BIBLIOTECA

SCELTA

DI OPERE ITALIANE

ANTICHE E MODERNE

vol. 238

LORENZO MASCHERONI

EQUILIBRIO DELLE VOLTE.

LORENZO MASCHERONI.

NUOVE RICERCHE
SULL'EQUILIBRIO
DELLE VOLTE

DELL'ABATE

LORENZO MASCHERONI

PROFESSORE DI FILOSOFIA NEL COLLEGIO MARIANO
ACC. ECC., E CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA
DI PADOVA

COLL'ELOGIO

SCRITTO DAL MARCHESE

FERDINANDO LANDI

E CON CINQUE TAVOLE IN RAME.

MILANO
PER GIOVANNI SILVESTRI
M. DCCC. XXIX.

Quid velit, et possit rerum concordia discors.
HORAT. ad Iccium.

ELOGIO

DELL'ABATE

LORENZO MASCHERONI

SCRITTO DAL MARCHESE

FERDINANDO LANDI

PIACENTINO.

In Castagneta, piccola villa giacente sotto il castello di Bergamo, nacque *Lorenzo Mascheroni*, il dì 14 maggio 1750, di Paolo Mascheroni dell'Olmo, negoziante, e di Maria Ceribelli. Con assai di sollecitudine fu procurata dai genitori la buona istruzione del figlio, e grato il figlio a questa tenera cura sempre onorò, sempre amò i genitori; corrispondenza giustissima, ma pur bellissima e rara forse e degna certo di osservazione speciale, giacchè a un tempo discopre sensibilità di cuore e rettitudine di spirito.

Negli amabili studj di bella letteratura ebbe a maestro Ottavio Bolgeni professore a que' giorni di eloquenza nel Seminario di Bergamo, scrittor pregiabile assai e distinto per certa sua grazia semplice e dignitosa, e per certa soave eleganza che, unita a maggiore facilità e a più vivido colorito, si trasfuse poi tutta nel suo felice discepolo formato già da natura al più gentile atticismo. Questi, nel Seminario, l'abito vestì di ecclesiastico, e il rimanente corso ivi compiè degli studj, la filosofia delibando e la teologia.

Giovinetto di circa vent'anni, e dal novero uscito appena degli scolari, ei fu maestro, e, il che più dice, successor di Bolgeni. Cotesta lusinghiera e dilicata destinazione, nell'onorare i progressi insignemente rapidi di *Mascheroni*, eccitava pur anche validamente il suo genio a tentarne di nuovi e vieppiù sempre gloriosi. Potrà egli emulo di Bolgeni là rimanersi ove pur giunse discepolo? Ripieno adunque l'inclito giovine di attività e di costanza siegue l'industre coltivamento dei cari studj di Erato e di Polinnia, e mentre per la modestia dell'animo vive contento di nuovi meriti, trova, per non frequente giustizia, novelli onori che il trasferiscono dal Seminario di Bergamo a insegnar l'eloquenza nelle pubbliche scuole della città.

La parte più interessante di cotesta maravigliosa arte dell'eloquenza ella è certo la eloquenza del pulpito, che quanto giova integra e vera, altrettanto e più, nuoce corrotta e falsa. Bene pertanto dei diritti egli usò di amicizia quel dottor Mazzoleni che un bel sermone poetico sulla *falsa Eloquenza del Pulpito* divulgò dal suo *Mascheroni* composto e di acconce note arricchito. E certamente tolto ci avrebbe assai la timida ritrosìa del giovine Autore, togliendoci in questo componimento un sincero modello di didattica poesia, che riunisce per eccellente modo alla istruzione il diletto. Diletto onesto veracemente, perchè di tanta e tanto savia istruzione compagno ch'io non te-

merei quasi di lodar troppo, ove del sermone Mascheroniano quel medesimo pur dicessi che del Codice poetico di Orazio dal Conte di S. Raffaele fu detto, colui che gli disobbedisce esser certo di errare. E all'oratorio Codice di *Mascheroni* obbediscan pure i giovani predicatori, che diverran tosto seguaci del più eloquente de' padri il Grisostomo, e gastigati i leziosi ornamenti, schifati i palesi artifizj, estirpati gli abusi delle scienze, non dialettici gelidi e scarni, non poliglotti senza bisogno, non satirici, non declamatori sol provveduti di polmoni e di braccia, ma oratori caldi, robusti ragionanti, nell'intimo animo penetrati essi, però altrui persuadenti, cristiani veramente, il petto pieni e la lingua delle divine Scritture, favelleran degnamente e utilmente di Dio all'uomo, e per essi la letteratura fatta stromento egregio della grazia superna, chiamerà sempre il buon gusto in soccorso del buon costume.

Poeta pensatore, l'abate *Mascheroni* era destinato a presentare all'Europa il non comune spettacolo delle lettere amene e delle geometriche scienze nella stessa persona e in eminente grado associate. Si aman gli è vero intrinsecamente e si cercano queste lettere e queste scienze, si commutano i loro pregi, e unite fioriscono più lietamente, ma però troppa esigono diversità di talenti perchè la natura, de' suoi doni economa dispensatrice, voglia frequentemente a man piene versarli sopra di un solo. Quindi fra i nostri lode ottenner grandissima i Manfredi, i Torelli, i Fracastori, i Zanotti, rari ed eletti spiriti, severi insieme e dilicati, proprj perciò egualmente a notomizzare gli obbietti e ad ornarli, a conoscere ed a sentire. *Mascheroni* il doppio dono ebbe quanto altri, e l'attitudine scientifica manifestò in modo forse più rapido e più mirabil degli altri. Imperocchè indugiato avendo egli fin verso l'anno trigesimo ad applicar seriamente alle filosofiche discipline lo ingegno, dopo due anni cambia la cattedra di eloquenza in quella di fisica e matematica, educa degni figli alla sapienza ed alla patria, e nei recessi inoltrato dell'alta analisi, indi esce al pubblico originale spirito ed inventore.

Provossi dapprima sulla forza inclinatrice dell'ago nautico, su quella forza che variabile al variar de' paesi, de' tempi, della comunicata all'ago virtù magnetica, ben potè liberarsi dalle misure di Muschenbroek, da quelle del nuovo nostro Geometra non potè. Una succosa memoria da esso letta all'Accademia degli Eccitati il dì 19 agosto 1781, e il seguente anno stampata, ci offre la invenzione di certa bilancia semplice ed ingegnosa, agli ordinarj usi della vita eziandio convertibile, per cui i differenti gradi della forza in quistione esattamente si estimano e per linee rette si rappresentano, che divengon poi ordinate di una curva trascendente, della quale l'Autor determina la equazion, le tangenti, il flesso contrario, la quadratura, e in cui discuopre una curiosa analogia colla Concoide di Nicomede, o, pigliando ordinate alle prime proporzionali, colla Curva di Equilibrazione del marchese de l'Hôpital, o colla Cicloide che Giovanni Bernoulli ideò; facendo un cerchio rivolgere sulla periferìa di un altro eguale.

L'anno 1785 comparvero le *Nuove Ricerche sull'Equilibrio delle Volte*. Ricerche nuove davvero, l'Autor di esse trovato avendo tutt'altro che esausta quella materia benchè risguardante sì davvicino la umana società, e da' Geometri maneggiata di chiarissimo nome tanto esteri che nazionali. Niun, ch' io mi sappia, insegnato avea per ancora il modo più naturale e diretto di ottenere la total sicurezza di un arco solido; il modo cioè di far passare la curva di equilibrio pei centri di gravità dell'arco stesso; niuno avvertito avea il pericolo di caduta in cui spesso l'arco ritrovasi quando nella interna concavità di lui, il che per tutti facevano e sempre, la detta curva si collochi di equilibrio, molto meno poi determinate si eran le curve che a simil rischio non lasciano luogo. Le Volte piane, che piattabande si chiamano; la grossezza conveniente alle cupole; l'equazion loro ove sien cariche, o in tutto o in parte; le cupole sopra basi piantate ovali o poligone di cui fa uso continuo l'Architettura; le annulari Volte e le spirali ascendenti, queste nelle scale a chiocciola adoperate, quelle nei portici circolari; le Volte composte a crociera ed a schifo; oggetti eran pur tutti questi niente o pochissimo sparsi di matematica luce, e però abbandonati ad una pratica cieca e di ruinose incertezze naturalmente feconda. Rimaneva eziandio a ricercarsi una cotal forma di Volte piane che circolarmente loro spinta distribuendo forza esercitasser di cupole, nè troppo di un solo verso urtasser la fabbrica. Un libro ricco di tante cose per la prima volta magistralmente trattate, e in cui oltracciò s' investigavan le curve di equilibrio a gravità convergenti, e da esse, come altrettanti corollarj, i problemi traevansi relativi ad archi o a cupole portanti carico di fluidi elastici o non elastici, omogenei od eterogenei, e la curva elastica e la lintearia; un libro in cui di error si notavano Frisi e Bouguer, in cui sciolto mostravasi a Dalembert un meccanico problema ch' ei sospettò non solubile coi noti principj, il problema, cioè, della posizione, che ad equilibrarsi dee prender una verga pesante rettilinea, o comunque curvilinea liberalmente scorrevole lunghesso un filo non grave e pendulo da ambe l' estremità; un libro in cui si ammiravano scienza di calcolo, sottilità di artificj, eleganza di metodi, sicuro e nobile andamento di trattazione; un libro, io dico, di tal natura ben poteva egli gloriarsi di riconoscere per autore qualsiasi più antico sacerdote di Urania, non che *Lorenzo Mascheroni* Geometra di pochi giorni. Levò quindi cotesto libro alto il grido e dentro e fuori d'Italia, e l'Autore posto si vide infatti a lato dei Geometri primi, poichè, avendo il chiarissimo Paoli lasciata libera una cattedra di Matematica nella grande Università di Pavia, fu *Mascheroni* ad occuparla onorevolmente chiamato.

All' improvviso ricevere di tal notizia dubbio ei si rimase e agitato, pur finalmente facendo forza al suo cuore si condusse a dividersi da una patria, che, non so come, parea da qualche tempo non sentire a bastanza il rischio di perderla. Di ciò ebbe certo a maravigliarsi Pavia quando specialmente ad udir prese le Mascheroniane lezioni. Forse, nella odierna scientifica sublimità, il loro

obbjetto, gli elementi dell'Algebra e della Geometria, sembrerà cosa un po' tenue; tenue cosa però non dovrà mai sembrarne l' insegnamento, che pur domanda, a riuscire ottimo, e pronta flessibilità d' ingegno, e non ordinaria amplitudine di dottrina, e nettezza somma di idee di raziocinj, di metodo di elocuzione, e, a dir tutto, decorosa urbanità di maniere e calma imperturbabile di animo, talchè i professori in ogni senso perfetti, anco di elementar Matematica, hanno eguale diritto e alla pubblica riconoscenza ed alla pubblica ammirazione.

Contuttociò poco fu sempre al professor *Mascheroni* il rischiarare gli aditi della scienza, se al tempo stesso non rivolgea l'efficacia delle sue forze ad aumentarne la mole. Immensamente già questa mole grandeggiava e stendevasi in quell'opera maravigliosa di Leonardo Eulero, che tutte le teorie comprendendo allor cognite sui calcoli dell' infinito, formava il corpo più vasto e sublime di algebraica dottrina, che vantar sapesse fino a quell'epoca lo spirito umano. Questo così imponente edificio *Mascheroni* accrebbe ed elevò. I due scritti a tale intendimento composti da esso lui e pubblicati, anzichè *Adnotationes ad Calculum Integralem Euleri*, siccome per laudabile verecondia amò chiamarli, sono a dirsi uno aggregamento di brevi ma profonde memorie, quali indirette a più compiutamente disviluppar varie formole, quali a scioglier dure quistioni dal grande Eulero semplicemente proposte. Che se condotto l' Italo nostro Geometra a rimuovere certa difficoltà due volte, e invano, recata in mezzo per Dalembert, sebbene con desterità molta vi si provasse, pur fallì il colpo, e alla industria il lasciò più felice del valente professor Gratognini, qual altra cosa potrem dedurne fuor quella di che già la mortal condizione ci avvisa, lo scienziato, comechè sommo, non esser uno coll'infallibile? E tanto è lungi dal vacillare e scolorarsi in su la fronte di *Mascheroni* lo scientifico alloro, che anzi, per la ingenua confessione che del suo torto egli fece, si rassoda e rinverde, perchè, se gli uomini errano, i grandi uomini consentono avere errato. Del rimanente, e la chiusa indole penetrata di una funzion logaritmica di nuovo genere, e la necessità dimostrata di porre nelle integrazioni logaritmiche il doppio segno positivo e negativo, e lo integrale assegnato di formule trascendenti atte a gravi ricerche non tocche mai per lo addietro, e l'applicazione appunto indicata di tali formule nello appagare Eulero la sommatoria chiedente almen prossima di due equazioni che involgon seni e coseni d'arco infinito, e più altre analitiche sottilità meritan certo agli scritti di cui parliamo e lo studio dei giovani, e la considerazione dei Matematici. Due fra questi e di assai alta sfera, Paoli e Lacroix, già gli additarono a quelli, e Gregorio Fontana non reputò indecoroso lo inserirvi alquante speculazioni del suo possente celebratissimo ingegno.

A tanta serietà e astrazione di algebra si vide bentosto succedere un poemetto. E qual poemetto! L'*Invito di Dafni Orobiano a Lesbia Cidonia*, quel sì gentile invito e sì celebre, che ben è in ira alle Muse chi nol conosce. Ove però io ne scorgessi taluno: tu dunque, io vorrei dirli, tu quello ignori onde piena è tutta Italia, tu figlio

suo con essa non dividesti l'ammirazione e il diletto, tu non udisti come per bocca di *Mascheroni* parlin le grazie filosofia? Che figurar volendo con voce di carmi, e quadrupedi e pesci e augelli e piante e marmi e metalli, e quanto di più bello e osservabil presenta l'insubre Atene onde trar Lesbia a colà pascerne il dotto sguardo, ebbero or piucchè mai a consigliarsi insieme e le Grazie e le Muse in colorir di sì morbida e dilicata espressione l'esatte forme, e in temperar variamente il suon del verso giusta il variar degli obbjetti, e in aggrupparne tanti e accortamente locarli, e in breve tela, quasi per magic'opra, adunarti l'immenso aspetto della natura. Dessa non mai si vide rivestire l'antica augusta semplicità di più leggiadri ornamenti. Fin le scarne ossa e i nervi ignudi e le recise viscere e le parti da crudel morbo guaste, e fino i mostri t'allettano. Una soave aura patetica su tutto spargesi, tutto anima, e porta al cuore. Lesbia ti appar sovente dinanzi sempre in sembianti amabili, cinta sempre d'attiche lodi tutta invero effigiata da quelle armoniche grazie a cui un dì nascendo fu aggiunta. Ben ella, siccome il fece, dovea sentirne i dolci inviti, e aderirvi; alle attrattive del lor linguaggio correr doveano avidamente le culte genti; e tu in quale abbandonato angol di terra fin qui vivesti? Or va, chiedi sollecito dell'aureo poema: tre volte impresso forse non deluderà tue ricerche, leggi, e chi sa che indi, al par di Lesbia, vivo desio di visitar non ti prenda . . .

Ma dove amor caldo di vaga poesia, e impetuoso estro mi mena? Lettor gentile, se parlai cose a te note, se per immaginato caro colloquio te un istante obbliai, perdona, e a non dispreggiabil compenso lascia ch'io t'accenni altro libretto elegante, comechè d'indol severa, che uscì ai versi contemporaneo, vuol dir l'anno 1793, e porta in fronte *Problemi per gli Agrimensori con varie soluzioni.* Libretto ch'io accenno con tanto più di confidenza, quantochè porto opinione, non solamente ai misuratori delle campagne che moltiplici modi vi trovan riuniti di prontamente guidarsi nella pratica tutta quanta dall'arte loro, ma eziandio a più altri ordini di persone dovere essere accetto e caro riuscire. I Geografi sotto il nome di *Poligonometria*, riprodotta veggendovi quella maniera già nel 1787 dall'Autore divulgata, di valutare senza triangolar divisione gli elementi di qualsiasi piano poligono ad angoli pur rientranti, ce la veggono ancora agli usi di levar ampie carte e di segnar meridiani opportunamente applicata. I Geometri speculativi estesa contemplano cotesta bella teorìa sino alla general cubatura di tutti i solidi a facce piane; i giovani veracemente studiosi vi trovan comodo e largo il campo di esercitare e così affinar l'intelletto, le dimostrazioni cercando dei risultamenti ommesse appunto a tal fine: e non aman forse quest'operetta gli uomini generosi e sensibili, che su di una Poligonometria da straniero Geometra pubblicata due anni dopo la Mascheroniana, a questa sostanzialmente identica, nè però facientene motto (il che trasse Montucla in errore) non vi leggono se non parole temperatissime, e anzi degli accessorj suoi pregi candide encomiatrici? Caro adunque a molti, e già rapidamente diffuso, quest'util libretto che sotto picciol volume tanta e tanta nobil sostanza, siccome oro, racchiude, acclamato vivrà finchè ci vivano lode d'ingegno, desiderio di scienza, amor di virtù.

L'anzidetta Mascheroniana Poligonometria ci obbliga invero a cercar di continuo seni e coseni, ma l'Autor ne ideò delle tavole molto spedite: un quadrante che, di semplicissima costruzione, pur angolo seno e coseno nell'atto stesso disvela Questo ritrovamento un altro men richiama a quadranti relativo, di nobiltà e di fama assai maggiore. Relativo io dico ai quadranti astronomici, a quegli strumenti della celeste fisica sì benemeriti, che intesi nella lor picciolezza a misurar l'universo ben si vede quanto abbisognin di esquisitissima graduazione. Per così, con più certezza ottenerla, egregiamente avvisarono i due celebri inglesi Graham e Bird di rifiutare, in operando, la riga siccome scorta o per sè ingannevole o troppo a seguirsi difficile, e il solo e più fido servigio ammettere del compasso. Ma che? Quella stessa Geometria che spirò loro l'avveduto consiglio, diffinito appena ebbe l'arco al grado sessagesimo rispondente, parve, perduto il regolo, perdere a un tratto lo ingegno, e que' grandi artisti lasciò alla possibil fallacia di non suoi metodi, e alla molestia perpetua dei tentativi. Oggi niuno avrà più che temere di consimili infedeltà. Venuta è in aperta luce la *Geometria del Compasso di Lorenzo Mascheroni.* Per lei ammaestrasi questo compasso a determinar tutto solo tre punti fuor della periferia, e col semplice loro soccorso a speditamente in precisi archi dividerla, ciascuno di un grado e mezzo, e in gradi poi e in quarti di gradi, senza una sesta parte aberrar di minuto secondo, ed in minuti ancora senza fallire di un secondo, approssimazioni limitrofe tanto alla rigorosa esattezza che nemmeno i divisori più oculati valsero a superarle. La Geometria del compasso le superò, allorquando rivoltosi a quella recentissima e celebratissima division del quadrante in cento parti, e di queste in cento altre, e così sempre, per modo effettuolla, che i seguenti gradi e minuti non differiscan pure di un secondo centesimale dai veri.

Occupato l'Autor nostro nella ricerca di questi metodi, tutta quanta la elementare geometria vide ridursi all'unico postulato: *da un punto e con un raggio qualunque descrivere una periferìa.* Vide, cioè, come per intersezioni mutue di archi poteansi tutti que' punti determinare, dai quali la situazion pende e la lunghezza delle rette ad ogni problema necessarie. Nè sol vide; operò, e nel suo libro molte con tale sistema sciogliendo, tutte mostrando esattamente solubili l'elementari quistioni geometriche, e la soluzione affatto prossima aggiugnendovene di alcune altre, che a trattazion rigorosa il sottil magistero esigon di curve del cerchio diverse, mostrò quanto acconciamente e insieme quanto semplicemente avesse egli nominato cotesto suo libro *Geometria del Compasso.* Fu questa Geometria accolta con pubblico plauso, onorata di una assai bella ed encomiastica analisi dal celebre Storico delle Matematiche, e fin vezzeggiata dalle rare lusinghe di una traduzione francese, Ciò tutto a ragione, perchè geometrìa a più

arti utilissima e decorosa alla scienza; geometrìa nella costruzione de' suoi problemi, non solo più elementar sempre della Euclidea, ma, il che potrà sembrare maraviglioso, spesso più breve, geometrìa infine che dei fiori più gentili della eleganza orna le ricchezze maggiori della invenzione.

E tal vocabolo *invenzione* non dubitai già io di applicare all'opera tutta quanta, benchè mi sapessi esserci al mondo quest' altra. *Resolutio omnium Euclidis Problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum una tantummodo Circini data apertura per Joannem Baptistam de Benedictis inventa. Venetiis* MDLIII. *Apud Bartholomaeum Cesanum.* Sia pure un ingannato Montucla se da questa il regolo non reputa escluso, e sia quindi comune a entrambi le opere d'intima essenza. Ma nella forma, nei metodi, nella intenzione quanta disparità! Diverso affatto da quello del Benedetti si è l'ordine del nostro Autore. Egli l'altro mai non imita in tenere aperto invariabilmente il Compasso, egli più assai dell'altro in là stende le applicazioni e le idee, e dove il primo contempla unicamente la teorìa, alla pratica singolarmente riguarda il secondo. Può dunque dirsi come di quello questi non seppe, ed egli stesso il dice, mentre non sapere di alcuno asserisce, asserzione che, per la dottrina e pel carattere di chi pronunziolla, sè difende appieno da ogni sospetto di falsità, a lui da ogni taccia di impostura e di plagio. *Mascheroni*, uom grande, modesto italiano era nato a patirli i plagj, non a commetterli.

Alquanti versi di stile grandioso dirigono la geometria del Compasso a Bonaparte l'italico. Questo maraviglioso conquistatore, che ci mostra, sic-come già Federico, un dotto in sedia regale, e tutto il prezzo sentì dell'offerta, e tutto previde l'ingegno dell'offerente. E però ai doni eletti di che onorollo, quel vi aggiunse elettissimo della sua familiarità. Chiaramente quindi scorgendo nel Geometra l'uomo ancora di stato, questo ai pubblici affari chiamò. Della qual cosa poteron bensì le scienze alquanto dolersi, ma in quella vece molto rallegrossene la umanità che vide ad util suo volgersi due grandi e rare virtù, beneficenza e disinteresse. Ma non le fu conceduto di lungamente gustarne per opera di *Mascheroni* i dolci frutti. Imperocchè, recatosi egli indi a poco a diffinire in Parigi coi più celebri scienziati europei la lunghezza ed il peso, fondamenti del gallico sistema decimal di misure, ivi, compiuto l'importante lavoro, inaspettatamente morì l'anno 1800, della età sua cinquantesimo.

La Società Italiana delle Scienze ebbe a rimanere amareggiata forse più che tutt'altri di tanta perdita. Perdita che per le Lettere e per le ottime discipline già di troppo sollecita, era poi affatto per lei immatura; per lei che accolto da qualche tempo nel suo grembo l'abate *Mascheroni*, non si ornava per anco di veruna sua produzione, e che pur potea ripromettersi dalla felice freschezza di quell'ingegno ogni maniera d'illustramento. Un lavoro di lui, che postumo le fu dato, non valse, per la beltà sua medesima, che ad irritarne le brame ed a rincrudirne il dolore. Tutti, anche i men dotti, posson, veggendolo, giudicarne. È una *Spiegazione popolare della maniera colla quale si*

regola l'anno sestile o intercalare, ed il cominciamento dell'anno repubblicano. La opportunità astronomica, cronologica, storica, commerciale di prender *generalmente* lo incominciamento dell'anno da uno stesso punto di cielo; la preferenza a tal fine meritata dall'equinozio, siccome quello che in tutto il globo ad egualità riconduce i dì e le notti, e la ragione astronomica per cui dee l'equinozio di ariete cedere il campo a quel di libra; l'assoluta necessità, ove convengono i diversi popoli in ricevere uno stesso anno, di convenire eziandio nella scelta di uno identico meridiano che ne stabilisca esso pure il principio; i caratteri che nella intera mancanza di motivi astronomici, o geografico-fisici hanno a determinare quella scelta, caratteri che vanno tutti a riunirsi nel meridian di Parigi; la intercalazione dell'anno sestile o di 366 giorni ora ad ogni quarto ed ora ad ogni quinto anno comune; tutto ciò vi è esposto, svolto, illuminato con quella evidenza e venustà con cui nei volumi dell'Accademia delle Scienze avrebbe resa Fontenelle adorna e palpabile l'astratta teorìa.

Oltre di cotesta memoria ci lasciò l'Autore su temi curiosi, utili, sublimi una folla di manoscritti. E alla Matematica non più che vent'anni egli visse, occupato sempre in pubblico servigio, sempre magistrali opere divulgando, ed alte e solenni scoperte. Ma il tempo fa gli eruditi, il genio i filosofi, e d'altronde mai di tempo non iscarseggia chi non lo perde. E come perduto lo avrebbe quel *Mascheroni* che i viaggi ancora autunnali, conforto alle scolastiche fatiche dell'intero anno, e fine comun di diletto, sapeva intender pure ad utilità? Testimonj quell'autunno ch'egli tutto ad inerpicarsi impiegò su per le vette della natia provincia inteso a levar di questa una esattissima carta, e quell'altro di che in Bergamo usò a procurar la caduta dall'alto di un grave metallico, onde vedere se deviando esso, per comunicata forza centrifuga, dal meridiano volea esserci della rotazione terrestre nuovo argomento. E per la incostanza di sue risposte mal soddisfatto di questo grave, già interrogarlo pensava in un terzo autunno più accortamente, se non che venner l'armi e la politica per cui fu il Geometra nostro di gravità e di fisica men sollecito.

Nè men degli studj ebbe cari gli amici, fra i quali per cagione di onore quel Bartolomeo Borda nominerò, quel Borda che rapidamente da lui conosciuto, amato e perduto, pianse egli con latina elegìa degna riputata del secol di Augusto. Nobile ed ufficioso, arguto e piacevole era l'abate *Mascheroni*, cerco nelle splendide, gradito nelle domestiche conversazioni, e raro le lodi udii del suo ingegno senza le lodi udir del suo cuore. Quindi non maraviglia se quanto utile, soave altrettanto agli alunni, quelli vide, che avea in Parigi, aggirarsi solleciti ed affannosi d'intorno al letto delle sue pene, e se parecchi di loro con tenera e quasi filiale pietà a quello assisterono della sua morte. Non maraviglia, se questa morte sì rapida e sì funesta fu pianta da molti e da moltissimi deplorata, se i Francesi sentironla egualmente che gli Italiani, se fu dai pubblici fogli annunciata con accenti di estimazion alta e di compassione verso l'estinto. Ma ben dovea egli trombe trovare di

assai più chiare che pubblici fogli non sono. Giambattista Savioli dotto Barnabita ne stese colle più diligenti cure dell'amicizia copiose memorie, mie compagne e guide in tutto il corso di questo elogio. Gregorio Fontana ne' preziosi volumi di questa Società, dell'Autor nostro parlando, uomo il dice di conosciuta sagacità. E Vincenzo Monti che per sè solo basterebbe ad illuminare per tutte le età il merito più sconosciuto, Vincenzo Monti a quello onorare di *Lorenzo Mascheroni* tutta quella sua energia dispiegò di eloquenza e di canto. Distanza di tempi vietollo: spettava a Dante il celebrar Galileo.

PREFAZIONE

Le fisiche facoltà di qualunque genere elleno sieno, a parere de' saggi, per cotal modo vanno trattate qualora giugner si voglia a conclusioni esatte, e conformi alla condizion delle cose, che la teoría desuma le sue supposizioni, e nasca per così dire dalla pratica; nè la pratica si avventuri giammai senza i lumi, e i fondamenti della teoría. Il qual mutuo vincolo tra questi due mezzi a noi conceduti dal nostro divino Autore a conoscer le cose, benchè egli sia talmente stretto, e necessario, che chi ad un solo di essi si affida, venga per lo più a cadere in errori gravissimi e sommamente dannosi, tuttavia non si dee credere che di entrambi ci dobbiamo sempre per egual maniera servire. Di fatti a ben considerare i varj oggetti contemplati sì dalla Statica, che dalla Meccanica, in quanto sono arti dirette all'uso, e la complicazione delle moltiplici circostanze, che alterando lo stato della questione fanno che la sola speculazione riesca a decisioni lontanissime dall'esperienza, facilmente si vede dovere la teorica aver predominio nella Statica; siccome per lo contrario dovere la pratica essere consultata a preferenza nella Meccanica. Questa seconda procurando il moto trova gl' intoppi nelle resistenze de' mezzi, nelle asprezze delle superficie, nelle tenacità, ed attrazioni varie delle materie, il qual genere di circostanze non è così facile di perfettamente rilevare per via di principj, e molto meno di assoggettare alla precisione del calcolo. Ma dovendosi pure ad esse avere tutto il riguardo da chi desidera conseguire l'effetto dei suoi tentativi, quindi è avvenuto che Geometri anche sommi han fatto precedere diligentissime, e per più capi diversificate prove di fatto, dalle quali

raccoglier potessero qualche legge da tenersi poi nel luogo d'un principio nella risoluzion de' Problemi. Al contrario la Statica cercando d'introdurre in varj aggregati di corpi equilibrio e quiete trova ajuto al suo scopo in quelle medesime cose che contrastano colla Meccanica; sicchè qualora essa abbia colla scorta della Geometria trovato il sito, e la distribuzione di quelle materie, che deggiono star ferme, non può per conto delle circostanze annoverate di sopra se non istarsene più sicura. Quindi è che non deve sembrare che operi fuor di proposito, chi della fermezza degli archi e delle cupole si mette a trattare in una maniera quasi semplicemente teorica. Posto che un arco o una volta di qualsivoglia genere, costrutta sia in guisa, che per la sua figura e forma, attese le leggi di gravità, le varie parti delle materie che la compongono aver debbano fra loro equilibrio, per parte degli sfregamenti e delle malte sarà tanto più allontanato il pericolo della caduta. Egli è ben vero, che per ottenere questa sicurezza conviene che la volta di cui si tratta o conservi questa forma opportuna all'equilibrio data a lei nella costruzione, o venga nel suo rassettamento che segue nello storcimento delle centine, e nello schiacciamento delle malte ad acquistarla. Per altro gli stessi scrittori pratici d'Architettura vengono continuamente a confessare colle parole, ed a provare col fatto la necessità di simili teoríe. L'autore delle Vite de' più celebri Architetti (*) stampate in Roma non ha

(*) La più lunga pratica senza teorìa non è sufficiente alla giusta costruzion delle Volte. Un vecchio pratico in questa materia è un vecchio ignorante soggetto ad ingannarsi per poco, che i casi variano. Ed in questa faccenda i casi variano all'infinito; onde i ragionamenti che il pratico trae dalle opere eseguite, sono fallaci. Quarantasei anni di pratica senza teorìa non poterono istruir l'architetto, che nel 1732 in una città di frontiera della Francia dovette far un magazzino a polvere, e non avendo dato a i piè dritti la grossezza conveniente, quell'edificio precipitò prima di essere disarmato (*Vite de' più celebri Architetti.* Roma, 1768. Appendice sopra il *Meccanismo delle Volte*, Parte II, Capitolo I).

molto, nell'Appendice che vi aggiunge, poichè si è studiato con M. *Frezer* di porre gli artefici in diffidenza della sola pratica nel voltare le fabbriche, non attenendosi poi egli stesso a quella teorica che raccomanda, assegna regole diffettose per le grossezze degli archi circolari, per le cupole, per le volte a crociera, ecc. lontane da quello che sopra alcuni di questi punti hanno insegnato Geometri di chiarissima fama di qua e di là dall'Alpi. I nomi di molti di questi autori si leggono unitamente ad una breve e distinta notizia de' loro scritti in fronte d'una eccellente Memoria sopra le Volte del celebre abate *Bossut* nel volume dell'Accademia di Parigi, che appartiene all'anno 1774. Due anni dopo il medesimo Geometra francese dedusse dalla sua bellissima equazione generale l'equazione per le cupole, e molte altre cose esaminò sopra la loro fermezza. Dopo lui il chiarissimo Cav. *Lorgna* ha pubblicato ne' Commentarj di Pietroburgo nel 1779 una nuova teoría delle curve che alle Volte appartengono; e sulla stessa materia sciolse molti eleganti ed utili Problemi nel primo tomo de' suoi Saggi di Meccanica e Statica, stampato in Verona nel 1782. Un capitolo pure *de Fornicum vi, et firmitate* inserì il celebre *Frisi* nel secondo tomo delle sue opere, le quali dopo l'immatura morte di questo grand'uomo dai chiarissimi suoi fratelli si vanno terminando di pubblicare. Pieno di rispetto per questi illustri scrittori che mi hanno preceduto ed istruito, io rifletteva non ostante che molte cose ancora restavano da ricercare. Nissuno di loro aveva insegnato la maniera di far passare la curva dell'equilibrio per i centri di gravità degli elementi d'un arco solido, maniera per altro la più diretta e naturale per ottenere la total sicurezza dell'arco medesimo. Tutti avevano posta questa curva nella concavità interna dell'arco, che *intrados* da' Francesi si suole con proprio vocabolo nominare. Essi non han fatto avvertire il pericolo della caduta dell'arco,

che con un tale metodo di procedere molte volte s'incorre; molto meno determinarono quelle curve, che non lasciano mai l'arco esposto a simil pericolo. Trattò M. *Couplet* la materia delle Volte piane, che piattabande si chiamano; ma non ne diede una teoría generale, e nello stesso caso particolare nel quale s'impiega il cerchio per determinare le convergenze de' tagli delle pietre, non fissò alcun limite alla lunghezza delle piattabande, dal che ne segue manifesto rischio di rovina. Io non so se altri abbiano esaminato il Problema delle cupole come M. *Bouger* e l'abate *Bossut*. Il primo assegnò un metodo per le loro grossezze che non può ammettersi; il secondo lascia il desiderio che l'avesse assegnato. Poichè se noi esaminiamo i bisogni della pratica egli è certo, che non basta fissare la curvatura d'una cupola, siccome nemmeno di qualunque specie di volta che si voglia costruire; ma bisogna cercare se mai le competesse grossezza costante, come aveva voluto supporre M. *Bouger*, c sarebbe sommo vantaggio; e se no: qual dunque debba essere la gradazione colla quale accrescere o diminuire nelle varie parti della cupola la grossezza medesima. E non si può già in tale proposito impiegare lo stesso metodo, che si usa cogli archi, e colle volte a botte, che i Francesi chiamano *en berceau*, nelle quali gli elementi solidi cuneiformi hanno due sole tra le facce opposte che sieno convergenti fra loro; dove al contrario negli elementi dell' unghia d'una cupola convergono tutte quattro. Delle cupole caricate nissun matematico, ch'io mi sappia, ancor ha data veruna equazione o sieno esse caricate nella cima da cupolini o altro, o sieno caricate sul dosso da qualche corona di pesi, o finalmente vengano a portare un continuo carico sopra tutta la lor superficie. Si poteva pure indagare il metodo di costruire una nuova forma di piattabande, che esercitando una spinta in circolo d'attorno ad un centro, avesser forza di cupole.

Potrebbero queste esser utili al caso, che si volesse distribuire la spinta per non urtar troppo l'edifizio per un sol verso. Oltre a ciò meritavano riflessione le cupole piantate sopra basi poligone ed ovali facendone d'esse un uso continuo l'Architettura. Restavano parimente senza teoría le volte annulari e spirali rampanti, che nei portici circolari e nelle scale a chiocciola sogliono adoperarsi. Ma quello che più richiedeva l'esame geometrico si erano gli archi e le volte composte, le quali in varie maniere, e in luoghi assai vasti, e però con maggiore pericolo, si sogliono dagli architetti eseguire. Due sono le specie di queste volte, altre sono a crociera, ed altre a schifo; le une sono, a ben considerarle, i complementi delle altre, essendo composte di que' segmenti che restano addietro nella composizione delle loro contrarie, ed entrambe sotto un contrario aspetto debbono considerarsi; atteso che le volte a schifo esercitano la loro spinta su i lati, dove al contrario le volte a crociera urtano gli angoli. Ecco gli oggetti intorno ai quali io ho impiegate le mie ricerche. Qualunque altro di me più abile avrebbe e penetrata più addentro la materia, e l'avrebbe collocata in miglior lume. Io supplico il pubblico a sapermi grado almeno della buona volontà di non essere inutile.

NUOVE RICERCHE SULL' EQUILIBRIO DELLE VOLTE

CAPO I.

Dell' Equilibrio de' Rettilinei.

Considerandosi le curve dai Matematici come poligoni d'infiniti lati, ordin vuole, che prima che noi venghiamo a trattare delle curve che servono all'equilibrio delle Volte, premettiamo alcuni Problemi sull' equilibrio de' rettilinei. Questi potrebbero ancora servire per la costruzione dei tetti e dei ponti di legno, e delle centine medesime coll' ajuto delle quali si costruiscono gli archi e le Volte. Ma sopra una tal materia si devono leggere l'eccellenti regole, che dà il celebre Geometra di Verona ne' suoi Saggi di Meccanica e Statica, dei quali il Pubblico sta con desiderio attendendo la continuazione. Se noi qui esponghiamo alcuni Problemi simili ai suoi, lo facciamo per l'integrità del Trattato, e procurando di usare delle nuove dimostrazioni.

Nascendo l'equilibrio dalla eguaglianza delle forze, noi verremo a considerare il rapporto che possono avere tra loro due forze contrarie facendo seguire per supposizione il moto di due centri di gravità per due linee infinitesime da una parte e dall'altra; l'uno de' quali due moti sia effetto dell'altro. Noi prendiamo il moto in una linea infinitesima, perchè in questa supposizione il moto segue con velocità uniforme per tutta la linea, il che è necessario per calcolare la quantità del moto. In oltre questa supposizione è necessaria per ogni caso, nel quale il centro di gravità di un corpo movendosi muti continuamente direzione.

Per gravità relativa intendiamo la gravità che spinge un corpo sulla direzione di un piano inclinato all'orizzonte, non attesa la sua massa; se questa gravità si consideri insieme colla massa, nella quale agisce, questo prodotto si chiamerà peso relativo.

TEOREMA I.

Se il peso B (*Fig.* I) *si porti in* b *sopra un piano inclinato all'orizzonte per lo spazio infinitesimo* Bb, *e nello stesso tempo per costruzione di macchina il peso* A *si porti in* a *sopra un altro piano inclinato* Aa, *e se si tirino le orizzontali* aH, bh, *e le perpendicolari* AH, Bh; *sarà la forza del peso* A *alla forza del peso* B *in ragion composta del peso* A *al peso* B, *e del viaggio perpendicolare* AH *al viaggio perpendicolare* Bh.

DIMOSTRAZIONE.

La gravità relativa del peso A per il piano inclinato Aa sarà $= \frac{AH}{Aa}$; quella del peso B per il piano Bb sarà $= \frac{Bh}{Bb}$; e moltiplicando il peso relativo di $A = A.\frac{AH}{Aa}$ per la sua velocità rappresentata dalla Aa si avrà $A.AH$ per la sua forza; così pure moltiplicando il peso relativo di B $= B\frac{Bb}{Bh}$ per la sua velocità rappresentata dalla Bb, si avrà $B.Bh$ per la sua forza.

TEOREMA II.

Quando le forze contrarie in A *e* B (*Fig.* I) *sono eguali, il loro centro comune di gravità* C *non discende.*

DIMOSTRAZIONE.

Se il peso A si porti in a all'altezza perpendicolare AH nel tempo, che il peso B si porta in b colla discesa perpendicolare Bh; essendo le forze eguali, sarà $A.AH = B.Bh$;

$AH : Bh = B : A = AC : BC$. Ed essendo l'angolo $HAC = CBh$, se si tireranno le due linee HC, Ch, si avranno due triangoli simili HAC, CBh, e le due HC, Ch faranno una sola retta, e sarà $B : A = HC : Ch$.

Ma se si tiri la linea ab, e in essa il centro di gravità de' due pesi venuti in a e b sia in K; sarà parimente $B : A = aK : bK$.

Dunque sarà $HC : hC = aK : bK$; per conseguenza le linee AH, CK, bh saranno parallele ed orizzontali.

Inversamente si può dimostrare, che quando il centro comune di gravità non discende, le forze contrarie sono eguali.

TEOREMA III.

Se una linea retta fa un moto infinitamente piccolo qualunque, tutti i punti di essa linea fanno un viaggio eguale sulla direzione della medesima linea.

DIMOSTRAZIONE.

Sia la QM (*Fig.* 2), che si porta in qm tagliando la prima posizione nel punto H, e sia la Qq infinitamente piccola; si tiri la qa perpendicolare a QM. Da un altro punto G, che siasi portato in g si tiri la Gg, e la ge perpendicolare alla medesima QM; sarà $Hg = He$; $Hq = Ha$; dunque $gq = ea$. Ma $gq = GQ$. Dunque $ea = GQ$, e per conseguenza $eG = aQ$. Ciò sarà vero ancora quando il punto H sia lontano all'infinito, cioè quando la linea si muove parallelamente a sè stessa.

PROBLEMA I.

Si supponga in A (*Fig.* 3 *e* 4) *un peso* A, *che debba scorrere per la linea* AD *perpendicolare all'orizzonte, nel tempo che il peso* B *posto all'estremità della verga inflessibile* AB *gira intorno al centro* C *col raggio* BC; *trovare la ragione delle due forze.*

SOLUZIONE.

Si supponga mosso il peso A in a per uno spazio infinitamente piccolo, e che il peso B intanto sia mosso in b. Si descriva il parallelogrammo $bBAV$. Si tirino le orizzontali CD, BF, bf, e le verticali BE, VR, bp, la quale ultima incontri in p la continuazione della FB, e le An, Am perpendicolari alla VR.

Si avrà $pb = \frac{CE.pB}{BE}$;

il triangolo bVR eguale al triangolo BAF; il triangolo $bpB =$ al triangolo VmA; $pb = Vm$; e per essere $bV = BA = ba$, e per conseguenza retto l'angolo bVa; il triangolo bRV simile al triangolo Vna, il quale per conseguenza sarà simile al triangolo BFA. Dunque $Vn = \frac{BF.pB}{AF}$;

$Aa = \frac{BF.pB}{AF} - \frac{CE.pB}{BE}$; e una forza all'altra come $A.Aa : B.pb = A\left(\frac{BF.BE}{AF.CE} - 1\right) : B$.

COROLLARIO PRIMO.

Nel caso di AF, ovvero $CE = 0$; la forza di A ha una ragione infinita alla forza di B.

COROLLARIO SECONDO.

Quando $AF : BF = BE : CE$; la forza di B ha una ragione infinita alla forza di A.

SCOLIO.

Il caso dell'equilibrio, nel quale

$A\left(\frac{BF.BE}{AF.CE} - 1\right) = B$ si potrebbe dimostrare ancora col metodo de' massimi e minimi. In fatti sia G il centro comune di gravità de' due pesi A e B, e si tiri la Gg orizzontale; sarà

$A + B : A = BA : BG = FA : Fg$;

$$Fg = \frac{A.FA}{A+B};$$

$(A + B)\,DG = (A + B)\,DF + A.FA$.

Ora nel caso dell'equilibrio essendo eguali le forze contrarie, G non potrà discendere (Teor. 2). Se dunque allora G si movesse, camminerebbe orizzontalmente, e sarebbe nulla il differenziale di Dg, e per conseguenza ancora quello di $(A + B)\,Dg$. Dunque allora

$(A + B)\,d.DF - Ad.FA = 0$; esprimendo d la differenza;

$$\frac{A+B}{A} = \frac{d.FA}{d.DF} = \frac{BF.pB}{AF} : \frac{CE.pB}{BE} = \frac{BF.BE}{AF.CE};$$

$$A\left(\frac{BF.BE}{AF.CE} - 1\right) = B.$$

COROLLARIO TERZO.

Data la posizione di BA, e il punto G centro comune di gravità de' due pesi B ed A, se si tira l'orizzontale AX, che incontri la perpendicolare GX in X; congiungendo la XB, la sua continuazione sarà la posizione della BC per l'equilibrio Poichè essendo il triangolo BRX simile al triangolo CEB, e la $XR = AF$; sarà $BR = \frac{CE.AF}{BE}$;

$$RF = XA = BF - \frac{CE.AF}{BE};$$

$$XA : BR = \left(\frac{BF.BE}{AF.CE} - 1\right) : 1.$$

Ma per la somiglianza dei triangoli $XGA : BGR$ è

$$XA : BR = GA : BG = B : A.$$

Sarà dunque $A\left(\frac{BF.BE}{AF.CE} - 1\right) = B.$

COROLLARIO QUARTO.

Potendosi in luogo de' pesi B ed A sostituire un peso in G, ed essendo

$B : A = \left(\frac{BF.BE}{AF.CE} - 1\right) : 1$, e però

$$B + A : B = BF.BE : BF.BE - AF.CE = BA : GA;$$

se in luogo di prendere AF positivo si prendesse negativo in $A'F$ stando tutto il rimanente, allora GA sarebbe maggiore di BA, e G' sarebbe nella continuazione della $A'B$ nella perpendicolare $G'X'$, che passa per il concorso X' della CB colla orizzontale $A'X'$; in luogo del qual peso G' si potrebbero anche sostituire due pesi A e B, che avessero il centro comune di gravità in G'.

PROBLEMA II.

Supposto tutto come nel Problema precedente, se non che i pesi sieno in G *e* Q (*Fig.* 5), *trovare la ragione delle due forze.*

SOLUZIONE.

Intanto che il punto A discende in a, il punto G discenderà in g, e il punto Q ascenderà in q. Si tiri l'orizzontale Qx, la perpendicolare qx; l'orizzontale gy, le perpendicolari GT, QK; sarà $qx = \frac{CQ.bp}{CB}$; $GT = \frac{AF.BG}{Ba}$.

Si tiri la gm perpendicolare sopra la bf; sarà $af = AF - Aa - bp$;

$$gm = \frac{(AF - Aa - bp)\ BG}{BA};$$

$$Gy = GT - gm - pb$$

$$= GT - \frac{AF.BG}{BA} + \frac{Aa.BG}{BA} + \frac{bp.BG}{BA} - bp$$

$$= \frac{Aa.BG}{BA} + \frac{bp.GB}{BA} - bp$$

$$= (\textit{Fig. } 3)\ \frac{Vn.BG}{BA} - bp$$

$$= \frac{BF.BG.pB}{AF.BA} - \frac{CE.pB}{BE};$$

$$qx = \frac{CQ.CE.pB}{CB.BE}$$

$$G.Gy : Q.qx = G\left(\frac{BF.BG}{AF.BA} - \frac{CE}{BE}\right) : Q\ \frac{CQ.CE}{CB.BE}$$

$$= G\left(\frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE}\right) : Q\ \frac{CK}{BE}.$$

Se si rovesciasse la figura come nel Problema precedente, avrebbe luogo la stessa dimostrazione.

COROLLARIO.

Se la verga BA fosse pesante, e parimente se BE, AD fossero verghe pesanti attaccate alla medesima in B ed A, e si cercasse la ragione delle forze contrarie, allora in luogo di prendere G centro di gravità della sola verga BA, bisognerà prenderlo centro di gravità della verga, e insieme de' due pesi BE, AD supposti in B ed A (Teor. 3), e servirà ancora la formola precedente.

SCOLIO.

Se nel caso del problema si volessero considerare le forze contrarie come operanti in A e B, il che gioverebbe nel caso che si volessero aggiunger pesi in que' due punti per confrontar le ragioni, ecco la soluzione per questa supposizione.

Intanto che il punto B si porta in b, il peso Q fa un viaggio perpendicolare $= \frac{CQ.bp}{CB}$. Gli si potrà dunque per il calcolo sostituire in B un peso $= \frac{Q.CQ}{CB}$. Si potrà pure nel luogo del peso in G prendere due pesi in B ed A, che presi insieme eguaglino il peso G, e sia $B : A = GA : BG$. Si avrà dunque in B un peso $= \frac{Q.CQ}{CB} + \frac{G.GA}{BA}$; e in A un peso $= \frac{G.BG}{BA}$; i quai valori sostituiti in luogo di A e di B nella formola del problema primo daranno

$$G\ \frac{BG.BF.BE}{BA.AF.CE} - G\ \frac{BG}{BA} : Q\ \frac{CQ}{CB} + G\ \frac{GA}{BA},$$

e nel caso dell' equilibrio si avrà

$$G\left(\frac{GB.BF}{BA.AF} - \frac{CE}{BE}\right) = Q\ \frac{CQ.CE}{CB.BE} \text{ come sopra.}$$

COROLLARIO SECONDO.

Data dunque la posizione della BA ci potremo servire della costruzione del Corollario III del del Problema I per trovare la posizione della CB per l'equilibrio.

PROBLEMA III.

Intorno A *e* B *(Fig. 6 e 7) girino due verghe* AD, BC *inflessibili e senza peso, connesse tra loro per via d'una terza verga* DC *parimente inflessibile, e senza peso, e sia il tutto snodato in* A, D, C, B *in maniera, che movendosi la* AD *in* Ad *anche la* BC *sia tirata in* Bc *dalla* CD *che si porta in* cd; *trovare il punto* G *dove poter metter un peso senza alterare la posizione delle tre verghe.*

SOLUZIONE.

Si tirino le verticali DE, CF, dT; le orizzontali AF, BF, CV, cK, e tirata la dR parallela ed eguale alla DC, si congiungano le cR, RC, e si tiri la verticale RS; sarà

$AE : ED = dT : DT$; $BF : FC = CK : Kc$.

Si continui la Kc in P, sarà l'angolo Pcd eguale all'angolo VCD per essere Pc parallela a VC, e la posizione di cd infinitamente poco variata dalla posizione di CD; e per essere $cd = CD = Rd$, sarà l'angolo Rcd retto, e per conseguenza l'angolo Pcd complemento di ScR, ed eguale all'angolo cRS, e il triangolo CRS simile al triangolo CDV. Sarà pure il triangolo CuR eguale e simile al triangolo DTd. Sarà dunque la $SR = CK + Td$,

e la $cS = cK - DT$, e sarà $SR = \frac{CV . cS}{DV}$;

$$Td = SR - CK = \frac{CV . cS}{DV} - \frac{BE . cK}{CF}$$

$$= \frac{CV . cS}{DV} - \frac{BF(cS + DT)}{CF}$$

$$= \frac{CV . cS}{DV} \frac{BF . cS}{CF} - \frac{BF . ED . Td}{CF . AE}$$

$$= \frac{CV . CF . AE . cS}{CF . AE . DV + BF . ED . DV} - \frac{BF . AE . cS}{CF . AE + BF . ED};$$

$$CK = \frac{BF . CK}{FC} = \frac{BF(cS + DT)}{FC}$$

$$= \frac{BF . cS}{CF} + \frac{BF . ED . Td}{CF . AE} =$$

$$\frac{BF . cS}{CF} + \frac{BF . ED . CV . CF . cS}{CF^2 . AE . DV + CF . BF . ED . DV} - \frac{BF^2 . ED . cS}{CF^2 . AF + CF . BF . ED};$$

Ora se in D e C si mettessero due pesi così che fosse $D : C = CK : Td$, essendo CK e Td i viaggi perpendicolari, le verghe starebbero in equilibrio. Si avrà dunque istessamente l'equilibrio collocando un peso nel loro centro di gravità, e facendo $CG : GD = CK : Td =$

$$\left(\frac{BF}{CF}+\frac{BF.ED.CV.CF}{CF^2.AE.DV+CF.BF.ED.DV}-\frac{BF^2.ED}{CF^2.AE+CF.BF.}\right)$$

$$\left(\frac{CV.CF.AE}{CF.AE.DV+BF.ED.DV}-\frac{BF.AE}{CF.AE+BF.ED}\right)$$

$$=\frac{BF.ED.CV+BF.AE.DV}{CF.AE.CV-CF.AE.DV}.$$

TEOREMA IV.

Poste in equilibrio le tre verghe, se si continuano le due direzioni AD, BC *sino a che s'incontrino nel punto* X, *la verticale condotta per* X *passerà per il punto* G.

DIMOSTRAZIONE.

Si tiri la DM orizzontale, la XQ verticale, e si continui la FC in M. Essendo il triangolo DHX simile al triangolo AED, e il triangolo XHN simile al triangolo CFB, si potrà nelle ragioni usate nel Problema precedente sostituire alla AE la DH

ED HX

FB HN

CF HX e si avrà

$$CG : GD = \frac{HN.HX.CV+HN.DH.DV}{DH.HX.CV-HN.DH.DV} \dots (A)$$

Ora essendo $MN = \frac{HN.DV}{HX}$; sarà

$$CQ = \frac{HN.DV+HN.HX}{HX};\ QV = DH;$$

$$CV = \frac{HN.DV+HN.HX+DH.HX}{HX}.$$ Sostituendo il valore di CV nella formola (A) si avrà $CG : GD$

$$= \frac{HN^2.DV+HN^2.HX+HN.DH.HX+HN.DH.DV}{HN.DH.HX+DH^2.HX}$$

$$= \frac{HN.DV+HN.HX}{HX} : DH = CQ : QV.$$

Se dunque si tiri la QG sarà parallela alla DV, e però sarà la stessa verticale QX.

PROBLEMA IV.

Se nel filo senza peso ADCB (*Fig.* 8) *pendente da* A *e* B *sia infilzata per la sua lunghezza la verga rettilinea* CD, *che ha il centro di gravità in* G *in maniera che possa liberamente scorrere per il filo medesimo, trovare la posizione della* DC *nel caso dell'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Per l'equilibrio di questa verga è chiaro in primo luogo che si dovrà aver l'equilibrio trovato nel Problema terzo per le tre verghe; perchè quando la verga scorrevole sarà giunta alla posizione cercata, le posizioni de' fili AD, BC saranno tali, che sostituendo loro due verghe rigide snodate in A, D, C, B conservino l'equilibrio nella medesima posizione. Oltre ciò potendo i fili AD, CB accorciarsi, ed allungarsi per lo scorrere della verga DC, la qual condizione non si aveva nelle verghe AD, BC del Problema terzo, bisognerà trovare un caso, nel quale un accorciamento o allungamento infinitesimo non turbi l'equilibrio. Si conducano le Ad, Bc, cd come nel Problema terzo, e si descrivano i triangoli DTd, CKc, e si tirino le DE, CF verticali, e la CV orizzontale. Fatto ciò si supponga, che il filo AD si accorci della quantità $d\delta$ nel venire alla posizione $A\tau$, nella quale il punto τ si trova nella verticale Td; il filo BC sia venuto in $B\kappa$ allungato della quantità $\kappa\omega = d\delta$; sarà $\tau\kappa = CD$. Dal punto τ si tiri la $\tau\mu$ parallela ed eguale alla cd, si congiungano μc, $\mu\kappa$, e si tiri l'orizzontale $\mu\nu$ che incontri la verticale $\nu\kappa$. Essendo $\mu\kappa$ perpendicolare alla $\tau\mu$, sarà il triangolo $\mu\nu\kappa$ simile al triangolo DVC. Sarà pure il triangolo $d\delta\tau$ simile al triangolo DTd, e il triangolo $c\varepsilon\iota$ simile a' due triangoli cKC, $\kappa\omega\iota$. Ciò posto sarà

$$\mu\nu : \nu\kappa = DV : CV$$

$$\varepsilon\iota : \varepsilon c\ (= \mu\nu) = CK : cK = BF : CF$$

$$\varepsilon\iota : \nu\kappa = BF.DV : CF.CV;\ \varepsilon\iota = \frac{BF.DV.\nu\kappa}{CF.CV}$$

$$\kappa\omega : \kappa\iota = cK : cC = CF : BC$$

$$\nu\iota = \mu c = \tau d = \frac{\kappa\omega\,.\,Dd}{TD} = \frac{\kappa\omega\,.\,AD}{DE}$$

$$\nu\kappa = \nu\varepsilon + \varepsilon\iota + \kappa\iota$$

$$= \frac{\kappa\omega\,.\,AD}{DE} + \frac{BF.\,DV.\,\nu\kappa}{CF.CV} + \frac{\kappa\omega\,.\,BC}{CF};$$

$$\frac{CF.CV.\nu\kappa - BF.DV.\nu\kappa}{CF.CV} = \frac{\kappa\omega.AD}{DE} + \frac{\kappa\omega.BC}{CF}$$

$$\nu\kappa = \frac{\kappa\omega\,.\,CF\,.\,CV\,.\,AD + \kappa\omega\,.\,DE\,.\,CV\,.\,BC}{CF\,.\,DE\,.\,CV - BF\,.\,DE\,.\,DV}$$

$$\varepsilon\kappa = \nu\kappa - \tau d = \frac{\kappa\omega.DE.CV.\,BC + \kappa\omega\,.\,BF.DV\,.\,AD}{CF.\,DE.\,CV - BF.\,DE\,.\,DV}$$

Ora essendo $\varepsilon\kappa$ nel caso del presente Problema una diminuzione del viaggio perpendicolare CK, e τd una diminuzione del viaggio perpendicolare Td, per aver l'equilibrio bisognerà che queste diminuzioni sieno proporzionali a' loro intieri, perchè anche i residui viaggi sieno proporzionali. Converrà dunque che sia $CK : Td = \varepsilon\kappa : \tau d$, cioè

$$\frac{BF.ED.CV + DF.AE.DV}{CF.AE.CV - BF.AE.DV} = \frac{DE.CV.BC + BF.DV.AD}{CF.CV.AD - BF.DV.AD}$$

il che non si può ottenere se non nel caso che nelle ragioni adoperate si possa sostituire BC a BF, e AD ad AE, ovvero nel caso che si possa sostituire AD a BC, e AE a BF. Il che porta la somiglianza de' triangoli ADE, BCF, nel qual caso il triangolo AXB sarà isoscele, e diviso per metà dalla XQ. Allora si ha

$$CG : GD = \frac{CF.CV + BF.DV}{CF.CV - BF.DV}.$$

PROBLEMA V.

Se nel filo ADMCB *sia infilzata una verga curva di qualunque curvatura* DMC, *che ha il centro di gravità in* Z *in maniera che possa scorrere liberamente per il filo medesimo; trovare la posizione della* DC *per il caso dell'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Tirata la ZG verticale, e la ZL perpendicolare alla CD, a cagione della gravità, che opera in Z colla direzione GZ, allora si avrà l'equilibrio quando sarà

$$CL - LG : DL + LG = \frac{CF.CV + BF.DV}{CF.CV - BF.DV}$$

in vigore del problema precedente. Ora essendo il triangolo ZLG simile al triangolo CVD, si avrà

$$GL = \frac{ZL.DC}{CV},$$

e per conseguenza

$$\frac{CL.CV - ZL.DV}{DL.DV + ZL.DV} = \frac{CF.CV + BF.DV}{CF.CV - BF.DV}.$$

Così resta sciolto in tutta la sua estensione il Problema, che al sig. *D'Alembert* pareva insolubile co' principj finora noti di Meccanica (Opusc., tom. VIII, pag. 40).

PROBLEMA VI.

Poste tutte le cose come nel Problema III (Fig. 6 e 7) *se non che le verghe sieno pesanti, e abbia la* AD *il centro di gravità in* I, *la* DC *in* W, *e la* CB *in* L; *trovare l'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Intanto che il punto D viene in d, il peso I fa un viaggio perpendicolare $= \frac{AI.Td}{AD}$. Gli si potrà dunque sostituire un peso in $D = \frac{I.AI}{AD}$. Così pure al peso L si potrà sostituire un peso in $C = \frac{L.BL}{BC}$. Si trovi il centro comune di gravità di questi due pesi, e del peso W posto in W il qual centro sia in G. Servirà allora la formola del Problema III.

COROLLARIO.

Caso che si fossero aggiunte anche le verghe DE, CF perpendicolari pesanti, converrebbe allora, che supponendo il loro peso tutto raccolto in D e C si trovasse il centro comune di gravità anche di questi due unitamente a' primi tre pesi; il quale trovato nel punto G, servirà ancora la formola del Problema III.

PROBLEMA VII.

Sieno due piani immobili Dd, Cc (Fig. 6) *inclinati per due dati angoli all'orizzonte, e sia posta sopra essi una verga inflessibile* DC *anch'essa con un dato angolo d'inclinazione all'orizzonte; trovare nella medesima un punto* G, *dove collocando un peso, la verga non possa scorrere su i piani medesimi.*

SOLUZIONE.

Se si tiri sotto il punto più basso C a una distanza arbitraria l'orizzontale AB, e si tirino in oltre tutte le linee, che sono nella figura colla medesima costruzione del Problema III, supponendo che la verga CD con un moto infinitesimo si porti in cd, si troverà servire anche per

il Problema presente la formola del Problema III; cioè sarà

$$CG : GD = \frac{BF(ED.CV + AE.DV)}{AE(CF.CV - BF.DV)}.$$

COROLLARIO PRIMO.

Sarà dunque anche qui il centro G nella perpendicolare XG che passa per il concorso in X delle due perpendicolari a' piani ne' punti D e C.

COROLLARIO SECONDO.

Se fossero eguali gli angoli d'inclinazione dei piani, ed orizzontale la linea CD si avrebbe $CG = GD$.

COROLLARIO TERZO.

Essendo $CG : CD = \frac{BF(ED.CV + AE.DV)}{CV(ED.BF + AE.CF)}$; se la verga CD fosse perpendicolare al piano Cc, sarebbe $BF : CF = CV : DV$; $CG = CD$.

COROLLARIO QUARTO.

Se l'angolo DCc fosse ottuso, il punto G si troverebbe nel prolungamento della CD sopra D.

COROLLARIO QUINTO.

Avendosi istessamente l'equilibrio, se in vece di porre un peso in G si ponessero due pesi in C e D, cosicchè fosse $C : D = GD : GC$, se si accresce il peso C senza accrescere il peso D, il punto C discenderebbe, nel qual caso il centro di gravità sarebbe tra C e G. Dunque il punto C discenderebbe istessamente, se levati i pesi in C e D si mettesse un peso tra C e G, e per la stessa ragione discenderebbe il punto D, se il peso si mettesse tra G e D.

COROLLARIO SESTO.

Nel caso del Corollario IV il punto G sarebbe ancora nella perpendicolare GX che passa per il concorso X delle due AD, BC, se non che X si porterebbe dall'altra parte della DC.

PROBLEMA VIII.

Se la verga AB (Fig. 9), *che in* G *porta il peso* G, *possa colla estremità* A *scorrere la linea perpendicolare* AF, *mentre colla estremità* B *scorre l'orizzontale* BF, *e* BFP *sia una corda che scorrendo sulla carrucola* F *porta un peso* P, *trovare la ragione delle due forze.*

SOLUZIONE.

Il peso G si porti in g intanto che A si porta in a; B si porta in b, e P in p. Sarà $Bb = Pp$. Alle linee ab, Bb si tirino le parallele aV, BV; si tirino le perpendicolari Gn, gm, e la orizzontale gy. Essendo $ba = BA$, anche BV sarà $= BA$, e tirando la AV l'angolo BAV sarà retto. Saranno dunque simili i due triangoli AaV, BFA, e sarà $pP\ (= bB = aV) : aA = AF : BF$;

$$aA = \frac{pP \,.\, BF}{AF}.\ \text{Ora}\ Gn\ \frac{AF \,.\, BG}{BA},\ \text{e}$$

$$gm = \frac{aF \,.\, bg}{ba} = \frac{(AF - aA)\, BG}{BA}.$$

Sarà dunque

$$Gy = Gn - gm = \frac{aA \,.\, BG}{BA} = \frac{pP \,.\, BF \,.\, BG}{AF \,.\, BA},$$

e la ragione de' pesi:

$$P \,.\, Pp : G \,.\, Gy = P : G\ \frac{BF \,.\, BG}{AF \,.\, BA} = P : G\ \frac{Bn}{AF}.$$

COROLLARIO PRIMO.

Sarà dunque la spinta orizzontale della verga AB in $B = C\,\frac{Bn}{AF}$.

COROLLARIO SECONDO.

Se BA sia un trave, che sostiene un tetto, che ha il suo colmo in A, e si supponga il peso del trave rappresentarsi dalla sua lunghezza BA, e il suo centro di gravità alla metà di BA; la sua spinta orizzontale contro il muro in B sarà

$$= \tfrac{1}{2}\, BA\, \frac{BF}{AF};$$

e ritenendo costante la larghezza BF, e alzando il tetto, sarà sempre la spinta orizzontale

$$= \frac{BF}{2.\,\mathrm{sen}.\,ABF}.$$

Crescendo dunque l'angolo ABF calerà la spinta orizzontale come l'aveva già stabilito *Couplet* nelle Memorie dell'Accademia di Parigi, 1731, che non so come sia stato accusato di falsità da un gran geometra (*Frisi*, tom. 2, pag. 42).

COROLLARIO TERZO.

Se il peso G sia in A, sarà la spinta

$$= G\, \frac{BF}{AF}.$$

Ora se ritenendo il punto B si volesse sostituire la verga BP (*Fig.* 10) alla verga BA, e si cercasse in essa un punto G dove collocare il medesimo peso colla medesima spinta che aveva in A sulla verga BA; si tiri la PQ orizzontale, e dal punto Q dove taglia la BA, si tiri la QN verticale. Si avrà il punto G dove questa taglia la BP. Poichè collocandovi il peso si avrà la spinta

$$= G\, \frac{BN}{PF} = G\, \frac{BN}{QN} = G\, \frac{BF}{AF}.$$

Se sia $BN = x$; $NG = y$; $BF = 1$; $AF = a$; sarà $QN = ax = PF$, e per la somiglianza de' triangoli BFP, BNG sarà $a^2 x^2 = y$; sarà dunque la curva de' punti G una parabola Apolloniana.

COROLLARIO QUARTO.

Si può dimostrare che la spinta orizzontale esercitata in A contro l'appoggio AF è eguale alla spinta orizzontale in B. Poichè se si suppone che la verga AB non possa muoversi dal punto B, ma possa girare intorno ad esso portandosi dalla posizione BA alla BV; sia AF' una corda orizzontale, che passando sulla carrucola F' porti un peso P'; nel moto infinitesimo del punto A in V si sarà portato il peso G in q, e per la costruzione della figura essendo $GA = ga$

$= qV$; sarà $aVqg$ un parallelogrammo, e qg orizzontale, e Gy la discesa perpendicolare del punto G. Sarà pure $F'A = F'x$, e per conseguenza $P'p' = Vx = Va = Bb = Pp$.

COROLLARIO QUINTO.

Se sulla AB fossero due pesi in Q e T, tirate le due perpendicolari QN, TR, sarà la spinta di questa verga

$$= T\frac{BR}{AD} + Q\frac{BN}{AD},$$

e però anche nella *Fig.* 5 abbassate le due perpendicolari QK, GV sarà la spinta delle due verghe CB, BA poste in equilibrio

$$\frac{Q.CK + G.CV}{AD}.$$

PROBLEMA IX.

Data l'orizzontale costante CD (Fig. 5), *trovare una posizione delle due verghe* CB, BA, *che portino i pesi* Q *e* G, *cosicchè saldate fra loro fermamente coll'angolo* CBA, *e prese come un corpo solo, che col punto* C *possa scorrere l'orizzontale* DC, *e col punto* A *la perpendicolare* AB *si abbia la minima spinta orizzontale.*

SOLUZIONE.

Si tirino oltre la costruzione del Problema II l'orizzontale $A\varepsilon$, le verticali qK, $\varepsilon\beta$ che passi per b, ωB, ζu, che passi per g; λV che passi per G, la $A\beta$ parallela ad ab, e si congiungano $B\beta$, Gf. Sarà per la somiglianza delle figure $AB\beta\varepsilon$, $AGf\zeta$;
$\zeta\lambda : \varepsilon\omega = AG : GB = Vu : pB$: Ora essendo la spinta orizzontale

$$\frac{Q.CK + G.CV}{AD},$$

se si annulli il differenziale della spinta, sarà
$$(Q.d.CK + G.d.CV)\,AD = (Q.CK + G.CV)\,d.AD.$$
Ed essendo $d.CK = Kk = Qx = \frac{CK.pB}{CE}$;

$$d.CV = Vu = \frac{DV.pB}{BF};$$

$$d.AD = Aa = \beta p - pb = \left(\frac{BF}{AF} - \frac{CE}{BE}\right) pB;$$

sarà:

$$Q.CK(AD.BE\,AF + CE^2.AF - CE.BE.BF)\,BF$$
$$= G\,(CV.\,BF^2.\,BE - CV.\,CE.\,AF.\,BF$$
$$- DV.\,AD.\,AF.\,BE)\,CE.$$

SCOLIO.

Se il differenziale della spinta si eguagli all'infinito, cioè se sia

$$\frac{Q.dCK+G.dCV}{AD}-\frac{(Q.CK+G.CV)\,dAD}{AD^2}=\infty;$$

si avrà $AD=0$, e la spinta sarà la massima.

CAPO II.

Dell' Equilibrio degli Archi.

PROBLEMA X.

Supposto che nell'arco solido LHAONVBM (Fig. 11) *posto sopra le due basi* LCRM, NSTO *il punto* A *che si trova alla sommità possa discendere perpendicolarmente aprendosi l'arco in* V, *e lateralmente in* H *e* P, *e ascendendo i due punti* B *ed* X, *restando sempre congiunte in un pezzo solo le parti* HBVA, AVXP *eguali, e parimente le parti* HLCRMB, XPOTSN, *le quali debbano alzarsi col girare intorno a' due centri* C *e* T, *seguendo il tutto come se in* C, B, A, X, T *vi fossero delle cerniere; trovare la ragione delle due forze.*

SOLUZIONE.

Si tirino le linee CB, BA, e da' centri di gravità de' due pezzi G, Q si tirino le verticali GT e QK. Si tirino inoltre le verticali BE, AI, e le

orizzontali CI, BF; si scioglierà il problema colla formola del Problema II; cioè sarà la ragione delle forze contrarie

$$=G\left(\frac{BT}{AF}-\frac{CE}{BE}\right):Q\frac{CK}{BE},$$

(Teorema III e Problema I e II). Lo stesso metodo vale per l'altra parte dell'arco.

Se avesse da ascendere il punto A (*Fig.* 12) aprendosi l'arco in V, in P, ed in H, e discendendo i punti B ed X, servirà pure la stessa formola.

PROBLEMA XI.

Supponendo che il pezzo d'arco solido HBVXPAH (Fig. 13) *discenda perpendicolarmente, e parallelamente a sè stesso, e facendo cogli sdrucciolamenti de' lati* HB, PX *alzare i due pezzi* HCRB, PTSX *giranti intorno i centri* C *e* T; *trovare la ragione delle forze contrarie.*

SOLUZIONE.

Si prolunghi la HB in N, e sia il centro di gravità del pezzo inferiore in Q, dal quale si abbassi la perpendicolare QK, e sia G il peso del pezzo $HBFA$. La linea CB si porti in Cb con un moto infinitamente piccolo; per B si tiri l'orizzontale BF prolungata in a dove casca la verticale eba; sarà $BE : CE = Ba : ba$, e il viaggio perpendicolare del punto Q sarà

$$= \frac{CK . Ba}{BE},$$

(Problema II e Teorema III). Ma quando il punto B si sarà portato in b; il punto e del pezzo $HBFA$ sarà anch'esso venuto in b. Sarà dunque il viaggio perpendicolare del pezzo superiore, che si muove parallelamente in tutte le sue parti, e per conseguenza anche del suo centro di gravità

$$G = eb = ae - ab = \frac{FN . BA}{BF} - \frac{CE . Ba}{BE}.$$

Dunque la ragione delle forze

$$= G\left(\frac{FN}{BF} - \frac{CE}{BE}\right) : Q\,\frac{CK}{BE}.$$

La stessa formola serve pure nel caso che discenda il punto B in b (*Fig.* 14) movendosi intorno al centro C, e ascenda perpendicolarmente, e parallelamente il pezzo $BHAPXVB$.

Questa formola s'accorda colla formola di M. *Bossut* (*Mémoires de l'Acad.* 1774, pag. 551), che per il caso dell'equilibrio è la seguente

$$\frac{A \sin.^2 m}{\sin 2\ m}\,(h + q) = \frac{A \sin m. \cos m}{\sin 2\ m}\,r + Bp + \frac{hzz}{2}.$$

Perciocchè se si consideri che $\sin 2\ m. = 2 \sin m. \cos m$, la formola di M. *Bossut* si cangia

in quest' altra più semplice

$$\frac{A. \sin m. (h + q)}{2 \cos m} = \frac{Ar}{2} + Bp + \frac{hzz}{2}.$$

colla quale, fatte le debite sostituzioni, si trova identica la formola

$$G\left(\frac{FN}{BF} - \frac{CE}{BE}\right) = Q\,\frac{CK}{BE}.$$

Nè so perchè dal sig. *Frisi* la formola di M. *Bossut* sia riputata inesatta. L'obbiezione che egli fa (tom. 2, pag. 60), che nel caso del taglio dell'arco parallelo all'asse vicino alla sommità della curva la forza diverrebbe infinita a cagione di $\sin 2\ m = 0$, non ha luogo, perchè allora appunto la quantità dell'arco superiore A è infinitamente piccola, e però moltiplicata nell'espressione infinita dà un prodotto finito.

Confrontando ora la presente formola

$$G\left(\frac{FN}{BF} - \frac{CE}{BE}\right) : Q\,\frac{CK}{BE}$$

colla formola

$$G\left(\frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE}\right) : Q\,\frac{CK}{BE}$$

del Problema X, *Fig.* 11, trovandosi la forza $Q.\frac{CK}{BE}$ la medesima in tutte due;

se sarà $\frac{BT}{AF} > \frac{FN}{BF}$

seguirà la caduta dell'arco competente al Problema X;

$$\text{se sarà } \frac{BT}{BF} < \frac{FN}{BF}$$

seguirà la caduta competente al problema presente; la quale seguirà ancora se sarà

$$\frac{BT}{AF} = \frac{FN}{BF};$$

poichè in tal caso non ci sarebbe ragion sufficiente perchè i due pezzi $HAVB$, $PAVX$ concepissero un moto di rotazione, ed il centro G dovesse camminare orizzontalmente.

PROBLEMA XII.

Se il corpo ABED (fig. 15) *possa sdrucciolare secondo la direzione, e sulla linea* AC *perpendicolarmente, intanto che il corpo* DMNE *sdrucciola sulla linea* MC; *trovare la ragione delle due forze.*

SOLUZIONE.

Si supponga che la linea DA venga in da, la EB in eb; la figura $DdeE$ sarà un parallelogrammo, e se dal punto E si tiri la ER parallela a CM, la linea Rn sarà la linea, alla quale si sarà

portata la linea EN, e la Sm quella alla quale si sarà portata la DM, e la figura $SRED$ sarà un altro parallelogrammo. Il viaggio Gg del centro di gravità G sarà eguale ad Ee, e il viaggio Qq dell'altro centro di gravità Q sarà eguale ad ER. Se si tirino le qx, RF orizzontali, e le Qx, EF perpendicolari; sarà il viaggio perpendicolare di $Q = Qx = EF$. Dunque le forze saranno come $G.Ee : Q.EF = G\,(Fe - FE) : Q.FE = G\,(Tang.\,FRe - Tang.\,FRE) : Q.\,Tang.\,FRE = G\,(Cot.\,AC'D - Cot.\,ACM) : Q.\,Cot.\,ACM.$

Collo stesso metodo si potrà trovare la ragione delle forze di questi due cunei messi tra loro in equilibrio, e presi come un corpo solo alla forza del pezzo MZ, e così di seguito.

PROBLEMA XIII.

Trovare una curva che passi per A *e* C (Fig. 16 e 17) *nella quale tutti i punti* B *sien tali, che l'arco* CB *sia in equilibrio coll'arco* BA, *secondo le condizioni del Problema II.*

SOLUZIONE.

Sia $AF = x$; $BF = y$; $AD = x'$; $DC = y'$; il peso di $AB = s$; di $AC = s'$. Sarà $G = s$;

TF distanza del centro di gravità G dall'asse $= \frac{\int y ds}{s}$; $BT = y - \frac{\int y ds}{s}$; $Q = s' - s$; KD distanza del centro di gravità Q dall'asse $= \frac{\int y' ds' - \int y ds}{s' - s}$; $CK = y - \frac{(\int y' ds' - \int y ds)}{s' - s}$; $BE = FD = x' - x$; $CE = y' - y$. Sostituendo questi valori nella formola del Problema II

$$G\left(\frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE}\right) = Q\frac{CK}{BE},$$

si avrà

$$\frac{sy - \int y ds}{x} - \frac{(sy' - sy)}{x' - x} = \frac{s'y' - sy' - \int y' ds' + \int y ds}{x' - x};$$

$$\frac{\int s dy}{x} = \frac{\int s' dy' - \int s dy}{x' - x}.$$

Sia $x' = qx$, presa q per una costante arbitraria; sarà $q\int s dy = \int s' dy'$; $qsdy = s'dy$. Sia $s'dy' = a'dx'$; sarà $s'dy' = a'qdx = qsdy$. Dunque $a'dx = sdy$. Dunque a' è una costante, nel qual caso si ha $dx : dy = s : a$, che è l'equazione della catenaria.

COROLLARIO.

Resta dunque dimostrato indipendentemente dal calcolo delle variazioni, che la curva, nella quale il centro di gravità è al più basso luogo, è la catenaria. Poichè la curva nella quale il centro di gravità non può discendere è la curva nella quale le forze contrarie sono in equilibrio (Teorema II), e la curva dell'equilibrio per la dimostrazione del presente Problema è la catenaria.

PROBLEMA XIV.

Trovare la curva di un arco ADM (Fig. 18) *nella quale i tagli delle pietre* DC′, MC *perpendicolari alla curva servono per l'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Dovendo per il Problema XII essere in tal caso

$G\,(Cot.\ AC'D - Cot.\ ACM) = Q.\ Cot.\ ACM$;

se si aggiunga da una parte e dall'altra

$G.\ Cot.\ ACM$, sarà

$G.\ Cot.\ AC'D = (G + Q)\ Cot.\ ACM.$

Sia PD orizzontale $= y$; $AP = x$; $bn = dx$; $Dn = dy$; sarà $dx : dy = Dn : nm = 1 : Cot.\ AC'D$; $\frac{G\,dy}{dx} = G.\ Cot.\ AC'D$. La qual espressione fatta eguale ad una costante, come richiede l'equazione $G.\ Cot.\ AC'D = (G + Q)\ Cot.\ ACM$; si ha $\frac{Gdy}{dx} = a$, che è l'equazione della catenaria.

PROBLEMA XV.

Trovare una curva DAC (Fig. 19), *tale che il centro* G *di gravità di qualunque arco* DAC *sia nella perpendicolare* XG *parallela all'asse* AK, *la quale passa per il concorso* X *delle due tangenti* CX, DX.

SOLUZIONE.

Sia $AZ = x$; $ZD = y$; $AK = x'$; $KC = y'$; il peso di $AD = s$; di $AC = s'$, e sia P il centro di gravità dell'arco AD, Q il centro di gravità dell'arco AC. Si tiri la PQ, che passa per G; le orizzontali PL, QP', e le perpendicolari PP', GG'. Sarà

$$QL' = \frac{\int y'ds'}{s'}; \; LP = \frac{\int yds}{s};$$

$$QP' : QG' = \frac{\int y'ds'}{s'} + \frac{\int yds}{s} : QG'$$

$$= QP : QG = s' + s : s;$$

$$QG' = \frac{s\int y'ds' + s'\int yds}{s'(s' + s)};$$

$$GL = QL' - QG' = \frac{\int y'ds' - \int y\,ds}{s' - s}.$$

Si tiri la perpendicolare CM sino a che incontri

la continuazione della DZ in M, la quale DZ tagli in H la HG, e in N la CX. Sarà

$$MH = MZ - ZH = MZ - QL' + QG'$$
$$= y' - \frac{(\int y'ds' - \int yds)}{s' + s};$$

$DM = y' + y$.

Ma essendo $CM = ZK = x' - x$;

sarà $NM = \frac{dy'}{dx'}(x' - x)$;

$$DN = y' + y - \frac{dy'}{dx'}(x' - x);$$

ed essendo $XH : HN = dx' : dy'$

e $\qquad DH : XH = dy : dx$;

sarà $DH : HN = dx'\,dy : dx\,.\,dy'$;

$$DH + HN : HN = dx'.\,dy + dx.\,dy' : dx.\,dy'$$
$$= y' + y - \frac{dy'}{dx'}(x' - x) : HN;$$

$$HN = \frac{(y' + y)\,dx\,dy' - \frac{dy'}{dx'}(x' - x)\,dx\,dy'}{dx\,dy + dx\,dy'},$$

$$MH = MN + HN = \frac{(y' + y)\,dx\,dy' + dy'dy\,(x' - x)}{dx''\,dy + dx'\,dy'}$$

Confrontando questo valore di MH col valore espresso qui sopra, e facendo $dx'.\,dy = q\,dx.\,dy'$ presa q per una costante arbitraria, sarà

$$y's' + y's - \int y'\,ds' + \int yds$$
$$= \frac{(s' + s)(x' - x)\,dy}{(q + 1)\,dx} + \frac{(y + y)(s' + s)}{(q + 1)}$$

e differenziando col ritener dx costante, si avrà

$$q(y'+y)\,ds = (y'+y)\,ds'$$
$$+(x'-x)\frac{dy}{dx}(ds'+ds)+(s'+s)(x'-x)\frac{ddy}{dx}.$$

Sarà dunque $q ds = ds'$;

$$(ds'+ds)\,dy = -(s'+s)\,ddy;$$
$$\frac{ds'+ds}{s'+s} = \frac{-ddy}{dy};$$
$$log.\,(s'+s) = log.\,adx - log.\,dy$$
$$s'+s = b+(q+1)\,s = \frac{adx}{dy},$$

che è l'equazione della catenaria.

PROBLEMA XVI.

Trovare la spinta orizzontale della curva BNA (Fig. 9) *supposta rigida.*

SOLUZIONE.

Sia $AF = y$; $BF = x$; il peso della curva in $B = S$ funzione qualunque dell'arco $AB = s$. Calata la perpendicolare $G'Gn$ dal centro di gravità G' della curva; sarà

$$nF = \frac{\int xdS}{S};\ Bn = x - \frac{\int xdS}{S}.$$

Dunque (Teorema III e Problema VIII) sarà la sua spinta orizzontale in B

$$= \frac{xS}{y} - \frac{\int xdS}{y} = \frac{\int Sdx}{y}.$$

PROBLEMA XVII.

Trovare una curva ANB (Fig. 9) *d'una spinta orizzontale eguale in ogni punto* B.

SOLUZIONE.

Se si faccia $\frac{\int Sdx}{y} = a$ costante; sarà $Sdx = ady$, che è l'equazione della catenaria, nella quale è noto essere la spinta orizzontale costante.

PROBLEMA XVIII.

Trovare una curva ANB (Fig. 9) *tra tutte le curve della data lunghezza* ANB, *che abbia la minima spinta orizzontale.*

SOLUZIONE.

Essendo la spinta della curva $= \frac{\int Sdx}{y}$; sarà $\int Sdx$ un massimo. Ora questo caso per una curva isoperimetra è già stato sciolto dall' Eulero il quale trova l'equazione per questa curva $Adx = dy\,(B \pm S)$ (*De Methodo Maxim. et*

Minim. relativa, Cap. V, § 62), dove A e B sono due costanti. Sarà dunque la curva una catenaria posta colle direzioni della gravità parallele all'orizzonte.

SCOLIO.

Dando la formola egualmente il massimo e il minimo, si avrà la minima spinta se la curva volterà la concavità all'asse BF, e si avrà la massima spinta, se vi rivolterà la convessità.

PROBLEMA XIX.

Trovare la spinta tangenziale della curva ARB (Fig. 20), *cioè la spinta che esercita in* B *secondo la direzione della tangente in quel punto.*

SOLUZIONE.

Si tiri la tangente BF, la corda BA, l'orizzontale BQ, la parallela infinitamente vicina bq, la bn parallela ed eguale alla BA, e col raggio bn descritto l'arco na si congiunga la ba. Dal centro G' di gravità della curva si tiri la verticale $G'GT$, la Gy parallela alla An, la yg parallela

alla na, le orizzontali ym, nh, e le verticali Be, gu. In F si supponga una carrucola, sulla quale passi una fune BF attaccata alla curva in B, e posta sulla direzione della tangente, che discendendo verticalmente per FP porti il peso P. Ora supponendo rigida la curva ARP unitamente alla sua corda BA, il punto B si porti in b, il punto A in a, e il punto G, dove la $G'T$ taglia la BA, si porti in g. Sarà l'ascesa perpendicolare del peso $P = Pp = Bb$, e la discesa perpendicolare del punto $G = Gm + gu$, e volendo che il peso P esprima la spinta tangenziale per Bb sarà $P.Pp. = G\,(Gm + gu)$.

Sia $AQ = y$; $BQ = x$; $ARB = s$; il peso di $ARB = S$ funzione qualunque dell'arco s. Essendo i triangoli Bbe, Anh, Gym eguali, e simili tra loro, e simili ancora al triangolo FBQ, ed essendo i triangoli yug, nha, BQA, BTG simili, sarà $nh = dx$;

$$ha = \frac{xdx}{y};\; gu = \frac{xdx\ BG}{yBA} = \frac{dx\ BT}{y}.$$

Ma $TQ = \frac{\int xdS}{S}$, e per conseguenza

$$BT = x - \frac{\int xdS}{S};$$

$$\text{dunque } gu = \frac{xdx}{y} - \frac{dx \int xdS}{yS}.$$

Ed essendo $Gm = Be = dy$,

e $Bb = Pp = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, se si faccia $dy = pdx$, sarà $P.\, Pp = P.\, dx \sqrt{(1 + pp)}$;

$$G\,(Gm + gu) = S\left(pdx + \frac{Sxdx - dx\int xdS}{yS}\right)$$

$$= S\left(pdx - \frac{dx\int Sdx}{yS}\right);$$

$$P = \frac{Sp}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{\int Sdx}{y\sqrt{(1+pp)}}.$$

COROLLARIO.

Se ARB sia una catenaria descritta coll' asse AQ; si avrà $dy : dx = S : a$, cioè $ap = S$, il qual valore di S sostituito darà $P = \sqrt{(a^2 + S^2)}$ per la spinta tangenziale, cioè la diagonale del rettangolo formato dalla forza orizzontale costante, e dalla forza verticale eguale al peso della catena.

PROBLEMA XX.

Trovare una curva ARB (Fig. 20) *tra tutte le curve della data lunghezza* ARB *d'una minima spinta tangenziale.*

SOLUZIONE.

Essendo la spinta tangenziale

$$= \frac{ypS + \int Sdx}{y\sqrt{(1+pp)}};$$

la formola integrale $\int Sdx$ dovrà essere un massimo colle condizioni del metodo relativo delle variazioni. Si troverà dunque come sopra nel Probl. XVIII l'equazione $Adx = dy\,(B + S)$, che appartiene ad una catenaria, che ha il suo asse posto orizzontalmente.

COROLLARIO.

Dunque, benchè la catenaria sia insieme e la curva dell'equilibrio degli archi, e la curva della minima spinta tangenziale, come ha dimostrato ancora il celebre sig. Cav. *Lorgna* ne' suoi *Saggi di Statica*, pag. 290; tuttavia la sua posizione che serve all' equilibrio non serve alla minima spinta tangenziale, ma queste posizioni fanno un angolo retto tra loro.

SCOLIO.

Anche indipendentemente dal calcolo delle variazioni, si può trovare, che la curva di minima, e di massima spinta orizzontale e tangenziale è la catenaria, e che essa deve avere il suo asse posto orizzontalmente. Poichè essendo la spinta orizzontale della curva ANB (*Fig.* 9)

$$= S\,\frac{(BF - nF)}{AF}$$

(Problema VIII), se si ritengano i punti A e B presi ad arbitrio, e si prenda pure per costante arbitraria la lunghezza e il peso della curva; quella sarà la curva d'una minima spinta, nella quale nF sarà un massimo. Ma nF è la distanza del centro di gravità della curva dalla linea AF. Dunque la curva ANB sarà una catenaria coll'asse posto orizzontalmente (Vedi il Corollario del Problema XIII). Così pure sarà una catenaria coll'asse orizzontale se nF sarà un minimo, nel qual caso la curva rivolterà la convessità alla BF, e la spinta orizzontale sarà la massima.

Egualmente essendo la spinta tangenziale

$$= \frac{ypS + \int Sdx}{y\sqrt{(1+pp)}} = \frac{ypS + xS - \int xdS}{y\sqrt{(1+pp)}}$$

$$= \frac{ypS + xS - S\frac{\int xdS}{S}}{y\sqrt{(1+pp)}} = \frac{ypS + xS - S.nF}{y\sqrt{(1+pp)}};$$

ritenendo noi costante oltre i punti B ed A (*Fig.* 20), e oltre la lunghezza e il peso della curva, ancora la quantità p, cioè la posizione della tangente al punto B, quella sarà la curva della minima spinta, che avrà una massima nF, e al contrario, e però sarà la catenaria colle condizioni poco fa spiegate.

CAPO III.

Della Grossezza degli Archi.

Abbiamo considerata nel Capo precedente la curva dell'equilibrio degli archi sotto molti aspetti, alcuni de' quali sono nuovi, come la proprietà di questa curva da noi trovata nel Problema XV. Noi ne vedremo in seguito partitamente l'uso nella costruzione degli archi e delle cupole. Il punto più importante per adattare la catenaria alla pratica, si è trovare la grossezza dell'arco conveniente all'equazione della catenaria medesima, che si vuole impiegare. Per ciò fare in primo luogo egli è certo, che la catenaria MAS (*Fig.* 21) se si vuole impiegare negli archi col vantaggio che le è proprio, deve passare per il centro di gravità di tutti gli elementi $BPpb$ dell'arco solido $NBPR$. Poichè allora solo tutte le considerazioni si restringono alla catenaria medesima, che rappresenta in sè tutto l'arco, e la quale, posto che il peso dell'arco solido $NBPR$ sia proporzionale sempre al peso, che si dà all'arco MA della catenaria nella sua equazione, farà per la sua natura che l'arco stia in equilibrio. Se la linea, che congiunge i centri di gravità di tutti gli elementi $BPpb$ non è la catenaria medesima MA, al peso della quale si fanno proporzionali gli archi solidi $NBPR$; egli è vero, che posti i tagli BP perpendicolari alla catenaria MA, non si avrà a temere sdrucciolamento alcuno delle pietre secondo il Problema XII, ma si potranno temere gli aprimenti del Problema X. Gli sdrucciolamenti non si avranno a temere stante che nel Problema XII è indifferente il sito del centro di gravità dei pezzi, ma non è già così nella formola del Problema X.

Noi esamineremo questi pericoli spiegato che avremo il metodo di assicurarsi di tutto l'arco col fare che sia la catenaria medesima, che passi per i centri di gravità di tutti gli elementi. Con questo mezzo siamo sicuri dell'equilibrio in vigore del Problema X e XIII, e la catenaria s'impiega con tutto il suo vantaggio come lo mostrerà ancor meglio il seguente

TEOREMA V.

Se la catenaria ABC (Fig. 22) *congiunge i centri di gravità di tutti gli elementi dell'arco solido* C′ C″ B′ A″ A′ B″ C′, *ciascun pezzo del*

quale A′ B″ B′ A″ *ha un peso proporzionale al peso che si attribuisce all'arco* AB *della catenaria nella sua equazione; non solo starà in equilibrio la curva* BC *colla* BA, *ma molto meno l'arco solido potrà soffrire gli aprimenti in* A′ *e* B′, *ovvero in* A″ *e* B″ *del Problema X.*

DIMOSTRAZIONE.

Calando dal centro di gravità della catenaria CB, che sarà pure il centro di gravità dell'arco solido la perpendicolare QK, e dal centro G dell'arco BA la GX, e sostituendo alla BT la sua eguale EX, sarà per l'equilibrio della catenaria CBA,

$$G\left(\frac{EX}{AF} - \frac{CE}{BE}\right) = Q\,\frac{CK}{BE}.$$

(Problema II e XIII). Ora perchè il punto B' potesse ascendere, e discendere il punto A', bisognerebbe che fosse

$$G\left(\frac{E'X}{A'F'} - \frac{C'E'}{B'E'}\right) > Q\,\frac{C'Z}{B'E'}.$$

Ma essendo

$$Q\,\frac{C'Z}{B'E} > Q\,\frac{CZ}{BE},$$

e $G\left(\frac{E'X}{A'F'} - \frac{C'E'}{B'E'}\right) < G\left(\frac{EX}{AF} - \frac{CE}{BE}\right)$;

sarà al contrario

$$\left(\frac{E'X}{A'F'} - \frac{G'E'}{B'E'}\right) < Q\,\frac{C'Z}{B'E'}.$$

Con un simile ragionamento si proverà che saremo lontani dal temere che il punto A'' ascenda e il punto B'' discenda. Avrà dunque quest'arco una somma fortezza.

PROBLEMA XXI.

Trovare nell'arco solido MBFHRN (Fig. 21), *omogeneo e di egual larghezza, la grossezza* BP *conveniente al punto* A *della catenaria* MAS, *che passa per i centri di gravità e degli elementi* BPpb *dell'arco.*

SOLUZIONE.

Sia Aa elemento della catenaria $= ds$; il suo peso Sds, dinotando S una funzione dell'arco s. Sia AC raggio della curvatura $= r$; $AP = t$; $AB = u$; sarà lo spazio

$$BAab = \left(u + \frac{u^2}{2r}\right) ds;$$

lo spazio

$$APpa = \left(t - \frac{t^2}{2r}\right) ds;$$

tutto lo spazio

$$BPpb = \left(u + \frac{u^2}{2r} + t - \frac{t^2}{2r}\right) ds = Sds \ldots (A).$$

Sia il centro di gravità del triangolo BCb in I, del triangolo ACa in F; del triangolo PCp in L. Essendo i pesi proporzionali alle aree, sarà

$$IC = \tfrac{2}{3}(r + u);\ FC = \tfrac{2}{3}r;\ LC = \tfrac{2}{3}(r - t);$$

$$IF = IC - FC = \tfrac{2}{3}u;\ FL = FC - LC = \tfrac{2}{3}t;$$

il triangolo $PCp = \dfrac{(r-t)^2}{2r}ds$;

$$IL = IF + FL = \tfrac{2}{3}(u + t);$$

$$Sds : \frac{(r-t)^2}{2r}ds = \tfrac{2}{3}(u+t) : Ie;$$

$$Ie = \frac{(r-t)^2(u+t)}{3rS};$$

$$Ie + IC = \frac{(r-t)^2(u+t)}{3rS} + \tfrac{2}{3}(r+u) = r \ldots (B).$$

E cavando dall'equazione (A) il valore di $t = r + \sqrt{\left((u+r)^2 - 2rS\right)}$, e sostituendolo nell'equazione (B), si ottiene

$$(u+r)^4 - (u+r)^3 r - 2(u+r)^2 rS + \tfrac{4}{3}r^2S^2 + \tfrac{3}{2}r^3S = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C).$$

Parimente cavando dalla medesima equazione (A) il valore di $u = \sqrt{((r-t)^2 + 2rS)} - r$, e sostituendolo nell' equazione (B) si ottiene

$$(r-t)^4 - (r-t)^3 t + 2(r-t)^2 rS + \tfrac{4}{3}r^2S^2 - \tfrac{3}{2}r^3S = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C').$$

SCOLIO.

Da' segni delle due equazioni (C) e (C') apparisce che il valore della prima si cangia nel valore della seconda sostituendo t in luogo di u, e $-r$ in luogo di r. Dal che ne segue, che per qualunque punto della catenaria si troverà il valore di u, e di t colla medesima equazione, col solo cangiamento del segno del raggio della curvatura; il che è conforme alla diversa direzione del raggio CA per rapporto alle due linee AB, AP.

PROBLEMA XXII.

Trovare una catenaria MAS (Fig. 21) *alla quale convenga una grossezza costante* BP.

SOLUZIONE.

Sia $BP = b$; sarà allora $t = (b - u)$; e l'equazione (A) del Problema XXI diventa

$$\left(\frac{2br + 2bu - b^2}{2r}\right) ds = Sds.$$

Ora per la natura della catenaria si ha

$$dx : dy = \int \left(\frac{2br + 2bu - b^2}{2r}\right) ds : a = \int Sds : a,$$

e differenziando col ritener dx costante sarà

$$\frac{-dxddy}{dy^2} = \left(\frac{2br + 2bu - b^2}{2ar}\right) ds = \frac{Sds}{a};$$

e poichè $2r = \frac{-2ds^3}{dxddy}$; sarà

$$dy^2 = \frac{2ads^2}{2br + 2bu - b^2} = \frac{2a(dx^2 + dy^2)}{2br + 2bu - b^2},$$

e ponendo $dx = pdy$;

sarà $2br + 2bu - b^2 = 2a(1 + pp)$;

$$u + r = \frac{b}{2} + \frac{a}{b}(1 + pp).$$

Si sostituisca ora questo valore nella parentesi dell' equazione (C) del Problema XXI e si avrà

$$\left(\frac{b^2 + 2a(1 + pp)}{2b}\right)^4 = \left(\frac{b^2 + 2a(1 + pp)}{2b}\right)^3 r$$

$$- 2\left(\frac{b^2 + 2a(1 + pp)}{2b}\right)^2 rS + \frac{4}{3}r^2S^2 + \frac{3}{2}r^3S = 0.$$

In oltre essendo

$$r = \frac{-ds^3}{dxddy} = \frac{-dy^2(1 + pp\,d)ds}{dxddy},$$

ed essendo come sopra

$$\frac{-dxddy}{dy^2} = \frac{Sds}{a};$$

$$\text{sarà } r = \frac{a(1 + pp)}{S};$$

il qual valore di nuovo sostituito fuori delle parentesi dell'equazione (C) si avrà

$$\left(\frac{b^2+2a(1+pp)}{2b}\right)^4-\left(\frac{b^2+2a(1+pp)}{2b}\right)^3\frac{a(1+pp)}{S}$$
$$-2\left(\frac{b^2+2a(1+pp)}{2b}\right)^2 a(1+pp)$$
$$+\frac{4}{3}a^2(1+pp)^2+\frac{3}{2}\frac{a^3(1+pp)^3}{S^2}=0\ldots(K).$$

Dalla quale equazione cavando il valore di $S=P$ funzione di p, e costanti si, avrà

$$dx : dy = \int Sds : a = p : 1$$
$$= \int Pdy\,(1+pp)^{\frac{1}{2}} : a;$$
$$dy=\frac{adp}{P\sqrt{(1+pp)}};$$
$$dx=\frac{apdp}{P\sqrt{(1+pp)}}.$$

PROBLEMA XXIII.

Data la natura della curva interiore RPH (Fig. 23), *trovare la natura della curva* MAS *perpendicolare a' tagli* BAP, *che passi per i centri di gravità delle aree* BPpb, *e sia opportuna all'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Sia $MG=x$; $GA=y$; $RQ=n$; $QP=m$; $AP=t$; $MA=s$; $Aa=ds$; $am=dy$; $Am=dx=pdy$; $MR=f$ costante assunta ad arbitrio; e si tiri PX perpendicolare ad AG;

sarà $m=GA-AX=y-\frac{dx}{ds}t$;

$$n=MG+QG-MR=x+\frac{dy}{ds}t-f;$$
$$t=(y-m)+\frac{ds}{dx}=(n-x+f)\frac{ds}{dy}\ldots(D).$$

Dalla natura della curva RPS si cavi l'espressione di n in una funzione di m, e questa funzione si sostituisca in luogo di n nell'equazione (D). Poi dalla medesima equazione così trasformata si cavi il valore di m in una funzione delle variabili x, y, p, la quale sostituita nell'equazione $t=(y-m)\frac{ds}{dx}$, si avrà $t=(y-X)\frac{ds}{dx}$, essendo X la funzione di x, y, p, e confrontando questo valore t col valore

$$r\pm\sqrt{((u+r)^2-2rS)}$$

cavato dall'equazione (A) del Problema XXI, si avrà

$$(y-X)\frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}=r\pm\sqrt{((u+r)^2-2rS)};$$
$$(u+r)=\sqrt{\left\{\left((y-X)\frac{\sqrt{1+pp}}{p}-r\right)^2-2rS\right\}}$$

Ed essendo in ogni catenaria $r=\frac{a(1+pp)}{S}$, (Problema XXII), e in ogni curva

$$r=-\frac{ds^3}{dxddy}=-\frac{dy^2(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{pddy};$$

sarà $(u+r)$

$$=\sqrt{\left\{\left(\frac{dy^2(1-pp)}{pddy}+\frac{(y+X)}{p}\right)+2a\right\}}\sqrt{(1+pp)}.$$

Sostituendo questo valore di $(u+r)$ nelle parentesi dell'equazione (C) del Problema XXI, e il valore di $r=\frac{a(1+pp)}{S}$ fuori delle parentesi, e fatto $\frac{q}{pp}=\frac{dy^2}{ddy}$, cioè $q=\frac{dx^2}{ddy}$, e per più brevità

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{dy^2(1+pp)}{pddy}-\frac{(y-X)}{p}\right)^2+2a\right\}}=Y$$

funzione di x, y, p, e q;

si avrà $Y^2-Y\frac{3}{2}(1+pp)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{S}-2aY$

$$+\frac{4}{3}a^2+\frac{3a^3(1+pp)}{2S^2}=0.$$

Da questa equazione si potrà cavare il valore di $S=P$ funzione di x, y, p, q; ed essendo per natura della catenaria $dx:dy=\int Sds:a$; sarà $p:1=\int Pdy\sqrt{(1+pp)}:a$;

$$dy=\frac{adp}{P\sqrt{(1+pp)}};$$

$$dx=\frac{apdp}{P\sqrt{(1+pp)}},$$

equazioni intrattabili.

A simili equazioni si arriverebbe, se si cercasse la natura della curva MAS data la curva esteriore.

Ora noi verremo a considerare gli archi, come

sono per lo più costruiti dagli autori, cioè colla catenaria posta nel luogo della curva interna, ovvero dell'intradosso.

PROBLEMA XXIV.

Trovare la grossezza dell'arco NRPHFBN (Fig. 21) *al punto* P, *posto che la catenaria sia la curva interna* RPH.

SOLUZIONE.

Sia il raggio CP della curvatura $=r$; $Fp=ds$; la grossezza $BP=2t$; $PA=t$. Tirata la Cpb, e i due archi Aa, Bb concentrici coll'arco Pp;

sarà $$Aa=\frac{(r+t)}{r}ds;$$

e l'area $$BPpb+\frac{2t(r+t)}{r}ds=Sds;$$

sarà dunque $2t^2+2tr=rS=a(1+pp)$;

$$t=\sqrt{\left(\frac{rS}{2}+\frac{1}{4}r^2\right)}-\frac{1}{2}r;$$

$$BP=\sqrt{(2rS+r^2)}-r$$

$$=\sqrt{(2a(1+pp)+r^2)}-r.$$

Nella stessa maniera si troverebbe la grossezza dell'arco, posto che la catenaria fosse la curva esterna ovvero l'estradosso.

COROLLARIO.

Posto che la catenaria RPH fosse un arco di circolo descritto col raggio g; essendo in questo caso

$$dx : dy = \sqrt{(2gx - x^2)} : g - x;$$

sarà $$\frac{\int S ds}{a} = \frac{\sqrt{(2gx - x^2)}}{g - x};$$

$$\frac{S ds}{a} = \frac{dx}{\sqrt{(2gx - x^2)}} + \frac{dx\sqrt{(2gr - x^2)}}{(g - x)^2}$$

$$= \frac{g^2 dx}{(g - x)^2\sqrt{(2gx - x^2)}},$$

ed essendo nel circolo

$$ds = \frac{gdx}{\sqrt{(2gx - x^2)}};$$

sarà $$S = \frac{ag}{(g - x)^2};$$

i quali due valori di S e di g sostituiti nell'equazione

$$BP = \sqrt{(2rS + r)^2} - r,$$

daranno per il circolo

$$BP = g\sqrt{\left(\frac{2a}{(g - x)_2} + 1\right)} - g.$$

Quando $x = g$; sarà $BP = \infty$.

Quando $x = 0$; sarà $PB = \sqrt{(2a + g^2)} - g$.

In tutti i punti intermedj Bp cresce crescendo l'ascissa x.

Si supponga quindi innanzi, che la curva MAS non passi per la metà delle BP, ma per i centri di gravità degli elementi $BPbp$.

PROBLEMA XXV.

Trovare la natura della curva MAS (Fig. 21 *e* 23), *che passa per i centri di gravità degli elementi dell'arco* NRPHFBN, *che ha le condizioni e la grossezza del Problema XXIV.*

SOLUZIONE.

Essendo $BC = r + 2t$; se sia il centro di gravità del triangolo BCb in I; del triangolo PCp in L; dell'elemento $BPpb$ in e; sarà

$$IC = \tfrac{2}{3}(r + 2t);\ LC = \tfrac{2}{3}r;\ IL = \tfrac{4}{3}t.$$

Ed essendo l'area del triangolo $PCp = \frac{1}{2} rds$,

e l'area $$BPpb = \frac{2t(r + t)}{r} ds;$$

sarà $$\frac{2t(r + t)}{r} ds : \tfrac{1}{2} rds = \tfrac{4}{3}t : Ie;$$

sarà dunque $$Ie = \frac{r^2}{3(r + t)};$$

$$IC + Ie - r = AP = t + \frac{t^2}{3(r + t)}.$$

Essendo t una funzione di r ed S (Prob. XXIV), lo sarà ancora AP. Sia dunque $AP = R$ (*Fig.* 23), e tirate le orizzontali AG, PQ e la verticale PX, se RQ sia l'ascissa x, e PQ l'ordinata y della catenaria RPH; MG l'ascissa u, GA l'ordinata z della curva MAS, che passa per i centri; essendo

$$AX = \frac{dx}{ds} R;$$

$$PX = \frac{dy}{ds} R;$$

fatta $MR = f$ costante;

sarà $MG = x + f - \frac{dy}{ds} R;$

$$GA = y + \frac{dx}{ds} R.$$

COROLLARIO PRIMO.

Essendo $AP = t + \frac{t^2}{3(r+t)}$;
quando sarà $r = \infty$; sarà $AP = t$;
quando $r = 0$; sarà $AP = \frac{4}{3} t = \frac{2}{3} BP$.

Stando costante r e crescendo t, la AP acquisterà maggior ragione alla BP.

COROLLARIO SECONDO.

La distanza del centro di gravità dell' arco $RPBN$ (*Fig.* 23) dall'asse NQ sarà, posto il

peso dell'arco $RP = G$;

$$\frac{\int AG.dG}{G} = \frac{\int y.dG}{G} + \frac{\int AX.dG}{G}.$$

S'intenda descritta una curva ZA (*Fig.* 24), il peso della quale sia supposto G, e la sua ordinata sia AX. Sarà la distanza TX del suo centro di gravità G dall'asse

$$ZX = \frac{\int aX.dG}{G},$$

la quale sarà minore di AX medesima, se AX sarà sempre cresciuta da Z sino in A. Ma se AX dopo essere arrivata ad un suo massimo si sarà sminuita divenendo $A'X'$, allora potrà $T'X$ essere maggiore di $A'X'$ medesima. Essendo però AX sempre positiva, si avrà

$$TX = \frac{\int AX.dG}{G}$$

positiva. Sarà pure TX minore della massima fra le AX, e però minore della massima AP (*Fig.* 23).

COROLLARIO TERZO.

Essendo $\frac{\int y.dG}{G}$ la distanza del centro di gravità della catenaria dall'asse,

sarà $\frac{\int AX.DG}{G} = TX$ (*Fig.* 24)

l'aumento della distanza del centro di gravità dell'arco costruito sopra la catenaria.

SCOLIO.

Se si voglia ora esaminare la forza e la sicurezza degli archi costruiti col porre la catenaria nel luogo della curva interna, convien osservare in primo luogo, che se si darà loro la grossezza trovata col Problema XXIV facendo i tagli perpendicolari alla catenaria medesima, noi non potremo temere gli sdrucciolamenti del Problema XII; poichè nella sua soluzione è indifferente il sito del centro di gravità de' pezzi dell'arco, ma non saremo sicuri in generale che non seguano gli aprimenti del Problema X. In fatti nell'arco $ABCC'bA'$ (*Fig.* 25) si tirino le orizzontali BF, CE, $C'E'$, le verticali $A'AF$, $BE'E$, GT calata dal centro di gravità della curva AB e $G''T'$ calata dal centro di gravità dell'arco $ABbA'$; $QK''K$ calata dal centro di gravità della curva BC; $Q'K'K''$ calata dal centro di gravità dell' arco $BCC'b$. Si tirino inoltre le CB, BA, $C'B$, BA'. Perchè non abbia a seguire l'aprimento in b ed A, abbassandosi il punto A', e alzandosi il punto B, converrà che non sia

$$G\left(\frac{BT'}{A'F} - \frac{C'E'}{BE'}\right) > Q\,\frac{C'K'}{BE'}.$$

Ma nell' infinito numero delle catenarie ve ne

sono innumerabili nelle quali si trova maggiore, e però il metodo è difettoso. In fatti essendo catenaria ogni curva, nella quale posto il peso della stessa curva $= G$, si abbia $dx : dy = G : a$, non si richiederà altro alla natura della catenaria se non che cresca sempre la ragione di $dx : dy$, e però che la curva rivolti sempre la sua concavità all'asse senza divenirvi mai parallela. Conservando dunque questa condizione che sola è necessaria alla catenaria, sia da A sino in B il raggio della curvatura ingrandito a piacere; essendo la grossezza dell' arco $= \sqrt{(2a + 2app + r^2)} - r$; ritenendo la costante a, sarà la grossezza dell'arco da A sino in B impiccolita a piacere, e sarà molto più impiccolita la AP (*Fig.* 23), che in tal caso ha sempre minor ragione alla grossezza BP (Corollario I), e molto più saranno impiccolite le AX, a cagione che nell' ingrandire i raggi della curvatura in progresso da A in B si impiccoliscono gli angoli APX. Sarà per conseguenza impiccolita TX (*Fig.* 24), che è l'aumento della distanza del centro dell'arco dall'asse (Corollario III), e però nella *Fig.* 25 saranno impiccolite a piacere le due AA', TT'. Se si ingrandisca pure a piacere il raggio della curvatura in C, s'impiccolirà a piacere la grossezza $C'C$. Ciò posto, la quantità

$$G\frac{BT'}{A'F}=\frac{C'E'}{BE'},$$

sarà avvicinata a piacere alla quantità

$$G\left(\frac{BT}{AF}-\frac{CE}{BE}\right)=Q\frac{CK}{BE}.$$

Ma se nello stesso tempo la curva tra B e C abbia de' raggi impiccoliti a piacere, si avranno per que' punti delle grossezze d'arco ingrandite; si ingrandiranno dunque ancora le AX (*Fig.* 24) competenti a questo pezzo d'arco, e per conseguenza ancora la TX, che darà la KK'', nella *Fig.* 25 ingrandita, la quale sottratta dalla CK'' avvicinata già a piacere alla CK, lascerà $C'K'$ fatta minore della CK. Nel qual caso riuscendo

$$G\left(\frac{BT'}{A'F}=\frac{G'E'}{BE'}\right)>Q\frac{C'K'}{BE'},$$

caderà l'arco. Nella stessa guisa se nella *Fig.* 26 s'ingrandiranno a piacere tutti i raggi della curvatura da C in B, si impiccoliranno a piacere le KK' BB', e si avvicineranno a piacere la AF' alla AF, la CE' alla CE, la $B'E'$ alla BE, e la quantità $Q\frac{CK'}{B'E'}$ alla quantità $Q\frac{CK}{BE}=G\left(\frac{BT}{AF}-\frac{CE}{BE}\right)$, e se si impiccoliranno i raggi tra B ed A, si ingrandirà la TT'', e per conseguenza la $B'T'$ resterà più sempre minore della BT; nel qual caso riuscendo

$$G\left(\frac{B'T}{A'F'}-\frac{CE'}{B'E'}\right)<Q\frac{CK'}{B'E'};$$

si abbasserà il punto B' alzandosi il punto A, e caderà l'arco.

Quanto a' pericoli del Problema XI, tirata nella *Fig.* 25 e 26 la BN perpendicolare alla catenaria ABC al punto B; a cagione che in essa la GT passa per il concorso delle due tangenti a' punti A e B (Problema XV); sarà

$$FN : BF = BT : AF;$$

il qual valore di $\frac{BT}{AF}$ sostituito nella formola

$$G\left(\frac{BT}{AF}-\frac{CE}{BE}\right)=Q\frac{CK}{BE}$$

del Problema X, si ha la formola

$$G\left(\frac{FN}{BF}-\frac{CE}{BE}\right)=Q\frac{CK}{BE},$$

che è la formola dell'equilibrio del Problema XI, la quale si verificherà nella catenaria ABC. Ora quanto alla *Fig.* 26, essendo sempre in essa $CE' < CE$, $B'E' > BE$; $CK' < CK$, si avrà sempre

$$G\left(\frac{FN}{BF}-\frac{CE'}{B'E'}\right)>Q\frac{CK'}{B'E'};$$

e però non potrà in alcun caso salire il pezzo $B'BAA'$ parallelamente a sè stesso verticalmente, abbassandosi il punto B' circolarmente intorno il centro C. Ma nella *Fig.* 25 se si ingrandirà a piacere il raggio della curvatura al punto C, si impiccolirà a piacere la $C'C$, e si avvicineranno quanto si vorrà la $C'E'$ alla CE, e la BE' alla BE. Nel qual caso restando $C'K' < CK$, si avrà

$$G\left(\frac{FN}{BF}-\frac{C'E}{BE'}\right) > Q\,\frac{C'K'}{BE'};$$

si alzerà il punto B circolarmente intorno il centro C' in forza dello sdrucciolamento del pezzo superiore che discenderà con moto parallelo verticalmente. Basterà dunque ancor meno a questa caduta, che all'altre accennate di sopra, bastando l'ingrandimento del raggio di curvatura al solo punto C.

Noi qui considereremo ancora un altro moto che solo potrebbero avere oltre i moti considerati qui sopra, i due pezzi dell'arco ABC (*Fig.* 26); così comprenderemo tutti i pericoli della sua caduta, per venire a dare dopo un metodo generale di schivarli. Potrebbe darsi che l'arco $ABB'A'$ girasse intorno al centro A, e si abbassasse il punto B' facendo sdrucciolare in su il pezzo $B'C'CB$ parallelamente a sè stesso sulla direzione CC'; ovvero che discendendo questo pezzo $B'C'CB$ parallelamente a sè stesso sulla medesima direzione, si alzasse il punto B del pezzo superiore girando intorno al centro A'. Così son compresi

i moti tutti di questi due pezzi d'arco; perchè non possono se non che o tutti due sdrucciolare parallelamente a sè stessi nel senso del Problema XII, o tutti due aver moto di rotazione come nel Problema X, o l'inferiore aver moto di rotazione sdrucciolando il superiore come nel Problema XI; o sdrucciolar l'inferiore, rotandosi il superiore. Schivando tutti questi pericoli sarà sicuro tutto l'arco, prendendosi qui arbitrariamente i due punti B e C. Esaminati dunque qui sopra gli altri pericoli, resta da esaminar l'ultimo. Per far ciò basta osservare che non potrà mai seguir questo moto, se il pezzo superiore non potrà acquistare da sè un moto di rotazione anche indipendentemente dallo sdrucciolamento dell'inferiore. Poichè se non lo potrà acquistar da sè stesso, è segno che avrà l'equilibrio del Problema VII per rapporto alle due posizioni dei piani $A'A$, $B'B$. Ma restando immobile il piano $A'A$, e conservandosi il parallelismo del piano $A'B$ nello sdrucciolamento del pezzo inferiore, si conserverà l'equilibrio del pezzo superiore quanto alla rotazione. Dunque se non potrà acquistar moto di rotazione indipendentemente dallo sdrucciolamento del pezzo inferiore, non lo potrà acquistare nemmeno con esso. Resta dunque da esaminar questo caso solo, cioè quando posta la costruzione del Problema XXIV, il pezzo d'arco $ABB'A'$ potrà acquistar modo di rotazione tra i due piani immobili $B'B$, $A'A$. Si tiri dal punto A (*Fig.* 27) l'orizzontale AM, e dai punti B', B le $B'V'$, BV perpendicolari al piano $B'B$. Si continuino le TT''', $T''\,T'$ sino alla AM. La TT''' per la proprietà della catenaria (Problema XV) passerà per V. In primo luogo è certo, che essendo la verticale $T''\,T'$, che passa per il centro dell'arco solido posta a sinistra della TV (Coroll. II, Probl. XXV), non potrà seguir la rotazione se non abbassandosi la parte sinistra dell' arco verso B, e alzandosi la destra verso A (Coroll. V, Probl. VII). Questo poi seguirà ogni qual volta la $TT''T'$ continuata in M avrà il punto M a sinistra del punto V' (Ivi). Se dunque impiccolendo i raggi di curvatura tra A e B, si ingrandirà il raggio al punto B, si avvicinerà a piacere la $B'V'$ alla BV restando ingrandita la TT''. Nel qual caso restando la $VV' < VM$, caderà l'arco.

PROBLEMA XXVI.

Trovare i casi più semplici, ne' quali l'arco costruito col metodo del Problema XXIV riesce sicuro.

SOLUZIONE.

Essendo nella *Fig.* 25 per qualunque caso la $BT' < BT$, a cagione della TT' positiva (Coroll. II, Probl. XXV); la $A'F > AF$, la $C'E' > CE$, la $BE' < BE$; sarà sempre

$$G\left(\frac{BT'}{A'F} - \frac{C'E'}{BE'}\right) < G\left(\frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE}\right);$$

e però ancora

$$< G\left(\frac{FN}{BF} - \frac{CE}{BE}\right)$$

in vigore dello Scolio precedente. Dunque ancora

$$< Q\,\frac{CK}{BE}.$$

In quegli archi dunque ne' quali

$$Q\,\frac{C'K'}{BE'} \text{ non sarà } < Q\,\frac{CK}{BE},$$

noi saremo sicuri della caduta fatta in guisa che discenda il centro G' ascendendo il centro Q' nel senso del Problema X e XI; e molto più saremo sicuri dove non sarà $C'K' < CK$.

Essendo pure nella *Fig.* 26 per qualunque caso $CK' < CK$; $B'E' > BE$; sarà sempre

$$Q\,\frac{CK'}{B'E'} < Q\,\frac{CK}{BE}, \text{ e però } < G\left(\frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE}\right).$$

In quegli archi dunque, ne' quali non sarà

$$G\left(\frac{B'T'}{AF'} - \frac{CE'}{B'E'}\right) < G\left(\frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE}\right),$$

saremo sicuri, che il centro Q' non discenderà, ascendendo il centro G' nel senso del Problema X; essendo noi sicuri in qualunque caso da questo pericolo nel senso del Problema XI in vigore dello Scolio precedente. Ma essendo in quest'arco oltre la $B'E > BE$, ancora la $CE' < CE$, e la $AF' < AF$, molto più saremo sicuri, se non sarà $B'T' < BT$.

Ma se non sarà $B'T' < BT$ (*Fig.* 26 e 27), tirata la BX nella *Fig.* 27 perpendicolare alla $B'T'$, non sarà nemmeno $B'X < MV$, e molto meno $V'V < MV$. Dunque in tal caso saremo sicuri anche dalla rotazione di questo pezzo (Scolio precedente).

Se dunque avremo insieme, e la $B'T' > BT$ nella *Fig.* 26, e la $C'K' > CK$ nella *Fig.* 25, saremo molto lontani da ogni pericolo.

COROLLARIO.

Essendo la grossezza dell'arco

$$= \sqrt{(2a + 2app + r^2)} - r$$

(Prob. XXIV), crescendo in qualunque caso per la natura della catenaria da A in B sempre la quantità p; se non crescerà mai da A in B il raggio r; crescerà sempre in grossezza dell'arco, e sarà in B la

maggiore di tutte le antecedenti. Ma ivi non essendosi cresciuto il raggio; la AP della *Fig.* 23 avrà la maggior ragione alla sua BP (Coroll. I, Prob. XXV). Dunque tanto più la AP ivi sarà la maggiore di tutte le antecedenti. Ed essendo ivi l'angolo APX maggiore di tutti gli antecedenti, tanto più la AX ivi sarà maggiore di tutte le antecedenti; e però ivi la AX sarà maggiore dell'aumento TX della distanza del centro (*Fig.* 24, Coroll. II, Probl. XXV). Ma la BZ (*Fig.* 23) tirata parallela alla AX sino al prolungamento della PX è ancora maggiore della AX; se dunque nella *Fig.* 26 si tiri la verticale BX; la $B'X$, che sarà la stessa colla BZ della *Fig.* 23 sarà per più ragioni maggiore della $T'T'''$ aumento della distanza del centro di gravità dall'asse, e sarà conseguentemente la $B'T' > BT$.

Collo stesso metodo se nella *Fig.* 25 si tiri la verticale CX, supposto che non vada crescendo il raggio da B in C, si proverà che la $C'X$ sarà maggiore $K'K'''$, e per conseguenza ancora la $C'K' > CK$.

Supposto dunque che la catenaria interna ABC (*Fig.* 25 e 26) sia un arco di circolo, nel quale il raggio è costante, l'arco costruito sopra esso col Problema XXIV sarà sicuro.

Se la catenaria interna ABC sarà un arco di ellissi coll'asse maggiore orizzontale, calando in essa continuamente da A sino in C il raggio della curvatura, l'arco costruito sopra esso col Problema XXIV sarà anche più sicuro dell'arco costruito sul circolo.

PROBLEMA XXVII.

Trovare la catenaria che dà una grossezza costante per l'arco costruito col metodo del Problema XXIV; ed esaminare la sicurezza dell'arco medesimo.

SOLUZIONE.

Essendo $2t = \sqrt{(2a + 2\,app + r^2)} - r$ (Problema XXIV);

sarà $\dfrac{2t^2 - a}{a} + \dfrac{2t}{a} r = pp = \dfrac{2t^2 - a}{a} + \dfrac{2t(1+pp)}{S}$,

e fatto per brevità

$$\frac{2t^2 - a}{a} = C, \text{ e } 2t = T;$$

$$\text{sarà } S = \frac{T(1+pp)}{pp - C};$$

$$\frac{Sds}{a} = \frac{Sdy\sqrt{(1+pp)}}{a} = dp = \frac{Tdy(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{a(pp-C)};$$

$$dy = \frac{adp}{2t\sqrt{(1+pp)}} - \frac{tdp}{(1+pp)^{3:2}}$$

$$dx = pdy = \frac{apdp}{2t\sqrt{(1+pp)}} - \frac{tpdp}{(1+pp)^{3:2}}.$$

Sarà dunque

$$y = \int \frac{adp}{2t\sqrt{(1+pp)}} - \frac{tp}{\sqrt{(1+pp)}};$$

$$x = \frac{a}{2t}\sqrt{(1+pp)} + \frac{t}{\sqrt{(1+pp)}} + Cost.$$

E facendo $p + z = \sqrt{(1+pp)}$; si avrà

$$y = -\frac{a}{2t}\,log.\,z - t\frac{(1-z^2)}{(1+z^2)};$$

$$x = \frac{a}{2t}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right) + t\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) - \frac{(a+2t^2)}{2t};$$

nella quale equazione posto $p = 0$, e per conseguenza $z = 1$, sarà parimente $y = 0$, $x = 0$.

Quanto poi alla sicurezza di quest'arco, essendo la BZ, *fig.* 23, al punto B maggiore di tutte le antecedenti a cagione della costante BP, e dell'angolo BPZ maggiore di tutti gli antecedenti, sarà la BZ al punto Z maggiore della maggiore fra le AX da R sino in P, e però tanto più supererà la TX della *Fig.* 24 (Corollario II, Problema XXV). Sarà dunque nella *Fig.* 26 la $B'X$ maggiore della $T'T'''$, e però la $B'T' > BT$, e nella *Fig.* 25 sarà $C'X > K'K'''$, e però $C'K' > CK$; conseguentemente l'arco sarà sicuro (Prob. XXVI).

SCOLIO.

In questa catenaria il primo de' due termini del valore tanto di y quanto di x è identico col valore tanto di y quanto di x nella catenaria omogenea.

Se in luogo di z si sostituisce $\frac{1}{z}$, l'ascissa x conserva il suo valore insieme col segno; l'ordinata y conserva il suo valore cangiando il segno come nella catenaria omogenea.

Se si moltiplica la grossezza dell' arco, e parimente l'espressione a della spinta orizzontale per dz presa come costante; si avrà

$$x = \frac{adz}{2t\,dz}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right) + tdz\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) - \frac{adz+2t^2\,dz^2}{2t\,dz}$$

$$= \frac{a}{2t}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right) - \frac{a}{zt};$$

$$y = -\frac{a}{2t}\,log.\,z.$$

Il limite dunque dell'equazione di questa curva quando si sminuisce la grossezza dell'arco, e per conseguenza la spinta orizzontale, è l'equazione della catenaria omogenea.

PROBLEMA XXVIII.

Se si voglia sopra un arco circolare ABDEF (Fig. 28) *preso come catenaria costruire un arco solido formato de' cunei* Ab, Bd, De, *ecc. che esteriormente non formino una curva continua, ma formino degli archi circolari spezzati* ab, b'd, d'e *concentrici all'arco* AF, *trovar le altezze* Bb' Dd' *di questi cunei.*

SOLUZIONE.

Sia g il raggio di questo circolo. Si avrà $dx : dy = \frac{\sqrt{(2gx - x^2)}}{g - x} : 1 =$ *il peso dell'arco* : a (Coroll. Probl. XXIV). Sarà dunque il peso dell'arco $= \frac{a\sqrt{(2gx-x^2)}}{g-x} = a.$ *Tang. arc.*
Si tiri la AQ tangente al punto A, e si continui il raggio CA sino che sia $AH = \frac{a}{g}$. Per il punto H si tiri la parallela HL. Se per i punti M, N, P, Q passino le CB, CD, CE, CF; i rettangoli formati sulle MA, NM, PN, ecc. tra le parallele AQ, HL saranno gli spazj, a' quali dovranno essere fatti eguali gli spazj $AabB$, $Bb'dD$, $Dd'eE$.

Sia $Dd' = 2t$. Sarà lo spazio

$$Dd'eE = \frac{2t(g+t)DE}{g} = a(Tang.AE - Tang.AD);$$

$$2t = \sqrt{\left(\frac{2ag(Tang.AF - Tang.AD)}{DE} + g^2\right)} - g$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a.PN}{DE} + g^2\right)} - g = Dd'.$$

CAPO IV.

De' Piani composti di Cunei che hanno forza d'Archi.

Quantunque l'unico modo naturale di servirsi della curva dell'equilibrio sia il farla passare per i centri di gravità degli elementi dell'arco, nel qual caso gli archi sono sempre, e generalmente sicuri, tuttavia abbiamo già veduto che ci sono de' casi, ne' quali la curva passando per altra parte, gli archi non ostante sono lontani dal pericolo di cadere. Noi abbiamo esaminato nel Capo precedente i casi, ne' quali la curva dell'equilibrio è posta nel luogo della curva interna, ovvero dell'intradosso; egualmente si potevano esaminare i casi, ne' quali questa curva servirebbe di estradosso. Ma oltre ciò si può fare, che la curva dell'equilibrio sia tutta fuori dell'arco medesimo,

e non ostante l'arco abbia fermezza. Noi abbandoneremo in questa parte tutte le altre supposizioni arbitrarie fuori d'uso, e ci restringeremo a considerare i soli piani composti di cunei in maniera che abbiano forza d'archi.

Sieno sull'orizzontale TZ (*Fig.* 29) posti dei cunei che convergano verzo l'orizzonte, e divisa TZ per metà in M sia la perpendicolare NMX il taglio de' cunei al punto M. Noi potremo anche qui considerare la sola metà $RNMT$ di questo piano di cunei, supponendo immobili i due appoggi NM, RT, poichè l'equilibrio trovato per essa metà servirà egualmente per l'altra. In primo luogo in qualunque supposizione qui non ci sarà pericolo che prendano moto di rotazione i due pezzi $RBET$, $BNME$ nel senso del Problema X; poichè non potrà aggirarsi il punto E intorno al punto R ascendendo stando uniti i pezzi in E come per una cerniera, se non ascende ancora il punto N; nè può aggirarsi il punto B intorno al punto T discendendo, stando uniti i due pezzi in B come per una cerniera se non discende ancora il punto M, che non può discendere senza che discenda il punto N, il quale per essere la $TN > TM$ non può discendere. Non può parimente seguire che un pezzo prenda moto di rotazione mentre l'altro sdrucciola nel senso del Problema XI, se questo moto di rotazione non è possibile ancora senza lo sdrucciolamento dell'altro pezzo per le ragioni addotte verso il fine dello Scolio del Problema XXV. Tutto dunque il pericolo di questo piano si ristringe a due casi, cioè che i due pezzi dell'arco possano sdrucciolare entrambi in senso contrario uno ascendendo, e l'altro discendendo nel senso del Problema XII, o che alcuno d'essi possa prendere separatamente dall'altro un moto di rotazione. Noi verremo a proporre il metodo di schivare questi due pericoli.

PROBLEMA XXIX.

Costruire il piano a cunei RTMN (Fig. 29) *in maniera che i suoi pezzi non possano sdrucciolare un contro l'altro in senso contrario nel senso del Problema XII.*

SOLUZIONE.

Si descriva dal punto M coll'asse verticale MX la catenaria MAS. Sia $MP = x$; $PA = y$. Il raggio di curvatura CA al punto $A = r$, che prolungato in B tagli in E l'orizzontale TZ. Si

tiri la verticale $AF = PM$. Sarà $AE = \frac{ds}{dy} x$, e fatto $dx = pdy$, sarà $AE = x \sqrt{(1 + pp)}$. Si tiri la Cb infinitamente vicina alla CB, sarà $Aa = ds$. Sia la BE grossezza obbliqua del piano in B, e lunghezza del cuneo $BbeE = 2t$; sarà la superficie del cuneo che rappresenta il suo peso

$$= \frac{2t(r + x\sqrt{(1+pp)} + t)}{r} ds.$$

Sia questo $= Sds$, differenziale del peso della curva MAS in A. Se si faccia

$$r + x \sqrt{(1 + pp)} = R;$$

sarà $\quad 2t = \sqrt{(2a(1+pp) + R^2)} - R.$

In questo caso essendo sempre il peso dell'arco $BEMN$ proporzionale al peso dell'arco AM della catenaria, ed essendo i tagli BE perpendicolari alla medesima, col Problema XIV si proverà non potere qui i cunei sdrucciolare l'un contro l'altro nel senso del Problema XII.

COROLLARIO.

Se si tiri la BL perpendicolare sopra la TZ, sarà $\quad BL = 2t \frac{dy}{ds} = \frac{2t}{\sqrt{(1+pp)}}$

$$= \sqrt{\left(2a + \frac{R^2}{1+pp}\right)} - \frac{R}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Si faccia BL costante, sarà costante per conseguenza la quantità

$$\frac{R}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}} + x = \frac{rdy}{ds} + x\ ;$$

sarà dunque $\frac{rdy}{ds} = g - x$, equazione del circolo. Se dunque si vorrà un aggregato di cunei, che sia piano sotto e sopra, converrà che i tagli vadano a un centro solo.

SCOLIO.

Per quanto spetta il pericolo di rotazione, non potrà in alcun caso qualsivoglia pezzo $DVZH$ dell'arco rotarsi in maniera che discenda il punto V in u ascendendo il punto H in h; poichè essendo ottuso l'angolo ZHK fatto dal piano inferiore col raggio della catenaria, sarà molto più ottuso l'angolo VHK, e però, riuscendo la parallela uy minore della VH a cagione della convergenza de' tagli, e la hu ancora minore della uy per essere la hu più vicina alla perpendicolare calata da u sopra la DK, non potrà la costante HV portarsi alla posizione della hu. Si alzi dal punto Z la Zm perpendicolare alla ZV, che tagli in m la linea NDV, che termina superiormente il piano a cunei. Tirato dal punto m il taglio mn

conveniente a quel punto; potendosi la mZ considerare come una verga, la quale potrebbe moversi fra i due piani mn, VZ abbassandosi il punto m, ed alzandosi Z; ciò non potrà seguire se il centro di gravità del pezzo $mnZV$ non venga ad essere tra l'asse NM, e la perpendicolare calata da m (Coroll. V, Probl. VII). Ogni altro pezzo $DHZV$ che ha il punto D tra m, e V al di sopra della mZ, non potrà in alcun caso rotarsi discendendo il punto D, e ascendendo Z a cagione dell'angolo DZV acuto, per la medesima ragione addotta qui sopra per la linea HV. Il pezzo $\mu\nu ZV$, nella quale il taglio $\mu\nu$ sta tra NM ed mn, potrà rotarsi abbassandosi μ, ed alzandosi Z, se tirata la $\mu\varkappa$ perpendicolare alla $\mu\nu$ che tagli in $\varkappa$ la Zm, il centro di gravità del pezzo $\mu\nu ZV$ sarà dalla parte verso l'asse NM per rapporto alla verticale che passa per $\varkappa$. Per non entrare in lunghi, e farraginosi esami, stabiliremo due regole semplici, colle quali schivare i pericoli delle rotazioni in questi piani; una più generale servirà per quelli che son piani inferiormente, e sono formati con qualunque catenaria; l'altra servirà per i piani sotto e sopra formati col circolo (Coroll., Probl. XXIX).

TEOREMA VI.

Se sia nel punto T (Fig. 29) *il peso dell'arco* NMTR *alla costante* a *assunta nell'equazione della catenaria* MAS *di questo piano per esprimere la spinta orizzontale come* NM : MT, *e la linea* NBR *che termina superiormente l'arco sia tutta al di sopra della* NT, *nissuna parte dell'arco* NMTR *potrà soffrire rotazione, e però sarà sicuro.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo nella catenaria MAS, $dx : dy =$ peso $MAS : a =$ peso $NMTR : a$ (Probl. XXIX); sarà $dx : dy = NM : MT$. Sarà però la NT parallela alla tangente della curva al punto S, e però perpendicolare al taglio RT. Ciò posto, essendo in N il concorso delle TN colla perpendicolare all'asse NX alzata da N il pezzo $RTMN$ non potrà rotarsi ascendendo il punto T, e discendendo il punto N, per essere il suo centro di gravità posto in una verticale tra N e T (Coroll. V, Probl. VII). Qualunque pezzo $RT\zeta W$ che ha il punto W posto tra R ed N, non potrà rotarsi ascendendo T, e discendendo W a cagione

dell'angolo acuto WTR (Scolio preced.). Qualunque pezzo $N\omega\varepsilon M$, che ha il punto ε tra T ed M non potrà rotarsi ascendendo ε, e discendendo N per la stessa ragione dell'angolo acuto $N\varepsilon\omega$; e ogni altra rotazione è impossibile in vigore dello Scolio precedente. Dunque l'arco sarà sicuro.

SCOLIO.

Si potrebbe applicare la regola del Teorema precedente al piano di cunei contenuto tra le due parallele NV, MZ (*Fig.* 30), data che fosse la sua grossezza NM, e la metà della sua lunghezza MZ; tirando cioè la NZ, e la ZV perpendicolare ad essa, la quale nel suo concorso colla NM darebbe il centro del circolo che servirebbe di catenaria a questo piano, e ne determinerebbe i tagli (Coroll., Probl. XXIX). Ma noi potremo prendere un raggio minore sino ad un certo limite senza esporre l'arco al pericolo di cadere, e col vantaggio d'una minore spinta orizzontale contro l'appoggio in Z, come passiamo a mostrare.

TEOREMA VII.

Aggiungendo al pezzo NV'ZM (Fig. 30) *il triangolo* V'VZ, *in maniera che la* VZ *determini un altro centro di circolo più vicino alla* MZ *per tutti i tagli del pezzo* NMZV, *si diminuisce al medesimo pezzo la spinta orizzontale.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia il peso del pezzo $NV'ZM = G$. Sarà il peso del pezzo $NVZM = G + \frac{1}{2}\ FZ.V'V$. Essendo la spinta di ogni pezzo al suo peso come $dy : dx$ nella catenaria che ne determina i tagli (Probl. XXIX), sarà la spinta del pezzo $NV'ZM$

$$= G\frac{dx}{dy} = \frac{G.FZ}{FV'},$$

e la spinta del pezzo $NVZM$

$$= \frac{G.FZ + \frac{1}{2}FZ^2\ V'V}{FV' + V'V},$$

la quale è minore della precedente.

SCOLIO.

Nel tempo che cresce l'angolo MZV diminuendosi la spinta orizzontale, cresce ancora

l'angolo MZX formato colla orizzontale dalla XZ perpendicolare alla ZV, e per conseguenza cresce la NX. Per questi aumenti il centro di gravità del pezzo $NMZV$ può restare tra la verticale che passa per X e l'asse NM, nel qual caso ascenderà Z discendendo N (Coroll. V, Probl. VII). Noi troveremo i casi, ne' quali il centro sia nella stessa verticale che passa per X; e determineremo il limite dell'ingrandimento dell'angolo MZX avuto riguardo alla sicurezza del piano.

PROBLEMA XXX.

Date le due NM, MZ (Fig. 30), *trovare un angolo* MZV *tale che il centro di gravità del pezzo* NMZV *si trovi nella verticale che passa per* X.

SOLUZIONE.

Sia la NF divisa per metà in P;

sia
$$FQ = \frac{1}{3}\ FV;$$
$$NM = a;$$
$$MZ = b;$$
$$FV = x.$$

Sarà il peso del pezzo

$$NMZV = ab + \frac{1}{2}\ ax.$$

Essendo il centro di gravità del pezzo $NMZF$ nella verticale che passa per P, e il centro del triangolo ZFV nella verticale che passa per Q, sarà PQ distanza de' due centri

$$= \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} x.$$

Facendo dunque

$$ab + \frac{1}{2} ax : \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} x = \frac{1}{2} ax : PX, \text{ sarà}$$

$$PX = \frac{3bx + 2x^2}{12b + 6x};$$

$$XF = \frac{1}{2} b - \frac{(3bx + 2x^2)}{12b + 6x} = \frac{3b^2 - x^2}{6b + 3x}.$$

Ma è ancora nelle condizioni del Problema

$$x : FZ = FZ : FX;$$

$$FX = \frac{a^2}{x}.$$

Dunque sarà

$$x + 3 (a^2 - b^2) x + 6a^2 b = 0 \; \ldots\ldots \; (M).$$

SCOLIO.

Questa equazione presenta tre valori di x, che conviene esaminare. Noi terremo una strada assai facile. Si prenda NM assai piccola a confronto di MZ; sia per esempio $NM = 1$; $MZ = 100$. Quando l'angolo retto XZV si trova in NZV', il centro di gravità del pezzo $NMZV'$ è tra N e V'.

Si giri l'angolo retto NZV' in maniera sul punto Z che si trovi in XZV diviso per metà dalla verticale ZF. Allora essendo $XF = 1$, e parimente lo spazio $ZXV = 1$, e lo spazio $NMZX = 99\frac{1}{2}$; il centro di gravità del pezzo $NMZV$ sarà tra N ed X. Dunque col moto di quest'angolo noi avremo passata una posizione tale che il centro di gravità del pezzo determinato dalla mobile ZV fosse verticalmente sotto X. Parimente col moto dell'angolo XZV portando noi il punto X vicino ad F avanti che X coincida con F avremo una FV così lunga a confronto della NF, che il centro del pezzo $NMZV$ sarà tra X ed V, e per conseguenza noi avremo passata un'altra posizione dell'angolo XZV, nella quale il centro del pezzo fosse sotto X. La terza radice dell'equazione essendo negativa dà un punto V a sinistra di F, e non serve al nostro caso.

Se si ritenga costante la MZ, e si accresca la MN, i due punti X, X' (*Fig.* 31) posti tra P ed F determinati dall'equazione (M) si avvicineranno fra loro sino alla coincidenza, nel qual caso si avranno due radici eguali nell'equazione; passato il qual limite queste due radici diverranno immaginarie, e resterà la sola radice reale negativa. Un esempio di questo caso sarebbe, se si prendesse NM (*Fig.* 30) cento volte maggiore di MZ. Allora nel caso che l'angolo retto che si fa muovere sia ancora nella sua prima posizione NZV' si ha la FF'' cento volte maggiore della FZ, e però il centro di gravità del pezzo NZV' si trova di già a destra di F tra F e F'', e però movendo l'angolo retto verso destra a qualunque altra posizione XZV, tanto più il centro del pezzo $NMZV$ si porterà lontano da F a destra, e però sarà immaginario ogni caso di un punto X tra N ed F, sotto il quale verticalmente sia posto il centro del pezzo.

Tutto ciò che si è detto di sopra si trova conforme all'equazione medesima (M), nella quale per le regole dell'equazioni del terzo grado finchè $(a^2 - b^2)^3$ è negativo, e maggiore di $-9a^4b^2$, il che è quando a è ancora piccolo a confronto di b, il caso è irreduttibile, e però i tre valori di x sono reali e diseguali; quando $(a^2 - b^2)^3$ restando negativo è $= -9a^4b^2$, il caso diventa riduttibile, e si hanno due radici eguali, passato il qual limite per via dell'aumento di a, il caso porta due radici immaginarie, uno de' quali casi è quando $a = b$.

Ora resta a considerare questi due punti X, X' per rapporto allo schivare qualunque pericolo di rotazione ne' pezzi del piano.

TEOREMA VIII.

Se tutte e tre le radici dell'equazione (M) *del Problema XXX sono reali, il pezzo* NMZV (Fig. 30) *sarà sicuro dalle rotazioni finchè l'angolo retto che si fa muovere sul punto Z partendo dalla posizione* NZV' *sarà arrivato alla posizione* XZV (Fig. 31) *determinata dalla più piccola radice positiva dell'equazione; passato il qual limite ci sarà pericolo di rotazione. Sarà dunque la posizione* ZV *il limite dell'ingrandimento dell'angolo* MZV. *Se due radici dell'equazione saranno immaginarie, non ci sarà alcun limite all'ingrandimento dell'angolo.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Se tutte e tre le radici sono reali, e l'angolo retto non ha oltrepassato il primo punto X (*Fig.* 31) più vicino a P, e determinato dalla minima fra le radici dell'equazione (M), il centro del pezzo $NMZV$ o sarà sotto X, o a destra (Scolio precedente). Messe dunque da parte le rotazioni escluse per qualunque caso dallo Scolio del Problema XXIX nelle quali ascendono le parti a sinistra, discendendo quelle a destra, non potrà rotarsi il medesimo pezzo $NMZV$ nemmeno ascendendo le parti a destra (Probl. VII e Coroll. V del med.). Non potrà nemmeno subire questa rotazione qualunque altro pezzo $mnZX$; poichè tirata la mx perpendicolare alla mn, che tagli in x la ZX, e tirata la verticale xq, si segni nella Nm il punto e posto verticalmente sopra il centro del pezzo $NMnm$; il punto g posto verticalmente sopra il centro del pezzo $mnZV$, e si supponga il centro comune de' due pezzi sotto il punto X. Essendo il peso del pezzo $NmnM$ al peso del pezzo $mnZV$ come $Nm : mV$ (Coroll. Probl. XXIX); sarà $Xg : Xe = Nm : mV$;

$$Xg = \frac{Nm.Xe}{mV.}.$$

Ora è $qx : Xq = NV : NC$;

$mq : qx = NC : Nm$.

Dunque $mq : Xq = NV : Nm$;

$mq - Xq : Xq = NV - Nm : Nm$;

$$Xq = \frac{Nm.Xm}{mV}.$$

Essendo dunque $Xe > Xm$;
sarà ancora $Xg > Xq$; e però essendo il centro del pezzo $mnZV$ posto a destra del punto x, il pezzo non potrà rotarsi (Coroll. V, Probl. VII). Se il centro del pezzo $NMZV$ fosse a destra

di X sotto u;

sarebbe $ug = \frac{Nm.ue}{mV}$,

e però per più ragione maggiore di Xq, e però molto meno potrà rotarsi il pezzo $mnZV$.

II. Non potrà rotarsi neppure il pezzo $NM\nu\mu$ (*Fig.* 32) determinato da qualunque punto μ posto tra N e V. Si tiri la Zu parallela alla $\nu\mu$, la νS perpendicolare alla medesima $\nu\mu$, e la sua parallela Zx. Il centro di gravità del pezzo $NMZu$ sarà a destra del punto x per le condizioni del Teorema (Scolio del Probl. XXX). Si tiri la RT, che seghi per metà le NM, VZ, e sia segata in I dalla verticale che passa per il centro del pezzo $NMZu$; seghi pure in ε, ed in e le $\nu\mu$, zu. Se la $e\varepsilon$ si divida per metà in a, ivi sarà il centro di gravità del pezzo $\mu\nu Zu$; sia verticalmente sopra g il centro del pezzo $NM\nu\mu$. Essendo il peso del pezzo $NM\nu\mu$ al peso del pezzo $\mu\nu Zu$ come $R\varepsilon : \varepsilon e$; sarà $Ia : Ig = R\varepsilon : \varepsilon e$, cioè $I\varepsilon + \frac{1}{2}\,\varepsilon e : Ig = Rg + Ig + I\varepsilon : \varepsilon e$. La qual proporzione non si può verificare se in luogo di Ig si ponga εe, o una quantità maggiore di εe. Sarà dunque $Ig < \varepsilon e$; e per conseguenza $< xS$. Sarà dunque il centro del pezzo $NM\nu\mu$ a destra del punto S; e però non potrà il pezzo rotarsi ascendendo ν, e discendendo N (Corollario V, Problema VII). Questo raziocinio non procederebbe, se il punto X si fosse determinato colla radice positiva maggiore dell'equazione (M); poichè allora il centro del pezzo $NMZu$ potrebbe essere a sinistra di x (Scolio del Probl. XXX).

III. Non potrà rotarsi il pezzo $mn\nu\mu$ (*Fig.* 32) coincidendo questo caso col caso esposto qui sopra in fine del n.º I. Sarem dunque sicuri di qualunque rotazione.

IV. Se due radici dell'equazione (M) sono immaginarie, non può mai il centro del pezzo $NMZu$ esser a sinistra di x; poichè essendo stato a destra nella prima proposizione dell'angolo in NZV' (*Fig.* 30), non può portarsi a sinistra se non passando per punto X determinato da una radice positiva reale dell'equazione (M). E però procedendo allora sempre le dimostrazioni date qui sopra, non ci sarà alcun limite all'ingrandimento dell'angolo.

SCOLIO.

Le tre radici sono ancora reali quando $a = \frac{11}{25} b$; ma due son già divenute immaginarie quando $a = \frac{12}{25} b$. In questo caso adunque, ed in ogni

altro nel quale sia $a > \frac{12}{25} b$ qualunque centro di circolo, che si voglia adoperare a determinare i tagli del piano, servirà alla sua sicurezza.

Se si dividesse per metà la MZ (*Fig.* 32) in L, e alzata la verticale LX, e congiunta la XZ si tirasse la normale ZV, questa nel suo concorso coll'asse determinerebbe in qualunque caso il centro di un circolo opportuno per la sicurezza. Poichè essendo il centro del pezzo $NMZV$ a destra della LX tanto in questa posizione dell'angolo retto XZV, quanto in ogni posizione antecedente; ancora noi non saremo arrivati al primo punto X della *Fig.* 31 determinato dalla radice più piccola dell'equazione (M), e però saremo sicuri.

Con metodi simili si potrebbe trovare la grossezza, e i limiti della sicurezza di un piano fatto a cunei che fosse inclinato all'orizzonte per un dato angolo.

CAPO V.

Dell'Equilibrio degli Archi rampanti e caricati.

Gli archi rampanti sono quelli che sono posti sopra sostegni di ineguale altezza, come gli archi NAD, DK (*Fig.* 33).

Se al luogo di un taglio DE proprio dell'arco $NADM$, in vece della parte dell'arco $MDEP$ si sostituisca il sostegno immobile $DLGE$, il restante dell'arco starà in equilibrio.

Se sopra l'appoggio $FDLH$ si alza un altro arco $KDFX$, nel quale la catenaria abbia nella sua equazione la medesima costante a, che aveva la catenaria dell'arco NAD, avrà anche la medesima spinta orizzontale contraria alla spinta dell'altro arco, e così all'appoggio $FDEGH$ non resterà altro se non sostenere le pressioni perpendicolari de' due archi. Si potranno dunque equilibrare successivamente tra loro più archi rampanti usando in tutte le loro catenarie la medesima costante, che esprime la spinta orizzontale.

Gli archi possono essere caricati o interrottamente in qualche sito, o continuamente in tutta la loro lunghezza.

Se si supponga l'arco $MANQBP$ (*Fig.* 34) costruito in maniera che la sua catenaria $RSXV$ passi per i centri degli elementi (Probl. XXI): se si determini co' due tagli qualunque ED, FT proprj dell'arco, cioè perpendicolari alla catenaria medesima $RSXV$ la porzione dell'arco $DATFBE$; e se a questa porzione si sostituisca la trave in-

flessibile $DEFT$ dello stesso peso, e che abbia il centro di gravità posto nella medesima verticale gG, nella quale si trova il centro di gravità dell'arco; questa starà in equilibrio cogli archi laterali (Teor. III, Probl. VII e XV). Parimente se questa si accorci restandole il suo peso, e restando costante la ragione $Xg:XS$ determinata dalla verticale del centro, e intanto si trasporti parallelo a sè stesso l'arco $TFQN$ sulla direzione XS; ancora si avrà l'equilibrio, restando sempre in tal caso il centro di gravità della trave nel concorso delle due perpendicolari a' piani DE, FT alzate da S e da X. Sarà dunque in equilibrio ancora quando la trave con queste condizioni si sarà tutta raccolta in DET', e parimente se la massa raccolta in DET' si stenda ad occupare lo spazio $mpHDET'Lqn$ di maniera che il suo centro di gravità si conservi nella medesima verticale. Quindi si può trarre il metodo per questi archi carichi interrottamente in qualche sito.

I due tagli DE, FT avranno la stessa inclinazione all'orizzonte, quando il carico si supporrà in mezzo dell'arco.

Ma potendo essere sicuro l'arco anche quando il centro di gravità del pezzo $mpHDET'Lqn$ sia un poco a destra, o a sinistra della verticale determinata qui sopra sino ad un certo limite; noi l'assegneremo, e questo servirà tanto per gli archi costruiti col metodo del Problema XXI, quanto col metodo del Problema XXIV, e assoggettati all'esame del Problema XXVI.

TEOREMA IX.

Se sia il trave ABCD (Fig. 35), *che con le sue due fronti* AC, BD *combaci i due piani inclinati* BD, AC, *e se tirate le* DX, BT *perpendicolari al piano* DB, *e le* AX, CT *perpendicolari al piano* AC, *il centro di gravità del trave sia posto tra le due verticali* XZ, TR; *il trave starà in equilibrio.*

DIMOSTRAZIONE.

Il trave non si potrà muovere discendendo il punto *C*, e ascendendo *B* per essere il centro di gravità dalla parte della verticale *TR*, che è verso *B* (Coroll. V, Probl. VII). Per la medesima ragione non si potrà muovere discendendo *D* e ascendendo *A* per essere il centro dalla parte della verticale *XZ* che è verso *A*. Dunque sarà in equilibrio.

COROLLARIO.

Se dunque nella *Fig.* 34 il centro di gravità del pezzo *mpHDET'Lqn* sarà tra le due verticali determinate con questo metodo, il pezzo medesimo non potrà muoversi sui piani *DE*, *ET'*.

SCOLIO PRIMO.

Se il peso del pezzo *mpHDET'Lqn* sia eguale al peso dell'arco *DATFBE* determinato dalle due posizioni *DE*, *ET'*, e costruito con qualunque metodo, che sia sicuro, e se il suo centro di gravità sia tra le due verticali determinate come nel Teorema IX, starà esso pezzo in equilibrio coi due pezzi di arco *DMPE*, *EQ'N'T'*, che il sostentano Poichè non potendo egli rotarsi in vigore del Teorema IX, non potrà nemmeno fare che si rotolino, o che sdrucciolino in qualunque maniera i pezzi sottoposti per quelle stesse ragioni, per le quali il pezzo *DATFBE* dello stesso peso non può smuovere il medesimo pezzo *DMPE*, e il pezzo *FQNT* eguale al pezzo *EQ'N'T'*, e similmente posto.

SCOLIO SECONDO.

I pezzi d'arco $DMPE$, $EQ'N'T'$ potrebbero ancora costruirsi con catenarie diverse una dall'altra, le quali però avessero la medesima spinta orizzontale; nel qual caso i due tagli DE, ET' potrebbero avere eguale inclinazione all'orizzonte benchè l'arco fosse caricato in fianco. Anche allora il pezzo $mpHDET'Lqn$ dovrebbe avere un peso eguale ai pezzi $DEBA$, $ABFT$ mancanti ai due archi $DMPE$, $FQNT$ sino al taglio AB verticale comune.

Collo stesso metodo si trova l'equilibrio quando si debbano porre sopra l'arco due o più pilastri.

Non ostante che il centro di gravità del pezzo $mpHDET'Lqn$ non fosse dentro i limiti del Teorema IX si potrebbe ancora avere l'equilibrio, se la costituzione del pezzo medesimo per le sue adiacenze fosse tale, che non potesse discendere se non verticalmente.

PROBLEMA XXXI.

Trovare l'equazione per gli archi carichi continuatamente in tutta la loro lunghezza da una materia non fluida.

SOLUZIONE.

Se l'arco MAS (*Fig.* 36) sia caricato per tutta la sua lunghezza dalla materia posta tra l'arco medesimo MAS, e la linea Cn curva o retta; quando questa non sia un fluido, si divida in elementi verticali $naAm$, e facendo

$$MP = x;$$
$$PA = y;$$
$$MA = s;$$
$$AM = X \text{ funzione di } x.$$

Sarà l'elemento

$$Aanm = Xdy,$$

che supposta la materia omogenea sarà l'espressione del suo peso; il qual peso aggiunto al peso dell'elemento Aa supposto $= Sds$;

si avrà $dx : dy = \int \left(\frac{Xdy}{ds} + S \right) ds : a \ldots . (L)$

per l'equazione della curva MAS (Probl. XIII, XIV e XV); e supponendo nullo il peso dell'elemento Aa,

si avrà $dx : dy = \int Xdy : a \ldots . . (P)$.

SCOLIO.

Per mezzo di queste equazioni (L) e (P), data l'equazione della curva MAS, che si volesse impiegare nell'arco, si può avere l'altezza $AM = X$, che serve alla scala de' pesi da sovrapporre. Sia per esempio MAS un arco di circolo, il peso del quale sia disprezzabile a confronto del carico da sovrapporre. Supponendo il raggio $= g$;
sarà $dx:dy = \sqrt{(2gx - x^2)} : g - x = \int Xdy : a$;
e differenziando

$$\frac{ag^2\,dx}{(g-x)^2 \sqrt{(2xg - x^2)}} = Xdy.$$

Ma $$dy = \frac{(g-x)\,dx}{\sqrt{(2gx - x^2)}}.$$

Sarà dunque

$$X = \frac{ag^2}{(g-x)^3}.$$

PROBLEMA XXXII.

Trovare una curva di arco MAS (Fig. 36) *tale, che supponendo nullo il suo peso a confronto del suo carico, lo stesso carico sia terminato superiormente dalla retta orizzontale* Cm.

SOLUZIONE.

Sia $MC = c$;
sarà $Am = X = c + x$;
si avrà dunque $dx : dy = \int (c + x)\, dy : a$.
E facendo $dx = pdy$;
si avrà $adp = (c + x)\dfrac{dx}{p}$;
$ap^2 = x^2 + 2cx$,
non aggiuntavi alcuna costante a cagione che p ed x si debbono annullare insieme. Dalla quale equazione cavato il valore di x, e sostituito nella superiore,
si avrà $dx : dy = \int \sqrt{(c^2 + ap^2)}\, dy : a$.
Dove fatto $c^2 = a$, per essere le costanti arbitrarie, si avrà $dx:dy = \int \sqrt{(1 + pp)}\, dy : \sqrt{a} = s : \sqrt{a}$, equazione della catenaria omogenea.

PROBLEMA XXXIII.

Trovare la curva dell'arco MAS *che deve sostenere un fluido sino all'altezza dell'orizzontale* Cm.

SOLUZIONE.

Essendo la pressione del fluido sopra ogni elemento Aa dell'arco secondo la direzione perpendicolare all'arco medesimo

$$= Am = c + x;$$

se questa si moltiplichi per lo stesso elemento

$$Aa = ds,$$

e si risolva in una pressione verticale colle leggi de' fluidi;

si avrà $(c + x)\,\frac{ds^3}{dy^2}$ per il peso da attribuirsi all'arco $Aa = ds$ nell'equazione della catenaria MAS; che però si avrà

$$dx : dy = \int (c + x)\, dy\, (1 + pp)^{3:2} : a = p : 1;$$

$$\frac{apdp}{(1 + pp)^{3:2}} = cdx + xdx;$$

$$b - \frac{2a}{\sqrt{(1 + pp)}} = x^2 + 2cx,$$

equazione che coincide coll'equazione

$$\int Xdx = B - \frac{Ady}{ds}$$

di M. *Bossut* (*Mem.* 1774, pag. 544), nella quale dovendo annullarsi insieme x e p si avrà $b = 2a$.

COROLLARIO PRIMO.

Sarà dunque la curva MAS la stessa curva elastica che serve al Problema celebre del lenzuolo applicato a un fondo di vaso carico d'acqua, esaminata da *Giacomo Bernulli* negli Atti di

Lipsia 1694, e per la quale *Eulero* (*De Meth. Max. et Min. relat.*, cap. 6, § 24) dà l'equazione seguente $m + 2ky + yy = \frac{2gg}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Essendovi l'*Eulero* arrivato per via della supposizione che il centro di gravità del fluido contenuto nel vaso sia al più basso sito possibile; ne segue, che quando sarà in equilibrio l'arco MAS il centro di gravità del fluido $CMAm$ (*Fig.* 36) sarà al più alto sito possibile data la lunghezza MA dell'arco, e i due punti M ed A.

COROLLARIO SECONDO.

Ne segue ancora che avendo noi ridotto il Problema all'equazione d'una catenaria il peso della quale sia $= \int (c + x)\, dy\, (1 + pp)^{3:2}$; e trovandosi le catenarie per via de' massimi e minimi anche senza il metodo delle Variazioni (Corollario del Problema XIII, e Scolio del Problema XX); si potrà sciogliere senza questo eccellente metodo per via de' massimi e minimi ancora il Problema del lenzuolo, e della curva elastica.

CAPO VI.

Delle Cupole.

Le cupole si possono fare a base circolare, ovale o poligona. In tutte si deve supporre che le sezioni orizzontali sieno figure simili, e aventi il loro centro in un asse verticale, e che però le cupole a base circolare sieno generate dalla rivoluzione d'una curva intorno a quest'asse.

Le cupole circolari possono o rivolgere all'asse la loro convessità, o esser coniche, o finalmente esser concave verso l'asse. Le cupole convesse verso l'asse, e le coniche sono tutte forti abbastanza senza altra teoria come ottimamente il nota M. *Bouguer* (*Mem. Ac.*, 1734); stante che i pezzi, che per la posizione sopra un piano inclinato sarebbero spinti in dentro, sono sostenuti vicendevolmente dallo sforzo eguale degli altri, che sono posti in circolo allo stesso piano. Lo stesso si deve dire di quelle cupole concave verso l'asse, la concavità delle quali non basterebbe a sostenere da sè i pezzi che la compongono. A quello che manca supplisce sempre la figura circolare d'ogni piano che non lascia che alcun pezzo

possa cader in dentro, a cagione dello sforzo eguale per cader in dentro, che si trova in ogni altro pezzo di quel piano circolare; per il che in generale in ogni cupola di base circolare non si può temere una caduta di questa natura. Ma nelle cupole concave verso l'asse vi è una concavità, che è l'ultima che serve all'equilibrio; la quale se si accresca alquanto, i pezzi componenti ciascun anello circolare saranno spinti in fuori dalla pressione della parte superiore della cupola. È da leggersi in questo proposito la citata Memoria. Vi è dunque un limite alla convessità esteriore; non essendovene alcuno alla concavità, ed è espediente trovarlo col calcolo per due ragioni. Prima per assicurarsi di non passarlo nella costruzione delle cupole. Secondo perchè quantunque le cupole convesse verso l'asse sieno già sicure da sè senza teoria; tuttavia oltre il non essere eleganti, hanno una grande spinta orizzontale per isfiancare i muri, su' quali son poste, la quale spinta va calando a misura che cala la convessità verso l'asse; riesce minore nella direzion rettilinea, cioè nelle cupole coniche; e va scemando in quelle che cominciano ad esser concave verso l'asse, fino a che diventa minima nel limite di questa concavità.

Ora per trovar questo limite, si supponga prima la cupola di nissuna grossezza, come si è fatto negli archi considerando in essi la sola linea catenaria. Questa cupola di niuna grossezza non sarà altro se non la superficie che passerà per i centri di gravità degli elementi della cupola solida, che si tratterà di costruire, e per la quale si caverà la grossezza dall'equazione della curvatura di questa medesima superficie che si chiamerà la superficie dell'equilibrio.

PROBLEMA XXXIV.

Trovare l'equazione della curvatura ABM (Fig. 37) *d'una superficie che passa per i centri di gravità degli elementi d'una cupola a base circolare.*

SOLUZIONE.

Essendo generata questa superficie dalla rivoluzione della curva ABM intorno all'asse AC per la supposizione della base circolare; sarà in equilibrio questa superficie, se ogni suo elemento $ABMmbA$ formato dal moto infinitesimo della rivoluzione della curva, e appoggiantesi alla base Mm della cupola, e contro l'asse in A sarà da

sè stesso in equilibrio. Questo elemento $ABMmbA$ lo chiameremo sempre *unghia della cupola*. Ora quest'unghia starà in equilibrio per i Problemi XIII, XIV e XV quando tirate da un punto B le orizzontali BP, Bb, bP, e le infinitamente vicine parallele Ep, Ee, ep, e fatta $AP = x$; $BP = y$, sarà $dx : dy$ come il peso dell'unghia ABb ad una costante. Sia $Mm = d\pi$; $MC = 1$; $BE = ds$; sarà lo spazio $BEeb$ elemento dell'unghia $ABbA = yd\pi ds$. Sia il suo peso $= ySdsd\pi$, essendo S una funzione di s;

$$dx : dy = \int ySdsd\pi : ad\pi = \int ySds : a.$$

COROLLARIO.

Per una superficie omogenea, cioè di peso proporzionale allo spazio, si avrà

$$dx : dy = \int yds : a;$$

e facendo $\quad dx = pdy;$

sarà $\quad p : 1 = \int ydy \sqrt{(pp+1)} : a;$

$$\frac{adp}{\sqrt{(pp+1)}} = ydy;$$

e facendo

$$p + z = \sqrt{(pp+1)};$$

dopo le debite sostituzioni si avrà

$$\tfrac{1}{2} y^2 = - a.log.qz;$$

$$y = \sqrt{2a . log . \frac{1}{qz}};$$

$$x = \int \frac{adz \left(\frac{1}{2z} - \frac{z}{2} \right)}{z \sqrt{2a . log . \frac{1}{qz}}}$$

$$= \frac{(z^2+1)\sqrt{2a . log . \frac{1}{qz}}}{2z^2} - \frac{1}{2}\int dz \sqrt{2a\, log . \frac{1}{qz}}$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} \sqrt{2a . log . \frac{1}{qz}};$$

la superficie dell' unghia sarà

$$= \int yds = -\frac{az}{2} + \frac{a}{2z};$$

e se si esprima $d\varpi$ per Zdz, denotando Z una funzione di z, sarà la superficie della cupola sino alla sezione orizzontale che passa per B

$$= \int Zdz \left(\frac{a}{2z} - \frac{az}{2} \right).$$

Dovendosi annullare y insieme con

$$p = \frac{1 - z^2}{2z},$$

il che succede nel caso di $z = 1$; sarà anche $q = 1$.

SCOLIO.

L'equazione di questo Corollario

$$\frac{1}{2} y^2 = - a . log . qz$$

coincide coll'equazione di M. *Bossut* (*Mem.*, 1776, pag. 589)

$$\frac{y^2}{2} = A\, log . \left(\frac{z + \sqrt{(zz - 1)}}{B} \right),$$

posto che si facciano le convenienti sostituzioni di A ad a, di B a q, e di $z + \sqrt{(zz - 1)}$ ad $\frac{1}{z}$. Questa equazione scioglierebbe egualmente il problema della curvatura di un velo lento attaccato ad un cerchio orizzontale che senza rughe si disponesse per il proprio peso nella forma di un catino.

PROBLEMA XXXV.

Trovare l'equazione per la grossezza d'una cupola, nella quale la superficie dell'equilibrio passa per i centri di gravità degli elementi della cupola.

SOLUZIONE.

Sia il solido $SQqs\varpi ae\varepsilon$ (*Fig.* 38) un elemento dell'unghia solida della cupola, per il centro del quale passi l'unghia superficiale $ABMM'bA$, e sia Qe la lunghezza dell'elemento, ovvero la grossezza della cupola da determinarsi. Si compisca il cuneo $SRQqsr$, e si tirino le orizzontali QT, RV, le verticali Bh, RH; la Rn parallela alla rq, e le nm,

$\nu\mu$ parallele alla qs, $\varepsilon\omega$. Sia $QB = u$; $Be = t$, BR raggio della curvatura $= r$. Si dovranno trovare due equazioni per le due incognite u e t.

Essendo $\quad BH = r\,\dfrac{dx}{ds}$;

$$HP = RV = y - r\,\frac{dx}{ds};$$

ed essendo $\quad Bb = yd\pi$ (Problema XXXIV);

sarà $\quad Rr = yd\pi - r\,\dfrac{dxd\pi}{ds} = nq.$

Sarà pure $\quad Qh = u\,\dfrac{dx}{ds}$;

$$QT = y + u\,\frac{dx}{ds};$$

$$Qq = yd\pi = u\,\frac{dxd\pi}{ds};$$

$$Qn = Qq - Rr = (u+r)\,\frac{dxd\pi}{ds};$$

$$QS = \frac{(u+r)}{r}\,ds.$$

E però sarà la solidità della piramide $SQnmR$

$$= \frac{(u+r)^3}{3r}\,dxd\pi;$$

la solidità del cuneo $mnqsrR$

$$= \frac{(u+r)^2}{2r}\,ds\left(yd\pi - r\,\frac{dxd\pi}{ds}\right).$$

Collo stesso metodo si troverà la solidità della piramide $a\mu\nu eR$

$$= \frac{(r-t)^3}{3r}\,dxd\pi,$$

e la solidità del cuneo $\mu\omega\varepsilon\nu Rr$

$$= \frac{(r-t)^2}{2r}\,ds\left(yd\pi - r\,\frac{dxd\pi}{ds}\right).$$

Si avrà dunque il solido $SQqs\omega\, ae\varepsilon =$

$$(A)\ldots\ldots\left((u+r)^3 - (r-t)^3\right)\frac{dxd\pi}{3r}$$

$$+\left((u+r)^2 - (r-t)^2\right)\frac{dxd\pi}{2r}\left(y - r\,\frac{dx}{ds}\right) = yd\pi Sds,$$

peso attribuito all'elemento dell' unghia superficiale nel Problema XXXIV. Ora essendo il centro di gravità della piramide $SQnmR$ distante da S per un quarto della SR, e il peso del cuneo laterale essendo distante per un terzo, se il peso della piramide si chiami h, e quello del cuneo si chiami c,

sarà $\quad h + c : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) SR = c :$

distanza del centro della piramide dal centro comune. Se dunque il centro di gravità di tutto il cuneo $SQqsrR$ si supponga in una parallela alla SQ che passi per G,

sarà $\quad SG = \frac{1}{4}RS + \dfrac{c}{12\,(h+c)}\,SR = \dfrac{3h+4c}{12(h+c)}\,SR.$

Istessamente se il centro di tutto il cuneo $ae\omega\varepsilon rR$ si supponga in una parallela alla SQ, che passi per L, chiamando h' il peso della piramide $ae\nu\mu R$, e c' il peso del suo cuneo laterale, sarà $aL = \frac{3h' + 4c'}{12(h+c)} aR.$

Ed essendo

$Ga = (u + t) - SG;$

sarà

$$GL = (u+t) - \frac{(3h+4c)}{12(h+c)}(r+u) + \frac{(3h'+4c')}{12(h'+c')}(r-t).$$

Supponendo dunque nella BE il centro di gravità del pezzo $SQqs\omega\varepsilon ea$;

sarà $(h+c) - (h'+c') : h' + c' = GL : GE;$

e per conseguenza

$$GE = \frac{(12(u+t)(h'+c') + (3h'+4c')(r-t))(h+c) - (3h+4c)(h'+c')(u+}{12((h+c)-(h'+c'))(h+c)}$$

donde si ricava, essendo $SG - GE = SE = u$,

$$(3h + 4c)\, r - (3h' + 4c')\, r$$
$$= (9h + 8c)\, u + (9h' + 8c')\, t \ldots\ldots (B).$$

Si sono dunque trovate le due equazioni (A) e (B) per le due incognite u e t, ma restano troppo complicate per l'uso.

SCOLIO.

Se noi volessimo usare per la grossezza delle cupole il metodo dato da M. *Bouguer* (*Mem. Acad.*, 1734), non solamente non si farebbe passare la superficie dell'equilibrio per i centri di gravità degli elementi della cupola, ma non si

verrebbe nemmeno ad avere il peso della cupola proporzionale all'equazione; e però seguirebbero nelle unghie gli sdrucciolamenti del Prob. XII. In fatti egli chiamando e la lunghezza Sa, e facendola tagliare al suo mezzo E dalla linea $BE = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, fa che l'espressione del peso di ciascun elemento sia $ey\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Questa espressione sarebbe vera, se la linea BE passasse per il centro di gravità dell'area $SaeQ$; poichè allora il viaggio del centro di gravità nella rivoluzione della curva ABM intorno l'asse AC sarebbe proporzionale alla y, e per conseguenza secondo la regola Guldiniana vi sarebbe proporzionale ancora la massa, e il peso dell'elemento. Ma la BE, che passa per mezzo alla Sa, non può passare per il centro dello spazio $SaeQ$ se non nel caso che il raggio della curvatura ER sia infinito. Imperciocchè se si tiri la ex (*Fig.* 39) parallela alla aS si avrà il triangolo exQ, che avrà il suo centro g di gravità discosto dalla SQ la terza parte della Qe. Da G centro di gravità del parallelogrammo $Saex$ e posto nella BE si tiri le Gg, che sarà la sesta parte dello Sa; discostandosi la Gg dalla posizione della medesima Sa solamente per un angolo infinitesimo. Nella stessa Gg sarà il centro comune di gravità del parallelogrammo, e del triangolo, cioè il centro dell'area $SaeQ$. Perchè dunque questo centro venisse a cascare in G bisognerebbe che l'area del triangolo exQ non avesse alcuna ragion finita all'area del parallelogrammo $Saex$, e molto meno per conseguenza all'area del triangolo SQR, il che a cagione della simiglianza de' triangoli Qex, QRS può essere solamente quando non vi è ragion finita tra Qe^2 e QR^2.

Essendo di assoluta necessità avere qualche metodo per la grossezza della cupola, senza il quale riesce inutile ogni determinazione di curva, e riuscendo nello stesso tempo cosa comoda il poter determinare la curva interna alla cupola, ovvero l'intradosso; supporremo anche qui che l'intradosso della cupola sia la stessa superficie dell'equilibrio, come abbiam fatto colla catenaria per rapporto agli archi nel Problema XXIV; passando dopo ad esaminare la fermezza delle cupole costruite con questo metodo.

PROBLEMA XXXVI.

Trovare la grossezza Sa *della cupola* (*Fig.* 38) *posto che la superficie dell'equilibrio sia la superficie interna della cupola che passa per* ae.

SOLUZIONE.

Sia il centro di gravità dello spazio $SaeQ$ nella BE parallela ad ae, e sia

$$aE = t;$$
$$ES = u;$$

sarà per le condizioni di questo Problema

$$aR = r;$$
$$ae = ds;$$
$$BP = y + t\frac{dx}{ds};$$

e lo spazio

$$SaeQ = \frac{2(u+t)r + (u+t)^2}{2r}\,ds;$$

e il solido $SaeQqs\omega\varepsilon$ per la regola Guldiniana

$$= \frac{2(u+t)+(u+t)^2}{2r}\left(y + t\frac{dx}{ds}\right)ds = y\,Sds \;\ldots\ldots (A)$$

peso attribuito all'elemento $ae\varepsilon\omega$ dell'unghia superfiziale nella sua equazione. Sia ora in G il centro di gravità del triangolo SRQ, in L il centro del triangolo aeR;

sarà
$$aL = \tfrac{1}{3}r;$$
$$SG = \tfrac{1}{3}r + \tfrac{1}{3}(u+t);$$
$$Ga = Sa - SG = \tfrac{2}{3}(u+t) - \tfrac{1}{3}r;$$
$$GL = \tfrac{2}{3}(u+t).$$

Sarà pure

$$\frac{2r(u+t)+(u+t)^2}{2r}\,ds:\tfrac{1}{2}\,rds = GL:GE;$$

$$\frac{y}{y+t\dfrac{dx}{ds}}\,S:\tfrac{1}{2}\,r = \tfrac{2}{3}(u+t):GE.$$

Ma $\quad GE = SG - SE$; dunque

$$\frac{y}{y+t\dfrac{dx}{ds}}\,S:\tfrac{1}{2}\,r = \tfrac{2}{3}(u+t):\tfrac{1}{3}(r+t)-\tfrac{2}{3}u,$$

$$u+t = \frac{yS(r+3t)}{2yS+\left(y+t\dfrac{dx}{ds}\right)r} \;\ldots\ldots (B).$$

Il qual valore di $u+t$ sostituito nell'equazione (A) darà un'equazione del terzo grado, colla quale si potrà determinare il valore di t.

SCOLIO.

Se si differenzj l'equazione generale della superficie dell'equilibrio $dx:dy = \int ySds:a$ (Problema XXXIV) ritenendo costante dx; si avrà

$$\frac{-dxddy}{dy^2} = \frac{ySds}{a};$$

ed essendo il raggio della curvatura d'ogni curva

$$= \frac{ds^3}{-dxddy};$$

se si faccia $\quad dx = pdy$;

si avrà $\quad r = \dfrac{a(1+pp)}{yS};$

il qual valore sostituito nel denominatore del primo membro dell'equazione (A) del presente Problema, si avrà

$$(2(u+t)r+(u+t)^2)\left(y+t\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = 2a(1+pp) \;\ldots\ldots (C)$$

Ora nel caso di $y=0$ è ancora $p=0$; e però allora si avrà $u+t=\infty$ ovvero $r=\infty$. Ciò parrebbe dimostrare che non si potesse in pratica usare alcuna curva per l'intradosso della cupola, la quale alla sua origine non avesse il raggio infinito, come lo ha di fatti la curva di superficie omogenea d'equilibrio (Corollario, Problema XXXIV) nella quale si ha

$$r = \frac{a(1+pp)}{y};$$

altrimenti s'incorrerebbe nell'assurdo di dover dare alla cupola nella sua sommità una grossezza infinita. Ma riflettendo che nell'equazione $dx:dy = \int ySds:a$, non può mai essere infinita la quantità $\int ySds$, che esprime il peso della cupola per una data ascissa, sinchè non diventa infinita l'espressione $\dfrac{adx}{dy}$, cioè finchè la curva non diventa parallela all'asse, si vede che lo spazio asintotico del solido compreso tra qualunque Sa, che non sia orizzontale, tra l'intradosso, l'estradosso, e l'asse prolungato sarà anch'esso finito, e però in pratica si potrà distribuire e ridurre a qualche forma elegante sul pezzo circolare che viene a chiudere la sommità della cupola.

Ora non resta se non esaminare la fermezza delle cupole costruite con questo metodo della superficie dell'equilibrio posta per intradosso.

PROBLEMA XXXVII.

Trovare i casi più semplici ne' quali le cupole costruite col metodo del Problema XXXVI riescono sicure.

SOLUZIONE.

Essendo la grossezza della cupola

$$= \sqrt{\left(\frac{2a\,(1+pp)^{3:2}}{y\sqrt{(1+pp)}+tp}+r^2\right)}-r,$$

come si ha dell'equazione (C) dello Scolio precedente; se questa grossezza sia BP (*Fig.* 23); sarà $BZ = \frac{dx}{ds}\sqrt{\left(\frac{2a\,(1+pp)^{3:2}}{y\sqrt{(1+pp)}+tp}+r^2\right)}-r\frac{dx}{ds}$

$$= \sqrt{\left(\frac{2ap^2\sqrt{(1+pp)}}{y\sqrt{(1+pp)}+tp}+\frac{r^2p^2}{(1+pp)}\right)}-\frac{rp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Il qual valore di BZ se crescerà sempre crescendo x sarà sicura l'unghia della cupola per le medesime ragioni che si sono portate nella soluzione del Problema XXVII, e che tutte procedono ancora nel nostro caso.

SCOLIO PRIMO.

Per poter esaminare la sicurezza della cupola costruita sopra la superficie omogenea, noi dimostreremo qui prima il lemma che la quantità

$$\frac{(1+z^2)\sqrt{2\log.\frac{1}{z}}}{1-z^2}$$

è sempre maggiore dell' unità qualunque valore positivo si dia alla z. Per far ciò si prenda un qualunque rotto in luogo di z, essendo facile il vedere che la formola ritiene lo stesso valore, se in luogo di questo rotto z si sostituisca l'intiero $\frac{1}{z}$. Se $\sqrt{2\log.\frac{1}{z}}$ è una quantità intiera, il lemma non ha alcuna difficoltà; se è una quantità fratta; essendo in tal caso

$$\sqrt{2\log.\frac{1}{z}} > 2\log.\frac{1}{z};$$

resterà provato il lemma; se noi proveremo che anche in tal caso

$$\frac{2(1+z^2)\log.\frac{1}{z}}{1-z^2}$$

è maggiore dell' unità. Sia $z = 1-u$, sarà anche u una quantità fratta;

e sarà $\quad 1-z^2 = 2u-u^2;$

$$log. \frac{1}{z} = - log. (1 - u)$$

$$= u + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{4} u^4 + u^5 \text{ ecc.}$$

Sarà dunque $\frac{2 (1 + z^2) log. \frac{1}{z}}{1 - z^2}$

$$= \frac{2 (1 + z^2) (1 + u:2 + u^2 :3 + u^3 :4 \text{ ecc.})}{2 - u}$$

maggiore sempre dell'unità a cagione di $\frac{2}{2 - u}$ maggiore dell'unità.

Quanto alla sicurezza della cupola costruita sulla superficie omogenea posta nel luogo dell'intradosso, è da osservarsi che ella non potrà in alcun luogo avere una grossezza maggiore dell'unità, colla quale si determina il valore di a nell'equazione della medesima superficie. Poichè essendo la massa del cuneo troncato $Sq\varepsilon a$ (*Fig.* 38) $= yds$, potendosi in esso al più diminuire le divergenze delle superficie che si alzano sulla base $ae\varepsilon\omega$ sino al limite di un prisma, non soffrendo la natura di alcuna cupola che esse mai convergano verso l'estradosso, ed avendo un prisma $= yds$ piantato sulla base yds per altezza l'unità, questa sarà il limite della grossezza della cupola costruita sulla superficie omogenea. Se noi avessimo questa grossezza BP (*Fig.* 23) $= 1$

costante nel venire da R in P, egli è chiaro che la BZ crescerebbe sempre a cagione dell'angolo crescente BPZ, e per conseguenza crescerebbe sempre ancora la $AX = \frac{1}{2} BZ$ per essere nel prisma il centro di gravità posto nella metà della BP, e per conseguenza la AX sarebbe maggiore della TX (*Fig.* 24), e l'unghia solida sarebbe sicura (Probl. XXVII). Se dunque l'altezza Sa del cuneo (*Fig.* 38) non verrà mai ad essere minore della metà dell'altezza del prisma $= 1$, la BZ (*Fig.* 23) corrispondente all'altezza BP raccorciata per il cuneo non sarà mai minore della AX del prisma, e però maggiore delle AX de' prismi precedenti, e molto più delle AX dei cunei, e però la BZ del cuneo sarà maggiore della TX ne' cunei (*Fig.* 24), e sarà sicura l'unghia. Non resta dunque altro, se non di trovare le condizioni perchè nissun cuneo abbia la sua altezza minore di $\frac{1}{2}$. Essendo quest'altezza del cuneo

$$= u + t = \frac{yr - 3yt}{2y + yr + tr \frac{dx}{ds}},$$

(Probl. XXXVI, equaz. (B)) per essere qui $S = 1$, se si faccia $u + t = n$; $t = mn$, m sarà tra i limiti di $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ per la proprietà del centro di gravità dell'area $SaeQ$ (*Fig.* 38), ed

n non dovrà mai essere minore di $\frac{1}{2}$. Introducendo questi due valori nell' equazione superiore si ha

$$n^2 + n\,\frac{(2-3m)}{r} \times \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{mp} = (1-n)\,\frac{\sqrt{(1+pp)}}{mp}.$$

E sostituendo i valori di y e di p cavati dal Problema XXXIV si avrà

$$mn^2 = (1-n)\left(1+\frac{2-3m}{r}\right)\frac{(1+z^2)\sqrt{2a\,log.\frac{1}{z}}}{1-z^2} \quad \cdots (L)$$

Ora se si prenda a non minore dell'unità sarà in vigore del lemma dimostrato in questo scolio

$$\frac{(1+z^2)\sqrt{2a\ log.\frac{1}{z}}}{1-z^2}$$

maggiore dell'unità, ed essendo

$$r = \frac{a(1+pp)}{y};$$

r avrà un minimo quando

$2ay^2pdp = a(1+pp)\,ydy = a^2dp\sqrt{(1+pp)}$;

ed essendo

$z = \sqrt{(1+pp)} - p$, e $y^2 = -2a\,log.\,z$;

sarà nel caso del minimo

$2y^2p = -4p\,log.(\sqrt{(1+pp)}-p) = \sqrt{(1+pp)}$;

cioè $p = \frac{5}{9}$ assai prossimamente;

$y = \sqrt{2a} \times 0.5306283$, e per conseguenza

$$r = \frac{106\,a}{81\sqrt{2a}\times 0.5306283} = \frac{106\sqrt{a}}{83}$$

prossimamente. Sarà dunque $\frac{(2-3m)}{r} < \frac{1}{2}$.

Se dunque si desse ad n il valore di $\frac{1}{2}$, essendo come abbiam dimostrato

$$\frac{(1+z^2)\sqrt{2a\,log.\frac{1}{z}}}{1-z^2} > 1 \text{ ed } m < \frac{2}{3};$$

non potrà verificarsi l' equazione (L), e molto meno si verificherà se n avrà un valore minore di $\frac{1}{2}$.

Se dunque a si prenda non minore dell' unità, sarà n altezza del cuneo sempre maggiore di $\frac{1}{2}$ e però sarà sicura l' unghia della cupola, e tanto più sarà sicura quanto a sarà maggiore.

Al principio della curva in A (*Fig.* 38), essendo $dx : ds = y : 2r$, e perciò diventando nulla le quantità $rt\,\frac{dx}{ds}$, $3yt$ e $2y$, l'equazione per la grossezza della cupola

$$u + t = \frac{yr + 3yt}{2y + yr + rt\,\frac{dx}{ds}}$$

diverrà $\quad u + t = \frac{yr}{yr} = 1.$

SCOLIO SECONDO.

Nella superficie emisferica dell' equilibrio l'equazione (C) dello Scolio del Problema XXXVI si risolverà nella seguente

$$(D) \ldots\ldots (2(u+t)r+(u+t)^2)(r+t)=\frac{2ar^3}{y(r-x)^2}.$$

Ora essendo pel circolo RPH (*Fig.* 23) costante la divergenza delle BP, bp, non potrà crescere o calare la $PA=t$, senza che istessamente cresca o cali la $BP=u+t$. Cresceranno dunque o caleranno simultaneamente entrambe queste quantità colla quantità $\frac{2ar^3}{y(r-x)^2}$, la quale essendo infinita quando $x=0$, riceve un minimo quando $x=r\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

e torna infinita quando $x=r$. Quando dunque sarà $x>r\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

cresceranno insieme con x le due quantità t ed $u+t=BP$, e molto più crescerà BZ a cagione dell'angolo crescente BPZ. Quanto all'arco AB (*Fig.* 38) corrispondente all'ascissa

$$AP=r\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

noi ce ne assicureremo in questa maniera. Si supponga che sopra la superficie $ae\varepsilon\omega=yds$ si alzasse un solido prismatico $Sq\varepsilon a$ di peso $=ySds$, non avendo per supposizione alcun peso i cunei di materia posti tra i prismi a compire l'arco solido della cupola; allora a cagione delle

superficie parallele si avrebbe l'altezza $Sa=S$ funzione di s, la quale per essere $dx : dy=\sqrt{(2rx-x^2)} : r-x=fySds{:}a$, si trova essere $=\frac{ar}{y(r-x)^2}$.

Ora se questa altezza

$$Sa=S=\frac{ar}{y(r-x)^2}$$

si faccia essere la BP (*Fig.* 23), essendo circolare l'arco RPH,

sarà $$BZ=\frac{y}{r}\,BP=\frac{a}{(r-x)^2},$$

e per conseguenza nella supposizione de' prismi $Sq\varepsilon a$ (*Fig.* 38), BZ crescerebbe sempre crescendo x, e preso il punto A alla metà di BP, dove si trova il centro di gravità del prisma; sarebbe pure la AX parallela alla BZ maggiore di tutte le antecedenti AX. Se ora si distribuisca la massa di tutti i prismi $Sq\varepsilon a$ ad occupare i cunei troncati posti sulla medesima base $ae\varepsilon\omega$, colle divergenze delle superficie convenienti all'unghia solida, allora avendo luogo l'equazione (D), calerà da A in B l'altezza de' cunei $u+t$ insieme colla quantità $\frac{2ar^3}{y(r-x)^2}$.

Sia $u+t=nS=\frac{nart}{y(r-x)^2}=mnS$; introdotti questi valori nell'equazione (D), risulterà la seguente

$$(2nr + n^2 S)(r + mnS) = 2r^2 \ldots\ldots (N).$$

Ora calando da A in B il valore di $S = \frac{ar}{y(r-x)^2}$; e con esso $u + t$, calerà ancora m, che è il rapporto della quantità t alla $u + t$ a cagione del raggio costante, come è facile provare. Dunque nell'equazione (N) dovrà, calando m insieme con S, crescere n, che è il rapporto dell'altezza del cuneo all'altezza del prisma corrispondente a quel punto. Dovrà dunque da A in B crescere il rapporto della BZ raccorciata del cuneo alla BZ del prisma; e però essendo, come si è provato, la BZ del prisma maggiore in ogni punto di tutte le antecedenti, sarà molto più la BZ del cuneo da A sino in B maggiore di tutte le antecedenti dei cunei, e però sarà sicura l' unghia.

Noi saremo sicuri ancora per la cupola, se preso

$$AP = r\left(1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$$

si venga a dare alla cupola per tutto l'arco AB una grossezza costante eguale alla grossezza trovata per il punto B. Poichè sebbene con questo metodo l'unghia presa solitaria non sarebbe in equilibrio, mancando alla parte inferiore la spinta che dovrebbe ricevere dalla parte superiore che

resta alleggerita, tuttavia nella cupola ciò non potrà portare pericolo di rovina; poichè altro non ne nascerà, se non che i pezzi dell'arco inferiore faranno uno sforzo per cadere verso l'asse della cupola, la qual caduta vien loro impedita da un eguale sforzo fatto dagli altri pezzi che sono nel medesimo piano circolare. Non sarebbe lo stesso se si volesse ritener costante la grossezza della cupola di sotto al punto B; poichè i pezzi inferiori resi più leggeri anderebbero a pericolo di schizzar fuori lateralmente; il che seguirebbe infallibilmente avanti che fosse compito l'emisfero, verso il qual limite la grossezza della cupola in vigore dell' equazione deve crescere all' infinito.

CAPO VII.

Delle Cupole caricate.

Le cupole possono essere caricate o interrottamente in qualche loro parte, o di seguito in tutta la loro superficie. I casi ne' quali possono essere caricate interrottamente si ristringono a due. O sono esse caricate nella loro sommità, o lo sono in qualche loro sezione circolare. Se fossero caricate in qualche punto della loro superficie senza essere caricate egualmente in tutti i punti della sezione circolare che passa per quel punto, si perderebbe la figura della cupola.

PROBLEMA XXXVIII.

Trovare l'equazione per la cupola caricata nella sommità di un peso Q (Fig. 37).

SOLUZIONE.

Prendendo l'arco AB che determina la curvatura dell'unghia $ABbA$ della cupola come un arco di catenaria, il peso del quale sia $\int ySds$, come abbiam osservato potersi fare (Probl. XXXIV); se a quest'arco si aggiunga il peso costante Q, secondo il metodo degli archi caricati (Capo V) si avrà l'equazione per la cupola caricata nella sua sommità $dx : dy = \int ySds + Q : a$.

COROLLARIO.

Se l'unghia $ABbA$ sia omogenea, cioè di peso proporzionale alla sua superficie;
sarà $dx : dy = \int yds + Q : a$,
la quale sarà preparata come l'equazione del Corollario del Problema XXXIV, e dovendo qui

essere $p = \frac{Q}{a}$ quando $y = 0$;
essendo $p + z = \sqrt{(1 + pp)}$;
$$y = \sqrt{2}\, a \log. \frac{1}{qz};$$
si troverà $q = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + Q^2)} - Q}$.

PROBLEMA XXXIX.

Trovare l'equazione per la cupola caricata in una sua sezione circolare che passi per B (Fig. 37).

SOLUZIONE.

Costruita coll'equazione $dx : dy = \int ySds : a$ la cupola da A sino in B, nominando T la somma del peso dell'unghia $ABbA$, e del peso aggiunto sopra la parte Bb, ed esprimendo per la costante c il valore trovato dell'ordinata BP per quel punto, si tiri sotto la medesima un'altra ordinata HF, e formato il parallelogrammo $BPFg$ si faccia $Hg = y'$; $Bg = x'$. Si avrà l'equazione per l'arco BHM
$$dx' : dy' = \int (y' + c)\, S'ds' + T : a;$$
nella quale equazione si ritiene lo stesso valore di a dovendosi conservare la spinta orizzontale costante per l'equilibrio.

PROBLEMA XL.

Trovare l'equazione per la cupola MAS (Fig. 36) caricata continuamente sopra tutta la sua superficie.

SOLUZIONE.

Sia il carico dell'elemento generato dalla rivoluzione di $Aa = ds$ espresso da $Xydy$, essendo Am altezza del carico $= X$ funzione di x, ed $aq = dy$; sarà il peso da attribuirsi allo stesso elemento generato dalla rivoluzione di Aa nell'equazione della curva

$$MAS = ySds + Xydy,$$

e però sarà l'equazione della curva

$$dx : dy = \int (ySds + Xydy) : a.$$

COROLLARIO.

Se si consideri per nullo il peso della cupola a proporzione del suo carico,

e sia $\quad X = x + c$

essendo $\quad c = CM;$

si avrà $\quad dx : dy = \int (c + x)\, ydy : a,$

e differenziando col ritener costante dy,

sarà $\quad ddx : dy = (c + x)\, ydy : a;$

$$\frac{addx}{c + x} = ydy^2.$$

Per cangiamento di lettere a $c + x$ si sostituisca y, e ad y si sostituisca x; l'ultima equazione si trasformerà nella seguente

$$ay^{-1}\, ddy = xdx^2.$$

Quest'equazione vien compresa nella equazione generale $\quad ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy,$

la quale si riduce ad un'equazione differenziale del primo ordine dagli autori (*Agnesi, Calc. Integ.*, Part. II, Cap. 4, n.° 55) sostituendo ad x

$$c^{\frac{n+p-1}{m+p}} \times \int zdt, \text{ e ad } y \quad c^{\int zdt}\, t;$$

determinandosi z per t per mezzo dell'equazione

$$(R) \ldots \frac{a(n+p-1)}{(m+p)} \times z^{p-1} dt = t^n (1 + tz)^{p-2} \times$$
$$\left(\frac{1 + 2m - n + p}{m+p} \times zzdt + \frac{m - n + 1}{m+p} \times tz3dt - dz \right).$$

Ma essendo nel nostro caso $n + p - 1 = 0$, verrà ad essere $x = 1$; e l'equazione (R) divenendo

$$2zzdt + tz^5 dt - dz = 0;$$

si avrà $\quad z = -\frac{1}{t},$

e per conseguenza $y = tc^{b - \log.t}$,

che è una quantità costante. Non si può però quindi inferire che la curva non abbia luogo. Di fatti sia $\quad addy = yxdx^2$

e si faccia $ay = C + bx + ex^2 + fx^3 + gx^4 + hx^5 + ix^6 + lx^7 + mx^8 + nx^9 \ldots$;
sarà differenziando

$$ady = bdx + 2exdx + 3fx^2dx + 4gx^3dx + 5hx^4dx + 6ix^5dx + 7lx^6dx + 8mx^7dx + 9nx^8dx \ldots$$

e differenziando di nuovo col ritener dx costante

$$\begin{aligned} addy &= 2edx^2 + 2.3fxdx^2 + 3.4gx^2dx^2 + 4.5hx^3dx^2 + 5.6ix^4dx^2 + 6.7lx^5dx^2 \\ &+ 7.8mx^6dx^2 + 8.9nx^7dx^2 \ldots \\ &= yxdx^2 = \frac{C}{a}xdx^2 + \frac{b}{a}x^2dx^2 + \frac{e}{a}x^3dx^2 \\ &+ \frac{f}{a}x^4dx^2 + \frac{g}{a}x^5dx^2 + \frac{h}{a}x^6dx^2 + \frac{i}{a}x^7dx^2. \end{aligned}$$

Confrontando ora i termini di queste due serie esprimenti il valore di $addy$ si troverà

$$e = 0;$$
$$f = \frac{C}{6a};$$
$$g = \frac{b}{12a};$$
$$h = 0;$$
$$i = \frac{C}{6.30a^2};$$
$$i = \frac{b}{12.42a^2};$$
$$m = 0;$$
$$n = \frac{C}{6.30.72a^3} \ldots$$

Sarà dunque

$$ay = C + bx + \frac{C}{6a}x^3 + \frac{b}{12a}x^4 + \frac{C}{6.30a^2}x^6 + \frac{b}{12.42a^2}x^7 + \frac{C}{6.30.72a^3}x^9 \ldots\ldots$$

E tornando a permutare le lettere x ed y, sarà

$$ac + ax = C + by + \frac{C}{6a}y^3 + \frac{b}{12a}y^4 + \frac{C}{6.30a^2}y^6 + \frac{b}{12.42a^2}y^7 + \frac{C}{6.30.72a^3}y^9.$$

E dovendosi annullare insieme x ed y, sarà $ac = C$, e per conseguenza

$$x = \frac{b}{a}y + \frac{c}{6a}y^3 + \frac{b}{12a^2}y^4 + \frac{c}{6.30a^2}y^6 + \frac{b}{12.42a^3}y^7 + \frac{c}{6.30.72a^3}y^9 \ldots\ldots (Q).$$

La quantità b si determina per la cupola di cui si tratta in questa maniera. Si prenda l'equazione generale

$$dx : dy = \int (c + x)\, ydy + B : a,$$

nella quale B è una costante, che esprime un peso che carica la cupola nella sola sommità M oltre il carico sparso sulla superficie. Differenziando quest'equazione col ritener costante dy, si avrà come prima

$$ddx : dy = (c + x)\, ydy : a,$$

dalla quale equazione è cavata la serie Q. Se in questa equazione (Q) si prendano x ed y infinitamente piccoli, allora diventando trascurabili le quantità y^3, y^4, ecc., si avrà $x = \frac{b}{a} y$. Ma allora essendo nell'equazione generale $dx : dy = B : a$; si avrà $b = B$, e per conseguenza, nel caso del Corollario presente, $b = 0$.

PROBLEMA XLI.

Trovar l'equazione per la cupola MAS (Fig. 36) *carica di fluido, supposto nulla il peso della cupola a confronto del carico.*

SOLUZIONE.

Essendo la pressione dell'elemento $Aanm$ esercitata sull'elemento della superficie dell'unghia yds secondo la direzione perpendicolare al medesimo elemento $= (c + x)\, yds$, se questa si riduca ad una pressione verticale secondo le leggi de' fluidi, come si è praticato nel Probl. XXXIII, diverrà $(c + x)\, y \frac{ds^3}{dy^2}$;

e però si avrà

$$dx : dy = \int (c + x)\, y \frac{ds^3}{dy^2} : a.$$

CAPO VIII.

De' piani circolari composti di cunei che hanno forza di cupole.

Si possono comporre de' piani circolari che abbiano una eguale spinta orizzontale per ogni verso dal centro alla circonferenza essendo così disposti i cunei medesimi A, B, D, E (*Fig.* 40), che colle loro superficie inferiori A, B, D, E, formino il piano circolare orizzontale FGL, e colle loro superficie laterali formino il cuneo FCG determinato da due raggi.

PROBLEMA XLII.

Trovare l'equazione per la grossezza BE (Fig. 41) *del piano circolare a cunei* ZT, *che abbia forza di cupola.*

SOLUZIONE.

Sia MAS la curva della superficie d'equilibrio che ha l'equazione $dx : dy = \int y S ds : a$. Sia $MP = x$;

$$PA = y;$$
$$AC = r \text{ raggio di curvatura};$$
$$Aa = ds \text{ differenziale dell'arco};$$
$$BE = T;$$

e posto Q centro di gravità del trapezio $BEeb$, si tiri QY parallela ad AP; AFX verticale. Sarà

$$EA = \frac{ds}{dy}\, x;$$

e fatto $\quad dx = p\,dy,$

sarà l'area del triangolo

$$CEe = \frac{r + x\sqrt{(1+pp))^2}}{2r}\, ds;$$

l'area del triangolo

$$CBb = \frac{(r + x\sqrt{(1+pp)+T)^2}}{2r}\, ds;$$

l'area del trapezio

$$EebB = \frac{(2rT + 2xT\sqrt{(1+pp)} + T^2)}{2r}\, ds;$$

la distanza da C del centro di gravità K del triangolo

$$CBb = \tfrac{2}{3}(r + x\sqrt{(1+pp)} + T);$$

la distanza da C del centro di gravità I del triangolo $\quad CEe = \frac{2}{3}\,(r + x\sqrt{(1+pp)});$

la differenza KI delle distanze de' due centri

$$= \tfrac{2}{3}\, T.$$

Si avrà dunque

$$\frac{(2rT + 2xT\sqrt{(1+pp)} + T^2)}{2r}\, ds : \frac{(r + x\sqrt{(2+pp))^2}}{2r}\, ds$$

$$= KI : KQ = \tfrac{2}{3}\, T : KQ.$$

Sarà dunque

$$KQ = \frac{2\,(r + x\sqrt{(1+pp)})^2}{3\,(2r + 2x\sqrt{(1+pp)} + T)};$$

$$QE = QK + KI - IE$$

$$= \frac{2\,(r + 2x\sqrt{(1+pp)})^2}{3(2r + 2x\sqrt{(1+pp)} + T)} + \tfrac{2}{3}\,T - \tfrac{1}{3}(r + x\sqrt{(1+pp)});$$

$$QA = QE + EA$$

$$= \frac{2(r + x\sqrt{(1+pp)})^2}{3(2r + 2x\sqrt{(1+pp)} + T)} + \tfrac{2}{3}(T + x\sqrt{(1+pp)}) - \tfrac{1}{3}\,r;$$

$$QX = \frac{dx}{ds}\, QA$$

$$= \frac{2p\,(r + x\sqrt{(1+pp)})^2}{3(2r + 2x\sqrt{(1+pp)} + T)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{2p(T + x\sqrt{(1+pp)})}{3\sqrt{(1+pp)}} - \frac{rp}{3\sqrt{(1+pp)}}.$$

E dovendo essere per la regola Guldiniana

$$BbeE \times QY = BbeE \times (QX + y)$$

$=$ al peso del cuneo $BEeb$, che deve essere $= ySds$;

si avrà

$$\frac{y(2rT + 2xT\sqrt{(1+pp)} + T^2)}{2r}\, ds + \frac{p\,T\,(r + x\sqrt{(1+pp)})^2}{3r\sqrt{(1+pp)}}\, ds$$

$$+ \frac{p\,(T + x\sqrt{(1+pp)})\,(2rd\,T + 2xT\sqrt{(1+pp} + T^2)}{3r\sqrt{(1+pp)}}\, ds$$

$$- \frac{p\,(2rT + 2x\,T\sqrt{(1+pp)} + T^2)}{6\sqrt{(1+pp)}}\, ds = ySds.$$

Dalla quale equazione del terzo grado si potrà cavare il valore T.

SCOLIO.

Per la sicurezza di questo piano servirà il Teorema VI, procedendo qui le stesse ragioni, che procedono nei piani che hanno forza d'archi.

CAPO IX.

Delle Cupole a base poligona ed ovale.

Le cupole a base poligona si costruiscono in maniera che ogni loro sezione orizzontale è un poligono simile al poligono della base. Così nella *Fig.* 42 il poligono $abqdef$ è simile al poligono $ABQDEF$.

PROBLEMA XLIII.

Trovare l'equazione d'una cupola piantata sulla base poligona ABQDEF *di lati pari, e tale, che tutti i lati opposti, come* AB, ED *sieno paralleli ed eguali.*

SOLUZIONE.

Si tiri a qualunque punto M del perimetro della base la MN, che divida in due la base me-

desima, e alla sua metà C si alzi la perpendicolare CX, che sarà l'asse della cupola. Sul medesimo piano della base si tiri l'infinitesima Mu perpendicolare ad MC, sulla quale si alzi l'unghia $MmX\mu u$. Un'unghia simile si adatti al punto, dove la Cu continuata taglia la BA, e così successivamente per tutto il perimetro. Si concepirà la cupola formata di unghie, le quali benchè non compongano una superficie continua, essendo però esse d'una larghezza infinitesima, e dando noi ad esse co' metodi precedenti come se fossero unghie di cupole a base circolare una grossezza finita, ne daranno un solido continuo. Quest'unghia $MmX\mu u$ abbia la curvatura determinata dall'equazione $dx : dy = \int ySds : a$ come nelle cupole circolari (Problema XXXIV) essendo $cX = x$; $cm = y$. Se da qualunque altro punto R del perimetro della base si tira per C la RCS; l'unghia RrX avrà simile equazione.

Sia $\quad cr = y;$

$$\frac{CR}{CM} = m;$$

sarà $\quad y = my;$

$$dy = mdy;$$

e però $\quad dx : dy = \int ySds : ma.$

Sia $\quad dx = pdy = p'dy';$

sarà $p = mp'$;

$$ds = dy\sqrt{(1+pp)} = \frac{dy'}{m}\sqrt{(1+mmp'p')}.$$

Sarà dunque

$dx : dy' = \int y'dy'S\sqrt{(1+mmp'p')} : m^3a.$

E dovendo ancora essere

$dx : dy' = \int y'dy'\ S'\sqrt{(1+p'p')} : a'$,

denotando a' la spinta orizzontale dell'unghia RrX;

sarà $S' = \frac{a'S\sqrt{(1+mmp'p')}}{m^3a\sqrt{(1+p'p')}}$.

Se non si vorrà prendere $a' = a$ converrà almeno prendere a' tale, che si varj insensibilmente da un punto all'altro del perimetro della base, per avere un'insensibile variazione nella grossezza delle unghie.

SCOLIO.

Col metodo precedente ogni unghia $MmX\mu u$ della cupola poligona appoggiandosi colla sua cima alla sommità X della cupola viene ad avere la spinta orizzontale sulla direzione della MC, che parte dal centro della base, e il piano della curva MmX passa per l'asse CX. Se si volesse che la sezione de' piani MmX RrX colla base fossero perpendicolari ai rispettivi lati AB, BQ, si terrà un altro metodo, che noi daremo qui sotto parlando de' volti composti.

Essendo ogni ovale un poligono di lati infinitesimi colle condizioni di questo Problema, il metodo medesimo servirà anche per le cupole a base ovale.

CAPO X.

De' Volti annulari e spirali.

Se intorno all'asse KL (*Fig.* 43) giri circolarmente l'arco MAN, il volto descritto da questa rivoluzione si chiama annulare, il quale viene ad appoggiarsi sopra due sostegni circolari e concentrici.

PROBLEMA XLIV.

Trovare l'equazione per un volto annulare.

SOLUZIONE.

Sieno i sostegni ND, MH (*Fig.* 43), che coi raggi orizzontali DL, HL si rivolgano attorno all'asse KL perpendicolare all'orizzonte, e sia posto sopra essi l'arco $MBARN$. Preso il punto C alla metà di HD, e alzata la perpendicolare CA, sia AP ascissa $= x$, PB ordinata $= y$,

$$AK = CL = f.$$

Se si rivolga l'elemento Bb dell'arco col raggio

$$BQ = y + f$$

intorno all'asse KL con un moto infinitesimo, descriverà un elemento della superficie dell'unghia

$$= (f + y)\ Sdsd\pi.$$

Sarà dunque l'equazione dell'arco

$$ABM\ dx : dy = f\,(f + y)\ Sds : a.$$

Collo stesso metodo si trova l'equazione dell'arco

$$ARN\ dx : dy' = f\,(f - y')\ S'ds' : a.$$

SCOLIO PRIMO.

Volendo per eleganza che la curvatura ARN sia in tutto simile ed eguale alla curvatura ABM, converrà che sia $y' = y$;

$$dy' = dy;$$
$$ds' = ds,$$

e però $f\,(f + y)\ Sds = f(f - y)\ S'ds$;

$$S' = S\frac{f+y}{f-y}.$$

SCOLIO SECONDO.

Per trovare la grossezza conveniente a quest' unghie, posta la superficie dell'equilibrio nel-

l'intradosso, basterà per l'arco ABM nelle equazioni (A) e (B) del Problema XXXVI sostituire $y + f$ in luogo di y. Per l'arco ARN sia nella Fig. 44.

RS la grossezza conveniente all'unghia nel punto R;
RD il raggio di curvatura $= r$;
$Rr = ds$; $RB = t$;
TS parallela alla Rr, $BS = u$.

Sia continuata la Dr in T, e sia nella BE il centro di gravità dello spazio $RrTS$.

Essendo $RQ = f - y$;

sarà $BP = RQ - RF = f - y - t\,\frac{dx}{ds}$;

lo spazio $STrR = \frac{2(u+t)r + (u+t)^2}{2r}\,ds$,

e il solido che gli corrisponderà per la regola Guldiniana

$$\frac{2(1+t)r + (u+t)^2}{2r}\left(f - y - t\,\frac{dx}{ds}\right) ds$$
$$= (f - y)\ S'ds = (f + y)\ Sds \ldots . (A).$$

Ed essendo in G il centro di gravità del triangolo SDT, in L il centro del triangolo RDr; sarà come nel Problema XXXVI,

$$GL = \tfrac{2}{3}\,(u + t),\ \text{e sarà}$$

$\frac{2r(u+t) + (u+t)^2}{2r}\,ds : \frac{1}{2}\,rds = GL : GB$, cioè

$$\frac{f+y}{f-y-t\frac{dx}{ds}} S : \tfrac{1}{2} r = \tfrac{2}{3}(u+t) : \tfrac{1}{3}(r+t) - \tfrac{2}{3} u.$$

Dunque

$$u+t = \frac{(f+y)\,S\,(r+3t)}{2(f+y)S+\left(f-y-t\frac{dx}{ds}\right)r} = RS \ldots (B)$$

(*Fig.* 44).

SCOLIO TERZO.

Si avrà la sicurezza dell'arco ABM, se supposto che quest'arco sia l'arco RPH della *Fig.* 23, e che BP sia la sua grossezza $u+t$ trovata nello Scolio precedente;

$$\text{la } BZ = (u+t)\frac{dx}{ds} = \frac{(f+y)\,S\,(r+3t)}{2(f+y)S+\left(f+y+t\frac{dx}{ds}\right)r} \times \frac{dx}{ds}$$

crescerà sempre crescendo x, e ciò per le ragioni addotte al Problema XXVII. Avuta poi la sicurezza dell'arco ABM, molto più sarà sicuro l'arco ARN; poichè se crescerà sempre la quantità

$$\frac{(f+y)\,S\,(r+3t)}{2(f+y)S+\left(f+y+t\frac{dx}{ds}\right)r} \times \frac{dx}{ds},$$

che è la BZ corrispondente al punto B della *Fig.* 43, molto più crescerà sempre la quantità

$$\frac{(f+y)\,S\,(r+3t)}{2(f+y)S+\left((f-y-t\frac{dx}{ds}\right)r} \times \frac{dx}{ds},$$ che è

la BZ corrispondente al punto r della medesima *Fig.* 43.

SCOLIO QUARTO.

Qualora il volto annulare non venga a compire il circolo attorno all'asse KL (*Fig.* 43) converrà determinare le grossezze de' due archi ABM, ARN col metodo dello Scolio precedente, col quale si ottiene, che ciascun'unghia ABM sia in equilibrio coll'unghia opposta ARN, venendo l'unghia ARN ad avere una grossezza RS maggiore della grossezza dell'unghia opposta nel punto B posto nella stessa orizzontale BR; e ciò in compenso della minor larghezza. Qualora poi il volto annulare venisse a compire il circolo, allora si potrebbe anche al punto R adattare una grossezza eguale, ed anche minore della grossezza, che corrisponde al punto B senza pericolo. Perchè in primo luogo è certo, che anche se mancasse il contrasto di quest'arco ARN, tuttavia l'arco ABM non potrebbe cascare, essendo sostenuto il punto A dallo sforzo eguale che fanno in circolo intorno all'asse KL tutti gli altri punti A delle altre unghie per cascare verso l'asse, dal che nasce equilibrio. E però levando l'arco ARN, questo Problema viene ad esser atto anche per avere una cupola aperta nel mezzo, nella quale la tangente dell'arco MBA nel punto A si volesse orizzontale. In secondo luogo verrà l'unghia ARN, così diminuita di peso, ad avere in A una minore spinta orizzontale di quella che ha l'unghia ABM in senso contrario, e però la medesima unghia ARN non potrà smovere l'altra. In terzo luogo non potrà nemmeno essa unghia ARN essere smossa dall'altra MBA; perchè il punto A per il contrasto circolare non può avvicinarsi all'asse. In quarto luogo non potranno nemmeno le parti AR, RN dell'unghia medesima ARN smoversi vicendevolmente. Poichè la parte RN non potrà smovere la parte AR. Sia (*Fig.* 45) la superficie $AaeuNRA$ l'unghia corrispondente all'arco ARN della *Fig.* 43, nella quale si sminuiscono le Re da A verso N in rapporto delle RQ. Si descriva anche l'unghia $AarnNRA$ eguale all'unghia dell'arco ABM, nella quale le Rr crescono da A verso N in rapporto delle BQ, e per e si tiri la curva $\alpha e v$, che tagli tutte le Rr in una ragione costante di una Re ad er presa ad arbitrio. Egli è certo, che essendo l'unghia $A\alpha e vNRA$ simile all'unghia $AarnNRA$, la quale è tra sè in equilibrio, non potrà in essa unghia la parte $RevN$

smovere la parte $Re\alpha A$. Molto meno dunque la parte $ReuN$ più debole della parte $RevN$ potrà smovere la parte $ReaA$ più forte della $Re\alpha A$. E ciò è tanto più vero, quanto che i cunei $RrTS$ della *Fig.* 44 si vanno più restringendo venendo da A in N nei capi TS; si restringono dissi in quella loro dimensione che è perpendicolare alla superficie $TSRr$, e però tanto più va perdendo di peso l'arco RN a confronto dell'arco AR. Ma nemmeno l'arco AR potrà smovere l'arco RN benchè minore del peso corrispondente all'equazione. Poichè una tale smossa non potrebbe seguire se non nel caso che ascenda il punto R accostandosi all'asse KL. Ma tutti i punti R disposti in circolo intorno all'asse medesimo KL si contrastano vicendevolmente quest' avvicinamento. Dunque dando all'unghia ARN una grossezza eguale alla grossezza della ABM non ci sarà niente a temere per la sicurezza.

PROBLEMA XLV.

Trovare l'equazione per l'arco annulare MAN (Fig. 43) *carico di solido in tutta la sua superficie sino all'orizzontale* FG *supponendo nullo il peso dell'arco a confronto del suo carico.*

SOLUZIONE.

Sia il carico dell' elemento generato dalla rivoluzione di Bb, ovvero $Rr = ds$ espresso da $(c + x)(f \pm y)\,dy$, essendo $EA = c$;
sarà $dx : dy = f\,(c + x)(f \pm y)\,dy : a$,
e differenziando col ritener dy costante,
si avrà $addx = (c + x)(f \pm y)\,dy^2$;
la qual equazione maneggiata col metodo del corollario del Problema XL darà

$$x = \frac{b}{a}y + \frac{cf}{2a}y^2 + \left(\frac{bf}{6a^2} \pm \frac{c}{6a}\right)y^3 + \left(\frac{cf^2}{24a^2} \pm \frac{b}{12a^2}\right)y^4$$
$$\left(\frac{bf^2}{6.20a^3} \pm \frac{cf}{30a^2}\right)y5 + \left(\frac{cf^3}{24.30a^3} \pm \frac{bf}{120a^3} + \frac{c}{180a^2}\right)y^6$$
$$\left(\frac{bf^3}{6.20.42a^4} \pm \frac{cf^2}{14.40a^3} + \frac{b}{12.42a^3}\right)y^7 +$$
$$\left(\frac{cf^4}{24.30.56a^4} \pm \frac{bf^2}{5.56a^4} + \frac{7cf}{6.30.56a^3}\right)y^8 \ldots\ldots (S)$$

ove la quantità b ha lo stesso valore, che ha nell'equazione generale
$dx : dy = f\,(c + x)(f \pm y)\,dy + b : a$,
nella quale b è un peso aggiunto sulla sommità A dell'arco annulare, e che però nel caso del nostro Problema è nulla.

SCOLIO.

Se il volto annulare fosse carico di fluido, l'equazione sarebbe

$$dx : dy = f\,(c + x)(f \pm y)\,\frac{ds^3}{dy^2} : a$$

(Vedi Problema XLI).

PROBLEMA XLVI.

Trovare la curva MAN *di un volto spirale, che nel girarsi intorno all' asse* KL *va continuamente montando.*

SOLUZIONE.

Le unghie ABM, ARN avranno la stessa equazione del volto annulare, dando loro la grossezza col metodo dello Scolio II del Problema XLIV col quale ciascuna unghia sta in equilibrio colla sua opposta, non avendo noi qui il vantaggio del contrasto circolare spiegato nello Scolio IV.

SCOLIO.

Così il volto spirale risulterà da unghie, le quali non comporranno una superficie continua, ma che essendo infinitesimali di larghezza, e ricevendo una grossezza finita daranno un solido continuo.

CAPO XI.

Degli Archi e Volti composti.

PROBLEMA XLVII.

Trovare *l'equazione per l'equilibrio di tre archi* AQ, DQ, BQ (Fig. 46), *i piani de' quali perpendicolari all'orizzonte facciano tra loro gli angoli* ACB, BCD, DCA, *e l'asse principale de' quali cioè l'asse verticale e perpendicolare alla curva sia l'asse comune* CQ.

SOLUZIONE.

Non esercitando tra loro questi tre archi se non la spinta orizzontale per essere tutti e tre

perpendicolari nel punto Q all'asse CQ, si avrà l'equazione per l'arco AQ, secondo le leggi della composizione delle forze

$$dx : dy = \int Sds : a.\ \text{sen}\ DCB;$$

per l'arco BQ

$$dx : dy = \int Sds : a.\ \text{sen}\ DCA;$$

per l'arco DQ

$$dx : dy = \int Sds : a.\ \text{sen}\ ACB.$$

Nelle quali equazioni può esser diversa la funzione espressa per S.

PROBLEMA XLVIII.

Trovare l'equazione per l'equilibrio di tre archi AQ, DTQ, BSQ (Fig. 47) *i piani dei quali perpendicolari all'orizzonte facciano tra loro gli angoli* ACB, BCD, DCA, *e nei quali l'asse principale dell'arco* DTQ *sia* NT *tra* D *e* C, *e l'asse principale dell'arco* BSQ *sia* MS *tra* B *e* C.

SOLUZIONE.

Sarà l'equazione per l'arco DTQ sull'asse TN

$$dx : dy = \int Sds : a.\ \text{sen}\ ACB;$$

per l'arco BSQ sull'asse SM

$$dx : dy = \int Sds : a.\ \text{sen}\ DCA;$$

per l'arco AQ, che deve sostenere i due archi QS, TQ, se si faccia la somma de' loro pesi $= Q$; sarà l'equazione preso per asse QC

$$dx : dy = \int S ds + Q : a. \text{ sen } DCB.$$

PROBLEMA XLIX.

Trovare l'equazione per l'equilibrio di tre archi ASQ, BQ, DQ (Fig. 48), *i piani de' quali perpendicolari all'orizzonte facciano tra loro gli angoli* ACB, BCD, DCA, *e ne' quali l'asse principale* MS *dell'arco* ASQ *sia tra* A *e* C.

SOLUZIONE.

Sarà l'equazione per l'arco ASQ sull'asse SM

$$dx : dy = \int S ds : a. \text{ sen} BCD;$$

e diviso il peso dell'arco SQ in due parti arbitrarie K e P, sarà, preso per asse QC, l'equazione per l'arco BQ

$$dx : dy = \int S ds + K : a. \text{ sen. } ACD;$$

per l'arco DQ

$$dx : dy = \int S ds + P : a. \text{ sen. } BCA.$$

SCOLIO PRIMO.

Se l'arco QRD si interrompa in R, e levando l'arco RD gli vengano sostituiti gli archi RL, RN,

i piani de' quali fanno col piano dell'arco QRD gli angoli LTC, NTC; allora diviso l'aggregato del peso dell'arco QR, e di P in due parti arbitrarie H e G,

e preso $$b = \frac{a. \text{ sen } BCA}{\text{sen } LTN},$$

e la perpendicolare RT per asse, sarà l'equazione dell'arco RL

$$dx : dy = \int S ds + H : b. \text{ sen } NTC;$$

dell'arco RN

$$dx : dy = \int S ds + G : b. \text{ sen } LTC$$

SCOLIO SECONDO.

Con un metodo simile si troverà l'equilibrio di quattro archi, o più concorrenti ad un sol punto.

PROBLEMA L.

Posto che l'arco MAS (Fig. 49) *sostenga in ogni suo punto* A *due archi laterali* APR, AQT *posti in un medesimo piano* RPAQT, *il quale faccia qualunque angolo col piano* MAS, *e tali che abbiano uno contro l'altro un' eguale spinta orizzontale; trovare l'equazione dell'arco* MAS *per il suo equilibrio.*

SOLUZIONE.

Se gli archi APR, AQT hanno i loro assi principali PH, QV dalla parte medesima degli archi, cioè PH, tra A ed R, e QV tra A e T presa la somma del peso di tutti gli archi PA e QV, che sia $\int \Sigma ds$, e il peso dell'arco $MA = \int S ds$; essendo Σ, ed S funzioni dell'arco MA, o della sua ascissa x, o della sua ordinata y, sarà l'equazione del medesimo arco MA

$$dx : dy = \int (\Sigma + S)\, ds : a.$$

Se uno degli archi, per esempio $AQ'T'$ avesse il suo asse principale tra A ed R; allora sottraendo dal peso dell'arco PA la quantità del peso dell'arco mancante all'arco $AQ'T'$ da A sino all'asse suo principale, per la qual parte l'arco $AQ'T'$ sostiene l'arco AP, e fatto questo residuo $= \Sigma ds$; sarà l'equazione come sopra

$$dx : dy = \int (\Sigma + S)\, ds : a.$$

Se anche l'arco $AP'R'$ avesse l'asse suo principale tra A e T, sommati insieme i pesi degli archi mancanti agli archi $AQ'T'$, $AP'R'$ da A sino agli assi principali, e fatta questa somma $= \Sigma ds$; sarà $dx : dy = \int (S - \Sigma)\, ds : a$; dove dovrà essere $S > \Sigma$.

PROBLEMA LI.

Posto che l'arco MAS (Fig. 50) *sostenga in ogni suo elemento* Aa *due archi laterali* VAau, NAan, *i piani de' quali* VRA, NQA *fanno tra loro l'angolo* RAQ, *e le spinte orizzontali dei quali dieno una spinta composta sulla direzione* AP *del piano* MAS; *trovare l'equazione dell'arco* MAS *per l'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Se sia $MP = x$; $PA = y$; la spinta composta degli archi $VAau$, $NAan = cYdy$; la spinta dell'arco MA in $M = a$; il peso de' due archi $VAau$, $NAan = b\Sigma dy$; il peso dell'arco $MA = \int S ds$; sarà l'equazione della curva MAS per le stesse leggi conosciute della catenaria

$$dx : dy = \int b\Sigma dy + \int S ds : \int cY dy + a.$$

COROLLARIO PRIMO.

Se gli assi principali VR, NQ degli archi VA, NA sieno ne' piani RVM, QNM perpendicolari a' piani VRA, NQA rispettivamente; cioè

RVM ad *RVA*, e *QNM* a *QNA*, e sieno eguali tra loro, e costanti gli angoli *RAP*, *PAQ*, e se gli archi *VA*, *NA* sieno catenarie omogenee colla spinta orizzontale $= 1$, e il peso dell'arco *MA* sia nullo al confronto del peso della somma delle catenarie da *M* in *A*, e per conseguenza sia ancora la sua spinta $a = 0$;

fatto $\quad RP = by,$

e l'arco elementare

$$VAau = VA.\,Vu = VA.\,bdy,$$

e fatto $\quad VA = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z};$

sarà $\quad RA = log.\,z,$

e fatto $\quad RA = cy;$

sarà $\quad \frac{dz}{z} = cdy.$

Sarà dunque la somma di tutti gli archi *VAau*, cioè il volto *MVA*

$$= \int \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2z}\right) bdy = \int \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2z}\right) \frac{bdz}{cz}$$

$$= \frac{b(z^2+1)}{2cz} - \frac{b}{c} = \frac{b(z-1)^2}{2cz};$$

dovendo esser nullo questo peso quando $z = 1$; e però sarà la somma di tutti gli archi *VAau*, ed *NAan*, cioè il volto composto

$$MVAN = \frac{b(z-1)^2}{cz}.$$

Essendo pure la spinta orizzontale dell' arco

$$VAau = 1.\,Vu = bdy,$$

si avrà la spinta composta di quest'arco, e dell'arco eguale e simile *NAan* sulla direzione *AP*

$$= \frac{sen.\,2\,RAP}{sen.\,RAP}\,bdy = 2\,cos.\,RAP.\,bdy,$$

e fatto $2\,cos.\,RAP = g$, sarà la somma di tutte le spinte composte da *M* sino in *A*

$$= bgy = \frac{bg\,log.\,z}{c}.$$

Sarà dunque l'equazione della curva *MAS*,

$$dx : dy = \frac{(z-1)^2}{z} : g\,log.\,z;$$

cioè $dx = \frac{dz\,(z-1)^2}{cgz^2\,.\,log.z} = \frac{1}{cg}\left(\frac{dz}{l.z} - \frac{2dz}{zl.z} + \frac{dz}{z^2\,l.z}\right),$

ed essendo

$$\int \frac{dz}{l.z} = l.l.z + l.z + \frac{1}{2.2}(l.z)^2 + \frac{1}{2.3.3}(l.z)^3$$

$$+ \frac{1}{2.3.4.4}(l.z)^4 + \frac{1}{2.3.4.5.5}(l.z)^5 \ldots$$

così pure $\quad -\int \frac{2dz}{zl.z} = -2l.l.z;$

$$\frac{dz}{z^2\,l.z} = -\frac{d\frac{1}{z}}{l.\frac{1}{z}} = \frac{dl.\frac{1}{z}}{l.\frac{1}{z}} + dl.\frac{1}{z} + \frac{1}{2}l.\frac{1}{z}\,dl.\frac{1}{z}$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(l.\frac{1}{z}\right)^2 dl.\frac{1}{z} + \frac{1}{2.3.4.}\left(l.\frac{1}{z}\right)^3 dl.\frac{1}{z} \ldots$$

per essere $\quad \frac{dl.\frac{1}{z}}{l.\frac{1}{z}} = \frac{dl.z}{l.z}$

si avrà $\int \frac{dz}{z^2\, l.z} = l.\,l.\,z + l.\,\frac{1}{z}$

$$+ \frac{1}{2.2}\left(l.\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2.3.3.}\left(l.\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.4}\left(l.\frac{1}{z}\right)^4 \ldots\ldots$$

$$= l.\,l.\,z - l.\,z + \frac{1}{2.2}\left(l.\,z\right)^2 - \frac{1}{2.3.3}\left(l.\,z\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.4}\left(l.\,z\right)^4$$

e finalmente

$$cgx = \frac{1}{2}\left(l.\,z\right)^2 + \frac{1}{3.4.4}\left(l.\,z\right)^4 + \frac{1}{3.4.5.6.6}\left(l.\,z\right)^6 + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.8}\left(l.\,z\right)^8 \ldots\ldots;$$

nella quale equazione fatto $z = 1$ si trova $x = 0$.

Se a z si sostituisce $\frac{1}{z}$, si ha lo stesso valore e lo stesso segno nel differenziale $\frac{dz\,(z-1)^2}{z^2\, l.z}$ e nel suo integrale, appunto come nel differenziale, e nell' integrale, dell'ascissa della catenaria.

Differenziando la serie del valore di cgx si ha

$$\left(l.\,z\right)\frac{dz}{z} + \frac{1}{3.4}\left(l.\,z\right)^3 \frac{zd}{z} + \frac{1}{3.4.5.6}\left(l.\,z\right)^5 \frac{dz}{z} \ldots\ldots$$

Dunque

$$\frac{(z-1)^2}{z} = \left(l.\,z\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(l.\,z\right)^4 + \frac{1}{3.4.5.6}\left(l.\,z\right)^6 \ldots\ldots;$$

il che coincide colla somma della Serie

$$1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3\ldots8} + \frac{x^{10}}{1.2.3\ldots10} \ldots\ldots = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$$

trovata dal celebre *P. Fontana* (Società Italiana, tom. II, *Memoria sulle Serie*, Problema II).

Se sia $z = 1 + \omega$, e sia ω una quantità infinitamente piccola,

sarà $log.\,(1 + \omega) = \omega$, e però $dx = \frac{\omega dz}{cgz}$.

Sarà dunque dx infinitesima a confronto di dy, e però la curva al suo principio in M sarà perpendicolare all' asse.

È da notarsi, che in questa maniera il volto MVA è composto di archi $VAau$ elementari di superficie non continua tra loro, ma che però, dando loro una grossezza finita co' metodi spiegati, compongono un volto solido continuo.

COROLLARIO SECONDO.

Poste tutte le condizioni del Corollario I se non che la curva VA sia la catenaria della grossezza costante del Problema XXVII chiamando in essa P il suo peso, a la sua spinta, essendo in essa come in tutte le catenarie

$$d.\,VR : d.\,RA = P : a;$$

cioè $$d.\,VR : cdy = P : a;$$

sarà il peso del volto

$$VAM = \int Pbdy = \int \frac{ab\, d.VR}{c} = \frac{ab.RV}{c}$$

$$= \frac{(z-1)_2}{2z} \times \frac{a^2 b}{2ct} - \frac{(z-1)^2\, abt}{(z^2+1)\,c}.$$

Essendo pure la spinta orizzontale dell' arco

$$VAau = a.\ Vu = abdy,$$

sarà la somma di tutte le spinte composte da M sino in A

$$= abgy = \frac{abg}{c}\left(\frac{a}{2t} \log. z - \frac{(z^2 - 1)}{z^2 + 1} t\right).$$

Sarà dunque l' equazione della curva MAS,

$$dx : dy = \frac{(z-1)^2}{z} \times \frac{a}{2t} - \frac{2(z-1)^2}{z^2+1} t : g \left(\frac{a}{2t} \log. z - \frac{(z^2-1)}{z^2+1}\right.$$

cioè per essere $dy = \frac{adz}{2ctz} - \frac{4tzdz}{c(z^2+1)^2}$ sarà

$$dx = \frac{(a(z^2+1)^2 - 8t^2 z^2)(a(z-1)^2(z^2+1) - 4zt^2(z-1)^2)dz}{2gctz^2(z^2+1)^2(a(z^2+1)\log. z - 2t^2(z^2-1))},$$

nella quale equazione pure fatto $z = 1 + \omega$, come nel Corollario precedente, si trova la curva al suo principio in M perpendicolare all'asse.

COROLLARIO TERZO.

Se siano gli archi VA, NA circolari col raggio costante da M in $A = r$, e colla spinta orizzontale $= 1$, e tutto il restante come nel Corollario precedente;

posta $VR = z$;

$$RA = u = cy,$$

essendo nel circolo

$$dz : du = \sqrt{(2rz - z^2)} : r - z,$$

sarà il peso dell' arco equilibrato

$$VuaA = \frac{\sqrt{(2rz - z^2)}\,bdy}{r - z} = \frac{\sqrt{(2rz - z^2)}\,bdu}{(r-z)c} = \frac{bdz}{c},$$

essendo la spinta composta come nel Corollario precedente $= bgdy = \frac{bgdu}{c}$.

Sarà dunque l' equazione dell'arco MAS

$$dx : dy = z : gu;$$

cioè, essendo $dy = \frac{du}{c}$,

sarà $dx = \frac{zdu}{cgu}$,

ed essendo $z = r - \sqrt{(r^2 - u^2)}$, sarà

$$dx = \frac{rdu}{cgu} - \frac{\sqrt{(r^2 - u^2)}\,du}{cgu} = \frac{rdy}{cgy} - \frac{\sqrt{(r^2 - c^2y^2)}\,dy}{cgy}$$

$$x = \frac{c}{gr}\left(\frac{y^2}{2.2} + \frac{c^2y^4}{2.4.4r^2} + \frac{1.3\,c^4y^6}{2.4.6.6r^4} + \frac{1.3.5\,c^5y^8}{2.4.6.8.8\,r^6} \ldots\right)$$

PROBLEMA LII.

Posti gli angoli RAP, PAQ *ambidue semiretti, e l'arco* MAS *un quarto d'ellisse il cui semiasse maggiore sia la diagonale* SC, *e il semiasse minore sia* MC *eguale ad un lato del quadrato* BCDS, *e posto che gli archi* VA *ed* NA *debbano avere la loro sommità* V *ed* N *nelle orizzontali* ML, MT, *trovare l'equazione degli archi eguali equilibrati* VA, NA *per avere l'equilibrio anche dell'arco ellittico* MAS, *che li sostiene.*

SOLUZIONE.

Se sia $MC = b$;
$CS = h$;
$MP = x$;
$PA = y$;

sarà $PA = \frac{h}{b} \sqrt{(2bx - x^2)}$;

e $dx : dy = b \sqrt{(2bx - x^2)} : h(b - x)$,

nella qual ragione dovrà essere il peso di tutto il volto MVA, MAN alla spinta orizzontale composta, che tutto questo volto esercita contro il punto A sulla direzione PA, la quale spinta sta alla somma delle due spinte componenti sulle direzioni RA, QA come $SC : BS + SD = h : 2b$. Dovrà dunque essere il peso di tutto il volto VMA alla sua spinta orizzontale sulla direzione RA nella ragione di $\sqrt{(2bx - x^2)} : 2(b - x)$.

Fatto precisamente il peso del volto

$$MVA = \sqrt{(2bx - x^2)},$$

e la sua spinta orizzontale sulla direzione RA

$$= 2(b - x),$$

differenziando entrambe le quantità si avrà

$$\frac{(b - x)\, dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$$

per il peso dell'elemento $VuaA$, e $- 2dx$ per

la sua spinta, che riuscendo negativa ricercherebbe gli angoli RAP, PAQ eguali ciascuno a tre semiretti, nel qual caso la spinta composta sulla direzione AP si conserva della stessa quantità colla sola mutazione del segno.

Volendo dunque, che la spinta dell'elemento $VuaA$ riesca positiva almeno sino a qualche limite, si troverà, che fatto il peso del volto $MVA = x^m \sqrt{(2bx - x^2)}$, e la sua spinta eguale a $2x^m (b - x)$, nel qual caso si conserva la ragione tra il peso e la spinta richiesta per l'equilibrio dell'arco MAS, e differenziando entrambe le quantità si avrà

$$\frac{\left((2m + 1)\, bx^{2m} - (m + 1)\, x^{2m + 1}\right) dx}{\sqrt{\left(2bx^{2m + 1} - x^{2m + 2}\right)}}$$

per il peso dell'arco elementare $VAau$,

e $$2\left(mbx^{m - 1} - (m + 1)\, x^m\right) dx$$

per la sua spinta orizzontale sulla direzione RA; la quale spinta dura positiva sino che $x = \frac{mb}{m+1}$, nel qual caso si annulla. Non potrà dunque mai durar positiva sino che $x = b$, e tanto più x si potrà accostare al valore di b, quanto m sarà stato preso maggiore. Che se si facesse il peso del volto $MVA = \frac{2bx - x^2}{b - x}$,

e la sua spinta $= 2\sqrt{(2bx - x^2)}$,

le quali due quantità sono pure nella richiesta ragione; allora differenziando entrambe le quantità si avrebbe il peso dell'arco $VAau$

$$= \frac{b^2\,dx}{(b-x)^2} + dx,$$

e la sua spinta $= \frac{2(b-x)dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$,

nel qual caso la spinta dura positiva sino che $x = b$, divenendo allora infinito il coefficiente $\frac{b^2}{(b-x)^2}$ che entra nell' espressione del peso. Data dunque in alcuna di queste maniere la ragione del peso dell'arco $VAau$ alla sua spinta orizzontale, devesi trovare l'equazione della curva VA, nella quale dovendo essere al punto A la differenza dell'ascissa VR alla differenza dell'ordinata RA appunto in questa ragione del peso dell'arco $VAau$ alla sua spinta, la quistione si ridurrà a questo Problema: *Data un'ascissa dell'asse* VR *perpendicolare alla curva colla sua ordinata* RA, *e la sottotangente al medesimo punto* A, *trovare l'equazione della curva.* Il quale è un Problema indeterminato.

Si faccia $V\rho$ ascissa della curva $VA = z$;

$\rho a = u = m\sqrt{(2nz - z^2)}$ essendo m, ed n due indeterminate costanti nella descrizione della curva VA, che riuscirà un'ellissi. Sia la RA, ordinata che taglia la curva MAS, $= q$; la sua ascissa $VR = e$; sarà allora

$$m\sqrt{(2nz - z^2)} = m\sqrt{(2ne - e^2)} = q,$$

e però $m = \frac{q}{\sqrt{(2ne - e^2)}}$.

Sia per il medesimo punto A la ragione data di dz a $du = f : q = dz : \frac{m(n-z)dz}{\sqrt{(2nz - z^2)}}$;

sarà, fatta la sostituzione del valore di m e di $z = e$,

$$f : q = e(2n - e) : q(n - e),$$

e però $n = \frac{e(f-e)}{f - 2e}$.

Il qual valore di n sostituito nel valore di m darà $m = \frac{q\sqrt{(f - 2e)}}{e\sqrt{f}}$.

Se si prenda il peso del volto MAV

$$= \frac{2bx - x^2}{b - x},$$

e la sua spinta $= 2\sqrt{(2bx - x^2)}$,

nel qual caso la ragione del peso dell'elemento $VAau$ alla sua spinta è di

$$\frac{b^2 + (b-x)^2}{(b-x)^2} : \frac{2(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$$

$$= \frac{b^2 + (b-e)^2}{(b-e)^2} : \frac{2(b-e)}{\sqrt{(2be - e^2)}} = f : q;$$

essendo $q = RA = \sqrt{(2be - e^2)}$;

sarà $f = \frac{e}{2}\left(\frac{b^3}{(b-e)^3} + \frac{b^2}{(b-e)^2} + \frac{b}{b-e} + 1\right) > 2e$;

per il che riesce sempre reale la quantità

$$m = \frac{q\sqrt{(f-2e)}}{e\sqrt{f}}.$$

Sarà ancora m sempre maggiore dell'unità, e però l'ellissi $V\alpha A$ avrà l'asse maggiore orizzontale, e in conseguenza collocandola nell'intradosso, sarà sicuro l'arco (Corollario del Prob. XXVI). Poichè sostituendo il valore di f e di q nella formola del valore di m, si avrà

$$m = \sqrt{\left(1 + \frac{2(b-e)(2b-e)^2}{b^3 + b^2(b-e) + b(b-e)^2 + (b-e)^3}\right)}$$

il qual valore è maggiore dell'unità per essere positive tutte le quantità inchiuse nelle parentesi. Quando $b = e$, sarà $m = 1$, ed essendo allora $f = \infty$;

sarà $n = \frac{e(f-e)}{f-2e} = e = b$,

e però l'equazione per la curva LS

sarà $u = \sqrt{(2bz - z^2)}$,

che è l'equazione del circolo col raggio b.

SCOLIO PRIMO.

Per trovare la grossezza conveniente all'arco ellittico $V\alpha A$ posto per intradosso, divisa per Vu

$$= d.RP = \frac{b}{h}\, d.PA = \frac{(b-x)\,dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$$

la spinta dell'arco elementare $VAau$

$$= \frac{2(b-x)\,dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}},$$

resterà 2 per la spinta orizzontale da attribuirsi all'arco lineare $V\alpha A$; il qual valore sostituito in luogo di a nella formola $\sqrt{(2a(1+pp) + r^2)} - r$ del Problema XXIV applicata alla medesima curva $V\alpha A$, darà la grossezza dell'arco.

Essendo per il punto V $p = 0$, sarà per la linea ML la grossezza degli archi

$$= \sqrt{(4 + r^2)} - r.$$

Ora essendo per il punto V il raggio

$$r = m^2 n = \frac{q^2(f-e)}{ef}$$

$$= (2b-e)\left(\frac{b^3 + b^2(b-e) + b(b-e)^2 - (b-e)^3}{b^3 + b^2(b-e) + b(b-e)^2 + (b+e)^3}\right);$$

fatto $b - e = vb$, sarà $r = b\left(1 + \frac{v - v^3}{1 + v^2}\right)$,

e però essendo $v - v^3$ una frazion positiva, sarà sempre $r < 2b$, e non mai $< b$.

Quando $v = 1$, come pure quando $v = 0$, cioè nel punto M, e nel punto L sarà $r = b$, e la grossezza $\sqrt{(4 + r^2)} - r$ vi sarà la maggiore.

Potendosi prendere il peso del volto MVA

$$= Q\,\frac{2bx - x^2}{b - x},$$

e la sua spinta $= 2Q\sqrt{(2bx - x^2)}$ essendo Q una costante arbitraria, si avrà in tal caso più generalmente la grossezza dell' arco $V\alpha A$

$$= \sqrt{(4Q(1+pp)+r^2)} - r.$$

SCOLIO SECONDO.

Istessamente si scioglie il Problema se MV non fosse una retta orizzontale, ma un'obliqua, o una curva qualunque; cavandosi dalla posizione di questa obliqua, oppure dalla natura della curva il valore della VR corrispondente alla data RA.

SCOLIO TERZO.

Non permettendo l'avvicinamento tra loro degli archi VA, NA verso il punto A, che si dia loro la grossezza conveniente col metodo del Problema XXIV; se si vorranno in cambio caricare col metodo dello Scolio del Problema XXXI; essendo qui

$dz : du = \sqrt{(2nz - z^2)} : m\,(n - z) = \int X du : a$;

differenziando si avrà

$$\frac{an^2\,dz}{m(n-z)^2\sqrt{(2nz-z^2)}} = Xdu\,;$$

ma

$$du = \frac{m(n-z)\,dz}{\sqrt{(2nz-z^2)}};$$

sarà dunque $X = \dfrac{an^2}{m^2(n-z)^3}$, e nel punto V

sarà $$X = \frac{a}{m^2\,n} = \frac{2\,Q}{r}.$$

PROBLEMA LIII.

Se sulla base quadrata orizzontale EIHD (Fig. 51) *sia alzato un volto composto* EADHIE *dei segmenti triangolari simili ed eguali* EAD, DAH, HAI, IAE *di volti descritti dal moto parallelo d'un arco come* MAO, *la sezione del di cui piano colla base* MO *sia normale a' due lati* ED, HI, *trovare le condizioni dell'equilibrio.*

SOLUZIONE.

L'arco intiero MAO, il di cui piano passa per il centro C del quadrato sarà equilibrato da sè. Per l'arco tronco RK parallelo al suo eguale MB preso sull'arco MA, si descriva sulla superficie del volto composto il quadrato $KFYX$ parallelo alla base, e da X si tiri l'arco XZ parallelo al suo eguale LO preso sull'arco AO; il piano dell'arco XZ sarà lo stesso col piano dell'arco RK; avranno pure per esser simili un'eguale spinta orizzontale in K ed X in senso contrario, la quale s' impiegherà contro l'ostacolo rettilineo *KX*, e però s'appoggeranno a' due punti *K* ed *X* come a punti immobili. Non resterà dunque se non che mettere in *K* ed *X* due pesi eguali tra loro, la somma de' quali sia eguale al peso dell'arco *RVX* mancante, eguale all'arco *BAL*. Istessamente si dovrà porre un altro peso in *K* per l'equilibrio dell'arco tronco *KS*, che contrasta per mezzo dell'ostacolo rettilineo *KF* coll'altro arco tronco simile ed eguale *FN*, e così via via si dovrà nei punti *K*, *F*, *Y* ed *X* mettere quattro pesi eguali ai pesi dei quattro archi mancanti, cioè ciascuno eguale al peso dell'arco *KVX*.

SCOLIO.

Se la base fosse quadrilunga come *ELHD* (*Fig.* 52), inserita nel mezzo la fascia *FASCIa* generata dal moto parallelo d'un arco intiero *FAS*, si equilibrerà come sopra la volta composta *aICHD* simile alla volta *MAOHD* (*Fig.* 51), e la volta *FASLE* simile alla volta *MAOIE*.

APPENDICE

AI CAPI PRECEDENTI

Alla pag. 65 si è detto che in un arco cotruito col metodo del Problema XXIV non può rotarsi il pezzo superiore sdrucciolando l'inferiore, *se il pezzo superiore non potrà acquistare da sè un moto di rotazione anche indipendentemente dallo sdrucciolamento dell'inferiore;* avendo in tal caso l'equilibrio del Problema VII.

L'ornatissimo signor conte *Girolamo Fogaccia*, nel rivedere questo passo ha notato, che se sia posta in equilibrio la verga *DC* (*Fig.* 53) col centro di gravità in *G* su' due piani *DE*, *CE* inclinati all'orizzonte, e stando immobile il piano *DE*, il piano *CE* faccia un moto infinitesimo da *CE*, in *C'E'* parallelamente a sè stesso; allora la verga *DC* non verrà in *D'C'* parallela a sè stessa, nel qual caso il suo centro di gravità *G* scorrerebbe la *GG'* parallela a *DD'*; ma acquistando moto di rotazione si porterà in *dc*, cosicchè il centro di gravità *G* venga ad aver fatta la discesa perpendicolare Gg. Di fatti essendo ogni posizione $D'C'$, dc, $d'c'$, che la verga potrebbe acquistare con un moto infinitesimo in questa discesa della CE, tale, che la linea, che congiunge i luoghi G', g, g' de' centri deve essere orizzontale per la proprietà dell'equilibrio che si ha nella posizione $D'C'$ (Teor. II), e però essendo eguale in tutte la discesa verticale del centro, quella posizione sarà presa dalla verga che viene a condurre il centro G per la perpendicolare Gg, strada la più breve per fare questa discesa sul piano $G'g'$. Apparirebbe da tutto ciò, che possa rotarsi il pezzo superiore di cui si tratta alla pag. 65 sdrucciolando l'inferiore, anche quando non può acquistare da sè un moto di rotazione indipendentemente dallo sdrucciolamento dell'inferiore.

Questa sottile obbiezione fa che riesca qui opportuna una spiegazione di quel passo.

Due sono le supposizioni, che si posson fare per il moto del piano CE in $C'E'$. Una, che venga mosso dalla prevalenza della forza del corpo DC ad una forza contraria supposta nello stesso piano; l'altra, che venga mosso da qualunque forza straniera. Limitandosi alla prima supposizione, che è la nostra nella pag. 65, io dico, che se il piano CE non può essere mosso in $C'E'$, supposto che il corpo DC si portasse in $D'C'$; non potrà nemmeno esser mosso CE in $C'E'$ supposto che il corpo DC si porti in dc. La ragione è perchè misurandosi la forza del corpo DC dal prodotto del suo peso G nel viaggio perpendicolare Gg (Teor. I), che è eguale in entrambe le supposizioni, sarà ancora eguale la forza. Ora essendo l'arco del quale si tratta alla pag. 65 costruito col metodo del Problema XXIV, non può il piano CE portarsi in $C'E$ in forza del corpo DC rappresentante l'arco, che si venga a portare in $D'C'$; poichè con tal metodo, posti i tagli perpendicolari alla catenaria e cavata la grossezza degli archi dall'equazione, non si avranno a temere gli sdrucciolamenti del Problema XII. Dunque se il pezzo DC non patisce da sè pericolo di rotazione su' due piani DE, CE, non potrà nemmeno acquistarsi questa rotazione collo smovere il piano CE.

Aggiungerò qui la soluzione d'alcuni Problemi concernenti gli archi, e le cupole propostimi dal sopralodato signor Conte.

PROBLEMA LIV.

Trovare una curva di arco MAS (Fig. 36) *tale, che supponendo nullo il suo peso a confronto* *del suo carico, lo stesso carico sia terminato superiormente dalla retta* Cu *obbliqua all'orizzonte.*

Questo Problema può aver luogo dopo il Problema XXXII.

SOLUZIONE.

Sia $CM = c$;

$MP = x$;

$PA = y$;

$Cm : mz = 1 : f$;

sarà $mz = yf$;

lo spazio $uzAa = (c + x - yf)\, dy$;

dunque si avrà

$$dx : dy = f(c + x - yf)\, dy : a\,;$$

e differenziando col ritener dy costante si avrà

$$addx = (c + x - yf)\, dy^2.$$

Sia $ax = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6$ ..... ecc.;

sarà $adx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy$ ..... ecc.;

$addx = 2Bdy^2 + 2.3Cydy^2 + 3.4Dy^2dy^2 + 4.5Ey^3dy^2$ .....

$= cdy^2 - fydy^2 + \frac{A}{a} ydy^2 + \frac{B}{a} y^2 dy^2 + \frac{C}{a} y^3dy^2$ .....

Dal confronto de' termini di queste due serie eguali si raccoglie $A = 0$;

$$B = \frac{c}{2};$$

$$C = -\frac{f}{2.3};$$

$$D = \frac{c}{2.3.4a} \text{ ... ecc.}$$

sarà dunque $x = \frac{c}{2a} y^2 - \frac{f}{2.3a} y^3 \frac{c}{2.3.4a^2} y^4$

$$- \frac{f}{2.3.4.a^2} y^5 + \frac{c}{2.3.4.5.6a^2} y^6 \text{ ...... ecc.}$$

PROBLEMA LV.

Trovare l'equazione per la cupola MAS (Fig. 36) *caricata continuamente sopra tutta la sua superficie sino alla retta* Cu *inclinata per un dato angolo sull'orizzonte, considerando per nullo il peso della cupola.*

Questo Problema può servire di secondo Corollario al Problema XL.

SOLUZIONE.

Facendo come qui sopra $mz = yf$, e introducendo nell'equazione

$$dx : dy = fXydy : a$$

in luogo di X il suo valore $c + x - yf$, e differenziando col ritenere costante dy si avrà

$$addx = (c + x - yf)\, ydy^2,$$

del suo carico, lo stesso carico sia terminato superiormente dalla retta Cu *obbliqua all'orizzonte.*

Questo Problema può aver luogo dopo il Problema XXXII.

SOLUZIONE.

Sia $CM = c;$

$MP = x;$

$PA = y;$

$Cm : mz = 1 : f;$

sarà $mz = yf;$

lo spazio $uzAa = (c + x - yf)\, dy;$

dunque si avrà

$$dx : dy = f(c + x - yf)\, dy : a\,;$$

e differenziando col ritener dy costante si avrà

$$addx = (c + x - yf)\, dy^2.$$

Sia $ax = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6$ ..... ecc.;

sarà $adx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy$ ..... ecc.;

$addx = 2Bdy^2 + 2.3Cydy^2 + 3.4Dy^2dy^2 + 4.5Ey^3dy^2$ ....

$= cdy^2 - fydy^2 + \frac{A}{a}\, ydy^2 + \frac{B}{a} y^2 dy^2 + \frac{C}{a} y^3 dy^2$ ......

Dal confronto de' termini di queste due serie eguali si raccoglie $A = 0;$

$$B = \frac{c}{2};$$

$$C = -\frac{f}{2.3};$$

$$D = \frac{c}{2.3.4a} \ \ldots \text{ ecc.}$$

sarà dunque $x = \frac{c}{2a} y^2 - \frac{f}{2.3a} y^3 \, \frac{c}{2.3.4a^2} y^4$

$$- \frac{f}{2.3.4.a^2} y^5 + \frac{c}{2.3.4.5.6a^2} y^6 \ \ldots\ldots \text{ ecc.}$$

PROBLEMA LV.

Trovare l'equazione per la cupola MAS (Fig. 36) *caricata continuamente sopra tutta la sua superficie sino alla retta* Cu *inclinata per un dato angolo sull'orizzonte, considerando per nullo il peso della cupola.*

Questo Problema può servire di secondo Corollario al Problema XL.

SOLUZIONE.

Facendo come qui sopra $mz = yf$, e introducendo nell'equazione

$$dx : dy = fXydy : a$$

in luogo di X il suo valore $c + x - yf$, e differenziando col ritenere costante dy si avrà

$$addx = (c + x - yf)\, ydy^2,$$

e fatto come sopra

$$ax = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots$$

e differenziando ecc. si troverà in fine

$$x = \frac{c}{2.3a} y^3 - \frac{f}{3.4a} y^4 + \frac{c}{2.3.5.6a^2} y^6$$

$$- \frac{f}{3.4.6.7a^2} y^7 + \frac{c}{2.3.5.6.8.9a^3} y^9 \ldots$$

PROBLEMA LVI.

Trovare la curva dell'arco MAS (Fig. 36) *che deve sostenere un fluido elastico sino all'altezza dell'orizzontale* Cm.

Questo Problema può aver luogo dopo il Problema XXXIII.

SOLUZIONE.

Sia $CM = c$;

$MP = x$;

$PA = y$.

Sarà $mA = c + x$.

Sia il peso del fluido elastico in $M = b$, il peso del fluido in $A = B$;

sarà per le leggi de' fluidi elastici

$$c : c + x = \log. b : \log. B;$$

$$\log. B = \log. b^{(c+x):c};$$

$$B = b^{(c+x):c};$$

dunque sarà $dx : dy = \int b^{(c+x):c} \frac{ds^3}{dy^2} : a$;

e facendo $dx = pdy$

si avrà $p = \int b^{(c+x):c} (1 + pp)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{p} : a$;

$$\frac{apdp}{(1+pp)^{3:2}} = b^{(c+x):c} dx;$$

e integrando, $g - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{c}{\log. b} b^{(c+x):c}$.

Nella quale equazione dovendosi annullare insieme x e p, si avrà $g = \frac{b}{\log. b} + a$.

COROLLARIO.

Se l'arco *MAS* fosse di cupola, si avrebbe $dx : dy = \int b^{(c+x):c} y \frac{ds^3}{dy^2} : a$.

PROBLEMA LVII.

Sia l'arco rigido MS (Fig. 54) *circolare descritto col centro* C, *e sia uniformemente pesante, appoggiato al piano verticale* MC, *ed all'obbliquo* SC; *trovare il suo movimento.*

SOLUZIONE.

Sia il diametro del circolo $= 1$; $MH = x$; $HS = y$. Per il punto G centro di gravità dell'arco MS si tiri l'orizzontale GP, e tirate le due tangenti SX, MX, si cali la verticale XQ, sarà $SH : SC = XQ : XS$,

cioè $\frac{x}{2\sqrt{(x - x^2)}} = XS = XM = QH$.

Ora $GP = \frac{\int y\,ds}{s} = \frac{x}{2s}$.

Sarà dunque

$$QH : GP = s : \sqrt{(x - x^2)} = MS : SH;$$

e per conseguenza essendo $GP < QH$, cascherà sempre l'arco dalla parte di M (Problema VII, Corollario V).

PROBLEMA.

Rappresenti l'arco MS *un'unghia rigida di cupola emisferica il peso della quale sia* $= \int y\,ds$; *e sia appoggiato come nel Problema precedente; trovare il suo movimento.*

SOLUZIONE.

Sarà in tal caso $GP = \frac{\int y^2\,ds}{\int y\,ds} = \frac{\int y\,dx}{x}$.

Sarà dunque

$$QH : GP = x^2 : 2\sqrt{(x - x^2)}\int y\,dx$$
$$= 1 : \tfrac{4}{3} - \tfrac{16}{15}x - \tfrac{4}{105}x^2 - \tfrac{8}{315}x^3 \ldots$$

COROLLARIO.

Quando $x = 0,30$ prossimamente, si ha $QH = GP$ che è il caso dell'equilibrio. Quando $x = 0,29$ ovvero è minore, sarà $QH < GP$, e S scorrerà verso C alzandosi M. Per una ragion contraria si abbasserà M allontanandosi S da C quando $x =$ ovvero $> 0,31$. In una cupola il punto S non si potrà abbassare per il contrasto circolare di tutti i punti S di quella sezione orizzontale, ma si potrà ben alzare; e però il pericolo di questo movimento dell'unghia comincerà prossimamente quando $x = 0,31$. Ma un altro pericolo per un valore anche minore di x apparirà dal seguente

PROBLEMA.

Posta l'unghia solida MSLIQm (Fig. 55) *d'una cupola sferica il peso della quale sia proporzionale alla superficie, e che ha per conseguenza una grossezza* SQ *costante, trovare la ragione delle forze del cuneo infinitesimo* SsqQ, *e dell'arco superiore* SQmM *nel senso del Problema XII, cioè che il cuneo* SsqQ *debba sdrucciolare parallelamente a sè stesso sulla* sq, *e l'arco* SQmM *parallelamente a sè stesso lungo la* Mm.

SOLUZIONE.

Chiamandosi G il peso dell'arco $MSqm$ e Q il peso del cuneo infinitesimo $SsqQ$, sarà la ragione delle forze
G (*Cotang.* MCQ — *Cotang.* MCq): Q. *Cotang.* MCq (Probl. XII); cioè continuate le CQ, Cq sino alla LT cotangente dell'angolo MCQ, sarà la medesima ragione $= G\,.\,Tt : Q\,.\,LT$; sarà dunque

$$rx.\ \frac{r^3\,dx}{r^3} : rdx.\ \frac{(r-x)\,r}{y} = r^2 : (2r-x)\,(r-x).$$

Crescerà dunque la ragione delle forze crescendo x, e nel caso dell'eguaglianza si avrà

$$r : r-x = r-x : x.$$

Sarà dunque il raggio diviso secondo l'estrema e media ragione, e sarà

$$x = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) r.$$

Donde ne segue, che quando x è maggiore di

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) r,$$

allora i cunei della cupola scapperan fuori lateralmente.

NOTA AL PROBLEMA XXVII.

Avendosi dal Problema XXIV l'equazione

$$2t^2 + 2tr = a\,(1 + pp);$$

sarà
$$r = \frac{a\,(1+pp) - 2t^2}{2t}.$$

Se dunque si prenda $a > 2t^2$, sarà r sempre positivo, e crescerà crescendo p, cioè crescendo l'arco. Se si prenda $a = 2t^2$, si avrà nullo il raggio al principio della curva dove $p = 0$. Se si prenda $a < 2t^2$, il raggio al principio della curva sarà negativo, ed anderà calando al crescer dell'arco; sarà nullo quando

$$p = \sqrt{\frac{2t^2 - a}{a}};$$

dove sarà $\dfrac{dx}{dp} = 0$, e ci sarà regresso, e dove fatto $a = 2m^2t^2$ essendo m una frazione, sarà $x = -(1-m)^5 t$. Non servendo il raggio negativo all'equilibrio, ne segue che per la pratica della costruzione di quest'arco si dovrà sempre prendere a maggiore di $2t^2$ e tanto maggiore, quanto si vorrà l'arco men curvo.

CAPO XII.

Delle curve d'equilibrio a direzioni di gravità convergenti.

PROBLEMA LX.

TROVARE *l'equazione del peso dell'arco* MNN' (Fig. 58) *perpendicolare in ogni luogo ai raggi di gravità* NC, N'C' *per l'equilibrio.*

SOLUZIONE.

Sieno eguali tra loro i due angoli NCn, $N'C'n'$, sarà $N'n' : Nn = N'C' : NC$. Ora la forza, che esercita $N'n'$ perpendicolarmente alla $N'C'$ deve essere eguale nel caso dell'equilibrio alla forza che esercita Nn perpendicolarmente alla NC. Essendo dunque eguali gli angoli $N'Cn'$, NCn; dovrà essere eguale il peso dell'elemento $N'n'$ al peso dell'elemento Nn. Sarà dunque il peso d'ogni elemento $Nn = a\dfrac{Nn}{NC}$.

COROLLARIO PRIMO.

I Problemi di archi, o di cupole cariche di fluidi elastici, o non elastici, omogenei, o eterogenei divengon Corollarj di questo Problema, e in conseguenza anche il Problema del lenzuolo, e della curva elastica di *Giacomo Bernoulli*. Poichè essendo la pressione del fluido sopra l'arco *MA* (*Fig.* 36) perpendicolare in ogni punto all'arco medesimo, l'arco *MA* si può considerare come un arco perpendicolare alle sue direzioni di gravità, nel quale la pressione tenga luogo di forza centripeta. Sarà dunque per il Probl. XXXIII

$$(c + x)\, ds = \frac{ads}{r} = \frac{-\,adxddy}{ds^2};$$

$$(c + x)\frac{ds}{dy^2} = \frac{-\,adxddy}{dy^2};$$

e integrando col ritener dx costante, come lo esige il valore del raggio

$$r = \frac{ds^3}{-\,dxddy}$$

che si è introdotto, si avrà

$$dx:dy = \int (c+x)\frac{ds^3}{dy^2} : a = \int (c+x)\, dy\, (1+pp)^{\frac{3}{2}} : a$$

come nel Problema XXXIII. Nella stessa guisa si perviene all'equazione del Problema LVI, e si sciolgono i Problemi de' fluidi eterogenei facendo che il raggio di curvatura sia in ragion inversa della pression del fluido.

Per rapporto alle cupole si troverà la loro curvatura moltiplicando per y la pressione del fluido, e facendo che questo prodotto tenga luogo di forza centripeta. Così sarà nel Problema XLI la forza centripeta

$$= (c+x)\, y = \frac{a}{r},$$

e per conseguenza

$$dx : dy = \int (c+x)\, y\, \frac{ds^3}{dy^2} : a.$$

COROLLARIO SECONDO.

Si avrà ancora da questo Problema il mezzo di trovare per una curva a direzioni di gravità convergenti, ma non perpendicolari alla medesima, la quantità d'attrazione che dovrà corrispondere a ciascun elemento per l'equilibrio. Sia la curva equilibrata MAS (*Fig.* 58) colle direzioni di gravità AC, AC'. Si descriva un'altra curva

MNN' perpendicolare a queste direzioni, e sia

$$NA = x;$$
$$Ab = dx;$$
$$ba = dy;$$
$$AC = R.$$

Essendo il raggio della curva MAS in A

$$= r = \frac{Rds^3}{Rdxddy + ds^2\, dy};$$

il peso dell'elemento Aa sulla direzione del raggio r dovrebbe essere

$$= a\,\frac{ds}{r} = \frac{aRdxddy + ads^2\, dy}{Rds^2}.$$

Questa espressione moltiplicata per $\frac{ds^2}{dy^2}$ darà il peso sulla direzione AC opportuno per l'equilibrio. Sarà dunque questo peso

$$= \frac{aRdxddy + ads^2dy}{Rdy^2} = Sds.$$

Se sia costante il rapporto di dx a dy; cioè $ddy = 0$; si avrà $\frac{ads}{Rdy} = S$. Essendo dunque in tal caso costante ancora la quantità $\frac{ds}{dy}$, sarà S in ragione inversa di R. Se le direzioni tutte di gravità convergessero ad un centro C (*Fig.* 57); la curva $MASQVEC$ nella quale $Sx = dx$ ha un rapporto finito ad $xn = dy$ si può troncare in S od in V opponendo a lei un altro ramo simile MaS ovvero $MaSqV$ medianti però i sostegni CS, CV.

Viceversa proposto un arco a direzioni perpendicolari all'orizzonte, nel quale la pressione competente all'elemento ds è $= S$, si avrà la quantità d'attrazione che si dovrebbe sostituire nel caso, che si volesse supporre i suoi raggi di gravità perpendicolari all'arco, moltiplicando S per $\frac{dy^2}{ds^2}$; con che si avrà quest'attrazione

$$= \frac{S}{1 + pp};$$

in ragione inversa della quale prendendo il raggio, si avrà $$r = \frac{a(1 + pp)}{S};$$

donde nasce per una nuova via l'equazione comune della catenaria $dx : dy = \int Sds : a$.

Sulle Curve che servono a delineare le ore ineguali degli Antichi nelle superficie piane.

L'abate *Scipione Dehe* Bergamasco ha osservato il primo, che io sappia, che le ore ineguali dei Romani e de' Giudei eccettuata la sesta, e la duodecima non possono essere segnate sulle superficie piane se non per via di curve contro il costume degli autori di gnomonica. Non avendone egli data dimostrazione, io qui la soggiungo.

Sia l'arco ZE (*Fig.* 1) la distanza dell'equatore EQ dal zenit, HLD sia un parallelo all'equatore, OTR sia l'orizzonte. Da C si tiri sopra HD la perpendicolare CG, che sarà il seno dell'arco HE. Sia TX l'intersezione del parallelo coll'orizzonte, L il punto d'un'ora, LM, e GV sieno perpendicolari ad HD.

Sia $CE = 1$;

la tangente dell'arco $ZE = t$;

$CG = z$;

sarà $GH = \sqrt{(1 - z^2)}$;

$GX = zt$.

Sia la circonferenza del meridiano

$$ZONR = c;$$

sarà $HV = \frac{1}{4} c \sqrt{(1 - z^2)}$;

$TV =$ arco di raggio $\sqrt{(1-z^2)}$, e di seno zt;

$$HT = \tfrac{1}{4}\, c \sqrt{(1-z^2)} -$$

arco di raggio $\sqrt{(1-z^2)}$ è di seno zt. Il rapporto di HL ad HT sia espresso da b,

sarà $\quad HL = \tfrac{1}{4}\, b\, c \sqrt{(1-z^2)} - b$. arco di raggio $\sqrt{(1-z^2)}$ e di seno zt.

Si prenda nel circolo di raggio $= 1$ il seno analogo al seno zt nel circolo di raggio $\sqrt{(1-z^2)}$;

cioè $\quad \dfrac{zt}{\sqrt{(1-z^2)}}$;

essendo l'arco in proporzion del raggio, sarà l'arco di raggio $\sqrt{(1-z^2)}$ e di seno $zt = \sqrt{(1-z^2)}$ arco di raggio 1, e di seno $\dfrac{zt}{\sqrt{(1-z^2)}}$.

Dunque $HL = \tfrac{1}{4}\, b\, c \sqrt{(1-z^2)} - b \sqrt{(1-z^2)}$ arco di seno $\dfrac{zt}{\sqrt{(1-z^2)}}$.

Si prenda nel circolo di raggio 1 l'arco analogo all'arco HL, sarà $\tfrac{1}{4}\, b\, c - b$. arco di seno $\dfrac{zt}{\sqrt{(1-z^2)}}$; ed essendo il seno analogo in ragione del raggio, sarà LM seno di $HL = x = \sqrt{(1-z^2)}$ seno $\left(\tfrac{1}{4}\, b\, c - b.\ \text{arco di seno}\ \dfrac{zt}{\sqrt{(1-z^2)}}\right)$.

Ora se i punti L fossero in un circolo massimo della sfera, i punti M, che sono la loro projezione sul piano del meridiano sarebbero in un' ellissi.

Se il parametro di questa ellissi sia eguale alla costante p (*Fig.* 2), l'ascissa computata sull' asse maggiore $SY = 2$ dal centro sia $CB = y$; sarà per la natura dell'ellissi

$$MC^2 = \frac{p}{2} + \left(1 - \frac{p}{2}\right) y^2.$$

Ma è ancora $MC^2 = LC^2 - LM^2 = 1 = x^2$.

Dunque $\quad y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{1 - \frac{p}{2}}$.

Essendo in tal caso l'angolo GMB costante, se si ponga il suo seno $= q$;

sarà $\quad \dfrac{GM.CB + CG.BM}{CM} = q$

$$\frac{\sqrt{\left(1 - x^2 - z^2\right)}\sqrt{\left(1 - \dfrac{x^2}{1-\frac{p}{2}}\right)} + z\sqrt{\left(\dfrac{p\,x^2}{2-p}\right)}}{\sqrt{(1-x^2)}} = q$$

Se si faccia $q\sqrt{(1-x^2)} : \sqrt{\left(1 - \dfrac{x^2}{1-\frac{p}{2}}\right)} = u$;

$$\sqrt{\left(\frac{p\,x^2}{2-p}\right)} : \sqrt{\left(1 = \frac{x^2}{1-\frac{p}{2}}\right)} = s$$

sarà $\quad \sqrt{(1 - x^2 - z^2)} + zs = u$;

donde è assi facile tirare il valore di z in una funzione algebraica di x; dal che ne seguirebbe, che anche x fosse una funzione algebraica di z, il che è contro l'equazione superiore, eccettuato il caso di $t = 0$, cioè della sfera retta, restando allora $x \sqrt{(1 - z^2)}$ seno $(\frac{1}{4} b\ c)$. Dunque i punti L non sono in un circolo massimo, e per conseguenza le ore di questi punti non possono essere segnate sopra le superfizie piane con linee rette.

FINE.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE

IN QUESTO VOLUME.

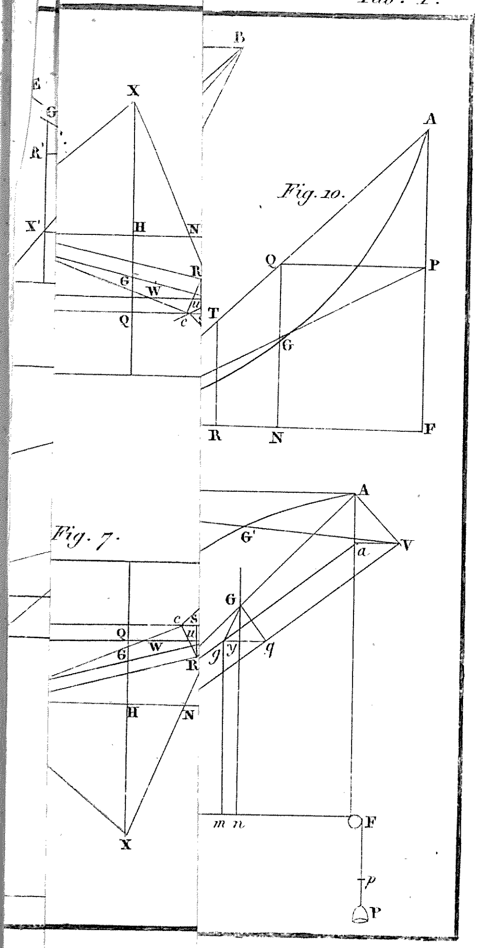
PUBBLICATO

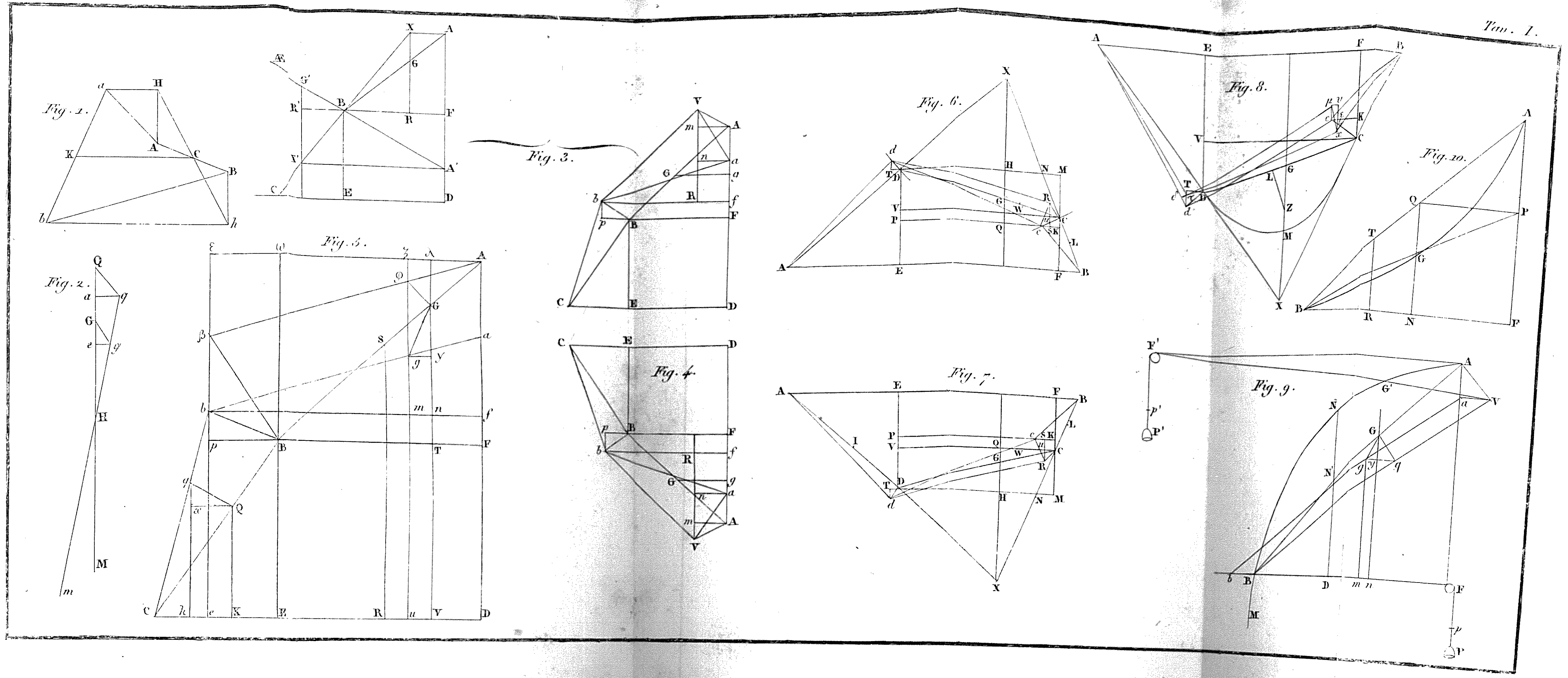
IL GIORNO II SETTEMBRE

M. DCCC. XXIX.

Se ne sono tirate due sole copie
in carta turchina di Parma.

Tav. I.




Tav. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

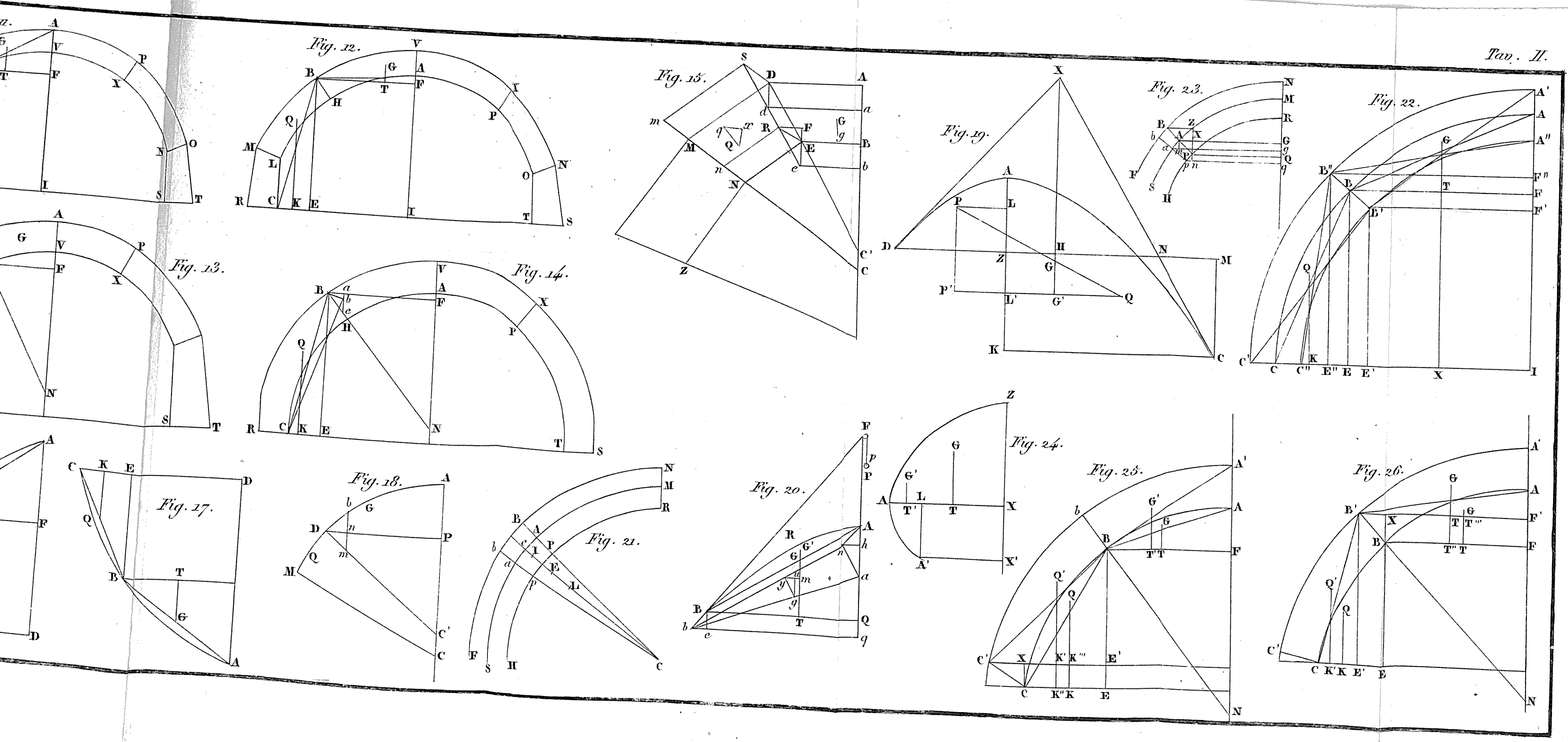


Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

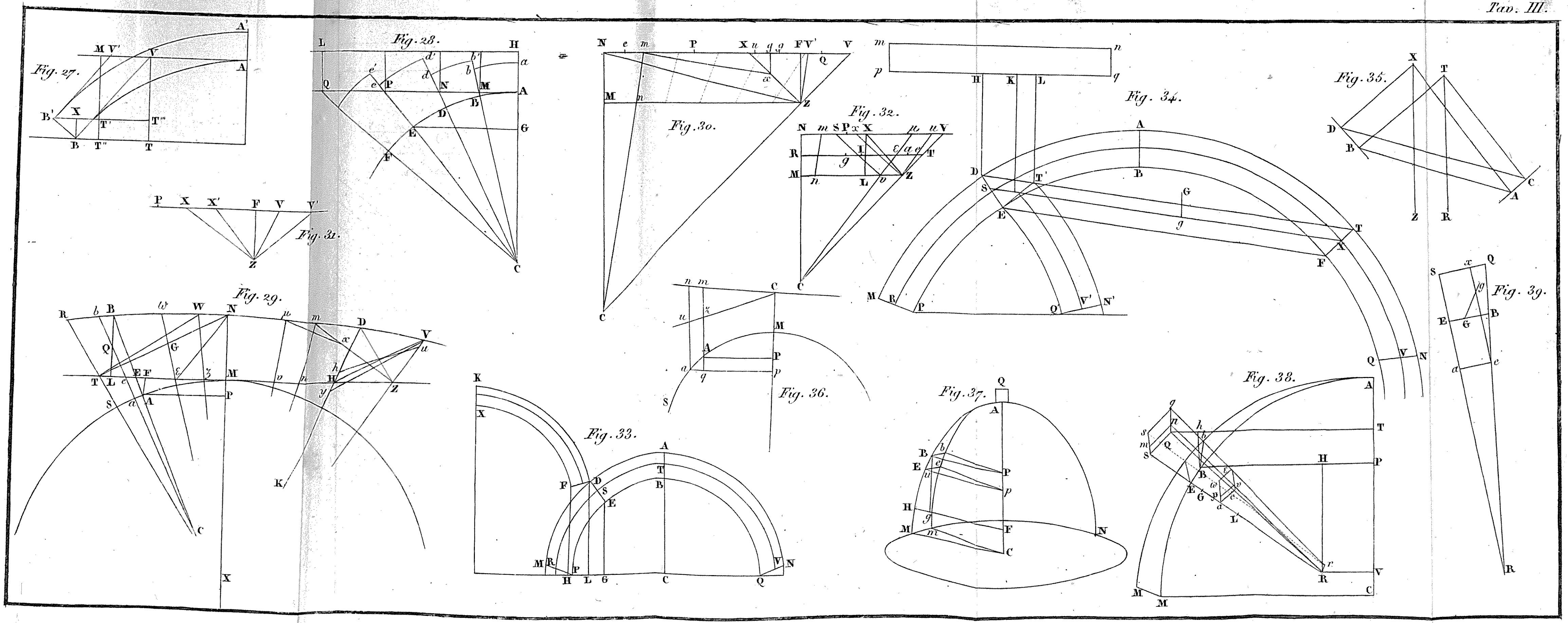


Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.

Tav. IV.

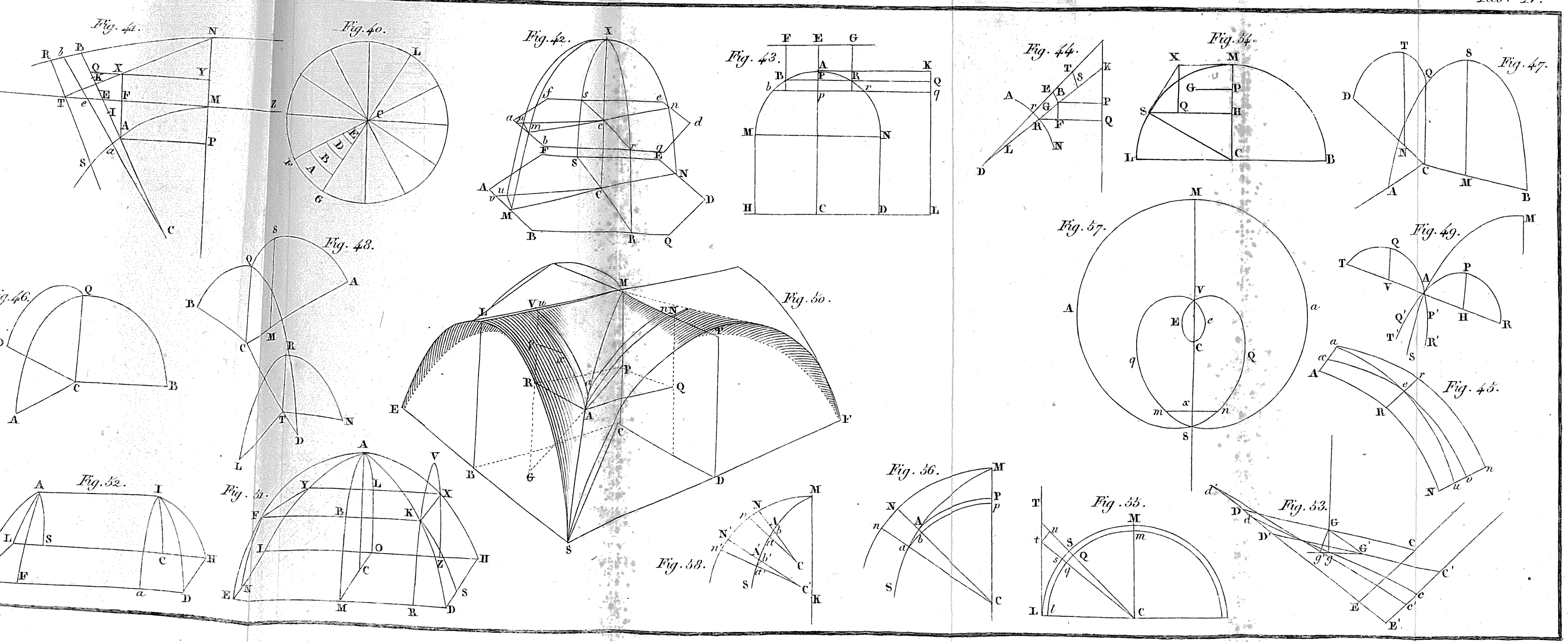


Fig. 41.
Fig. 40.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 54.
Fig. 47.
Fig. 46.
Fig. 48.
Fig. 50.
Fig. 57.
Fig. 49.
Fig. 45.
Fig. 52.
Fig. 51.
Fig. 58.
Fig. 56.
Fig. 55.
Fig. 53.

Fig. 1.

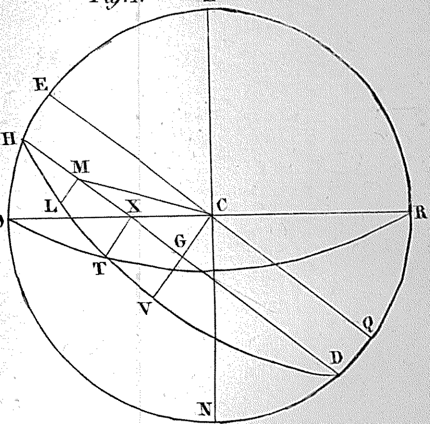


Fig. 2.