il teorema:

Una superficie algebrica qualunque, può sempre trasformarsi birazionalmente in un'altra priva di punti multipli proprî.

4. *Trasformazione birazionale d'una superficie algebrica in una affatto priva di punti multipli.* Continuando ad operare sulla superficie F' ultimamente ottenuta in S_r, consideriamo le forme H^l, d'ordine l assai alto, ciascuna delle quali gode della proprietà di staccare sopra un iperpiano, condotto genericamente per *ogni* punto *comunque* scelto su F', una forma *aggiunta* alla sezione A' di F' con quell'iperpiano. Si possono subito ottenere forme siffatte, per esempio nel modo seguente: Si proietti F' da un S_{r-4} sopra un S_3, e si consideri il cono, di un certo ordine m, che dall'S_{r-4} proietta la prima polare di un punto generico di S_3, rispetto alla superficie proiezione di F'. Aggregando a questo cono una forma qualunque di ordine $l-m$, si avrà una forma d'ordine l soddisfacente alla richiesta condizione, giacchè tale forma passa, con molteplicità $s-1$ almeno, per ogni punto s–plo di F', e *quindi* (11), di A'. Le H^l formano un sistema lineare, perché il fascio individuato da due di esse appartiene tutto al loro sistema.

In forza di una proposizione da me altrove dimostrata (12), si può supporre, crescendo quanto occorre l, che le H^l stacchino, fuori delle intersezioni fisse, una serie lineare completa g_n^s, sulla *generica* sezione iperpiana A'. Anzi, nulla

(11) Ved. l'Osservazione del n. 8.

(12) E. BERTINI e F. SEVERI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale*, Atti della R. Accad. delle scienze di Torino, *43* (1908); n. 1 della mia lettera al prof. Bertini.

vieta anche di supporre che questa serie sia priva di gruppi neutri; bastando all'uopo di scegliere, per esempio, l così grande che risulti $n > 2p$, ove p è il genere di A'.

Dicasi M la curva sezione di una generica H^l con F', fuori delle linee multiple, ed $|M|$ il sistema lineare *completo* individuato da M (13). Il sistema $|M|$ stacca, sopra una *qualunque* sezione iperpiana irriducibile A'_0, una serie lineare che ha la dimensione s, perché il sistema residuo completo, $|N| = |M - A'|$, è indipendente dalla scelta della sezione iperpiana A'.

Dico che $|M|$ non può avere punti base. Se, invero, fosse P un punto base di $|M|$, sulla generica sezione iperpiana A'_0 per P, il sistema $|M|$ staccherebbe, fuori di P, una $g^s_{n'}$, di ordine $n' < n$. Ora, essendo $n > 2p$, per la g^s_n, esistente su A', si ha $s = n - p$, donde segue $s > n' - p$. Ma ciò è assurdo, perché sulla A'_0, che *ha lo stesso genere p di A'*, si avrebbe una serie $g^s_{n'}$, speciale, di dimensione $s > p$. Risulta anche, da ciò, che $|M|$ stacca sulla sezione di F', con un iperpiano condotto genericamente per un punto qualunque di F', una serie *completa* priva di gruppi neutri ($n > 2p$); mentre prima questo fatto si poteva affermare soltanto in relazione alla generica A'.

Le stesse considerazioni svolte pel sistema $|M|$, si possono ripetere per $|N|$. Aumentando, se occorre, l, si può ottenere che $|N|$ stacchi nella generica A' una serie lineare completa g^σ_ν con $\nu > 2p$. Si trarrà allora, come prima, la conclusione che $|N|$ non ha punti base su F'.

È poi superfluo di aggiungere che tanto $|M|$ quanto $|N|$ si posson supporre *semplici*. Quanto ad $|M|$, si osserverà, inoltre, che esso non può possedere gruppi neutri, costituiti da punti a distanza finita tra loro.

Se infatti sono P e Q due punti di F' *a distanza finita tra loro*, una generica N, insieme con una sezione iperpiana per P e non per Q, dà appunto una M che passa per P e non per Q.

Trasformiamo birazionalmente F', mediante il sistema semplice $|M|$, in una superficie F'' di uno spazio S_d, sulla quale gli iperpiani stacchino le curve M', omologhe delle M.

Poichè $|M|$ non ha punti-base, la trasformazione da F' ad F'' non introdurrà curve fondamentali, sicchè ad *ogni* punto P di F' non corrisponde se non un numero finito di punti di F''. Sia P' uno di questi. Si consideri una N che non passi per P: il che è sempre possibile, giacchè $|N|$ non ha punti-base. Dal momento che su F' non esistono punti *associati* a P rispetto ad $|M|$, a distanza finita da P, la curva N', omologa di N, non passerà per P'. Diciamo ora A'_0 una generica sezione iperpiana di F', per P; ed A''_0

(13) Qui occorre il concetto di sistema lineare completo di curve sopra una superficie, e l'unicità del sistema lineare completo determinato da una curva. Com'è ben noto, ciò può stabilirsi per via del tutto elementare, come ha fatto Enriques, indipendentemente dalla risoluzione delle singolarità. Potremmo anche dimostrare, senza far uso della risoluzione delle singolarità, che il sistema completo $|M|$ coincide con quello staccato su F dalle H^l: ma ciò è superfluo.

la curva, *priva di punti multipli*, omologa di A'_0 su F''. Alla particolare M, costituita da A'_0 e da N, risponde su F'' una sezione iperpiana $A''_0 + N'$, che passa per P' con un punto semplice (giacchè tal punto giace necessariamente su A'' e non su N').

Dunque P', che è poi un qualunque punto di F'', è semplice anche per la superficie. E si conclude che:

Ogni superficie algebrica può trasformarsi birazionalmente in un'altra affatto priva di punti multipli.

5. *Dimostrazione del lemma* α). Il dato gruppo-base G, cui si allude nell'enunciato del lemma, si potrà scindere anzitutto in gruppi parziali $G_1, G_2, \cdots$, costituiti ciascuno da una successione di punti appartenenti ad un medesimo ramo di curva algebrica. Si sottintende che due di questi gruppi parziali potranno avere in comune l'origine (dei relativi rami) ed anche alcuni dei punti consecutivi; cosicchè, nel gruppo $G_1 + G_2 + \cdots$, qualche punto di G potrà esser ripetuto più volte.

È chiaro che, quando il lemma sia dimostrato per questi gruppi parziali, se ne potrà agevolmente dedurre la sua validità anche per G. Se, invero, in relazione al gruppo G_j il lemma è soddisfatto dalle superficie d'ordine $l \geq L_j$, passanti pei punti di G_j con molteplicità effettive convenienti, profittando delle superficie d'ordine $\sum_j L_j$, composte mediante superficie degli ordini $L_1, L_2, \cdots$, passanti nel modo debito rispettivamente per $G_1, G_2, \cdots$, si verifica subito il lemma α) in relazione al gruppo dato G. Le molteplicità da assegnarsi per le superficie d'ordine $l \geq \sum_j L_j$, nei punti di G, sono precisamente quelle che ivi presentano le suddette superficie spezzate.

Possiamo dunque limitarci al caso in cui il gruppo dato G è costituito dai punti $P_1, P_2, \cdots, P_k$ consecutivi sopra *un* ramo di curva algebrica, coll'origine in P_1.

Si operi una trasformazione birazionale dello spazio S in una varietà razionale normale a tre dimensioni S', riferendo proiettivamente le quadriche per P_1 agl'iperpiani di uno spazio ad otto dimensioni. Sulla S', che è priva di punti multipli, si avrà una superficie fondamentale π'_1 (un piano), corrispondente a P_1, ed i punti $P'_2, \cdots, P'_k$ – dei quali almeno il primo su π'_1 – omologhi di $P_2, \cdots, P_k$. Si trasformi similmente S' in una varietà razionale normale, S'', priva di punti multipli, mediante le quadriche (dello spazio S_8) passanti per P'_2. Sopra S'' si avrà una superficie π''_1 omologa di π'_1, un'altra π''_2 omologa di P'_2 (e appoggiata a π''_1 secondo una retta), ed infine i punti $P''_3, \cdots, P''_k$ – dei quali almeno P''_3 su π''_2 – corrispondenti a $P'_3, \cdots, P'_k$.

Si prosegua così, fino a che si arrivi ad una varietà razionale normale, $S^{(k)}$, priva di punti multipli, sulla quale si abbiano le superficie razionali $\pi_1^{(k)}, \pi_2^{(k)}, \cdots, \pi_k^{(k)}$, imagini dei punti $P_1, P_2, \cdots, P_k$ di S. Questi punti e superficie son evidentemente i soli elementi fondamentali nella corrispondenza birazionale tra S ed $S^{(k)}$ (e tra $S^{(k)}$ ed S).

Alle sezioni iperpiane di $S^{(k)}$, rispondono in S le superficie Φ, di un certo ordine L, passanti pei P_i con certe molteplicità effettive s_i, e non aventi altri punti-base. Le Φ – diciamole Φ_0 - uscenti da un qualsiasi punto Q di S, a distanza finita o infinitesima dai P_i, non hanno in conseguenza in comune né una curva né una superficie fissa, che sarebbe fondamentale per la trasformazione tra S ed $S^{(k)}$. Ad esse rispondono le sezioni iperpiane di $S^{(k)}$, passanti per un punto semplice ben determinato $Q^{(k)}$. Poichè una generica di queste sezioni non contiene alcuna delle superficie $\pi_i^{(k)}$, ad essa risponderà una Φ_0 non avente nei P_i molteplicità superiori alle s_i. D'altra parte è poi chiaro che la Φ_0, corrispondente ad una sezione iperpiana non tangente ad $S^{(k)}$ in $Q^{(k)}$, ha in Q un punto semplice.

Profittando delle superficie d'ordine $L+1$ spezzate ciascuna in una delle suddette Φ ed in un piano di S, si verifica subito che il lemma α) è anche vero per le superficie d'ordine $L+1$; e così di seguito.

6. *Dimostrazione del lemma* β). Quando la curva A varia con continuità nello spazio, tendendo ad una posizione limite A_0, *dello stesso ordine n di* A, la congruenza Γ_0 delle corde di A_0 fa certamente parte della congruenza limite di quella, Γ, constituita dalle corde di A. Al più, potrà darsi che, per ottenere la congruenza limite, occorra aggiungere a Γ_0 una o più congruenze di rette, che più non sieno corde (né proprie né improprie) di A_0. Comunque sia, l'ordine h_0 della Γ_0 risulta non superiore all'ordine h di Γ.

Ricorrendo ad una proiezione delle A, A_0 da un punto generico dello spazio, sopra un piano, si ottengono i loro generi p, p_0:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \tau - h\,, \qquad p_0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \tau_0 - h_0\,,$$

ove τ, τ_0 sono gli « equivalenti », in punti doppî, dei punti multipli di A, A_0 (assunti $\frac{s(s-1)}{2}$ punti doppî come equivalenti di *ogni* punto s-plo). Poichè la proiezione A_0' di A_0 ha come punti multipli per lo meno i limiti dei punti multipli di A' proiezione di A, così risulta

$$h + \tau \leq h_0 + \tau_0\,, \qquad h_0 \leq h\,, \qquad p_0 \leq p\,.$$

E siccome, inoltre, $h + \tau + p = h_0 + \tau_0 + p_0$, se $p_0 < p$, sarà $\tau_0 > \tau$, che è quanto si voleva provare.

Osservazione. – *Il teorema reciproco di* β) *non è vero*; ma si può affermare, tuttavia, in base alle relazioni precedenti, che, *se aumenta il numero dei punti multipli della A variabile, diminuisce o il genere di A o il numero de' suoi punti doppî apparenti* (*o ambedue questi caratteri*). Per avere un esempio del caso in cui aumenta il numero dei punti multipli di A, senza che tuttavia si abbassi il genere della curva, consideriamo il sistema continuo di curve A ottenute, in S_3, proiettando da un punto generico O, di S_4, un fascio di sezioni iperpiane di una superficie F di S_4, avente un punto doppio improprio (isolato). La A_0, proiezione della sezione che passa pel punto doppio improprio, possiede un

nuovo punto doppio P_0 (rispetto alla generica A), e tuttavia ha lo stesso genere di A. Nel passaggio da A ad A_0, la congruenza delle corde di A si spezza nella congruenza delle corde di A_0 e nella stella (P_0).

7. *Dimostrazione del lemma* γ). Il fatto enunciato è ben noto e d'immediata dimostrazione [14] pei punti multipli distinti di A o pei punti semplici a distanza finita dai punti multipli. Basterà dunque stabilire il teorema per una successione $P_1, P_2, \cdots, P_k$ di punti di A, consecutivi sopra un ramo della curva, avente l'origine in P_1.

Si eseguisca una prima trasformazione quadratica dello spazio, col punto fondamentale isolato in P_1 e che sia, pel resto, generica. Alla superficie Φ risponde una superficie Φ', che, per ipotesi, non contiene alcuna parte della curva p'_1, corrispondente a P_1, sulla superficie trasformata F'. La Φ' passa inoltre pel punto P'_2 di p'_1, omologo di P_2, e il cono tangente a Φ' in P'_2 non contiene, per ipotesi, alcuna parte del cono ivi tangente ad F'; sicchè la curva A', corrispondente ad A, ha in P'_2 molteplicità uguale al prodotto delle molteplicità che ivi hanno F', Φ'. Ciò significa, in altri termini, che P_2 ha per A, molteplicità uguale al prodotto delle molteplicità ivi di F, Φ. Si eseguisca ora un'altra trasformazione quadratica di F', ponendo in P'_2 il punto fondamentale isolato: se ne dedurrà il fatto enunciato pel punto successivo P_3 di A; e così proseguendo.

Osservazione 1ª. – Il teorema dimostrato vale anche per la curva comune ad una superficie F di uno spazio S_r e ad una forma Φ dello stesso spazio Il ragionamento è identico, salvo le parole.

Osservazione 2ª. – Quando si considera sopra una superficie F un numero *finito* di punti, semplici o multipli, $P_1, P_2, \cdots, P_k$, consecutivi sopra un ramo di curva algebrica coll'origine in P_1, usando, come prima, di una successione di trasformazioni quadratiche, si possono sciogliere gli intorni (di 1° ordine) di quei punti in altrettante curve effettive distinte (irriducibili o no) della superficie trasformata $F^{(k)}$. È appunto questa possibilità che ci permette di considerare senz'altro, sulla F primitiva, come altrettante curve gl'intorni dei punti dati.

È lecito pertanto di affermare, ad esempio, che la generica curva A di un sistema lineare $|A|$, tracciato su F, non può possedere un punto multiplo variabile lungo una linea infinitesima *semplice* della superficie, intorno ad un punto (base per $|A|$) semplice o multiplo per F [15].

(14) Basta riferirsi alle sezioni di F, Φ con un iperpiano generico pel punto considerato.

(15) Più in generale, il noto teorema « *Una curva A variabile entro un sistema lineare sopra una superficie algebrica F, non può aver punti multipli variabili in punti semplici di F* » (cfr. per esempio F. ENRIQUES, *loc. cit.*, n. 5), vale anche pei punti semplici di F situati a distanza infinitesima da punti o linee multiple della superficie. Il ragionamento consueto si riferisce, è vero, a punti semplici a distanza finita da punti multipli di F; ma noi possiamo ridurci a questo caso, assoggettando la data superficie alle trasformazioni indicate ai nn. 2 e 4; giacchè ognuna di queste trasformazioni non muta mai una curva della superficie su cui si opera, in un punto della superficie trasformata.

Così pure, se la generica A non ha intersezioni variabili con una linea infinitesima situata nell'intorno di un punto-base del sistema, questa linea si potrà trattare esattamente, come se fosse un'effettiva curva fondamentale di $|A|$.

Queste osservazioni ci sono occorse nella dimostrazione del n. 2.

8. *Osservazione.* – Nella dimostrazione del n. 4 abbiamo affermato che *ogni punto s-plo per la sezione C di una superficie Φ dello S_r ($r \geq 3$), con un iperpiano condotto genericamente da un punto qualunque P di Φ, è pure s-plo per la superficie* (16). Crediamo che nessun lettore eleverebbe dubbî su quest'affermazione, anche se non c'intrattenessimo a giustificarla; tanto più, dopo la dimostrazione del lemma γ). Tuttavia, *ad abundantiam*, diamo qui la dimostrazione del fatto asserito.

La cosa è senz'altro evidente pei punti multipli distinti di C. Esaminiamo dunque per esempio i punti multipli infinitamente vicini a P. Sia $P, P_1, \cdots, P_k$ una *successione* di punti aventi rispettivamente le molteplicità $s, s_1, \cdots, s_k$ per C, talchè P sarà pure s-plo per Φ. Supponiamo che l'iperpiano I, che stacca su Φ la C, sia generico nel senso che non tocchi il cono tangente in P a Φ, né contenga alcuna delle sue eventuali generatrici essenzialmente multiple (generatrici che rimangon multiple, anche quando ciascuna delle parti multiple del cono si conti semplicemente). Assoggettiamo Φ ad una trasformazione quadratica dello S_r, che abbia il punto fondamentale isolato in P e che sia pel resto generica; e diciamo Φ', C', I' gli enti omologhi di Φ, C, I; ω' la curva corrispondente a P, sulla superficie Φ'. L'iperpiano I' incontra (non tocca) in punti semplici – tra i quali il punto P_1' omologo di P_1 – la curva ω'; e poichè il cono tangente a Φ' in P_1' si spezza in piani passanti per la tangente ivi ad ω' (17), I' non toccherà questo cono, né conterrà alcuna delle sue generatrici essenzialmente multiple. L'iperpiano I' si troverà pertanto, rispetto a Φ', nelle stesse condizioni in cui si trovava I rispetto a Φ; ed il punto P_1' avrà per Φ' la stessa molteplicità s_1, che ha per C': cioè P_1 avrà per Φ la molteplicità s_1. Così proseguendo, si prova il fatto asserito, per tutti i punti infinitamente vicini a P.

Quanto agli altri punti multipli di C, basterà che pure in essi l'iperpiano I non tocchi il cono ivi tangente a Φ, né contenga alcuna generatrice essenzialmente multipla; la qual condizione è evidentemente soddisfatta per I generico.

(16) Nel n. 4 la superficie considerata si chiamava F' ed A', la sua sezione iperpiana. Qui, per comodità, abbiamo adottato notazioni nuove senza apici.

(17) Il cono tangente ad una superficie in un punto semplice O di una sua linea s-pla, si spezza infatti in piani passanti per la tangente t in O alla linea multipla; e ciò perché t è generatrice s-pla pel suddetto cono (Ved. ad esempio C. SEGRE, *loc. cit.*, n. 1).

LXIV.

OSSERVAZIONI A PROPOSITO DELLA NOTA DI A. COMESSATTI: «SULLE TRASFORMAZIONI HERMITIANE DELLE VARIETÀ DI JACOBI»

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *50* (1915), pp. 452–455 (*).

Questo lavoro del Comessatti (**) mi dà occasione di esporre una parte del procedimento ch'io avevo seguìto per dimostrare che due curve a moduli generali, i cui integrali normali di 1ª specie abbian gli stessi periodi, son birazionalmente identiche. Il Torelli, nella Nota sopra citata, ha provato che l'uguaglianza di quei periodi basta per affermare l'identità birazionale delle due curve, qualunque siano i moduli, ed il Comessatti ritrova la proposizione stessa al n. 4. Ma resta l'altra questione, a cui rispondeva il mio procedimento: Si può ancora dire che due curve C, C' son birazionalmente identiche, quando lo sono le loro varietà di Jacobi? Qui occorre proprio limitarsi a considerar curve a moduli generali (cfr. colla nota (*) a piè della pag. 447) [della Nota del Comessatti; N.d.R.].

Orbene, nelle mie ricerche in proposito, io avevo dimostrato che *data la varietà di Jacobi inerente ad una curva C, che non possegga corrispondenze simmetriche singolari, la C resta individuata* (*a meno, beninteso, di trasformazioni birazionali*).

Espongo qui rapidamente come si perviene a questo teorema. Proviamo in primo luogo, per induzione, che sulla V_q delle q–ple ($q \leq p$) di punti d'una C di genere p – priva di corrispondenze simmetriche singolari – la *base minima* è formata dal sistema continuo Σ delle ∞^1 varietà Φ_{q-1}, ciascuna delle quali rappresenta le q–ple con un punto fissato, e dalla N_{q-1} rappresentante le q–ple tolte dai gruppi di una qualunque g_n^{q-1} di C.

All'uopo si considerino su V_q le superficie L, imagini delle q–ple con $q-2$ punti fissi (superficie delle coppie di punti di C), e le curve H, imagini delle q–ple con $q-1$ punti fissi: per un punto qualunque di V_q passano q varietà Φ, per una curva H ne passano $q-1$, per una superficie L, $q-2$; ecc.

A causa dell'ipotesi fatta circa la C, una varietà algebrica F_{q-1}, appartenente a V_q, taglia su di una L una curva avente una certa valenza γ. Dico che, se si denotano con F_0, N_0 le varietà composte rispettivamente mediante

(*) Nota presentata dal Socio C. Segre nell'adunanza del 7 febbraio 1915.

(**) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, *50* (1915), pp. 439–452 (N.d.R.).

le Φ che escon dai punti ove le F, N son segate da una H, e che non contengon questa curva, ha luogo la relazione

$$F - \gamma N \equiv F_0 - \gamma N_0 . \tag{1}$$

Il teorema è vero per $q = 2$ [1]. Per passare da $q - 1$ a q, tagliamo le F, N, F_0, N_0 con una Φ contenente la H fissata. Poichè Φ è identica alla varietà delle $(q-1)$–ple di C, si potrà applicare il teorema ammesso alle varietà sezioni, e s'avrà

$$(F, \Phi) - \gamma (N, \Phi) \equiv (F_0, \Phi) - \gamma (N_0, \Phi) , \tag{2}$$

la quale, in virtù di un noto criterio di equivalenza [2], prova che la varietà (effettiva o virtuale) $F_0 - \gamma N_0$, al muoversi di H entro Φ, varia in un sistema lineare fisso. Se a questo punto si osserva, che, date due H qualunque, se esse non stanno in una Φ, si può sempre trovare una terza H che stia in una Φ con ciascuna delle due date, si conclude che $F_0 - \gamma N_0$ si muove in un sistema lineare fisso, comunque vari H entro V_q.

Dopo ciò, la (2) ci mostra che la $F - \gamma N$ e la $F_0 - \gamma N_0$ staccano varietà equivalenti sopra *ogni* Φ; e poichè Φ non ha punti multipli, così ne segue [3] la (1).

Salendo fino a $q = p$, se ne trae che *sopra la varietà di Jacobi relativa ad una curva priva di corrispondenze simmetriche singolari, la base minima è data dal sistema* Σ, giacchè in tal caso può prendersi come particolare g_n^{q-1}, con cui costruire N, la g_{2p-2}^{p-1} canonica, la quale dà origine a p–ple rappresentate

(1) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc., Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, (1903), n. 23 [Memoria XV; vol. I, p. 173; N.d.R.].

(2) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria*, ecc., Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, *45* (1905–1906), pp. 625–643; p. 635, teor. V [Memoria XXXI, vol. I, p. 397; N.d.R.].

(3) Vedi il criterio di equivalenza enunciato ai nn. 5, 6 della mia Nota *Alcune relazioni d'equivalenza*, ecc., Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, *70* (1910–11), pp. 373–382, p. 379, criterio precisato e dimostrato da R. TORELLI, *Un criterio d'equivalenza per le curve di una superficie algebrica*, Questi « Atti », *49* (1913–14), pp. 845–858, p. 815. Qui veramente il criterio stesso si applica al caso generale di varietà di dimensione qualunque, mentre il Torelli lo dimostra per curve di una superficie. Indicherò un modo semplice, per passare da questo al caso generale, dimostrando che, « se entro una V_k, due varietà M_{k-1}, A, B, staccano varietà equivalenti sulle W_{k-1} di un sistema irriducibile, ∞^1, Σ, e se inoltre la generica W non ha varietà multiple variabili a $k-2$ dimensioni, le A, B son equivalenti o differiscono per varietà fondamentali di Σ ». Dimostriamo il teorema per induzione, passando da $k-1$ a k, supposto, beninteso, $k > 2$. Fissiamo entro V un fascio lineare $|C|$, privo di varietà spezzate. Per l'ipotesi fatta, entro una C, le varietà (C, A), (C, B), staccano varietà equivalenti sulle (C, W), le quali son prive di varietà multiple variabili, a $k-3$ dimensioni. Ne deriva che le (C, A), (C, B) si equivalgono o differiscono per varietà fondamentali del sistema segato da Σ su quella C. Poichè ciò vale per ogni C, ne segue senz'altro l'asserto, in virtù del primo fra i criteri d'equivalenza da me dimostrati (nella Memoria, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, Annali di matematica pura ed applicata, (3) *12* (1905), pp. 55–80, n. 6 [Memoria XXV, vol. I, p. 307; N.d.R.].

da una M_{p-1} eccezionale, che si trasforma in una M_{p-2}, quando come varietà di Jacobi si prenda quella che rappresenta le g_p di C.

Il sistema Σ, ∞^1, che qui si considera, è contenuto totalmente nel sistema che il Comessatti indica pure con Σ. Poichè tutti i sistemi continui appartenenti alla V_p di Jacobi inerente alla nostra C, son multipli del sistema completo Σ, su V_p non potrà esservi che un sol sistema di tal tipo.

A partire da questo punto, mediante le relazioni aritmetiche che possono scriversi una volta conosciuta la base, io deducevo che un'altra curva C', cui spettasse la stessa V_p, era di necessità birazionalmente identica a C. Mediante il teorema dimostrato ai nn. 2, 3 del lavoro del Comessatti, questo fatto consegue ormai immediatamente.

Noterò che il ragionamento geometrico esposto, prova pure che *ad una V_p inerente ad una curva C priva di corrispondenze simmetriche singolari, non possono appartenere funzioni intermediarie.*

È poi noto, come all'ipotesi che C non contenga corrispondenze simmetriche singolari, si possa sostituire l'altra che essa sia a moduli generali (Vedi la mia Memoria, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile*, ecc., Math. Annalen, *74* (1913), pp. 515–544 [Memoria LVI, vol. II, p. 332; N.d.R.]).

LXV.

SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE ALGEBRICHE E SUL TEOREMA D'ESISTENZA DI RIEMANN

NOTA I: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *24*$_1$ (1915), pp. 877–888 (*).

Nel 1901 l'Accademia danese delle Scienze, per iniziativa dello Zeuthen, pose a concorso la questione di ricercare se in ogni famiglia di curve algebriche gobbe, possano esistere forme limiti composte da rette. L'Accademia, nel proporre il tema, aveva di mira soprattutto i problemi numerativi, inerenti alle curve algebriche. Si trattava di dare una base sicura e rigorosa alle formole che erano state ottenute da vari Autorî con spezzamenti delle curve algebriche in curve di ordini inferiori o in rette.

Ma la risoluzione del problema proposto – come del resto accennava l'Accademia danese – avrebbe avuto una portata ben maggiore, giacchè, una volta ottenuta una risposta affermativa alla questione, si sarebbe potuto tentare di ricavarne una classificazione grandemente suggestiva delle curve gobbe, assegnando, come rappresentante tipico di ciascuna famiglia, un sistema *connesso* di rette.

La questione rimase però sinora senza risposta (1). Di essa io intendo occuparmi nel presente lavoro, ove considero il problema anche in relazione alle curve iperspaziali. In questa Nota e nella successiva, riassumo i risultati da me ottenuti in proposito, riserbandomi di tornarvi in seguito, con una Memoria più ampia. Tuttavia do fin d'ora notizia non soltanto dei risultati, ma anche dei procedimenti dimostrativi, per ciascun dei quali indico le argomentazioni essenziali.

Dimostro anzitutto che, per $n \geq p + r$, le C_p^n (d'ordine n e genere p) di S_r, formano *una sola famiglia* (varietà algebrica irriducibile) *di dimensione regolare* $\nu = n(r+1) - (p-1)(r-3)$ (2). La curva generica di questa

(*) Seduta del 2 maggio 1915.

(1) Tranne che per le curve di genere $p \leq 2$. Vedasi A. BRILL, *Ueber algebraische Raumkurven*, Math. Annalen, *64* (1907), p. 322.

(2) Per $r = 3$ il risultato trovasi in G. H. HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (premiata col premio Steiner 1882), Journal de l'École polyt., *52* (1882). Ma l'A., non avendo precisato sufficientemente il concetto di «famiglia di curve gobbe», non si ferma a dimostrare che le C_p^n di S_3, per $n \geq p + 3$, costituiscono una sola varietà algebrica *irriducibile*.

famiglia, è non speciale, e la famiglia stessa dicesi perciò *non speciale*. Anche per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$, le C_p^n formano in S_r una sola famiglia regolare, ma la curva generica è in tal caso speciale e normale.

Questi teoremi son fondati essenzialmente sul fatto che la varietà algebrica delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, è irriducibile [3].

Definito poi che cosa deve intendersi per *n–latero (connesso) di genere virtuale (o effettivo)* $p(\geq 0)$, ne deduco, mediante semplici considerazioni proiettive, che, dato in $S_r (r \geq 2)$ un n–latero L di genere effettivo $p \geq 0$, esistono sempre curve razionali (irriducibili) d'ordine n, infinitamente vicine ad L.

Ciò mi permette di concludere che alla varietà V delle curve piane irriducibili C_p^n, appartiene ogni n–latero piano; e da questo, mediante una delicata analisi topologica, *deduco quali sono tutti i possibili spezzamenti delle curve di V.*

Una conseguenza notevolissima delle considerazioni svolte è *il teorema d'esistenza delle funzioni algebriche d'una variabile, che viene così stabilito con mezzi semplici e luminosi, di carattere algebrico–geometrico, i quali son di certo più appropriati alla natura algebrica della questione, di quanto non lo sieno gli strumenti finora usati per la dimostrazione classica del teorema di Riemann* (funzioni armoniche e problema di Dirichlet) [4]. E quando parlo del teorema di esistenza, intendo alludere non soltanto all'arbitrarietà nella scelta dei $2n + 2p - 2$ punti di diramazione della funzione algebrica ad n rami, di genere p, che si vuol costruire, ma anche alla possibilità di assegnare ad arbitrio le sostituzioni fra gli n rami, attorno ai singoli punti di diramazione.

Continuando (Nota II) lo studio delle curve di $S_r (r \geq 3)$, distinguo i punti doppî che possono acquistare particolari curve *di una data famiglia V*, in *proprî* ed *improprî*, secondo che abbassano o no il genere delle curve della famiglia che li acquistano [5]. I primi importano lo spezzamento della sviluppabile osculatrice alla curva che li acquista, ma non lo spezzamento della congruenza delle corde; mentre per gli altri accade il contrario.

Nel n. 6 (Nota II) sono finalmente in grado di dimostrare che *ogni famiglia non speciale di* $C_p^n (n \geq p + r)$ *possiede curve limiti così costituite: un* $(n - p)$*–latero connesso attraverso ad* $n - p - 1$ *nodi, insieme a p corde generiche di questo.*

Stabilisco quindi, nel n. 8, *l'esistenza di infiniti n–lateri di genere p, in ogni famiglia, anche speciale, di curve irriducibili* C_p^n *di* S_r, rispondendo così alla questione posta dall'Accademia danese.

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche*, ecc., Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, *47* (1912), n. 1.

(4) Ved. ad esempio E. PICARD, *Traité d'analyse* (Paris, Gauthier–Villars, 1905, 2ème éd.), tom. II, chap. XVI.

(5) Questa distinzione mi è già stata molto utile nella Nota, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli*, Questi Rendiconti, *23* (1914), p. 527 [Nota LXIII, vol. II, p. 415; N.d.R.].

Cammin facendo, mi si offre il destro di contare in modo rigoroso l'infinità delle g_n^r speciali, esistenti sopra una curva di dato genere p, a moduli generali (n. 3). Questo computo veniva fatto, con Brill e Noether [6], ammettendo implicitamente un postulato.

Alla questione di decidere se un dato n–latero connesso di genere effettivo p, appartenente ad S_r, si possa sempre considerare come il rappresentante tipico d'una famiglia di curve irriducibili di S_r, rispondo in modo affermativo nel n. 9. Ma il risultato non è ancora così espressivo come avrei desiderato, perché può darsi che la famiglia definita sia di genere $q < p$. A proposito delle condizioni complementari cui deve sottoporsi un n–latero di genere effettivo p, perché esso definisca una famiglia di curve, senza punti doppî, di genere esattamente uguale a p, mi sono limitato a riferire le mie induzioni e ad indicare i mezzi per giungere al risultato definitivo, che spero di poter dimostrare in seguito [7].

Termino la Nota II indicando i varî problemi a cui portan nuova luce i risultati precedenti (questioni di postulazione, problemi numerativi, questioni di realtà delle curve algebriche). Quanto ai problemi numerativi, la conclusione è, come si prevedeva, che le formole ottenute mediante gli spezzamenti delle curve, non soffrono eccezioni o limitazioni.

1. *Preliminari.* Parlando di *famiglia* di curve di dato ordine n in S_r, intendiamo di alludere, con Noether, ad una varietà algebrica V di curve, *irriducibile*, come insieme de' suoi elementi (curve) e *completa*, cioè che non sia contenuta in una più ampia di curve dello stesso ordine. Una *sottofamiglia* è una varietà irriducibile V' di curve d'ordine n, *completa relativamente* ad un'assegnata proprietà delle sue curve.

Due famiglie di curve dello stesso ordine hanno generalmente in comune una o più sottofamiglie.

Dalla definizione di famiglia di curve, segue subito che *ogni sistema continuo, cui appartenga una curva scelta genericamente entro una famiglia V, giace interamente in V.*

2. *Irriducibilità della varietà di tutte le curve irriducibili di dato genere p e della varietà di tutte le curve piane irriducibili di ordine n con*

(6) A. BRILL–M. NOETHER, *Ueber die algebraischen Funktionen*, ecc., Math. Annalen, 7 (1873), §§ 9–12; M. NOETHER, *Zur Graudlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (premiata col premio Steiner 1882), Berlin. Abh. (1882), p. 18. Ved. pure E. PICARD, *op. cit.*, p. 570.

(7) Avrei potuto rinviare a più tardi la pubblicazione del presente lavoro, in modo da inserirvi anche la dimostrazione di questo risultato, se non avessi creduto che la situazione politica che si va maturando pel nostro Paese, non consentirà fra breve a molti di noi di poter attendere con tranquillità alla ricerca scientifica. Avendo comunicato al sig. Zeuthen, nel marzo scorso, i risultati delle mie ricerche, ne ebbi l'incitamento a pubblicarle subito. Lo Zeuthen anzi, in risposta alla mia comunicazione, mi scriveva in data 29 marzo 1915: « Je crois avoir aussi de mon côté trouvé le moyen de démontrer l'existence des courbes dégénérées... mais mes recherches sont encore loin d'être achevées ».

$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ *punti doppî*. Le curve piane di ordine n, con d punti doppî, formano una varietà Σ di dimensione $3n + p - 1$, alla quale appartiene la varietà V delle curve *irriducibili* di ordine n e genere p. Oltre a questa, vi sono d'ordinario in Σ altre varietà ∞^{3n+p-1}, di curve spezzate, con d punti doppî; ma quel che importa di osservare è che *la varietà V, di dimensione $3n + p - 1$, è irriducibile*. Questo fatto, come ho detto, è già stato segnalato da Enriques, il quale, trattando incidentalmente la questione, si è limitato ad esporre le linee essenziali del procedimento dimostrativo, che io mi propongo di sviluppare più ampiamente nella Memoria cui queste Note preludono.

La semplice dimostrazione di Enriques, è strettamente geometrica. Da essa segue subito che *le curve di dato genere p, formano una varietà algebrica H irriducibile* (avente per elementi le classi di curve di genere p birazionalmente identiche).

A questo medesimo risultato si perviene d'altronde facilmente poggiandosi sul teorema d'esistenza di Riemann [8]. Basta all'uopo osservare: che ogni curva di genere p, può rappresentarsi sulla retta (sfera complessa) n–pla, con $2n + 2p - 2$ punti di diramazione *semplici*, sempre che sia per esempio $n > 2p$; che ordinati i cappî (o le sostituzioni) inerenti ai singoli punti di diramazione, alla maniera di Lüroth–Clebsch, ne segue subito la possibilità di far circolare il gruppo di diramazione, a partire da una posizione iniziale e ritornandovi, per guisa da scambiare tra loro due diverse distribuzioni delle sostituzioni stesse. Le superficie di Riemann, birazionalmente distinte, costruite a partire da un dato gruppo di diramazione, si possono quindi, per una conveniente circolazione del gruppo, scambiare fra loro. E da ciò segue l'asserita irriducibilità di H.

Ritengo probabile che la varietà H sia razionale o quanto meno che sia riferibile ad un'involuzione di gruppi di punti in uno spazio lineare S_{3p-3}; o, in altri termini, che *nell'equazione di una curva piana di genere p (e per esempio dell'ordine $p + 1$) i moduli si possano far comparire razionalmente*. La considerazione delle curve piane minime di dato genere p, mostra agevolmente che questo fatto è vero per $p \leq 11$ (per $p = 0, 1$ si vede anzi subito che la varietà H è addirittura razionale); la considerazione delle curve sghembe minime di genere p, definite come intersezioni parziali di superficie, permette di salire ad ulteriori valori di p; ecc.

3. *Curve canoniche. Valutazione rigorosa dell'infinità delle serie lineari g^r_n sopra una curva di dato genere, a moduli generali*. La valutazione dell'infinità d delle g^r_n non speciali, sopra una curva di genere p, si fa notoriamente, in modo

(8) La cosa trovasi già accennata in F. KLEIN, *Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen* (Leipzig, 1882), p. 66; oppure, *Riemannsche Flächen* (Autogr. Vorlesungen, Göttingen, 1894), I, pag. 117.

completo, colla massima facilità [9], e si trova:

$$d = (r+1)(n-r) - rp \,. \tag{1}$$

Si vede anche subito che, sopra una data curva di genere p, le g^r_n *non speciali formano una varietà irriducibile* (che è l'insieme delle coppie di elementi d'una varietà di Jacobi del genere p e della varietà degli S_r, appartenenti ad un S_{n-p}).

Quanto alla valutazione dell'infinità d delle g^r_n speciali, la cosa è assai più delicata. Brill e Noether ragionano in un modo che è sostanzialmente equivalente a questo: Sopra la curva canonica Γ di S_{p-1}, i gruppi G_n speciali, individuanti serie complete di dimensione r, sono staccati su Γ da spazî S_{n-r-1}. Ora, poichè per un S_{n-r-1} di S_{p-1} l'appoggiarsi ad una data curva è condizione $(p-n+r-1)$-pla, gli S_{n-r-1} n-secanti di Γ, dipenderanno *generalmente* da

$$(n-r)(p-n+r) - n(p-n+r-1) = n - r(p-n+r) \tag{2}$$

parametri; e siccome gli spazî stessi si distribuiscono in sistemi ∞^r, corrispondenti ciascuno ad una g^r_n completa, d risulterà anche in tal caso espresso da (1) [10].

Ma tutto ciò è subordinato all'ipotesi che le condizioni contate siano fra di loro indipendenti; e quest'indipendenza non può affatto *a priori* giustificarsi colla *generalità* dei moduli di Γ. Per completare in questo punto delicato la valutazione dell'infinità d, io procedo così: le curve canoniche Γ, in virtù di quanto s'è detto al n. 2, formano nello S_{p-1} una sola famiglia, dipendente da $k = (p-1)(p+4)$ parametri. Entro questa famiglia vi sono ∞^{k-1} curve irriducibili Γ_0, di genere $p-1$, con un punto doppio, costituenti una sola sottofamiglia, giacchè ognuna delle Γ_0 è imagine proiettiva della serie staccata sopra una curva piana d'ordine $p+1$, con $\frac{1}{2}p(p-3)+1$ punti doppî, dalle curve d'ordine $p-2$ passanti per $\frac{1}{2}p(p-3)$ di questi punti. Una Γ_0 si proietta dal suo punto doppio, sopra un S_{p-2}, secondo una curva canonica del genere $p-1$. Viceversa, ogni tal curva canonica può considerarsi come proiezione di una (anzi di infinite) Γ_0.

Supposto dimostrata la formola (1) pel genere $p-1$, si assuma una Γ_0 a moduli generali, col punto doppio O, e si contino i suoi spazî plurisecanti, desumendoli da quelli di una curva canonica del genere $p-1$, e tenendo conto che, quando una Γ va in Γ_0, la varietà delle corde di Γ ha per limite

(9) Ved. per esempio le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), p. 197. Di queste *Lezioni* era quasi pronta una traduzione tedesca ampliata (edita da Teubner), quando scoppiò la guerra europea. Ora è tutto sospeso.

(10) Se i moduli son generali, l'ordine e la dimensione di una g^r_n speciale completa, soddisfaranno quindi alla $d \geq 0$, la quale, introducendo l'indice di specialità $i = p-n+r$ della g^r_n, può scriversi sotto la forma $n \geq (i+1)r$. Si ha così *un'estensione del teorema di Clifford, valida sulle curve a moduli generali*. A quali condizioni particolari deve soddisfare la curva, perché una g^r_n speciale completa abbia $n < (i+1)r$? Per $i = 2$, $n < p-1$, il Comessatti ha trovato che la g^r_n deve essere composta con una γ^1_2.

la varietà delle corde di Γ_0 (perché O è un punto doppio proprio, ved. n. 5), e che inoltre le sole corde improprie di Γ_0, sono le sue tangenti e le rette del fascio individuato dalle due tangenti in O.

Così ad esempio la curva canonica Γ^8 del genere 5 (in S_4) non può avere alcuna trisecante, perché il gruppo G_3 relativo, individuerebbe una g_3^1, cioè Γ possiederebbe infinite trisecanti, e quando Γ tendesse verso una Γ_0 generica col punto doppio O, si avrebbero, come limiti delle ∞^1 trisecanti di Γ, ∞^1 trisecanti *effettive* di Γ_0 e per un punto generico M di Γ_0 ne passerebbe un numero finito. Facendo avvicinare M ad O, se ne trarrebbe che la più generale curva canonica del genere 4 (in S_3) possiede punti doppî. Similmente Γ non può possedere più che ∞^2 piani quadrisecanti, perché altrimenti la curva canonica del genere 4 possiederebbe più che ∞^1 trisecanti, ecc. (11).

In tal modo dunque si verificherà, in generale, che Γ_0 non possiede più spazî n-secanti di quanti son dati dalla (2), e ne seguirà la validità della (1) per qualunque p.

Quanto alle g_n^r speciali incomplete, la loro infinità è minore di (1); cosicchè la loro aggiunta non altera l'infinità d delle g_n^r contenute in Γ. Se ne trae subito, come hanno fatto Brill e Noether per $r = 3$, che *le curve irriducibili* C_p^n *dello* S_r, *quando* $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$, *dipendono da*

$$\nu = n(r+1) - (p-1)(r-3), \tag{3}$$

costanti.

Per $n \geq p + r$ $(r \geq 2)$ un generico gruppo di n punti sopra una Γ_p (a moduli anche particolari) è non speciale, e individua pertanto una g_n^{n-p} di dimensione $n - p \geq r$, cosicchè le C_p^n di S_r, birazionalmente identiche a Γ_p, formano una varietà irriducibile di curve generalmente non speciali. Se ne deduce (n. 2) che:

Per $n \geq p + r$, *le curve* C_p^n *di* S_r $(r \geq 2)$ *formano una sola famiglia di dimensione* (3), *la cui curva generica è non speciale* (*e normale in* S_{n-p}).

Una tale famiglia si chiamerà una *famiglia non speciale* di curve di S_r.

Per $r + \frac{r}{r+1} p \leq n < p + r$ $(r \geq 2)$, sopra Γ_p ogni g_n^r è speciale ed è generalmente completa. In tal caso però la varietà delle g_n^r su Γ_p *non è sempre irriducibile* (12). Comunque, un procedimento analogo a quello già accennato (passaggio dal genere $p - 1$ al genere p), mostra che, facendo circolare Γ_p nella propria famiglia, si riesce a scambiare fra loro le diverse parti della suddetta varietà. Si può dunque anche in tal caso affermare che:

(11) Naturalmente, nel caso speciale della Γ_5^8, tutto ciò deriva anche dal fatto ch'essa è completa intersezione di 3 quadriche.

(12) Si pensi per esempio alle due g_3^1 distinte esistenti sopra la curva canonica del genere 4.

Per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$ *le* C_p^n *di* S_r *formano una sola famiglia, di dimensione* (3), *la cui curva generica è speciale e normale.*

4. *Sistemi connessi di rette. Dimostrazione geometrica del teorema di esistenza di Riemann.* Un sistema *connesso* di n rette con $n + p - 1$ $(p \geq 0)$ intersezioni *semplici* (nodi), si chiamerà brevemente un *n–latero di genere effettivo* p. Gli $n + p - 1$ nodi si considerano come punti in cui si può passare da un lato (ramo) all'altro; si riguardano cioè piuttosto come « punti di diramazione » che come punti doppî. Si dice perciò che essi si considerano come *virtualmente inesistenti*, rispetto alla loro qualità di punti doppî, che non permetterebbe il salto da un ramo all'altro.

Se dei suddetti nodi effettivi, se ne possono considerare come inesistenti soltanto $n + q - 1$ $(q < p)$, *senza che per questo lo n–latero divenga sconnesso*, si dirà che q è il *genere virtuale* dello n–latero, in quanto si considerino come *assegnati* i $p - q$ nodi rimanenti.

Abbiasi un n–latero di genere effettivo o virtuale $p > 0$. Se assegnando uno de' suoi nodi, che prima si consideravano inesistenti, si rompe la connessione, lo n–latero non potrà scindersi che in *due* soli pezzi connessi. Se ne deduce facilmente che « si posson sempre scegliere p nodi convenienti, fra quelli che prima stabilivano la connessione, per guisa da ottenere, assegnandoli, un n–latero (si sottintende connesso) di genere virtuale zero ».

Ciò posto, mediante elementari considerazioni geometriche, si prova, col processo d'induzione, che « un n–latero di genere effettivo $p \geq 0$, appartenente ad S_r $(r \geq 2)$, è sempre proiezione di un n–latero di genere effettivo zero, appartenente ad S_n ».

La generazione proiettiva delle curve razionali normali mediante stelle omografiche, permette inoltre di provare agevolmente, sempre per induzione, che « esistono curve razionali (irriducibili) di ordine n, infinitamente vicine ad un n–latero di genere effettivo zero, dato in S_n ». Donde poi, a cagione della proposizione precedente, segue che *esiste sempre qualche curva razionale (irriducibile) d'ordine n, infinitamente vicina ad un n–latero L, di genere effettivo* $p \geq 0$, *dato in* S_r.

Un nodo P di L può essere di tre specie, rispetto ad una curva razionale C, infinitamente vicina ad L:

a) P può essere un « punto di diramazione », per guisa che i due lati incrociantisi in P, sieno sostituiti in C da *un sol ramo*. Di tali punti ne esistono $n - 1$ e possono essere scelti *a priori*, purchè sufficienti a stabilire la connessione;

b) oppure P può essere infinitamente vicino ad un nodo di C;

c) o infine i due rami incrociantisi in P possono essere sostituiti in C da *due* rami, colle origini distinte, ma infinitamente prossime a P.

I punti di *una* delle ultime due specie possono anche mancare; mancano simultaneamente solo quando $p = 0$.

Consideriamo, in particolare, il caso di $r = 2$. Assegnando allora $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ degli $\frac{n(n-1)}{2}$ nodi dello n–latero piano L (sempre però in modo che gli $n-1$ punti residui bastino a stabilire la connessione), si avranno curve razionali infinitamente vicine ad L e cogli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppî infinitamente prossimi ai prefissati. Vuol dire che alla varietà (irriducibile, n. 2) delle curve piane razionali d'ordine n, appartengono tutti i possibili n–lateri piani: il che si sarebbe potuto stabilire anche usufruendo della rappresentazione parametrica. E poichè la varietà di tutte le curve piane irriducibili d'ordine n con d punti doppî, contiene la varietà delle curve con $d+1, d+2, \cdots,$ punti doppî, così si conclude che:

La varietà delle curve piane irriducibili d'ordine n con

$$d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti doppî, contiene tutti i possibili n–lateri piani.

Un'altra conseguenza notevole, la quale del resto potrebbe dimostrarsi anche profittando del teorema riemanniano d'esistenza, è la seguente:

Avendosi un n–latero piano L, si assegnino $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *dei suoi punti doppî, per modo che coi rimanenti* $\frac{n(n-1)}{2} - d$ *nodi si possa stabilire la connessione fra gli n lati. Esiste allora sempre qualche curva irriducibile d'ordine n, infinitamente vicina ad L, la quale possiede d, e soltanto d, nodi, infinitamente vicini agli assegnati.*

Ecco la semplice dimostrazione geometrica di questo teorema.

Posto $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, fra gli $n+p-1$ nodi, che si vogliono considerare inesistenti, se ne potranno assegnare p, in modo che lo n–latero resti connesso (e di genere virtuale zero). Dopo ciò si potrà costruire una curva razionale D, infinitamente vicina ad L, e con $p+d$ nodi infinitamente vicini ad altrettanti vertici di L, tra i quali vi sono i d primitivamente assegnati.

Nella varietà V delle curve piane irriducibili C_p^n esistono dunque curve infinitamente vicine ad L, e coi d nodi infinitamente vicini agli assegnati: per esempio la curva D. Queste curve non possono tutte in conseguenza avere $d+1$ (o più) punti doppî, perché entro V gli elementi (curve), infinitamente vicini ad un elemento dato (L), son più numerosi che gli elementi infinitamente vicini ad L, entro una varietà subordinata a V, qual'è quella delle curve irriducibili d'ordine n con $d+1$ nodi.

Dal teorema precedente segue quest'altro:

Alla famiglia V delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, appartiene ogni curva composta da una curva irriducibile di ordine $n-1$ *e genere* $p-1$ *e da una retta.*

Prese infatti n rette generiche $a_1, a_2, \cdots, a_n$ del piano, si « assegnino » $d - n + 3 \left(d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p\right)$ vertici dello $(n-1)$-latero $a_1, a_2 \cdots a_{n-1}$, per guisa che esso resti connesso, e si chiami K la curva d'ordine $n-1$ e genere virtuale $p-1$, così ottenuta. Aggiungendo a K la retta a_n, se si assegnano gli $n-1$ punti ove a_n sega K, si ottiene una curva *sconnessa* D_0, d'ordine n e di genere virtuale $p-2$; se invece si assegnano soltanto $n-3$ delle suddette intersezioni, e si considerano come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva *connessa* C_0 d'ordine n e di genere virtuale p. Ora, pel teorema precedente, vi sono curve irriducibili di V, infinitamente vicine a C_0 e *coi d nodi infinitamente prossimi agli assegnati*; e poichè esistono ∞^h $(h = 3n + p - 3)$ curve di V passanti per P, Q, e tra esse v'è C_0, così esisteranno ∞^{h-1} curve di V, passanti per P, Q, infinitamente prossime a C_0 e coi d nodi infinitamente vicini agli assegnati. Ciascuna di queste curve, in quanto passa per P, Q ed è infinitamente vicina a C_0, ha un nodo infinitamente prossimo a ciascuno dei punti P, Q [13], sicchè è una curva infinitamente prossima alla D_0, coi suoi $d+2$ punti doppî assegnati. Ne consegue che D_0 appartiene a V, e precisamente alla totalità Σ delle curve di V con $d+2$ nodi, la qual totalità ha dimensione non inferiore ad h. La Σ potrà ben essere riducibile (anzi, come vedremo, lo è effettivamente); ma comunque D_0 giacerà in una *parte* irriducibile W di Σ, di dimensione almeno uguale ad h. Poichè una particolare curva, D_0, di W, è sconnessa, lo saranno tutte [14]: la curva generica D di W risulterà cioè composta da una parte E, d'ordine $n-1$ e genere virtuale $p-1$ e da una retta a. Dico che E è irriducibile. Invero se E fosse spezzata in λ curve $E_1, E_2, \cdots, E_\lambda$ di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_\lambda$ e di generi $p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$ con t punti d'intersezione da considerarsi come inesistenti, sarebbe $p - 1 = \sum p_i + t - \lambda + 1$, e poichè E è connessa, dovrebbe essere $t > 0$. Ora, una curva irriducibile, d'ordine n_i e genere p_i, dipende da $3n_i + p_i - 1$ costanti; sicchè E dipenderebbe al più da $3\sum n_i + \sum p_i - \lambda$ costanti, e quindi $D = E + a$, al più da $3n + p - 3 - t$ parametri, mentre prima abbiamo trovato che la dimensione di W è almeno $3n + p - 3$. Si conclude che la generica E è irriducibile. D'altra parte la varietà W' di *tutte* le curve spezzate in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, è irriducibile e dipende precisamente da $3n + p - 3$ costanti: dunque W coincide con W' e resta così stabilito il teorema enunciato.

Più in generale si prova in modo analogo, col processo d'induzione, che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva spezzata C d'ordine*

(13) Cfr. F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari*, ecc., Rend. del Circolo mat. di Palermo, *20* (1905), nn. 1, 2 [Nota XXIII, vol. I, p. 293; N.d.R.].

(14) Questa considerazione equivale in sostanza ad un ben noto principio di Enriques, che cioè una curva variabile con continuità, non può spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppî. Ved. F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie irregolari*, Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna (dicembre 1904).

n, appartenga alla varietà delle curve irriducibili d'ordine n e genere p, è che si possano scegliere alcuni nodi di C, in tal numero ed in tal posizione, che considerandoli come virtualmente inesistenti, si ottenga da C una curva connessa di genere virtuale p.

Così per esempio alla varietà delle quartiche ellittiche irriducibili appartengono tutte le curve spezzate in una cubica ellittica ed in una retta, mentre queste curve non appartengono alla varietà delle quartiche razionali irriducibili, perché non possono considerarsi in alcun modo come curve connesse di genere virtuale zero.

Da quanto precede risulta che, se in una generica $D = E + a$ di W, si assegnano i $d - n + 3$ nodi di E ed $n - 3$ soltanto delle intersezioni di E con a, considerando come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva «totale» di V ed alla D sono pertanto infinitamente vicine curve irriducibili di V, che hanno i loro d nodi infinitamente vicini agli assegnati.

Queste considerazioni sono importanti, perché, come ho già detto, da esse si trae una *dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di esistenza di Riemann*. Si prova, infatti, anzitutto geometricamente, premettendo il computo del numero dei moduli di una curva di genere p (15), che il gruppo di diramazione $G_{2n+2p-2}$ di una funzione algebrica ad n rami, $u_1, u_2, \cdots, u_n$, di genere p, può assumersi ad arbitrio sulla retta n-pla (sfera complessa) u (16).

Ciò posto, per dimostrare che si possono scegliere arbitrariamente anche le sostituzioni in G (purchè beninteso mediante esse la costruenda funzione risulti connessa), si distribuiscano i punti di G in $\sigma = n + p - 1$ coppie A_i, B_i $(i = 1, \cdots, \sigma)$ permutanti ciascuna gli stessi due rami. Avendo dimostrato la possibilità dell'arbitraria scelta di G, è chiaro che basterà stabilir l'esistenza della funzione algebrica richiesta, quando i punti di due coppie, per esempio $A_1, B_1; A_2, B_2$, tendono rispettivamente alle medesime posizioni limiti H_1, H_2, trascinandosi dietro le relative sostituzioni. Né a cagione dei risultati topologici di Lüroth-Clebsch, i quali sono indipendenti da ogni questione di esistenza, è restrittivo il supporre, finchè $p > 0$, che le coppie A_1, B_1 ed A_2, B_2 permutino entrambe gli stessi rami u_1, u_2, e che questi quattro punti di diramazione sieno anzi i soli operanti su u_1. Astraendo allora da questi punti, i rami $u_2, \cdots, u_n$ restano connessi, e, ammesso dimostrato il teorema per le funzioni di genere $p - 1$ ad $n - 1$ rami, appena sia $n \geq p + 2$, si potrà costruire, in un piano per u, una curva E d'ordine $n - 1$, la quale si proietti da un centro O, sulla retta $(n - 1)$-pla $u \equiv (u_2, u_3, \cdots, u_n)$, diramata nel modo assegnato nei punti $A_3, B_3, \cdots, A_\sigma, B_\sigma$.

(15) Cfr. ad esempio le mie citate *Lezioni*, p. 196. Nell'edizione tedesca ho colmato una lacuna esistente in questo punto e che nelle *Lezioni* non avevo mancato di segnalare in modo esplicito.

(16) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui moduli d'una classe*, ecc. (citata), n. 1.

Conducasi la retta OH_1, e fra gli $n-1$ punti ov'essa taglia E, scelgasi quello, P, che si proietta sul ramo u_2; e similmente su OH_2 si scelga quel punto Q di E, che corrisponde ad u_2.

Posto $a \equiv PQ$, la curva composta $E + a$ proiettasi da O su u secondo la retta n–pla $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ – ove u_1 è la proiezione di a – ed è diramata secondo il convenuto nei punti $H_1, H_2, A_3, B_3, \cdots, A_\sigma, B_\sigma$. Una curva irriducibile C, d'ordine n e genere p, infinitamente prossima alla $E + a$ (nella quale i nodi P, Q si riguardino come inesistenti), proiettata da O su u, risolve la proposta questione di esistenza.

Si ha così un processo di riduzione da p a $p-1$, mediante il quale, avendo supposto che sia $n \geq p + 2$, ci si riduce a dimostrare il teorema per le curve razionali. E per queste poi lo si stabilisce usufruendo del fatto che, assegnati su u, $n-1$ punti di diramazione doppî $H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}$, e le sostituzioni permutanti in essi i rami $u_1, u_2, \cdots, u_n$, esiste sempre, in un piano per u, un n–latero $L \equiv a_1, a_2, \cdots, a_n$, che si proietta dal centro O su u secondo la retta n–pla $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ diramata nel modo prefissato. Una curva razionale irriducibile, d'ordine n, infinitamente vicina ad L, ove si riguardino come inesistenti i nodi di L, che dànno per proiezioni i punti H, risponde allora alla questione di esistenza.

NOTA II: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *24*1 (1915), pp. 1011–1020 (*).

5. *Punti doppî proprî ed improprî rispetto alle curve di una data famiglia.* Sia V una famiglia di curve C_p^n nello $S_r (r > 2)$. Si dice che una curva C della famiglia, ha acquistato un (nuovo) *punto doppio proprio* P, quando l'acquisto di tal punto singolare trae seco l'abbassamento di un'unità nel genere effettivo p di C; il nuovo punto doppio P dicesi invece *improprio*, quando la C, che lo ha acquistato ha ancora il genere p.

Se la particolar curva C appartiene ad un'altra famiglia W, rispetto a questa il punto doppio acquistato da C può esser di specie diversa, che non rispetto a V. Un esempio espressivo in proposito, vien dato dalle quartiche sghembe razionali con un punto doppio, in quanto si considerino come forme limiti delle quartiche sghembe ellittiche, o delle quartiche razionali, senza punti doppî.

Rispetto alla varietà delle corde e alla sviluppabile osculatrice della curva variabile nella famiglia V, i punti proprî ed improprî si comportano in modo essenzialmente diverso.

Quando C acquista il punto doppio proprio P, la congruenza delle corde della curva variabile ha per limite la *sola* varietà delle corde della curva

(*) Seduta del 16 maggio 1915.

limite, e la sviluppabile osculatrice ha per limite la sviluppabile osculatrice alla curva limite, insieme al fascio di raggi individuato dalle due tangenti in P, contato doppiamente.

Mentre, allorchè C acquista il punto doppio improprio P, la varietà delle corde della curva variabile ha per limite una congruenza spezzata nella varietà delle corde della curva limite ed in una stella di raggi, di centro P, situata in un S_3, la cui posizione dipende dalla legge colla quale la curva variabile si avvicina alla curva limite. La sviluppabile osculatrice ha invece per limite la *sola* sviluppabile osculatrice della curva limite.

Quando la curva C_p variabile in V, si spezza in 2 parti C'_{p_1}, C''_{p_2}, aventi δ punti comuni, questi punti saranno proprî rispetto a V ogni volta che sia $p = p_1 + p_2 + \delta - 1$. Se invece $p < p_1 + p_2 + \delta - 1$, qualcuna delle intersezioni di C', C'', è un punto doppio improprio.

La condizione che s'impone alle curve di V, volendo che acquistino un nuovo punto doppio proprio in un punto non dato di S_r, è di dimensione 1; mentre l'imposizione di un punto doppio improprio, in un punto non dato, è una condizione $(r-2)$-pla, *sempre che, beninteso, le condizioni suddette sieno compatibili colla definizione della famiglia* V.

6. *Il teorema fondamentale per le famiglie non speciali.* Sia, nello S_r, una famiglia V non speciale di curve C^n_p $(n \geq p + r)$. Dal fatto che alla famiglia V' delle curve piane irriducibili d'ordine n, con $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ nodi, *le quali possono considerarsi tutte come proiezioni delle* C^n_p, appartiene (n. 4) ogni curva spezzata in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, si deduce agevolmente che V contiene curve composte mediante una C^{n-1}_{p-1} irriducibile ed una sua corda. Ma non è perciò detto né che V contenga *ogni* curva così composta, né quindi che le rette che entrano come componenti nelle suddette C^n_p spezzate, sieno proprio corde o non piuttosto i secanti $(i \geq 3)$ delle relative C^{n-1}_{p-1}. Nulla di assurdo ci sarebbe in ciò, perché in tal caso fra questi i punti d'appoggio, $i-2$ dovrebbero esser punti doppî improprî rispetto alle curve di V.

Per provare che effettivamente V contiene ogni curva spezzata in una C^{n-1}_{p-1} ed in una corda di questa, procediamo così: L'imposizione di 2 punti doppî proprî alle curve di V, equivale a 2 condizioni (al più), sicchè si avranno in $V\infty^k$ curve siffatte, ove

$$k \geq \lambda \quad (\lambda = n(r+1) - (r-3)(p-1) - 2).$$

La varietà Σ di queste curve, può essere riducibile, e può anche darsi che qualcuna delle sue *parti* sia di dimensione λ, e qualche altra di dimensione $\lambda + 1$. Comunque è certo che una, D, delle curve di V composte con una C^{n-1}_{p-1} e con una corda a di questa (la quale sia eventualmente i-secante), in quanto è appunto una C^n_p con 2 punti doppî proprî (e forse $i-2$ improprî) appartiene ad una varietà irriducibile $W\infty^\lambda$ contenuta in Σ. Ora è facile vedere che ogni curva di W è spezzata.

Infatti le proiezioni piane della D e di una $\overline{D}$ di W ad essa infinitamente vicina, hanno lo stesso numero $h+2$ di punti doppî, sicchè anche la proiezione della $\overline{D}$, e perciò la $\overline{D}$ stessa, pel principio già ricordato di Enriques, è spezzata. Ed è poi chiaro che lo spezzamento di $\overline{D}$ non può aver luogo che in una C_{p-1}^{n-1} ed in una sua corda. Le curve di W sono dunque spezzate tutte come D, e quindi W è contenuta nella varietà W_1 delle curve composte da una qualsiasi C_{p-1}^{n-1} e da una qualsiasi corda di questa. Ma poichè anche W_1 è irriducibile e di dimensione λ, si conclude che W coincide con W_1.

Ricordiamoci ora che un qualunque $(n-p)$–latero di genere effettivo zero in S_r, è contenuto nella varietà delle curve razionali d'ordine $n-p$. Siccome ogni tal curva, insieme ad una sua corda, dà una curva appartenente alla varietà delle curve ellittiche di S_r, se ne trae che a questa varietà appartiene ogni $(n-p)$–latero di genere effettivo zero, insieme ad una sua corda; e così risalendo dal genere 1 al genere 2, ed in generale da $p-1$ a p, si arriva al teorema fondamentale:

Alla famiglia non speciale V delle C_p^n di S_r $(n \geq p+r)$, appartiene ogni n–latero composto mediante un $(n-p)$–latero di genere effettivo zero, insieme a p corde generiche di questo.

In particolare si possono prendere $n-p$ rette $a_1, a_2, \cdots, a_{n-p}$, di cui ciascuna sia appoggiata alla successiva, ma l'ultima sia sghemba colla prima, e p corde generiche dell'$(n-p)$–latero $a_1, a_2, \cdots, a_{n-p}$; oppure $n-p-1$ rette generiche $a_2, \cdots, a_{n-p}$, appoggiate ad a_1, e p corde generiche di questo $(n-p)$–latero. Si osserverà che così si ottiene *un n–latero rappresentante tipico della famiglia V, nel quale mai tre lati giacciono in un piano.*

Per ottenere gli n–lateri contenuti in V, si può anche imporre alle curve di V di acquistare $n+p-1$ punti doppî proprî, perché in tal modo la sviluppabile osculatrice di C_p^n, che è d'ordine $2(n+p-1)$, viene a spezzarsi in $n+p-1$ fasci di raggi contati doppiamente, e quindi la curva riducesi ad un sistema connesso di rette. Così s'impongono $n+p-1-\varepsilon\,(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, per guisa che l'infinità degli n–lateri contenuti in V risulta espressa da:

$$k_{n,r} = n(r+1) - (r-3)(p-1) - (n+p-1-\varepsilon) =$$
$$= nr - (r-2)(p-1) + \varepsilon\,.$$

D'altronde, che $k_{n,r}$ non sia inferiore ad $nr-(r-2)(p-1)$, risulta pur da ciò che gli n–lateri di genere effettivo p in S_r, dipendono almeno da tante costanti, perché la condizione d'incidenza di due rette è di dimensione $r-2$. Vedremo al n. 8 *che la varietà degli n–lateri contenuti in V è spezzata e che in essa vi sono generalmente parti di diverse dimensioni*; ma possiamo subito provare che *tuttavia* in V *vi è sempre una famiglia completa di n–lateri, che ha la dimensione regolare* $nr-(r-2)(p-1)$.

La cosa si dimostra per induzione, a partire da un $(n-p)$–latero di genere effettivo zero, costituito da $n-p-1$ rette incidenti ad una medesima

ed osservando che l'aggiunta di una corda generica ad un $(n-p+1)$–latero $(i=0,1,\cdots,p-1)$, aumenta l'ordine ed il genere effettivo di un'unità ed il numero dei parametri di 2 unità.

7. *Come una famiglia speciale si possa considerare parzialmente contenuta in una non speciale.* Abbiasi in S_r una famiglia speciale $(n<p+r)$ di C_p^n irriducibili. Dal n. 4 risulta che la generica proiezione piana C' di C_p^n, insieme a δ rette del piano, ove $n+\delta \geq p+r$, qualora si consideri come inesistente, per ogni retta aggiunta, uno dei punti ov'essa incontra C', appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili d'ordine $n+\delta$ e genere p. E poichè ognuna di queste curve è proiezione di qualche $C_p^{n+\delta}$ di S_r, se ne trae agevolmente che *la curva speciale C_p^n di S_r insieme a δ sue rette secanti, ove $\delta \geq p+r-n$, può considerarsi con un elemento della famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ irriducibili di S_r.*

Alla stessa conclusione si perviene nel modo seguente, dal quale risulta di più che le δ secanti, da aggiungersi a C_p^n, non secano altrove la curva. Si consideri un S_r' sghembo con S_r, e pongasi un'omografia fra S_r, S_r'. La curva C_p^n viene mutata in una $C_p'^n$ di S_r', e le congiungenti delle coppie di punti omologhi di C, C', generano una rigata F, di genere p e ordine $2n$, rispetto alle cui generatrici le C, C' sono unisecanti. Si prova, senza difficoltà, che su F le C, C' appartengono ad un medesimo fascio $|C|$, di grado o. Se pertanto s'aggiunge a $|C|$ una serie lineare g_δ^ϱ $(\varrho>0)$ di generatrici di F, il sistema lineare somma, di curve unisecanti, d'ordine $n+\delta$ e genere p, sarà irriducibile. Proiettando in S_r, e tenendo conto dell'osservazione con cui si chiude il n. 1, si conclude col teorema enunciato.

Un'analisi ulteriore proverebbe anzi che le δ rette secanti possono scegliersi ad arbitrio.

8. *Il teorema fondamentale per le C_p^n di una famiglia qualunque.* Sia in S_r una famiglia V di C_p^n. Se $n<\frac{r+1}{r}p+r$, le curve di questa famiglia sono a moduli particolari (n. 3). Per valutare la dimensione x di V, si può ripetere il ragionamento svolto da Noether per le curve gobbe [17], e si trova così per x il limite inferiore (3) (n. 3).

Dunque: *Una famiglia qualunque di C_p^n, nello S_r, ha dimensione non minore di $n(r+1)-(r-3)(p-1)$.*

L'eccesso e di questa dimensione, sul limite inferiore (3), lo chiameremo l'*irregolarità* di V. Per $n\geq\frac{r}{r+1}p+r$ la famiglia è di certo *regolare*.

Sia ora δ un intero per cui sia soddisfatto il teorema del num. prec.; e sia inoltre W la famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ di S_r. Con un ragionamento analogo a quello esposto nel n. 6, si prova che le curve composte

(17) M. NOETHER, *loc. cit.*, p. 19. Trattandosi qui di trovare un limite inferiore per x, non occorre alcuna considerazione del tipo di quelle esposte al n. 3, ove si soleva pervenire ad un'uguaglianza (valida per le famiglie di curve a moduli generali).

mediante una C_p^n di V, alla quale vengono aggiunte δ rette secanti generiche, costituiscono una *parte* della varietà formata dalle curve di W dotate di δ punti doppî proprî. Si perviene così alla relazione

$$x + r\delta = (n + \delta)(r + 1) - (r - 3)(p - 1) - \delta + e \qquad (e \geq 0),$$

donde si trae di nuovo $x = n(r + 1) - (r - 3)(p - 1) + e$.

Imponiamo ora alle curve di V di acquistare $n + p - 1$ punti doppî proprî, cioè di spezzarsi in n rette. Si può subito osservare che *queste condizioni son compatibili colla definizione di* V. Infatti il cono Γ che proietta una generica C_p^n da un punto O, fuori di S_r, contiene un sistema lineare ∞^{r+1} di sezioni iperpiane, fra cui c'è la C_p^n data ed i gruppi di n generatrici staccati su Γ dagl'iperpiani (di S_{r+1}) uscenti dal vertice O. Proiettando tutto sullo S_r primitivo, da un generico punto P di S_{r+1}, si ha in S_r un sistema irriducibile ∞^{r+1}, di curve C_p^n, cui appartengono la curva data ed ∞^r n–lateri. Poichè questo sistema è contenuto in V (n. 1), si conclude che V contiene effettivamente curve degenerate in gruppi di n rette distinte.

Gli $n + p - 1$ punti doppî proprî imposti, equivalgono ad $n + p - 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, cosicchè esistono in V infiniti n–lateri dipendenti da $nr - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$ parametri. Ciascuno di questi punti n–lateri, insieme a δ sue rette secanti, fornisce un $(n + \delta)$–latero di W. Si ottiene in tal modo in W una varietà di $(n + \delta)$–lateri, di dimensione $(n + \delta)r - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$, e si prova così che *ad una famiglia non speciale* W, *la quale contenga parzialmente una famiglia irregolare di curve, appartengono due o più varietà irriducibili di n–lateri, di cui alcune di dimensione regolare e le altre di dimensione irregolare.*

Ci resterebbe da mostrare che gli n–lateri esistenti in V son privi di punti doppî improprî, cioè che il loro genere effettivo coincide col genere virtuale p. Rimandiamo al n. 9 per talune induzioni in proposito, riservandoci di completare questo punto nel lavoro più esteso. Enunceremo concludendo che:

In ogni famiglia V *di curve* C_p^n *dello* S_r, *esistono almeno* $\infty^{rn-(r-2)(p-1)}$ *n–lateri di genere* p. *L'irregolarità di* V *non supera la massima irregolarità d'una famiglia completa di n–lateri di genere* p *in* S_r.

Un'altra disuguaglianza cui soddisfa e, è la seguente, che si ottiene con semplici considerazioni di geometria sopra una curva:

L'irregolarità di V *non supera* $(r - 2)\,i$, i *essendo l'indice di specialità della generica* C_p^n.

9. *Sull'inversione del teorema fondamentale.* Dato in S_r un n–latero (connesso) $L \equiv a_1, a_2, \cdots, a_n$, di genere effettivo $p \geq 0$, è possibile costruire una famiglia di curve irriducibili C_p^n di S_r, cui appartenga L? Per rispondere a questa domanda, osserviamo anzitutto che *tutti gli n–lateri aventi lo stesso schema di connessione, formano una varietà irriducibile.*

Dicendo che due n–lateri hanno lo stesso *schema di connessione* o che sono *isomorfi*, intendiamo che si possa porre fra i loro lati una corrispondenza biunivoca tale, che a due lati incidenti dell'uno rispondano due lati incidenti dell'altro, e viceversa.

Per dimostrare la proposizione enunciata, si può profittare ad esempio del fatto che, dato un n–latero L di genere $p \geq 0$, è sempre possibile di scegliere $n - 1$ vertici, i quali bastino a stabilire la connessione fra i lati di L, per guisa che, dopo ciò, L possa considerarsi come proiezione di un n–latero L_0 di genere effettivo zero, appartenente ad S_n, ed avente p corde appoggiate al centro di proiezione (n. 4). L'affermazione enunciata, si riconduce allora all'altra, pressochè evidente, che in S_n gli n–lateri isomorfi fra loro, costituiscono una sola varietà.

Premesso questo, ricordiamoci (n. 4) che, dato in S_r lo n–latero L, esiste sempre qualche curva razionale C, ad esso infinitamente vicina, la quale possiede $q \leq p$ nodi infinitamente prossimi ad altrettanti vertici di L. Ne deriva che esiste una sottofamiglia V di curve razionali con q punti doppî, alla quale appartengono tutti gli n–lateri isomorfi con L.

Proiettiamo genericamente la C sopra un piano. Poichè la proiezione C' appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili, d'ordine n e genere q, se ne deduce, se $n \geq q + r$, che C appartiene alla famiglia W delle C_q^n di S_r. La sottofamiglia V è pertanto contenuta in W, ed a W appartengono perciò tutti gli n–lateri isomorfi con L. Rispetto a W, $n + q - 1$ nodi di L son proprî, e gli altri $p - q$ improprî.

Se poi $n < q + r$ si giunge ad una conclusione analoga, usufruendo del teorema di Riemann–Roch, per le *curve non aggiunte* [18]. Dunque:

Dato in S_r un n–latero (connesso) di genere effettivo $p \geq 0$, esso definisce sempre qualche famiglia di curve irriducibili d'ordine n e genere $q \leq p$, prive di punti multipli. Rispetto alle curve di questa famiglia, $p - q$ nodi del dato n–latero sono da considerarsi come improprî. Due n–lateri isomorfi, definiscono la stessa famiglia.

È appena necessario di avvertire che deve esistere qualche condizione complementare, affinchè un n–latero di genere effettivo p, definisca, in S_r, una famiglia di C_p^n irriducibili, senza punti multipli, e di genere uguale a p. È ben noto infatti che il genere delle C_p^n irriducibili, senza punti multipli, di S_r, non può sorpassare un certo massimo, assegnato, per r qualunque, da Castelnuovo; e che d'altra parte, come ha provato Halphen (per $r = 3$), anche al disotto di questo massimo, vi sono lacune nei valori possibili di p.

Ritengo per certo che la risposta a tale importante questione debba ottenersi mediante il teorema di Riemann–Roch per le curve spezzate [19];

(18) M. NOETHER, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven*, Math. Annalen, *15* (1879), p. 507.

(19) M. NOETHER, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, Acta math., *8* (1886), p. 161.

ma su ciò, come ho detto, mi propongo di ritornare. Il risultato definitivo dovrebbe esser questo:

« La condizione necessaria e sufficiente perché un n–latero L, di genere effettivo $p \geq 0$, definisca in S_r una famiglia di C_p^n irriducibili (senza punti multipli), quando $n < p + r$, è che per gli h punti doppî della generica proiezione piana L' di L, provenienti dai punti doppî apparenti di L, passino almeno $\infty^{p+r-n-1}$ curve d'ordine $n - 4$, le quali non contengano come parte alcuna retta di L'. Per $n \geq p + r$, non si richiede alcuna condizione ».

Una volta provato questo, si potrà completare il teorema del n. prec., perché ne deriverà la possibilità di costruire in S_r un n–latero di genere *effettivo* p, isomorfo con un n–latero M di genere virtuale p, contenuto in una data famiglia V di C_p^n, ove beninteso l'isomorfismo fra L, M, si ponga astraendo dagli eventuali punti doppî improprî di M. Si concluderà così che a V appartiene anche lo n–latero L.

Non va inoltre taciuto che *due n–lateri non isomorfi posson anche definire la stessa famiglia.* Questa circostanza si verifica pure nel caso più semplice delle curve razionali. Così, per esempio, nello spazio ordinario, i quadrilateri $a_1 a_2 a_3 a_4$ collo schema di connessione (12), (23), (34) – in cui cioè a_2 appoggiasi ad a_1, a_3 ad a_2, a_4 ad a_3 – ed i quadrilateri collo schema (12), (13), (14), definiscon entrambi la famiglia delle quartiche di 2ª specie. Ciascuno dei due schemi suddetti dà luogo ad una famiglia regolare di quadrilateri, che contiene 13 costanti.

Quando i due n–lateri dipendono dallo stesso numero di parametri, un criterio sufficiente, per decidere s'essi definiscono o no famiglie distinte, è dato dalla considerazione delle superficie (o forme) del minimo ordine a cui essi appartengono.

Per esempio nel caso $n = 9$, $p = 10$, le due famiglie distinte di curve gobbe, incontrate per la prima volta da Halphen, son definite da due 9–lateri dei tipi seguenti:

1) Sei lati son generatrici di una schiera rigata e gli altri 3 generatrici della schiera rigata incidente.

2) I 9 lati son le intersezioni di una superficie generale del 3° ordine, con 3 de' suoi piani tritangenti.

I 9–lateri di questi due tipi dipendono ciascuno da un numero regolare, 18, di costanti, e definiscon famiglie distinte, perché per quelli del tipo 1) le superficie minime son quadriche, mentre per gli altri son superficie del 3° ordine.

10. *Applicazioni a questioni di postulazione.* La degenerazione delle curve algebriche in sistemi di rette, si applica utilmente alle questioni di postulazione; e si posson così ottenere, in questo campo, molti risultati nuovi.

Mi limiterò ad un esempio, calcolando la postulazione offerta alle forme d'ordine l di S_r, da una C_p^n generica, con $n \geq p + r$.

Poichè, appena sia $l \geq 2$, l'ordine della $g_{nl}^{r_l}$, staccata su una C_p^n dalle forme di ordine l, è non speciale, sarà $r_l \leq nl - p$, e quindi la postula-

zione P_l non supererà $nl - p + 1$. D'altronde, quando C_p^n degenera in un $(n-p)$–latero di S_r, collo schema (12), (13) $\cdots$ $(1, n-p)$, ed in p corde generiche di questo $(n-p)$–latero, si trova subito che la postulazione è esattamente $nl - p + 1$; e poichè, particolarizzando C_p^n nella propria famiglia, la postulazione non può crescere, così si conclude che $P_l = nl - p + 1$. Dunque:

L'ordine minimo delle forme di S_r che contengono una generica C_p^n, quando $n \geq p + r$, è il minimo intero λ per cui $\binom{\lambda + r}{r} + p \geq n\lambda + 2$. *Le forme d'ordine $l \geq \lambda$ staccano su C_p^n una serie completa non speciale.*

Naturalmente, quando C_p^n si particolarizza entro la propria famiglia, l'ordine minimo suddetto potrà abbassarsi e potrà perciò non valer più il teorema precedente. Così, ad esempio, per una generica quintica gobba razionale, è $\lambda = 3$; ma, come si sa, vi sono anche quintiche razionali (irriducibili) tracciate su quadriche.

11. *Applicazioni alla geometria numerativa.* Dalla possibilità che una C_p^n di S_r, variando nella propria famiglia, possa degenerare in un n–latero di genere p, si deduce *la completa giustificazione dei metodi di spezzamento parziale o totale, usati da varî Autori per la determinazione di numeri inerenti alle curve algebriche, nonchè la legittimità delle applicazioni del metodo funzionale di Cayley.*

È vero che non si potrà sempre ricorrere allo spezzamento totale in rette, perché potrà darsi che il numero che si ricerca divenga infinito, per inevitabili legami sussistenti fra i lati di un n–latero, appartenente ad una data famiglia. Così, ad esempio, chi voglia l'ordine della rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba, non potrà senz'altro ricorrere alla degenerazione in rette, perché potrebbe darsi che, nella famiglia di C_p^n, ogni n–latero dovesse avere di necessità tre o più rette in un piano. È appunto questo il caso della C_{10}^9 del tipo 2) considerato alla fine del n. 9.

Ma comunque, profittando dei teoremi dei nn. 6, 7, si potrà sempre pervenire rigorosamente al risultato, nel modo che ora indichiamo, riferendoci per brevità alla rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba.

Se $n \geq p + 3$, la C_p^n può degenerare in un n–latero L, di genere effettivo p, tale che mai più di due lati di L stanno in un piano (n. 6). L'ordine della rigata delle trisecanti si valuterà quindi subito, riferendosi alla *rigata* delle trisecanti di L. Si troverà così per quest'ordine l'espressione ben nota $\varphi(n, p)$, che non occorre qui trascrivere, bastandoci di avvertire ch'essa risulta evidentemente funzione soltanto di n, p. Dopo ciò si supponga che la C_p^n sia qualunque, anche con $n < p + 3$.

Si potranno allora aggiungere ad essa δ rette secanti, per guisa da ottenere una $C_p^{n+\delta}$, appartenente alla famiglia delle curve gobbe irriducibili d'ordine $n + \delta \geq p + 3$. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, si otterrà allora togliendo da $\varphi(n + \delta, p)$, δ volte l'ordine della rigata formata dalle corde di C_p^n appoggiate ad una sua secante; $\binom{\delta}{2}$ volte l'ordine della

rigata formata dalle rette appoggiate a C_p^n e a 2 delle sue δ secanti; e infine $\binom{\delta}{3}$ volte l'ordine della schiera rigata costituita dalle rette appoggiate a 3 delle δ secanti di C_p^n; i quali ordini sono evidentemente funzioni delle sole n, p. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, risulterà dunque, in ogni caso, funzione delle sole n, p, e dovrà pertanto coincidere colla funzione $\varphi(n, p)$ prima trovata.

Come ho detto, con procedimenti di questo genere, si giustifica in ogni caso anche l'applicazione del metodo funzionale di Cayley. Né fanno eccezione i problemi relativi a coniche plurisecanti di curve gobbe (Berzolari, Severi), giacchè in questi casi, qualora, per la ragione detta sopra, non serva lo spezzamento in rette, si potrà ricorrere ad uno spezzamento misto della C_p^n in rette, coniche, cubiche gobbe, spezzamento la cui legittimità si stabilisce, per $n \geq p + 3$, con procedimenti analoghi a quelli già sviluppati (n. 6). E si osserverà poi che l'aggiunta di convenienti rette o coniche o cubiche, ad una qualunque $C_p^n (n < p + 3)$, dà luogo ad una $C_p^m (m > n)$ appartenente ad una famiglia non speciale (cfr. col. n. 7).

Queste considerazioni fanno senz'altro prevedere come sia possibile assurgere rigorosamente alla seguente conclusione generale:

Ogni numero inerente ad una C_p^n di S_r, in quanto sia relativo ad una condizione algebrica che abbia senso per una curva qualunque di ordine e genere dati, è una funzione razionale delle sole variabili n, p.

12. *Applicazioni alle questioni di realità.* Dirò in proposito soltanto poche parole, perché applicazioni di questo genere si prevedono senz'altro, quando si tenga presente il metodo cosidetto della « piccola variazione », che si usa nelle questioni di realità per le curve piane.

Dato un n–latero reale L di genere effettivo o virtuale p, appartenente ad una famiglia V di C_p^n irriducibili di S_r, a partire da un punto vicino ad un lato, si segua il lato stesso, finchè si arrivi vicino ad un punto doppio proprio P. Senza bruschi cambiamenti nella curvatura della traiettoria, si prosegua allora lungo il lato che si connette al precedente attraverso P, e così di seguito. Si otterrà una traiettoria che rappresenterà con grande approssimazione la forma di una curva di V vicina ad L, ed avente perciò, rispetto alle curve della famiglia, il massimo numero di rami reali, purché si osservino inoltre queste due regole, d'immediata giustificazione:

1) Ad ogni segmento d'un lato di L, che non contenga nodi proprî, deve esser sempre vicino uno ed un sol pezzo della traiettoria.

2) Quando s'incontra un punto doppio improprio Q, si deve proseguire a mantenersi vicini al lato lungo cui si camminava, come se Q non ci fosse.

Per contare i rami *graficamente* distinti della curva, si avvertirà che due rami metricamente distinti, i quali siano « paralleli » a due semiraggi opposti, situati sullo stesso lato a di L, ed aventi per origini due diversi nodi proprî, si riconnettono attraverso al punto all'infinito di a (supposto, beninteso, ch'esso non sia un nodo proprio).

LXVI.

SULLA VARIETÀ CHE RAPPRESENTA GLI SPAZÎ SUBORDINATI DI DATA DIMENSIONE, IMMERSI IN UNO SPAZIO LINEARE

Annali di Matematica Pura ed Applicata, (3) *24* (1915), pp. 1–32.

È ben noto che, seguendo H. Grassmann [1], si definiscono come coordinate (omogenee, sovrabbondanti) di uno spazio lineare S_k, entro un S_r, i determinanti d'ordine massimo, estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti (indipendenti) variabili in S_r o i determinanti – proporzionali ai precedenti – d'ordine massimo, estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $r-k$ iperpiani (indipendenti) passanti per quei punti [2]. Fra queste coordinate passano alcune relazioni quadratiche omogenee, scritte da D'Ovidio [3].

Interpretando le coordinate grassmanniane come coordinate omogenee di punto, in uno spazio $S_\varrho\left[\varrho=\binom{r+1}{k+1}-1\right]$, gli S_k di S_r vengono rappresentati *biunivocamente, senza eccezioni*, dai punti di una varietà algebrica V_t, di dimensione $t=(k+1)(r-k)$, *appartenente* ad S_ϱ, e della quale le suddette relazioni quadratiche costituiscono la completa rappresentazione analitica [4].

Nel caso più semplice $r=3$, $k=1$, un bel teorema di Klein assicura che la V non contiene altre varietà algebriche a tre dimensioni, all'infuori

(1) *Die Ausdehnungslehre* von 1862 (Abs. I, Kap. III, N. 65) oppure: *Ges. Werke*, Bd. I, Th. II, p. 44. Per $r=3$, $k=1$ queste coordinate furono considerate diffusamente da J. Plücker nella *Neue Geometrie des Raumes* (Leipzig, 1868–69). Di esse però egli aveva già fatto cenno, fin dal 1846, nella *Geometria des Raumes*.

(2) Cfr. ad esempio E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, ecc. (Pisa, Spoerri, 1907); nn. 14–18, p. 32 e segg. La proporzionalità fra i minori delle due matrici, cui s'è alluso nel testo, fu dimostrata da A. Clebsch, *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, Abhandlungen der *k*. Gesellschaft der Wissens. zu Göttingen, *17* (1872), § 2, e indipendentemente, per via più elementare, da E. D'Ovidio, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *12* (1877), pp. 334–49.

(3) *Loc. cit.* Di esse fecero pur cenno H. Grassmann (Crelle's Journal, 1877–78) e A. Clebsch, *loc. cit.*, §§ 1 e 6. Ved. ad esempio E. Bertini, *op. cit.*, p. 38.

(4) Però si deve avvertire che la V_t non può mai – tranne il caso $r=3$, $k=1$, in cui V riducesi ad *una* quadrica dello S_5 – considerarsi come completa intersezione di $\varrho-t$ forme di S_ϱ, e tanto meno di $\varrho-t$ forme quadratiche (ved. il n. 4, Oss.).

delle sue intersezioni complete colle forme dei varî ordini di S_5 (5). Col linguaggio della geometria della retta, il teorema di Klein afferma che ogni complesso algebrico di rette, nello spazio ordinario, può sempre rappresentarsi con una sola equazione (omogenea) nelle coordinate plückeriane, il che, trattandosi di coordinate sovrabbondanti, non potrebbe affatto affermarsi a priori.

Questo teorema è stato esteso, per via puramente algebrica, al caso di r qualunque, ma sempre $k = 1$, da C. H. Sisam (6). La dimostrazione del teorema analogo in generale, qualunque siano r, k, costituisce lo scopo principale di questo lavoro (teor. I, nn. 10, 20). Tratto prima la questione geometricamente, appoggiandomi ad uno dei miei « criteri di equivalenza » per varietà contenute in una data; e nella seconda parte del lavoro estendo anche, con opportuni accorgimenti algoritmici, il procedimento algebrico di Sisam. Il metodo geometrico da me seguìto per dimostrare che su V_t la base minima è costituita da una sezione iperpiana (n. 9), si può applicare con lievissime modificazioni a molte altre varietà: per esempio alle varietà delle k–ple ($k \geq 2$) – ordinate o non – dei punti di uno spazio S_r.

Il fatto che la V_t, che chiameremo « varietà grassmanniana di indici (r, k) », non contenga altre varietà algebriche a $t - 1$ dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete colle forme di S_ϱ, dà luogo ad una conseguenza notevole.

Allorchè si considera la classe di tutte le trasformate birazionali di una data varietà algebrica, si possono porre in una medesima sottoclasse due varietà che si corrispondano biunivocamente *senza eccezioni*. Si presenta allora il problema di ricercare, in una medesima sottoclasse, qual'è la varietà modello, proiettivamente determinata, d'ordine minimo. È questo evidentemente un problema, che rientra nel quadro generale dei problemi della *base*, da me altrove in più occasioni trattati.

Così ad esempio, nel campo delle superficie razionali, il piano e la superficie di Veronese appartengono alla medesima sottoclasse (di cui il piano è il modello minimo), mentre il piano ed una quadrica appartengono a sottoclassi distinte.

Orbene, se si considera la sottoclasse di tutte le varietà che rappresentano birazionalmente senza eccezioni la totalità degli S_k di un S_r, dal teor. I segue che *entro questa sottoclasse la varietà grassmanniana costituisce appunto un modello minimo*. Ma di più si prova che *questo modello minimo è proiettivamente individuato*, nel senso cioè che ogni varietà d'ordine minimo della sottoclasse considerata, la quale sia normale (7), è proiettivamente identica alla suddetta grassmanniana.

(5) *Ueber einen liniengeometrischen Satz* (Götting. Nachr., 1872); Math. Annalen, *22* (1883).

(6) *On algebraic hyperconical connexes in space of r dimensions*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, *46* (1911), pp. 481–87.

(7) Cioè che non sia proiezione di una, dello stesso ordine, appartenente ad uno spazio superiore a quello in cui essa è immersa.

Acquista così un senso preciso la frase: « la varietà delle rette di S_3 è una varietà quadratica », oppure: « la varietà delle rette di S_4 è una varietà quintica », ecc. E da tutto ciò apparisce pure che *le coordinate grassmanniane sono, dal punto di vista della rappresentabilità senza eccezioni, le coordinate più naturali, in quanto offrono il modello più semplice.*

Da questo punto di vista, è indifferente scegliere come varietà rappresentatrice una qualunque trasformata proiettiva di V_t. D'altro canto però la varietà grassmanniana apparisce il modello più opportuno nelle questioni di realità, giacchè ad ogni S_k reale (o a due S_k complessi–coniugati) di S_r corrisponde un punto reale (o una coppia di punti complessi–coniugati) di V_t. Si vede pure agevolmente che la V_t è costituita da una sola falda reale, e che lo stesso accade della sua sezione con un generico $S_{\varrho-i}$ reale ($i \leq \chi + 1$, ove χ è il maggiore dei due interi k, $r - k - 1$) (n. 14).

Un teorema analogo al teor. I vale anche per la sezione di V_t con un generico $S_{\varrho-i}$ ($i \leq \chi$). Sopra una tal sezione non esistono cioè altre varietà algebriche a $t - i - 1$ dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete colle forme di $S_{\varrho-i}$ (o di S_ϱ) (n. 13). Così ad esempio: Nello S_3 – com'è noto – una congruenza algebrica di rette, contenuta in un complesso lineare *non speciale*, è intersezione completa di questo complesso con un altro (di grado uguale all'ordine e alla classe della congruenza); nello S_4 un sistema ∞^4 (o ∞^3) di rette contenuto in un complesso lineare generico (o risp. in un fascio generico di complessi lineari) è intersezione completa di quel complesso (o del sistema base del fascio) con un altro complesso; ecc.

Approfondendo maggiormente lo studio delle sezioni di V_t cogli spazî lineari delle diverse dimensioni, sono giunto a provare (nn. 13, 16):

a) Ch'esse sono tutte varietà normali.

b) Che – tranne il caso $r = 3$, $k = 1$ – esiste una tal dimensione l dello spazio lineare secante, per cui la varietà sezione ha il proprio sistema canonico d'ordine zero, e quindi il genere (geometrico = aritmetico) uguale ad 1.

c) Che le varietà sezioni con spazî superiori $S_{l+1}, S_{l+2}, \cdots, S_{\varrho-1}$ hanno il genere nullo, e fra esse quelle staccate da spazî di dimensione $\geq \varrho - \chi - 1$ sono razionali, restando dubbia in generale la razionalità delle altre.

d) Che la varietà sezione con un S_{l-1} generico è una varietà canonica, mentre le sezioni con spazî $S_{l-2}, S_{l-3}, \cdots, S_{\varrho-t+1}$ sono varietà sottocanoniche [8]. La deduzione di queste proprietà – tranne quella che concerne la razionalità delle sezioni con spazî di dimensione $\geq \varrho - \chi - 1$ – si appoggia soltanto sulla normalità della V_t e sul fatto ch'essa ha l'irregolarità superficiale nulla, e per base minima una sezione iperpiana. Cosicchè le proprietà stesse valgono in generale, per ogni varietà soddisfacente a queste condizioni.

(8) Cioè tali che su ognuna di esse il sistema delle sezioni iperpiane è un sottomultiplo conveniente del sistema canonico.

Indico anche un modo per calcolare i generi delle sezioni spaziali e l'ordine di V_t [9], e sviluppo diffusamente la cosa per $k = 1$ (n. 17). In tal caso la dimensione l, cui sopra si allude, è uguale ad $r - 3$. Così ad esempio: La V_6^5 di S_9 rappresentatrice delle rette di S_4 ha [com'è noto [10]] per sezioni curvilinee, quintiche ellittiche e per sezioni sezioni spaziali superiori, varietà razionali; la V_8^{14} di S_{14}, rappresentatrice delle rette di S_5, ha per sezioni curvilinee, curve canoniche del genere 8, per sezioni superficiali, superficie (regolari) con curva canonica d'ordine zero, per sezioni tridimensionali, varietà (completamente regolari) di genere zero, ma di cui è dubbia la razionalità, e per sezioni superiori varietà razionali.

Il fatto, stabilito al n. 17, che la formola di postulazione di V_t valga per ogni valore dell'ordine n, lascia prevedere che il minimo sistema lineare contenente ogni forma di ordine $n + 1$, spezzata in un iperpiano di S_Q ed in una forma d'ordine n per V_t, sia sempre il sistema di tutte le forme d'ordine $n + 1$ per V_t, e quindi che *ogni forma d'ordine n passante per* V_t *appartenga al modulo delle forme quadratiche, che definiscono* V_t. Donde poi si trarrebbe che le relazioni quadratiche di D'Ovidio formano un sistema completo di legami tra le coordinate grassmanniane di un S_k, nel senso cioè che ogni altra funzione intera delle coordinate suddette, la quale s'annulli identicamente quando al posto di queste coordinate si sostituiscano le loro espressioni nelle coordinate di punto, è funzione intera di quelle forme quadratiche. In realtà io mi trattengo a dimostrare completamente questo fatto, per via algebrica, soltanto nel caso $k = 1$ (n. 21).

Osserverò infine che la dimostrazione algebrica del teor. I permette anche di assegnare le condizioni cui deve soddisfare una forma F d'ordine n, in $k + 1$ serie di $r + 1$ variabili, affinchè essa possa esprimersi come forma d'ordine n nei determinanti di grado $k + 1$ estratti dalla matrice delle variabili: perché ciò accada occorre e basta che le derivate d'ordine $n - 1$ della F, rispetto alle variabili di ogni prefissata serie, si annullino identicamente, quando si eguagliano le variabili di quella serie con quelle di qualunque altra (n. 20).

(9) L'ordine di V_t, essendo uguale al numero degli S_k che appoggiansi a t S_{r-k-1} generici di S_r (n. 2), è espresso da

$$\frac{1!\,2!\cdots k!\,t!}{(r-k)!\,(r-k+1)!\cdots r!}.$$

Cfr. H. SCHUBERT, *Anzahl-Bestimmung für lineare Räume beliebiger Dimension*, Acta mathematica, *8* (1886), p. 97. Vedi pure una Nota nelle Hamburger Mitth., *1* (1884), p. 87.

(10) Cfr. C. SEGRE, *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *2* (1888); G. CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, Atti del R. Istituto Veneto, (7) *2* (1891), pp. 855–901; G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, Annali di Matematica, (3) *15* (1908), pp. 217–273, n. 61.

§ 1. Preliminari

1. *La varietà grassmanniana* V_t, *d'indici* (r, k), *è evidentemente razionale*, giacchè può riferirsi birazionalmente alle $(k+1)$–ple di punti tolti da altrettanti S_{r-k-1} di S_r. Inoltre *essa appartiene allo spazio* S_ϱ e non ad uno spazio inferiore, perché altrimenti fra le coordinate di un S_k esisterebbe almeno una relazione lineare omogenea, e l'annullarsi di certe ϱ coordinate trarrebbe l'annullarsi della rimanente; mentre si posson sempre scegliere $k+1$ punti di S_r, per guisa che uno solo prefissato dei minori d'ordine $k+1$ estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di tali punti, sia diverso da zero.

2. Diremo *complesso* (algebrico) di S_k, entro S_r, un sistema algebrico di $\infty^{t-1} S_k$, cioè un sistema che abbia per imagine una varietà algebrica, a $t-1$ dimensioni, appartenente a V_t. *Grado* n del complesso è il numero degli S_k ch'esso ha comuni con un *fascio* generico di S_k [11]. La forma algebrica riempita dagli S_k del complesso passanti per un generico S_{k-1}, è un cono d'ordine n, avente per vertice il dato S_{k-1}.

In particolare, alle sezioni iperpiane di V_t, rispondono *complessi lineari* (o di grado 1), e tra questi si posson poi più particolarmente considerare i *complessi lineari speciali*, costituiti ciascuno dagli S_k che s'appoggiano a un dato S_{r-k-1}. Si verifica agevolmente – sviluppando colla regola di Laplace il determinante formato dalle coordinate di $r-k$ punti indipendenti del dato S_{r-k-1} e dalle coordinate di $k+1$ punti di un S_k ad esso appoggiato – che ogni complesso lineare speciale è appunto rappresentato da una sezione iperpiana di V_t. Naturalmente trattasi di una particolare sezione; ma, pel nostro scopo, non occorre indagare in che cosa consista, geometricamente, questa particolarità. Osserviamo piuttosto che, siccome l'ordine $n_{n,k}$ di V_t uguaglia il numero dei punti comuni a V_t ed a t iperpiani indipendenti di S_ϱ, esso risulta anche uguale al numero degli S_k appoggiati a t spazî S_{r-k-1} generici di S_r.

3. Come sono rappresentati su V_t gli S_k passanti per un dato punto O di S_r? Assumendo questo punto come uno dei vertici della piramide fondamentale delle coordinate, e individuando un S_k per O, mediante k punti dell'iperpiano opposto ad O, nella piramide fondamentale, le coordinate non nulle di quello S_k riduconsi ai minori d'ordine k estratti da una matrice di r verticali e di k orizzontali, e si può quindi affermare che «gli S_k passanti per un dato punto di S_r, sono rappresentati, sopra V_t, da una varietà grassmanniana d'indici $(r-1, k-1)$».

(11) S'intende: col sistema degli S_k passanti per un S_{k-1} entro un S_{k+1}. Si verifica subito che le coordinate grassmanniane di un S_k d'un tal sistema, sono combinazioni lineari delle coordinate di due S_k fissi del fascio. L'imagine degli S_k d'un fascio, sopra V_t, è dunque una retta.

E similmente, componendo le coordinate di un S_k mediante i minori di ordine $r-k$ estratti dalla matrice delle coordinate di $r-k$ iperpiani indipendenti, variabili in S_r, si conclude che «gli S_k giacenti in un dato iperpiano S_{r-1}, sono rappresentati, sopra V_t, da una varietà grassmanniana di indici $(r-1, k)$».

Più in generale: *gli S_k passanti per un dato S_{h-1} $(h \leq k)$ di S_r, sono rappresentati sopra V_t da una grassmaniana d'indici $(r-h, k-h)$, e quelli giacenti in un dato S_{r-h} $(h \leq r-k-1)$, da una grassmanniana d'indici $(r-h, k)$.*

È sottinteso che una grassmanniana di cui il secondo indice sia nullo o inferiore di un'unità rispetto al primo, si riduce ad uno spazio lineare di punti.

4. Ogni omografia dello spazio S_r in sé, muta un S_k in un S_k, per guisa che le coordinate dello S_k trasformato si esprimono linearmente mediante le coordinate dello S_k primitivo; ed essa rispecchiasi perciò in una omografia di S_ϱ, la quale muta in sé *la varietà V_t, che viene pertanto a possedere un gruppo continuo transitivo, ad $r(r+2)$ parametri, di omografie.*

Da ciò si trae che l'intorno di ogni punto di V_t è omograficamente equivalente ad ogni altro, e quindi, in particolare, che V_t *non ha punti multipli.*

Osservazione. – Dal fatto che la varietà razionale V_t è priva di punti multipli segue che, non appena sia $\varrho \geq 2t+1$, la V_t non può essere completa intersezione di $\varrho - t$ forme, degli ordini $m_1, m_2, \cdots, m_{\varrho-t}$. In caso contrario, infatti, risultando $\sum m_i - \varrho - 1 \geq 2(\varrho - t) - \varrho - 1 \geq 0$, le forme d'ordine $\sum m_i - \varrho - 1$ staccherebbero per V_t il sistema canonico [12] e quindi V_t non sarebbe razionale. Applicando la stessa considerazione alle sezioni spaziali di V_t, e tenendo conto del teor. VII (n. 16), che ad esse si riferisce, s'arriverebbe a concludere, più precisamente, che V_t non è mai completa intersezione, salvo il caso $r=3$, $k=1$, in cui trattasi d'una quadrica dello S_5. Ma su questa proprietà negativa, che del resto è irrilevante pel seguito, non ci indugiamo ulteriormente.

5. Secondo il n. 3, sulla V_t i punti che rappresentano gli S_k per un dato S_{k-2}, Ω, formano una grassmanniana W, identica a quella che rappresenta le rette di un S_{r-k+1}. Ci gioverà, per gli scopi ulteriori, d'intrattenerci un momento su questa varietà. Essa ha la dimensione $2(r-k)$ ed appartiene ad uno spazio lineare $\left[\binom{r-k+2}{2} - 1\right]$ [13]. Gli S_k contenenti Ω e giacenti in un dato S_{r-1} (per Ω), corrispondendo alle rette di un dato S_{r-k} di S_{r-k+1},

(12) Cfr. F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *17* (1903) [Memoria XIII, vol. I p. 132; N.d.R.]. Ivi veramente la cosa è provata per curve e superficie, ma l'estensione alle varietà superiori è immediata.

(13) Per comodità tipografica si usa talora d'indicare con $[s]$ uno spazio lineare di dimensione s.

hanno per imagini su W i punti di una varietà W', di dimensione $2(r-k-1)$, appartenente ad uno spazio $\left[\binom{r-k+1}{2}-1\right]$, talchè gli iperpiani di S_ϱ, che contengono qualcuna delle ∞^{r-k+1} W', appartenenti ad una data W, dipendono *al più* da $\varrho-\binom{r-k+1}{2}+(r-k+1)=\varrho-\binom{r-k}{2}+1$ parametri.

Ora, se $k<r-2$, questo numero risulta sempre minore di ϱ, sicchè gli iperpiani considerati non sono tutti gl'iperpiani di S_ϱ. Uno di quegli iperpiani stacca su V_t una sezione, imagine d'un complesso lineare tale, che fra gli S_k del complesso, passanti per Ω, vi sono quelli che riempiono un certo iperpiano di S_r. Si conclude pertanto che:

Un complesso lineare, il quale contenga tutti gli S_k che passano per un dato S_{k-2} dello S_r, e che giacciono in un dato iperpiano (uscente da quello S_{k-2}), è un complesso particolare.

Questa conclusione vale anche nel caso, sopra escluso, in cui $k=r-2$. Invero allora W è una quadrica dello S_5 e W' un piano di questa quadrica. Un iperpiano di S_ϱ che contenga un piano di W è tangente alla quadrica, e contiene in conseguenza infiniti piani di W. Sicchè, anche in tal caso, gli $S_{\varrho-1}$ passanti per gli ∞^3 piani di W sono meno che ∞^ϱ.

6. Tra i complessi di grado n, vi sono quelli che hanno per imagini le sezioni di V_t colle forme d'ordine n dello S_ϱ, cioè quelli rappresentabili in S_r con una sola equazione di grado n, fra le coordinate grassmanniane. Orbene, noi dimostreremo che:

I. *Ogni complesso algebrico di spazî S_k nello S_r, è rappresentabile completamente mediante una sola equazione nelle coordinate grassmanniane.*

In altri termini proveremo che *ogni varietà algebrica a $t-1$ dimensioni, appartenente ad una grassmanniana V_t, è intersezione completa di V_t con una forma del suo spazio.*

§ 2. Dimostrazione geometrica del teorema fondamentale. Proprietà delle sezioni spaziali di V_t

7. *Equazione di un complesso in coordinate di punti.* Diremo che più punti di S_r sono *coniugati rispetto ad un dato complesso* α, di grado $n\geq 1$, quando essi stanno sopra un medesimo S_k del complesso.

Le $(k+1)$-ple di punti coniugati, delle quali faccia parte una k-pla genericamente fissata in S_r, stanno tutte (n. 2) in una ben determinata forma conica d'ordine n, che ha per vertice lo S_{k-1} individuato da quella k-pla. Se $f(x^{(0)})=0$ [14] è l'equazione di questo cono in coordinate omogenee

(14) Indicheremo con $x^{(0)}$ il punto di coordinate $x_0^{(0)},\cdots,x_r^{(0)}$ e con $f(x^{(0)})$ una forma nelle coordinate stesse.

$x_0^{(0)}, \cdots, x_r^{(0)}$ di punto, i coefficienti di f risulteranno funzioni algebriche ad un valore, e quindi funzioni razionali, dei gruppi di k punti $x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}$, variabili in S_r. Introducendo l'omogeneità anche nelle coordinate di questi punti variabili, l'equazione considerata si ridurrà alla forma

$$F(x_0^{(0)}, \cdots, x_r^{(0)}; \quad x_0^{(1)}, \cdots, x_r^{(1)}; \cdots; \quad x_0^{(k)}, \cdots, x_r^{(k)}) = 0,$$

o, come scriveremo brevemente: $F(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}) = 0$, ove F è simbolo di un polinomio omogeneo in ciascuna serie di variabili.

La $F = 0$ esprime la condizione di coniugio, rispetto ad α, di $k + 1$ punti $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$; e poichè tale condizione è simmetrica rispetto ai punti stessi, così la F deve risultare d'ordine n in ciascuna serie di variabili, sì che anzi fissati comunque k dei $k + 1$ punti $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$, essa rappresenti sempre un cono d'ordine n, avente il vertice nello S_{k-1} congiungente i punti fissati.

Osserviamo di passaggio che la nozione di punti coniugati rispetto ad un complesso α, si può ovviamente estendere, chiamando *coniugati* due spazî S_{k-i}, S_{i-1} $(i = 2, 3, \cdots, k)$ quando sono congiunti da (almeno) un S_k di α. Si vede subito che «gli S_{i-1} coniugati di un S_{k-i} generico formano, entro S_r, un complesso di grado n», ed inoltre che «fra questi S_{i-1}, quelli che giacciono in un dato $S_{r-k+i-1}$, formano ivi un complesso di grado n».

Risulta pure senz'altro, da quanto precede, che il fatto che la forma $F = 0$ rappresenti un complesso di S_k, *equivale* algebricamente a ciò: che le derivate di ordine $n - 1$ della F, rispetto alle variabili di una qualunque serie, si annullino identicamente quando le variabili della serie considerata s'identificano colle variabili (degli stessi indici) di una qualsiasi delle k serie rimanenti [15].

8. *Inesistenza di complessi di grado zero.* Tutto quanto s'è esposto nel n. prec. poggia sull'ipotesi che vi sia qualche S_k del dato complesso α, che appartenga ad un qualunque fascio di S_k. Potrebbe però sorgere il dubbio che non ogni complesso soddisfacesse a questa condizione. Per rendere completamente rigorose le deduzioni ulteriori, occorre appunto provare che *non può esistere un complesso di grado zero*, cioè un sistema, α, ∞^{t-1} di S_k, tale che in un fascio generico di S_k non vi sia alcun S_k di α.

È chiaro anzitutto che gli S_k $(k \geq 1)$ di α debbono riempire lo spazio ambiente S_r, perché se essi riempissero una varietà M_h ad $h < r$ dimensioni, per un punto generico P di M_h passerebbero $\infty^{t-1-h+k}$ spazi S_k di α, i quali dovrebbero giacere tutti sullo S_h tangente ad M_h in P. Ora in questo S_h gli S_k passanti per P dipendono da $k(h - k)$ parametri, numero che risulta inferiore a $t - 1 - h + k$.

È dunque assurdo ammettere che gli S_k di α non invadano S_r.

(15) Se $n = 1$, si dovrà esigere che F si annulli identicamente, allorchè s'identificano le variabili di due serie qualunque.

Ciò posto, suppongasi dimostrata la proprietà da stabilirsi per i complessi di spazi S_{k-1} entro S_{r-1}. Fissato un punto generico P di S_r e un iperpiano π, non contenente P, ogni S_k di α, per P, segna un S_{k-1} su π. Entro π si avranno in tal modo $\infty^{t-1-r+k}$ spazi S_{k-1}, formanti ivi un complesso $\bar{\alpha}$; e per ciò che si è ammesso, vi sarà un numero finito > 0, di spazi, di $\bar{\alpha}$ appartenenti ad un fascio generico di S_{k-1}, entro π. Proiettando da P, ne deriverà la proprietà analoga per α.

Saremo ridotti pertanto a provare che il teorema è vero pei complessi di rette di uno spazio S_d $(d = r - k + 1)$. Ora questo risulta subito dall'osservazione già fatta che le rette di un tal complesso debbono invadere S_d, sicchè quelle che passano per un punto generico P di S_d sono ∞^{d-2}, e riempiono perciò una forma conica, la quale è tagliata in un numero finito > 0 di generatrici da un fascio generico di rette col centro in P.

Osservazione. – È appena necessario di avvertire che il fascio di S_k con cui si sega il dato complesso α, potrà benissimo per particolari posizioni giacere interamente in α, ma che mai esso potrà non avere qualche S_k comune col dato complesso.

9. *La base minima delle varietà a $t-1$ dimensioni contenute in V_t.* Dimostreremo ora che:

Sulla V_t, le varietà algebriche a $t-1$ dimensioni, imagini dei complessi di grado n, si distribuiscono in un sol sistema lineare.

Cominciamo perciò a costruire sulla V un sistema Σ, ∞^{t-1} di rette, avente l'*indice* 1, cioè tale che per un punto generico di V passi una sola retta di Σ.

Un sistema siffatto s'ottiene subito per esempio nel modo seguente:

Nello S_r si fissi un punto O ed un iperpiano ω, che non si appartengano, e si considerino i fasci di S_k che hanno lo S_{k-1}-asse su ω e lo S_{k+1}-sostegno passante per O. È ben chiaro che un S_k generico di S_r appartiene ad uno solo di tali fasci, cosicchè questi hanno appunto per imagini sopra V ∞^{t-1} rette, formanti un sistema Σ, d'indice 1 (16).

Verifichiamo facilmente che *il sistema Σ non ammette varietà fondamentali a $t-1$ dimensioni*; cioè varietà che non siano tagliate in punti variabili da una retta variabile di Σ. Invero, poichè le rette di Σ, com'è evidente, non hanno punti fissi comuni, se esistesse una tale varietà fondamentale, esisterebbe in S_r un complesso di S_k non avente comune alcun S_k con un fascio generico appartenente al sistema sopra definito; il che è assurdo (n. 8, Oss.).

Ciò premesso, consideriamo due complessi α, β dello stesso grado n. Le varietà imagini A, B tagliano sopra una retta u di Σ due gruppi a, b

(16) Il sistema Σ può anche definirsi, sopra V, come il sistema delle rette di V appoggiate alla grassmanniana M_{t-k-1}, rappresentatrice degli S_k di ω, e alla grassmanniana N_{t-r+k}, rappresentatrice degli S_k per O.

di n punti. E poichè a , b sono equivalenti sulla u, così ne segue [17], che le A , B sono equivalenti sulla V.

Osservazione. – Prendendo come varietà B la sezione di V_t con una forma d'ordine n, il risultato stabilito può enunciarsi nel modo seguente:

L'ordine m di una qualunque varietà A, a $t-1$ dimensioni, tracciata su V_t, è multiplo dell'ordine $n_{r,k}$ di V_t ($m = n \cdot n_{r,k}$) e la A equivale sempre ad un multiplo (secondo n) di una sezione iperpiana di V_t.

In altri termini: *La base minima* [18] *delle varietà a $t-1$ dimensioni appartenenti a V_t è costituita da una sezione iperpiana.*

10. *Completezza dei sistemi lineari staccati su V_t dalle forme del suo spazio. Dimostrazione geometrica del teorema fondamentale.* Per stabilire il teorema I basterà ormai provare che *sulla V_t le forme d'un ordine arbitrario n, dello spazio S_ϱ, staccano un sistema lineare completo.* Le considerazioni svolte nel n. 7 ci mostrano anzitutto che il numero delle condizioni (lineari) indipendenti cui debbono soddisfare i coefficienti della forma F, affinchè $F = 0$ rappresenti un complesso di grado n, è funzione (razionale) soltanto di n , r , k; sicchè anche l'infinità dei complessi di dato grado n, cioè la dimensione del sistema lineare *completo*, che contiene (o coincide con) quello staccato su V_t dalle forme d'ordine n, risulterà, qualunque sia n, una certa funzione razionale $\varphi(n , r , k)$.

È poi chiaro che il numero delle condizioni affinchè una F si possa porre sotto forma di un polinomio omogeneo di grado n, nelle coordinate grassmanniane di un S_k, è pur funzione razionale delle sole n , r , k; e quindi la dimensione del sistema – forse parziale – staccato su V_t dalle forme d'ordine n, risulterà anch'essa una funzione razionale di n , r , k : $\psi(n , r , k)$.

(17) Se due varietà A , B, appartenenti a V_t, staccano gruppi equivalenti sulle curve di un sistema Σ d'indice ν, le νA , νB sono equivalenti o differiscono per varietà fondamentali di Σ. Vedi F. SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie*, Atti del R. Istituto Veneto, 70 (1911), pp. 373–382, n. 4 [Nota L, vol. II, p. 294; N.d.R.]. Per comodità del lettore, faccio qui il breve ragionamento che conviene al caso particolare del testo. Fissati tre iperpiani generici in S_ϱ, mediante la terna dei punti da essi staccati sopra una retta u di Σ, resta su questa fissato razionalmente un sistema di coordinate proiettive. Siano $a_1 , a_2 , \cdots , a_n$ le coordinate proiettive dei punti di a e $b_1 , b_2 , \cdots , b_n$ le coordinate proiettive dei punti di b. Allora la funzione

$$\frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)},$$

ove x è la coordinata proiettiva di un punto variabile sopra u, al variare di u entro Σ, risulta funzione razionale del punto variabile sopra V_t. Essa diviene infinita (di 1° ordine) lungo B e nulla (di 1° ordine) lungo A.

(18) Cfr. pel concetto di base minima: F. SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales de l'École Norm. de Paris, (3) 25 (1908), pp. 449–468 [Memoria XL; vol. I, p. 462; N.d.R.].

Ora, poichè V_t è priva di punti multipli (n. 4), il teorema da dimostrarsi è vero per $n \geq l$, ove l è un conveniente intero [19], per modo che, quando $n \geq l$, le due funzioni φ e ψ s'identificano. Ciò significa insomma che l'equazione algebrica in n, $\varphi = \psi$, è soddisfatta, comunque siano dati r, k, per infiniti valori di $n\,(\geq l)$, e quindi ch'essa è un'identità in n, r, k. Questo prova, come volevasi, che le forme di un ordine qualunque n staccano su V_t un sistema lineare completo.

Osservazione. – Si rileverà che, in particolare, per $n = 1$, il teorema ora dimostrato ci dice che *la varietà V_t è normale.*

11. *Confronto fra le varietà i cui punti rappresentano senza eccezioni gli S_k di un S_r.* Sia V_t' un'altra varietà, normale in un certo spazio S_d, i cui punti rappresentino biunivocamente, senza alcuna eccezione (come quelli di V_t) gli S_k di S_r. Nascerà allora tra V, V' una corrispondenza birazionale, senza eccezioni, chiamando omologhi due punti di V, V' imagini del medesimo S_k. Al sistema delle sezioni iperpiane di V' corrisponderà su V un sistema lineare completo, *senza punti base.* In forza dei teoremi dei nn. 9, 10, questo sistema coinciderà con quello staccato su V dalle forme di un certo ordine $n\,(\geq 1)$ dello spazio S_ϱ; e, se $n = 1$, il che accadrà allora e solo allora che le V, V' abbiano lo stesso ordine (e sia in conseguenza $d = \varrho$), le V, V' risulteranno omografiche. Dunque:

II. *Fra tutte le varietà i cui punti rappresentano biunivocamente senza eccezioni, gli S_k di un S_r, il modello grassmanniano V_t è quello di ordine minimo. Ogni altra varietà rappresentatrice normale, di ordine minimo, è una trasformata omografica di V_t.*

12. *Sistemi di S_k contenuti in un complesso lineare.* Considerazioni analoghe a quelle svolte per la varietà V_t si possono fare intorno alla sezione iperpiana W_{t-1} di V_t. Anzitutto proviamo che *W è razionale.*

Riprendiamo perciò a considerare il sistema Σ di rette di V_t, definito al n. 9. Basterà stabilire la razionalità di Σ, giacchè i punti di W sono biunivocamente riferiti alle rette di Σ.

Ora, nello S_r, la varietà dei fasci di S_k, che hanno lo S_{k-1}–asse su ω e lo S_{k+1}–sostegno passante per O, è birazionalmente identica alla varietà delle coppie punto–S_{k-1}, formate con un punto di un dato S_{r-k-1} e con un S_{k-1} di ω, cioè, in ultima analisi, alla varietà razionale delle $(k+1)$–ple di punti tolti rispettivamente da un S_{r-k-1} e da k spazî S_{r-k} dati.

Si può anche definire, entro W, un sistema Σ_1, d'indice 1, costituito da ∞^{t-2} rette, nel modo seguente: Si fissi in S_r un iperpiano ω ed una retta Ω generica e si considerino i fasci di S_k, appartenenti al complesso lineare w, che ha per imagine W, i quali hanno lo S_{k-1}–asse su ω e lo S_{k+1}–sostegno

(19) Cfr. F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, *28* (1909), n. 2 [Memoria XLIII, vol. II, p. 6; N.d.R.].

appoggiato ad Ω. Il sistema Σ_1, delle rette imagini di questi fasci, è precisamente tale che per un punto generico di W passa una sola retta di Σ_1. È inoltre chiaro che il sistema Σ_1 non ha punti base.

Può esistere in W una varietà M_{t-2} *fondamentale* pel sistema Σ_1, cioè tale che una retta generica di Σ_1 non incontri affatto M? Bisognerà ricercare se nel complesso lineare w possa esistere un sistema m, ∞^{t-2}, di S_k, tale che un fascio generico di S_k, appartenente a w, non abbia in comune con m alcun elemento; giacchè, in caso contrario, m avrebbe sempre in comune qualche elemento con un fascio *qualsiasi* contenuto in w, e quindi, in particolare, coi fasci sopra definiti. La questione che ora ci si affaccia, è l'analoga di quella già risoluta al n. 8 pel sistema Σ.

Ragionando come al n. 8, si vede intanto che, se gli S_k di un sistema ∞^{t-2}, m, non riempiono lo spazio S_r, ma sibbene una varietà di dimensione $h\,(\leq r-1)$, deve aver luogo la disuguaglianza:

$$k\,(h-k) \geq t-2-h+k, \qquad \text{cioè:} \quad (k+1)\,(r-h) \leq 2\,,$$

la quale, per $k > 1$, non è mai soddisfatta, e per $k = 1$ lo è soltanto quando sia $h = r-1$.

Ora, nel caso $k = 1$, se un sistema m di ∞^{t-2} rette, contenute in w, invade lo spazio S_r, per un punto generico P di S_r passa qualche retta di m, e quindi precisamente $\infty^{t-2-r+1}$; e queste ∞^{r-3} rette riempiono un cono ad $r-2$ dimensioni, il quale sta nell'iperpiano cui appartengono le rette di w passanti per P. Sicchè, nell'ipotesi considerata, m ha comune qualche retta con ogni fascio appartenente a w.

Che se poi, sempre nel caso $k = 1$, m riempie una forma H, questa è necessariamente un insieme di un numero finito [20] di iperpiani, perché per ogni punto di H passano ∞^{r-2} rette, che debbono stare sull'iperpiano tangente ad H in quel punto. Si conclude pertanto che, in tal caso, il complesso w è particolare, perché contiene degli S_{r-1} rigati (n. 5).

Proviamo infine che, pur nel caso $k > 1$, il fatto eccezionale richiesto si può presentare soltanto quando il complesso w sia particolare. Fissato invero un punto generico P_1, dello S_r, per esso passeranno $\infty^{t-2-(r-k)}$ spazî di m, i quali, se $k-1 > 1$, dovranno ancora invadere tutto lo S_r, perché essi staccano sopra un generico iperpiano un sistema $\infty^{t'-2}$ $[t' = k\,(r-k)]$ di S_{k-1}. Preso un altro punto generico P_2, per esso passeranno perciò $\infty^{t-2-2(r-k)}$ spazî di m, i quali, se $k-2 > 1$, dovranno invadere tutto lo S_r, perché staccano sopra un generico S_{r-2} un sistema $\infty^{t''-2}$ $[t'' = (k-1)\,(r-k)]$ di S_{k-2}. Così proseguendo, si arriva a fissare in S_r un gruppo $(P_1, P_2, \cdots, P_{k-1})$ di $k-1$ punti generici, pei quali passano $\infty^{2(r-k-1)}$ spazî di m formanti un sistema che indicheremo con $\overline{m}$.

Ora, per l'ipotesi che m sia un sistema eccezionale, nel senso spiegato, per un punto generico di S_r non deve più passare alcun S_k di $\overline{m}$, perché

(20) Oppure di un numero infinito, ma discreto, se il sistema m non è algebrico.

altrimenti per un generico S_{k-1}, passerebbero ∞^{r-k-2} spazî di m, situati sull'iperpiano del complesso w, individuato dall'S_{k-1}, e quindi un fascio appartenente a w, avrebbe sempre qualche S_k comune con m. Cosicchè il sistema $\overline{m}$ staccherà sopra un S_{r-k+1} generico un sistema di rette, distribuite in un numero finito di S_{r-k}, e quindi gli S_k di $\overline{m}$ saranno distribuiti in numero finito di iperpiani passanti per $(P_1, P_2, \cdots, P_{k-1})$. Ne consegue che il complesso w è particolare (n. 5) (21).

Applicando allora alla varietà W il ragionamento del n. 9, si conclude che:

La base minima, entro un complesso lineare generale di spazî S_k, è data dalla sezione di esso con un altro complesso lineare.

Se poi si avverte:

1°) che la varietà W, sezione iperpiana generica di V, non ha punti multipli;

2°) che la dimensione dell'unico sistema lineare completo formato entro w dai sistemi ∞^{t-2}, aventi in comune un dato numero n di spazi S_k con ogni fascio di S_k contenuto in w, non può essere funzione se non di n, r, k;

3°) che d'altra parte la dimensione del sistema lineare staccato su W delle forme d'ordine n di S_r, essendo espressa da

$$\varphi(n, r, k) - \varphi(n - 1, r, k) - 1$$

(ove φ è la funzione considerata al n. 10), dipende anch'essa soltanto da n, r, k, si conclude, come al n. 10, che « sopra W non ci sono che intersezioni complete », cioè che:

III. *Ogni sistema algebrico $\infty^{(k+1)(r-k)-2}$ di S_k, appartenente ad un complesso lineare generale, è rappresentabile compiutamente con una sola equazione nelle coordinate grassmanniane (oltre, beninteso, a quella del complesso).*

Osservazione. – È ormai chiaro che anche per le varietà rappresentatrici di un complesso lineare generale vale un teorema analogo al II.

13. *Proprietà dei sistemi di S_k che hanno per imagini le sezioni di V_t con spazî lineari.* Consideriamo ora le sezioni di V_t cogli spazî lineari di dimensione $\varrho - 2$, $\varrho - 3$, ecc.

Indichiamo con $W^{(i)}$ la varietà, di dimensione $t - i$, sezione di V_t con uno spazio lineare *generico* $S_{\varrho-i}$, e con $w^{(i)}$ il sistema di S_k, di cui essa è imagine. Supposto $i \leq r - k - 1$, si può costruire, nel modo seguente, entro $W^{(i)}$, un sistema Σ_i di rette, tale che per un punto di $W^{(i)}$ passi una sola retta del sistema.

(21) Se per esempio w fosse un complesso lineare speciale (n. 2) di asse Ω, esso conterrebbe effettivamente varietà eccezionali del tipo m. Una tal varietà sarebbe data ad esempio dall'insieme degli S_k appoggiati secondo rette ad un dato S_{r-k} per Ω.

Si fissi genericamente in S_r un iperpiano ω ed uno spazio Ω, ad i dimensioni, e si considerino i fasci di S_k, che appartengono a $w^{(i)}$ e che hanno lo S_{k-1}-asse su ω, e lo S_{k+1}-sostegno appoggiato in un punto ad Ω. Dato un S_k di $w^{(i)}$, questo sega ω in un S_{k-1}, e gli S_k di $w^{(i)}$, passanti per tale S_{k-1}, riempiono un S_{r-i}, che appoggiasi in un punto ad Ω. Questo punto, congiunto col dato S_k, dà luogo ad un S_{k+1}, sostegno di un fascio di S_k, appartenente a $w^{(i)}$ e contenente il dato S_k.

Un'analisi analoga a quella svolta diffusamente nel caso $i = 1$ e che omettiamo, perché dovremmo addentrarci in una discussione minuziosissima, che non offrirebbe gran che di concettualmente nuovo, prova che in $W^{(i)}$ non esistono varietà a $t - i - 1$ dimensioni, fondamentali pel sistema Σ_i (22), sicchè si può, come al solito, affermare che una sezione iperpiana costituisce sopra $W^{(i)}$ la base minima, e che le forme di un ordine qualunque staccano sopra $W^{(i)}$ un sistema completo.

Ciò vale per $i \leq r - k - 1$. Ma se $k > r - k - 1$, la conclusione a cui siamo pervenuti vale anche per $i \leq k$. Basta infatti osservare che la varietà grassmanniana d'indici (r, k) è omograficamente equivalente alla grassmanniana d'indici $(r, r - k - 1)$, giacchè dalla totalità degli S_k di S_r si passa alla totalità degli S_{r-k-1} di S_r, mediante una reciprocità dello spazio, la quale muta un complesso lineare di S_k in un complesso lineare di S_{r-k-1}. Si può dunque enunciare:

IV. *Entro un sistema* ∞^{t-1}, $w^{(i)}$, *di* S_k ($i \leq \chi$, *ove* χ *è il maggiore dei due interi* $k, r - k - 1$), *che sia base per un generico sistema lineare* ∞^{i-1} *di complessi lineari, non esistono altri sistemi algebrici* ∞^{t-i-1}, *all'infuori delle intersezioni complete di* $w^{(i)}$ *coi complessi dei varî gradi.*

Aggiungeremo che *ogni sistema* ∞^{t-i} *di* S_k, *base per un sistema lineare* ∞^{i-1} *di complessi lineari* ($i \leq \chi + 1$), *è razionale.*

Invero, appena sia dimostrata la cosa per $i = j$, ne segue per $i = j - 1$, giacchè la varietà $W^{(j-i)}$, avendo le sezioni iperpiane $W^{(j)}$ razionali, e contenendo inoltre un sistema Σ_{j-1}, d'indice 1, di rette, risulta birazionalmente identica alla varietà delle coppie di punti tolti risp. da un S_{t-j} e da una retta. Che poi il teorema sia vero per $i = r - k$, risulta subito da ciò, che gli S_k di un sistema $w^{(r-k)}$ risultano in corrispondenza biunivoca colle loro

(22) Così ad esempio nel caso $i = 2$ ci si trova a dover caratterizzare, in base alla disuguaglianza $(k + 1)(r - h) \leq 3$, che è soddisfatta per $k = 2, h = r - 1$, oppure $k = 1$, $h = r - 1$, una forma di S_r, contenente $\infty^{3(r-3)}$ piani od una forma contenente ∞^{2r-5} rette. Quanto alla prima, si vede subito, in modo analogo a quel che s'è fatto per $i = 1$, ch'essa è costituita da un numero finito d'iperpiani; quanto alla seconda, si risponde mediante la proposizione seguente: *Ogni forma irriducibile di* S_r, *contenente* ∞^{2r-5} *rette, o è una quadrica o un sistema* ∞^1 *di* S_{r-2} (Cfr. F. SEVERI, *Intorno ai punti doppi improprî di una superficie generale*, ecc., Rend. del Circolo mat. di Palermo, *15* (1901), n. 10 [Memoria VI, vol. I, p. 23; N.d.R.]). Veramente nella mia Nota citata, il teorema si trova per $r = 4$; ma il ragionamento si estende subito.

traccie sopra un dato iperpiano di S_r, in quanto appunto per un S_{k-1} di S_r passa un solo S_k di $w^{(r-k)}$.

L'identità proiettiva delle grassmanniane d'indici (r, k) ed $(r, r-k-1)$ prova infine che si può far crescere i fino al maggiore dei due interi $k+1$, $r-k$.

In particolare, dal teorema IV si trae che la sezione di V_t con un generico $S_{\varrho-i}$ $(i \leq \chi)$ è una varietà normale. Orbene, questa proprietà delle sezioni spaziali di V_t, vale indipendentemente dal vincolo $i \leq \chi$, cioè:

La sezione di V_t con uno spazio lineare generico, di dimensione qualunque, è una varietà normale.

Ciò segue come corollario immediato di una proprietà da me altrove dimostrata [23] per le varietà M_t a irregolarità superficiale nulla (cioè prive di sistemi continui completi non lineari di M_{t-1}), qual'è appunto la varietà razionale V_t.

14. *Questioni di realità.* Nella rappresentazione grassmanniana degli S_k di S_r, ogni S_k reale è evidentemente rappresentato da un punto reale e due S_k complessi-coniugati, da due punti complessi-coniugati di V_t; e quindi ad un punto reale di V_t non può che corrispondere un S_k reale di S_r.

Ciò posto, si vede facilmente che V_t è costituita da una sola *falda reale*, nel senso cioè che due punti reali qualunque di V_t si possono sempre congiungere con un cammino continuo reale, tutto giacente in V_t. E invero, dati in S_r due S_k reali, si possono per esempio considerare $k+1$ rette $a_0, a_1, \cdots, a_k$, che congiungano $k+1$ punti reali indipendenti $P_0, P_1, \cdots, P_k$ di uno degli S_k dati, ordinatamente con $k+1$ punti reali indipendenti $Q_0, Q_1, \cdots, Q_k$, dell'altro. Fissata poi una $(k+1)$-pla di punti reali $R_0, R_1, \cdots, R_k$, tolti genericamente da $a_0, a_1, \cdots, a_k$, si ponga fra le rette a_i, a_j $(i, j = 0, 1, \cdots, k)$ la proiettività $\begin{pmatrix} P_i Q_i R_i \\ P_j Q_j R_j \end{pmatrix}$. Una $(k+1)$-pla variabile di punti reali, omologhi in queste proiettività, sarà congiunta da *un* S_k reale, il quale descrive un sistema continuo ∞^1 contenente i due dati S_k.

L'analoga proprietà vale anche per la sezione $W^{(i)}$ di V_t con un $S_{\varrho-i}$ reale $(i \leq \chi+1)$. Proviamo anzitutto la cosa per $i = r-k$. Fissati due S_k reali, α, β, del sistema $w^{(r-k)}$, che ha per imagine $W^{(r-k)}$, e un generico iperpiano reale π di S_r, in forza di quanto precede, gli S_{k-1} traccie di α, β su π, potranno sempre esser « congiunti » da un sistema continuo reale ∞^1 di S_{k-1}. Da ognuno di questi S_{k-1} esce *un* S_k reale di $w^{(r-k)}$, e il luogo di questi S_k è appunto un sistema continuo ∞^1 contenente α, β. Si passa quindi da $i = r-k$ ad $i = r-k-1$, ecc.; ed in generale da $i = j$ ad $i = j-1$, osservando che $W^{(j-1)}$ contiene il sistema Σ_{j-1} di rette reali, e dà per sezione, con un iperpiano reale, una varietà $W^{(j)}$, formata d'una sola falda reale.

(23) *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (citata), nn. 14 e 17.

Si conclude dunque che:

V. *La varietà grassmanniana V_t è costituita da una sola falda reale ed è tagliata da un $S_{\varrho-i}$ reale ($i \leq \chi + 1$) secondo una varietà reale, costituita pure da una sola falda.*

15. *Rappresentazione parametrica della V_t.* Una rappresentazione birazionale assai semplice della V_t su di uno spazio S_t, si ottiene nel modo seguente:

Si ricordi che fissate $(k+1)(r-k)+1\ (=t+1)$ delle coordinate grassmanniane di un S_k, e siano per esempio il determinante y_0 delle prime $k+1$ colonne tolte dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti di S_r, ed i determinanti $y_1, y_2, \cdots, y_t$, ciascuno dei quali ha k colonne comuni col precedente, le altre coordinate dello S_k, *finchè sia* $y_0 \neq 0$, si esprimono razionalmente mediante $y_0, y_1, \cdots, y_t$ [24]. E viceversa, dato lo S_k, restano individuati i valori delle y (a meno, beninteso, d'un fattore di proporzionalità). Sicchè, ponendo $z_i = \frac{y_i}{y_0}$ $(i = 1, \cdots, t)$, e indicando con $u_0, u_1, \cdots, u_\varrho$ le coordinate omogenee di un punto dello S_ϱ, dalle espressioni cui si è alluso, seguono le formole che dànno le coordinate non omogenee $v_1, v_2, \cdots, v_\varrho$ di un punto di V_t (ove si è posto $v_i = \frac{u_i}{u_0}$ ed $u_0 = y_0, u_1 = y_1, \cdots, u_t = y_t$), come funzioni razionali invertibili delle coordinate non omogenee $z_1, \cdots, z_t$ di un punto d'un S_t. È chiaro che la rappresentazione ottenuta si lascia interpretare geometricamente come la proiezione di V_t sopra lo $S_t : u_{t-1} = \cdots = u_\varrho = 0$, dallo spazio $S_{\varrho-t-1} : u_0 = u_1 = \cdots = u_t = 0$. Dunque:

Esistono, nello spazio S_ϱ, spazi $S_{\varrho-t-1}$ tali, che da uno di essi la V_t proiettasi univocamente sopra uno spazio S_t.

Riducendo a forma intera le $\varrho - t$ relazioni che esprimono le v mediante le z – cioè mediante le $v_1, v_2, \cdots, v_t$ – e introducendo le coordinate omogenee u, si hanno le equazioni di altrettante forme – di cui alcune quadratiche, altre cubiche, ecc. – passanti per V e segantisi altrove secondo una varietà M. E poichè i punti della completa intersezione $V + M$, pei quali $u_0 \neq 0$, appartengono a V, così la M dovrà giacere sull'iperpiano $u_0 = 0$. Ciò è ben d'accordo con quanto si vedrà nel n. successivo.

Volendo illustrare in un caso concreto le considerazioni generali sopra esposte, ci riferiremo all'ipotesi $r = 4$, $k = 1$. Chiamati $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ due punti di S_4, e posto $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, la V_6 risulta intersezione completa delle 5 quadriche seguenti, che, come subito si verifica, sono linearmente indipendenti:

$$f_0 \equiv p_{01}p_{23} + p_{12}p_{03} + p_{02}p_{31} = 0, \quad f_1 \equiv p_{01}p_{24} + p_{12}p_{04} + p_{02}p_{41} = 0,$$
$$f_2 \equiv p_{01}p_{34} + p_{13}p_{04} + p_{03}p_{41} = 0, \quad f_3 \equiv p_{02}p_{34} + p_{23}p_{04} + p_{03}p_{42} = 0,$$
$$f_4 \equiv p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{13}p_{42} = 0.$$

(24) E. BERTINI, *op. cit.*, p. 38.

Risolvendo le prime tre equazioni rispetto a p_{23}, p_{24}, p_{34}, s'ottiene la rappresentazione parametrica di V_6 sullo spazio $S_6(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$:

$$p_{01} = \lambda_6^2, \quad p_{12} = -\lambda_0 \lambda_6, \quad p_{03} = \lambda_1 \lambda_6, \quad p_{13} = -\lambda_2 \lambda_6, \quad p_{02} = -\lambda_3 \lambda_6,$$

$$p_{04} = \lambda_4 \lambda_6, \quad p_{41} = \lambda_5 \lambda_6, \quad p_{23} = \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3, \quad p_{24} = \lambda_0 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_5,$$

$$p_{34} = \lambda_2 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_5.$$

Le $\varrho - t$ forme, di cui parlavamo in generale, sono appunto attualmente le $f_0 = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$ le quali si tagliano, fuori di V_6, in una M_6, del 3° ordine, appartenente all'iperpiano $p_{01} = 0$. Si ritrova così che le sezioni curvilinee di V_6 sono quintiche ellittiche normali, ecc., ecc.

La rappresentazione suddetta può interpretarsi come la proiezione di V_6 dal piano $p_{01} = p_{12} = p_{03} = p_{13} = p_{02} = p_{04} = p_{14} = 0$, sullo spazio S_6

$$p_{23} = p_{24} = p_{34} = 0.$$

Si osserverà anzi che, nel caso attuale, il centro di proiezione giace interamente sopra V_6.

16. *Proprietà delle sezioni spaziali di V_t.* Per ottenere altre proprietà, delle sezioni spaziali di V_t e più precisamente di quelle prodotte da spazi $S_{\varrho-i}$, ove i sorpassi il limite $\chi + 1$ considerato nel n. 13, dimostreremo il teorema generale seguente:

VI. *Se V_t è una qualunque varietà, d'irregolarità superficiale nulla, priva di punti multipli in uno spazio S_ϱ, sulla quale una sezione iperpiana generica costituisca la base minima, per la sezione di V_t con un generico $S_{\varrho-1}$ ($i = 0, 1, \cdots, t-1$), si presentano soltanto le alternative seguenti*:

a) *Il suo genere geometrico è nullo.*

b) *Il suo genere geometrico è uguale ad 1 ed il suo sistema canonico è d'ordine zero.*

c) *Essa è una varietà canonica o sottocanonica* (cioè le sue sezioni iperpiane sono varietà del sistema canonico o sottomultiple di tali varietà).

Il teorema, per quel che concerne V_t, è pressochè evidente, in quanto, se V_t ha il genere geometrico > 0 ed il sistema canonico d'ordine > 0, una sua varietà canonica K equivarrà ad un multiplo, per esempio secondo λ, della sezione iperpiana A, che forma la base minima. L'ipotesi che l'irregolarità superficiale di V_t sia nulla, è però essenziale per questa deduzione, chè altrimenti si potrebbe dire soltanto che K e λA sono « algebricamente equivalenti ». Si osserverà inoltre che la V_t dovrà essere priva di varietà eccezionali di 1ª specie, perché, in caso diverso, queste dovrebbero entrare nella base; cosicchè il sistema $|K|$, cui sopra s'è alluso, è il sistema canonico « puro ».

Conducansi adesso genericamente per V_t $\varrho - t$ forme degli ordini

$$n_1, n_2, \cdots, n_{\varrho-t} \quad (\nu = n_1 + n_2 + \cdots + n_{\varrho-t}),$$

le quali si taglino altrove lungo una M_t, appoggiata a V_t secondo una Φ_{t-1}. Si sa [25] che come *forme aggiunte* alla V_t, possono assumersi le forme passanti per Φ; ed inoltre che l'eventuale sistema canonico (puro) su V_t è staccato, fuori di Φ, dalle aggiunte d'ordine $\nu - \varrho - 1$. Quanto alla Φ, essa, come ogni altra varietà algebrica a $t-1$ dimensioni tracciata su V_t, dovrà esser equivalente ad un multiplo della sezione iperpiana A: sia per esempio $\Phi \equiv \mu A$.

La V_t avrà allora il genere nullo, se $\mu > \nu - \varrho - 1$; il genere uguale ad 1, se $\mu = \nu - \varrho - 1$; sarà canonica, se $\mu = \nu - \varrho - 2$; e infine sottocanonica, se $\mu < \nu - \varrho - 2$. Tagliando tutto con un generico $S_{\varrho-i}$, la W_{t-i}, staccata su V_t, sarà anch'essa priva di punti multipli e intersezione parziale di $\varrho - t$ forme, degli ordini $n_1, n_2, \cdots, n_{\varrho-t}$, segantisi altrove in una N_{t-i} – sezione di M_t – appoggiata a W secondo una Ψ_{t-i-1} – sezione di Φ_{t-1} –; ed inoltre Ψ risulterà equivalente al multiplo secondo μ d'una sezione iperpiana di W.

Di più anche W avrà l'irregolarità superficiale nulla [26], e quindi varrà pel suo eventuale sistema canonico tutto quanto s'è detto pel sistema canonico di V_t. La W sarà cioè di genere nullo, se $\mu > \nu - \varrho + i - 1$; di genere 1 e a sistema canonico d'ordine zero, se $\mu = \nu - \varrho + i - 1$; canonica se $\mu = \nu - \varrho + i - 2$; sottocanonica, se $\mu < \nu - \varrho + i - 2$. C'è da avvertire soltanto che, nel caso attuale, non si può escludere a priori che W sia priva di varietà eccezionali di 1ª specie, in quanto non si sa che il numero base di W sia uguale ad 1. Sicchè su W il sistema canonico staccato dalle aggiunte, fuori di Ψ, può essere eventualmente « impuro ».

Qualora V_t sia di genere geometrico nullo, ma la sua curva sezione con un generico $S_{\varrho-t+1}$ sia di genere > 0, dovrà risultare

$$\nu - \varrho - 1 < \mu \leq \nu - \varrho + t - 2 ,$$

e quindi esisterà un valore di i, fra 1 e $t-1$, tale che $\nu - \varrho + i - 1 = \mu$; e qualora questo valore di i sia $t-1$, le curve sezioni di V_t saranno ellittiche e le varietà superiori di genere nullo. Che se invece quel valore di i è minore di $t-1$, la W_{t-i} corrispondente sarà a sistema canonico d'ordine zero, le sezioni superiori di genere nullo, la sezione immediatamente inferiore sarà canonica e le successive sottocanoniche.

Applichiamo tutto ciò ad una grassmanniana V_t d'indici (r, k), ricordando (nn. 10, 13) ch'essa e tutte le sue sezioni spaziali sono varietà normali. Anzitutto, l'unico caso in cui le sezioni spaziali di V_t, fino alle sezioni curvilinee, sono di genere nullo, è il caso $r = 3$, $k = 1$, perché secondo la formola di Schubert [citata alla nota [9]] l'ordine delle sezioni curvilinee (curve razionali normali, in tal caso) si riduce alla dimensione $\varrho - t + 1$ del relativo spazio ambiente, soltanto nel caso suddetto. E similmente, l'unico

(25) Cfr. F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione* (citata), §§ 2, 3. Ivi si tratta di forme aggiunte a curve e superficie; ma la trattazione si estende subito alle varietà superiori.

(26) Loc. citato alla nota (23).

caso in cui le sezioni curvilinee di V_t sono ellittiche, è il caso $r = 4$, $k = 1$ (o il caso duale $r = 4$, $k = 2$). Si conclude che:

VII. *Le sezioni spaziali di una grassmanniana V_t sono tutte di genere nullo, solo quando V_t ha gli indici* (3, 1). *Nel caso successivo* (4, 1), *o nel caso duale* (4, 2), *le sezioni curvilinee sono ellittiche e le sezioni superiori di genere geometrico nullo. In tutti gli altri casi esiste una tal dimensione $l\,(> \varrho - t + 1)$ dello spazio lineare secante, che le sezioni corrispondenti sono varietà a sistema canonico d'ordine zero, la sezione spaziale immediatamente inferiore è canonica e le successive sottocanoniche, mentre le sezioni superiori hanno il genere geometrico nullo.*

Così per esempio per gli indici (5, 1) le sezioni curvilinee di V_8, che è una varietà del 14° ordine dello S_{14}, sono curve canoniche del genere 8; le sezioni superficiali, superficie regolari a curva canonica d'ordine zero, e le sezioni superiori, varietà di genere geometrico nullo.

Una maggiore determinazione del teor. VII, per $k = 1$ ed r qualunque, si vedrà nel n. seguente.

17. *Formula di postulazione della varietà V_t. Modo di calcolare l'ordine e i generi aritmetici delle sezioni spaziali di V_t.* Indichiamo con π_{t-i} il genere aritmetico della sezione $W^{(i)}_{t-i}$ di V_t con un generico $S_{\varrho-i}$ $(i = 0, \cdots, t)$, cosicchè π_t sarà il genere aritmetico e $\pi_0 + 1\,(= n_{r,k})$ l'ordine di V [27].

Per $i \leq \chi + 1$ (n. 13) sappiamo già che $\pi_{t-i} = 0$, in quanto la relativa $W^{(i)}$ è razionale. Ne deriva che, per n abbastanza alto $(\geq l)$, la postulazione di V_t per le forme d'ordine n sarà espressa da [28]:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Phi(n, r, k) = &\binom{n+t}{t}(\pi_0 + 1) - \binom{n+t-1}{t-1}(\pi_0 + \pi_1) + \\ &+ \binom{n+t-2}{t-2}(\pi_1 + \pi_2) - \cdots \\ &+ (-1)^{t-\chi-2}\binom{n+\chi+2}{\chi+2}(\pi_{t-\chi-3} + \pi_{t-\chi-2}) + \\ &+ (-1)^{t-\chi-1}\binom{n+\chi+1}{\chi+1}\pi_{t-\chi-2}\,. \end{aligned}$$

Ora, la dimensione del sistema staccato su V_t dalle forme di un ordine qualunque n, è data dalla funzione $\varphi(n, r, k)$, considerata nel n. 10; dunque, per $n \geq l$, si avrà:

$$(2)\qquad \Phi(n, r, k) = \varphi(n, r, k) + 1\,,$$

(27) Cfr. la mia Memoria citata, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, n. 4.

(28) *Ibidem*, n. 4 e nn. 30, 31.

donde intanto segue, come è del resto intuitivo, che Φ dipende soltanto da n, r, k. Se adesso si osserva che ciascuno dei due membri della (2), per valori comunque dati di r, k, dipende razionalmente da n (è anzi un polinomio in n) e che d'altronde la (2) vale per infiniti valori di n (quelli non inferiori ad l), si conclude ch'essa riducesi ad un'identità in n, r, k, cioè che *la formula di postulazione* (1) *vale per ogni valore di* n.

Questa osservazione offre il modo di calcolare i generi aritmetici π, ogni volta si conosca l'espressione effettiva di φ. Non sarebbe difficile ottenere quest'espressione, tenendo conto delle considerazioni che svolgeremo nella dimostrazione algebrica del teor. I, ed estendendo il computo fatto dal Sisam nel caso particolare $k = 1$ [29]; noi non c'intratterremo diffusamente su tale questione, limitandoci ad osservare che, appunto nel caso $k = 1$, mediante l'espressione di φ, esplicitamente calcolata dal Sisam, essendo

$$\chi = r - 2 , \qquad t = 2(r - 1) ,$$

la (1) dà:

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+r}{r}\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+2r-2}{2r-2}(\pi_0+1) - \binom{n+2r-3}{2r-3}(\pi_0+\pi_1) + \cdots$$

$$+ (-1)^{r-2}\binom{n+r}{r}(\pi_{r-3}+\pi_{r-2}) + (-1)^{r-1}\binom{n+r-1}{r-1}\pi_{r-2} .$$

Facendo in questa $n = -r$, se ne ricava $\pi_{r-2} = 0$, e ponendo poi

$$n = -r-1 , \quad -r-2 , \cdots , \quad -2r+2 ,$$

si ottengono successivamente i valori di π_{r-3}, π_{r-4}, $\cdots$, π_1, π_0. Si trova così:

$$\pi_{r-3} = 1 , \quad \pi_{r-4} = \binom{r}{2} - 2 , \quad \pi_{r-5} = 2\binom{r+1}{4} - 2\binom{r}{2} + 3 , \cdots$$

e si conclude che:

VIII. *La sezione della grassmanniana* V_{2r-2} *di* $S_\varrho\left[\varrho = \binom{r+1}{2} - 1\right]$ *rappresentatrice delle rette di* S_r, *con un generico* $S_{\varrho-r-1}$, *ha il sistema canonico di ordine zero ed il genere uguale ad* 1. *Le sezioni di* V *cogli spazi superiori hanno tutte il genere nullo e sono razionali – tranne al più la sezione con un* $S_{\varrho-r}$ –; *la sezione con un* $S_{\varrho-r-2}$ *è una varietà canonica e le sezioni con spazi inferiori* $S_{\varrho-r-i}$ $(i = 3, 4, \cdots, r-3)$ *sono varietà sottocanoniche di indice* $i - 1$ (cioè tali che il multiplo secondo $i - 1$ delle loro sezioni iperpiane, costituisce su ognuna di esse, il relativo sistema canonico).

Così ad esempio
per $r = 5$, $k = 1$ si ha:

$$\pi_0 = 13 , \quad \pi_1 = 8, \quad \pi_2 = 1$$

$$\pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \pi_7 = \pi_8 = 0 ;$$

(29) *Loc. cit.* nella Prefazione.

per $r = 6$, $k = 1$:

$$\pi_0 = 41\,, \quad \pi_1 = 43\,, \quad \pi_2 = 13\,, \quad \pi_3 = 1\,,$$
$$\pi_4 = \cdots = \pi_{10} = 0\,;$$

per $r = 7$, $k = 1$:

$$\pi_0 = 131\,, \quad \pi_1 = 199\,, \quad \pi_2 = 101\,, \quad \pi_3 = 19\,, \quad \pi_4 = 1\,,$$
$$\pi_5 = \cdots = \pi_{12} = 0;\ \text{ecc.}$$

Nell'enunciato precedente abbiamo parlato dei generi delle sezioni considerate, senza distinguere i generi aritmetici dai geometrici, perché *la sezione di V_t con un $S_{\varrho-i}$ ha sempre l'irregolarità $(t-i)$-dimensionale nulla.* Ciò segue agevolmente dalle proprietà generali di una varietà algebrica, che ho esposto altrove [30].

Osservazione. – La determinazione dei generi π, anche per una varietà grassmanniana d'indici (r, k), con $k > 1$, può ritenersi virtualmente fatta non appena si conosca la *dimensione* della sezione spaziale di genere 1.

§ 3. Dimostrazione algoritmica del teorema fondamentale

18. *Identità fondamentali.* Conserviamo le notazioni introdotte nel n. 7. Il teorema di Eulero, applicato alla forma algebrica F, dà luogo alle identità:

$$nF \equiv \sum_{i_0} x^{(0)}_{i_0} \frac{\partial F}{\partial x^{(0)}_{i_0}}\,, \qquad n\,\frac{\partial F}{\partial x^{(0)}_{i_0}} \equiv \sum_{i_1} x^{(1)}_{i_1}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^{(0)}_{i_0}\,\partial x^{(1)}_{i_1}}\,, \cdots,$$

$$n\,\frac{\partial^k F}{\partial x^{(0)}_{i_0}\cdots\partial x^{(k-1)}_{i_{k-1}}} \equiv \sum_{i_k} x^{(k)}_{i_k}\,\frac{\partial^{k+1} F}{\partial x^{(0)}_{i_0}\cdots\partial x^{(k)}_{i_k}}\,,$$

ove gl'indici i variano da 0 ad r. Da queste poi segue:

$$(1) \qquad n^{k+1}F \equiv \sum_{i_0 i_1 \cdots i_k} x^{(0)}_{i_0}\,x^{(1)}_{i_1}\cdots x^{(k)}_{i_k}\,\frac{\partial^{k+1} F}{\partial x^{(0)}_{i_0}\,\partial x^{(1)}_{i_1}\cdots\partial x^{(k)}_{i_k}}\,.$$

Inoltre, poichè dati k dei punti $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$, e siano per esempio $x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}$ la $F = 0$ deve rappresentare un cono col vertice nello S_{k-1} $(x^{(1)}, \cdots, x^{(k)})$, l'iperpiano polare di un punto qualunque $x^{(0)}$ dello S_r, rispetto ad $F = 0$, passerà pei punti $x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}$. Avremo pertanto le identità:

$$(2) \qquad \sum_{i_h} x^{(j)}_{i_h}\,\frac{\partial F}{\partial x^{(h)}_{i_h}} \equiv 0 \qquad (h \neq j\,;\ h, j = 0, 1, \cdots, k)\,.$$

La (1) vale qualunque sia la forma F d'ordine n nelle $k+1$ serie di variabili $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$; mentre le (2) *caratterizzano* (n. 7) le forme F che, uguagliate a zero, rappresentano complessi di S_k.

(30) *Fondamenti* (citata), nn. 32, 33, 34. Naturalmente l'affermazione del testo è subordinata alle stesse ipotesi fatte nel mio lavoro citato.

Proviamo ora che se $F = 0$ *è l'equazione di un complesso di grado* n *di* S_k, *ha pur luogo l'identità*:

$$(3) \qquad \pm n^{k+1-\nu} F \equiv \sum_{i_0 i_1 \cdots i_k} x_{i_0}^{(j_0)} x_{i_1}^{(j_1)} \cdots x_{i_k}^{(j_k)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \cdots \partial x_{i_k}^{(k)}},$$

ove $(j_0, j_1, \cdots, j_k)$ *è una fissata permutazione* S *degli apici* $(0, 1, \cdots, k)$ *e* $\nu = \sum_{i=1}^{m} (\nu_i - 1)$, *essendo* $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m$ *gli ordini dei cicli in cui si decompone la* S. *Si dovrà inoltre scegliere il segno* $+$ *o il segno* $-$, *secondo che* S *è pari o dispari.*

Dimostreremo la (3) per induzione, supponendola già stabilita per le forme di k serie di $r + 1$ variabili (forme relative a complessi di S_{k-1} in S_r). Poichè la (3) è vera per le forme di una sola serie di variabili (in quanto allora essa riducesi alla identità di Eulero), quando l'avremo dedotta per forme di $k + 1$ serie di variabili, essa risulterà stabilita in generale.

Per non complicare soverchiamente le notazioni, supponiamo per esempio che sia 0 uno degli apici che viene spostato dalla permutazione S e che sia $C \equiv (0, 1, \cdots, h)$ il ciclo individuato dall'apice 0 entro S.

La S subordini inoltre fra gli apici restanti $h + 1, \cdots, k$ la sostituzione $T \equiv \begin{pmatrix} a, \cdots, l \\ h+1, \cdots, k \end{pmatrix}$, talchè sia $S \equiv CT$. Per l'ipotesi che $F = 0$ rappresenti un complesso di S_k, varrà l'identità

$$\sum_{i_0} x_{i_0}^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_{i_0}^{(0)}} \equiv 0,$$

che si ottiene dalla (2) per $h = 0$, $j = 1$. Derivando una volta rispetto a ciascuna delle variabili $x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \cdots, x_{i_k}^{(k)}$, ne trarremo:

$$\sum_{i_0} x_{i_0}^{(1)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \cdots \partial x_{i_k}^{(k)}} + \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \cdots \partial x_{i_k}^{(k)}} \equiv 0.$$

Moltiplichiamo ora i due membri di quest'identità per

$$x_{i_1}^{(2)} x_{i_2}^{(3)} \cdots x_{i_{h-1}}^{(h)} x_{i_h}^{(0)} x_{i_{h+1}}^{(a)} \cdots x_{i_k}^{(l)}$$

e sommiamo rispetto ad $i_1, i_2, \cdots, i_k$ (da 0 ad r). Avremo:

$$(4) \qquad \sum_{i_0 i_1 \cdots i_k} x_{i_0}^{(1)} x_{i_1}^{(2)} \cdots x_{i_{h-1}}^{(h)} x_{i_h}^{(0)} x_{i_{h+1}}^{(a)} \cdots x_{i_k}^{(l)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \cdots \partial x_{i_k}^{(k)}} +$$

$$+ \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} x_{i_1}^{(2)} x_{i_2}^{(3)} \cdots x_{i_h}^{(0)} x_{i_{h+1}}^{(a)} \cdots x_{i_k}^{(l)} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \cdots \partial x_{i_k}^{(k)}} \equiv 0.$$

Osserviamo che il secondo sommatorio non è che l'espressione trasformata di

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} x_{i_1}^{(0)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_k}^{(k)} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \cdots \partial x_{i_k}^{(k)}}$$

qualora si operi ivi sugli apici $0, 2, \cdots, k$ dei coefficienti $x^{(0)}_{i_1} \cdots x^{(k)}_{i_k}$ delle derivate, la sostituzione $S' \equiv C'T$, ove s'è indicato con C' il ciclo $(0, 2, 3, \cdots, h)$. Avendo ammesso la validità della (3) pei complessi di S_{k-1}, poichè la $F = 0$, qualora si assumano come variabili soltanto quelle delle serie $x^{(0)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$, rappresenta appunto un complesso di S_{k-1} in S_r, potremo scrivere:

$$(5) \qquad \pm n^{k-\nu'} F \equiv \sum_{i_1 i_2 \cdots i_k} x^{(2)}_{i_1} x^{(3)}_{i_2} \cdots x^{(0)}_{i_h} x^{(a)}_{i_{h+1}} \cdots x^{(l)}_{i_k} \frac{\partial^k F}{\partial x^{(0)}_{i_1} \partial x^{(2)}_{i_2} \cdots \partial x^{(k)}_{i_k}},$$

dove ν' è il numero analogo a ν, ma relativo alla sostituzione S', ed il segno da assumersi è il $+$ od il $-$, secondo che S' è pari o dispari.

Se ora si tiene conto del fatto che:

$$S \equiv CT \equiv (0, 1)\, C'T \equiv (0, 1)\, S',$$

e quindi che $\nu = \nu' + 1$ e che S ed S' sono di classe opposta, dalle (4), (5) segue senz'altro la (3).

19. *Il simbolo operativo* $\Delta_{x^{(0)}_{i_0} x^{(1)}_{i_1} \cdots x^{(k)}_{i_k}}$ *e le sue proprietà.* Rappresentiamo con questo simbolo lo sviluppo del determinante che ha per termine principale $\frac{\partial}{\partial x^{(0)}_{i_0}} \times \frac{\partial}{\partial x^{(1)}_{i_1}} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial x^{(k)}_{i_k}}$, ove $(i_0, i_1, \cdots, i_k)$ è una fissata permutazione di $(0, 1, \cdots, k)$; e notiamo alcune proprietà di tal simbolo, le quali ci saranno tosto utili.

a) Se F è una forma qualunque d'ordine n, nelle serie di variabili $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$, l'espressione $G \equiv \Delta_{x^{(0)}_{i_0} \cdots x^{(k)}_{i_k}} F$ è una forma d'ordine $n - 1$ in ciascuna delle serie $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$. La cosa è senz'altro evidente.

b) Qualunque sia la forma F, delle $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$, l'espressione G si annulla identicamente, quando nel simbolo Δ s'identifichino le variabili degli stessi indici, di due serie diverse. Infatti, in tale ipotesi, s'identificano due linee del determinante simbolico che definisce Δ.

c) *Se poi* F *è una tal forma delle* $x^{(0)}, \cdots, x^{(k)}$, *che* $F = 0$ *rappresenti un complesso di grado* n *di* S_k, $G = 0$ *rappresenterà in conseguenza un complesso di grado* $n - 1$ *di* S_k.

Per dimostrar questo, basterà provare che le derivate di ordine $n - 2$ di G, rispetto alle variabili di una qualunque serie, e sia per esempio $x^{(k)}$, si annullano identicamente quando le $x^{(k)}$ coincidano ordinatamente colle variabili di un'altra serie (n. 7).

Al fine di non complicare le notazioni, nel calcolo successivo sopprimeremo l'apice k nelle $x^{(k)}$. Tenendo conto della definizione del simbolo Δ, si ha subito:

$$(6) \qquad \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_r^{\alpha_r}} \equiv \sum_{j_0 j_1 \cdots j_k} \varepsilon_{j_0 j_1 \cdots j_k} \frac{\partial^{n+k-1} F}{\partial x^{(0)}_{j_0} \partial x^{(1)}_{j_1} \cdots \partial x^{(k-1)}_{j_{k-1}} \partial x_0^{\alpha_0} \cdots \partial x_{j_k}^{\alpha_{j_k}+1} \cdots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n - 2),$$

ove $(j_0, j_1, \cdots, j_k)$ è una permutazione di $(i_0, i_1, \cdots, i_k)$ ed $\varepsilon_{j_0 j_1 \cdots j_k}$ è l'unità positiva o negativa secondo che $(j_0, j_1, \cdots, j_k)$ ed $(i_0, i_1, \cdots, i_k)$ sono della stessa classe o di classe opposta.

Per l'ipotesi che l'equazione $F = 0$ rappresenti un complesso di grado n di S_k, la

$$H \equiv \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x_0^{a_0} \cdots \partial x_{j_k}^{a_{j_k}+1} \cdots \partial x_r^{a_r}}$$

s'annulla identicamente, quando le x coincidono colle variabili di un'altra serie. Ora, poichè H è una forma lineare nelle x, questo fatto, a cagione del teorema di Eulero, può esprimersi mediante le identità

$$\sum_i x_i^{(h)} \frac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0 \qquad (h = 0, 1, \cdots, k-1),$$

ove *le* $\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$ *non dipendono dalle* x (mentre sono forme di ordine n nelle $x^{(0)}$, $x^{(1)}, \cdots, x^{(k-1)}$).

Negli sviluppi successivi, per fissare le idee, supporremo ad esempio $h = 0$. Dalla $\sum_i x_i^{(0)} \dfrac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0$, derivando allora una volta rispetto a ciascuna delle variabili $x_{j_0}^{(0)}, x_{j_1}^{(1)}, \cdots, x_{j_{k-1}}^{(k-1)}$, si trae:

$$(7) \qquad \sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial^{k+1} H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_i} + \frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} \equiv 0 .$$

Ciò posto, si osservi che, per essere la $\dfrac{\partial^k H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}}$ lineare nelle x, ha luogo pure l'identità

$$\frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} \equiv \sum_i x_i \frac{\partial^{k+1} H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_i} ,$$

la quale, confrontata colla (7), porge

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} \right)_{x = x^{(0)}} \equiv - \frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0} \partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} .$$

E dalle (6), (8) in definitiva si trae:

$$\left(\frac{\partial^{n-2} G}{\partial x_0^{a_0} \partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_r^{a_r}} \right)_{x = x^{(0)}} \equiv$$

$$\equiv - \sum \varepsilon_{j_0 j_1 \cdots j_k} \frac{\partial^{n+k-1} F}{\partial x_{j_1}^{(1)} \cdots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_{j_0}^{a_{j_0}+1} \partial x_0^{a_0} \cdots \partial x_{j_k}^{a_{j_k}+1} \cdots \partial x_r^{a_r}} \equiv$$

$$\equiv - \frac{\partial^{n-2} \Delta_{x_{i_0}^{(k)} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_k}^{(k)}} F}{\partial x_0^{a_0} \partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_r^{a_r}} .$$

Relazioni analoghe si avrebbero per $h = 1, 2, \cdots, k-1$. Ricordando infine la proprietà *b*) del simbolo Δ, si conclude coll'enunciato *c*).

20. *Dimostrazione algoritmica del teorema I.* Indicando con $X_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ il determinante che ha per termine principale $x^{(0)}_{i_0} x^{(1)}_{i_1} \cdots x^{(k)}_{i_k}$, consideriamo l'espressione

$$\sum_{i_0 i_1 \cdots i_k} X_{i_0 i_1 \cdots i_k} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x^{(0)}_{i_0} \partial x^{(1)}_{i_1} \cdots \partial x^{(k)}_{i_k}}, \tag{9}$$

ove $F = 0$ sia l'equazione di un complesso di grado n di S_k. Se al posto di $X_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ sostituiamo il suo sviluppo, la (9) si risolverà in una somma algebrica di espressioni deducibili dal secondo membro della (1), permutando nei varî modi possibili gli apici $0, 1, \cdots, k$, che compajono nel coefficiente della derivata soggetta al sommatorio, e attribuendo a ciascuna di tali espressioni il segno $+$ o $-$ secondo che la permutazione eseguita è pari o dispari. Ciascuna delle espressioni sui s'allude, alla sua volta, in virtù delle identità (3), uguaglia la forma F moltiplicata per una costante positiva o negativa, secondo che la permutazione eseguita è pari o dispari. Indicando con μ un numero intero positivo (somma di convenienti potenze di n), s'avrà pertanto l'identità:

$$\mu F \equiv \sum_{i_0 i_1 \cdots i_k} X_{i_0 i_1 \cdots i_k} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x^{(0)}_{i_0} \partial x^{(1)}_{i_1} \cdots \partial x^{(k)}_{i_k}}, \tag{10}$$

ove il sommatorio è esteso, come di consueto, alle *disposizioni* semplici degli indici $0, 1, \cdots, r$ a $k+1$ a $k+1$. A causa della definizione del simbolo Δ, è chiaro che la (10) potrà anche scriversi sotto la forma

$$\mu F \equiv \sum_{i_0 i_1 \cdots i_k} X_{i_0 i_1 \cdots i_k} \Delta_{x^{(0)}_{i_0} x^{(1)}_{i_1} \cdots x^{(k)}_{i_k}} F, \tag{11}$$

in cui il sommatorio è ora esteso alle *combinazioni* semplici di classe $k+1$ degl'indici $0, 1, \cdots, r$. In particolare, se $n = 1$, $\Delta_{x^{(0)}_{i_0} \cdots x^{(k)}_{i_k}} F$ è una costante, e la (11) dimostra il teor. I pei complessi lineari.

Che se poi si suppone stabilito il teor. I pei complessi d'ordine $n-1$, in forza della proprietà *c*) del simbolo Δ, ne seguirà subito, mediante la (11), la validità del teorema anche pei complessi di grado qualunque n.

Osservazione. – Il teor. I, nel suo aspetto algebrico, afferma in sostanza che appena la forma $F(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(k)})$, di ordine n, soddisfa alle condizioni indicate alla fine del n. 7, la F può anche considerarsi come una forma di ordine n nei determinanti X.

Si può dunque enunciare che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma algebrica F, di ordine n, in k + 1 serie di r + 1 variabili, possa esprimersi come forma d'ordine n nei determinanti di grado k + 1 estratti dalla matrice delle variabili, è che le derivate d'ordine n − 1 della F, rispetto alle variabili di ogni prefissata serie, si annullino identicamente quando le*

variabili di questa serie si eguaglino a quelle (degli stessi indici) di un'altra serie qualunque.

La necessità della condizione enunciata è pressochè evidente. In particolare, per $k = r$, si ha una caratterizzazione algebrico-funzionale della potenza n-esima di un determinante.

Per contare da quanti parametri dipende un complesso di grado n, di spazî S_k in S_r (numero che abbiamo già indicato con $\varphi(n, r, k)$), basterebbe ormai sceverare quante delle suddette condizioni lineari, imposte ai coefficienti della forma F, sono tra loro indipendenti. È – come abbiamo già ricordato – ciò che ha fatto il Sisam nel caso $k = 1$.

21. *La base del modulo costituito dalle forme passanti per la grassmanniana V_t.* Come già abbiamo accennato nella prefazione, ci limiteremo a trattare la questione nel caso $k = 1$, poichè nel caso generale non abbiamo potuto mettere la mano sopra un simbolismo, che ci permettesse di esporre la dimostrazione senza soverchie complicazioni formali.

Indicheremo con p_{ik} le coordinate grassmanniane di una retta in S_r, cioè porremo:

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, r), \tag{12}$$

ove $(x_0, x_1, \cdots, x_r)(y_0, y_1, \cdots, y_r)$ sono le coordinate omogenee di due punti della S_r.

Fra le p sussistono le relazioni quadratiche

$$p_{kh} p_{ij} + p_{ki} p_{jh} + p_{kj} p_{hi} = 0 \qquad (h, k, i, j = 0, 1, \cdots, r), \tag{13}$$

che si riducono (n. 17) a $\binom{\varrho + 2}{2} - \frac{1}{3}\binom{r+2}{2}\binom{r+1}{2}$ linearmente indipendenti.

Sia $f(p_{01}, \cdots, p_{r-1,r})$ una forma d'ordine n nelle p, la quale, in virtù delle (12), si muti identicamente nella $F(x_0, \cdots, x_r; y_0, \cdots, y_r)$. Avremo allora:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_{hi}} y_i, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial p_{hi}} \equiv \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{jk}} x_j,$$

ove i sommatori si estendano ad $i, j = 0, 1, \cdots, r$, tenendo presente che $\frac{\partial f}{\partial p_{hi}} \equiv -\frac{\partial f}{\partial p_{ih}}$ e $\frac{\partial f}{\partial p_{hh}} \equiv 0$. Dalle precedenti si trae:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial x_h} &\equiv \sum_i \sum_j x_j y_i \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{jk}} + \frac{\partial f}{\partial p_{hk}}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial x_k} &\equiv \sum_i \sum_j x_j y_i \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki} \partial p_{jh}} + \frac{\partial f}{\partial p_{kh}}, \end{aligned} \tag{14}$$

la seconda delle quali, ove si scambino tra loro gli indici i, j, può scriversi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial x_k} \equiv \sum_{ij} x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ih} \partial p_{kj}} + \frac{\partial f}{\partial p_{kh}} \equiv \sum_{ij} x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{jk}} + \frac{\partial f}{\partial p_{kh}}.$$

Sottraendo membro a membro dalla prima delle (14) quest'ultima, verrà:

$$\Delta_{x_h y_k} F \equiv \sum_{ij} p_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi}\, \partial p_{kj}} + 2 \frac{\partial f}{\partial p_{hk}},$$

ove il simbolo Δ è quello stesso che abbiamo definito in generale al n. 19. Nella relazione ottenuta il sommatorio è esteso alle disposizioni ij; se invece si vuol limitarsi ad estendere il sommatorio alle combinazioni, si dovrà scrivere:

$$(15) \qquad \Delta_{x_h y_k} F \equiv \sum_{ij} p_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi}\, \partial p_{kj}} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hj}\, \partial p_{ki}} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{ij} p_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj}\, \partial p_{hi}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki}\, \partial p_{jh}} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial p_{hk}}.$$

Tutte le precedenti identità sono tali, si ricordi, in virtù delle (12).

Si ha di più l'identità, rispetto alle p:

$$(n-1) \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} \equiv \sum_{ij} p_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hk}\, \partial p_{ij}},$$

ove il sommatorio si intende anche qui esteso alle combinazioni.

Da questa e dalla (15) si deduce inoltre:

$$(16) \qquad \Delta_{x_h y_k} F \equiv (n+1) \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} + \sum_{ij} p_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_{kh}\, \partial p_{ij}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki}\, \partial p_{jh}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj}\, \partial p_{hi}} \right),$$

e si osserverà che il sommatorio che ivi comparisce, svanisce identicamente, quando le due coppie di indici h, k ed i, j hanno qualche elemento comune.

Suppongasi ora che la forma $f = 0$ passi per la grassmanniana V_t, rappresentatrice delle rette di S_r, sicchè la forma F sia identicamente nulla nelle x, y. Sarà allora identicamente nulla anche la forma, d'ordine $n-1$, $\Delta_{x_h y_k} F$, e quindi il secondo membro della (16), uguagliato a zero, rappresenterà una forma d'ordine $n-1$ passante per V_t.

Ciò posto, ammettiamo d'aver già dimostrato che le forme di ordine $n-1$ passanti per V_t appartengano al modulo H delle forme quadratiche (13) (31). Poichè la cosa è vera per $n = 2$, basterà far vedere come dal fatto ammesso per le forme di ordine $n-1$, si deduca la proprietà analoga per le forme di ordine n.

Si può intanto scrivere, in forza di quanto precede:

$$(n+1) \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} + \sum_{ij} p_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_{kh}\, \partial p_{ij}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki}\, \partial p_{jh}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj}\, \partial p_{hi}} \right) \equiv 0 \pmod{H}.$$

(31) Cioè che ogni forma d'ordine $n-1$, passante per V_t, sia rappresentabile mediante una combinazione lineare delle (13), i cui coefficienti siano forme d'ordine $n-3$ nelle p.

Moltiplicando i due membri di questa congruenza per p_{hk} e sommando rispetto alle combinazioni hk, si avrà:

$$n(n+1)f - \sum_{hk}\sum_{ij} p_{kh}\,p_{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_{kh}\,\partial p_{ij}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki}\,\partial p_{jh}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj}\,\partial p_{hi}}\right) \equiv 0 \pmod{H}.$$

Nel sommatorio quadruplo che ivi comparisce, l'espressione tra parentesi muta soltanto di segno scambiando tra loro gl'indici i, h, e ritorna al valore ed al segno iniziale se successivamente si scambiano tra loro i, j; per guisa che riunendo in un solo i tre termini del sommatorio così ottenuti, si ha in definitiva l'espressione tra parentesi moltiplicata per la forma quadratica (13). Ciò significa che il sommatorio quadruplo s'identifica ad una forma del modulo H e quindi che anche

$$f \equiv 0 \pmod{H}.$$

Si può concludendo enunciare:

Ogni forma algebrica d'ordine n, passante per V_t, è rappresentabile mediante una combinazione lineare delle forme quadratiche che definiscono V_t, i coefficienti di tale combinazione essendo forme d'ordine $n-2$ nelle coordinate grassmanniane.

LXVII.

NUOVI CONTRIBUTI ALLA TEORIA DEI SISTEMI CONTINUI DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

NOTA I: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *25* (1916), pp. 459–471 (*).

In questa Nota ed in una successiva mi propongo di rispondere ad alcune questioni fondamentali per la teoria dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica F.

Un teorema classico di Noether, al quale Enriques diede fin dal 1896 la più ampia significazione, afferma che sulla F è unico il sistema completo cui appartiene come curva «totale» una data curva C. Val quanto dire: assegnati su C alcuni punti, che debbano essere base pel costruendo sistema, con molteplicità virtuali non superiori alle effettive, il sistema lineare $|C|$, *con quei punti base virtuali*, resta perfettamente individuato.

Quanto ai sistemi continui completi, non lineari, sono stati addotti, da Rosenblatt e da Albanese (1), esempî di curve contenute in distinti sistemi

(*) Seduta del 2 aprile 1916.

(1) *Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica*, Annali di Matematica (1915). In questa Memoria, che è uno studio critico accurato intorno alle mie ricerche sulla «base», il dott. Albanese osserva giustamente che la relazione di equivalenza algebrica, da me considerata, fra curve di una superficie, si riferisce a curve appartenenti ad un sistema, il quale sia irriducibile come totalità de' suoi sistemi lineari. Con quest'avvertenza (che è bene sia stata posta in luce esplicitamente, dal momento che – secondo quanto aveva già notato il Rosenblatt (Bulletin de l'Acad. des Scienc. de Cracovie, juillet 1912, p. 780) – esistono sistemi i quali sono irriducibili come totalità di sistemi lineari, ma riducibili come totalità di curve), i miei risultati e le relative dimostrazioni permangono immutati. Io stesso, del resto, avevo segnalato, in un caso eccezionale, la necessità di allargare un po' il concetto di equivalenza algebrica, per mantener uniforme il linguaggio (ved. la mia prima Memoria sulla base, nei Math. Annalen, *62* (1906), p. 207). E avevo chiamato «algebricamente equivalenti» due curve che o giacessero in un medesimo sistema irriducibile o fossero resti di un tal sistema rispetto ad una medesima curva. Il dott. Albanese, in sostanza, ha mostrato come questa definizione più ampia basti anche negli altri casi di eccezione, che io non avevo considerati. Avvertirò inoltre che, per stabilire la proposizione «se due curve A , B di F soddisfano alle relazioni $[AB] = [AA] = [BB]$, esiste su F un integrale semplice di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche A , B», non occorre, come crede l'Albanese, invocare il suo teorema XII, ma basta che le λA , λB stieno ciascuna in un sistema irriducibile ∞^1 con una medesima curva C di F. Si costruisce allora subito l'integrale cercato, sommando due integrali che abbiano rispettivamente le sole curve logaritmiche λA , C e λB , C, coi relativi periodi polari λ , -1 e $-\lambda$, $+1$ (ved. un'osser-

continui completi (ciascuno irriducibile come totalità di curve), e la cosa è stata interpretata nel senso che non fosse possibile estendere il teorema di Noether ai sistemi irriducibili completi non lineari [2].

Ma una tale conclusione dipende dall'aver dato a quel teorema una significazione troppo ristretta, insufficiente per la stessa validità di molte proposizioni classiche. Alla medesima stregua il teorema si troverebbe in difetto pur per i sistemi lineari e nei casi più semplici.

Conviene tuttavia riconoscere che tra i sistemi lineari ed i sistemi continui vi è una differenza, che può trarre facilmente in inganno, di fronte alla possibilità di estendere il teorema di Noether. Questa diversità è legata alla circostanza che, contrariamente a quel che accade pei sistemi lineari, la curva generica d'un sistema continuo può avere punti multipli variabili.

Ma in fondo la divergenza cui s'allude è soltanto apparente, perché in ogni caso, sia che si tratti di sistemi lineari, sia che si tratti di sistemi completi non lineari, allora soltanto si può parlare di curva « totale » del sistema, quando della curva stessa sia ben definita la connessione riemanniana.

Qualche esempio gioverà subito a chiarire il modo come deve essere posta la questione.

È noto che la totalità delle quartiche piane con 3 punti doppî si spezza in due sistemi irriducibili ∞^{11}, ben distinti: l'uno, Σ_1, costituito dalle quartiche razionali, e l'altro, Σ_2, costituito dalle quartiche spezzate ciascuna in una cubica e in una retta. Il sistema Σ_1 è perfettamente definito da una sua quartica *irriducibile* coi 3 nodi variabili, e Σ_2 da una curva *spezzata* in una cubica ed in una retta, coi 3 nodi pure variabili.

Se ora si considera una curva C_0, la quale sia composta da una cubica piana col punto doppio O e da una retta generica, segante la cubica nei punti A_1, A_2, A_3, una tal curva C_0 appartiene sia a Σ_1, sia a Σ_2; ma come curva totale di Σ_1, essa è definita dall'assegnare per nodi variabili O, A_1, A_2 – od O, A_2, A_3 o anche O, A_1, A_3 – e dal considerare come virtualmente inesistente l'altro dei 4 nodi; mentre come curva totale di Σ_2 essa è definita dall'assegnare per nodi variabili A_1, A_2, A_3 e dal considerare come virtualmente inesistente O. E non è questa una convenzione arbitraria per aggiustar le cose a volontà; ma è invece un modo di dire assai opportuno per significare il *fatto sostanziale* che una curva di Σ_1, la quale si approssimi indefinitamente a C_0, ha uno dei suoi punti doppî che tende in ogni caso ad O, e gli altri due che tendono a due dei tre punti A_1, A_2, A_3; mentre una curva di Σ_2, che si approssimi a C_0, ha i suoi tre nodi che tendono sempre rispettivamente ad A_1, A_2, A_3.

vazione analoga a p. 208 della mia ricordata Memoria). Nel suo lavoro l'Albanese giunge pure ad un risultato anche nella sostanza nuovo, che mi piace di segnalare: che cioè il teorema concernente l'esistenza della base, vale anche quando si definiscano algebricamente equivalenti due curve che giacciano in uno stesso sistema irriducibile *di curve*. E rispetto a questa equivalenza più ristretta non si altera neppure il numero-base ρ.

(2) Ved. la prefazione del citato lavoro di Albanese.

Nel primo caso, due punti di diramazione della superficie di Riemann, imagine della curva variabile, tendono ad uno, per esempio A_1, dei punti A_1 , A_2 , A_3, cosicchè due fogli della riemanniana imagine di C_0, in quanto la si consideri come limite della precedente, devono supporsi combacianti nel punto A_1, per guisa che attraverso A_1 sia possibile passare dall'uno all'altro foglio: e ciò corrisponde a considerare A_1 come virtualmente inesistente. Nel secondo caso invece la cosa analoga deve ripetersi rispetto al punto O.

Per eliminare ogni incertezza intorno a questo esempio, aggiungerò che la circostanza che non sia ben determinata, nella terna A_1 , A_2 , A_3, la coppia limite di due dei tre nodi della curva variabile in Σ_1, dipende da ciò: che effettivamente, a seconda del modo come si passa al limite, si può ottenere una qualunque delle tre coppie A_1 , A_2 ; A_2 , A_3 ; A_3 , A_1, giacchè nello spazio S_{14} i cui « punti » sono le quartiche piane, il sistema Σ_1 è una varietà che ha nel « punto » C_0 un punto triplo ordinario, origine di 3 falde distinte.

Adduciamo ancora un esempio. Sia F la « superficie » delle coppie di punti di due curve A , A', di generi π , π'; e C , C' sieno le curve imagini rispettive delle coppie che hanno un punto fisso su A o su A'. Sulla F la curva Γ_0, composta da π curve C e da π' curve C', corrispondenti rispettivamente a due gruppi speciali di punti di A , A', appartiene a due distinti sistemi Σ_1 , Σ_2, irriducibili come totalità di curve e di dimensioni $\pi + \pi'$, $\pi + \pi' - 1$. La curva generica di Σ_1 è formata da π curve C e da π' curve C' provenienti da due gruppi non speciali di A , A'; è spezzata ed ha $\pi\pi'$ punti doppî variabili. Invece la curva generica di Σ_2 è irriducibile e sta in un medesimo sistema lineare completo ∞^3, con ∞^2 curve del tipo Γ_0.

Orbene, quando Γ_0 si considera come curva totale di Σ_1, cioè come curva spezzata in $\pi + \pi'$ parti, bisogna assegnare come punti doppî variabili i suoi $\pi\pi'$ nodi; mentre, allorchè essa si considera come curva totale di Σ_2, i suoi $\pi\pi'$ nodi vanno considerati come virtualmente inesistenti.

Una volta ben precisata la posizione del problema, io mi son proposto d'indagare se il teorema di Noether, inteso nel suo legittimo significato, valesse anche pei sistemi continui non lineari. La ricerca mi si è presentata singolarmente delicata; tuttavia, dopo assidua elaborazione, ho potuto giungere al risultato finale, mediante un procedimento che mi sembra semplice ed elegante. La conclusione è che:

Sopra una superficie F, ogni curva, irriducibile o no, sulla quale sia definito il gruppo base ed il gruppo dei punti multipli variabili, individua un sistema algebrico completo irriducibile di curve, a cui essa appartiene come curva totale.

Od anche:

Se una curva di dato ordine appartiene a due diversi sistemi completi irriducibili di curve dello stesso ordine, le molteplicità ch'essa presenta come limite della curva generica dell'uno, non possono essere le medesime (in valore

e in posizione) *di quelle ch'essa presenta come limite della curva generica dell'altro.*

Per esempio, due sistemi irriducibili di curve irriducibili dello stesso prdine, non possono avere alcuna curva comune, che non abbia qualche *nuovo* punto multiplo (o, in particolare, sia spezzata).

Fra le molteplici applicazioni del teorema fondamentale di questo lavoro, mi limito ad indicarne alcune fra le più significative. Nel n. 4 intanto estendo il teorema fondamentale alle varietà superiori; nel n. 6 applico quest'estensione a dimostrare che *ogni curva algebrica sghemba* (*irriducibile e priva di punti multipli*) *individua una famiglia* (*completa*) *di curve sghembe*; e nel n. 5 applico il teorema fondamentale a stabilir *la condizione affinchè una curva spezzata possa considerarsi come limite di una curva irriducibile dello stesso ordine*. Da questa condizione deduco alla sua volta un teorema, che getta nuova luce sulle questioni di realità concernenti i rami delle curve algebriche.

Oltre ai sistemi irriducibili di curve, si possono considerare su F sistemi irriducibili aventi per elementi sistemi lineari; ed anche per essi può porsi senz'altro la nozione di completezza. Si presenta allora il fatto, a prima giunta paradossale, che un sistema irriducibile completo di curve può non esser completo come totalità dei suoi sistemi lineari.

Così per esempio, nel caso prima considerato della superficie F delle coppie di punti di due curve A, A', il sistema $\Sigma_1 + \Sigma_2$, insieme di Σ_1 e di Σ_2, è connesso, riducibile, non ulteriormente ampliabile e completamente definito da una qualunque curva di Σ_1 o di Σ_2.

Ma nonostante la riducibilità di $\Sigma_1 + \Sigma_2$, i sistemi lineari individuati dalle curve di Σ_1 e di Σ_2 costituiscono un'unica totalità irriducibile, che è birazionalmente identica all'insieme delle coppie di punti delle varietà di Jacobi, inerenti ad A, A'.

La spiegazione del paradosso è semplice, giacchè, essendo le curve di Σ_1, *per definizione*, spezzate in $\pi + \pi'$ parti, nel sistema *lineare*, individuato da una qualunque di esse, in quanto curva totale di Σ_1, i $\pi\pi'$ nodi si debbono assegnare come punti, *necessariamente fissi*, di moltiplicità 2; mentre, quando si presentano nodi nelle curve di Σ_2, essi debbono considerarsi come inesistenti. Riguardando virtualmente inesistenti anche i nodi di una generica curva Γ di Σ_1, essa non definisce più il sistema Σ_1, ma bensì un sistema continuo completo ∞^0. Cosicchè la totalità irriducibile dei sistemi lineari $|\Gamma|$, ove Γ sia una curva qualunque di Σ_1 o di Σ_2, la quale voglia in ogni caso considerarsi virtualmente priva di punti multipli, è costituita da $\infty^{\pi+\pi'}$ sistemi *continui* completi distinti di curve.

Tuttavia, anche per i sistemi completi irriducibili di sistemi lineari, ciascuno dei quali si consideri virtualmente privo di punti base, vale, sotto certe ipotesi, un teorema analogo a quello di Noether, nel senso che è possibile individuare un tal sistema a partire da uno qualunque de' suoi sistemi lineari. Io ho già provato questo fatto fin dal 1906, sotto l'ipotesi che la curva C del sistema lineare $|C|$ da cui si parte, sia « aritmeticamente effet-

tiva » [3]: anzi in tal caso resta precisato che $|C|$ appartiene ad una serie irriducibile completa di ∞^q sistemi lineari, ove q è l'irregolarità di F.

Nel n. 8 della presente Nota dimostrerò come l'unicità del sistema completo irriducibile, determinato da un dato $|C|$, possa senz'altro affermarsi ogni qual volta $|C|$ appartenga ad una serie irriducibile di ∞^q sistemi lineari.

Lo studio delle varietà irriducibili di sistemi lineari tracciati su F, mi conduce alla conclusione che, quando una tal varietà è completa e di dimensione q' $(0 < q' \leq q)$, essa è sempre birazionalmente equivalente ad una varietà di Picard.

Ciò permette (n. 7) di *collegare l'esistenza di una serie completa irriducibile di* $\infty^{q'}$ *sistemi lineari tracciati su* F $(0 < q' < q)$ *all'esistenza, su* F, *di un sistema di* q' *integrali riducibili di* 1^a *specie con* $2q'$ *periodi ridotti.*

1. *Sistemi continui completi di curve irriducibili prive di punti base e di punti multipli variabili.* Per lo studio dei sistemi continui di curve sopra una superficie, è fondamentale la considerazione della serie lineare caratteristica – da me introdotta nel 1904 [4] – la quale viene segata sopra una curva del sistema dalle curve del medesimo che le sono infinitamente vicine.

Com'è ben noto, l'Enriques, in un geniale lavoro del dicembre 1904 [5], dimostrò che è completa la serie caratteristica di ogni sistema continuo completo. Sarà anzitutto opportuno di richiamare brevemente la dimostrazione dell'Enriques, sulla quale son fondate le ulteriori nostre considerazioni [6].

Si proietti genericamente, sopra un piano α, la superficie F d'ordine n, che per semplicità supponiamo priva di punti multipli, in un conveniente S_r. Ogni curva C, irriducibile e priva di punti multipli, tracciata su F e che non abbia particolari legami col centro di proiezione, proiettasi univocamente in una curva piana C_1, dello stesso ordine m e dello stesso genere π di C, la quale tocca in un certo gruppo L, di λ punti, la curva di diramazione K del piano n–plo. La C_1 ha inoltre δ nodi, i quali provengono tutti da punti doppî apparenti di C.

Ogni curva piana C_1^0, d'ordine m, con δ nodi e λ contatti con K, la quale appartenga, insieme con C_1, ad un medesimo sistema continuo S_1 di

(3) Ved. la mia Nota, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra varietà*, Atti del R. Istituto Veneto, *65* (1906), p. 638 [Nota XXXI, vol. I, p. 390; N.d.R.].

(4) *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, *39* (1904), n. 4 [Memoria XVIII, vol. I, p. 239; N.d.R.].

(5) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna (dicembre 1904). Per un'altra dimostrazione, ved. la mia Nota, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare*, Rendic. del Circolo mat. di Palermo (1905) [Nota XXIII, vol. I, p. 291; N.d.R.].

(6) Si vedrà al n. 4 come si possa anche prendere le mosse dai concetti espressi nella mia Nota ultimamente citata.

curve analoghe, è imagine d'una curva C^0 di F, appartenente, insieme con C, ad un medesimo sistema continuo S di curve d'ordine m, tracciate su F. Ciò deriva dall'osservare che la curva D^0, d'ordine mn, corrispondente su F a C_1^0, deve essere spezzata in una curva d'ordine m, C^0, ed in una di ordine $m(n-1)$, perché altrimenti, facendo tendere C_1^0 a C_1 entro S_1, nel passaggio al limite, la curva D^0 si spezzerebbe senza acquistare nuovi punti doppî.

Mentre C_1^0 descrive S_1, la curva C^0 descrive pertanto su F un sistema continuo S, cui appartiene C.

Premesso questo, si consideri su F un sistema irriducibile completo Σ, di curve d'ordine m, contenente C. A Σ corrisponderà in α un sistema irriducibile Σ_1, di curve d'ordine m, con δ punti doppî e λ–tangenti a K; e, per quanto precede, anche Σ_1 sarà completo. Alla serie caratteristica, staccata *sulla generica* C di Σ, corrisponde la serie caratteristica staccata sopra la generica C_1 di Σ_1, fuori dei δ nodi e dei λ punti di contatto con K, dalle curve di Σ_1 infinitamente vicine a C_1. Ora questa serie coincide con quella segnata su C_1, fuori delle suddette intersezioni, dalle aggiunte d'ordine m, che passano pei λ punti di contatto con K; e ciò perché le curve di questo sistema *lineare* H, che sono infinitamente vicine a C_1, hanno in conseguenza δ nodi e λ contatti con K e quindi appartengono a Σ_1 (7), che è l'unico sistema continuo di curve analoghe contenente la generica C_1.

Ricordando infine che le aggiunte di un ordine arbitrario staccano sopra una data curva piana una serie lineare completa, si conclude col teorema di Enriques.

2. *Unicità del sistema continuo completo individuato da una curva irriducibile, priva di punti multipli.* Partiamo di nuovo da una prefissata curva C_1, dotata di δ nodi e di λ contatti con K, che sia proiezione di una curva C di F irriducibile e priva di punti multipli, alla quale ora *non* prescriviamo di esser generica entro un dato sistema continuo completo che la contenga totalmente.

Il più ampio sistema continuo *connesso* T, irriducibile o no, *individuato* su F da C, e le cui parti son costituite da curve irriducibili, di ordine m e genere π, prive di punti multipli, ha per imagine su α il più ampio sistema connesso T_1, contenente C_1, costituito da curve d'ordine m con δ nodi e λ tangenti a K. Siccome la C_1, da cui siamo partiti, è irriducibile e dotata di δ (e non di $\delta+1$) nodi, sta anche per essa la conclusione alla quale eravamo già pervenuti per la curva generica del sistema irriducibile Σ_1: che cioè le curve del sistema lineare H, infinitamente vicine a C_1, staccano su essa, fuori dei nodi e dei punti del gruppo L, una serie lineare completa.

(7) Vi è qui una lievissima semplificazione rispetto al ragionamento originario, semplificazione che meglio si presta agli ulteriori sviluppi.

Per maggior chiarezza raffiguriamoci le cose nello spazio S_N

$$\left(N = \frac{m(m+3)}{2}\right),$$

i cui « punti » sono le curve piane d'ordine m. Le rette tangenti nel punto C_1 alla varietà T_1, forse riducibile, ma comunque connessa, riempiono allora lo spazio lineare H, perché ogni curva di T_1, infinitamente vicina a C_1, passa di conseguenza pei δ nodi di C_1 e pel gruppo L e sta pertanto in H; e viceversa ogni curva di H, infinitamente vicina a C_1, ha in conseguenza δ nodi e λ contatti con K ed appartiene perciò a T_1.

Dicasi ϱ la dimensione di H, sicchè sarà $\varrho - 1$ la dimensione della serie caratteristica completa esistente su C_1 (e su C). Siccome le tangenti alla varietà T_1 in C_1, riempiono uno spazio lineare S_ϱ, ne segue che la dimensione di T_1 nell'intorno del punto C_1, è uguale a ϱ, e quindi per C_1 passerà almeno una parte irriducibile, Σ_1, ∞^ϱ, della varietà T_1; e inoltre la varietà tangente in C_1 ad un'altra qualunque delle parti di T_1, passanti per C_1, dovrà essere un cono – in particolare, uno spazio lineare – giacente in H.

Fissiamo adesso comunque, entro la varietà T_1, due « rami » – distinti o coincidenti – aventi l'origine nel punto C_1; e stabilita, pure ad arbitrio, una legge di variabilità di due punti $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, i quali debbano muoversi ciascuno in uno dei rami fissati, tendendo simultaneamente a C_1, cerchiamo quali sono le possibili posizioni limiti della retta $\overline{C}_1\overline{C}_2$, allorchè si mutano i due rami o la suddetta legge di variabilità.

Secondo una denominazione introdotta da B. Levi [8], queste posizioni limiti sono le *corde improprie* di T_1 pel punto C_1. Orbene, noi dimostreremo che le sole corde improprie della varietà T_1 per C_1, sono le tangenti a T_1 in C_1, cioè le rette che escono da C_1 e giacciono nello spazio H; donde seguirà senz'altro che T_1 passa per C_1 con una sola falda, avendo anzi in C_1 un punto semplice [9].

Fissare entro T_1 un ramo R_1 uscente da C_1, significa considerare un sistema ∞^1 di curve di T_1, tale che i coefficienti dell'equazione d'una curva variabile in quel sistema sono funzioni olomorfe d'un parametro t, le quali per un valore conveniente di t, per esempio $t = 0$, si riducono ai coefficienti dell'equazione di C_1. Sia

$$f(x, y; t) = 0 \tag{1}$$

(8) *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*, Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino, (2) *48* (1898).

(9) Un punto multiplo d'una curva è infatti *caratterizzato* da ciò che le corde improprie per esso sono ∞^1, distribuite in un numero finito di fasci di raggi (ved. la citata Memoria del Levi). Per un punto semplice passa invece una sola corda impropria: la tangente. Da ciò si trae, come immediata conseguenza, che, se una varietà passa per un punto con più falde – anche di varie dimensioni – o, se pur passandoci con una sola falda, ha in esso un punto multiplo, le corde improprie della varietà in quel punto son più che le tangenti.

(x , y coordinate cartesiane) l'equazione della curva variabile nel sistema considerato. Similmente,

$$\varphi(x, y; \tau) = 0 \tag{2}$$

sia l'equazione della curva variabile in un altro ramo R_2 di T_1, uscente da C_1; e supponiamo che

$$\psi(x, y) \equiv \varphi(x, y; 0) \equiv f(x, y; 0) = 0 \tag{3}$$

sia l'equazione di C_1.

Fissare una legge di variabilità di due « punti » $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ sui due rami R_1 , R_2, significa scegliere un ramo Γ entro la varietà analitica ∞^2 [10] formata dalle coppie di punti di R_1 , R_2, e considerare le ∞^1 coppie $\overline{C}_1 \overline{C}_2$ costituenti gli elementi di Γ. Se poi si vuole che $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ tendano insieme a C_1, occorre che il ramo Γ contenga una coppia formata da due punti coincidenti con C_1. Siccome ad ogni elemento di Γ corrisponde *un* punto di R_1 ed *un* punto di R_2, i parametri t , τ di due punti variabili con quella legge in R_1 , R_2 saranno funzioni olomorfe del parametro ε che individua l'elemento variabile in Γ, e le due funzioni dovranno annullarsi entrambe per quel valore di ε che dà la coppia dei punti coincidenti con C_1. Se questo valore di ε è $\varepsilon = 0$, scriveremo dunque

$$t = \varepsilon^i \theta(\varepsilon) , \qquad \tau = \varepsilon^j \eta(\varepsilon) , \tag{4}$$

ove le θ , η sono funzioni olomorfe di ε, non annullantisi per $\varepsilon = 0$.

Poichè i sistemi (1), (2) debbono assumersi completamente ad arbitrio – e non soltanto generici – fra quelli che, entro T_1, contengono C_1, occorrerà supporre che C_1 sia un elemento s–plo ($s \geq 1$) per (1) [11] e σ–plo ($\sigma \geq 1$)

(10) Questa varietà ∞^2 è una « falda » della varietà algebrica costituita dalle coppie di punti di due curve algebriche tracciate su T_1 e contenenti rispettivamente i rami R_1 , R_2 .

(11) Cioè che fra le curve del sistema (1) passanti per un generico punto P del piano α , s vengano a coincidere con C_1, quando P vada in un punto generico di C_1, e precisamente in un punto esterno al gruppo caratteristico di C_1 (ved. più sotto). Si badi che s non eguaglia di necessità l'ordine ν del ramo R_1 nello spazio S_N. Profittando dell'identità $\dfrac{\partial^h f}{\partial t^h} = \Sigma \dfrac{\partial f}{\partial c} \dfrac{d^h c}{dt^h}$, ove le c sono i coefficienti delle x , y in $f(x, y : t)$, si vede subito che ν eguaglia l'ordine della prima derivata $\left(\dfrac{\partial^h f}{\partial t^h}\right)_0$ *non identicamente nulla*, sicchè è sempre $\nu \leq s$. L'ordine ν eguaglia inoltre il numero di quelle curve comuni ad (1) e ad un sistema lineare I, ∞^{N-1}, di curve d'ordine m, le quali vanno a coincidere con C_1, quando I tende ad un *generico* sistema ∞^{N-1} contenente C_1; mentre s è il numero analogo, allorchè I tende al sistema delle ∞^{N-1} curve d'ordine m passanti per un punto generico di C_1. Nello spazio S_N si ha un inviluppo di ∞^2 iperpiani, rappresentanti ciascuno le curve d'ordine m passanti per un punto del piano α. Il carattere s uguaglia o supera ν, secondo che il predetto inviluppo non tocca o tocca il ramo R_1 nell'origine C_1. Tutto ciò, con opportuni adattamenti, vale pure se R_1 non è un ramo di funzione algebrica e se le curve $f(x, y ; t) = 0$ non sono algebriche. Queste proprietà, che paiono assai utili per uno studio approfondito degli inviluppi, sono irrilevanti pel nostro scopo attuale.

per (2), per guisa che lungo C_1 siano soddisfatte le relazioni (eventualmente identiche):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0, \cdots, \left(\frac{\partial^{s-1} f}{\partial t^{s-1}}\right)_0 = 0; \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_0 = 0, \cdots, \left(\frac{\partial^{\sigma-1} \varphi}{\partial \tau^{\sigma-1}}\right)_0 = 0,$$

ma non le

$$\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0.$$

Sviluppando le $f(x, y; t)$, $\varphi(x, y, \tau)$, colla formola di Taylor–Cauchy, negli intorni rispettivi di $t = 0$, $\tau = 0$, avremo pertanto:

$$f(x, y; t) = a\psi(x, y) + \frac{t^s}{s!}\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + \cdots \tag{5}$$

$$\varphi(x, y; \tau) = \alpha\psi(x, y) + \frac{\tau^\sigma}{\sigma!}\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 + \cdots, \tag{6}$$

ove a, α sono polinomî degli ordini $s - 1$, $\sigma - 1$ in t, τ, i quali assumono il valore 1, rispettivamente per $t = 0$, $\tau = 0$.

L'equazione della curva inviluppo di (1), della quale fanno parte, oltre ad una eventuale curva cui non c'interessa di por mente, il luogo dei δ punti doppî variabili di una curva $\overline{C_1}$ [12] e la curva K, si ottiene eliminando t fra le:

$$f(x, y; t) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

cioè fra le:

$$f(x, y; t) = 0, \qquad \left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + \frac{t}{s}\left(\frac{\partial^{s+1} f}{\partial t^{s+1}}\right)_0 + \cdots = 0.$$

Ne deriva che quando $\overline{C_1}$ va in C_1 – cioè quando t s'annulla – il gruppo caratteristico di $\overline{C_1}$ – gruppo comune a $\overline{C_1}$ e alla curva di (1) che le è infinitamente prossima – va a cadere nell'intersezione di C_1 colla curva, *da essa distinta*, $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 = 0$. In altre parole, quest'ultima curva, che è d'ordine m, come C_1, appartiene al sistema lineare H. Similmente si vede che ad H appartiene pure la curva d'ordine m $\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right) = 0$.

Consideriamo ora il fascio Φ di curve d'ordine m, individuato dalle $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$ variabili entro (1), (2) colla legge (4). Si tratterà di provare che il limite Φ_0 di Φ, per $\varepsilon = 0$, appartiene al sistema H, qualunque sia la prescelta legge di variabilità. All'uopo, fissata una costante generica k (in che cosa debba consistere la genericità di k risulterà dal seguito) si consideri la curva D di equazione $f(x, y; t) + k\varphi(x, y; \tau) = 0$, generica entro al

(12) Ved. ad esempio le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), p. 25.

fascio Φ; ed il fascio Ψ di curve d'ordine m, individuato dalla curva fissa C_1 e dalla D, variabile con ε. Al fascio Ψ appartiene in particolare la curva $\bar{D}$:

$$f(x, y; t) + k\varphi(x, y; \tau) - (a + k\alpha)\,\psi(x, y) = 0 .$$

Indicando con l il minimo fra gli ordini infinitesimali di t^s, τ^σ rispetto ad ε, e posto:

$$\frac{1}{s!}\lim_{\varepsilon=0}\frac{t^s}{\varepsilon^l} = b , \qquad \frac{1}{\sigma!}\lim_{\varepsilon=0}\frac{\tau^\sigma}{\varepsilon^\sigma} = \beta ,$$

ove b, β sono costanti, di cui una almeno non nulla, mediante gli sviluppi (5), (6) si ricava subito che il limite $\bar{D}_0$ della $\bar{D}$, per $\varepsilon = 0$, è la curva:

$$b\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + k\beta\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0 . \tag{7}$$

Ora, da che la costante k è generica e le due curve $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0 = 0$ son distinte da C_1 ed appartengono ad H, anche $\bar{D}_0$ sarà essa pure distinta da C_1 ed apparterà ad H.

Il fascio limite Ψ_0 di Ψ, essendo *individuato* dalle $C_1, \bar{D}_0$, è formato pertanto da curve di H e perciò la curva D, comune ai fasci variabili Ψ, Φ, ha pur essa per limite una curva del sistema H. Ma D è la curva generica di Φ: dunque il fascio Φ_0, limite di Φ, sta in H.

Resta così dimostrato che, nello spazio S_N, la retta limite di $\bar{C}_1\,\bar{C}_2$ è una tangente a T_1 in C_1, e quindi che T_1 passa per C_1 con una sola falda, avente in C_1 un punto semplice.

Possiamo in definitiva enunciare:

Sopra una superficie F, una curva C, irriducibile e priva di punti multipli, sta in un sol sistema algebrico, irriducibile e completo, di curve dello stesso ordine.

Naturalmente il sistema continuo individuato da C potrà anche essere ∞^0; ciò accadrà allora e solo allora che su C non esista la serie caratteristica, definita nel modo indicato al n. 1 della mia Nota del 1904 sui sistemi continui.

Dal ragionamento precedente risulta pure che:

La serie caratteristica di un sistema irriducibile completo Σ, di curve irriducibili, prive di punti multipli, è completa, non soltanto sulla generica curva del sistema, ma anche su ogni sua particolare curva C, la quale non abbia acquistato punti multipli.

Di più, la C è origine di una sola «falda» del sistema, e si può sempre assumere come modello proiettivo di Σ una tal varietà, che C abbia su essa per imagine un punto semplice.

3. *Il teorema fondamentale per una curva qualunque.* Il teorema stabilito può agevolmente estendersi al caso in cui la curva C, irriducibile, tracciata su F, abbia punti multipli, che si assegnino tutti, colle loro molteplicità effettive, come punti base per il costruendo sistema continuo.

Basta invero, per ridursi al caso precedente, operare una trasformazione birazionale della F, che sciolga i punti base fissati in curve eccezionali, ed astrarre dalle componenti fisse che nascono in tal modo nel sistema trasformato.

È quasi superfluo di avvertire che se, ad esempio, su C era assegnato un sol punto base doppio P, cui corrisponda, sulla superficie trasformata F', la curva eccezionale P', può benissimo accadere che il sistema irriducibile completo Σ', individuato dalla curva C', omologa di C, e le cui curve tagliano P' in 2 punti, sia contenuto (parzialmente) in un sistema continuo più ampio Σ'' di curve, di ordine maggiore di C', rispetto al quale la P' sia fondamentale. Il fatto che – contrariamente a quel che avviene per i sistemi lineari – Σ'' possa dar come residui, rispetto a P', più sistemi irriducibili distinti, non reca alcuna noia, perché sta sempre che due di questi sistemi non possono avere in comune alcuna curva totale.

Suppongasi piuttosto che la curva C, ancora irriducibile, abbia punti multipli – per semplicità diciamo d punti doppî – i quali si assegnino tutti come variabili, colle loro molteplicità effettive. Vogliamo allora provare che, se esiste un sistema irriducibile completo, almeno ∞^1, senza punti base, il quale contenga C, e sia costituito da curve dello stesso ordine, con d punti doppî variabili, questo sistema è unico.

La curva C avrà per imagine, sul solito piano n–plo α, una curva C_1, d'ordine m, la quale possiede δ punti doppî, dei quali d, ben determinati, che diremo *punti doppî effettivi*, hanno i due rami sopra una stessa falda del piano multiplo, cioè son tali che uno degli n punti corrispondenti su F ad un punto di α, mobile lungo un ramo uscente da uno dei suddetti d nodi, ha un limite indipendente dal ramo sul quale ci si muove. Gli altri $\delta - d$ punti doppî di C_1, che chiameremo *punti doppî apparenti*, hanno invece i due rami su falde distinte e provengono appunto da punti doppî apparenti di C.

Ebbene, anche in tal caso si considererà su α il sistema completo connesso T_1, almeno ∞^1, contenente C_1 e costituito dalle curve d'ordine m, che hanno δ punti doppî e λ contatti con K, e si concluderà, come prima, che questo sistema ha in C_1 un elemento semplice. Tutte le curve, appartenenti insieme con C_1 ad un medesimo sistema irriducibile Σ_1, tolto da T_1 avranno, al pari di C_1, d punti doppî effettivi. Infatti, se la generica curva $\overline{C}$ del sistema Σ, corrispondente su F al sistema Σ_1 di α, avesse soltanto $d' < d$ punti doppî, il genere effettivo della $\overline{C}$ si abbasserebbe di $d - d'$ unità nel passaggio da $\overline{C}$ a C [13], mentre invece le proiezioni di $\overline{C}$ e di C hanno lo stesso numero δ di punti doppî e perciò lo stesso genere.

Si conclude pertanto nel modo già enunciato.

(13) Si vede subito, e del resto è ben noto, che ogni nuovo punto doppio che una curva $\overline{C}$, variabile sopra una superficie F, venga ad acquistare (in un punto semplice di F), è un punto doppio proprio (ved., per la distinzione in proprî ed improprî dei punti di una curva variabile in una famiglia, la mia Nota lincea sulla classificazione delle curve, che avrò occasione di citare più tardi).

Supponiamo adesso che C sia riducibile e dotata di d punti doppi, che potranno essere nodi delle singole componenti o punti comuni alle componenti a due a due; e inoltre supponiamo che esista un sistema irriducibile completo Σ, il quale contenga C e infinite altre curve dello stesso ordine, dotate di d punti doppî variabili.

Le componenti irriducibili $C', C'', \cdots$ della curva C, al variare di C in Σ, descrivono dei sistemi continui, anche ∞^0, ed eventualmente non tutti distinti. Indichiamo con $\Sigma', \Sigma'', \cdots$ questi sistemi, completati se occorre. Se la C' ha δ' punti doppî variabili, il sistema Σ', per quanto precede, è perfettamente individuato, per il fatto di dover contenere C' con i suoi δ' nodi variabili; e così dicasi di Σ'', ecc. Laonde il sistema Σ, che è completo, si ottiene come l'insieme di *tutti* i gruppi di curve tolte rispettivamente da $\Sigma', \Sigma'', \cdots$, ed è quindi pienamente individuato.

Sia finalmente C una curva, irriducibile o no, sulla quale si assegnino:

a) alcuni punti base con molteplicità virtuali uguali alle effettive;

b) alcuni altri punti base (ipermultipli) con molteplicità virtuali minori delle effettive (s'intende che in questa categoria sono compresi anche i punti base, che si vogliono considerare come virtualmente inesistenti; in esso la molteplicità virtuale assegnata è 0);

c) alcuni punti multipli di C, distinti da quelli delle categorie *a*), *b*), come punti multipli variabili con molteplicità uguali a quelle che effettivamente presenta in essi la C.

Operando allora una trasformazione birazionale della F, che sciolga i punti delle categorie *a*), *b*) in curve eccezionali, la curva C', trasformata di C, viene a contenere come parte fissa ogni curva eccezionale proveniente da un punto P della categoria *b*), contata tante volte quant'è la differenza fra la molteplicità effettiva e la molteplicità virtuale assegnata in P.

E si ha così da fare con una curva riducibile priva di punti base ipermultipli, ma dotata di componenti fisse e di punti multipli variabili. Essa, per quanto precede, individua un ben determinato sistema continuo irriducibile a cui appartiene come curva totale. Ne segue subito la cosa analoga per C.

E si conclude col teorema generale enunciato nella prefazione, restando inoltre specificato come si debbono assegnare i punti base e i punti multipli variabili sulla curva C, mediante cui si vuol definire il sistema continuo (punti delle categorie *a*), *b*), *c*) sopra considerate).

Risulta pure che *il teorema della fine del n. 2 vale anche pei sistemi continui di curve irriducibili con punti multipli variabili: su ognuna, C, di queste curve, che non presenti punti multipli nuovi rispetto alla generica curva del sistema considerato, la serie caratteristica (fatta astrazione dai punti fissi che cadono nei punti multipli) è completa; inoltre C è origine di una sola falda del sistema cui appartiene*; ecc. ecc.

NOTA II: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) *25* (1916), pp. 551–562 (*).

4. *Estensione del teorema fondamentale alle varietà.* Il teorema ottenuto pei sistemi continui di curve d'una superficie, si può estendere ai sistemi continui di superficie d'una varietà a 3 dimensioni, o, più in generale, ai sistemi continui di varietà a $k-1$ dimensioni, entro una varietà a k dimensioni.

Riferiamoci per brevità ad una varietà V a 3 dimensioni. Qualora, per la dimostrazione del teorema suddetto, si volesse usufruire della proiezione di V sopra uno spazio multiplo, occorrerebbe un esame un po' più minuto di quello già esposto nei numeri precedenti, a causa dei punti tripli che presenta la superficie F proiezione d'una superficie di V, e soprattutto dei punti cuspidali di F, i quali cadon tutti sulla superficie di diramazione dello spazio multiplo. In verità la presenza di codesti punti singolari non alterebbe le linee essenziali del procedimento; ma costringerebbe a qualche lungaggine nel discorso.

Preferisco perciò di esporre, per le varietà a 3 dimensioni, una dimostrazione che muove dagli stessi concetti espressi nella mia Nota già citata dei Rendiconti di Palermo, 1905. Si vedrà come questa dimostrazione valga, con soli adattamenti del linguaggio, per le superficie e per le varietà superiori.

Consideriamo sulla V, priva di punti multipli in uno spazio S_r, una superficie irriducibile e priva di punti multipli F, la quale sia atta a definire un sistema continuo almeno ∞^1.

Il sistema $|E|$ staccato su V dalle forme di S_r, d'ordine l non minore dell'ordine m di F, contiene parzialmente ogni superficie d'ordine m tracciata su V; e, crescendo, se occorre, l, si può esiger pure che $|E|$ segni su F un sistema lineare completo (14). Aggiungeremo, per quanto non sia strettamente necessario pel seguito, che il sistema $|D|$, residuo di F rispetto ad $|E|$, ed il sistema $|C|$, segato da $|D|$ su F, possono inoltre supporsi irriducibili e privi di punti base; cosicchè la generica superficie D e la generica curva C sono irriducibili e prive di punti multipli.

Le superficie E, passanti per C, costituiscono un sistema lineare H, ∞^α, e tagliano altrove su F il sistema caratteristico completo. Quelle, E_0, tra esse, che sono infinitamente vicine alla superficie composta $F+D$, hanno una linea doppia infinitamente vicina a C, e sono quindi spezzate in una parte infinitamente vicina ad F ed in una infinitamente vicina a D (tutto ciò si deduce dalle proprietà analoghe delle curve di una superficie, segando con un iperpiano).

(*) Seduta del 16 aprile 1916.

(14) È questo un noto teorema di Castelnuovo. Il teorema analogo, occorrente per le varietà superiori, trovasi nel n. 2 della mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche,* Rendiconti di Palermo (1909) [Memoria XLIII, vol. II, p. 6; N.d.R.].

Consideriamo ora il più ampio sistema algebrico connesso M, contenente F; e indichiamo con T il sistema connesso costituito dalle superficie E spezzate ciascuna in una superficie di M ed in una superficie dell'ordine di D. A quest'ultimo sistema appartengono intanto le superficie E_0; e viceversa ogni E di T, infinitamente vicina ad $F + D$, avendo una linea doppia infinitamente vicina a C, passa per C ed è quindi una E_0. Nello « spazio » lineare i cui « punti » son le superficie E, la varietà « tangente » a T, nel punto $F + D$, è dunque costituita dai punti E passanti per C. Si conclude intanto che nell'intorno di $F + D$ la varietà T ha la dimensione α e che in $F + D$ essa possiede, per varietà tangente, lo « spazio » lineare H.

Sieno

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_r; t) = 0, \tag{8}$$

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_r; \tau) = 0 \tag{9}$$

($x_1, x_2, \cdots, x_r$ coordinate di punto in S_r; t, τ parametri) le equazioni di due superficie rispettivamente variabili in due « rami » appartenenti a T, e uscenti da $F + D$.

È lecito di rappresentare in tal modo i due rami, perché ogni superficie di T, essendo intersezione completa di V con una forma, può appunto rappresentarsi con una sola equazione (da aggiungersi beninteso alle equazioni di V). Si concluderà allora, esattamente come alla fine del n. 2, che, fissata una legge di variazione

$$t = \varepsilon^i \vartheta(\varepsilon), \qquad \tau = \varepsilon^j \eta(\varepsilon).$$

di due superficie E_1, E_2 rispettivamente mobili sui due rami e tendenti insieme ad $F + D$, il fascio di superficie individuato da esse entro $|E|$ ha per limite il fascio

$$b\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + k\beta\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial^\sigma \tau}\right)_0 + \mu f(x_1, x_2, \cdots, x_r; 0) = 0, \tag{10}$$

ove $f(x_1, x_2, \cdots, x_r; 0) = 0$ è l'equazione di $F + D$.

A questo punto si osservi che la curva C è limite di una curva $\overline{C}$ *dello stesso ordine* comune alle due componenti di una E_1 (o di una E_2), che tenda ad $F + D$, e che la forma variabile (8) [o (9)], che stacca su V la E_1 (o la E_2), o tocca V lungo $\overline{C}$ od ha in $\overline{C}$ una linea doppia variabile. In ogni caso il luogo di $\overline{C}$ fa parte dell'inviluppo del sistema (8) [o (9)], e quindi nei punti di C si annullano le $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0, \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0$. Da ciò segue che il fascio (10) è costituito da elementi dello « spazio » lineare H. Ne deriva, come al n. 2, che T passa per $F + D$ con una sola falda semplice, e quindi che M passa anch'esso per F con una sola falda semplice. Resta così provato che F appartiene ad un sol sistema irriducibile completo Σ di superficie dello stesso ordine, e che Σ taglia su F il sistema caratteristico completo.

L'estensione degli sviluppi del n. 3 non offre altre difficoltà sostanziali: basta soltanto, se F possiede punti multipli sostituire al sistema $|E|$, di cui sopra, quello segato su V dalle forme d'ordine abbastanza alto aggiunte ad F. Si perviene in tal modo alla conclusione generale:

Entro una varietà algebrica irriducibile V_k, ogni varietà a $k-1$ dimensioni, irriducibile o no, sulla quale sieno assegnate le varietà base e le varietà multiple variabili, individua un sistema irriducibile completo, che la contiene totalmente.

5. *Le curve algebriche spezzate, ma connesse, come forme limiti delle curve irriducibili. Questioni di realità.* Il teorema fondamentale dei nn. 2 e 3 spiana la via per lo studio di molte notevoli questioni, ad alcune delle quali mi propongo di accennare in questo e nel numero successivo.

In una mia Nota riassuntiva *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann* (15), ho enunciato la proposizione seguente, della quale, in quel lavoro preliminare, mi son limitato a indicare a grandi tratti la dimostrazione, fermandomi sopratutto su alcuni casi particolari, che mi interessavano fra l'altro per la dimostrazione geometrica del teorema d'esistenza:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva piana spezzata C, d'ordine m, possa considerarsi come limite d'una curva irriducibile d'ordine m e genere π, è che sia possibile scegliere alcuni nodi di C, in tal numero ed in tal posizione che, considerandoli come inesistenti, si ottenga da C una curva connessa di genere virtuale π.

Qui mostrerò come questa proposizione segua, in modo molto semplice, dal teorema fondamentale del presente lavoro.

Sieno $C_1, C_2, \cdots, C_l$ le componenti irriducibili di C; e supponiamo, per semplicità, che la curva complessiva sia dotata di soli nodi, in numero di δ, provenienti in parte dai nodi delle componenti ed in parte dalle intersezioni di queste a due a due. Diciamo m_h, π_h l'ordine ed il genere effettivo di C_h; δ_h il numero de' suoi nodi che si assegnan come nodi di C; i_h invece il numero dei nodi di C_h che si considerano per C come inesistenti; e infine j il numero delle intersezioni delle componenti, che si consideran pure come nodi inesistenti (punti di connessione) di C. Denoteremo con J il gruppo complessivo di queste j intersezioni.

Si hanno intanto le relazioni

$$m = \sum m_h, \quad \pi = \sum \pi_h + \sum i_h + j - l + 1, \quad \delta = \sum \delta_h + \sum m_h m_k + \sum i_h,$$

ove π è il genere virtuale di C coi $\delta - j - \sum i_h$ nodi assegnati.

Un facile calcolo mostra che la dimensione ϱ del sistema lineare delle curve di ordine m passanti pei nodi assegnati di C [cioè (nn. 2 e 3) la dimen-

(15) Questi Rendiconti, maggio 1915, p. 886.

sione del sistema irriducibile completo Σ individuato da C con quei tali gruppi di nodi variabili e di nodi inesistenti] soddisfa alla disuguaglianza

$$\varrho \geq 3m + \pi - 1 , \tag{11}$$

dove vale il segno $=$ o $>$, secondo che le condizioni imposte alle suddette curve d'ordine m sono o no indipendenti.

Dico che la curva generica di Σ è irriducibile. Siccome la cosa è vera per $l = 1$, basterà, ammessala vera pel sistema continuo individuato da una curva connessa, composta da $l-1$ parti, dimostrarla pel sistema Σ. Si osservi perciò, in primo luogo, che è sempre possibile trovare $l-1$, e sieno $C_1, C_2, \cdots, C_{l-1}$, componenti di C, tali che, considerando come inesistenti quei nodi di $\Gamma = C_1 + C_2 + \cdots + C_{l-1}$ che son compresi fra i $\sum i_h + j$ nodi di C, già fissati come inesistenti, si ottenga una curva connessa. Si parta infatti da C_1: esisterà allora qualche componente di C, e sia C_2, connessa con C_1 attraverso ad una almeno delle intersezioni J. Similmente dovrà esistere qualcuna delle ulteriori componenti C, e sia C_3, connessa con $C_1 + C_2$ attraverso ad una almeno delle restanti intersezioni J; e così proseguendo. (Si noti che con ciò resta pur provato che $j \geq l - 1$).

Ciò posto, il sistema Σ', individuato da Γ, ha la curva generica irriducibile, ed al sistema Σ appartiene il sistema S delle curve ottenute aggiungendo ad una generica curva di Σ' una generica curva del sistema Σ'', individuato da C_l coi suoi i_l nodi inesistenti. Sicchè, se la curva generica di Σ è riducibile, essa non può che spezzarsi in una curva dell'ordine di Γ ed in una dell'ordine di C_l: e mentre la curva generica descrive Σ, che è completo, le sue componenti descrivono rispettivamente i sistemi completi Σ', Σ''. Laonde il sistema Σ coincide addirittura con S e, dette ϱ', ϱ'' le dimensioni di Σ', Σ'', si ha pertanto

$$\varrho = \varrho' + \varrho'' . \tag{12}$$

Ora la curva Γ coi suoi $\sum_{h=1}^{l-1} i_h + j - j'$ nodi inesistenti, ove j' $(j > j' \geq 1)$ è il numero delle intersezioni J comuni a C_l e a Γ, ha il genere

$$\pi' = \sum_{h=1}^{l-1} \pi_h + \sum_{h=1}^{l-1} i_h + j - j' - l + 2 = \pi - \pi_l - i_l - j' + 1 ,$$

e quindi il genere effettivo della generica $\overline{\Gamma}$ di Σ' non supera π' (lo eguaglia solo se, come risulterà *a posteriori*, ogni nodo virtualmente inesistente di Γ è effettivamente inesistente per $\overline{\Gamma}$).

Si ha perciò [16]

$$\varrho' \leq 3(m - m_l) + \pi - \pi_l - i_l - j' ;$$

(16) Qui si applica la proposizione che una curva piana irriducibile d'ordine n e genere effettivo p, appartiene ad un sistema irriducibile di curve analoghe, di dimensione $3n + p - 1$ (cfr. ad esempio col n. 2 della mia Nota del maggio 1915) [Nota LXV, vol. II, p. 432; N.d.R.]. La cosa segue subito, del resto, dalla completezza della serie caratteristica del sistema.

e similmente, poichè la curva generica di Σ'' ha il genere virtuale $\pi_1 + i_1$, viene

$$\varrho'' \leq 3m_1 + \pi_1 + i_1 - 1$$

e quindi

$$\varrho' + \varrho'' \leq 3m + \pi - 1 - j',$$

la quale, confrontata con la (11), ricordando che $j' \geq 1$, porge $\varrho > \varrho' + \varrho''$, contrariamente alla (12).

È dunque assurdo ammettere che la curva generica di Σ sia spezzata. Risulta inoltre che la curva generica di Σ ha proprio il genere effettivo π e non $\overline{\pi} < \pi$, che cioè essa possiede esattamente tanti nodi (e non di più) quanti son quelli che si assegnarono come variabili su C per definire il sistema Σ, perché in caso contrario la dimensione di Σ risulterebbe eguale a $3m + \overline{\pi} - 1$, contrariamente alla (11).

La sufficienza della condizione enunciata resta così stabilita. Quanto alla necessità, è una conseguenza ovvia dell'osservazione che una curva connessa non può aver come limite una curva sconnessa.

Si noterà di più che nella (11) deve valere il segno $=$, e quindi che i punti doppî assegnati di C impongono condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine m, d'accordo con un noto teorema di Noether (17).

Osservazione. – Se la curva C è reale, cioè se ha un'equazione a coefficienti reali, i suoi nodi imaginari sono a due a due complessi coniugati; e, qualora i nodi che si assegnano su essa si scelgano appunto reali o a due a due complessi-coniugati, le curve d'ordine m aggiunte a C risultan tutte reali. Sicchè il sistema $\Sigma\infty^\varrho$, definito in corrispondenza a quella scelta dei nodi variabili, avendo nel « punto » C uno « spazio tangente » S_ϱ reale, passerà per C almeno con una « falda » reale ∞^ϱ. Si badi però che la C potrà anche essere un « punto multiplo » per Σ, in quanto può darsi che da C sia possibile ottenere qualche altra curva di Σ, cambiando il gruppo dei nodi di C assegnati come variabili. Comunque sia, si può dire che:

Se una curva reale C di ordine m, spezzata in più parti, si può render connessa e di genere virtuale π, fissando la connessione attraverso a certi suoi nodi reali o a due a due complessi coniugati, esistono $\infty^{3m+\pi-2}$ curve reali irriducibili d'ordine m e genere π, ad essa infinitamente vicine, ciascuna delle quali ha un punto doppio infinitamente prossimo ad ognuno di quei nodi di C che non si scelsero come punti di connessione.

Questo teorema offre un larghissimo campo di applicazione nelle questioni di realità delle curve algebriche piane, e dà una base generale al metodo così detto della « piccola variazione ». Così possono da esso ottenersi come facili corollari il teorema di Harnack e molti dei bei risultati di Hilbert sui rami reali delle curve algebriche.

Spero di poter in seguito occuparmi di questo genere di applicazioni.

(17) *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, Acta math., *8* (1886), p. 172.

6. *Applicazione del teorema fondamentale alla teoria delle curve algebriche sghembe. Cenni di ulteriori sviluppi.* Sia V una famiglia di curve algebriche sghembe C, di ordine n, genere p, prive di punti multipli [18].

La formola di postulazione, che esprime il numero delle condizioni lineari indipendenti offerte alle superficie d'ordine l abbastanza grande, imponendo loro di passar doppiamente per una data C, è del tipo $k_0 l + k_1$, ove k_0, k_1 sono numerici caratteristici di C. Se la C considerata, pur essendo particolare entro V, non ha punti multipli, k_0, k_1 dipendono soltanto da n e da p [19], e quindi la dimensione r del sistema lineare S delle superficie F d'ordine l, che passano doppiamente per una curva C variabile in V, non s'altera finchè C non acquista qualche nuovo punto multiplo.

Inoltre, sempre nell'ipotesi che l sia abbastanza grande, una F generica, passante doppiamente per C, è irriducibile, e fuori di C non ha punti multipli. Ciò risulta subito dall'osservare che le superficie d'ordine l', abbastanza alto, passanti semplicemente per C, formano un sistema lineare di dimensione > 1, che non ha punti base fuori di C: sicchè il sistema lineare doppio di questo risulta formato da superficie irriducibili d'ordine $l = 2l'$, passanti doppiamente per C e non aventi punti base fuori di C.

Premesso questo, consideriamo il sistema irriducibile completo Σ_0 *individuato* (n. 4) da una F_0 generica passante doppiamente per una data C_0 di V, priva di punti multipli, e definito dalla condizione che la superficie F, mobile in Σ_0 abbia una linea doppia variabile d'ordine n, la quale si riduca a C_0 quando F va in F_0. Al variare di F in Σ_0, la sua linea doppia descrive una varietà irriducibile, che abbraccia tutta la famiglia V; e, poichè V è completa, si può affermare che le linee doppie delle superficie di Σ_0, son tutte e sole le curve di V, e quindi che Σ_0 può descriversi tutto facendo variare una C di V e insieme il sistema lineare completo S, individuato da quella C. Non si esclude con ciò che, per qualche particolare posizione di C entro V, il sistema delle superficie d'ordine l, aventi la linea doppia C, si amplî; ma ciò accadrà soltanto allorquando la C acquisti punti multipli o, in particolare, si spezzi [20].

Se pertanto la C_0, da cui partimmo, appartenesse ad un'altra famiglia V' di curve C', prive di punti multipli, di ordine n e genere p, il sistema lineare S', ancora *di dimensione r*, costituito dalle superficie d'ordine l passanti doppiamente per la C' variabile in V', descriverebbe un sistema algebrico

(18) Ved. ad esempio il n. 1 della mia Nota citata, *Sulla classificazione delle curve algebriche*, ecc.

(19) Si trova infatti agevolmente che la formola di postulazione di C per le superficie d'ordine alto l, che la debbono contenere come doppia, è $3nl - 4n - 5p + 5$. Del resto questa formola può ricavarsi anche dalla Memoria di M. NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, Annali di matematica, (2) 5 (1871).

(20) Avvertiamo, poichè ne capita l'occasione, che l'ampliamento del sistema S in corrispondenza ad una particolare C_1, dotata di punti multipli, può avvenire senza che il sistema stesso esorbiti da Σ_0: allora però la posizione limite del sistema S inerente ad una generica C, tendente a C_1, non è indipendente dal modo come si passa al limite.

irriducibile Σ', non contenuto in Σ, e contenente invece *tutto* il sistema lineare S, di dimensione r, definito da C_0. Sicchè la F_0 apparterrebbe a due diversi sistemi irriducibili completi, contrariamente al teorema del n. 4.

Si può dunque enunciare:

Una curva algebrica sghemba irriducibile, priva di punti multipli, individua una famiglia (completa) di curve dello stesso ordine e genere.

In altre parole:

Due famiglie distinte di curve sghembe irriducibili e senza punti multipli, dello stesso ordine e genere, non possono avere in comune che curve dotate di punti multipli (e in particolare spezzate).

Se le due famiglie son costituite da curve dello stesso ordine, ma di generi diversi p, p' $(p > p')$, è senz'altro evidente che ogni curva ad esse comune deve avere qualche punto multiplo, giacchè una tal curva, considerata come limite di una curva di genere p, dovrà possedere qualche punto multiplo proprio [21], che ne abbassi il genere per lo meno al valore p'.

La conclusione, alla quale siamo giunti per le curve algebriche sghembe irriducibili e prive di punti multipli, si potrebbe estendere ad ogni curva, irriducibile o no, sulla quale fosse assegnato il gruppo dei punti multipli proprî ed il gruppo dei punti multipli improprî variabili; e il risultato si potrebbe infine trasportare, in modo del tutto analogo, alle curve appartenenti ad una varietà a tre dimensioni e più in generale alle varietà ad h dimensioni $(1 \leq h \leq k - 1)$ contenute in una data V_k.

Ma su ciò, come sulle conseguenze che dal teorema dimostrato derivano per la classificazione delle curve sghembe, spero di tornare in seguito, allorquando potrò occuparmi di sviluppare più ampiamente la mia Nota lincea citata, del maggio 1915.

7. *Sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari.* Passiamo ora a considerare come elementi di un sistema continuo appartenente alla superficie F, non più le sue curve, ma invece i sistemi lineari completi da esse individuati.

Ci riferiremo all'ipotesi che questi sistemi lineari sieno virtualmente privi di punti base, giacchè questo è il caso che interessa per le proprietà che abbiamo di mira.

Un sistema algebrico irriducibile, formato da $\infty^{q'}$ sistemi lineari completi, si indicherà con (A), ove $|A|$ denota il generico sistema lineare in esso contenuto [22]. E si dirà che (A) è *completo*, quando non è contenuto in una varietà algebrica irriducibile più ampia, di sistemi lineari dello stesso ordine.

(21) Ved. la mia Nota lincea citata, *Sulla classificazione delle curve*, ecc., n. 5.

(22) La notazione risponderebbe meglio al concetto, se il sistema definito s'indicasse con $\{|A|\}$ o con $(|A|)$; ma si avrebbe così una notazione ingombrante!

La dimensione q' del sistema non supera l'irregolarità q di F, e vi sono sistemi per cui il limite superiore è raggiunto [23]. Si indichi ora con (B) un altro sistema completo – si sottintende irriducibile – formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Fissato in (A) un generico sistema lineare $|A_0|$, i sistemi $|A_0 + B|$ riempiono un medesimo sistema irriducibile $\Sigma = (A_0 + B)$, che contiene ∞^q sistemi lineari distinti e che è quindi, esso pure, completo.

Variando $|A_0|$ in (A), poichè Σ non potrebbe che variare con continuità e d'altra parte ciò non è possibile, a cagione della sua completezza, si conclude che Σ contiene *tutti* i sistemi lineari $|A + B|$. Esso può pertanto chiamarsi la *somma* dei sistemi (A) e (B), e indicarsi col simbolo $(A + B)$.

Si osservi che per questo ragionamento è essenziale l'ipotesi che uno almeno dei sistemi (A), (B) consti di ∞^q sistemi lineari, altrimenti non potrebbe affermarsi che Σ è completo.

Premesso ciò, si consideri in (A) un altro generico sistema $|A_1|$, ed un generico sistema $|B_0|$ in (B). *Esisterà* in (B), per quanto precede, un ben determinato sistema $|B_1|$ tale che

$$|B_0 + A_0| = |B_1 + A_1|:$$

ossia il sistema $|B_0 + A_0 - A_1|$ sarà effettivo e coinciderà con un sistema di (B). Poniamo $(C) = (A + B)$ e $|C_0| = |A_0 + B_0|$: allora $|C_0|$ contiene parzialmente ogni $|A|$; ed i residui degli $|A|$ rispetto a $|C_0|$ formano un insieme Σ_0, contenuto in (B), i cui elementi corrispondono birazionalmente agli $|A|$.

Se pertanto $q' = q$, Σ_0 abbraccia tutto (B), e si ha il noto risultato che (A) e (B) sono birazionalmente identici fra loro ed alla *varietà di Picard* V_q, relativa ad F [24].

Se invece $q' < q$, la totalità ∞^q dei $|C|$, al pari di quella dei $|B|$, sarà ancora birazionalmente identica a V_q, mentre (A) sarà identica ad una varietà contenuta in (C) o in (B), cioè in V_q. Dico che, comunque, (A) è esso stesso identico ad una varietà di Picard $W_{q'}$, di dimensione q'.

All'uopo si consideri l'insieme Γ degli $\infty^{q'}$ sistemi $|C|$ somme dei singoli $|A|$ *con un medesimo* $|B_0|$. Non può evidentemente esistere un insieme *continuo* più ampio di sistemi $|C|$, contenenti tutti parzialmente $|B_0|$, e abbracciante Γ, perché se no (A) non sarebbe completo. Si avverta incidentalmente che non rimane per questo escluso che i residui dei $|C|$ contenenti $|B_0|$, si distribuiscano in più totalità distinte di sistemi lineari (cfr. col numero successivo): se così fosse, noi, fra quei $|C|$, ci limiteremmo a considerar soltanto quelli che dànno per residui gli $|A|$.

Secondo quanto prima si disse, ogni sistema $|C_0| = |A_0 + B_0|$ di Γ contiene parzialmente ogni $|A|$; ed i residui riempiono un sistema Σ_0, di $\infty^{q'}$

(23) Veggasi ad esempio la mia Nota, *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica*, Atti del R. Ist. Veneto, *68* (1909) [Nota XLIV, vol. II, p. 64; N.d.R.].

(24) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Questi Rendiconti, (5) *14* (1905), nn. 2–6.

sistemi lineari. L'insieme Γ contiene dunque parzialmente tutti i sistemi lineari di Σ_0; e poichè i residui di un qualunque $|B_1|$ di Σ_0, rispetto agli $\infty^{q'}$ sistemi $|C|$ di Γ, sono $\infty^{q'}$ distinti, essi riempion tutto il sistema completo (A). Insomma, gli elementi di Γ non si ottengono soltanto aggiungendo al sistema $|B_0|$, da cui partimmo, i singoli $|A|$; ma anche aggiungendo a questi un altro qualunque sistema $|B_1|$ di Σ_0.

Da quanto precede si trae che Γ è perfettamente definito, entro la varietà (C), da uno qualunque de' suoi sistemi lineari, e che perciò, al variare di $|B_0|$ entro (B), Γ o Σ_0, i quali come totalità di $\infty^{q'}$ elementi son birazionalmente identici ad (A), descrivono rispettivamente, in (C) ed in (B), due sistemi di $\infty^{q-q'}$ varietà di dimensione q', che non hanno a due a due alcun elemento comune.

Si conclude pertanto che la picardiana V_q contiene un sistema $\infty^{q-q'}$ d'indice 1, di varietà $W_{q'}$, birazionalmente identiche ad (A). Il gruppo continuo permutabile G_q, appartenente a V_q, non può che mutare in sé il suddetto sistema, chè altrimenti esso avrebbe il grado > 0.

Ne deriva che una $W_{q'}$ è lasciata ferma da $\infty^{q'}$ trasformazioni di G_q, formanti entro G_q un sottogruppo algebrico $G_{q'}$. Ed è noto che ciò equivale ad affermare che V_q ed F ammettono un sistema di q' integrali semplici di 1ª specie con $2q'$ periodi ridotti [25], i quali corrispondono agli integrali relativi alla picardiana (A).

Si arrivà così al teorema:

Una superficie d'irregolarità $q > 0$, la quale contenga un sistema irriducibile completo, formato da $\infty^{q'}$ $(0 < q' < q)$ sistemi lineari, possiede in conseguenza q' integrali riducibili di 1ª specie con $2q'$ periodi ridotti.

Un corollario immediato, che vale la pena di notare, è il seguente:

Sopra una superficie d'irregolarità q, priva d'integrali riducibili semplici di 1ª specie, e, a fortiori, sopra una superficie la cui varietà picardiana sia a moduli generali, ogni sistema completo non lineare, di sistemi lineari, consta di ∞^q sistemi lineari distinti.

Con che naturalmente non si esclude che la data superficie F possa contenere sistemi *lineari*, non appartenenti a sistemi continui più ampî. Anzi, come ho dimostrato altrove [26], sopra ogni superficie esistono sistemi lineari siffatti. È poi superfluo aggiungere che la F può inoltre contenere sistemi completi, irriducibili *come totalità di curve*, e contenenti meno che ∞^q sistemi lineari, senza che perciò esistano su F integrali riducibili.

Osservazione. – Dalle considerazioni precedenti si trae pure che *sopra una superficie ogni sistema irriducibile completo (A) di sistemi lineari, è bira-*

(25) G. CASTELNUOVO, *loc. cit.*, nn. 8, 10-13.

(26) *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, Questi Rendiconti, (5) 17 (1908), p. 467. [Nota XXXIX, Vol. I, p. 458; N. d. R.].

zionalmente identico ad una varietà di Picard, e le trasformazioni del relativo gruppo continuo si ottengono mediante le operazioni $+A_0 - A_1$, ove $|A_0|, |A_1|$ son sistemi variabili in (A).

8. *Il teorema di Noether pei sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari.* Ricordiamo, ora, che una curva B di F, aritmeticamente effettiva, i cui caratteri virtuali (grado n, genere π, indice di specialità i) soddisfaccian cioè alla disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0 ,$$

ove p_a è il genere aritmetico di F, *individua* un sistema irriducibile completo (B), formato da ∞^q sistemi lineari [27].

Essendo (A) un qualunque sistema irriducibile, tracciato su F, e costituito da ∞^q sistemi lineari, uno dei quali sia $|A|$, pel numero precedente, il sistema $|A'| = |A + B - B'|$ sarà effettivo, comunque si scelgano $|B|$, $|B'|$ in (B); e al variare di $|B'|$ in (B), gli ∞^q $|A'|$ formeranno *un* sistema irriducibile Σ, contenente $|A|$.

Viceversa considerato nel dato (A) un variabile sistema $|A_1|$, sempre pel numero precedente, anche il sistema variabile $|B_1| = |B + A - A_1|$ sarà effettivo e descriverà (B), che è individuato da $|B|$. Vi è pertanto in (A) un sistema $|A_1|$ tale che $|B_1| = |B'|$ e quindi

$$|B + A - A'| = |B + A - A_1| ,$$

cioè $|A_1| = |A'|$. Dunque (A) coincide con Σ e si conclude che:

Un sistema irriducibile completo, costituito da ∞^q sistemi lineari, è individuato da uno qualunque di essi.

Da quanto precede si trae che l'operazione di sottrazione applicata a due sistemi completi (A), (B), formati ciascuno da ∞^q sistemi lineari, non può condurre a più d'un sistema ad essi analogo: ed in questo senso può dirsi che *il teorema del resto, nel campo dei sistemi completi formati da ∞^q sistemi lineari, è applicabile proprio come nel campo dei sistemi lineari.*

Osservazione 1ª – In virtù dell'unicità del sistema completo irriducibile individuato da una *curva* (n. 3), il concetto di somma di due sistemi lineari si trasporta senz'altro anche ai sistemi completi non lineari di curve. Lo stesso non può dirsi del concetto di differenza, perché, imponendo alle curve di un sistema il passaggio per un dato gruppo di punti o la condizione di contenere come parte una curva fissata, non sempre si ottiene un sol sistema irriducibile di curve soddisfacenti alla condizione posta.

(27) Ved. la mia Nota citata, *Osservazioni varie*, ecc.

Osservazione 2ª. – Cade qui in acconcio di osservare pure che « è possibile di costruire su F sistemi completi di ∞^q sistemi lineari *tutti regolari* » [28].

Si può infatti costruire anzitutto su F, priva di punti multipli in S_r, un sistema completo (D) formato da ∞^q sistemi lineari, tutti irriducibili e almeno ∞^2, e tali inoltre che ogni $|D|$ contenga parzialmente un prefissato sistema $|H|$.

Basta all'uopo sceglier su F un sistema (K) di ∞^q sistemi lineari, e prender come sistemi $|D|$ i resti dei sistemi $|K|$ rispetto al sistema lineare staccato su F dalle forme d'ordine l abbastanza alto.

Se, dopo ciò, $|H'|$ denota il sistema aggiunto ad $|H|$, esiste per ogni $|D|$ il sistema lineare $|D'| = |D + H' - H|$ aggiunto a $|D|$. *Ogni* sistema $|D'|$, essendo allora aggiunto ad un sistema lineare irriducibile, almeno ∞^2, è regolare [29], e (D') è perciò formato da ∞^q sistemi tutti regolari.

In tal caso ogni curva del sistema irriducibile completo $\{D'\}$ individua un sistema lineare completo, che non può esorbitare da $\{D'\}$, sicchè le curve di (D') son tutte e sole quelle di $\{D'\}$.

Una conseguenza immediata di questa osservazione è che:

« Se su F si hanno due sistemi lineari $|A|, |B|$ appartenenti ad un medesimo sistema irriducibile completo di sistemi lineari, se cioè, con la notazione introdotta ne' miei lavori sulla base, $A \equiv B$, le curve A, B possono considerarsi come resti di una medesima curva C rispetto ad un sistema irriducibile di curve » [30].

È chiaro infatti che ognuno dei sistemi $|D'|$ sopra costruiti, quando l è abbastanza grande, contiene parzialmente A. Presa allora come curva C un resto di A rispetto ad un prefissato $|D'|$, il sistema $|C + B|$ appartiene al sistema $(C + A) = (D')$, e perciò la curva $C + B$ appartiene a $\{D'\}$.

Osservazione 3ª. – Le considerazioni esposte nei nn. 7 e 8 si trasportano senz'altro ai sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari di varietà a $k - 1$ dimensioni, entro una varietà a k dimensioni.

(28) Ved. a tal uopo il n. 14 della citata Memoria di Albanese, ove l'osservazione è maggiormente determinata. Qui mi basta quel che espongo allo scopo di giustificare una affermazione contenuta nella nota (1) del presente lavoro.

(29) Ved. la mia Nota citata, *Sulla regolarità del sistema aggiunto*, ecc.

(30) Cfr. con la nota (1).

LXVIII.

SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA NUMERATIVA E SULLA TEORIA DELLE CARATTERISTICHE

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 75_2 (1916), pp. 1121–1162 (*).

Il concetto di « dipendenza algebrica » fra curve di una superficie algebrica (o fra varietà a d — 1 dimensioni, contenute in una varietà V_d, a d dimensioni) ed il teorema concernente l'esistenza della « base » per la totalità delle curve d'una superficie (o per le varietà di V_d) (1), esprimon relazioni di carattere funzionale, suscettibili di più ristrette interpretazioni di carattere numerativo. Tali interpretazioni dànno luogo, da un lato, ai principî su cui si fonda il calcolo simbolico della geometria numerativa (2), e d'altro canto permettono di porre sotto nuova luce il cosidetto problema delle caratteristiche (3) e di provare ch'esso, almeno per le condizioni semplici, è risolubile in ogni caso.

Di siffatte interpretazioni delle mie ricerche sulla base, m'occupo in questa Nota; e ciò non soltanto allo scopo di pervenire alla soluzione del problema delle caratteristiche, ma per additare inoltre ravvicinamenti, che mi sembrano eleganti e fecondi, tra concetti a prima giunta disparati.

Riesamino dal nuovo punto di vista i principî fondamentali della geometria numerativa (nn. 1, 2, 3), e mi fermo a discorrer con qualche ampiezza delle soluzioni degeneri (n. 4) e delle soluzioni multiple (n. 5). Si vedrà ad

(*) Adunanza del 21 maggio 1916.

(1) Veggansi i miei lavori sulla base e segnatamente la prima Memoria: *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Mathematische Annalen, *62* (1906) [Memoria XXIX, vol. I, p. 332; N.d.R.]. Per quel che concerne le varietà, si troverà un cenno al n. 10 dell'altra Memoria: *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales de l'École normale de Paris (1908) [Memoria XL, vol. I, p. 476; N.d.R.]. Qualche maggior dettaglio in proposito espongo al n. 7 della presente Nota. Si veda pure la recente Memoria del Dr. G. ALBANESE: *Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica*, Annali di Matematica (1915).

(2) Ved. H. SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1879) e il Cap. VI dell'eccellente trattato di H. G. ZEUTHEN, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1914).

(3) Per la posizione generale del problema delle caratteristiche, ved. il citato trattato di Schubert. Com'è noto, la possibilità di risolver questo problema è stata finora stabilita soltanto per classi particolari di figure (coniche nel piano o nello spazio, quadriche di S_3, spazî lineari contenuti in un iperspazio, ecc.).

esempio come la nozione di elementi degeneri, entro una varietà algebrica V_d di elementi Γ, abbia per correlativa, nella geometria sopra V_d, la nozione di elementi base assegnati per le varietà appartenenti a V_d.

Nel n. 8 dimostro che un'uguaglianza fra più simboli di condizioni semplici, imposte agli elementi Γ, è sempre la traduzione numerativa d'una relazione di dipendenza algebrica fra le varietà riempite dai Γ soddisfacenti a quelle condizioni, e provo inoltre che i simboli c, c' di due condizioni semplici, sono uguali, allora e solo allora che valgano le relazioni numeriche:

$$c^d = c^{d-1}\,c' = c^{d-2}\,c'^2 = \cdots = c'^d .$$

Le potenze successive d'una condizione semplice c, son definite nel n. 2, anche se la condizione è « isolata »: e ciò analogamente a quel che si fa per definire il grado virtuale d'una curva isolata, sopra una superficie algebrica.

Esposta nel n. 9 la soluzione del problema delle caratteristiche per le condizioni semplici, passo nel n. 10 ad applicare le precedenti riflessioni alla teoria delle caratteristiche per le coniche del piano. Pervengo così ad una nuova dimostrazione, che spererei fosse giudicata semplice e luminosa, dei celebri teoremi di Chasles e di Halphen, donde trassero origine, attraverso a lunghi dibattiti, molti tra i più importanti concetti della geometria numerativa.

Ed avrei con questo terminato il mio lavoro, se, contro ogni mia voglia, non fossi costretto ad aggiungere alcune noterelle polemiche intorno al principio della conservazione del numero, del quale ebbi ad occuparmi nel 1912 (4). Nel proporre allora una nuova formulazione di questo tormentato principio, la quale fosse al riparo da note obiezioni, non potei esimermi dall'accennare ad altra proposta già fatta in proposito nel 1904 dal Sig. Giambelli, e dal dichiarare che affacciavo una nuova formulazione, appunto perché quella del Giambelli (che avevo dovuto da poco esaminare accuratamente per debito di ufficio) non mi sembrava felice. Ma tutto ciò parmi di aver detto con ogni possibile riguardo e senza calcar troppo.

Ora, poichè il Sig. Giambelli in uno scritto pubblicato nei « Rendiconti di Palermo » (5), accusa il mio lavoro di esser « puramente teorico » e di non rispettar questa o quella esigenza; e poichè inoltre egli, alludendo forse alla mia critica, parla di « vaghe affermazioni contrarie » al suo enunciato, son costretto a rispondere, sia per quel che concerne la mia Nota, sia per precisare quanto nel 1912 mi limitai ad accennare; e cioè che di fronte alla questione che pretendeva di chiudere, il suo enunciato lascia sostanzialmente

(4) *Sul principio della conservazione del numero*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, *33* (1912) [Nota LIII, vol. II, p. 309; N.d.R.]. Nel seguito questa Nota verra citata colla lettera N.

(5) *Le applicazioni del principio della conservazione del numero e l'indirizzo di H. Schubert*, Rendiconti del Circ. mat. di Palermo (1915). Questo è il terzo lavoro del G. sulla conservazione del numero. Gli altri due sono: *Sul principio della conservazione del numero*, Jahresbericht der deutschen Math. Vereiningung (1904); *Sul principio della conservazione del numero e sul calcolo simbolico*, ecc., Annaes da Academia do Porto (1909).

le cose al punto di prima, e che, secondo la sola interpretazione che parmi ragionevole, esso riducesi alla seguente osservazione: Se in un problema numerativo compajono dati variabili, fra le soluzioni corrispondenti ad una particolare scelta dei dati, figuran sempre le soluzioni limiti del caso generale. Né l'osservazione diventa più espressiva, se si soggiunge – come fa in sostanza il Sig. Giambelli – che il numero delle soluzioni [o la condizione, che è, per così dire, un numero potenziale (cfr. col. n. 1)] si conserva, purchè si attribuiscano molteplicità nulle a certe soluzioni del caso particolare (quelle che si presentano in più, rispetto alle soluzioni limiti del caso generale).

Con ciò non si risponde affatto alla questione di assegnare un criterio generale per decidere a priori quand'è ch'è lecito di particolarizzare comunque i dati variabili, senza tema d'incappare in soluzioni parassitarie. E mi sembra chiaro che la richiesta d'un principio della conservazione del numero, non possa avere altro senso che questo!

Del resto tutto quel che di concettuale può esser contenuto nell'osservazione sopra riferita, è già implicito nello stesso *principio di continuità* di Poncelet, del quale il principio di Schubert non è che un particolare aspetto.

L'osservazione stessa si ritrova per esempio, in modo esplicito, anche nel trattato dello Zeuthen [6], e se nessuno ha avvertito che ad essa, e ad essa soltanto, riducesi la formulazione del Giambelli, ciò dipende forse dal fatto che la lettura degli scritti in cui questo Autore s'occupa della questione, è faticosissima.

Ed è proprio a cagion del lavoro esegetico, al quale ho dovuto sobbarcarmi, che non ho potuto esser brevissimo nelle noterelle polemiche. Le quali d'altronde non avrebbero altra aspirazione che quella di contribuir, come possono, a liberare il terreno da nozioni ingombranti.

§ 1. Sui fondamenti della geometria numerativa

1. *I principî del calcolo coi simboli di condizione.* Per comodità del lettore raccolgo qui, cogli opportuni complementi, i principî su cui si fonda il calcolo simbolico della geometria numerativa.

1) Si dice che una condizione (algebrica) a imposta all'ente Γ, mobile entro una varietà (algebrica) di dimensione d, *ha la dimensione* k, quando vi sono ∞^{d-k} enti Γ che soddisfanno ad a. Se non vi è alcun ente Γ soddisfacente ad a, si dice che a ha la dimensione $> d$, e si scrive simbolicamente $a = 0$.

2) Dicesi *somma* $a + b$ o $b + a$, di due condizioni a, b imposte a Γ, la condizione che Γ soddisfaccia ad a o a b. La varietà algebrica dei Γ soddisfacenti ad $a + b$, è la somma – nel senso stesso che si dà a questa parola

(6) *Lehrbuch* (citato), n. 4, p. 6.

nella geometria sopra un ente algebrico – delle varietà dei Γ soddisfacenti separatamente ad a , b.

Ne deriva in particolare la nozione di condizione *multipla di* a secondo un intero positivo qualunque l. La varietà algebrica dei Γ soddisfacenti ad la, è l–pla della varietà dei Γ soddisfacenti ad a.

La dimensione di $a + b$ è evidentemente la minima fra le dimensioni di a , b.

3) Si dice *prodotto* $a\,b$ o $b\,a$ delle due condizioni a , b, la condizione che Γ soddisfaccia alle a , b simultaneamente. La varietà dei Γ soddisfacenti ad $a\,b$, è l'intersezione delle varietà dei Γ soddisfacenti separatamente alle a , b; si sottintende che ogni Γ comune deve contarsi colla debita molteplicità d'intersezione. Se h , k son le dimensioni di a , b, la dimensione di $a\,b$ è non superiore ad $h + k$. Le due condizioni a , b, si dicono *indipendenti*, quando il loro prodotto ha proprio la dimensione $h + k$.

4) Dicesi che i simboli a , b di due condizioni di dimensione d, sono *eguali* e si scrive $a = b$ o $b = a$, quando il numero dei Γ che soddisfanno ad a è uguale al numero di quelli che soddisfanno a b. È superfluo avvertire che per questo confronto ognuna delle soluzioni deve contarsi col debito ordine di molteplicità.

Il numero cui si è alluso s'indica indifferentemente coi simboli stessi a , b.

5) Si dice che i simboli di due condizioni a , b della stessa dimensione $k < d$, sono *eguali*, e si scrive $a = b$ o $b = a$, quando, scelta *comunque* una condizione c, di dimensione $d - k$, *indipendente* da a e b, i simboli di dimensione d, ac e bc, risultano sempre eguali.

L'uguaglianza tra due simboli di condizione è riflessiva, simmetrica, transitiva.

L'eguaglianza $a = b$ si può anche enunciare dicendo che le varietà A , B degli $\infty^{d-k}\Gamma$ soddisfacenti ad a , b, hanno in comune lo stesso numero di elementi con ogni varietà C formata di ∞^k elementi Γ, la quale non abbia in comune infiniti Γ né con A né con B. Ne segue subito che affinchè i due simboli a , b sieno eguali, *occorre* che le varietà A , B sieno irriducibili o formate da parti della stessa dimensione $d - k$, o, come diremo brevemente, ch'esse sieno varietà *pure*. Similmente è chiaro che *perché la definizione non sia illusoria*, occorre che le varietà C, che si considerano, sieno anch'esse varietà pure.

6) Se due condizioni a , b *distinte* – cioè non soddisfatte dagli stessi elementi – hanno simboli eguali, il prodotto $a\,b$ si chiama anche il *quadrato* della condizione a o della b e s'indica con a^2 o b^2. Similmente, avendosi una terza condizione c, distinta da a, quando $c = a$, il prodotto $a^2\,c$ dicesi *cubo* di a e s'indica con a^3; e così via.

La nozione si può opportunamente ampliare, in guisa che conservi senso anche se la data condizione a è *isolata*, se cioè non esistono condizioni distinte da a ed aventi simboli uguali ad a. La via per introdurre questo concetto più

ampio ci vien suggerita per analogia, dal modo con cui si definisce il grado virtuale d'una curva isolata sopra una superficie algebrica [7]. Nel n. successivo svilupperemo la cosa per le condizioni *semplici* (cioè di dimensione 1), che son quelle sulle quali in seguito ci tratterremo più diffusamente.

2. *Condizioni suscettibili di variazione continua. Potenza d'una condizione semplice.* Diremo che una condizione a è *suscettibile di variazione continua*, quando esiste un sistema continuo, anche riducibile, ma connesso, che contiene totalmente la varietà algebrica A dei Γ soddisfacenti ad a.

Ciò posto, consideriamo un caso notevole di eguaglianza fra i simboli di due condizioni a, b, suscettibili di variazione continua.

Diciamo A, B le varietà algebriche dei Γ soddisfacenti ad a, b e supponiamo ch'esse sieno varietà *totali* di un medesimo sistema connesso, tali cioè che ognuna delle A, B possa considerarsi come totalità degli elementi limiti (ciascuno debitamente contato) di una medesima varietà D, suscettibile di muoversi con continuità verso A o verso B.

Supponiamo inoltre che la varietà V_d di tutti i Γ e le varietà A, B, sieno varietà pure. Per brevità, nel seguito, gli elementi Γ di V_d, li chiameremo spesso anche « punti ». In luogo della varietà astratta V_d, si potrà anche considerare, se si vuole, un modello proiettivo concreto di V_d, cioè una varietà V_d' appartenente ad un conveniente spazio lineare S_r, tale che i punti delle singole parti di V_d', rappresentino birazionalmente, *senza eccezioni*, gli elementi delle singole parti di V_d.

Le A, B avranno, nelle nostre ipotesi, la stessa dimensione $d - k$ ed una varietà pura C, di dimensione k, tracciata in V_d, la quale non abbia né con esse né con D infiniti punti comuni, taglierà D, A, B nello stesso numero di punti; cosicchè, secondo la definizione 5), sarà $a = b$.

Fermiamoci in particolare sul caso $k = 1$ e supponiamo che la varietà V_d sia irriducibile. Tale supposizione non è che in apparenza restrittiva, giacchè per studiare una condizione relativa ai Γ, converrà in ogni caso riferire separatamente la condizione assegnata, agli elementi delle diverse componenti irriducibili di V_d.

Sia a una condizione semplice imposta ai Γ, ed indichiamo ancora con A la varietà algebrica, a $d - 1$ dimensioni, riempita dai Γ soddisfacenti ad a. Anche se A non appartiene ad un sistema continuo di varietà dello stesso ordine [8], si potrà tuttavia costruir sempre, in infiniti modi, entro V_d, un

(7) Cfr. per esempio F. ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, Atti della R. Acc. di Torino (1901), n. 12. F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti della R. Acc. di Torino (1904), n. 1 [Memoria XVIII, vol. I, p. 235; N.d.R.].

(8) Fissato entro V_d un sistema lineare irriducibile e semplice, ∞^r ($r \geq d+1$) di varietà M, a $d - 1$ dimensioni, si potrà per esempio assumere come « ordine » d'una varietà A, tracciata in V_d, il numero dei punti comuni ad A e alla curva base di un generico sistema lineare ∞^{r-2} di varietà M.

sistema lineare $|C|$, di varietà irriducibili a $d-1$ dimensioni, senza punti base e di grado >0, contenente parzialmente A, e tale inoltre che il residuo $|B| = |C - A|$, sia esso pure un sistema lineare infinito, irriducibile, privo di punti base, e di grado >0.

Allora $l\ (\leq d)$ varietà generiche, sia di $|B|$, come di $|C|$, avranno in comune una varietà a $d-l$ (e non più) dimensioni [9], ed i varietà generiche di $|B|$, insieme con j varietà generiche di $|C|$ $(i+j \leq d)$ si taglieranno in una varietà M a $d-i-j$ dimensioni. Sicchè, chiamando rispettivamente b, c le condizioni perchè un Γ giaccia in una B o in una C, in base alla definizione 6) ed al fatto che tutte le condizioni di un medesimo sistema continuo posson rappresentarsi con lo stesso simbolo, ne discenderà un significato preciso pel simbolo $b^i c^j$ $(i, j = 0, 1, 2, \cdots;\ i+j \leq d)$ spettante alla condizione perché Γ giaccia sulla varietà M.

Ciò premesso, si definirà come *potenza n-esima* a^n *della condizione* a $(n \leq d)$ l'espressione $(c-b)^n$ sviluppata secondo la formula del binomio.

La definizione è legittima:

1) Perché quando a sia suscettibile di variazione continua, il *numero* $(c-b)^n e$, ove e sia una generica condizione di dimensione $d-n$, risulta eguale al *numero* analogo ottenuto definendo a^n mediante la 6).

2) Perché sostituendo a $|C|$, $|B|$ due altri sistemi $|C'|$, $|B'|$, soddisfacenti alle stesse condizioni di $|C|$, $|B|$, il numero $(c-b)^n e$ risulta eguale al numero $(c'-b')^n e$.

Tutto ciò segue agevolmente dalla relazione di equivalenza

$$C + B' \equiv C' + B,$$

com'è dimostrato, pel caso delle curve di una superficie, ad esempio nel mio lavoro citato nella nota (7). L'estensione del ragionamento là sviluppato, non offre difficoltà sostanziali.

3. *Il principio della conservazione del numero.* Il caso di eguaglianza che abbiamo considerato nel n. prec., è in fondo il solo veramente utile nella geometria numerativa. L'essenza del metodo di Schubert consiste infatti nello scegliere, fra tutte le possibili particolarizzazioni di una condizione variabile con continuità, una che si risolva nella somma di altre condizioni, dalle quali si possa più agevolmente passare, quando si voglia, ai numeri. Sicchè l'eguaglianza fra il simbolo della condizione generica ed il simbolo della condizione particolare, non esprime in sostanza se non il fatto che dalla prima si può passare con continuità alla seconda.

Il principio della conservazione del numero, in ultima analisi, è tutto qui, e l'imperfezione dell'enunciato di Schubert non riflette che la difficoltà

(9) Vedi E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî* (Pisa, Spoerri, 1907), p. 232 e segg. Le considerazioni ivi esposte si riferiscono ai sistemi lineari di forme entro uno spazio lineare; ma valgono anche pei sistemi lineari di varietà entro una V_d.

d'indovinar di primo acchito, il linguaggio più adatto ad esprimer chiaramente ed in modo sintetico un fatto generale.

Nella mia Nota citata N. ho potuto circoscrivere in modo semplice e preciso il campo di validità del principio, valendomi del concetto di *condizione algebrica irriducibile*, che, come già scrissi in N., deriva nel modo più naturale dall'algebricità, giacchè nelle questioni algebriche la nozione dominante è appunto sempre quella di riducibilità o irriducibilità.

Ogni condizione c variabile con continuità si traduce (ved. il principio del n. 4 di N.) in una corrispondenza algebrica ω fra gli enti Γ, a cui quella condizione s'impone, e certi altri enti Γ', mediante i quali si definisce la c (10). La c si esprime allora come la condizione affinchè un Γ sia omologo di un dato Γ' rispetto alla ω.

Indicata con V la varietà dei Γ e con V' la varietà dei Γ', la corrispondenza ω fra gli elementi di V, V', e la condizione c, che ha dato luogo ad ω, diconsi *irriducibili*, quando è irriducibile la varietà algebrica che ha per elementi le coppie Γ, Γ' di enti omologhi nella ω.

Il principio di Schubert, cioè, col linguaggio del calcolo simbolico, l'eguaglianza fra i simboli di due condizioni a, b, derivanti per continuità da una medesima condizione variabile c, vale soltanto allorchè c sia irriducibile o si risolva nella somma di condizioni irriducibili della stessa dimensione.

4. *Soluzioni degeneri.* Si presenta di frequente il caso che entro la varietà algebrica V_d degli elementi o « punti » Γ, ai quali si riferisce una data classe di problemi numerativi, sia definita una varietà algebrica D – eventualmente formata da parti di varie dimensioni – tale che gli elementi della D sieno, per qualche loro particolarità di carattere algebrico, differenziati dagli altri Γ, sì che rispetto alle condizioni che si consideran pei Γ, quei particolari elementi voglian rigettarsi come *degeneri*.

Si tratta allora, in altre parole, di problemi di questo tipo:

« Trovare i Γ che soddisfanno ad una condizione a della classe data, senza peraltro soddisfare ad una prefissata condizione (di degenerazione) ».

Poichè ogni problema numerativo concernente i Γ, riducesi ad un problema d'intersezione di varietà algebriche giacenti in V_d, *l'escluder le eventuali soluzioni degeneri, equivale ad assegnare come punti base, per ognuna delle varietà algebriche riempite dai punti Γ soddisfacenti alle condizioni che si considerano, quei Γ degeneri che eventualmente appartengano alle varietà stesse.*

Ma a proposito dei punti base che risultan così assegnati sulle varietà subordinate a V_d, conviene aggiungere un'avvertenza.

(10) Nell'articolo sulla *Géométrie énumérative* di H. G. ZEUTHEN e M. PIERI (Enc. des Sciences Math., t. 3, vol. 1, fasc. 2; Paris, Gauthier-Villars, 1915), a p. 280, il mio enunciato del principio di Schubert vien riferito sotto una forma tale che il lettore potrebbe esser indotto a considerar come un'ipotesi limitativa quella che la condizione c sia traducibile in una corrispondenza ω, mentre la cosa vale per *ogni* condizione.

Quando una condizione a della data classe, è suscettibile di variazione continua, sicchè essa dia luogo, entro V_d, ad un sistema continuo di varietà A (riempita ciascuna dai Γ soddisfacenti ad una a determinata), c'è da distinguere il comportamento che l'enunciato stesso della *generica* a fissa per la corrispondente varietà A nei punti di D, dal comportamento relativo ad una *particolare* $\bar{A}$.

Orbene, è chiaro che *se non si vuol violare la continuità e quindi l'algebricità*, il comportamento eventualmente eccezionale della particolare $\bar{A}$, va considerato come *accidentale*, nel senso che si deve assegnare il gruppo base di $\bar{A}$, non già tenendo conto del comportamento *effettivo* di $\bar{A}$ negli elementi degeneri, ma fissando invece il gruppo base di $\bar{A}$ in guisa che esso possa considerarsi come limite del gruppo base della A generica, per qualche conveniente variazione continua di A verso $\bar{A}$. Le particolarità che si presentano in più nei punti base di $\bar{A}$, rispetto ai limiti dei punti base della generica A, vanno cioè riguardate come *virtualmente inesistenti* (11).

E se non s'accetta questo modo di vedere, che è il *solo* compatibile colla continuità delle funzioni algebriche, non ci si deve poi sorprendere se, passando da una condizione generica ad una condizione particolare della classe, il numero non si conserva.

Ad evitare malintesi con qualche raro lettore, aggiungo che quando si considera isolatamente la varietà $\bar{A}$, nulla vieta, senza violar per nulla l'algebricità, di assegnare su $\bar{A}$, come gruppo base, il gruppo base ch'essa presenta di fatto nei punti di D. Anzi la $\bar{A}$, con questo gruppo base, potrà magari esser suscettibile d'una variazione continua, in un sistema certamente meno ampio di quello descritto dalla generica A. Quel che non è lecito, in tal caso, è di considerar la $\bar{A}$ come limite di A.

Nel § 3 le circostanze delle quali si è qui discorso in generale, verranno illuminate da un esempio.

Passiamo piuttosto ad esaminare *un altro tipo di soluzioni degeneri, le quali nascon soltanto a cagion del modo imperfetto di enunciare le condizioni che si considerano.*

Abbiamo già detto (n. 3) come ogni condizione variabile c, imposta ai punti Γ di una varietà V, possa enunciarsi come la condizione affinchè un Γ sia omologo di un punto Γ' variabile sopra un'altra varietà V', rispetto ad una corrispondenza ω data tra V e V'. Supporremo, per brevità, che la corrispondenza ω sia irriducibile.

Può darsi tuttavia che, mentre Γ' descrive una varietà W', subordinata a V', ed i Γ omologhi di quel Γ' descrivono una varietà W contenuta in (o coincidente con) V, la corrispondenza ω, limitata ai punti delle W, W', sia riducibile e si spezzi ad esempio nelle corrispondenze ω_1, ω_2.

La condizione c può allora modificarsi, considerando in sua vece la condizione c' affinchè un Γ corrisponda ad un Γ' nella ω, *ma non nella* ω_1.

(11) Questi concetti son familiari nella geometria sopra un ente algebrico.

Se Γ' si muove con continuità entro V', i Γ soddisfacenti a c, c' son gli stessi, finchè Γ' è esterno a W'; quando Γ' cade in W', si hanno invece delle soluzioni degeneri (rispetto a quel che richiede c'), e sono i Γ omologhi di Γ' nella ω_1; ma, al solito, se non si vuol violare la continuità queste soluzioni degeneri andranno per converso accettate come buone, perché son limiti di soluzioni non degeneri del caso generale.

Non si esce insomma da questo dilemma:

1) O la frase « ma non nella ω_1 », che differenziava la condizione c' dalla c, si considera come pleonastica, in quanto i Γ soddisfacenti alla generica c verificano senz'altro la condizione di non essere omologhi di un Γ' nella ω_1;

2) o, se si vuol conservar valore a quella frase per ogni particolarizzazione di c', bisogna rassegnarsi a convenire che la c' variabile non è una condizione algebrica, secondo la comune accezione!

Così, nel noto esempio di Kohn [12] – ricerca del numero delle rette Γ appoggiate in punti *distinti* a 4 rette date dello spazio – c è la condizione perché una retta si appoggi a quattro rette genericamente date; c' la condizione medesima coll'aggiunta della richiesta che i 4 punti d'appoggio sieno distinti; V – coincidente con W – è la varietà delle rette dello spazio; V' la varietà delle quaderne di rette dello spazio; e infine W' la varietà delle quaderne repartite ciascuna in due coppie r, s; t, u, di rette complanari.

La corrispondenza irriducibile ω fra V, V' – nella quale sono omologhe una retta Γ ed una quaderna Γ' quando Γ appoggiasi alle rette della quaderna – dà luogo in tal caso ad una corrispondenza riducibile subordinata fra V e W', la quale si scinde nella corrispondenza ω_1 fra un elemento $\Gamma' \equiv (r, s; t, u)$, variabile in W', ed un elemento Γ – la retta congiungente i punti rs, tu – variabile in V; e nella corrispondenza ω_2 fra l'elemento $\Gamma' \equiv (r, s; t, u)$ e la retta Γ intersezione dei piani rs, tu.

La restrizione che i 4 punti d'appoggio sieno *distinti* o è superflua o menoma l'algebricità della condizione considerata.

5. *Soluzioni multiple.* L'applicazione del metodo di Schubert dà luogo a due fasi ben distinte nella risoluzione dei problemi numerativi.

In una prima fase si deve ricercare se alla condizione c, cui riferiscesi il problema, si può applicare il calcolo simbolico (o, ciò che in sostanza è lo stesso, il principio della conservazione); cioè:

a) Se la condizione sia stata enunciata correttamente in guisa da non dar luogo a soluzioni degeneri del 2° tipo, considerato nel n. prec.

b) Se la condizione sia irriducibile o somma di condizioni irriducibili della stessa dimensione.

Nel caso che questi due requisiti sieno soddisfatti, si passa ad una seconda fase della risoluzione. Lo scopo che si vuol conseguire è infatti quello di espri-

(12) Ved. la mia Nota N., n. 3.

mere il simbolo c mediante altre condizioni più elementari, dalle quali più agevolmente si possa passare ai numeri.

All'uopo si deve scegliere un'opportuna particolarizzazione c' di c. Sieno $c_1, c_2, \cdots, c_r$ le condizioni in cui si risolve c'. In generale la determinazione di queste c_i sarà pressochè immediata, bastando una semplice analisi dei modi coi quali si può soddisfare a c'. Ma non sempre sarà altrettanto facile di decidere con quale molteplicità – *certamente* ≥ 1, per l'ipotesi *b*) – comparisce ciascuna c_i nella espressione di c' (che è poi, in virtù delle ipotesi *a*), *b*) l'espressione stessa di c). Si avrà cioè per c un'espressione del tipo:

$$(1) \qquad c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_r c_r ,$$

ove le λ son interi (≥ 1) da determinarsi.

Se d è il numero delle costanti dell'ente Γ, cui riferisconsi le condizioni considerate, e $k\,(< d)$ la dimensione di c, i valori delle λ si potranno spesso ottenere moltiplicando i due membri della (1) per r condizioni $x_1, x_2, \cdots, x_r$, di dimensione $d - k$, scelte in modo che si sappian già calcolare i *numeri* cx_j, $c_i x_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, r)$, e che inoltre il determinante $|c_i x_i|$ risulti diverso da zero. Si avrà allora fra le λ un ben determinato sistema di equazioni lineari, donde si ricaveranno i valori delle λ.

Facciamo un esempio. Vogliasi esprimere in funzione delle condizioni « caratteristiche » la condizione P affinchè una conica Γ dello spazio passi per un dato punto. All'uopo si consideri la condizione $\mu\nu$, prodotto della condizione caratteristica μ, affinchè una conica abbia il proprio piano passante per un dato punto A, e della caratteristica ν, affinchè una conica si appoggi ad una retta data b.

La condizione $\mu\nu$ si traduce in una corrispondenza ω fra la varietà V', ∞^7, delle coppie $\Gamma' \equiv (A, b)$ punto–retta dello spazio, e la varietà V, ∞^8, delle coniche Γ; varietà entrambi irriducibili (anzi razionali).

Mostriamo che la corrispondenza ω è pur essa irriducibile. Osserviamo anzitutto, a questo scopo, che ad un generico Γ' (o Γ) risponde una varietà irriducibile ∞^6 (o risp. ∞^5) di elementi Γ (o Γ'), e che la varietà dei Γ omologhi di un dato Γ', si spezza soltanto allora che Γ' vada in un elemento Γ_0' della W_5', riempita dalle coppie punto–retta incidenti. In tal caso lo spezzamento avviene in due parti C', C'', a 6 dimensioni, ciascuna delle quali descrive tutta la V, mentre Γ_0' descrive W'; sicchè, se la ω fosse riducibile, non potrebbe che spezzarsi in una corrispondenza ω_1 fra V' e V ed in una ω_2 fra W' e V, nell'ultima delle quali ad un elemento Γ_0' di W' risponderebbero i Γ giacenti in una determinata delle varietà C', C''. Ad una conica generica Γ di V risponderebbero allora due varietà distinte di Γ' omologhi nelle ω_1, ω_2; contrariamente al fatto che i Γ' omologhi di Γ nella ω, formano una varietà irriducibile.

Il ragionamento esposto non è, in ultima analisi, che un modo per provare che ogni elemento di C' o di C'' è limite di un Γ corrispondente nella ω ad un generico Γ', allorchè Γ' va in Γ_0'. Nell'esempio attuale questo fatto si sarebbe potuto stabilire direttamente, anche senza far giuocare la considerazione della

corrispondenza ω; ma in casi meno elementari questa considerazione apparisce assai opportuna.

La condizione $\mu\nu$ è dunque irriducibile, e ad essa si può pertanto applicare il principio della conservazione del numero.

Scegliendo A su b, la $\mu\nu$ si scinde, come s'è già accennato, nella condizione P affinchè una conica Γ passi per A, e nella condizione μ^2 affinchè Γ abbia il suo piano passante per b. Si potrà cioè scrivere:

$$\mu\nu = \lambda_1 P + \lambda_2 \mu^2 ,$$

ove λ_1 , λ_2 son interi ≥ 1.

Si faccia ora successivamente il prodotto di $\mu\nu$ per la condizione x_1 di dimensione 6, affinchè una conica giaccia sopra una quadrica di un dato fascio ed abbia il piano passante per una data retta, e per la condizione x_2, pure di dimensione 6, affinchè una conica giaccia sopra una data quadrica ed abbia il piano passante per un dato punto. Si ottengon allora subito le

$$\mu\nu x_1 = 1 , \quad P x_1 = 1 , \quad \mu^2 x_1 = 0 ; \qquad \mu\nu x_2 = 2 , \quad P x_2 = 0 , \quad \mu^2 x_2 = 1 ,$$

e se ne ricava:

$$\lambda_1 = 1 , \qquad \lambda_2 = 2 .$$

Si perviene così, in modo pienamente rigoroso, alla nota relazione:

$$P = \mu\nu - 2\mu^2 \quad (13).$$

Che se, ritornando alla questione generale, la dimensione k di c, uguaglia il numero d delle costanti da cui dipende Γ, cosicchè le $c , c_1 , c_2 , \cdots , c_r$ rappresentan già numeri, per ottenere i valori delle λ non si potrà fare a meno di ricorrere a considerazioni di limite, adattate opportunamente caso per caso.

Ci si trova qui di fronte ad una questione perfettamente analoga a quella delle molteplicità da attribuirsi alle singole coincidenze d'una corrispondenza algebrica sopra una curva.

Anche per queste molteplicità, nonostante il bel teorema di Zeuthen (14), che ne dà l'espressione mediante certi ordini infinitesimali, nei casi singoli non si può fare a meno di valutare, con appropriata analisi, i valori di quegli ordini d'infinitesimo (15).

La questione di calcolare gl'interi λ, che compaiono nella (1), è un problema nettamente distinto da quello di assegnare il campo di validità del

(13) Ved. per esempio H. SCHUBERT, *Kalkül*, p. 95.

(14) Vedi per esempio H. G. ZEUTHEN, *Lehrbuch* (citato), p. 186; oppure E. BERTINI, l. c., p. 396.

(15) Un modo semplice e di portata abbastanza generale, per valutare questi ordini infinitesimali, è quello di riferirsi a convenienti particolarizzazioni della curva, che sostiene la data corrispondenza. Ved. F. SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*, Memorie della R. Acc. di Torino, (2) 50 (1901) [Memoria V, vol. I, p. 12; N.d.R.].

principio di Schubert; così come ognuno dei noti principî di corrispondenza, risponde ad una questione generale diversa da quella cui risponde il sopra ricordato teorema di Zeuthen; così come il teorema di Bézout, concernente le intersezioni di due curve piane, ha di per sè un significato ben netto, anche a prescindere dalle regole per valutare la molteplicità d'intersezione delle due curve, in un loro punto comune.

Non so pertanto dividere il punto di vista espresso recentemente dallo Zeuthen, che cioè (16):

« Aucune façon de formuler le principe ne peut suffire tant qu'elle ne contient pas une indication précise, valable dans tous les cas, des multiplicités auxquelles les nombres résultant dans les cas particuliers de la décomposition du nombre invariable, sont affectés. La determination de ces multiplicités est un des problèmes fondamentaux qu'il faudrait avant tout résoudre en géométrie énumérative... ce problème une fois résolu, le nombre des solutions qu'il faut rejeter est, en effet, le nombre des solutions affectées de la multiplicité zéro ».

Ebbene, dicendo che le soluzioni che si debbono rigettare son quelle che provengon delle eventuali componenti della condizione data c, le quali hanno dimensione maggiore di c (cfr. col. n. 3) non si viene a dare, appunto per la molteplicità nulla, un criterio generale, quale giustamente lo desidera lo Zeuthen?

Per la determinazione delle molteplicità non nulle, siamo d'accordo che non si conosce un principio abbracciante tutti i casi (per mio conto dubito molto che un tal principio possa esistere; ma converrebbe forse di precisare la questione!). Comunque sia, il problema delle molteplicità > 0, è di natura così essenzialmente diversa dal problema della molteplicità nulla, che non crederei opportuno di fondere in un solo i due problemi, tanto più che al secondo mi sembra sia stata già data l'unica risposta possibile.

§ 2. Il significato funzionale dell'uguaglianza fra i simboli di due condizioni semplici

6. *Posizione del problema.* Nella nota N. già citata, ho accennato di volo (17) ad un ravvicinamento della nozione di eguaglianza fra simboli di condizione ai concetti fondamentali della teoria della base (18). Mi propongo adesso di sviluppar la cosa un po' più diffusamente.

Sia V_d la varietà irriducibile, i cui elementi o punti son gli enti Γ, ai quali si riferiscono le condizioni considerate. Tutte le volte che nel calcolo simbolico si scrive un'eguaglianza fra i simboli di due condizioni c , c' imposte

(16) Vedi il citato articolo di Zeuthen e Pieri, p. 280.
(17) Nota N., fine del n. 4.
(18) Vedi i miei lavori citati nella nota (1).

ai Γ, si ha sempre da fare, come abbiamo osservato nel n. 3, con due condizioni che posson dedursi *integralmente* per continuità da una medesima. Questo significa, in altre parole, che le due varietà C, C' i cui punti soddisfanno a c, c', appartengono totalmente ad un medesimo sistema connesso di varietà dello stesso ordine.

Che cosa si può dire, viceversa, quando si muove da due condizioni c, c', i cui simboli sieno eguali nel senso delle definizioni 4), 5) del n. 1? Si potrà cioè affermare che le due condizioni sieno deducibili integralmente per continuità l'una dall'altra?

Fermiamo l'attenzione sulle condizioni di dimensione 1 ed avvertiamo che nel seguito intenderemo sempre che le condizioni considerate sieno pure (n. 1).

Se la varietà V è una « superficie » algebrica ($d = 2$), le C, C' son due « curve » algebriche; e, dire che $c = c'$, equivale a dire che le C, C' son tagliate nello stesso numero di punti da *ogni* curva di V, e pertanto che due equimultipli opportuni delle c, c', ai quali si aggiunga eventualmente una medesima conveniente condizione, se il prodotto $cc' = 0$ (cioè se le curve C, C' non si tagliano), posson farsi derivare integralmente, per continuità, da una medesima condizione [19].

Questa conclusione si estende a tutte le condizioni di dimensione 1, qualunque sia la dimensione d di V. Svilupperemo la cosa per $d = 3$: si vedrà subito che il ragionamento è valido in generale.

7. *Lemma concernente i sistemi continui di superficie entro una varietà.* Ci occorre anzitutto di stabilire il seguente lemma:

Avendosi sopra una varietà V, a tre dimensioni, due superficie C, C', le quali stacchino curve algebricamente legate secondo gl'interi $(\lambda, -\lambda)$, sopra le superficie d'un fascio genericamente fissato, $|F|$, privo di superficie spezzate, le C, C' son esse pure algebricamente legate secondo gli stessi interi [20].

Qui, come nella mia prima Memoria sulla base, intendo che due curve A, B d'una superficie, sieno algebricamente legate secondo gl'interi $(\lambda, -\mu)$, quando λA, μB, coll'aggiunta eventuale di una medesima curva, stanno in un medesimo sistema irriducibile di curve. E similmente per due superficie d'una varietà. Inoltre parlando di un fascio $|F|$, fissato in modo *generico* entro V, intendo che il fascio considerato appartenga ad un sistema lineare ∞^2 (almeno) a curva caratteristica irriducibile [21].

(19) Ved. la mia prima Memoria sulla base, n. 2. Ved. pure il lavoro citato di ALBANESE, p. 201. È ben chiaro che se le C, C' son tagliate nello stesso numero di punti da ogni curva di V, valgon le relazioni $[c\,c] = [c\,c'] = [c'\,c']$, considerate nel mio lavoro; e viceversa.

(20) Questo lemma estende all'equivalenza algebrica uno dei miei criteri di equivalenza lineare.

(21) Ved. la mia Memoria, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo (1909), p. 51 [Memoria XLIII, vol. II, p. 22; N.d.R.].

Entro V scelgasi anzitutto un sistema irriducibile completo (G) di ∞^q sistemi lineari distinti [22], q essendo l'irregolarità superficiale di V e quindi della generica F [23]. Si può prender ad esempio per sistema (G) il sistema individuato da un multiplo abbastanza alto delle sezioni iperpiane di V. I sistemi completi

$$(C_1) = (G + C), \qquad (C_1') = (G + C')$$

ed i loro successivi multipli, son essi pure costituiti da ∞^q sistemi lineari [24], e, nelle nostre ipotesi, un generico sistema di (C_1) o di (C_1') non contiene F come parte fissa. Sicchè, per un noto criterio d'equivalenza [25], (C_1) e (C_1'), ed anche $(G + \lambda C_1)$, $(G + \lambda C_1')$, staccheranno su F sistemi formati ciascuno da ∞^q sistemi lineari distinti (eventualmente incompleti).

Fissato un sistema lineare $|G|$ di (G), per l'ipotesi che le curve $\lambda(CF)$, $\lambda(C'F)$, e quindi anche le $\lambda(C_1F)$, $\lambda(C_1'F)$ sieno algebricamente equivalenti, esisterà su F il sistema lineare $|(GF) + \lambda(C_1F) - \lambda(C_1'F)|$ ed apparterrà alla serie degli ∞^q sistemi lineari determinati da (G) su F. Vi sarà cioè in (G) un altro sistema $|G'|$ tale che $G + \lambda C_1$, $G' + \lambda C_1'$ staccheranno su F curve equivalenti. Ne deriva [26] che:

$$G + \lambda C_1 \equiv G' + \lambda C_1' ;$$

e quindi $|\lambda C_1'|$ appartiene alla serie irriducibile di ∞^q sistemi lineari individuata da $|\lambda C_1 + G - G'|$. Le C_1, C_1' e perciò le C, C' risultan dunque legate secondo gl'interi $(\lambda, -\lambda)$ [27].

Dal Lemma precedente si deduce il seguente notevole corollario:

Avendosi sopra una varietà V_3 due superficie irriducibili C, C', ciascuna delle quali sia atta a definire un sistema continuo a curva caratteristica effettiva, di grado virtuale > 0, le relazioni aritmetiche

$$(1) \qquad [C^3] = [C^2 C'] = [C C'^2] = [C'^3]$$

esprimon le condizioni necessarie e sufficienti affinchè due opportuni equimultipli delle C, C' sieno algebricamente equivalenti.

La necessità delle condizioni suddette segue subito dalla definizione stessa dei simboli $[C^3], [C^2C'], \cdots$ [28]. Se, viceversa, son soddisfatte le (1), detta A

(22) Pel significato della notazione (G) e per le proprietà più sotto usate ved. il mio lavoro recente: *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Rendiconti dei Lincei (1916), p. 459 e p. 551 [Nota LXVII, vol. II, p. 477 e p. 489; N.d.R.]. Ved. in particolare il n. 7 e segg.

(23) Ved. i *Fondamenti* citati in (2), n. 14.

(24) *Loc. cit.* nella nota (22), p. 561.

(25) Ved. la mia Nota, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica*, ecc., Questi Atti (1906), p. 635 [Nota XXXI, vol. I, p. 397; N.d.R.].

(26) *Loc. cit.* in (25).

(27) *Loc. cit.* nella nota (22), n. 8, oss. 2ª.

(28) *Loc. cit.* nella nota (21), p. 48.

una curva caratteristica di C ed A' la curva (CC'), le $[C^2C'] = [CC'^2] = [C^3]$ equivalgono, sulla superficie C, alle relazioni

$$[AA'] = [A'^2] = [A^2],$$

e, poichè $[A^2] > 0$, due equimultipli convenienti delle A, A' saranno algebricamente equivalenti (29), e quindi le A, A' taglieranno nello stesso numero > 0 di punti la superficie F variabile nel fascio generico $|F|$ di V. Si avrà cioè

$$[C^2F] = [CC'F] > 0.$$

Similmente, considerando su C' una curva caratteristica e la curva A', otterremo:

$$[C'^2F] = [CC'F] > 0.$$

Due equimultipli opportuni delle curve $(CF), (C'F)$ tracciate su F, saranno pertanto algebricamente equivalenti, e pel lemma precedente, si concluderà nel modo enunciato.

La proposizione stabilita vale anche indipendentemente dall'irriducibilità delle C, C', purchè sieno invece soddisfatte le ipotesi seguenti:

1) Che le C, C' abbiano lo stesso ordine.

2) Che le curve caratteristiche, effettive o virtuali, delle C, C', abbiano l'ordine (eventualmente anche nullo), uguale a quello della curva (CC').

Si vede infatti agevolmente che, nelle ipotesi 1), 2), i resti D, D' di C, C' rispetto ad un medesimo multiplo $|H|$ del sistema delle sezioni iperpiane di V, soddisfanno alla lor volta alle relazioni:

$$[D^3] = [D^2D'] = [DD'^2] = [D'^3]; \tag{2}$$

e che si può inoltre scegliere il multiplo $|H|$ così elevato, che le superficie D, D' sieno irriducibili e suscettibili ciascuna di variare in un sistema continuo (anzi lineare) a curva caratteristica effettiva, di grado virtuale > 0. Ne segue immediatamente l'asserto.

8. *Significato funzionale dell'uguaglianza dei simboli di due condizioni semplici.* L'applicazione delle proposizioni del n. 7 permette di trasportare senz'altro alle varietà tutti i risultati della teoria della base per curve di una superficie. A quest'estensione ho già accennato in altro mio lavoro (30): qui resta meglio specificato come l'estensione stessa possa farsi.

Ciò premesso, ritorniamo alla questione posta nel n. 6. Sieno c, c' due condizioni di dimensione 1, imposte agli elementi o « punti » Γ di una varietà irriducibile V_3 e sieno C, C' le due « superficie » di V riempite dai Γ che sod-

(29) Ved. la mia prima Memoria sulla base, n. 2.

(30) *Loc. cit.* nella nota (1).

disfanno rispettivamente a c , c'. Dire che $c = c'$ equivale a dire (n. 1, def. 5) che le C , C' son tagliate nello stesso numero di punti da ogni curva algebrica tracciata su V, la quale non appartenga nè a C nè a C'. I resti D, D' delle C , C' rispetto ad un multiplo abbastanza alto $|H|$ delle sezioni iperpiane di V, saranno pertanto tagliati essi pure nello stesso numero di punti da ogni curva di V. Ne segue, in particolare, che D , D' soddisfanno alle (2) e perciò (n. prec.) che due equimultipli opportuni delle D , D' son algebricamente equivalenti. Si conclude che:

Se entro una varietà (irriducibile) di elementi Γ due condizioni semplici c , c' hanno simboli eguali, due equimultipli opportuni delle c , c', ai quali si aggiunga eventualmente una medesima conveniente condizione, posson considerarsi come limiti di una stessa condizione, variabile con continuità.

In altre parole:

Ogni eguaglianza fra più simboli di condizioni semplici, si traduce in un legame algebrico fra le varietà dei Γ che soddisfanno a quelle condizioni.

Osservazione 1ª. Il corollario stabilito alla fine del n. 7 (enunciato per una V_d, anzichè per una V_3) può ormai presentarsi sotto la forma seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè i simboli c , c' di due condizioni semplici, sieno eguali, è che sieno soddisfatte le relazioni numeriche:

$$c^d = c^{d-1}\, c' = c^{d-2}\, c'^2 = \cdots = c'^d .$$

Osservazione 2ª. L'estensione delle proposizioni precedenti alle condizioni di dimensione > 1, richiederebbe che fossero conosciute per le varietà a $k < d - 1$ dimensioni, immerse in una V_d, le proprietà analoghe a quelle della base per le varietà a $d - 1$ dimensioni appartenenti a V_d.

§ 3. Sulla teoria delle caratteristiche

9. *Rapporti fra il problema delle caratteristiche e la teoria della base. Risoluzione del problema stesso per le condizioni semplici.* Il ravvicinamento fra il calcolo coi simboli di condizione di dimensione 1 e la teoria della base, per le varietà a $d - 1$ dimensioni contenute in una V_d, si può render anche più intimo *mostrando come il problema delle caratteristiche non sia che uno degli aspetti numerativi del problema della base.*

Sia ancora V_d la varietà algebrica irriducibile degli elementi o « punti » Γ, e $(C_1 , C_2 , \cdots , C_\varrho)$ sia una base intermediaria [31] per l'insieme delle varietà a $d - 1$ dimensioni, contenute in V_d, talchè ogni altra varietà C, a $d - 1$ dimensioni, di V_d, risulti legata alla base da una relazione del tipo:

$$\lambda C \equiv \lambda (\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho) , \tag{3}$$

le λ essendo interi, positivi o negativi, non tutti nulli.

(31) Veggasi i miei lavori sulla base, citati nella nota (1).

Indicando con c_i la condizione semplice cui soddisfanno i Γ giacenti in C_i, ogni altra condizione semplice c, imposta ai Γ, è dunque legata alle c_i da una relazione del tipo:

$$c = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_\varrho c_\varrho ,$$

e le $c_1 , \cdots , c_\varrho$ si posson pertanto assumere come *caratteristiche* delle condizioni semplici imposte ai Γ.

Questo, se nella varietà V_d non esistono elementi Γ degeneri (n. 4). Ma può darsi invece che entro V_d esista una varietà algebrica D, di elementi degeneri, i quali, secondo quanto si disse nel n. 4, debbono considerarsi come punti base per quelle varietà, tracciate in V_d, che ne contengono.

Le parti in cui D eventualmente si scinda, dànno luogo ad altrettante distinte condizioni di degenerazione, che posson avere dimensioni diverse (≥ 1). Tuttavia i possibili elementi degeneri, rispetto alla totalità delle condizione semplici, che non contengan come parte alcuna delle eventuali condizioni semplici di degenerazione, riempiranno una varietà $\overline{D}$, contenuta in D, e costituita soltanto da parti di dimensione $\leq d - 2$.

Il gruppo base $\overline{D}$ si scinderà in gruppi parziali irriducibili $D_1 , D_2 , \cdots , D_\tau$, e se si voglion trovare le caratteristiche per la *totalità* delle condizioni semplici (ivi comprese le condizioni semplici di degenerazione), occorrerà assegnare come punti base, sopra una varietà a $d - 1$ dimensioni tracciata in V_d, soltanto i punti che appartengono a quelle tra le $D_1 , D_2 , \cdots$, che stanno per intero sopra C, astraendo invece dagli altri eventuali elementi degeneri che, pur stando su C, non abbracciano per intero una o più delle $D_1 , D_2 , \cdots , D_\tau$.

Supponiamo che la V_d sia già un modello proiettivo, in uno S_r, della varietà dei Γ (n. 1); e consideriamo per ciascuno D_i dei gruppi base $D_1 , D_2 , \cdots , D_\tau$ un sistema lineare $| F_i |$ di forme di S_r, le quali seghino su V_d un sistema lineare infinito $| E_i |$, il cui gruppo base effettivo coincida col gruppo base virtuale D_i.

Data in V_d una qualsiasi varietà C, a $d - 1$ dimensioni, inerente ad una condizione c (anche di degenerazione), o essa non appartiene ad alcuno dei gruppi base $D_1 , D_2 , \cdots$, ed allora vale la (3); oppure C appartiene ad un gruppo base D', risultante dall'insieme di alcuni dei gruppi $D_1 , D_2 , \cdots$, lungo i quali sia eventualmente fissato un particolare comportamento, ed allora conducendo per D' un sistema lineare $| F |$ di forme, si può supporre l'ordine delle F tanto alto, che il resto $| C' |$ di C, rispetto al sistema $| E |$ staccato su V_d da $| F |$, non abbia alcun punto base, e che inoltre $| F |$ risulti equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei sistemi $| F_i |$. Avremo pertanto:

$$\lambda C' \equiv \lambda (\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho) , \; C + C' \equiv \mu_1 E_1 + \cdots + \mu_\tau E_\tau .$$

Indicando con c', e_i le condizioni semplici corrispondenti a C' , E_i, verrà quindi:

$$c = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_\tau e_\tau - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_\varrho c_\varrho ,$$

ove le λ, μ son interi non tutti nulli. Si giunge così al teorema seguente:

Data una varietà (irriducibile) qualsiasi di elementi Γ, contenente o no elementi degeneri, si può sempre scegliere un numero finito di condizioni caratteristiche semplici, per modo che ogni altra condizione semplice, imposta ai Γ, si esprima mediante una combinazione lineare a coefficienti interi, non tutti nulli, delle caratteristiche.

Il problema delle caratteristiche si può pertanto risolver sempre, per le condizioni di dimensione 1. È poi noto che una volta risoluto per queste, risulta senz'altro risoluto per le condizioni $(d-1)$–ple.

Osservazione. – A proposito dell'esclusione degli elementi Γ degeneri, occorre appena avvertire, dopo quanto s'è detto nel n. 4, che se si considerano i Γ soddisfacenti ad una data condizione semplice c e ad una condizione variabile $(d-1)$–pla c', può benissimo accadere che particolarizzando c', una delle soluzioni non degeneri del caso generale, abbia per limite una soluzione degenere del caso particolare. È ovvio allora che una tal soluzione, per quanto degenere, dovrà accettarsi!

Di un'altra avvertenza alla quale pure abbiamo in sostanza accennato nel n. 4, bisogna tener conto, se non si vuol cadere in paradossi ben più riposti.

Allorchè si fissa l'attenzione sopra una classe particolare di condizioni semplici, può darsi che, rispetto alla definizione della classe, le caratteristiche scelte non bastino più, in quanto compaiano nuove soluzioni degeneri di fronte a quel che le particolari condizioni richiedono, o senza che neppur si presentino nuove degenerazioni, accada soltanto che si particolarizzi il comportamento lungo le singole componenti della $\overline{D}$, per le varietà a $d-1$ dimensioni, che corrispondono alle condizioni della classe fissata; o infine che gli elementi degeneri, soddisfacenti alle condizioni della classe data, formino una varietà contenuta in $\overline{D}$, ma non abbracciante per intero una o più parti $D_1, D_2, \cdots, D_\tau$. Allora andrà in conseguenza opportunamente ampliata o modificata la base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho, E_1, \cdots, E_\tau)$ delle varietà tracciate in V_d, e si perverrà così alle nuove caratteristiche che convengono a quella *particolar* classe di condizioni.

10. *Applicazioni alla teoria delle caratteristiche per le coniche del piano. Il teorema di Chasles–Halphen.* Un esempio gioverà a meglio illuminare le precedenti considerazioni e quelle svolte nel § 1.

Mi riferirò alla teoria delle caratteristiche per le coniche del piano, la quale ha notevole importanza storica, perchè da essa trasse origine, si può dire, quasi tutta la parte concettuale della geometria numerativa.

Rappresentiamo le coniche–luogo del piano coi punti di uno spazio lineare S_5, prendendo come coordinate omogenee di un punto di S_5 i coefficienti dell'equazione locale d'una conica (32).

(32) Ved. C. SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano*, ecc., Atti della R. Acc. di Torino (1885). Ved. pure E. BERTINI, *Trattato citato*, Cap. 15°.

Le coniche–inviluppo riescon allora associate proiettivamente agl'iperpiani di S_5, sì che la condizione di incidenza punto–iperpiano in S_5, vien a rappresentare la condizione perchè la conica–luogo e la conica–inviluppo, corrispondenti rispettivamente a quel punto e a quell'iperpiano, sieno coniugate o armoniche.

Le coniche–luogo spezzate in due rette distinte, vengon rappresentate dai punti d'una varietà razionale M_4^3, di dimensione 4 e del 3° ordine, la quale passa doppiamente per la superficie di Veronese F_2^4, imagine delle coniche–luogo spezzate in due rette coincidenti. La M è luogo dei piani tangenti ad F od anche delle corde di F. Ad un inviluppo formato da due fasci distinti, cioè ad una coppia di punti del piano, corrisponde un iperpiano tangente a F, il quale stacca su F una quartica spezzata in due coniche, aventi in comune il punto di contatto di quell'iperpiano. Ad un inviluppo formato da due fasci sovrapposti, cioè ad un punto del piano, corrisponde un iperpiano *tangente singolare*, che tocca F lungo tutta una conica, la quale resta così associata a quel punto.

Un punto ed un iperpiano imagini di una conica–luogo e di una conica–inviluppo, aderenti l'una all'altra, sono polo e polare rispetto ad M. Quando la conica si spezza in 2 rette distinte, l'inviluppo aderente si riduce al fascio di raggi, contato due volte, avente il centro nel punto comune alle 2 rette ed ha per imagine l'iperpiano tangente ad M nel punto imagine della conica–luogo. Gl'iperpiani tangenti ad M son tutti e soli gl'iperpiani tangenti singolari di F, ciascun di essi toccando M lungo tutta la conica di F ad esso relativa; ecc. ecc.

Tutto ciò trovasi, sotto forma più o meno esplicita, nelle pubblicazioni citate nella nota (32).

Si dice *conica degenere di 1ª specie* una conica, *considerata insieme come luogo ed inviluppo*, la quale sia spezzata, come luogo, in 2 rette distinte, e come inviluppo, in 2 fasci coincidenti.

Quando una conica–luogo Γ_0 si spezza in 2 rette coincidenti nella a, l'inviluppo aderente diviene indeterminato. Ma se si fissa un fascio–schiera Σ di coniche irriducibili, avente per punti base due punti P, Q di a, e per ogni conica–luogo Γ, variabile in Σ, si considera l'inviluppo aderente, ed il relativo iperpiano imagine, questo, quando Γ tende con continuità a Γ_0, s'approssima ad una posizione limite, che si vede facilmente esser l'iperpiano imagine dell'inviluppo di 2ª classe spezzato nei fasci (P), (Q). Cosicchè ogni *conica degenere di 2ª specie*, cioè una conica spezzata come luogo in due rette coincidenti e come inviluppo in due fasci distinti aventi i centri sul luogo (una tal conica è l'ente duale di una conica degenere di 1ª specie), vien rappresentata in S_5 dall'associare ad un punto di F, uno degli ∞^2 iperpiani in esso tangenti alla superficie.

Fra queste coniche di 2ª specie, ve ne son di quelle, rappresentate ciascuna da un punto di F e da uno degli ∞^1 iperpiani tangenti singolari uscenti da quel punto, ognuna delle quali si scinde come luogo in due rette coincidenti e come inviluppo in due fasci pure coincidenti, col centro in un punto della

retta–luogo, e son le *coniche degeneri di 3ª specie* (*coniche degeneri di Halphen*) (33).

Si hanno così nello S_5 rappresentativo le imagini delle varie specie possibili di elementi degeneri pel sistema delle coniche–luogo–inviluppo del piano. L'ente conica–luogo–inviluppo ha per imagine in S_5 una coppia formata da un punto e da un iperpiano omologhi in una corrispondenza birazionale ω (polarità rispetto ad M). Le coniche degeneri di 2ª, 3ª specie, hanno per imagini coppie di elementi fondamentali rispetto ad ω.

In un punto P di F il cono quadrico tangente ad M, ha per vertice il piano π ivi tangente ad F e per spazî generatori gli S_3 congiungenti π coi piani delle ∞^1 coniche di F passanti per P. Ponendo in P l'origine delle coordinate ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$), si ha l'equazione di M:

$$f \equiv \sum_{i,k=1}^{5} a_{ik}\, x_i\, x_k + \psi(x_1, \cdots, x_5) = 0\,, \tag{4}$$

ove ψ è una forma cubica nelle x e

$$\sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \tag{5}$$

l'equazione del cono tangente ad M in P.

Sia R un ramo curvilineo d'ordine α uscente da P e

$$x_1 = b_1\, t^\alpha + \cdots,\ x_2 = b_2\, t^\alpha + \cdots,\ \cdots,\ x_5 = b_5\, t^\alpha + \cdots,$$

gli sviluppi in serie di potenze di un parametro t, che dànno le coordinate dei punti di R, le b essendo costanti non tutte nulle.

L'equazione dell'iperpiano polare di un punto variabile in R, rispetto ad M, è

$$t^\alpha \sum a_{ik}\, x_i\, b_k + \cdots = 0\,,$$

ove t è il valore del parametro che corrisponde a quel punto ed i puntini stanno in luogo di termini di grado $> \alpha$ in t. Per $t = 0$ si ha come iperpiano limite dello S_4 polare suddetto, l'iperpiano:

$$\sum a_{ik}\, x_i\, b_k = 0\,, \tag{6}$$

che è l'iperpiano polare rispetto al cono (5) della retta r tangente in P al ramo R.

Affinchè quest'iperpiano risulti tangente al cono (5), occorre dunque e basta che r stia sul cono stesso. Rispetto ad un sistema semplicemente infinito di coniche del piano, questa conclusione, in base alle osservazioni premesse, s'interpreta subito nel modo seguente:

Se un sistema ∞^1 di coniche irriducibili contiene una conica Γ_0, degenere di 3ª specie, la curva rappresentativa del sistema, nello spazio S_5 – i cui punti

(33) Comptes rendus (1876), p. 537, 866. Ved. pure, H. G. ZEUTHEN, *Lehrbuch* (citato), p. 310.

corrispondono omograficamente alle coniche-luogo del piano – tocca, nel punto imagine di Γ_0, *la* M_4^3 *imagine delle* ∞^4 *coniche spezzate in coppie di rette*; *e viceversa.*

Naturalmente il sistema ∞^1 può « passare » per la conica degenere di 3ª specie con più « rami », ciascuno dei quali avrà per imagine un ramo tangente nell'origine alla M_4^3.

Dal teorema precedente si trae inoltre, come immediato corollario, che se un sistema ∞^4 di coniche irreducibili, contiene *tutte* le coniche degeneri di 3ª specie, in *ogni* punto P della superficie F, le tangenti ad M son pur tangenti alla forma V di S_5, rappresentatrice di quel sistema.

Ciò posto, la varietà degli elementi Γ degeneri, che nel caso generale (n. 9) indicavasi con D, è attualmente la varietà M, e quella che indicavamo con $\overline{D}$, è la superficie di Veronese F, la quale risulta assegnata come luogo di punti base, generalmente semplici, per le forme di S_5 rappresentative di condizioni di dimensione 1, le quali sieno soddisfatte dalle ∞^2 coniche-luogo spezzate in rette doppie.

Una base intermediaria, anzi minima, delle forme di S_5 passanti per F con molteplicità ≥ 0, è costituita da un iperpiano I e da una delle ∞^5 quadriche Q passanti semplicemente per F, le quali formano un sistema $|Q|$, che non ha punti base fuori di F.

Difatti, se una forma irriducibile d'ordine n, C, non passa per F, essa appartiene al sistema lineare $|nI|$, privo di punti base. Se essa passa invece per F con molteplicità $\beta \geq 1$, sarà intanto $n \geq 2\beta$, a meno che ogni corda di F non giaccia in C, la quale in tal caso coincide colla varietà delle corde di F, cioè con M. Escluso questo caso e posto $\alpha = n - 2\beta$, risulterà:

$$C \equiv \alpha I + \beta Q ,$$

$\equiv$ essendo il consueto segno di equivalenza lineare. In questa relazione si sottintende che i punti di F vengon assegnati come β-pli per C e semplici per Q.

Che se poi C coincide con M, la quale passa doppiamente per F, si ha:

$$C + I \equiv 2Q ,$$

e quindi ancora:

$$C \equiv -I + 2Q .$$

In particolare può scegliersi come iperpiano I un iperpiano tangente singolare di F, il quale rappresenta co' suoi punti le ∞^4 coniche-luogo passanti per un punto del piano, e come quadrica Q una i cui punti rappresentino le ∞^4 coniche-luogo tangenti ad una data retta, cioè il cono quadrico Q che da un piano tangente in un punto P di F, proietta le ∞^4 coniche di F passanti per P (cono tangente ad M in P). Si ha allora il teorema:

Assegnate le rette doppie del piano come coniche-luogo degeneri rispetto alla totalità delle condizioni semplici da imporsi alle coniche-luogo, ogni tal condizione viene ad appartenere al sistema lineare individuato da una conve-

niente combinazione lineare a coefficienti interi α, β *(non ambedue nulli) delle condizioni perchè una conica passi per un punto dato o perchè tocchi una retta data.*

L'interpretazione numerativa di questo legame funzionale dà luogo al teorema di Chasles:

Il simbolo c di ogni condizione semplice, imposta alle coniche del piano, si esprime con una relazione del tipo

$$c = \alpha\mu + \beta\nu,$$

μ essendo il simbolo della condizione perchè una conica passi per un punto dato, ν il simbolo della condizione perchè essa tocchi una retta data, ed α, β essendo interi non entrambi nulli, dipendenti soltanto dalla condizione c.

Per le citazioni dei lavori di Chasles, Clebsch, Halphen, Lindemann, Schubert–Hurwitz e Study, concernenti la dimostrazione del teorema di Chasles, rinvio il lettore all'articolo di Zeuthen nella Encyclopédie des Sciences Mathématiques [citato nella nota (10)].

Passiamo piuttosto ad occuparci di un complemento essenziale, portato da Halphen, al teorema in questione, cercando di pervenire al complemento medesimo e di chiarirne la portata, dal nostro punto di vista.

Se c' è una data condizione quadrupla e C' la curva di S_5 luogo dei punti imagini delle coniche soddisfacenti a c', il numero, supposto finito, dei punti comuni alla forma C e alla curva C', *fuori dei punti base assegnati* (che son i punti di F), è espresso da

$$cc' = \alpha\mu c' + \beta\nu c', \tag{7}$$

a patto che il numero j delle intersezioni di C' con C, assorbite da ogni punto base P (punto d'appoggio di C' su F), uguali il numero $\alpha i + \beta h$, ove i, h son le rispettive molteplicità d'intersezione in ciascun punto comune a C' e, rispettivamente, ad un iperpiano I e ad una quadrica Q.

Poichè l'iperpiano I può supporsi scelto genericamente fra gl'iperpiani tangenti singolari ad F, così esso non passa per alcuno dei P ($i = 0$); laonde, affinchè valga la (7), bisogna e basta che C' abbia con C, in ogni P, la stessa molteplicità d'intersezione che C' ha in ogni P colla forma βQ, ove Q è una quadrica generica per F.

Vediamo ora quand'è che queste molteplicità d'intersezione risultano eguali. Consideriamo all'uopo la c variabile nel sistema continuo delle condizioni che si deducon da essa mediante le ∞^8 omografie piane (il che implica che, se la c è metrica, la si consideri sotto forma proiettiva). La C, che supponiamo irriducibile, è allora mobile in un sistema continuo $\{C\}$, la cui eventuale varietà base, essendo imagine di una varietà di coniche, di dimensione < 4, invariante rispetto al gruppo delle ∞^8 omografie, non può che coincidere colla superficie F.

Effettivamente la F si presenterà come varietà base di $\{C\}$, allora e solo allora che una generica c sia soddisfatta dalle ∞^2 coniche degeneri di 2ª

specie. Le forme C potranno inoltre avere altri punti base infinitamente vicini a punti di F, allora e solo allora che la generica c sia soddisfatta da tutte le coniche degeneri di 3ª specie. In tal caso le C, come s'è già visto, toccheranno tutte la M nei singoli punti di F.

Se pertanto la condizione quadrupla c' non è soddisfatta da alcuna conica di 3ª specie (cosicchè C' non tocca M in nessuno dei P), la curva C' contenente i punti base P del sistema continuo $\{ C \}$, non passa per nessun altro punto base infinitamente vicino ad essi, e quindi in ogni P la molteplicità d'intersezione della generica C con C', è uguale al prodotto di β per la molteplicità h, che C' presenta in quel punto P, cioè alla molteplicità d'intersezione in P di C' colla βQ.

Alla stessa stessa conclusione si giunge se la generica c non è soddisfatta da tutte le coniche di 3ª specie, giacchè allora i punti base di $\{ C \}$ son soltanto i punti di F (e non altri punti infinitamente vicini), e quindi, come prima, C' e la C generica s'incontrano soltanto nei P.

Di più, siccome M e C' si tagliano in un numero finito di punti, ogni punto comune a C, C', fuori di F, è esterno ad M, talchè le intersezioni di C' colla generica C, fuori di F, son imagini di coniche *irriducibili* soddisfacenti alle condizioni c, c'.

Nel caso contrario, che non si verifichi alcuna delle due predette alternative, C, C' si toccheranno di certo in qualcuno dei punti d'appoggio di C' con F e la (7) non varrà più, se non a patto d'includere fra le soluzioni alcune coniche degeneri di 3ª specie contate il debito numero di volte.

Si perviene così al *teorema di Halphen* (34):

Avendosi nel piano un sistema ∞^1, Σ, *di coniche irriducibili, alle quali s'imponga una condizione semplice c, definita a meno d'un'omografia, allora soltanto che si verifichi una almeno delle due alternative*:

1) *Il sistema* Σ *non contiene alcuna conica degenere di* 3^a *specie*;

2) *La data condizione semplice (generica entro la propria famiglia di condizioni fra loro omografiche), non è soddisfatta da* TUTTE *le coniche degeneri di* 3^a *specie*;

il numero delle coniche IRRIDUCIBILI *di* Σ, *soddisfacenti alla c, si esprime mediante una formula del tipo*:

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

ove μ, ν *son le caratteristiche di* Σ, *e* α, β *numeri interi, che dipendon soltanto dalla condizione c.*

L'ipotesi che la c sia generica entro una famiglia di condizioni fra loro omografiche, equivale all'ipotesi dell'*indipendenza della condizione c dalla c'*, che compare in Halphen ed in Zeuthen (loc. ultimamente citato).

Osservazione. – Come abbiamo accennato, se fra le coniche di Σ soddisfacenti alla condizione c si voglion accettare anche le eventuali coniche dege-

(34) Cfr. per esempio e H. G. ZEUTHEN, *Lehrbuch*, citato, p. 314.

neri di 2ª e di 3ª specie, contate ciascuna debitamente, allora il numero cercato, qualora sia finito, è *sempre* della forma $\alpha\mu + \beta\nu$, anche se la condizione c non è generica entro la famiglia delle proprie trasformate omografiche, e se non è soddisfatta alcuna delle alternative 1), 2). È questo il punto di vista adottato nei lavori di Study sulla teoria delle caratteristiche.

Non v'ha certamente alcun dubbio sulla legittimità di questo punto di vista; ma tanto meno posson esservi dubbi sul fatto che il teorema di Halphen risponda ad una questione effettiva, non creata ad arte, e che è appunto quella di assegnare un criterio *a priori* per riconoscer quand'è che le $\alpha\mu + \beta\nu$ coniche rispondenti al problema, SON TUTTE IRRIDUCIBILI.

L'analisi di Halphen sta cioè al teorema di Chasles, come questo teorema sta alla proposizione più grossolana enunciata prima da Jonquières, il quale assegnava l'espressione $n\mu$ pel numero delle coniche soddisfacenti ad una condizione semplice c e ad una condizione quadrupla c' (di caratteristica μ). Accettando fra le soluzioni anche le coniche degeneri, è ben chiaro che il numero richiesto è del tipo $n\mu$: giacchè nello S_5 una curva C' di ordine μ ed una forma C d'ordine n si tagliano in $n\mu$ punti!

Dall'analisi di Halphen deriva anche, com'è noto, il modo di valutare, nei casi singoli, quante volte le soluzioni degeneri contano nel numero $\alpha\mu + \beta\nu$.

Seguendo la rappresentazione da noi adottata, si tratta di valutare l'eccesso sull'intero $\alpha i + \beta h$, sopra definito, della molteplicità d'intersezione della curva C' e della forma C, in ogni punto P di F ad esse comune. Ed in fondo questo procedimento non differisce da quello di Halphen.

NOTERELLE POLEMICHE

Ho affermato nella prefazione a questa Nota che la formulazione del principio della conservazione del numero, proposta dal sig. Giambelli, lascia sostanzialmente le cose al punto di prima. E valga il vero!

Ripeto anzitutto, colle parole dell'A., l'enunciato che il Giambelli, nell'edizione purgata 1915, vuol chiamare « principio della conservazione della condizione » [35]:

« Sia c' una particolarizzazione della condizione algebrica c, imposta « all'ente algebrico Γ. La c' abbia la stessa dimensione della c e sia stata de- « composta nelle $c'_0, c'_1, \cdots, c'_t$ condizioni indecomponibili per la particola- « rizzazione della c nella c'. Vale la relazione simbolica

$$c \equiv a_0 c'_0 + a_1 c'_1 + \cdots + a_t c'_t ,$$

« dove i numeri $a_0, a_1, \cdots, a_t$ sono interi positivi, oppure nulli, ma non tutti « nulli ».

(35) Ved. la 3ª nota (in ordine cronologico) fra quelle citate in (5).

Il sig. Giambelli intanto ha soppresso dal suo enunciato attuale l'ipotesi, che compariva nell'enunciato del 1904, che cioè c' fosse una particolarizzazione « uniforme » della c. Si è dunque convinto anche lui che questa « uniformità » della condizione, era cosa troppo aggrovigliata [36]. La forma dell'enunciato primitivo (che era quello ch'io avevo sott'occhio nel 1912, quando scrissi la mia Nota N.) « può sembrare a primo aspetto complicata – confessa il sig. Giambelli – ma tale complicazione scompare, quando *non si tenga conto* del concetto di particolarizzazione uniforme... ».

E che altro dicevo io in N., se non che si trattava di cose troppo complicate? E come voleva il G. che il povero lettore *non tenesse conto* della particolarizzazione uniforme, che costituiva il perno della faticosissima dimostrazione offertagli? [37].

Ma, poichè l'A. consente, componiamo pur nell'oblio il « concetto di particolarizzazione uniforme » e vediamo qual'è il contenuto della formulazione attuale. Mi permetto di continuare ad usare le mie notazioni, per maggior comodità di riferimento colla parte precedente di questa Nota.

La condizione variabile c di dimensione k, imposta ai « punti » Γ d'una varietà V_d, consiste in ciò: che i Γ si obbligano a giacere in una varietà C, di dimensione $d - k$, mobile in un sistema algebrico Σ (cfr. col. n. 2). Quando c varia con continuità tendendo ad una sua particolarizzazione c', la varietà C dei Γ soddisfacenti a c, tende ad una posizione limite $\overline{C}$, che fa indubbiamente parte della varietà C' dei Γ soddisfacenti a c'; sicchè c' consta della condizione $\bar{c}$, limite di c, ed eventualmente di qualche altra condizione. E come la varietà $\overline{C}$ può essere costituita da h parti, ciascuna delle quali può comparire in $\overline{C}$ con una certa moltiplicità (≥ 1), così potrà scriversi:

$$\bar{c} = a_0 c'_0 + a_1 c'_1 + \cdots + a_h c'_h ,$$

ove $c'_0, \cdots, c'_h$ son le condizioni imposte ai Γ di giacere sulle singole parti di $\overline{C}$ e le a son interi ≥ 1.

Se ora scriviamo la relazione:

$$c = \bar{c}, \text{ cioè: } (8)\ c = a_0 c'_0 + \cdots + a_h c'_h ,$$

questa, in tanto sarà lecita, in quanto (n. 1) sia suscettibile di diventare una uguaglianza fra numeri, allorchè se ne moltiplichino i due membri per una qualunque condizione di dimensione $d - k$, indipendente da c e da $\bar{c}$. E perché ciò accada, occorre e basta che la C variabile (e quindi anche la $\overline{C}$) consti di parti aventi tutte la stessa dimensione (cfr. col. n. 1, def. 5ª).

(36) Tanto nell'edizione tedesca che nell'edizione francese dell'Enciclopedia matematica, lo Zeuthen, nel riferire l'enunciato del G., tralascia di spiegare che cosa sia una « particolarizzazione uniforme » di c!

(37) Il G. nella sua 2ª Nota, a p. 3, dichiara che il concetto di particolarizzazione uniforme è *necessario* per la dimostrazione del suo enunciato.

Poniamoci dunque in quest'ipotesi. Si avrà allora la (8) e nessuno potrà vietarci di scriverla sotto la forma

$$(9) \qquad c \equiv a_0 c'_0 + \cdots + a_h c'_h + a_{h+1} c'_{h+1} + \cdots + a_t c'_t ,$$

ove le $a_{h+1}, \cdots, a_t$ non son altro che insignificanti zeri, e le $c'_{h+1}, \cdots, c'_t$ son le condizioni che compaiono come nuove quando da c si passa a c'. Nessuno può vietarcelo! Difatti moltiplicando ambo i membri della (9) per una condizione di dimensione $d - k$, indipendente da c e c', la (9) coi suoi termini supplementari, resi impotenti dagli zeri, non fa che ridare la stessa eguaglianza numerica della (8).

È convinto di ciò il sig. G.? Orbene, questo e non altro, salvo il linguaggio, è, secondo me, il succo del suo risultato, che, come vede, io ho tentato di penetrare dal mio punto di vista. Confesso subito però che se è vero ch'io ho cercato di capir quello che il sig. G. ha scritto, non sempre ho avuto la fortuna di riuscirvi.

Nonostante faticosi tentativi d'interpretazione, che avrò poi da infliggere, almeno in parte, al lettore, non ho potuto sbrogliar la matassa delle « condizioni indecomponibili ». Tuttavia mi pare di valutar colla massima benevolenza questa « indecomponibilità », se *suppongo* ch'essa equivalga all'ipotesi che la varietà mobile C sia formata da parti della stessa dimensione, giacchè questa condizione, ben chiara, è necessaria e sufficiente per la validità della (9), con cui il sig. G. esprime il principio della permanenza.

Ma agli effetti della questione di precisare quand'è che vale questo principio, che cosa ci dice la (9)? Vediamolo sopra il notissimo esempio di Study, giacchè l'illustrazione è fornita, per questo esempio, dallo stesso sig. G.

Quante sono le proiettività d'una retta, che mutano in sè una quaderna di punti $A\,B\,H\,K$? Si sa che queste proiettività son 4 (coll'identità) quando la quaderna è generica, 8 quando è armonica, 12 quando è equianarmonica. La condizione c è in tal caso la condizione imposta ad una proiettività di mutare in sè una quaderna di punti. Supponiamo la quaderna $A\,B\,H\,K$ armonica, e diciamo c' la particolarizzazione che così s'ottiene da c.

Il Giambelli dice [38]: « La c' risulta una particolarizzazione uniforme « di c. Tenendo conto di tutti gli enti introdotti nel definire la c' (?), si dovrà « decomporla nelle 8 condizioni $c'_0, c'_1, \cdots, c'_7$ ove con $c'_0, c'_1, \cdots, c'_7$ si son « indicate le 8 condizioni definite coll'imporre all'ente proiettività di mutare « $A\,B\,H\,K$ in una di quelle 8 fra le 24 permutazioni di $A\,B\,H\,K$, tali che i « punti in quell'ordine formino un gruppo armonico. Per questo esempio « vale il principio della conservazione del numero sotto la forma sopra « enunciata, essendo 4 dei numeri $a_0, a_1, \cdots, a_7$ uguali ad 1 e 4 uguali a « zero ». E così il lettore è servito!

(38) 1ª Nota, p. 550.

Sarebbe difficile che il principio, sotto la forma datagli dal G., non valesse, se è vero che

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0!$$

Ma che cosa dice la spiegazione del G., tradotta in più povero linguaggio? Che se è vero che nel passaggio da una quaderna generica ad una quaderna armonica, il numero delle proiettività sale da 4 a 8, non è men vero che il numero di conserva... non contando 4 delle 8 proiettività inerenti ad un gruppo armonico. E che cosa sappiamo di più, di quanto è affermato nell'enunciato del fatto che si voleva spiegare? Ne sappiamo anzi di meno, perchè ognuno, anche a prescindere da ogni nozione di geometria numerativa, è capace di rintracciare fra le 8 proiettività, inerenti al gruppo armonico, 4 che son limiti delle proiettività relative ad una quaderna generica (l'identità e quelle che non lasciano fisso alcun elemento della quaderna), e 4 che son essenzialmente nuove.

Ammetto che il sig. G. colla sua spiegazione abbia voluto dir questo... Se così io interpreto esattamente il pensiero dell'A. – al quale non voglio attribuire d'essersi contentato soltanto di parafrasare il fatto da spiegarsi – apparisce ben chiaro, in questo esempio semplice, che l'unico senso possibile della formulazione da lui proposta, è appunto, come dicevo nella prefazione, che fra le soluzioni del caso particolare si trovan sempre le soluzioni limiti del caso generale.

Mi pare che la spiegazione dell'esempio medesimo, contenuta nel mio lavoro « puramente teorico », penetri un tantino più addentro [39].

Mi permetta il G., ma parmi che, in quest'occasione, egli abbia dimenticato il savio consiglio di Abel, che la prima cosa a cui bisogna badare prima di accingersi a trattar una questione, è il modo di porla.

Che cosa affermava il principio di Schubert, nella sua forma originaria? La permanenza del numero di fronte alle particolarizzazioni di una condizione variabile o se vuolsi (n. 3) la perfetta sostituibilità, nel calcolo, dei simboli di due condizioni derivanti per continuità l'una dall'altra.

Che cosa è stato obiettato a quella forma originaria? Che se non si poneva qualche limitazione alla natura della condizione o al suo modo di variare, il principio non era sempre vero.

(39) Nella recensione del *Lehrbuch* di H. G. ZEUTHEN, pubblicata da E. S. ALLEN (Bulletin of the American mathematical Society, november 1915) a proposito della spiegazione da me data dell'esempio di Study, si legge a p. 88: « It was a beautiful and valuable piece of work »; ed a proposito della formulazione « puramente teorica » del principio di Schubert: « that theorem is so elegant, clear and simple, that it will prove a great aid to workers in enumerative geometry » (p. 89). Lo « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (*43*, 1912) » a p. 638 giudica che: « Die Lektüre der geistreichen und lichtvollen Abhandlung von Severi ist jedem Geometer warm zu empfehlen », mentre dei lavori del sig. G. è detto: « Dadurch wurde aber die wichtige Frage nicht erschöpft, wie leicht zu sehen war, und wie durch die vorliegende Abhandlung (la mia Nota N.) streng bewiesen wird ». Per quel che concerne del resto il concetto d'irriducibilità delle condizioni, che mi ha guidato nella N., mi trovo in buona compagnia collo Zeuthen, (*Lehrbuch*, p. 364).

Che cosa dunque bisognava cercare? Le limitazioni necessarie e sufficienti per la validità del principio, nella sua forma originaria, così perspicua.

E invece che cosa risponde il G.? Al simbolo d'una condizione c potete sostituire nei calcoli una combinazione lineare delle condizioni (indecomponibili!) in cui si scinde una particolarizzazione c' della c, purchè ad alcuni dei coefficienti della combinazione diate il valore zero; cioè, in ultima analisi, purchè scegliate fra le condizioni in cui si decompone c'... quelle che dovete scegliere. Ma, obbietta il paziente lettore, quello che volevo conoscere era precisamente un criterio di scelta delle componenti buone di c', dalle cattive; e voi invece mi dite che ce ne son di certo delle buone, ma che ce ne posson essere anche delle cattive. E lasciate al mio buon fiuto la scelta. Orbene, questo era proprio quello che faceva fin dal '74 lo Schubert. *Le cose restano dunque al punto di prima.*

La mia Nota N. « puramente teorica » – se non erro – offre invece al lettore il criterio per sapere a priori se al simbolo della generica c può sostituire, nel calcolo, il simbolo di una *qualunque* particolarizzazione di c: bastando all'uopo che c sia irriducibile o che sia somma di condizioni irriducibili della stessa dimensione.

Come vede il sig. G., in N. io considerai le cose proprio « sotto l'aspetto condizionale, come esige l'opera dello Schubert »: soltanto, poichè lo Schubert, nel porre i principî del calcolo simbolico, non poteva non considerare la conservazione del numero dallo stesso punto di vista, io, per rispetto alla storia e al linguaggio ormai consacrato dall'uso, non mi sentii autorizzato a cambiar nome a cose vecchie, sia pure se presentate sotto forma nuova e più completa.

Vediamo ora più dettagliatamente che cosa sieno le « condizioni indecomponibili » del sig. Giambelli, e qual fondamento abbiano le critiche ch'egli crede di poter rivolgere alla mia Nota N.

Il mio studio è per lui « puramente teorico », perchè:

1) non vi si tien conto del concetto di condizioni indecomponibili;

2) né vi si tien conto delle moltiplicità positive non nulle delle soluzioni;

3) e perchè non vi è nessuna ragione di considerare, secondo io faccio, come non algebriche, le condizioni che dipendono da diseguaglianze.

Che cosa sono anzitutto le condizioni indecomponibili delle quali dovevo tener conto? Il G. dice [40]: « la condizione c' (particolarizzazione della c e di « egual dimensione di c) sia stata decomposta in più condizioni $c'_0, c'_1, \cdots, c'_t$, « eventualmente anche degeneri, di dimensione eguale a quella di c', tali che « ogni c'_i mediante l'aggiunta di altre relazioni di posizione tra l'ente Γ e tutti « gli enti introdotti (esplicitamente od implicitamente) nel definire la condi- « zione c', non si possa ulteriormente decomporre in più condizioni $c'_{i1}, c'_{i2}, \cdots$, « *senza che* TUTTE, *tranne una, sieno di dimensione maggiore di quella di* c'_i ».

(40) Cfr. la Nota 3ª, p. 19, come pure la Nota 2ª, p. 2.

Le $c'_0, c'_1, \cdots, c'_t$ si definiscono condizioni indecomponibili per la particolarizzazione della c nella c'.

Consultando la 1ª Nota del G. (p. 548), si apprende che la c' non si deve poter pensare « come ulteriormente decomponibile in più condizioni « $c'_{i1}, c'_{i2}, \cdots$, *condizioni* TUTTE *di dimensione uguale a* c'_i, ecc. » (il resto sostanzialmente come sopra). Per l'A. dunque le due frasi che ho sottolineato sono equivalenti! Per me la seconda equivale a quest'altra: « senza che *qualcuna* delle $c'_{i1}, c'_{i2}, \cdots$, risulti di dimensione maggiore di quella di c'_i ». Ed è questa un'affermazione ben diversa dalla prima.

Pedanterie linguistiche o anomalie logiche? Sta il fatto che anche il lettore più accurato e paziente si trova disorientato da siffatte... novità di linguaggio, e, salvo casi di forza maggiore (analoghi al mio), mette volentieri da parte lo scritto che gli si presenta così.

Ma andiamo avanti. Suppongo che la frase « mediante l'aggiunta di altre relazioni di posizione fra l'ente Γ e tutti gli enti introdotti (esplicitamente od implicitamente) nel definire la condizione c' », significhi che l'ente Γ si assoggetta ad un'ulteriore condizione α e che si considera la condizione prodotto $\alpha c'$. Suppongo inoltre che l'A. voglia, secondo la primitiva dizione, che la $\alpha c'$ non possa mai scindersi, qualunque sia α, in più condizioni tutte con la dimensione di c'.

È facile allora costruire esempi in cui, pur essendo soddisfatta questa ipotesi, la relazione (9) colla quale il G. enuncia il principio della permanenza, non è vera; ed esempi in cui, non essendo soddisfatta l'ipotesi stessa, la relazione (9) è vera (41). Sicchè tale ipotesi, non è, a norma della mia interpretazione, né necessaria né sufficiente per la conclusione a cui l'A. vuol giungere. Ma evidentemente sono io, che sbaglio nell'interpretare.

Veniamo alla seconda accusa: non ho tenuto conto delle molteplicità positive non nulle delle condizioni. Ma come si fa ad affermar questo, quando a pag. 320 della mia Nota N. ho detto in modo *esplicito*, prima di scriver la relazione $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0$ fra le condizioni che là consideravo, che la relazione stessa si poteva scrivere in quanto « si contassero debitamente le molteplicità delle soluzioni limiti »; e quando a pag. 318 avevo detto: « È ben noto che nel computo del numero delle soluzioni di ogni problema algebrico, si deve tener

(41) Un esempio del primo tipo si ha considerando fra due superficie V, V' una corrispondenza π che associ ai punti Γ' di V', le curve irriducibili A di un sistema ∞^2 tracciato su V; un'altra corrispondenza ϱ che associ ad ogni punto di V' un gruppo G di un numero finito di punti variabili in V; e infine una terza corrispondenza τ che associ ai punti di una curva Γ' tracciata su V', le curve irriducibili B di un sistema ∞^1 appartenente a V; e definendo la condizione c come quella che s'impone a un punto Γ di V volendo che sia l'omologo di un Γ' nella corrispondenza $\pi + \varrho + \tau$. La particolarizzazione c' si definirà poi supponendo che il Γ' variabile su V' sia stato scelto sulla curva Γ'. Un esempio del secondo tipo s'ottiene considerando la condizione c, perché un punto Γ di S_3 giaccia sopra una quartica gobba Γ' di 1ª specie, e definendo c' come la condizione inerente ad una Γ' degenerata in un quadrilatero gobbo.

conto delle soluzioni multiple...? ». Del resto, chi non lo avrebbe sottinteso, anche se non lo avessi detto in modo esplicito?

Ma che forse il G. creda di aver tenuto le soluzioni multiple in maggior conto di quel che non le abbia tenute io, solo pel fatto che ne ha indicato le molteplicità colle lettere $a_0, a_1, \cdots, a_t$, senza peraltro assegnare un modo per calcolarle (cfr. col. n. 5 di questa Nota)? Ma non si accorge egli, insomma, ch'io non ho fatto che indicare con una lettera sola la particolarizzazione c' di una condizione c, mentre egli, nell'ipotesi che c' si scinda in più componenti, ha sostituito al simbolo c' la combinazione lineare corrispondente? E non è chiaro a chiunque, che di fronte alla questione che ambedue volevamo risolvere, questa differenza di scrittura è insignificante, giacchè quel che conta è di sapere quand'è che vale la relazione simbolica $c = c'$?

Del resto, se vuole, il sig. G. troverà in N. (nota a pie' della pag. 321 (**)) anche l'accenno ai coefficienti $a_0, a_1, \cdots$, ch'egli crede indispensabili!

E basti su questo punto. Son mortificato di aver fatto perder fin troppo tempo al lettore, attorno a siffatte questioni, che non toccan più che su dei modi di scritturazione.

Passiamo alla terza critica mossami dal G.: « Non vi è nessuna ragione di considerare come non algebriche le condizioni che dipendono da diseguaglianza del tipo $\neq 0$ ». E per sgominarmi egli s'appoggia all'autorità di Kronecker e di Molk, seguendo i quali « nello studio dei sistemi di equazioni algebriche, bisogna considerare sistemi costituiti da equazioni algebriche e da diseguaglianze algebriche ». Ma la questione, come al solito, è un'altra.

Nessuno nega che vi sieno condizioni algebriche, secondo la comune accezione della qualifica, nella cui definizione intervengano diseguaglianze. Chi per esempio si è mai sognato di non considerar come algebrica la condizione perchè un punto debba giacere sopra 3 quadriche, passanti per una conica k, ed essere *esterno* al piano di k? Eppure questa condizione è rappresentata da 3 equazioni di 2° ordine e da una disugiaglianza di 1° ordine. Così la condizione perché una conica *irriducibile* tocchi 5 coniche date del piano, si trasforma analiticamente nella condizione perché i coefficienti dell'equazione della conica soddisfacciano a certe 5 equazioni del 6° ordine, senza peraltro annullare il discriminante.

Qui si tratta appunto di casi in cui, come ho già scritto in N. « la condizione è enunciata in modo da non definire tutta una varietà algebrica, ma soltanto la varietà – non algebrica (42) – ottenuta escludendo alcuni elementi da una varietà algebrica ». Le parole « esterno » e « irriducibile » che ho sopra

(**) Nota LIII, vol. II, p. 317; N.d.R.

(42) E ho detto bene « non algebrica »! Si vegga ad esempio C. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di Matematica (1894) o il Cap. 9° della *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* di E. BERTINI (Pisa, Spoerri, 1907), e si constaterà che, *sulle orme appunto di Kronecker*, una varietà algebrica si definisce *soltanto* mediante *equazioni*.

sottolineate, son precisamente quelle che, nei rispettivi casi, impongono un gruppo base (cfr. coi nn. 4, 10) alla varietà algebrica degli elementi Γ soddisfacenti alla data condizione.

Ma – e qui è tutto il nòcciolo della piccola questione di parole – l'algebricità della condizione resta menomata (ripeto ancora l'eresia che ho scritto in N.), quando ci si rifiuta di contar fra le soluzioni, gli elementi degeneri che soddisfacciano ad una particolarizzazione della condizione data, e che sien limiti di elementi non degeneri del caso generale. Ho già detto abbastanza in proposito al n. 4 di questa Nota. Ripeto soltanto che nell'esempio già citato di Kohn (n. 4) *è proprio la disuguaglianza* esprimente il fatto che i punti d'appoggio delle rette cercate alle date, sieno distinti, la quale (come ho scritto al n. 3 di N.) rende non algebrica la condizione considerata.

Comunque in questo e in altri casi analoghi la sostanza è che, se non si vuole incappar volontariamente in contraddizioni, bisogna tener conto di quelle soluzioni le quali, rispetto a ciò che la condizione esige, appariscon degeneri. Ora il sig. G. condivide in ultima analisi questo modo di vedere, a cui del resto si atteneva già ogni geometra che non si proponesse di crear sofismi. Ma provi un po' il lettore a penetrare nel ginepraio della spiegazione che il G. volle dare in passato dell'esempio di Study, concernente i punti comuni a due curve tracciate sopra un cono quadrico, per vedere se riesce a trarne il succo delle soluzioni degeneri.

LXIX.

SULLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE E VARIETÀ

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, *42* (1917), pp. 227–259 (*).

In questo lavoro rielaboro, da un punto di vista più geometrico del consueto, la teoria della curvatura delle superficie e varietà.

Lo spunto per tale rielaborazione mi venne da un'osservazione che mi capitò di fare parlando col Collega Prof. Levi–Civita dei notevoli risultati da lui or ora ottenuti nella Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura riemanniana*, pubblicata in questo volume dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1).

L'osservazione cui alludo si riferiva a ciò: che il concetto di parallelismo fra direzioni, entro una varietà V_n, a metrica qualsiasi, introdotto con felice idea dal Collega, poteva presentarsi sotto una forma geometrica affatto indipendente dallo spazio euclideo S_N in cui la V_n è immersa, restando così a priori manifesto il carattere intrinseco di quel concetto, rispetto alla data varietà; cosa che al Levi–Civita risulta a posteriori dalle equazioni differenziali, che esprimon il modo di variare di una direzione parallela ad una data, lungo un assegnato cammino (cfr. col. § 3 di M.).

Il desiderio di scorgere sotto un aspetto geometrico elementare, spoglio il più possibile da sviluppi algoritmici eleganti, ma tuttavia complessi, i rapporti concettuali che conducono alla bella definizione data dal Levi–Civita, per la curvatura riemanniana d'una V_n, mi ha poi spinto a ristudiare la cosa *ab imis* anche per le superficie, posto che la definizione intrinseca ch'io davo del parallelismo fra direzioni, induceva appunto a ricercar sulle superficie i rapporti essenziali in questione.

D'altronde a rielaborar da un punto di vista più sintetico la teoria della curvatura delle superficie, mi spingeva pure il desiderio di giungere ad un'interpretazione geometrica della definizione di curvatura d'una varietà, data originariamente dal Riemann (2).

Tutto ciò spieghi perché mi sia indotto a ripercorrere un terreno ormai illustrato in tutti i suoi dettagli, da Memorie e da Trattati classici.

(*) Adunanza del 25 febbraio 1917.

(1) Citerò nel seguito con una M. la Memoria del LEVI–CIVITA.

(2) Non mancan di certo pregevoli esposizioni geometriche della teoria della curvatura totale delle superficie; ma io dovevo piegar la mia trattazione a particolari esigenze, in vista degli scopi che mi proponevo per le varietà.

Debbo ora esporre, in brevi cenni riassuntivi, il contenuto di questo lavoro.

Premetto anzitutto alcuni richiami alle coordinate geodetiche polari, sopra una superficie qualunque S, ed a certe altre coordinate, usate qua e là da vari Autori, ed in ispecial modo dal Riemann, e ch'io – dovendo nominarle spesso – mi permetto di chiamare coordinate cartesiane curvilinee, perché si esprimon per le coordinate polari mediante le stesse formole, che legan nel piano coordinate cartesiane e polari.

Nel n. 2 collego la considerazione delle coordinate geodetiche polari ad un modo speciale di riguardare una superficie qualunque S, come la deformata di un velo piano, originariamente tangente ad S in un punto P, inestendibile lungo le rette per P ed elastico lungo i circoli di centro P. Nella deformazione un parallelogrammo, avente un vertice in P, si trasforma in un *quadrilatero* $PQP'Q'$ che chiamo *di Riemann* (n. 9), perché la definizione riemanniana di curvatura, nel caso delle superficie, s'interpreta appunto nel modo seguente (n. 9):

Indicata con Δ l'area $PQP'Q'$ e con K la curvatura totale di S in P, supposto che il quadrilatero si contragga indefinitamente verso P, viene:

$$\frac{1}{3} K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2} .$$

Questa definizione geometrica di K, presenta però lo svantaggio, rispetto a quelle più sotto indicate, che, per quanto semplice e suggestiva, non è intrinseca.

Per ottenere espressioni limiti intrinseche della curvatura d'una superficie, ed in particolare l'espressione mediante elementi metrici di un quadrilatero di Levi-Civita (parallelogrammoide, come lo chiama l'A.), cerco di ridurmi al caso d'una sfera (reale od imaginaria), provando che, per giungere alle espressioni limiti desiderate, è perfettamente lecito, di fronte all'ordine infinitesimale delle quantità che entrano in giuoco, di sostituire alla nostra superficie una sfera.

Ognuno ravviserà l'analogia di questo procedimento con quello che si segue nella Geodesia, allorquando in un ordine d'approssimazione soddisfacente per la pratica, si sostituiscono alle figure geodetiche tracciate sopra una zona non troppo estesa dell'ellissoide terrestre, figure geodetiche tracciate sopra una sfera di raggio conveniente.

In sostanza io non faccio che precisare con un'analisi un po' accurata (nn. 3, 4), rispetto a quali ordini infinitesimali è lecita la sostituzione di elementi metrici di un intorno d'una superficie qualunque S, con elementi metrici d'una sfera $\overline{S}$. E trovo così che alle lunghezze degli archi geodetici tracciati su S, si posson sostituire le lunghezze di archi di circoli massimi di $\overline{S}$, a meno di quantità del 4° ordine [3]; che agli angoli di S si posson sostituire gli angoli di $\overline{S}$ a meno di quantità del 3° ordine; etc.

(3) Non basta, per concluder ciò, osservare che i ds^2 delle S, $\overline{S}$, sotto la forma geodetica, cominciano a differire dal 5° ordine in poi (cfr. col. n° 4).

Concludo in tal modo che sopra una superficie qualunque vale, in seconda approssimazione, la trigonometria sferica ($K > 0$) o pseudosferica ($K < 0$). Nel suo complesso la trigonometria sferica o pseudosferica si trasporta a meno di quantità del 3° ordine, ma speciali relazioni si trasportano a meno di quantità del 4° ed anche del 5° ordine.

Passando ad applicare tale conclusione alla teoria della curvatura gaussiana, trovo subito per questa, sia l'espressione mediante il rapporto tra l'eccesso e l'area di un triangolo geodetico infinitesimo (Gauss), sia l'espressione (contenuta implicitamente in una relazione che s'incontra in Darboux):

$$\frac{1}{3} K = \lim \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2},$$

ove K è la curvatura di S in un punto A e b, c son le lunghezze dei cateti, a la lunghezza dall'ipotenusa di un triangolo geodetico ABC, rettangolo in A, il quale si contragga indefinitamente verso A.

L'espressione della curvatura di S nel punto P:

$$K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}, \tag{1}$$

cui si perviene con Levi-Civita, mediante un parallelogrammoide $PQP'Q'$ d'area Δ – figura costituita da due archi geodetici uguali PP', QQ' formanti angoli corrispondenti uguali ad un medesimo ω, colla geodetica PQ (base) e dall'arco geodetico $P'Q'$ (soprabase) – vien qui ritrovata mediante elementari proprietà geometriche della sfera (n. 8).

Poichè alla soprabase geodetica $P'Q'$, colla quale si chiude il parallelogrammoide, si può sostituire un arco qualunque, infinitesimo cogli altri lati del quadrilatero (vedi il § 18 di M. ed il n. 8 di questo lavoro), così la stessa espressione di K vale se si prende come soprabase un arco di equidistanza geodetica, obliqua secondo ω, da PQ.

Per le superficie a curvatura costante, le linee di equidistanza obliqua da una data geodetica, coincidono colle linee ed essa geodeticamente parallele, e la curvatura K risulta espressa dalla formula

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

ove $PQP'Q'$ è un qualunque parallelogrammoide *finito*, d'area Δ, chiuso da una soprabase geodeticamente parallela a PQ.

Ritornando alle superficie a curvatura variabile, trovo che l'espressione limite (1) vale anche quando si riferisca ad un quadrilatero geodetico $PQP'Q'$, rettangolo in P, in Q ed in P'. Sopra una superficie a curvatura costante (piano non euclideo) un tal quadrilatero riducesi alla figura fondamentale della geometria piana di Lambert, come il parallelogrammoide geodetico di Levi-Civita, per $\omega = \pi/2$, riducesi ad un quadrilatero birettangolo isoscele, figura fondamentale della geometria piana di Saccheri.

Per completar la considerazione dei quadrilateri che, sopra una superficie, conservan qualcuna delle proprietà caratteristiche dei parallelogrammi euclidei, prendo in esame anche un quadrilatero $PQP'Q'$ racchiuso da 2 archi geodetici PQ, PP', formanti un angolo ω, e da due archi $P'Q', QQ'$ di equidistanza obliqua, secondo ω, rispettivamente da PQ, PP'.

Un quadrilatero siffatto non dà però luogo ad alcuna espressione di K analoga alle precedenti, perché ha i lati opposti uguali, a meno di quantità del 4° ordine. Dal punto di vista delle lunghezze dei lati, esso rassomigliasi perciò ad un parallelogrammo euclideo più degli altri quadrilateri sopra considerati.

Tuttavia se, limitandoci al caso $\omega = \pi/2$, nel qual caso il quadrilatero è racchiuso da due geodetiche ortogonali e da due linee ad esse geodeticamente parallele, si considera il quarto angolo γ (non retto) del quadrilatero e la sua area Δ, si ottiene per la curvatura K di S in P, l'espressione:

$$K = \lim \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta},$$

analoga alla

$$K = \lim \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\Delta},$$

cui si perviene mediante il quarto angolo γ di un quadrilatero di Lambert (n. 9).

Nel Capitolo secondo, applicando alle varietà i risultati precedenti, dò anzitutto l'interpretazione geometrica della definizione originaria di Riemann per la curvatura K di una varietà V_n, secondo un'assegnata giacitura. Una volta fatto derivar, per deformazione, l'intorno di un punto P di V_n, dall'intorno del punto stesso nello spazio euclideo S_n ivi tangente a V_n, considerando lo S_n come inestendibile nelle direzioni delle rette tangenti in P e come elastico nelle direzioni delle ipersfere di centro P, la circostanza che un piano di S_n, passante per P, si muti in una superficie geodetica di V_n, permette di trasportar subito alle varietà la formola già stabilita per le superficie.

Passo quindi ad esporre la definizione geometrica intrinseca, cui già ho alluso in principio, del parallelismo fra direzioni: Dati sopra V_n due punti A, A_1, infinitamente vicini, ed una direzione (ξ) uscente da A, la direzione (ξ_1) parallela a (ξ), condotta per A_1, è quella che, sulla superficie geodetica di centro A, individuata dalle direzioni $(\xi), (AA_1)$, forma colla geodetica AA_1 un angolo (corrispondente) eguale a quello formato da (ξ) colla geodetica stessa.

E dimostro la coincidenza di questa definizione con quella del Levi-Civita, pervenendo di nuovo, in modo autonomo e intrinseco, alle equazioni differenziali, che reggono il problema del parallelismo.

La definizione esposta mi consente di trasportar senz'altro alle varietà la espressione della curvatura mediante un parallelogrammoide (n. 14).

Aggiungo alcune semplici considerazioni geometriche dirette a ritrovare le proprietà fondamentali del parallelismo fra direzioni (nn. 12, 13).

Capitolo I.

Sulla curvatura totale delle superficie

1. *Richiami concernenti le coordinate geodetiche polari. Coordinate cartesiane curvilinee.* Sopra una superficie S fissiamo un sistema di coordinate geodetiche polari (ϱ, θ), avente per polo $(\varrho = 0)$ un punto P (regolare) di S e per asse polare una geodetica $(\theta = 0)$ uscente da P (4). Considerata per P un'altra geodetica, il cui verso positivo formi col verso positivo della precedente l'angolo ω, compreso fra 0 e π, poniamo:

$$u = \varrho \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin \omega}, \qquad v = \varrho \frac{\sin \theta}{\sin \omega}. \tag{2}$$

Da queste si ricavano le ϱ, θ come funzioni regolari delle u, v in tutto l'intorno di P (eccetto in P stesso). Si ha precisamente:

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega}, \qquad \sin\theta = \dfrac{v \sin\omega}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega}}, \\ \sin(\omega - \theta) = \dfrac{u \sin\omega}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega}}, \end{cases} \tag{3}$$

ove pel radicale si accetti il segno $+$.

Le u, v si posson pertanto assumere come coordinate di un punto M variabile nell'intorno di P: nel seguito per brevità le chiameremo *coordinate cartesiane curvilinee*, per evidente analogia colle ordinarie coordinate cartesiane nel piano.

Esse presentan il vantaggio rispetto alle coordinate polari, che la corrispondenza fra i punti dell'intorno di P e le coppie di valori di u, v, è biunivoca senza eccezione anche in P. Ed è appunto questa circostanza che ne rende opportuno l'uso pei nostri scopi ulteriori.

Il quadro dell'elemento lineare di S, espresso per le coordinate ϱ, θ, è dato da

$$ds^2 = d\varrho^2 + G d\theta^2, \tag{4}$$

(4) Vedi ad esempio L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª edizione (Pisa, Spoerri, 1902), vol. I, p. 194.

ove la funzione $G(\varrho, \theta)$, sviluppata secondo le potenze ascendenti di ϱ, nell'intorno di $\varrho = 0$, è del tipo:

$$G = \varrho^2 \left(1 - \frac{K}{3}\varrho^2 + \cdots\right), \tag{5}$$

K essendo la curvatura totale di S nel punto P [5].

Dalle (2), differenziando e risolvendo rispetto a $d\varrho$, $d\theta$, si traggon le

$$d\varrho = \cos\theta du + \cos(\omega - \theta)\, dv,$$

$$d\theta = -\frac{\sin\theta}{\varrho} du + \frac{\sin(\omega - \theta)}{\varrho} dv,$$

e sostituendo in (4), si ha l'espressione del ds^2 rispetto alle u, v:

$$ds^2 = E' du^2 + 2F' du\, dv + G' dv^2, \tag{6}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} E' &= 1 + \left(\frac{G}{\varrho^2} - 1\right)\sin^2\theta, \\ F' &= \cos\omega - \left(\frac{G}{\varrho^2} - 1\right)\sin\theta\sin(\omega - \theta), \\ G' &= 1 + \left(\frac{G}{\varrho^2} - 1\right)\sin^2(\omega - \theta). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

2. *Una superficie qualunque considerata come la deformata di un velo piano intessuto con un fascio di fibre rettilinee inestendibili e con un fascio di fibre circolari elastiche.* Le coordinate geodetiche polari, su di una superficie S, conducono spontaneamente alla considerazione di una corrispondenza biunivoca fra i punti della S ed i punti del piano S_0 tangente ad S nel polo P, sul qual piano si assuma un sistema di coordinate polari (ϱ_0, θ_0), avente il polo $\varrho_0 = 0$ in P e l'asse polare $\theta_0 = 0$ tangente alla geodetica $\theta = 0$. Si posson allora associare due punti di S, S_0, che abbian le stesse coordinate polari $(\varrho = \varrho_0, \theta = \theta_0)$.

In questa corrispondenza ai circoli del piano col centro in P, rispondon i circoli geodetici della superficie col centro pure in P. La corrispondenza può quindi fisicamente realizzarsi così:

S'imagini il piano S_0 come un tessuto formato mediante due fasci di fibre: le une, inestendibili, che son le rette passanti per P, le altre, elastiche, che son i circoli di centro P. Tenuto fisso il punto P di S_0 ed il relativo intorno di 1° ordine, si può allora deformare il tessuto finchè venga a sovrapporsi ad S, per modo che le fibre inestendibili si adattino, ben tese, sulle geodetiche di S per P, con che le fibre elastiche s'adattano spontaneamente sui circoli geodetici di centro P.

(5) Vedi ad esempio L. BIANCHI, *loc. cit.* (4), p. 196.

Se su S_0 si scelgon due assi cartesiani u_0 , v_0, formanti l'angolo ω, coll'origine in P e coll'asse $v_0 = 0$ coincidente con $\theta_0 = 0$, ad ogni punto del piano, di coordinate u_0 , v_0, corrisponde su S, a deformazione avvenuta, un punto avente le medesime coordinate cartesiane curvilinee $(u = u_0 , v = v_0)$, rispetto alle due geodetiche u , v, deformate delle rette u_0 , v_0.

È appena necessario di avvertire che, invece di tener fisso P ed il relativo intorno di 1° ordine, cioè un circolo di raggio infinitamente piccolo, col centro in P, si può, nel sovrapporre S_0 ad S, tener fisso P e portare a coincidere una prefissata delle fibre elastiche circolari, col circolo geodetico di S, avente lo stesso raggio. Se a deformazione avvenuta, si vuole che ogni punto abbia conservato i valori iniziali delle coordinate polari e cartesiane, basterà operare in modo che i due punti della fibra circolare piana, corrispondenti a $\theta_0 = 0$ e a $\theta_0 = \omega$, vadano a sovrapporsi ai punti del circolo geodetico, corrispondenti agli stessi valori di θ.

Questo modo di considerare un intorno superficiale qualunque, come deformato d'un intorno piano, ci gioverà in seguito per illustrare la definizione riemanniana di curvatura d'una superficie o varietà.

3. *Proprietà della corrispondenza biunivoca che nasce fra una superficie ed una sfera, associando le coppie di punti colle stesse coordinate cartesiane.* Gli stessi sistemi di coordinate, polari e cartesiane, definiti per S nel n. 1, li considereremo sopra una sfera $\overline{S}$ di raggio (reale o imaginario, finito od infinito) $R = 1/\sqrt{K}$, assumendo ivi come polo, o rispettivamente origine delle coordinate, un punto $\overline{P}$. Conserveremo per la sfera le notazioni del n. 1, salvo che ogni simbolo letterale ed essa riferito, sarà sopralineato.

Per la sfera, $\overline{\varrho}/R$ è la colatitudine dal polo $\overline{P}$ e $\overline{\theta}$ la longitudine dal meridiano $\overline{\theta} = 0$, così che la funzione $\overline{G}$ viene espressa da

$$\overline{G} = R^2 \sin^2 \frac{\overline{\varrho}}{R} = \overline{\varrho}^2 \left(1 - \frac{K}{3} \overline{\varrho}^2 + \cdots \right).$$

È quasi superfluo di avvertire che, quando K sia negativa, e quindi $R = iR'$, con R' reale, si dovrà assumere come modello *reale* della sfera imaginaria $\overline{S}$, una superficie pseudosferica di raggio R', per la quale:

$$\overline{G} = \left(iR' \sin \frac{\overline{\varrho}}{iR'} \right)^2 = R'^2 \sinh^2 \frac{\overline{\varrho}}{R'} .$$

Con quest'avvertenza le ulteriori considerazioni valgono anche per $K < 0$, ad elementi reali di S corrispondendo sempre elementi reali della superficie sferica (o pseudosferica) su cui vogliamo rappresentare S.

Fra i punti di S ed i punti di $\overline{S}$, si può porre una corrispondenza biunivoca, chiamando omologhi due punti di $S , \overline{S}$ pei quali $u = \overline{u} , v = \overline{v}$ e quindi $\varrho = \overline{\varrho} , \theta = \overline{\theta}$. In questa corrispondenza le geodetiche di S uscenti da P (curve $\theta = \text{cost.}$) saranno mutate in geodetiche di $\overline{S}$ per $\overline{P}$, mentre

alle altre geodetiche di S non corrisponderanno necessariamente geodetiche della sfera.

Assunti ora due archi finiti corrispondenti AB , $\bar{A}\bar{B}$ sopra linee omologhe, appartenenti agl'intorni di P, $\bar{P}$, vogliamo valutare l'ordine di grandezza della differenza fra le lunghezze di quei due archi, rispetto all'ordine di grandezza degl'intorni stessi.

Perciò scriviamo anzitutto:

$$u = \varepsilon x , \qquad v = \varepsilon y \tag{8}$$

e quindi:

$$\varrho = \varepsilon\delta \qquad \text{con} \quad \delta = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega} ,$$

ove ε è un parametro positivo determinante la grandezza dell'intorno (si può ad esempio pensare che l'intorno di P sia l'insieme dei punti interni ad un circolo geodetico di raggio ε, col centro in P). Quanto alle x , y, esse son due nuove variabili numeriche, che assumeremo a coordinate del punto mobile M.

Analogamente sulla sfera porremo:

$$\bar{u} = \varepsilon\bar{x} , \qquad \bar{v} = \varepsilon\bar{y} , \qquad \bar{\varrho} = \varepsilon\bar{\delta} ,$$

per guisa che all'intorno di P, avente l'ordine di grandezza ε, risponderà sulla sfera un intorno, di centro $\bar{P}$, avente lo stesso ordine di grandezza. E per due punti omologhi di coordinate (x , y) $(\bar{x} , \bar{y})$ si avrà $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Il quadro dell'elemento lineare di S, rispetto alle nuove coordinate x , y, s'ottiene dalla (6), mediante le (8); e viene:

$$ds^2 = \varepsilon^2 d\sigma^2, \tag{9}$$

con:

$$d\sigma = \sqrt{E'' dx^2 + 2F'' dx\,dy + G'' dy^2} , \tag{10}$$

ove E'', F'', G'' son le funzioni risultanti da E', F', G' mediante la sostituzione (8). Si noterà che i coefficienti della forma quadratica $d\sigma^2$ non contengon più il fattore ε, che essi son funzioni regolari di x , y , ε, anche per $\varepsilon = 0$, e che inoltre il discriminante $E''G'' - F''^2$, per x , y , ε reali, è essenzialmente positivo in tutto l'intorno considerato, ed eguale a $\sin^2\omega$ per $\varepsilon = 0$.

Ne deriva che – ove si scelga nella (10) il segno + del radicale — lungo una linea limitata AB, di lunghezza finita l, su cui sia contato l'arco s, da A verso B, resta definita dalla (10) una funzione essenzialmente positiva σ, uguale ad s/ε.

Analoghe considerazioni si sottintendono sulla sfera $\bar{S}$, ove indichiamo con $\bar{A}\bar{B}$ l'arco omologo di AB e con $\bar{l}$ la sua lunghezza.

Ciò premesso, ricordando gli sviluppi di G , $\bar{G}$ nell'intorno di $\varrho = \bar{\varrho} = 0$, si trova:

$$E'' - \bar{E}'' = \varepsilon^3 e , \qquad F'' - \bar{F}'' = \varepsilon^3 f , \qquad G'' - \bar{G}'' = \varepsilon^3 g, \tag{11}$$

le e, f, g essendo funzioni regolari di x, y, ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$. E quindi, in virtù della (10) e dell'analoga sulla sfera, si otterrà:

$$d\sigma^2 = d\bar{\sigma}^2 + \varepsilon^3 d\tau^2, \tag{12}$$

ove:

$$d\tau^2 = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2.$$

Riferendoci a punti variabili sugli archi omologhi AB, $\bar{A}\bar{B}$, la (12) potrà scriversi sotto la forma:

$$d\sigma - d\bar{\sigma} = \frac{\varepsilon^3 \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{1 + \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}}\, d\sigma$$

ove $\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2$ è, lungo AB, funzione regolare di σ, ε, anche per $\varepsilon = 0$; e $\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = \frac{d\bar{s}}{ds}$ è pure funzione regolare di σ, ε, costantemente maggior di zero in quanto ad s crescente da A verso B, risponde $\bar{s}$ crescente da $\bar{A}$ verso $\bar{B}$.

Moltiplicando pertanto i due membri della precedente relazione per ε, e integrando da A a B, viene:

$$l - \bar{l} = \varepsilon^4 \int_0^{\lambda} \frac{\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{1 + \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma}}\, d\sigma\,;$$

e siccome $\lambda = l/\varepsilon$ è una quantità finita nell'intorno di $\varepsilon = 0$, giacchè gli archi che si considerano hanno l'ordine di grandezza di ε, così risulta in definitiva:

$$l - \bar{l} = \varepsilon^4 \varphi\,, \tag{13}$$

con φ funzione regolare di ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$.

E si conclude che:

La differenza fra le lunghezze di due archi finiti corrispondenti della superficie e della sfera, ha l'ordine di grandezza di ε^4.

Ci gioverà in seguito d'aver esplicitamente notato anche l'ordine di grandezza di $l^2 - \bar{l}^2$. Scrivendo questa differenza sotto la forma:

$$l^2 - \bar{l}^2 = (l - \bar{l})\,(l + \bar{l})\,,$$

ed osservando che $l, \bar{l}$ hanno l'ordine di grandezza di ε, se ne trae che $l^2 - \bar{l}^2$ ha l'ordine di grandezza di ε^5.

Vediamo ora qual'è l'ordine di grandezza della differenza fra gli angoli di due coppie di direzioni corrispondenti.

Sieno ds, δs due elementi lineari di S spiccati dal punto (u, v) a due punti infinitamente vicini $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$. Detto ω l'angolo delle due direzioni, verrà

$$\cos\omega = E' \frac{du}{ds}\frac{\delta u}{\delta s} + F'\left(\frac{du}{ds}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + G' \frac{dv}{ds}\frac{\delta v}{\delta s},$$

o, in coordinate x, y:

$$\cos\omega = E'' \frac{dx}{d\sigma}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + F''\left(\frac{dx}{d\sigma}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{\delta x}{\delta\sigma}\right) + G'' \frac{dy}{d\sigma}\frac{\delta y}{\delta\sigma}.$$

Analoga espressione si ha sulla sfera pel coseno dell'angolo $\overline{\omega}$ dei due elementi lineari corrispondenti. Tenendo presenti le (11), (12), e le

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\overline{x}}{d\overline{\sigma}}\frac{d\overline{\sigma}}{d\sigma},$$

$$\frac{\delta x}{\delta\sigma} = \frac{\delta\overline{x}}{\delta\overline{\sigma}}\frac{\delta\overline{\sigma}}{\delta\sigma},$$

e analoghe per y, ne segue facilmente che $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ differiscono per termini del 3° ordine in ε, e mediante l'identità:

$$\sin\omega - \sin\overline{\omega} = \frac{(\cos\overline{\omega} - \cos\omega)(\cos\omega + \cos\overline{\omega})}{\sin\omega + \sin\overline{\omega}},$$

che anche $\sin\omega$, $\sin\overline{\omega}$, e quindi ω, $\overline{\omega}$, differiscon per termini del terzo ordine. Si conclude che:

La differenza fra due angoli corrispondenti ha l'ordine di grandezza di ε^3.

4. *Contrazione infinitesima d'un intorno superficiale. Ordine di approssimazione per la applicabilità di un pezzo di superficie sopra una sfera.* In tutto quanto precede s'è tenuto costante il parametro ε. Adesso supporremo invece che ε varii, tendendo a zero, a partire da un valore iniziale $\varepsilon = \varepsilon_0$.

I punti degl'intorni omologhi considerati sulle S, $\overline{S}$, posson allora riguardarsi, in infiniti modi, come funzioni del parametro ε. Si può cioè associare ad ogni punto che sulla superficie (o sulla sfera) abbia inizialmente le coordinate cartesiane curvilinee $\varepsilon_0 x$, $\varepsilon_0 y$, il punto, ben determinato, di coordinate cartesiane $\varepsilon x'$, $\varepsilon y'$, con

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = x'(x, y, \varepsilon) \\ y' = y'(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

ove x', y' sieno arbitrarie funzioni regolari di x, y, ε, nell'intorno di $\varepsilon = 0$, tali che il determinante funzionale delle x', y' rispetto alle x, y, non sia nullo nello stesso intorno.

Se la sostituzione di variabili (14) è la *medesima* sulla superficie e sulla sfera, si dirà brevemente, allorché ε tenda a zero, che si opera una *contrazione*

infinitesima simultanea dei due intorni di $P, \overline{P}$ *su* $S, \overline{S}$, in quanto i punti dei due intorni, partendo dalle posizioni iniziali rispettive, si avvicinano di conserva a $P, \overline{P}$.

Il modo più semplice di operare una tal contrazione, è di prendere addirittura $x' = x$, $y' = y$. A questo modo di contrarre i due intorni si potranno riferire, per fissar le idee, le considerazioni successive.

Quando il valore iniziale ε_0 sia abbastanza piccolo, un arco AB di geodetica, che, sulla S, congiunga due punti A, B dell'intorno di P, risulterà individuato per ogni valor di ε, dalle posizioni dei suoi estremi, appena sieno segnati gli estremi iniziali A_0, B_0. E lo stesso dicasi dell'arco $\overline{A}\overline{B}$, non necessariamente geodetico, luogo dei punti omologhi sulla sfera. Denoteremo rispettivamente con $l, \overline{l}$ le lunghezze di questi due archi. Similmente indicheremo con $\overline{l}', l'$ le lunghezze dell'arco geodetico che sulla sfera congiunge $\overline{A}, \overline{B}$ e dell'arco omologo, congiungente A, B su S.

Le quantità $l, l' \overline{l}, \overline{l}'$ son funzioni regolari di ε, nell'intorno di $\varepsilon = 0$, infinitesime con ε. Poiché si è supposto ε_0 tanto piccolo, che sin dall'inizio della contrazione ogni arco geodetico dell'intorno di P o di $\overline{P}$ sia individuato dai suoi estremi, così i cammini geodetici segneranno sempre sugl'intorni corrispondenti al medesimo ε, il minimo percorso fra due punti, e sussisteranno perciò le diseguaglianze:

$$l' \geq l, \qquad \overline{l} \geq \overline{l}'.$$

D'altronde a cagione della (13) (n. precedente), potrà scriversi:

$$l' = \overline{l}' + \varepsilon^4 \varphi, \qquad l = \overline{l} + \varepsilon^4 \psi,$$

φ, ψ essendo funzioni regolari di ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$. Sottraendo a membro a membro le precedenti, viene:

$$(l' - l) + (\overline{l} - \overline{l}') = \varepsilon^4 (\varphi - \psi).$$

Ora, poiché le due differenze $l' - l, \overline{l} - \overline{l}'$, che son funzioni regolari di ε, non divengon mai negative nell'intorno di $\varepsilon = 0$, così nessuna di esse potrà essere di ordine minore di ε^4.

Si conclude dunque che:

«Ad una geodetica dell'una superficie, corrisponde sull'altra una linea, i cui archi differiscono in lunghezza dagli archi geodetici aventi gli stessi estremi, per infinitesimi del 4° ordine (rispetto ad ε, che sarà ormai assunto come infinitesimo principale)».

Quanto agli angoli, infinitesimi con ε, formati in A, B dagli archi di lunghezze l, l', essi differiscon per infinitesimi del 3° ordine dagli angoli corrispondenti formati in A', B' dagli archi di lunghezze $\overline{l}, \overline{l}'$.

Ciò posto, se ABC è un triangolo geodetico infinitesimo tracciato su S, ed $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ son i punti della sfera corrispondenti ad A, B, C, alle lunghezze a, b, c dei lati BC, CA, AB del primo triangolo, potranno sostituirsi, a

meno d'infinitesimi del 4° ordine, le lunghezze $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ dei lati del triangolo geodetico $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, e agli angoli α, β, γ del primo, gli angoli $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ del secondo, a meno d'infinitesimi del 3° ordine.

Ne deriva che, nell'intorno considerato di P, valgono su S tutte le relazioni di trigonometria sferica (o pseudosferica, quando la curvatura in P sia negativa), a meno d'infinitesimi del 3° ordine rispetto alle lunghezze dei lati dei triangoli geodetici, considerate come infinitesimi del 1° ordine.

Ma esaminando più davvicino la cosa, si vede che talune di queste relazioni valgono anche in un ordine di approssimazione superiore.

Così ad esempio la relazione esprimente il teorema dei seni:

$$\sin\frac{\bar{a}}{R} : \sin\frac{\bar{b}}{R} : \sin\frac{\bar{c}}{R} = \sin\bar{\alpha} : \sin\bar{\beta} : \sin\bar{\gamma},$$

ove si ponga mente che le differenze $a - \bar{a}, b - \bar{b}, c - \bar{c}$ son del 4° ordine e le differenze $\alpha - \bar{\alpha}, \beta - \bar{\beta}, \gamma - \bar{\gamma}$ del 3° ordine, si muta *a meno d'infinitesimi del 4° ordine*, nella

$$\sin\frac{a}{R} : \sin\frac{b}{R} : \sin\frac{c}{R} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad (6),$$

mentre la relazione:

$$\cos\frac{\bar{a}}{R} = \cos\frac{\bar{b}}{R}\cos\frac{\bar{c}}{R} + \sin\frac{\bar{b}}{R}\sin\frac{\bar{c}}{R}\cos\bar{\alpha},$$

si muta, *a meno d'infinitesimi del 5° ordine*, nella:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha.$$

E infine la relazione:

$$\cos\bar{\alpha} = -\cos\bar{\beta}\cos\bar{\gamma} + \sin\bar{\beta}\sin\bar{\gamma}\cos\frac{\bar{a}}{R},$$

si muta nella analoga relativa agli elementi del triangolo ABC, soltanto *a meno d'infinitesimi del 3° ordine*.

Possiamo dunque enunciare:

Per l'intorno di un punto P di una superficie qualunque S, ove la superficie presenti la curvatura totale K, vale in seconda approssimazione, a meno d'infinitesimi del 3° ordine, la trigonometria sferica ($K > 0$) o pseudosferica

(6) Che il teorema dei seni valga pei triangoli geodetici, a meno di quantità del 4° ordine, è notato anche in G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III^e^ partie (Paris, Gauthier-Villars, 1894), p. 170. Veramente Darboux considera, invece dei seni di $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$, le *lunghezze ridotte* (secondo Christoffel) dei lati a, b, c; ma queste lunghezze, a meno appunto di quantità del 4° ordine, riduconsi a quei seni (loc. cit., p. 190).

($K < 0$) (*mentre in prima approssimazione vale la trigonometria piana*). *Talune relazioni di trigonometria sferica o pseudosferica, valgono anzi a meno d'infinitesimi del 4° ed anche del 5° ordine.*

Nell'ordine di approssimazione così precisato, si può dire che *l'intorno del punto P è applicabile sulla sfera di raggio* $R = 1/\sqrt{K}$.

La proposizione dimostrata è di uso continuo in Geodesia, ove, con un'approssimazione in pratica soddisfacente, si applican le relazioni di trigonometria sferica a triangoli geodetici dell'ellissoide terrestre, i cui lati non vanno molto oltre i 200 chilometri.

Mi sia a tal proposito consentito di notare come le considerazioni che si fanno di solito per legittimar l'applicazione della trigonometria sferica ai triangoli geodetici terrestri, non appariscan del tutto esaurienti.

Riferendosi alla forma geodetica (4) del ds^2 sulla superficie S, ove, nell'intorno di P, è

$$\sqrt{G} = \varrho - \frac{K}{6}\varrho^3 - \lambda\varrho^4 - \cdots,$$

ci si limita infatti ad osservare che, qualora, per ϱ non superiore ad un limite prefissato, siano trascurabili, di fronte ad un certo ordine di approssimazione, le quantità $\lambda\varrho^4$ e $K^2\varrho^5/5!$, i ds^2 della S e della sfera di raggio $R = 1/\sqrt{K}$, possono scriversi sotto la stessa forma. E si conclude da ciò che, nello stesso ordine di approssimazione, l'intorno di P è applicabile sulla sfera di raggio R e che vale pertanto pei triangoli geodetici dell'intorno medesimo, la trigonometria sferica.

Ora questa deduzione abbisogna di qualche complemento:

1) Perché dal suddetto confronto non può trarsi *a priori* (senza cioè le considerazioni svolte sopra od altre equivalenti) alcuna conclusione circa la differenza fra le lunghezze degli archi *finiti* tracciati su S e sulla sfera, in quanto la (4), considerata come una relazione approssimata fra incrementi finiti ds, $d\varrho$, $d\theta$, vale soltanto a meno di quantità del 3° ordine e non può pertanto servire a valutar la differenza fra i quadrati di due archi finiti della S e della sfera, a meno di quantita d'ordine superiore al 3°.

2) Perché non è senz'altro evidente che nello stesso ordine di approssimazione in cui le espressioni geodetiche dei ds^2, su S e sulla sfera, posson ritenersi eguali, ad un arco geodetico dell'una superficie possa sostituirsi un arco geodetico dell'altra.

Tuttavia la semplice considerazione riferita ha un ottimo valore induttivo, e basta analizzarla con un po' di cura, come noi abbiam fatto, per pervenire, con tutto il rigore, alla deduzione desiderata.

5. *Linee di equidistanza* (*ortogonale ed obliqua*) *da una data geodetica, sopra una superficie qualunque* S. La sostituibilità della sfera alla superficie S, a meno d'infinitesimi del 4° ordine, per tutto quanto concerne le distanze geodetiche, vale anche, nello stesso ordine di approssimazione, per le lun-

ghezze contate sopra famiglie di linee definite in modo invariante rispetto alle geodetiche. Per non dilungarci di soverchio, ci limiteremo a stabilir la cosa per una speciale famiglia di curve, di particolare interesse pel seguito.

Sopra una superficie S, chiameremo *linea di equidistanza* ϱ_0 *secondo l'angolo* ω, *da una data geodetica* C, il luogo degli estremi dei segmenti geodetici, di lunghezza ϱ_0, spiccati dai singoli punti di C, da una medesima banda della curva, ed in modo da formare col verso *positivo* di questa angoli eguali e dello stesso verso, o, come anche diremo brevemente, angoli corrispondenti eguali.

Così ad esempio, se S è una superficie a curvatura costante, le linee di equidistanza obliqua da una data geodetica C, coincidono colle linee di equidistanza ortogonale, o, ciò che è lo stesso, colle traiettorie ortogonali del fascio di geodetiche perpendicolari a C. Infatti, considerati sopra una L, di queste traiettorie ortogonali, due punti, M, N, e condotte per essi due geodetiche che formino con C, rispettivamente nei punti H, K, angoli corrispondenti uguali, la distanza geodetica MH risulta uguale ad NK, perché il movimento della S in sè, che lascia invariata C e che porta H in K, muta in sè L e porta M in N.

Per una sfera le linee di equidistanza obliqua, secondo un angolo arbitrario, da un dato equatore, sono i circoli a questo paralleli.

Ritornando alla superficie qualunque S, supponiamo, per maggior semplicità, che la geodetica fissa C, rispetto alla quale si vuol costruire la linea L di equidistanza ϱ_0, obliqua secondo ω, sia la geodetica $\theta = 0$, del sistema di coordinate polari, considerate dal n. 1 in poi. Sia inoltre PM_0 il segmento geodetico che segna la distanza ϱ_0, obliqua secondo ω, del punto $P\,(\varrho = 0)$

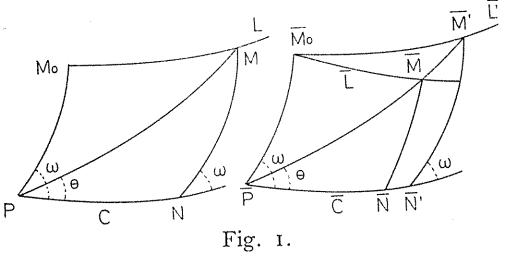


Fig. 1.

di C dalla linea L. La qual linea, una volta dati C ed ω (coi relativi versi), è perfettamente individuata da uno qualunque dei suoi punti: in particolare da M_0.

Sulla sfera $\overline{S}$, alle due geodetiche C, PM_0, rispondono le geodetiche $\overline{C}$ $(\overline{\theta} = 0)$ e $\overline{P}\overline{M}_0$ $(\overline{\theta} = \omega)$, uscenti dal polo $\overline{P}$; e la distanza geodetica $\overline{P}\overline{M}_0$ del punto $\overline{M}_0$, omologo di M_0, da $\overline{P}$, uguaglia ϱ_0.

Consideriamo su $\overline{S}$ la linea $\overline{L}'$ di equidistanza obliqua secondo ω da $\overline{C}$ individuata da $\overline{M}_0$, e la linea $\overline{L}$, pure uscente da $\overline{M}_0$, omologa di L. Ad un punto $M\,(\varrho\,,\,\theta)$, variabile su L, risponde sulla sfera il punto $\overline{M}$ variabile su $\overline{L}$ ed avente le stesse coordinate ϱ, θ. Associeremo ad $\overline{M}$ quel punto $\overline{M}'$ di $\overline{L}'$, che ha la stessa θ, cioè l'intersezione di $\overline{L}'$ colla geodetica $\overline{P}\overline{M}$.

Condotta per M la geodetica MN, che forma con C l'angolo ω, nel verso debito, ad essa risponderà su $\overline{S}$ una linea congiungente $\overline{M}$ col punto $\overline{N}$ omologo di N ($\overline{P}\overline{N} = PN$); ma la linea che a noi preme di considerare su $\overline{S}$, è piuttosto la geodetica $\overline{M}'\overline{N}'$, sulla quale si misura la distanza ϱ_0, obliqua secondo ω, del punto $\overline{M}'$ da $\overline{C}$. Posto $\overline{\varrho}' = \overline{P}\overline{M}'$, il teorema dei seni, applicato al triangolo geodetico $\overline{P}\overline{N}'\overline{M}'$, porge:

$$\sin \frac{\overline{\varrho}'}{R} \sin \theta = \sin \frac{\varrho_0}{R} \sin \omega ,$$

mentre dal triangolo geodetico PNM della superficie S, si ricava, a meno d'infinitesimi del 4° ordine (per esempio, rispetto a ϱ, assunto come infinitesimo principale) (n. 4):

$$\sin \frac{\varrho}{R} \sin \theta = \sin \frac{\varrho_0}{R} \sin \omega .$$

Confrontando queste due relazioni, se ne trae che $\overline{\varrho}'$ e ϱ differiscono per quantità del 4° ordine. Ma poiché la differenza fra gli archi $\overline{M}_0\overline{M}$, $\overline{M}_0\overline{M}'$ è infinitesima con $\overline{\varrho}' - \varrho = \overline{M}\overline{M}'$, cioè col tendere di M ad M_0, così anch'essa risulterà di 4° ordine (almeno) rispetto a ϱ.

D'altra parte gli archi omologhi $M_0 M$, $\overline{M}_0\overline{M}$ differiscon pure per quantità di 4° ordine (n. 4), dunque la differenza $\overline{M}_0\overline{M}' - M_0 M$ sarà dell'ordine di ϱ^4. Si noti infine che le coordinate cartesiane curvilinee u, v del punto M di L, differiscon dalle analoghe del punto associato $\overline{M}'$ di $\overline{L}'$, per quantità di 4° ordine, come risulta senz'altro dalle (2) del n. 1.

Concludendo:

Nella applicabilità approssimata di un ritorno superficiale qualunque, sopra una sfera, ad una linea di equidistanza, appartenente all'intorno, si può sempre sostituire, a meno di quantità di 4° ordine, sia per quel che concerne le coordinate curvilinee dei punti della linea, sia (quindi) per quel che concerne le lunghezze dei suoi archi, un parallelo della sfera.

Applicazioni: Alcune espressioni della curvatura totale di una superficie

6. *Espressione della curvatura totale mediante l'eccesso di un triangolo geodetico infinitesimo.* Dato sopra una superficie S un triangolo geodetico infinitesimo ABC, del quale indichiamo con a, b, c le lunghezze dei lati BC, CA, AB, con α, β, γ gli angoli opposti ai lati stessi, con Δ l'area, la formula (di Gauss):

$$K = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\Delta} ,$$

che esprime, a meno d'infinitesimi del 1° ordine, la curvatura di S nel vertice A (od in qualunque altro punto) del triangolo, si può ottenere come immediata conseguenza delle precedenti considerazioni.

Invero α, β, γ si posson, a meno di quantità del 3° ordine, considerare come angoli di un triangolo geodetico infinitesimo tracciato sopra una sfera di raggio $R = 1/\sqrt{K}$, ed i lati a, b, c si posson similmente considerare come lati dello stesso triangolo sferico, a meno di quantità del 4° ordine. Sicché il rapporto $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma}$, a meno di quantità del 1° ordine, uguaglia $\dfrac{1}{R^2}$, cioè K.

7. *Espressione della curvatura totale mediante i lati di un triangolo geodetico rettangolo, infinitesimo.* Sia ABC un triangolo geodetico infinitesimo, rettangolo in A, tracciato sopra una superficie qualunque S, e sieno a, b, c le lunghezze dei suoi lati, rispettivamente opposti ai vertici A, B, C. Potremo scrivere, a meno d'infinitesimi del 5° ordine (n. 4).

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R},$$

ove $K = 1/R^2$ è la curvatura di S in A. Da questa, sostituendo ai coseni degli archi i loro sviluppi in serie fino al 4° ordine inclusivo, dopo facili riduzioni si trae, a meno del 5° ordine:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{1}{12R^2}(b^4 + c^4 - a^4) + \frac{b^2c^2}{2R^2},$$

e, tenendo conto dell'identità:

$$b^4 + c^4 - a^4 = (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 + a^2) - 2b^2c^2,$$

si potrà anche scrivere:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{1}{12R^2}(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 + a^2) + \frac{b^2c^2}{3R^2}.$$

Poiché i due termini del 2° membro sono del 4° ordine (almeno), di tale ordine risulterà pure $b^2 + c^2 - a^2$, e quindi il 1° termine del 2° membro sarà del 6° ordine. Trascurando questo termine viene:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{b^2c^2}{3R^2},$$

ossia:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2c^2} = \frac{1}{3}K;$$

e si può enunciare:

Avendosi sopra una superficie qualunque S un triangolo geodetico infinitesimo, rettangolo nel vertice A, se a è la lunghezza dell'ipotenusa e b, c son le lunghezze dei cateti, la curvatura K di S in A è espressa da:

$$K = 3\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2}$$

od anche da

$$K = \frac{3}{4}\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta^2},$$

Δ essendo l'area del triangolo.

Se, invece di un triangolo rettangolo, si fosse considerato un triangolo geodetico infinitesimo qualunque, avente l'angolo in A uguale ad α, si sarebbe ottenuto, in modo analogo:

$$K = 3\,\frac{b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha - a^2}{b^2 c^2 \sin^2\alpha}.$$

Questa espressione, valida a meno di termini del 1° ordine, è racchiusa in un'altra, valida a meno di termini del 2° ordine, che trovasi in Darboux (7) e che colle nostre notazioni, si scrive sotto la forma:

$$2K_A + K_B + K_C = 12\,\frac{b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha - a^2}{b^2 c^2 \sin^2\alpha},$$

ove K_A, K_B, K_C sono i valori – differenti tra loro per quantità del 1° ordine – della curvatura totale nei tre vertici del triangolo.

8. *Espressione della curvatura mediante il parallelogrammoide di Levi-Civita.* Sopra una superficie qualunque S consideriamo con Levi-Civita (8), un «parallelogrammoide» $PQP'Q'$, cioè un quadrilatero geodetico, i cui lati opposti PP', QQ' sieno eguali e formino colla «base» PQ angoli corrispondenti eguali (ad ω) (9).

Quando si tenga fisso P e si faccian tendere a zero i lati del parallelogrammoide – in modo ch'essi si conservino infinitesimi dello stesso ordine, che si dirà primo – il limite dell'espressione $\dfrac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$, ove PQ, $P'Q'$ son le lunghezze rispettive della «base» e della «soprabase» e Δ è l'area del

(7) G. Darboux, *loc. cit.* (6), III partie, p. 168, formula (35).

(8) M. § 17.

(9) Definizione che particolarizza, per $n = 2$, quella del Levi-Civita, relativa ad una V_n. Qui si tien conto che il parallelismo fra direzioni, considerato in M., per $n = 2$ riducesi alla relazione d'isogonalità. Ciò è provato in M., § 9 e risulterà del resto anche dal n 11 del presente lavoro.

quadrilatero, secondo quanto ha provato il Levi-Civita, uguaglia la curvatura di S in P.

Profittando della applicabilità approssimata dell'intorno di P sopra una sfera di raggio $R = 1/\sqrt{K}$, possiamo ormai pervenir di nuovo rapidamente a questo risultato.

Poiché nel calcolo del limite dell'espressione scritta, le quantità d'ordine maggior di 4 son trascurabili, tenuto conto che, a meno di quantità del 5° ordine,

$$\Delta^2 = PQ^2 \times P'Q'^2 \sin^2 \omega ,$$

e che, nello stesso ordine di approssimazione, ai quadrati delle lunghezze di archi geodetici tracciati su S, posson sostituirsi i quadrati delle lunghezze di archi geodetici della sfera, ci sarà lecito di eseguire il calcolo come se S fosse addirittura una sfera.

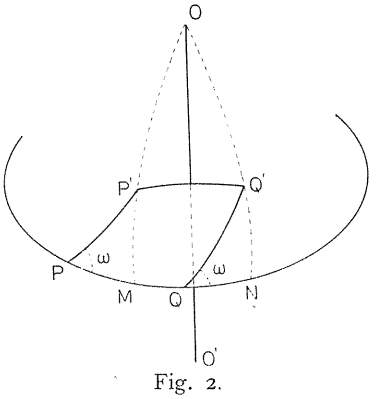


Fig. 2.

Si osserverà anzitutto che, detto OO' l'asse perpendicolare al circolo massimo PQ, assunto come equatore della sfera, la rotazione attorno ad OO', che porta P in Q, porta il circolo massimo PP' nel circolo massimo QQ', il punto P' in Q', il meridiano di P' e la sua traccia M sull'equatore, rispettivamente sul meridiano di Q' e sulla relativa traccia N. Sicché l'arco MN risulta uguale a PQ, e i due triangoli geodetici PMP', QNQ', che si sovrappongono a rotazione avvenuta, risultan pure uguali. Pertanto il parallelogrammoide rettangolo $MNP'Q'$ è equivalente a $PQP'Q'$ ed, in luogo del rapporto iniziale, possiamo dunque considerare il rapporto $\dfrac{a^2 - a'^2}{a^2 b^2}$, ove si è posto $a = MN = PQ$, $a' = P'Q'$, $b = MP'$.

I punti P', Q', che derivan l'uno dall'altro mediante una rotazione attorno ad OO', hanno la stessa latitudine $\lambda = b/R$, e inoltre la differenza fra le loro longitudini, eguaglia la differenza delle longitudini di M, N, cioè a/R. Ciò posto, dal triangolo geodetico isoscele $P'OQ'$ si ricava:

$$\cos \frac{a'}{R} = \sin^2 \frac{b}{R} + \cos^2 \frac{b}{R} \cos \frac{a}{R} ,$$

e quindi, a meno di quantità del 5° ordine:

$$a^2 - a'^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2} + \frac{1}{12} \frac{a^4 - a'^4}{R^2} .$$

Questa mostra, in primo luogo, che $a^2 - a'^2$ è infinitesima del 4° ordine, ed in secondo luogo che $a^4 - a'^4 = (a^2 - a'^2)(a^2 + a'^2)$ è infinitesima del

6° ordine, sicché, a meno di termini del 5° ordine, si potrà anche scrivere

$$a^2 - a'^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2},$$

cioè:

$$\frac{a^2 - a'^2}{a^2 b^2} = K.$$

E possiamo quindi enunciare con Levi-Civita:

Per calcolare la curvatura totale K di una superficie S in punto P, si può ricorrere ad un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$, avente un vertice della base in P. Il rapporto fra la differenza $PQ^2 - P'Q'^2$ dei quadrati della base e della soprabase e il quadrato dell'area del parallelogrammoide, eguaglia allora K.

Se alla soprabase geodetica $P'Q'$ del parallelogrammoide, si sostituisce l'arco di linea di equidistanza PP', obliqua secondo ω, dalla base PQ (n. 5), il nuovo quadrilatero così ottenuto dà luogo ad un'espressione di K identica a quella sopra trovata.

Per dimostrare quest'affermazione potremo (n. 5) riferirci ancora ad una sfera S. Faremo il calcolo supponendo anzi che il quadrilatero $PQP'Q'$, avente come soprabase un arco di linea di equidistanza, cioè (n. 5) un arco di parallelo, abbia dimensioni finite.

Come nel caso precedente, al nuovo quadrilatero sostituiremo un quadrilatero rettangolo analogo ed equivalente, $MNP'Q'$, tenuto conto che il parallelo luogo dei punti di distanza obliqua PP' dell'equatore, è pur luogo dei punti di distanza ortogonale $P'M$.

Indicando con a'' la lunghezza dell'arco di parallelo $P'Q'$ e conservando pel resto le notazioni precedenti, poiché il raggio del parallelo $P'Q'$ è $R\cos\lambda$ e l'angolo sotteso dall'arco $P'Q'$ è a/R, verrà:

$$a'' = a\cos\lambda$$

e quindi:

$$a^2 - a''^2 = a^2 \sin^2\lambda .$$

Prese a coordinate, sulla sfera, la longitudine φ dal meridiano OM e la latitudine λ dall'equatore PQ, l'area Δ del quadrilatero $MNP'Q'$ risulta espressa da:

$$\Delta = \int_0^{\lambda}\int_0^{a/R} R^2 \cos\lambda \, d\lambda \, d\varphi = aR\sin\lambda .$$

Si ha pertanto in definitiva:

$$\frac{a^2 - a''^2}{\Delta^2} = \frac{1}{R^2} = K,$$

cioè il teorema:

Data una superficie a curvatura costante, si costruisca su essa un quadrilatero finito $PQP'Q'$, avente per base un segmento geodetico PQ, per lati due segmenti geodetici eguali, formanti colla base angoli corrispondenti uguali (ad un prescelto ω), e per ulteriore lato $P'Q'$ l'arco di linea di equidistanza PP' (obliqua secondo ω) da PQ. Allora la curvatura K della superficie è espressa da

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

Δ essendo l'area del quadrilatero.

Lo stesso teorema, quando il quadrilatero $PQP'Q'$ sia infinitesimo, vale pure per una superficie a curvatura variabile.

Osservazione. – Riferendoci ancora ad una superficie a curvatura variabile, è opportuno porre in rilievo come la circostanza che alla soprabase di un parallelogrammoide geodetico infinitesimo, si possa sostituire un arco di linea di equidistanza, senza che perciò cessi di valere l'espressione limite $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ della curvatura, non è legata alla speciale natura dell'arco $P'Q'$ con cui si completa il parallelogrammoide. Il Levi-Civita ha infatti osservato che *come soprabase del parallelogrammoide si può prendere un arco arbitrario, congiungente i vertici P', Q'*. Si sottintende, naturalmente, che la linea $P'Q'$, sopra cui si conta quest'arco, resti ben determinata, durante la contrazione del quadrilatero $PQP'Q'$, e ch'essa continui ad avere per limite la geodetica PQ.

Questo complemento può stabilirsi agevolmente nel modo che segue.

Se a' è la lunghezza dell'arco geodetico $P'Q'$ ed l la lunghezza di un altro arco, situato sopra una linea ben definita, congiungente P', Q', designando con m la lunghezza del segmento rettilineo $P'Q'$, si ha, a meno di quantità del 4° ordine:

$$l = m + \frac{m^3}{24 R^2}, \qquad m = a' - \frac{a'^3}{24 R'^2},$$

ove $\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}$ son le flessioni rispettive, in P', degli archi l, a' (10).

Ne deriva, sempre fino al 3° ordine inclusivo:

$$l = a' + \frac{a'^3}{24}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right).$$

(10) Per l'espressione della differenza tra un arco e la relativa corda ved. per esempio G. HUMBERT, *Cours d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars, 1903), t. I, p. 401. La stessa espressione vale evidentemente qualunque sia la dimensione dello spazio euclideo in cui la superficie è immersa.

Ora, quando il parallelogrammoide si contrae tendendo a P, poiché le due linee considerate, pei punti P', Q', hanno ambedue per limite la geodetica prefissata PQ, le flessioni $\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}$ tendon verso lo stesso limite, e la differenza $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}$ risulta perciò infinitesima. Ne segue che la differenza $l - a'$ è del 4° ordine e la differenza $l^2 - a'^2$ del 5° ordine.

Nel calcolo del limite di $\frac{PQ^2 - a'^2}{\Delta^2}$, si può pertanto sostituite l^2 ad a'^2; che è quanto avevamo affermato.

9. *Quadrilateri di Saccheri, di Lambert, di Riemann. Espressioni della curvatura ad essi inerenti.* Quando si tratti d'una superficie a curvatura costante, un parallelogrammoide geodetico rettangolo di Levi-Civita, riducesi alla figura fondamentale della geometria piana di Saccheri, che è appunto un quadrilatero birettangolo isoscele (11).

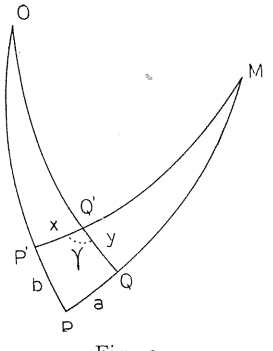


Fig. 3.

Anche la figura fondamentale della geometria piana di Lambert, che è un quadrilatero triretangolo (12), dà luogo, sopra una superficie S, a curvatura costante o variabile, alla stessa espressione della curvatura, cui si perviene col parallelogrammoide di Levi-Civita.

Per vederlo, possiamo, al solito, assimilare l'intorno di un punto P, ove la nostra superficie presenti la curvatura K, ad un intorno sferico di raggio $R = 1/\sqrt{K}$. Un quadrilatero $PQP'Q'$ di Lambert risulta allora costituito da un circolo massimo PQ, che si assumerà come equatore, da due meridiani PP', QQ' e da un circolo massimo $P'Q'$, normale al meridiano PP' in P' ed appoggiato in Q' al meridiano QQ' (13).

Detto O quello dei due poli dell'equatore PQ, che trovasi dalla stessa banda del quadrilatero, M il polo del circolo massimo PP' che trovasi dalla stessa parte del quadrilatero, e posto $PQ = a$, $PP' = b$, $P'Q' = x$, $QQ' = y$, il teorema dei seni, applicato al triangolo $OP'Q'$, rettangolo in P', porge:

$$\cos\frac{y}{R}\sin\gamma = \cos\frac{b}{R}, \qquad \cos\frac{y}{R}\sin\frac{a}{R} = \sin\frac{x}{R},$$

(11) Cfr. per esempio R. BONOLA, *La geometria non-euclidea* (Bologna, Zanichelli, 1906), p. 21.

(12) R. BONOLA, *loc. cit.*, p. 39.

(13) Si sottintende che, delle due intersezioni di ciascuno dei circoli massimi considerati, si sceglie quella che appartiene all'intorno di P.

ove γ denota il quarto angolo del quadrilatero di Lambert; e similmente il triangolo MQQ', rettangolo in Q, dà:

$$\cos\frac{x}{R}\sin\gamma = \cos\frac{a}{R}\,.$$

Eliminando fra queste $\sin\gamma$ e $\cos\frac{y}{R}$, s'ottiene:

$$\operatorname{tang}\frac{x}{R} = \operatorname{tang}\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\,,$$

dalla quale, quadrando e sostituendo alle linee trigonometriche i loro sviluppi in serie, si trae, a meno di quantità del 5° ordine:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{2\,x^4}{3\,R^4} = \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{2\,a^4}{3\,R^4}\right)\left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right),$$

od anche:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2\,b^2}{R^4} - \frac{2\,(a^4 - x^4)}{3\,R^2}\,.$$

Questa prova che $a^2 - x^2$ è del 4° ordine e che $a^4 - x^4 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$ è del 6° ordine. Si potrà perciò scrivere, a meno di quantità del 5° ordine:

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2\,b^2} = \frac{1}{R^2} = K.$$

È dunque vero che *il quadrilatero di Lambert dà luogo alla stessa espressione della curvatura a cui si perviene mediante il quadrilatero di Saccheri–Levi–Civita.*

Un'altra espressione notevole della curvatura, s'ottiene mediante un *quadrilatero di Riemann.* Chiamiamo così un quadrilatero $PQP'Q'$ che, sopra una superficie qualunque S, s'ottenga come trasformato di un parallelogrammo, col vertice in P, appartenente al piano S_0, ivi tangente ad S, allorquando si deforma S_0, fino a portarlo a coincidere con S, nel modo indicato al n. 2.

Designata con a la lunghezza dell'arco geodetico PQ e con b la lunghezza dell'arco geodetico PP', gli altri due lati QQ', $P'Q'$ del quadrilatero di Riemann, stanno rispettivamente sulle linee $u = a$, $v = b$ di un sistema di coordinate cartesiane curvilinee, avente per assi $v = 0$, $u = 0$ le geodetiche PQ, PP' (n. 2).

La ragione della denominazione adottata sta in ciò: che il calcolo della curvatura d'una superficie [o d'una varietà (ved. il n. 10)] accennato dal Riemann nella sua celebre Memoria sui fondamenti della geometria, si riduce

alla valutazione del rapporto $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$, ove Δ è l'area del quadrilatero $PQP'Q'$, supposto infinitesimo (14).

Prese, come sopra si è detto, le geodetiche PQ, PP' a linee $v = 0$, $u = 0$, di un sistema di coordinate cartesiane curvilinee, nel caso d'una superficie, la valutazione di questo rapporto si fa immediatamente partendo dall'espressione del ds^2 in coordinate cartesiane (n. 1). Poiché il punto P' ha le coordinate $(0, b)$ e Q' le coordinate (a, b), si avrà:

$$P'Q'^2 = E'(0, b)\, a^2,$$

con

$$E' = 1 + \left(\frac{G}{\varrho^2} - 1\right)\sin^2\theta .$$

Le coordinate polari del punto P' sono $\varrho = b$, $\theta = \omega$, ove ω è l'angolo delle PQ, PP': cosicché, tenendo presente lo sviluppo di G nell'intorno di $\varrho = 0$, si avrà, a meno di termini del 5° ordine:

$$P'Q'^2 = \left(1 - \frac{K}{3} b^2 \sin^2\omega\right) a^2,$$

K essendo la curvatura di S in P; e quindi:

$$PQ^2 - P'Q'^2 = \frac{K}{3} a^2 b^2 \sin^2\omega .$$

E siccome infine, a meno d'infinitesimi del 5° ordine, $a^2 b^2 \sin^2\omega$ uguaglia Δ^2, così viene, a meno d'infinitesimi del 1° ordine:

$$\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{3} K ,$$

che è la formula di Riemann per le superficie.

Possiamo enunciare, concludendo:

Se si considera l'intorno di un punto P d'una superficie qualunque S, come proveniente dalla deformazione d'un intorno piano, tessuto con un fascio di fibre rettilinee inestendibili e con un fascio di fibre circolari elastiche, la curvatura totale K di S in P, risulta espressa da

$$K = 3\,\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

essendo $PQP'Q'$ un quadrilatero infinitesimo, d'area Δ, tracciato su S, proveniente dalla deformazione di un parallelogrammo col vertice in P.

(14) Per la citazione dettagliata dei passi corrispondenti dalle *Gesammelte Werke* del RIEMANN, nonchè per la dimostrazione del fatto che effettivamente la definizione del Riemann può presentarsi sotto questa forma, ved. il n. 10 del presente lavoro.

Osservazione. – Un altro quadrilatero $PQP'Q'$, la cui considerazione si presenta spontanea sopra una superficie S, è quello costituito da due geodetiche PQ, PP', formanti in P l'angolo ω, e da due linee $P'Q', QQ'$ di equidistanza obliqua secondo ω, dalle due geodetiche.

A meno di quantità del 4° ordine, rispetto alle lunghezze dei lati d'un quadrilatero, possiamo ancora assimilare la nostra superficie ad una sfera (n. 5). Il quadrilatero $PQP'Q'$ è allora formato da due circoli massimi PQ, PP' e da due circoli minori $P'Q', QQ'$ ad essi rispettivamente paralleli.

Supporremo, per semplicità, $\omega = \pi/2$. Posto $PQ = a$, $PP' = b$, $P'Q' = x$, si osservi che i punti Q, Q', situati sopra un piano parallelo a quello del circolo massimo PP', sono equidistanti da quest'ultimo piano; sicché i seni degli archi PQ, $P'Q'$, le cui rispettive misure in radianti sono a/R, $x/R\cos\lambda$ – ove $\lambda = b/R$ è la latitudine del parallelo $P'Q'$ rispetto all'equatore PQ – risultan inversamente proporzionali ai raggi dei rispettivi circoli. Si ha cioè

$$R\cos\frac{b}{R}\sin\frac{x}{R\cos\frac{b}{R}} = R\sin\frac{a}{R}, \tag{15}$$

donde, a meno di termini del 5° ordine (sulla sfera):

$$x - \frac{x^3}{6R^2} = a - \frac{a^3}{6R^2},$$

ossia:

$$x - a = \frac{x^3 - a^3}{6R^2}. \tag{16}$$

Questa prova anzitutto che la differenza $x - a$ è del 3° ordine (almeno) e quindi che $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ è del 5° ordine.

E ritornando ancora una volta alla (16), la quale vale, sulla sfera, fino al 4° ordine inclusivo, se ne deduce che *sulla sfera*, $x - a$ è del 5° ordine.

Ma sulla superficie S qualunque, da cui siano partiti, si può affermar soltanto che la differenza $x - a$ è del 4° ordine, perché è appunto questo l'ordine di approssimazione nel quale, date le nostre premesse, ci è lecito di scriver la (15).

Concludendo:

Il quadrilatero racchiuso sopra una superficie qualunque S, da due geodetiche perpendicolari e da due linee ad esse parallele (linee di equidistanza ortogonale), a meno di quantità del 4° ordine, ha i lati opposti uguali.

Pertanto, nell'ordine di approssimazione considerato, un tal quadrilatero si rassomiglia ad un rettangolo piano più di ogni altro quadrilatero della superficie, che, come quelli di Saccheri, di Lambert, di Riemann, conservi qualcuna delle proprietà caratteristiche d'un rettangolo piano. La cosa, come si vedrebbe senza difficoltà, vale anche quando le due geodetiche PQ, PP'

si tagliano sotto un angolo ω, non retto: il quadrilatero $PQP'Q'$ racchiuso dalle PQ , PP' e da due linee di equidistanza secondo ω, dalle due date geodetiche, si rassomiglia cioè ad un parallelogrammo piano più di ogni altro quadrilatero di S.

Ritorniamo per poco al quadrilatero trirettangolo $PQP'Q'$, d'area Δ, racchiuso, sopra una superficie S, da due geodetiche ortogonali PQ , PP' e da due linee ad esse parallele. Assimiliamo S ad una sfera e, indicato con γ il quarto angolo del quadrilatero, fissiamo l'attenzione sul triedro $Q'(MNO)$, avente per spigoli $Q'M$, $Q'N$, le tangenti rispettive in Q' ai circoli minori $Q'P'$, $Q'Q$ e per spigolo $Q'O$, l'intersezione dei piani di questi circoli. Le faccie $MQ'O$, $NQ'O$ uguaglian rispettivamente gli angoli sottesi dagli archi $Q'P'$, $Q'Q$, aumentati di $\pi/2$. Per la (15), si avrà pertanto:

$$\cos MQ'O = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{R\cos\frac{b}{R}}\right) = -\frac{\sin\frac{a}{R}}{\cos\frac{b}{R}} ;$$

e similmente:

$$\cos NQ'O = -\frac{\sin\frac{b}{R}}{\cos\frac{a}{R}} .$$

Tenendo ora conto che il diedro opposto alla faccia $MQ'N = \gamma$, è retto, si può scrivere:

$$\cos\gamma = \cos MQ'O \cos NQ'O = \operatorname{tang}\frac{a}{R}\operatorname{tang}\frac{b}{R} ,$$

donde si trae, a meno di quantità del 4° ordine, sulla sfera:

$$\cos\gamma = \frac{ab}{R^2} .$$

Ma poiché la penultima relazione vale su S a meno di quantità del 3° ordine, così può scriversi in definitiva, a meno del 1° ordine:

$$K = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta} .$$

Dunque: *Detti γ il quarto angolo e Δ l'area di un quadrilatero rettangolo infinitesimo, come quello dell'enunciato precedente, la curvatura di S nel vertice opposto a γ è espressa da*

$$K = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta} .$$

Un'espressione analoga s'ottiene da un quadrilatero trirettangolo geodetico (di Lambert), decomponendolo con una diagonale in due triangoli geodetici e applicando la formula di Gauss (n. 6). Viene così:

$$K = \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\Delta},$$

ove γ è ancora il quarto angolo del quadrilatero d'area Δ e K la curvatura nel vertice opposto.

È superfluo di avvertire che in questo ed in tutti gli altri enunciati, soltanto per comodità ci si riferisce ad un punto fisso dell'area mediante cui si definisce la curvatura, giacché in realtà i valori di K nei diversi punti dell'area sono eguali, a meno d'infinitesimi del 1° ordine.

Capitolo II.

Sulla curvatura riemanniana d'una varietà e sul parallelismo fra direzioni introdotto dal Levi-Civita

10. *Curvatura d'una varietà secondo la definizione originaria del Riemann. Interpretazione geometrica.* Le precedenti considerazioni conducono ad una ricostruzione geometrica della teoria della curvatura d'una varietà, secondo il Riemann. All'uopo, fissiamo sopra una varietà V_n, a metrica qualsiasi, una superficie geodetica σ [15], avente il centro in un punto P di V_n, individuata da due geodetiche distinte PQ, PP'. La curvatura di V_n, secondo la giacitura con cui σ esce da P, à definita dal Riemann mediante uno di quei quadrilateri, tracciati sopra σ, che già nel n. 9 chiamammo appunto quadrilateri di Riemann.

Il Riemann procede infatti così [16]:

A coordinate di un punto M variabile su V_n, egli prende anzitutto la distanza geodetica $\varrho = PM$ ed i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ della direzione con cui la geodetica PM esce da P (coordinate geodetiche polari). Introduce quindi su V_n le coordinate cartesiane curvilinee $u_1, u_2, \cdots, u_n$, definite dalle:

$$u_1 = \varrho\alpha_1, \quad u_2 = \varrho\alpha_2, \cdots, u_n = \varrho\alpha_n,$$

colla condizione ulteriore – diretta ad abbreviare i calcoli – che sia

$$\varrho^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2. \tag{17}$$

(15) Cioè il luogo delle geodetiche spiccate da P secondo direzioni appartenenti a un dato fascio. Cfr. per esempio L. Bianchi, *loc. cit.*, vol. I, p. 339.

(16) *Ueber die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde liegen* (Gesammelte Mathematische Werke, Leipzig, Teubner, 1876, pp. 254–269), p. 261. Ved. anche il Commento del Weber al frammento postumo n. XXII (p. 384).

Le coordinate cartesiane ch'egli considera, son cioè ortogonali; noi, non avendo nel seguito da sviluppar calcoli, potremo anche omettere la condizione (17), lasciando che le direzioni con cui le linee (geodetiche) coordinate escon da P, sieno comunque inclinate (purché beninteso fra loro linearmente indipendenti) (17).

Fissati due punti $Q\,(u_1 = a_1\,, \cdots, u_n = a_n)$, $P'(u_1 = b_1\,, \cdots, u_n = b_n)$ infinitamente vicini a P, secondo direzioni distinte, il Riemann considera il punto Q' di coordinate $a_1 + b_1\,, \cdots, a_n + b_n$, e valuta il quadrato dell'elemento lineare $P'Q'$, giungendo alla conclusione che il rapporto fra la differenza $P'Q'^2 - PQ^2$ e il quadrato dell'area del triangolo $P'PQ$, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, uguaglia la curvatura gaussiana in P della superficie geodetica σ, contenente le direzioni $(PQ)\,(PP')$, moltiplicata pel coefficiente $-4/3$ (18).

Noi possiamo ormai pervenire rapidamente, per via geometrica semplice, alla conclusione del Riemann.

Considerato invero, nello spazio euclideo S_N – di dimensione N abbastanza grande – ove la V_n può sempre supporsi immersa, lo spazio euclideo S_n, tangente a V_n in P, a somiglianza di quanto già facemmo per le superficie nei nn. 2 e 9, assumeremo in S_n, come assi di un sistema cartesiano $(u_1^{(0)}\,, u_2^{(0)}\,, \cdots, u_n^{(0)})$, le tangenti in P alle linee $u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$ del sistema cartesiano già definito entro V_n, ed associeremo due punti di S_n e di V_n, che abbian le stesse coordinate $(u_i^{(0)} = u_i)$.

La corrispondenza si realizza al solito riguardando S_n come costituito da fibre rettilinee inestendibili, uscenti da P, e da ipersfere elastiche, ad $n - 1$ dimensioni, di centro P; ed applicando S_n su V_n in modo che resti fermo P e il relativo intorno di 1° ordine. Mediante la corrispondenza considerata, un piano σ_0 di S_n uscente da P, concepito come sostegno di un fascio di raggi di centro P, vien trasformato in una superficie geodetica σ di V_n, concepita come sostegno di un fascio di linee geodetiche uscenti da P e tangenti al piano σ_0.

Ai punti $Q\,, P'$ di V corrispondono in S_n, i punti $Q_0\,, P_0'$, aventi le stesse coordinate $(a_1\,, a_2\,, \cdots, a_n)\,, (b_1\,, b_2\,, \cdots, b_n)$ [nel caso in esame $Q_0\,, P_0'$ coincidon rispettivamente con $Q\,, P'$, perché questi si son supposti infinitamente vicini a P], e al punto Q' corrisponde il punto $Q_0'\,(a_1 + b_1\,, \cdots, a_n + b_n)$.

(17) Indica con u_1 la linea coordinata, uscente da P, lungo cui son costanti le $u_2\,, \cdots, u_n$; con u_2 quella lungo cui son costanti le $u_1\,, u_3\,, \cdots, u_n$, etc; si ha in generale

$$\varrho = \sum_i u_i^2 + 2 \sum_{i,j} u_i u_j \cos\,(u_i u_j)\,.$$

L'angolo che la geodetica $l = PM$ forma in P colla linea u_i, è espresso da $\cos\,(l u_i) = \sum_j a_j \cos\,(u_i u_j)$. Tutto ciò deriva ovviamente dalla formola che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni sopra V_n. Cfr. ad esempio L. BIANCHI, *loc. cit.*, vol. I, p. 331.

(18) Vedi le riflessioni critiche del Levi-Civita (alla fine di M.) sul calcolo accennato dal Riemann e sviluppato più ampiamente dal Weber.

Ora, le rette PP'_0, $Q_0 Q'_0$, essendo rappresentate, in coordinate correnti $u_1^{(0)}, \cdots, u_n^{(0)}$, dalle equazioni rispettive:

$$\frac{u_1^{(0)}}{b_1} = \frac{u_2^{(0)}}{b_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)}}{b_n}$$

$$\frac{u_1^{(0)} - a_1}{b_1} = \frac{u_2^{(0)} - a_2}{b_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)} - a_n}{b_n},$$

son parallele; e così son parallele le rette PQ_0, $P'_0 Q'_0$ rappresentate dalle:

$$\frac{u_1^{(0)}}{a_1} = \frac{u_2^{(0)}}{a_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)}}{a_n}$$

$$\frac{u_1^{(0)} - b_1}{a_1} = \frac{u_2^{(0)} - b_2}{a_2} = \cdots = \frac{u_n^{(0)} - b_n}{a_n}.$$

Dunque la figura $PQ_0 P'_0 Q'_0$ di S_n, è un parallelogrammo. Mediante la corrispondenza fra S_n e V_n, il piano σ_0 di questo parallelogrammo, si muta, come s'è detto, nella superficie geodetica σ definita dalle due direzioni (PQ), (PP'), ed il parallelogrammo si muta nel quadrilatero $PQP'Q'$ di σ, il quale risulta così un quadrilatero riemanniano, secondo la definizione del n. 9.

Resta pertanto provato che, indicata con Δ l'area di $PQP'Q'$ e con K la curvatura gaussiana di σ in P, si ha:

$$\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{3} K,$$

e questa è appunto, salvo la forma, l'affermazione del Riemann.

Si conclude che:

Data una varietà V_n, a metrica qualsiasi, la curvatura K di V_n in un punto P, secondo un'assegnata giacitura, si può calcolare nel modo seguente:

« Sul piano σ_0, tangente in P alla prefissata giacitura, si costruisca un parallelogrammo infinitesimo con un vertice in P; e concepito il piano σ_o come inestendibile lungo le rette uscenti da P, e come elastico sulle direzioni a queste ortogonali, si deformi σ_0, lasciando fermo l'intorno di 1° ordine di P, finché le fibre inestendibili di σ_0 si distendano su altrettante geodetiche di V_n.

Indicato con $PQP'Q'$ il quadrilatero di V_n, deformato del parallelogrammo di σ_0, viene

$$K = 3 \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

ove Δ è l'area del suddetto quadrilatero ».

11. *Definizione geometrica intrinseca del parallelismo di Levi-Civita. Equazioni differenziali relative.* Per arrivar geometricamente, in modo semplice, alla definizione della curvatura d'una V_n, mediante un parallelogram-

moide di Levi–Civita, indicheremo anzitutto una definizione geometrica intrinseca del parallelismo fra direzioni, la quale ci offrirà subito il modo di ricondurre tutto alle superficie (geodetiche) tracciate in V_n.

Dati sopra V_n due punti A, A_1 infinitamente vicini, ed una direzione (ξ) uscente da A ed appartenente a V_n, la *direzione* (ξ_1) *parallela a* (ξ), *condotta per* A_1, verrà definita nel modo seguente:

Si consideri la superficie geodetica σ, di centro A, individuata dalla giacitura che contiene le direzioni (ξ) ed (AA_1): allora la direzione (ξ_1) è quella che *sopra* σ forma colla geodetica AA_1 un angolo (corrispondente) uguale a quello formato da (ξ), (AA_1). S'intende qui incluso il caso in cui (ξ) tocchi in A la geodetica AA_1: soltanto in questo caso la σ non è individuata, potendosi scegliere fra le infinite superficie geodetiche di centro A, contenenti la geodetica AA_1.

Conservando le notazioni del Levi–Civita, indicheremo con $\xi^{(i)}$ i parametri della direzione (ξ) entro l'ambiente V_n, con x_i' i parametri della direzione (AA_1), con $x_i^{(0)}$ le coordinate di A. Si avrà allora la rappresentazione parametrica:

$$(18) \qquad x_i = x_i^{(0)} + x_i' u + \xi^{(i)} v - \frac{1}{2} \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\} (x_j' u + \xi^{(j)} v)(x_l' u + \xi^{(l)} v) + \cdots$$

della superficie σ nell'intorno di A [19], ove $\left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\}$ sono i soliti simboli di Christoffel, relativi a V_n, e le coordinate curvilinee u, v di un punto P di σ, son definite da

$$(19) \qquad u = \varrho\alpha\,, \qquad v = \varrho\beta\,,$$

essendo ϱ la distanza geodetica AP ed $xx_i' + \beta\xi^{(i)}$ i parametri, entro V_n, della direzione con cui la geodetica AP esce da A.

Indichiamo con ω l'angolo, fra o e π, delle direzioni (AA_1), (ξ) con θ l'angolo fra o e π, che (AA_1) forma con una direzione variabile $\alpha x_i' + \beta\xi^{(i)}$. Allora, tenendo presente la formola, già citata [alla nota (17)], che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni, entro V_n, si ottengon subito le relazioni:

$$\cos\theta = \alpha + \beta\cos\omega\,, \qquad \cos(\omega - \theta) = \alpha\cos\omega + \beta\,,$$

donde si trae:

$$\alpha = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}\,, \qquad \beta = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}\,.$$

Le u, v coincidon pertanto sopra σ colle coordinate cartesiane curvilinee già considerate nel n. 1. Pel ds^2 di σ si ha perciò l'espressione (6) del n. 1.

(19) Cfr. L. BIANCHI, *loc. cit.*, vol. I, p. 339.

Ne deriva che l'angolo γ, formato in un punto P della geodetica AA_1 ($\theta = 0$), dalla direzione positiva di questa linea, colla direzione positiva della linea $u = \text{cost.}$, uscente da P, è dato da [20]:

$$\cos\gamma = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\overline{G}}{\varrho^2} - 1\right)\sin^2\omega}},$$

ove con $\overline{G}$ s'è indicata la funzione G per $\theta = 0$.

La precedente, mediante la formula del binomio, può anche scriversi:

$$\cos\gamma = \cos\omega\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{G}}{\varrho^2} - 1\right)\sin^2\omega + \cdots\right].$$

Ricordando lo sviluppo di $\overline{G}$ secondo le potenze ascendenti di ϱ, nell'intorno di $\varrho = 0$ (n. 1), si trae subito:

$$\cos\gamma = \cos\omega\,(1 + \mu\varrho^2 + \cdots) \qquad (\mu \text{ costante})$$

la quale prova che, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, la direzione con cui esce da A_1 la relativa linea $u = \text{cost.}$, coincide con (ξ_1).

Pertanto le costanti superficiali, in A_1, della suddetta linea $u = \text{cost.}$, s'identificano colle costanti superficiali della direzione (ξ), le quali, a norma delle (19), sono

$$\left(\frac{du}{ds}\right)_A = 0\,, \qquad \left(\frac{dv}{ds}\right)_A = 1\,,$$

ove ds denota l'elemento lineare sulla $u = 0$ e φ_A il valore in A di una generica funzione φ del punto mobile su σ.

Sicché, sopra la linea $u = \text{cost.}$ che esce da A_1 sarà $\left(\frac{dv}{ds'}\right)_{A_1} = 1$, ds' indicando l'elemento lineare su detta linea.

Le costanti della direzione (ξ_1), entro V_n, saranno perciò date da:

$$\xi_1^{(i)} = \left(\frac{dx_i}{ds'}\right)_{A_1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_{A_1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_A + du\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\right)_A,$$

in quanto sulla geodetica AA_1 ($\theta = 0$), l'arco, contato da A, s'identifica colla variabile u.

Ora dalle (18), derivando e ponendo, a derivazione eseguita, $u = v = 0$, si traggon le relazioni:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_A = \xi^{(i)}\,, \qquad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\right)_A = -\sum_{jl}\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix}\xi^{(l)}x'_j\,,$$

(20) L. BIANCHI, *loc. cit.*, vol. I, p. 195.

Si hanno dunque, in definitiva, le

$$\xi_1^{(i)} = \xi^{(i)} - du \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(l)} x'_j ,$$

le quali coincidono colle relazioni differenziali (I_a) di M.

Resta così provata l'equivalenza della nostra definizione con quella del Levi–Civita, e vengon di più ritrovate, con sole considerazioni intrinseche, le equazioni differenziali che reggono il problema del parallelismo.

12. *Parallelismo fra direzioni negli spazi a curvatura costante.* Il teorema d'esistenza pel sistema

$$\frac{d\xi_1^{(i)}}{ds} = - \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(l)} \frac{dx_j}{ds} , \tag{20}$$

che esprime il modo di variare di una direzione parallela ad una data (ξ_0), lungo un assegnato cammino C – sul quale ds è l'elemento lineare – s'interpreta geometricamente nel senso che la varietà delle ∞^1 direzioni integrali definite da (ξ_0), può esser determinata a partire da una qualunque di esse, e quindi che la *relazione di parallelismo, lungo un dato cammino, è simmetrica e transitiva.*

Quando il cammino C sia geodetico, la definizione da noi data, di direzioni parallele uscenti dai punti A , A_1, infinitamente vicini su C, ha senso anche allorché i punti A , A_1 sieno su C a distanza finita, giacché allora esiste una superficie geodetica σ, di centro A, contenente C e la direzione (ξ) spiccata da A.

Ma non è detto che la relazione di parallelismo che così s'ottiene fra le due direzioni aventi le origini a distanza finita, coincida con quella del Levi–Civita: quel che è certo è soltanto che le due relazioni coincidono a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, rispetto alla distanza geodetica AA_1. È chiaro che la coincidenza in questione avrebbe luogo anche al finito, qualora la relazione di parallelismo, secondo la nostra definizione, fosse simmetrica rispetto a due direzioni (ξ) (ξ_1) spiccate da punti A , A_1 a distanza finita; qualora cioè la superficie geodetica σ_1, di centro A_1, passante per la geodetica C e per la direzione (ξ_1), toccasse di conseguenza la σ nel punto A, come di fatto la σ tocca σ_1 in A_1 .

Il parallelismo del Levi–Civita può dunque definirsi intrinsecamente *in termini finiti*, nel modo da noi indicato, solo quando la V_n goda della proprietà che « per ogni coppia di superficie geodetiche, aventi i centri sopra una medesima geodetica C, il contatto in un punto di C, porti di conseguenza il contatto lungo tutta la curva ».

In questo caso le equazioni differenziali (20), *che reggono il problema del parallelismo, risultan senz'altro integrate pei cammini geodetici, non appena sieno integrate le equazioni differenziali delle geodetiche.*

Questa circostanza si verifica ad esempio per gli spazî a curvatura costante: ciò risulta subito dal fatto che ogni punto d'una superficie geodetica appartenente ad un tale spazio V_n, può esser assunto come centro di un fascio di geodetiche di V_n, tracciate sulla superficie (in quanto a questa appartiene ogni geodetica che la incontri in due punti), sicché due superficie geodetiche che si tocchino in un punto coincidono. Dunque:

Negli spazî a curvatura costante, il parallelismo di due direzioni (ξ), (ξ_1), *situate a distanza finita, e derivanti per continuità l'una dall'altra, lungo un cammino geodetico C, si riduce a ciò: che le* (ξ), (ξ_1) *forman con C angoli corrispondenti uguali sopra una superficie geodetica che le contenga.*

Una proprietà sostanzialmente equivalente, sempre per gli spazî a curvatura costante, trovasi già nel § 10 di *M*.

13. *Le proprietà fondamentali del parallelismo fra direzioni.* Nella sua Memoria, il Levi-Civita dimostra, per via analitica, le due proprietà fondamentali seguenti della relazione di parallelismo:

a) La direzione (α) parallela in un punto P ad una direzione data (α_0), uscente da P_0, dipende in generale dal cammino con cui si va da P_0 a P. L'indipendenza dal cammino caratterizza le varietà euclidee.

b) Due direzioni uscenti da P_0 formano un angolo uguale a quello formato dalle direzioni ad esse parallele per P, e ciò qualunque sia il cammino da P_0 a P.

Ecco come si possono stabilire queste due proprietà, con semplici ragionamenti geometrici.

Suppongasi che nella nostra V_n il parallelismo di due direzioni sia indipendente dal cammino, o, in altre parole, che « due direzioni parallele ad una terza sieno sempre parallele fra di loro ». Consideriamo allora, entro V_n, un punto P_0 ed una geodetica C_0 uscente da P_0. Tracciamo quindi la geodetica C, che esce da un altro punto P, colla edizione parallela a quella di C_0 in P_0. Due direzioni appartenenti a C_0, C, ed aventi del resto origini arbitrarie, sono, per la definizione stessa, parallele alle direzioni di C_0, C in P_0, P, e quindi, per l'ammessa transitività, parallele tra di loro. Ne deriva che ogni geodetica che incontri C_0, C nei punti M_0, M, forma ivi colle due geodetiche angoli corrispondenti uguali.

Siamo dunque nel caso euclideo e si conclude che:

La relazione di parallelismo fra direzioni è transitiva, soltanto nel caso euclideo.

Passiamo alla proprietà *b*). Fissato un cammino C dal punto P_0 al punto P di V_n, e dette a_0, a le rette tangenti a C in P_0, P, entro lo spazio euclideo S_N in cui V_n è immersa, fra le stelle formate dalle tangenti a V_n in P_0, P, nasce una corrispondenza biunivoca π, ove si chiamino omologhe due tangenti t_0, t, che escano da P_0, P con direzioni parallele rispetto a C; talché sarà intanto $\widehat{ta} = \widehat{t_0 a_0}$.

Tale corrispondenza π, attesa la linearità delle equazioni differenziali (20), che assicura essere lineare la dipendenza degl'integrali $\xi^{(i)}$ dai loro valori iniziali, è un'omografia. Dobbiamo provare che, in π, a due rette b_0 , c_0 della stella (P_0) – entro lo S_n euclideo tangente a V_n in P_0 – corrispondon due rette b , c della stella (P) – entro lo S_n analogo – tali che $\widehat{b_0 c_0} = \widehat{bc}$.

Dal momento che lo $S_3\ a_0 b_0 c_0$ si muta per la π nello $S_3\ abc$, così basterà provare che un'omografia π fra due stelle (P_0) , (P) di due S_3 euclidei, è una congruenza, quando raggi corrispondenti formano angoli eguali con due raggi fissi a_0 , a di (P_0) , (P).

All'uopo si osservi che ad un cono rotondo Γ_0, avente per asse a_0, la π fa corrispondere un cono rotondo Γ, di eguale apertura, avente per asse a: l'involuzione dei piani diametrali coniugati rispetto a Γ_0, che è l'involuzione degli angoli retti nel fascio di piani (a_0), vien dunque mutata nell'involuzione analoga rispetto a Γ, cioè nell'involuzione degli angoli retti del fascio di piani (a). Tanto basta per concludere che la π subordina una congruenza fra i fasci di piani (a_0) , (a); donde segue l'eguaglianza dei due triedri $a_0 b_0 c_0$, abc (che hanno due faccie e il diedro compreso rispettivamente uguali) e quindi $\widehat{b_0 c_0} = \widehat{bc}$ (21). Si può pertanto enunciare:

Fissati due punti P_0 , P della varietà V_n ed un cammino qualunque C, che li congiunga, la corrispondenza biunivoca fra le direzioni, uscenti da P_0 , P, parallele rispetto al cammino C, è una congruenza.

Nel qual enunciato resta inclusa anche la proposizione stabilita in *M.* dal Levi-Civita, alla fine del § 6.

14. *Espressione della curvatura riemanniana d'una varietà mediante un parallelogrammoide.* Il Levi-Civita ha definito la curvatura d'una varietà V_n in un punto P, secondo un'assegnata giacitura, individuata dalle direzioni di due geodetiche distinte PQ , PP', spiccate da P, mediante l'espressione $\dfrac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ relativa ad un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$ di base PQ, di soprabase $P'Q'$ e di area Δ.

La coincidenza di questa definizione colla definizione riemanniana si desume ormai a priori da ciò: che il parallelogrammoide $PQP'Q'$ appartiene alla superficie geodetica σ di centro P, determinata dalle due direzioni (PQ) , (PP').

E invero che il lato QQ' appartenga a σ segue senz'altro dal n. 11. Quanto al lato $P'Q'$, abbiamo già osservato (n. 8) ch'esso è arbitrario (22): si può

(21) Più brevemente si sarebbe potuto dire: la π fa corrispondere alle intersezioni del cono isotropo della stella (P_0) coi piani reali del fascio (a_0), le generatrici analoghe del cono isotropo della stella (P). Dunque il trasformato, mediante π, del primo cono isotropo, che è irriducibile, non può che coincidere col secondo; cioè π non può che essere una congruenza.

(22) Il ragionamento esposto nell'Osservazione del n. 8, vale evidentemente anche se il quadrilatero $PQP'Q'$ è immerso in una varietà V_n, anzichè in una superficie S. Basta all'uopo considerare le cose nello spazio euclideo S_N, cui V_n appartiene.

pertanto supporre, senza restrizione, che la soprabase $P'Q'$ appartenga essa pure a σ. Ne deriva che il valore dell'espressione $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ relativa ad un parallelogrammoide geodetico infinitesimo di V_n – ove per Δ si prenda una qualunque area avente per contorno il perimetro del quadrilatero e infinitesima con esso – coincide col valore dell'espressione stessa riferita ad un parallelogrammoide geodetico di σ, cioè (n. 8) colla curvatura totale di σ in P.

Resta così provata la coincidenza della definizione del Levi-Civita con quella del Riemann; la qual coincidenza risulta in *M.* (§ 18) dalla verificazione formale dell'eguaglianza delle corrispondenti espressioni della curvatura.

INDICE

XLII. Sur les intégrales doubles de première espèce attachées à une variété algébrique . . . . . Pag. 1

XLIII. Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche . . . . . » 3

XLIV. Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica » 64

XLV. Di alcuni recenti risultati nella teoria delle superficie algebriche e sopra qualche problema ad essi collegato . . . . . » 72

XLVI. Sulle superficie modanate . . . . . » 80

XLVII. Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques . . . . . » 84

XLVIII. Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica . . . . . » 259

XLIX. Sul metodo di Mayer per l'integrazione delle equazioni lineari a differenziali totali . . . . . » 286

L. Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie . . . . . » 291

LI. Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo . . . . . » 298

LII. Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique . . . . . » 307

LIII. Sul principio della conservazione del numero . . . . . » 309

LIV. Sulle congruenze solenoidali . . . . . » 324

LV. Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracées sur une surface . . . . . » 329

LVI. Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica . . . . . » 332

LVII. Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di I^a specie di una varietà algebrica . . . . . » 360

LVIII. Risposta ad un'osservazione del Sig. De Franchis . . . . . » 373

LIX. Sulle superficie irregolari con infinite curve razionali . . . . . » 380

LX. Un teorema d'inversione per gli integrali semplici di I^a specie appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . » 381

LXI. Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica . . . . . » 387

LXII. Sugli integrali abeliani riducibili . . . . . » 399

LXIII. Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli . . . . . » 415

LXIV. Osservazioni a proposito della Nota di A. Comessatti: « Sulle trasformazioni hermitiane delle varietà di Jacobi » . . . . . » 427

LXV. Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann . . . . . Pag. 430

LXVI. Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare . . . . . » 449

LXVII. Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica . . . . . » 477

LXVIII. Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche . . . . . » 500

LXIX. Sulla curvatura delle superficie e varietà . . . . . » 531

237586

SCUOLA NORMALE SUPERIORE · PISA · BIBLIOTECA

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NEL MARZO 1974


151868
BIBLIOTECA
Scuola Normale Superiore

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Prezzo L. 25.000-