BIBLIOTECA

SCELTA

DI OPERE ITALIANE

ANTICHE E MODERNE

vol. 313

LORENZO MASCHERONI

PROBLEMI DI GEOMETRIA.

Opere dello stesso Autore

Della Geometria del Compasso. In 8 gr. con 14 *tavole* contenenti 108 *figure*, prezzo ital. lir. 5. 00

Nuove Ricerche sull' equilibrio delle Volte; coll'Elogio scritto dal march. *Ferdinando Landi*, col *Ritratto* dell'Autore e *con cinque tavole in rame*. In 16 gr., prezzo ital. lir. 3. 50

PROBLEMI
DI GEOMETRIA

DI

LORENZO MASCHERONI

PROF. DI MATEMATICA NELL'UNIVERSITA'
DI PAVIA

COLLE DIMOSTRAZIONI

DEL CAPITANO SACCHI

NUOVA EDIZIONE ARRICCHITA COLL'AGGIUNTA DI ALCUNI PROBLEMI RICAVATI DA UN ESEMPLARE DELLA PRIMA EDIZIONE POSTILLATO DALL'AUTORE

TERZA EDIZIONE CON CINQUE TAVOLE

MILANO

PER GIOVANNI SILVESTRI

M. DCCC. XXXII.

AL LETTORE

IL CAPITANO SACCHI *

Se talvolta ancora le cose tenui meritano equipararsi alle grandi, o perchè guide sono a delle più ardue, o perchè condotte da sublime Genio vestono una forma d'eleganza e dignità; tal è il merito di quest'Opuscolo, che sebbene comune a prim'occhio ti sembrasse, l'insigne Autor suo MASCHERONI *seppe bensì colle sagaci e profonde ricerche, perfette e generali sue dottrine rendere il medesimo interessante, nuovo, grande, meritevole già del più felice acco-*

* *Questo avviso* al Lettore *fu posto in fronte alla seconda edizione dell'anno* 1802.

glimento fra tutti gli amatori di questa Scienza. Questi e tutte le divine sue produzioni erano pegno sicuro di ben altre luminose e grandi. Ma la morte, immatura all' Autore, ed a' suoi disegni sopraggiunta, recise il filo di sì belle speranze, e gonfiò ai Letterati gli occhi di lagrime, ed a tutti il cuor di desolazione.

In cinque parti divise l' Autore questo Libro.

Le tre prime trattano della misura, direzione delle linee, misura degli angoli e delle superficie. La moltiplicità e semplicità dei metodi niente lascia su questa parte da desiderare di più facile e pronto all' Ingegnere sì militare che civile.

La quarta contiene la poligonometria, o sia metodo di misurare i poligoni piani, coll' applicazione della medesima alla misura di lati ed angoli in certi sistemi di linee rette poste successivamente ad angolo l'una presso l'altra, finchè l'ultima finisca al principio della prima, senza però che si abbia il poligono.

Giudici sieno del vantaggio di questa nuova sua dottrina il Geografo nel calcolo dei triangoli, che si formano per levare le carte delle province, e per segnare i meridiani; e l'Ingegnere militare per levare piani di fortezza od altro, a di cui comodo s'aggiunge pure la descrizione d'un istromento matematico dall' Autore immaginato, opportuno a tal metodo, e commendabile per la sua semplicità e speditezza.

La misura dei solidi con un saggio di poligonometria solida ricavata dalla piana forma la quinta parte. Troverai in essa sciolto in generale il Problema della solidità d'un poliedro, che ha per basi due facce parallele, poligone, e le altre quadrilatere poste comunque intorno ai lati di queste basi. Questo interessante Problema, aggiunto dall' Autore alla tuttora assai mancante dottrina dei solidi, compie l'opra ed il merito della medesima.

La rapidità dell' esito di questo Libro, l'importanza del medesimo generalmente riconosciuta, il sacro dovere di Scolaro al *suo Maestro m'impegnarono a questa seconda edizione; aderendo alla volontà del defunto Autore, ed al parere di molti, v'aggiunsi le Dimostrazioni* (*), *le quali oso sperare non debbano comparire del tutto prive d'utilità, saranno di comodo ai dotti, di facilità ai principianti; infine coll'assidue diligenze nella parte tipografica cercai dal canto mio renderti il Libro più gradito, ed a me più sicura la benemerenza.*

(*) *Le aggiunte poste alla pag.* 187 *mi furono graziosamente comunicate dal sig. Ingegnere* Gaetano Belati, *Ispettore dell'I. R. Giunta del Censimento.*

L'Edit. Silvestri.

PROBLEMI DI GEOMETRIA

LIBRO PRIMO

DELLA MISURA DELLE LINEE

PROBLEMA I.

Misurare una distanza AB *accessibile nei soli due estremi* A *e* B.

Soluzione 1. Preso qualunque punto C, dal quale si possa andare in A e B, cioè misurare le rette CA, CB (*fig.* 1), e portata sulla continuazione della AC la CD che le sia uguale, e parimente sulla continuazione della BC la CE sua eguale, si avrà $DE = AB$.

Soluzione 2. Preso colla stessa condizione un punto C (*fig.* 2), e portata sulla continuazione della AC la $CE = BC$, e sulla continuazione della BC la $CD = AC$; si avrà $DE = AB$.

Dimostrazione. *Due triangoli qualunque sono perfettamente uguali, allorchè hanno un angolo uguale, compreso fra lati rispettivamente eguali; dunque in ambedue i casi* ED = AB. Bossut, pag. 22, Teor. VIII.

Soluzione 3. Se da un punto *V* (*fig.* 3) si potrà andare in *A* e in *B*, se prendendo *VC* = *VA* anche da *C* si potrà andare in *A*; si avrà

$$AB = \sqrt{\left(AC^2 \frac{VB}{VC} + BC^2\right)}$$

Dimostr. *Si cali sopra* BV *la perpendicolare* AN, *e si denomini*

$$AV = CV = a$$
$$BC = d$$
$$AC = b$$
$$BV = c$$
$$VN = x$$
$$AB = z$$

sarà

$$CN = a - x$$
$$BN = c - x$$
$$AN = y.$$

Essendo AN *catteto comune ai due rettangoli* ANV, ANC, *per loro proprietà s' avrà*

$$y^2 = a^2 - x^2,\ y^2 = b^2 - (a - x)^2$$

eguagliando i due valori si ha l' equazione

$$a^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2,$$

da cui fatto il quadrato, e ridotta si ha

$$x = \frac{2a^2 - b^2}{2a}.$$

Dal triangolo retto ANB *si ha*

$z^2 = y^2 + (c - x)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, *per costruzione di figura si ha* $y^2 + x^2 = a^2$, *e sostituito al residuo* x *il suo valore si ha*

$$z^2 = c^2 + a^2 - \frac{2ca^2 - cb^2}{a},$$

essendo poi per costruzione $d = c - a$, *e* $d^2 = c^2 + a^2 - 2ac$, *sostituendosi questi equivalenti valori nell'equazione* z^2 *si ha*

$$z^2 = d^2 + \frac{b^2 c}{a}.$$

Sostituendo alle lettere le linee, ed estraendo la radice si ha

$$AB = \sqrt{\left(AC^2 \frac{VB}{VC} + BC^2\right)}.$$

Soluzione 4. Se dal punto *V* si potrà andare in *A* e *B*, e se prendendo sopra le *VA*, *VB*, le *VD*, *VE* si potrà andare da *D* in *E* (*fig.* 4); si avrà

$$AB = \sqrt{\left\{AV^2 + BV^2 - \frac{AV.BV}{DV.EV}(DV^2 + EV^2 - DE^2)\right\}}$$

Dimostr. *Calate le perpendicolari* AN, DM *sopra il lato* VB, *e sia*

$$\begin{aligned} VB &= c \\ DV &= m \\ VE &= n \\ DE &= b \\ DM &= y \\ ME &= x \\ MV &= n \pm x \\ AB &= z. \end{aligned}$$

Dall'analogia dei due triangoli simili AVN, DVM

si ha $$VN = \frac{(n \pm x)}{m} a,$$

$$AN = \frac{a}{m} y,$$

$$BN = c - \frac{(n \pm x)}{m} a.$$

Dai due triangoli rettangoli DVM, DEM *si ha doppio valore di* y;

cioè $1.^{\circ}\ y^2 = m^2 - (n \pm x)^2,$
$2.^{\circ}\ y^2 = b^2 - x^2;$

questi valori ragguagliati si ha l'equazione

$$m^2 - (n \pm x)^2 = b^2 - x^2,$$

da cui $x = \frac{\mp b^2 \mp n^2 \pm m^2}{2n}.$

Ora dal triangolo rettangolo ANB *si ha*

$$z^2 = \frac{a^2}{m^2}(m^2 - (n \pm x)^2) +$$

$$c^2 - 2ac\frac{(n \pm x)}{m} + \frac{(n \pm x)^2 a^2}{m^2} =$$

$$a^2 + c^2 - \frac{2ac}{m}(n \pm x),$$

ove sostituito il valore di x *si ha*

$$z^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac}{2mn}(n^2 + m^2 - b^2),$$

rimesse alle lettere le linee si ha

$$AB = \sqrt{\left(AV^2 + BV^2 - \frac{AV.BV}{DV.EV}(DV^2 + EV^2 - DE^2)\right)}.$$

Soluzione 5. Se nel triangolo *ABV* (*fig.* 4) si potranno misurare due angoli e il lato *AV*, si avrà

$$AB = AV\frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } B}$$

Se si potranno misurare due angoli e il lato *BV*,

si avrà $$AB = BV\frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } B}.$$

Dimostr. *Il noto teorema di Trig. che i lati d'un triangolo stanno come i seni degli angoli opposti, dimostra le precedenti due soluzioni.* Bossut, pag. 124, Teor. III.

Soluzione 6. Se si potrà misurare l'angolo V, ed i due lati AV, BV, si avrà

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV.BV.\cos. AVB)}.$$

Dimostr. *Calata la perpendicolare* AN *sul lato* BV, *si avrà*

$$AB^2 = AN^2 + BN^2$$
$$= AV^2 - VN^2 + (BV - VN)^2,$$

onde $AB^2 = AV^2 + BV^2 - 2BV.VN;$

ma $VN = AV \cos. V;$

dunque

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2BV.AV.\cos. V)}.$$

Si potrà ancora trovare AB in questa maniera. Coll'equazione $\text{tang.}\frac{A-B}{2} = \frac{BV-AV}{BV+AV}\text{tang.}\frac{A+B}{2}$ si verrà a conoscere $\text{tang.}\frac{A-B}{2}$, e per conseguenza $\frac{A-B}{2}$; la quale semi-differenza degli angoli VAB, VBA aggiunta alla semi-somma $\frac{A+B}{2}$ darà l'angolo maggiore A opposto al lato BV che si suppone maggiore di AV, e sottratta alla medesima semi-somma darà il minore, e si avrà poi AB per via della soluzione 5.

Vedi *Bossut*, Teor. IV, ove dice che in ogni triangolo rettilineo si ha questa proporzione. *La somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semi-somma dei due angoli opposti a questi lati, sta alla tangente della loro semi-differenza.*

Soluzione 7. Se si potrà fare che l'angolo V (*fig.* 5) sia retto, e misurare AV e BV, si avrà

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2)}.$$

Bossut, pag. 76, Teor. I.

Soluzione 8. Se potendosi fare retto l'angolo V (*fig.* 5) si potrà misurare anche uno degli angoli A e B, ed uno dei lati AV e BV, si avrà

$$\text{o vero} \quad AB = AV.\sec. VAB = \frac{AV}{\cos. VAB}$$

$$AB = BV.\sec. VBA = \frac{BV}{\cos. VBA}.$$

Dimostr. *In ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa sta al raggio, come un lato al coseno dell'angolo adiacente. Dunque* AB : 1 : : AV : cos. A,

onde $AB = \frac{AV}{\cos. A} = AV.\sec. A$ *essendo*

$$\sec. A = \frac{1}{\cos. A}.$$

Bossut, 119. Corol. I. *Così per altro valore.*

Soluzione 9. Se si potrà fare retto l'angolo A, e misurare AV, VB (*fig.* 6), si avrà

$$BA = \sqrt{(BV^2 - AV^2)} = \sqrt{(BV + AV)(BV - AV)}.$$

Si procede nell'istessa maniere quando si può fare un angolo retto in B.

Soluzione 10. Se si potrà fare un angolo retto in A, e misurare uno degli altri due angoli V e B, ed uno dei due lati AV, BV (*fig.* 6), si avrà

$$AB = AV.\ \text{tang.}\ AVB,$$

o vero $AB = BV.\ \text{sen.}\ AVB$

Vedi *Bossut*, pag. 123, Teor. II, ecc.

Soluzione 11. Se si potrà fare un angolo retto in A, e semi-retto in V (*fig.* 6), si avrà

$$AB = AV \text{ o vero } AB = \frac{BV}{\sqrt{2}}.$$

Dimostr. 1.° *Sarà pure semi-retto il terzo angolo, e perchè ad angoli uguali s'oppongono lati eguali*, *sarà* AB = AV. Bossut, pag. 14, Teor. II.

2.° *L'espressione* $AB = \frac{HV}{\sqrt{2}}$.

Si ha dalla soluzione 10, *cioè*

$$AB = BV.\ \text{sen.}\ AVB = BV\ \text{sen.}\ 45°$$

per costruzione della presente figura. Essendo poi

$$R^2 = \text{sen.}^2\ 45 + \cos.^2\ 45 = 2\ \text{sen.}^2\ 45 = 1$$

(*valore del raggio*) *si avrà*

$$\text{sen.}\ 45° = \cos.\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \textit{dunque}\ AB = \frac{BV}{\sqrt{1}}.$$

Soluzione 12. Se si potrà fare un agolo semi-retto in A e in B, e retto in V, si avrà

$$AB = AV.\sqrt{2} = BV.\sqrt{2}.$$

Dimostr. $AB : 1 = AV : \cos.\ 45° \left(= \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

onde $AB = AV.\sqrt{2}$,

così pure $AB : 1 = BV : \cos.\ 45°$

ed $AB = BV.\sqrt{2}$.

Soluzione 13. Se si potranno fare retti i quattro angoli A, B, C e V (*fig.* 7), si avrà $AB = VC$.

Dimostr. *Allora il quarto pure sarà per necessità retto, e la figura sarà un quadrilatero rettangolo, in cui i quattro lati saranno paralleli ed eguali.*

Soluzione 14. Se si potrà fare semi-retto l'angolo V, e misurare AV, BV (*fig.* 4), si avrà

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - AV.BV.\sqrt{2})}.$$

Dimostr. *La soluzione presente è eguale alla sesta colla semplice mutazione nel caso attuale di* cos. AVB *in* $\cos.\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *dunque*

$$AB = \sqrt{\left(AV^2 + BV^2 - \frac{2AV.BV.}{2\sqrt{\ }}\right)},$$

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - AV.BV.\sqrt{2})}.$$

Soluzione 15. Preso un qualche punto V (*fig*. 8) donde collo squadro si possa traguardare in A, e B, e presa sulla continuazione di un lato dell'angolo retto AVB, per esempio sulla continuazione del lato AV la VN, eguale allo stesso lato AV, si avrà $AB = NB$.

Dimostr. *Chiaramente apparisce essere allora i due triangoli perfettamente uguali.*

PROLEMA II.

Misurare la CZ, *della quale non è accessibile altro che il punto* C.

Soluzione 1. Si prenda un punto A che sia in linea retta coi due punti C, Z (*fig*. 5), e condotte ad un qualunque punto B fuori di questa retta le AB, CB, e divisa la AB per metà in M, e notato sulla BC il punto P dove è tagliata dalla MZ, si avrà

$$CZ = \frac{AC.CP}{BP - GP}.$$

Dimostr. *Tirisi la* MS *parallela al* AZ *sino all'incontro di* CB, *allora si avranno i due triangoli* ACB, MSB *simili, onde*

$$AB : AC :: MB : MS = \frac{AC.MB}{AB} = \tfrac{1}{2} AC,$$

essendo il punto M *preso alla metà di* AB, *si avrà pure*

$$BS = CS = \tfrac{1}{2}.BC,\ PS = BP - BS = BP - \tfrac{1}{2}.BC,$$

onde

$$PS = \frac{2.BP - BC}{2} = \frac{BP - PC}{2}.$$

Ora dai due triangoli simili CZP, MPS *si ha l'analogia seguente:*

$$CZ : CP = MS : PS,$$

$$CZ = \frac{CP.MS}{PS} = \frac{\frac{CP.AC}{2}}{\frac{BP - PC}{2}}.$$

$$CZ = \frac{CP\ .\ AC}{BP - PC}.$$

Soluzione 2. Si prenda il punto P alla metà della CB, e per esso si traguardi in Z da un punto M della AB; si avrà

$$CZ = \frac{MB\ .\ AC}{MA - MB}.$$

Dimostraz. *Costruita la medesima figura di* *prima; dalla similitudine dei due triangoli* ACB, MSB, *si avrà*

$$MS = \frac{AC . MB}{AB},$$

innoltre $BS = \frac{MB . BC}{AB}$,

ma per costruzione

$$BC = 2BP,$$

dunque $BS = \frac{2MB . BP}{AB}$,

$$PS = PB - BS = \frac{AB . PB - MB . PB}{AB}$$

avendo sostituito a BS *il suo valore. Dagli altri due triangoli simili* CPZ, PMS *si ha*

$$CZ = \frac{CP . MS}{PS} = \frac{\frac{CP . AC . MB}{AB}}{\frac{AB . PB - 2MB . PB}{AB}} \ldots .$$

$$CZ = \frac{AC . MB}{MA - MB}$$

poichè per costruzione

$$CP = PB,\ AB = MA + MB.$$

Soluzione 3. Se il punto *M* non si potesse prendere alla metà della *AB*; nè il punto *P* alla metà della *CB*, si avrà sempre

$$CZ = \frac{MB . AC . CP}{MA . BC - AB . CP}.$$

Dimostr. *Per i succennati triangoli simili, si avrà*

$$MS = \frac{AC . MB}{AB}$$

$$PS = \frac{AB . PB - MB . CB}{AB}$$

$$CZ = \frac{CP . MS}{PS}$$

nella quale equazione sostituiti i valori di MS, PS, *si cambierà in*

$$CZ = \frac{CP . AC . MB : AB}{(AB(PB - CB) + MA . CB) : AB} \ldots .$$

$$CZ = \frac{CP . AC . MB}{MA . CB - AB . CP}.$$

Soluzione 4. Vedi le soluzioni 5, 8, 10, 11, 12 e 13 del Problema I, nelle quali si suppone accessibile un solo estremo della linea *AB*.

Soluzione 5. Se non si potesse continuare la *ZC* (*fig.* 9), nè si potesse misurare l'angolo *C*; prendendo sulla *CB* un punto *A*, in maniera che si possono misurare gli angoli *CAZ*, *CBZ*, si avrà

$$CZ = \sqrt{\left(AC^2 + AB^2 \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} + 2\, AC . AB \frac{\text{sen. } ABZ}{\text{sen. } AZB} \cos. ZAB \right)}.$$

Dimostr. *Nel triangolo* BAZ *si conoscono gli* *angoli ed un lato, si troverà l'altro lato* AZ, *così* $AZ : AB = \text{sen.}\, ABZ : \text{sen.}\, AZB$,

onde $AZ = \frac{AB\,.\,\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB}$.

Ora nel triangolo CAZ *dato l'angolo intermedio ai due lati cogniti si avrà* CZ *colla formola N.° 6*, Prob. I *trovata, cioè*

$CZ = \sqrt{(AC^2 + AZ^2 - 2.\, AC.\, AZ \cos.\, CAZ)}$,

ove mettendo il valore di AZ, *ed in vece di* cos. CAZ *il* cos. *di* ZAB, *il quale angolo essendo ottuso darà il coseno negativo si avrà*

$$CZ = \sqrt{(AC^2 + AB^2.\frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} + 2AC.AB.\frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB}\cos.\, ZAB)}.$$

Soluzione 6. Se la *CB* (*fig.* 9) sarà egualmente divisa dal punto *A*, onde sia $AC = AB$, allora si avrà

$$CZ = AB\sqrt{(1 + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} + 2\frac{\text{sen.} ABZ}{\text{sen.} AZB}\cos.\, ZAB)}.$$

Soluzione 7. Ritrovata la *AZ* coll'equazione

$$AZ = AB.\frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB},$$

e gli angoli *C* e *Z* coll'equazione tang.

$$\frac{C - Z}{2} = \frac{AZ - AC}{AZ + AC}\,\text{tang.}\,\frac{C + Z}{2}$$

(vedi *Soluzione* 6 del Problema I), si avrà

$$CZ = AC.\frac{\text{sen.}\, CAZ}{\text{sen.}\, AZC} = AZ\frac{\text{sen.}\, CAZ}{\text{sen.}\, ACZ}.$$

Soluzione 8. Se essendo *A* e *B* nella stessa retta, sarà semi-retto l'angolo *ZAC* ed *ABZ* eguale ad un quarto di retto, si avrà

$CZ = \sqrt{(AC^2 + AB^2 - AC\,.\,AB\sqrt{2})}$.

Dimostr. *Essendo* CAZ *semi-retto, il suo supplemento* BAZ *sarà eguale a tre semi-retti, e la somma degli altri due angoli* ABZ, *ed* AZB *formeranno un altro semi-retto, ma per costruzione* ABZ *eguale ad un quarto d'un retto sarà l'altro pure a questo eguale, ed i loro seni eguali, dunque la formola che dà*

$$CZ = \sqrt{(AC^2 + AB^2\frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2AC.AB.\frac{\text{sen.}\, ABZ}{\text{sen.}\, AZB}\cos.\, ZAC)}$$

si cangierà nella seguente

$$CZ = \sqrt{(AC^2 + AB^2 - AC.AB.\sqrt{2})}.$$

Soluzione 9. Facendo l'angolo $ZAB = ZAC$ ed $AB = AC$ (*fig.* 10), si avrà

$$CZ = BZ = AB\,.\,\frac{\text{sen.}\, ZAB}{\text{sen.}\, AZB}.$$

Dimostr. *Allora i due triangoli sono perfettamente eguali, e cercando la* BZ *nel triangolo* ABZ, *sarà pure trovata la* CZ *a* BZ *eguale.*

Appendice per l'altimetria.

Se si voglia misurare l'altezza d'una torre AB (*fig.* 11); se sarà perpendicolare a BV, si avrà

$$AV = VB \text{ tang. } V.$$

Dimostr. *In ogni triangolo rettangolo un lato sta all'altro come il raggio sta alla tangente dell'angolo opposto al secondo lato. Vedi* Bossut, *pag.* 123, *Teor. II, cioè*

$$VB : AB = 1 : \text{tang. } V,$$

onde $AB = VB \text{ . tang. } V.$

Nel caso poi che V sia semi-retto la tangente essendo egual raggio $= 1$, sarà $AB = VB$.

Se si vorrà misurare la lunghezza d'un muro a scarpa AB (*fig.* 12), sarà come nella *Soluz.* 5, Problema I

$$AB = BV \frac{\text{sen. } V}{\text{sen. } A}.$$

Se non si potrà misurare l'angolo ZCA (*fig.* 13) che fa il muro a scarpa ZC colla CA che si può misurare, si avrà la CZ colle formole delle *Soluzioni* 5, 6, 7 e 8 del Problema II.

Cioè trovando prima la AZ per mezzo del triangolo BAZ, indi CZ.

PROBLEMA III.

Misurare la XZ *tutta inaccessibile.*

Soluz. 1. Fissato un punto C accessibile (*fig.* 14), il punto A che sia nella visuale CZ, il punto B che sia nella CX, il punto M che sia alla metà della AB; il punto P dove la MZ taglia la CB; il punto Q dove la MX taglia la CA, e presa da C verso A sulla CA la

$$Cz = \frac{AC \,.\, CP}{BP - CP},$$

e sulla CB la

$$Cx = \frac{CB \,.\, CQ}{AQ - CQ};$$

la xz sarà eguale, ed anche parallela alla XZ.

Soluzione 2. Se il punto M non si fosse potuto prendere sulla metà della AB (*fig.* 14) converrà prendere

$$Cz = \frac{MB \,.\, AC \,.\, CP}{MA \,.\, BC - AB \,.\, CP}$$

$$Cx = \frac{MA \,.\, BC \,.\, CQ}{MB \,.\, AC - AB \,.\, CQ}.$$

Dimostr. *Si tirino* MS *ed* MS' *una parallela a* CZ, *l'altra a* CX *come nel caso del* Probl. II, *Soluz.* 3 *col medesimo calcolo si trovi* CZ, CX, *indi si prenda* $Cx = CX$, $Cz = CZ$ *sulle loro continuazioni, si tiri poscia la* xz, *i due triangoli* XCZ, xCz *saranno eguali, e perchè a lati eguali s'oppongono angoli pure eguali, dunque angolo* $XZC = xzC$, *cioè gli angoli alterni interni eguali, dal che risulta essere la* xz *eguale, ed anche parallela ad* XZ. *Vedi* Bossut, pag. 30, Teor. III.

Soluzione 3. Se fossimo impediti di prendere sul terreno le *Cz*, *Cx* (*fig.* 14), si avrà in generale

$$XZ = \sqrt{\left[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cx . Cz}{AC . CB}(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)\right]}$$

si avrà dunque la *XZ* mercè un radicale di valori tutti conosciuti, conoscendosi *Cx* e *Cz* pel n.° 2.

Dimostr. *Si riduce il problema a trovare la* $xz = XZ$ *per mezzo dei tre lati del triangolo* ABC, *e dei due pure dati* Cx *e* Cz. *Si calino a tal oggetto le due perpendicolari* AG, ZR *sul lato* BC, *si avrà*

$$AG^2 = AC^2 - CG^2, \text{ ed}$$
$$AG^2 = AB^2 - BG^2, \text{ dunque}$$

$$AC^2 - CG^2 = AB^2 - BG^2, \; GB = GB - CG,$$

perciò

$$AC^2 - CG^2 = AB^2 - (BC - CG)^2,$$

dalla quale equazione si ha

$$CG = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC}.$$

I due triangoli simili CAG, CzR *danno l'analogia* CA : CG :: Cz : CR *onde*

$$CR = \frac{Cz . CG}{CA},$$

sostituito a CG *il suo valore si ha*

$$CR = \frac{Cz}{CA}\left(\frac{AC_2 + BC^2 - AB^2}{2BC}\right);$$

$$Rx = Cx - CR = Cx - \frac{Cz(AC^2 + BC_2 - AB^2)}{2BC . CA};$$

si ha pure (come sopra CG)

$$Rx = \frac{Cx^2 + zx^2 - Cz^2}{2 . Cx},$$

i quali valori eguagliati assieme daranno l'equazione

$$\frac{Cx^2 + zx^2 - Cz}{2Cx} = \frac{2BC.CA.Cx - Cz(AC^2 + BC^2 - AB^2)}{2BC . CA} \ldots . zx^2$$

$$= \frac{BC . CA(Cx^2 + Cz^2) - Cz . Cx(AC^2 + BC^2 - AB^2)}{AC . BC}$$

sottraggo dal primo termine la quantità

$$\frac{2\,Cx\,.\,Cz\,.\,BC\,.\,CA}{BC\,.\,CA},$$

e l'aggiungo al secondo così

$$zx^2 = \frac{BC\,.\,CA}{BC\,.\,CA}(Cx^2 - 2Cx\,.\,Cz + Cz^2) +$$

$$\frac{Cz\,.\,Cx}{BC\,.\,CA}(AB^2 - BC^2 - AC^2 + 2BC\,.\,CA)$$

indicando il quadrato della prima parentesi, svolgendo la seconda ne' suoi fattori, ed estraendo la radice si avrà

$$zx = ZX = \sqrt{[(Cz - Cx)^2 +}$$

$$\frac{Cz\,.\,Cx}{BC\,.\,CA}(AB + AC - BC)(AB + BC - AC)].$$

Nel caso poi di $CA = CB$, si avrà

$$XZ = \sqrt{[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cx\,.\,Cz}{AC^2}AB^2]}.$$

Soluzione 4. Si faccia retto l'angolo ACB, e si prenda $AC = CB$ (*fig.* 14); si avrà

$$XZ = Cz\sqrt{(Cz^2 + Cx^2)}.$$

Dimostr. *In questo caso la formola* ZX *diventa*

$$= \sqrt{(Cz^2 - 2Cz\,.\,Cx + Cx^2 + 2Cz\,.\,Cx)}$$

$$= \sqrt{(Cz^2 + Cx^2)}$$

come appunto deve essere il valore dell'ipotenusa.

Soluzione 5. Se tornasse comodo prendere i punti B ed A in una retta BA tale che lo spazio

tra la BA e la XZ non fosse accessibile; fissato il punto C accessibile al di qua della BA dove si taglino la XB e la ZA, e preso il punto M alla metà della BA, e fissato il punto P, dove la MZ taglia la CB (*fig.* 15), ed il punto Q, dove la XM taglia la AC, e presa sulla continuazione

della ZC la $Cz = \frac{AC\,.\,CP}{CP - BP}$, e sulla continuazione

della XC la $Cx = \frac{BC\,.\,CQ}{CQ - AQ}$;

la xz sarà eguale, e parallela alla XZ.

Dimostr. *Calate dal punto* M *le linee* MS, MS' *parallele una al lato* CZ, *l'altra al lato* CX, *procedasi nel resto come nella dimostrazione della prima soluzione, Problema III.*

Soluzione 6. Se il punto M non fosse nel mezzo della AB converrà prendere

$$Cz = \frac{MB\,.\,AC\,.\,CP}{AB\,.\,CP - MA\,.\,BC},$$

$$Cx = \frac{MA\,.\,BC\,.\,CQ}{AB\,.\,CQ - MB\,.\,AC}.$$

Ciò si dimostra come al n.° 2, Probl. III.

Soluzione 7. Se non si potranno prendere sul terreno le Cz, Cx si avrà XZ coll'equazione

$$XZ = \sqrt{\left[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cz \cdot Cz}{AC \cdot CB}(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)\right]}.$$

Nel caso di $CA = CB$, si avrà

$$XZ = \sqrt{\left[(Cz - Cx)^2 + \frac{Cz \cdot Cx}{AC^2} AB^2\right]}.$$

Vedi Dimostr. n.° 3, Probl. III.

Soluz. 8. Si faccia retto l'angolo ACB (*fig.* 15), e si prenda $AC = CB$, si avrà

$$XZ = \sqrt{(Cz^2 + Cx^2)}.$$

Si dimostra al n.° 4, Probl. III.

Soluzione 9. Si faccia l'angolo XAB eguale all'angolo XAZ (*fig.* 16), e si vada ritirandosi tanto sulla AB finchè si trovi un punto B tale, che sia l'angolo

$$ABX = 90^\circ - ZAB = BXA$$

si avrà $XZ = BZ = AB \dfrac{\text{sen. } ZAB}{\text{sen. } AZB}$.

Dimostr. *Essendo per condizione l'angolo* XAZ = BAZ, *e l'ang.* XBA = 90° — BAZ, *sarà* XBA + BAZ = 90°, *e poichè la somma di tre angoli in un triangolo* = 2. *Retti o sia* 2 . 90°, *sarà l'altro angolo* BQA = 90° *cioè retto, dunque* BX *perpendicolare sopra* ZA, *e retti i*

quattro angoli all'incrocicchiamento, perciò i due triangoli AQX, BAQ, *i quali hanno il lato comune* AQ *adjacente a due angoli eguali saranno perfettamente uguali* (Bossut, pag. 23, Teor. IX), *sarà ed* AX = BA. *Traguardando poi da* X *in* Z *la* XZ = BZ, *poichè i due triangoli* BQZ, ZQX *ambedue hanno l'angolo retto compreso da due lati eguali ciascuno a ciascuno, cioè* BQ = QX, *ed il lato comune* QZ. *Dunque anche* ZX = BZ, *e dalla trig si ha*

BZ : AB :: sen. BAZ : sen. AZB,

per cui XZ = BZ = AB, $\dfrac{\text{sen. BAZ}}{\text{sen. AZB}}$.

Soluzione 10. Fatto retto l'angolo XAB, e ritirandosi tanto sulla AB (*fig.* 17), che diventi retto l'angolo di traguardo ABZ, segnato il punto D sulla XA, dove la taglia il traguardo dell'angolo retto XBD; ed il punto C sulla ZB, dove la taglia il traguardo dell'angolo retto ZAC; si avrà

$$XZ = AB\sqrt{\left[1 + \left(\frac{BA}{BC} - \frac{AB}{AD}\right)^2\right]};$$

per l'uso poi dei logaritmi sarà più comoda la formola

$$XZ = AB\sqrt{\left[1 + \left(\frac{AB\,(AD - BC)}{AD \cdot BC}\right)^2\right]}.$$

Dimostr. *Essendo per costruzione tutto l'an-*

golo XBD, *e la perpendicolare nel triangolo retto dal vertice sulla base media proporzionale fra i due segmenti della medesima, si avrà*

$$XA : AB = AB : AD \text{ e } XA = \frac{AB^2}{AD}, \text{ onde}$$

per la stessa ragione $ZB = \frac{AB^2}{BC}$.

Si tiri adesso Xy *parallela ad* AB, *ella sarà perpendicolare al lato* ZB, *e si avrà*

$$XZ^2 = AB^2 + Zy^2,$$

ma $Zy = ZB - AX$ *dunque*

$$XZ^2 = AB^2 + (ZB - AX)^2,$$

mettendo i valori trovati di ZB, *ed* AX, *avrò*

$$XZ^2 = AB^2 + \left(\frac{AB^2}{BC} - \frac{AB^2}{AD}\right)^2 \dots$$

$$XZ = AB\sqrt{\left[1 + \left(\frac{AB}{BC} - \frac{AB}{AD}\right)^2\right]}.$$

Soluzione 11. Fatto retto *XAB* (*fig.* 18), e trovato il punto *B* sulla *AB* sicchè sia retto anche *ABZ*, si trovino sulla medesima *AB* anche i punti *C* e *D*, cosicchè riescono semi-retti gli angoli *ACX* e *BDZ*, si avrà

$$XZ = \sqrt{[AB^2 + (BD - AC)^2]}$$

pei logaritmi sarà più comoda la formola

$$XZ = AB\sqrt{\left(\frac{BD - AC}{AB^2} + 1\right)}.$$

Soluzione 12. Trovati tre punti *A*, *B*, *C* tali che in essi si possa traguardare collo squadro in *X* e *Z*, cosicchè sien retti gli angoli *XAZ*, *XBZ*, *XCZ* sarà

$$XZ = \frac{2BA.BC.CA}{\sqrt{[(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)(AB-BC+CA)\times(BC+CA-AB)]}}$$

o vero trovato sulla *AC* (*fig.* 19) un punto *P* tale che sia retto l'angolo *APB*, si avrà

$$XZ = \frac{BA.BC}{BP}$$

Dimostr. *Ai tre angoli retti collocati sulla medesima base si potrà circoscrivere un circolo* (Bossut, pag. 37), *il quale avrà per diametro l'istessa base* XZ; *condotto poi l'altro diametro* AX′, *e la linea* X′B, *e la linea* BP *perpendicolare sopra* AC, *saranno i due triangoli* ABX′, BPC *simili essendo ambedue retti, ed avendo ambedue un angolo alla circonferenza appoggiato all'istessa corda; dunque l'analogia*

$$AX' : BC = AB : BP, \text{ o sia}$$

$$AX' = XZ = \frac{BC.AB}{BP},$$

e mettendo per BP *il suo valore, dato per i tre* *lati del triangolo, vedi libro III, problema I, n.° 4, si avrà*

$$XZ = \frac{2AB.BC.CA}{\sqrt{[(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)\times(AB-BC+CA)(-AB+BC+CA)]}}$$

o vero trovato sulla AC *un punto* P *tale, che sia retto l'angolo* APB, *si riterrà la prima soluzione*

$$XZ = \frac{BC.AB}{BP}.$$

Soluzione 13. Trovati tre punti A, B, C, tali che sien semi-retti gli angoli XAZ, XBZ, XCZ (*fig.* 20), sarà

$$XZ = \frac{2.AB.BC.CA}{\sqrt{[2(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)\times(AB-BC+CA)(BC+CA-AB)]}}$$

o vero fatto retto l'angolo ABP

$$XZ = \frac{BA.BC}{EP.\sqrt{2}}.$$

Dimostr. *Circoscritto il circolo* ABCZX *a tre angoli semi-retti,* XZ *comune base di loro sarà la corda del quadrante; dunque il diametro di questo circolo sarà* $CX' = XZ\sqrt{2}$. *Qui pure si hanno i due triangoli simili* BX'C, BAP

ambedue retti, ed ambedue aventi un angolo alla circonferenza situato sulla medesima corda; dunque simili, e quindi dall'analogia si ottiene

$$CX' = \frac{BC.AB}{BP} = XZ.\sqrt{2},$$

da cui $XZ = \dfrac{BC.AB}{BP.\sqrt{2}}$,

sostituendo la BP *il suo valore come sopra, si ha*

$$XZ = \frac{2AB.BC.CA}{\sqrt{[2(AB+BC+CA)(AB+BC-CA)\times(AB-BC+CA)(BC+CA-AB)]}}$$

Soluzione 14. Misurata la base AB (*fig.* 21), e gli angoli di traguardo ad X e Z nei punti A e B, si avrà

$$AX = AB\,\frac{\text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB}$$

$$AZ = ZB\,\frac{\text{sen. } ABZ}{\text{sen. } AZB},$$

coi quali due valori, e col valore dell'angolo XAZ si avrà la XZ per la soluzione 6 del Problema I, o vero essendo

$$BX = AB\,\frac{\text{sen. } BAX}{\text{sen. } BXA},$$

$$BZ = AB\,\frac{\text{sen. } BAZ}{\text{sen. } BZA}$$

con questi due valori, e col valore dell'angolo

XBZ, si avrà pure la XZ per la medesima soluzione 6 del Problema I.

Soluzione 15. Stanti le condizioni del precedente n.° 14 si avrà il valore della XZ egualmente dalle due equazioni (*fig.* 21)

$$XZ = AB\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\,\frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB} \cos. XAZ\right)}$$

$$XZ = AB\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 BAX}{\text{sen.}^2 BXA} + \frac{\text{sen.}^2 BAZ}{\text{sen.}^2 BZA} - 2\,\frac{\text{sen. } BAX \text{ sen. } BAZ}{\text{sen. } BXA \text{ sen. } BZA} \cos. XBZ\right)}.$$

Dimostr. *Ambedue le equazioni provenienti dalla formola data dalla soluzione* 6 *del Problema I, cioè*

$XZ = \sqrt{(AX^2 + AZ^2 - 2.AX.AZ.\cos. XAZ)}$, o

$XZ = \sqrt{(XB^2 + BZ^2 - 2.XB.BZ.\cos. XBZ)}$,

sostituendo in queste i valori delle linee, trovati al n.° 14 *si ha come sopra.*

Soluzione 16. Fatto retto l'angolo XAB (*fig.* 16), ed osservato l'angolo ZAB; trovato pure un punto B, dove si abbia retto l'angolo ABZ, ed osservato l'angolo ABX, si avrà

$XZ = AB\sqrt{[1 + (\text{tang. } ZAB - \text{tang. } XBA)^2]}$

o vero cercato sulle tavole l'angolo che ha per tangente la differenza delle tangenti di ZAB, e di XBA, e chiamando quest'angolo trovato A; si avrà

$$XZ = AB.\text{sec. } A$$

Dimostr. *Tirisi la* Xy *perpendicolare sopra* BX, *essa sarà pure parallela a* BA, *si avrà*

$XZ = \sqrt{(Xy^2 + Zy^2)} = \sqrt{[AB^2 + (BZ - AX)^2]}$

ma $BZ = AB.\text{tang. } BAZ$,

$AX = AB \text{ tang. } XBA$, *dunque*

$XZ = AB\sqrt{[1 + (\text{tang. } BAZ - \text{tang. } XBA)^2]}$

e chiamato A *l'angolo che ha per tangente la differenza delle due tangenti, si avrà*

$XZ = AB\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 A)} = AB . \text{sec. } A$

essendo la secante quadrata eguale al quadrato del raggio più quello della tangente perchè la secante è ipotenusa del triangolo formato da queste tre linee.

Soluzione 17. Piantata una palina in C, cosicchè l'angolo XCZ sia maggiore d'un retto, e trovati due punti A sulla ZC, B (*fig.* 21) sulla XC tali che sieno retti gli angoli XAZ, XBZ, si avrà

$$XZ = \frac{2AB.BC.CA}{AB^2 - BC^2 - CA^2}.$$

Dimostr. *Calata la perpendicolare* BS *sulla* CZ *si avranno i triangoli simili* CSB, SBZ, CBZ, XAC, *perciò l'analogia*

$$AC : CS = XA : BS, \text{ da cui}$$

$$XA = \frac{BS \, . \, AC}{CS},$$

$$CZ : CB :: CB : CS, \text{ da cui}$$

$$CZ = \frac{CB^2}{CS}.$$

Cerchinsi ora i valori CS, *e* BS *così:*

$BS^2 = AB^2 - AS^2 \ (= AC + CS)^2$, *di più*

$BS^2 = CB^2 - CS^2$, *dunque*

$AB^2 - (AC + CS)^2 = CB^2 - CS^2 \ldots .$

$$CS = \frac{AB^2 - AC^2 - CB^2}{2AC},$$

$$CS^2 = \frac{AB^4 + CB^4 + AC^4 - 2AB^2 . CB^2 - 2AC^2 . + AB^2 + 2AC^2 . CB^2}{4AC^2}$$

ora $BS^2 = CB^2 - CS^2$, *dunque*

$$BS^2 = \frac{2AC^2 . CB^2 + 2AB^2 . CB^2 + 2AC^2 . AB_2 - AB^4 - CB^4 - AC^4}{4AC^2};$$

$$AZ = AC + CZ = AC + \frac{CB^2}{CS} \ldots .$$

$$AZ = \frac{AC\,(AB^2 + CB^2 - AC^2)}{AB^2 - AC^2 - CB^2},$$

$$AZ^2 = \frac{AC^2(AB^4 + CB^4 + AC^4 + 2AB\ CB^2 - 2AB.^2AC_2 - 2AC^2CB^2)}{(AB^2 - CB^2 - AC_2)^2}$$

$$XA^2 = \frac{AC^2 . BS^2}{CS^2} \ldots .$$

$$= \frac{AC2(2AC^2 . CB^2 + 2AB . CB^2 + 2AC^2 . AB^2 - AB^4 - CB^4 - AC^4)}{(AB^2 - CB^2 - AC^2)^2}$$

$$XZ = \sqrt{(XA^2 + AZ^2)} \ldots .$$

$$XZ = \frac{2AB . CB . AC}{AB^2 - CB^2 - AC^2}.$$

Soluzione 18. Trovati i due punti *A* e *B* come al n.° 17, ed essendo *Q* il punto (*fig.* 21), dove si tagliano le *XA*, *ZB* si avrà

$$XZ = \frac{2AB . BQ . QA}{AQ^2 + BQ - AB}.$$

Dimostr. *Calate dai due punti* A *e* B *le due linee* AN, BM *perpendicolari sui lati* BQ *ed* AQ, *l'una sarà parallela ad* XB, *l'altra ad* AZ, *simili dunque saranno i due triangoli* XBQ, ANQ, *per il che si avrà* $QX = \frac{QB . QA}{QN}$;

dalla dimostrazione della soluzione 3, *Prob. III si ha*

$$QN = \frac{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}{2BQ},$$

dunque

$$QX = \frac{2QA . QB^2}{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}.$$

Istessamente è il segmento

$$QM = \frac{AQ^2 + QB^2 - AB^2}{2AQ},$$

e per i due triangoli simili QMB, QAZ, *si avrà*

$$QZ = \frac{BQ \cdot QA}{QM}, \text{ o vero}$$

$$QZ = \frac{2QB \cdot QA^2}{AQ^2 + QB^2 - AB^2},$$

$$AZ^2 = QZ^2 - AQ^2,$$

mezzo il valore di QZ . . . . ,

$$AZ^2 = \frac{4AQ^4 BQ^2 - AQ^2(AQ^2 + BQ^2 - AB^2)^2}{(AQ^2 + BQ^2 - AB^2)^2},$$

$$AX = XQ - QA$$

mettendo ad XQ *il suo valore* . . . .

$$AX^2 = \frac{AQ^2(QB^2 + AB^2 - AQ)^2)}{(AQ^2 + BQ^2 - AB^2)^2}.$$

Ormai $XZ^2 = AZ^2 + AX^2$

facendo uso dei due valori di AZ e AX . . . :

$$XZ = \frac{2QB \cdot AB \cdot AQ}{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}.$$

Soluzione 19. Fatto retto l'angolo di osservazione *XCZ*, e continuate le *ZC* in *A*, ed *XC* in *B* (*fig.* 22), finchè si abbiano gli angoli *CAX*, *CBZ* semi-retti, sarà $XZ = AB$.

Dimostr. *I due triangoli* ACX, BCZ *sono retti, ed isosceli perchè avendo ambedue l'angolo retto al vertice, ed un angolo semi-retto, il terzo loro sarà pure semi-retto, onde* AC = CX, CB = CZ. *I due triangoli poi* XCZ, ABC *sono eguali avendo un angolo eguale compreso fra lati reciprocamente eguali; onde pure* AB = XZ.

Soluzione 20. Fatti retti gli angoli *XAB*, *ZAC*, e semi-retti gli angoli *XBA*, *ZCA* (*fig.* 23), sarà $XZ = B'C$.

Dimostr. *Essendo per costruzione retto l'angolo* XAB, *e semi retto* XBA *sarà il terzo pure semi-retto, ed* AB = AX, *così pure* AC = AZ, *ora presa* AB′ = AB *sull'istessa direzione, e sottratto dagli angoli retti* XAB′, CAZ *l'angolo comune* CAX *resteranno i due* CAB′ XAZ *ancora eguali compresi fra lati mutuamente eguali, onde i due triangoli* XAZ, CAB′ *saranno eguali, e per conseguenza* CB′ = XZ.

Appendice per l'altimetria.

Se sia da misurarsi l'altezza inaccessibile *AB* supposto che si possa misurare la *DC* (*fig.* 24), che è una parte dell'orizzontale DB, e gli angoli ADB, ACB, si avrà

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC}{\text{sen. } DAC} \text{ sen. } ACB.$$

Dimostr. *Essendo noto per osservazione l'angolo* ACB, *si conoscerà pure* ACD *suo supplemento, e si troverà risolvendo il triangolo* ACD.

$$\mathrm{AC} = \mathrm{DC} \frac{\text{sen. ADC}}{\text{sen. DAC}}.$$

Vedi Bossut, pag. 130, tav. II. *Risoluzione dei triangoli obliquangoli caso I. Istessamente si avrà nel triangolo* ACB, AB = AC sen. ACB,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DC} \frac{\text{sen. ADC}}{\text{sen. DAC}} \text{ sen. ACB.}$$

Se DC (*fig.* 25) non fosse parte dell'orizzontale CB, ma facesse qualunque angolo coll'orizzonte; e se il piano del triangolo ADC non fosse lo stesso col piano del triangolo verticale ACB, si avrebbe ancora

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC}{\text{sen. } DAC} \text{ sen. } ACB.$$

Se all'altezza AB della torre si volesse aggiungere l'altezza BE posta sotto l'orizzontale CB; essendo conosciuto l'angolo BCE, e però CEB, ed ACE, si avrà

$$AE = DC \frac{\text{sen. } ADC \text{ . sen. } ACE}{\text{sen. } DAC \text{ . sen. } CEA},$$

e ciò anche se il triangolo ADC non sia verticale, nè la DC orizzontale.

Dimostr. *Dal triangolo* ADC *si ha come sopra*

$$\mathrm{AC} = \mathrm{DC} \frac{\text{sen. ADC}}{\text{sen. DAC}};$$

dal triangolo ACE *si ha*

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AC} \frac{\text{sen. ACE}}{\text{sen. CEA}}, \textit{ onde}$$

$$\mathrm{AE} = \mathrm{DC} \frac{\text{sen. ADC . sen. ACE}}{\text{sen. DAC . sen. CEA}}.$$

Se si vorrà misurare l'altezza obbliqua AB (*fig.* 26) d'un muro a scarpa, conosciuto il suo angolo d'inclinazione ABE coll' orizzantale BE, e l'angolo BCF del traguardo CB coll'orizzontale CF, e però anche CBF suo complemento, si avrà

$$CBA = 270^\circ - CBF - ABE;$$

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC \text{ sen. } ACB}{\text{sen. } DAC \text{ sen. } CBA}.$$

Dimostr. *Riducesi al caso superiore. Dal triangolo* DCA *si ha* $\mathrm{AC} = \mathrm{DC} \frac{\text{sen. ADC}}{\text{sen. DAC}}$.

Dal triangolo ABC, $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \frac{\text{sen. ACB}}{\text{sen. ABC}}$, *in cui conoscesi* $ABC = 4$ *retti* — FBE *retto* — ABE — CBF, *ovvero* $ABC = 3$ *retti* — ABE — CBF, *ed* AC, dunque

$$AB = DC \frac{\text{sen. } ADC \,.\, \text{sen. } ACB}{\text{sen. } DAC \,.\, \text{sen. } CBA}.$$

CASI PARTICOLARI.

Caso I.

Si può misurare la orizzontale inaccessibile *DC* (*fig.* 25) stando in *A* sopra una torre *AB*; se sarà nota l'altezza *AB* dal piano orizzontale, che passa per la *DC*, e se si possono misurare gli angoli *CAB*, *DAB*, *DAC*, e si avrà

$DC = AB\sqrt{(\text{sec.}^2 CAB + \text{sec.}^2 DAB - 2\,\text{sec.}\,CAB\ \text{sec.}\,DAB\ \text{cos.}\,DAC)}$.

Se il piano del triangolo *DAC* sarà verticale, cioè se la *DC* sarà sulla continuazione della *BC* (*fig.* 24), si avrà

$DC = AB\,(\text{tang.}\,DAB - \text{tang.}\,CAB)$.

Dimostr. *Nel triangolo rettangolo* ACB *si ha*

$$AC = \frac{AB}{\text{cos. } CAB};$$

nel triangolo ADB *pure retto si ha*

$$AD = \frac{AB}{\text{cos. } DAB}\ (\textit{fig. } 25);$$

nel terzo triangolo DAC, *del quale si conoscono i due lati* DA *ed* AC *coll'angolo intermedio si avrà per la Soluzione* 6, *Prob. I.*

$DC = \sqrt{(DA^2 + CA^2 - 2DA.\,CA.\,\text{cos.}\,DAC)}$,

e sostituiti i valori di DA *e* CA,

$$DC = \sqrt{\left(\frac{AB^2}{\text{cos.}^2 DAB} + \frac{AB^2}{\text{cos.}^2 CAB} - \frac{2AB^2}{\text{cos. } DAB\ \text{cos. } CAB}\,\text{cos. } DAC\right)},$$ *ovvero*

$DC = AB\sqrt{(\text{sec.}^2 DAB + \text{sec.}^2 CAB - 2\,\text{sec.}\,CAB\,.\,\text{sec.}\,DAB\,.\,\text{cos.}\,DAC)}$.

Se la DC *è sulla continuazione della* BC *allora dal triangolo* ABD *si ha*

$$DB = AB\,.\,\text{tang.}\,DAB,$$
$$CB = AB\,.\,\text{tang.}\,CAB\ (\textit{fig. } 24)$$

(*Vedi* Bossut, *tav. I. Risoluzione dei triang. rettang.*, *ecc.*) *ora*

$DB - CB = DC = AB(\text{tang.}\,DAB - \text{tang.}\,CAB)$.

Caso II.

Se si volesse determinare la posizione d'un luogo, dal quale si vedono tre luoghi, la cui po-

sizione è nota, ed il quale pure da essi non si può scorgere; come avviene per esempio, allorchè si vede solamente la cima di tre torri sino alla quale non si potesse montare per discoprire quel luogo da cui fu osservato.

Sieno *A*, *B*, *C* (*fig.* 27) i tre luoghi noti di posizione, onde ogni parte del triangolo *ABC* si suppone cognita; e sia *D* il luogo incognito, dal quale essendo stati osservati gli angoli *m*, *n* si dimandano le distanze *BD*, *AD*, *CD*.

Si avrà cotang. $x = \frac{AB \text{ sen. } (m+n)}{BC \text{ sen. } m \text{ . sen. } (B-n)}$ — cotang. $(B-n)$ ovvero per più comodo del calcolo coi logaritmi cotang. $x =$ cotang. $(B-n)$

$$\left(\frac{\text{sen. } C \text{ sen. } (m+n)}{\text{sen. } BAC \text{ . sen. } m \text{ cos. } (B-n)} - 1\right).$$

Dimostr. *Nel triangolo* BDC *si ha*

$$\text{sen. BCD} = \frac{\text{BD . sen. } (\text{m}+\text{n})}{\text{BC}};$$

si ha pure

BCD $= 180° -$ n $-$ DaC, *e*

DaC $= 180° -$ ABC $- x$, *dunque*

BCD $= 180° -$ n $- (180° -$ ABC $- x)$, *ovvero*

BCD $= x + (\text{B} - \text{n})$, *e*

$$\text{sen. BCD} = \frac{\text{sen. } x \text{ cos. } (\text{B}-\text{n}) + \text{sen. } (\text{B}-\text{n}) \text{. cos. } x}{\text{R} = 1}$$

(*vedi* Bossut *trig.*, *pag.* 120) *eguagliando i due valori si avrà*

$$\frac{\text{BD.sen.}(\text{m}+\text{n})}{\text{BC}} = \text{sen.}x\text{cos.}(\text{B}-\text{n}) + \text{sen.}(\text{B}-\text{n})\text{cos.}x;$$

dal Triang. ABD *si ha*

$$\text{BD} = \frac{\text{AB . sen. } x}{\text{sen. m}},$$

il qual valore sostituito si avrà

$$\frac{\text{AB . sen. } x}{\text{sen. m}} \cdot \frac{\text{sen.}(\text{m}+\text{n})}{\text{BC}} =$$

sen. x . cos. (B — n) + sen. (B — n) . cos. x, *da cui*

$$\text{cotang. } x = \frac{\text{AB.sen.}(\text{m}+\text{n})}{\text{BC. sen. m sen.}(\text{B}-\text{n})} - \text{cotang. } (\text{B}-\text{n});$$

e poichè $\frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. BAC}}$,

sostituendo questo valore nell'equaz. di cotang. x *si avrà l'altra formola più comoda per i logaritmi, cioè* cotang. $x =$

$$\text{contag.}(\text{B}-\text{n})\left(\frac{\text{sen. C sen. } (\text{m}+\text{n})}{\text{sen. BAC . sen. m cos. } (\text{B}-\text{n})} - 1\right).$$

Trovato in questa maniera il segmento x dell'angolo *BAC*, si conoscerà per conseguenza l'altro segmento CAD, e si avrà

$$BD = BA \frac{\text{sen. } x}{\text{sen. } m}$$

$$AD = \begin{cases} BA \dfrac{\text{sen. } (m + x)}{\text{sen. } m} \\ CA \dfrac{\text{sen. } (n + y)}{\text{sen. } n} \end{cases}$$

$$DC = CA \frac{\text{sen. } y}{\text{sen. } n}.$$

Se $B < n$ si avvertirà che cotang. ($B - n$ diviene negativa.

Se il punto D fosse dentro del triangolo ABC, si avrebbe $(m + n) > 180^{\circ}$, ed allora anche sen. $(m + n)$ sarebbe negativo.

Nel caso che fosse $B = n$, il problema sarà indeterminato; poichè in tal caso un cerchio passerà pei quattro punti A, B, C, D, e non si potrà conchiuder altro, se non che il punto D è sulla circonferenza del cerchio che passa pei tre punti A, B, C. Ciò si conoscerà ancora dalla costruzione seguente.

Se non preme di conoscere le distanze AD, BD, CD, ma solamente la situazione convenevole al punto D sopra una carta, sarà più spedita questa costruzione.

Si faccia passare pei punti A e B un cerchio

di raggio $\frac{AB}{2 \text{ sen. } m}$, e pei punti A e C un altro cerchio di raggio $= \frac{AC}{2 \text{ sen. } n}$. Questi due cerchi si taglieranno in due luoghi, cioè in A, e nel punto cercato D.

COROLLARIO.

Se $B = 0$, il che succede quanto i tre luoghi B, A e C sono posti in linea retta (si consideri il luogo A nel punto a d'intersezione della AD colla BC, ed $x = BaD$) (*fig.* 28), sarà allora

$$\text{cotang. } x = \text{cotang. } n \left(1 - \frac{AB \,.\, \text{sen. } (m + n)}{BC \,.\, \text{sen. } m \text{ cos. } n} \right)$$

$$= \frac{AC \text{ cot. } n - AB \text{ cot. } m}{BC}.$$

Trovato così l'angolo x, si avranno anche gli angoli

$$B = 180^{\circ} - x - m$$
$$DAC = 180^{\circ} - x$$
$$C = x - n$$

e le distanze

$$AD = AB \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } m} = AC \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } n}$$

$$BD = AB \frac{\text{sen. } x}{\text{sen. } m} = BC \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } (m + n)}$$

$$CD = AC \frac{\text{sen. } DAC}{\text{sen. } n} = BC \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } (m+n)}.$$

Se si vorrà la perpendicolare DP alla BC si avrà $DP = AD$ sen. x.

PROBLEMA IV.

Trovare la distanza VP *del punto* V *dalla* AB *accessibile ai soli estremi* A *e* B (*fig.* 29).

Soluzione

1. $VP = \dfrac{AV \,.\, BV \,.\, \text{sen. } AVB}{\sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos.\ AVB)}}$

2. $VP = AV$ sen. $A = BV$ sen. B.

Dimostr. *Nel triangolo* AVB *conosconsi per condizione i due lati* AV *e* BV, *e l'angolo intermedio, l'altro* AB *sarà*

$= \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos.\ AVB)}$; *dal medesimo triangolo si ha*

$$\text{sen. } A = \frac{VB \,.\, \text{sen. } V}{AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos.\ AVB)}},$$

ora dal triangolo VPA *retto si ha*

VP $=$ AV . sen. A, *ovvero*

$$VP = \frac{AV \,.\, VB \,.\, \text{sen. } V}{\sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos.\ AVB)}};$$

PROBLEMA V.

Trovare la distanza AP *del punto* A *dalla* XZ *tutta inaccessibile.*

Soluzione. Misurata una base AB, e gli angoli di traguardo verso X e Z nei punti A e B (*fig.* 30) si avrà

$$AP = \frac{AB \text{ sen. } XAZ}{\sqrt{\left(\dfrac{\text{sen.}^2 AXB}{\text{sen.}^2 ABX} + \dfrac{\text{sen.}^2 AZB}{\text{sen.}^2 ABZ} - 2\,\dfrac{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ} \cos.\ XAZ\right)}}.$$

Dimostr. *Dal* Problema IV *si ha*

$$AP = \frac{AX \,.\, AZ \text{ sen. } XAZ}{\sqrt{(AX^2 + AZ^2 - 2AX \,.\, AZ \,.\, \cos.\ XAZ)}},$$

dove messi i valori di

$$AX = \frac{AB \,.\, \text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB},$$

e di

$$AZ = \frac{AB \text{ sen. } AZB}{\text{sen. } ABZ} \quad \textit{avrò} \ldots.$$

$$AP = \frac{AB \,.\, \text{sen. } ABX \,.\, \text{sen. } ABZ \text{ sen. } XAZ}{\sqrt{(\text{sen.}^2 ABX \text{ sen.}^2 AZB + \text{sen.}^2 ABZ \text{ sen.}^2 AXB - 2 \text{ sen. } ABX \text{ sen. } ABZ \text{ sen. } AXB \,.\, \text{sen. } AZB \cos.\ XAZ)}}$$

ovvero

$$AP = \frac{AB \,.\, \text{sen.}\, ABX \,.\, \text{sen.}\, ABZ \,.\, \text{sen.}\, XAZ}{\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX \,.\, \text{sen.}^2 ABZ \; \text{sen.}^2 AZB}{\text{sen.}^2 ABZ} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ \,.\, \text{sen.}^2 ABX \; \text{sen.}^2 AXB}{\text{sen.}^2 ABX} - \frac{2\, \text{sen.}^2 ABX \; \text{sen.}^2 ABZ \; \text{sen.}\, AXB \,.\, \text{sen.}\, AZB.\, \cos.\, XAZ}{\text{sen.}\, ABX \; \text{sen.}\, ABZ} \right)}}$$

portando fuori il termine comune sen.² ABX . sen.² ABZ *dal radicale, e dividendo avrò*

$$AP = \frac{AB \; \text{sen.}\, XAZ}{\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 AZB}{\text{sen.}^2 ABZ} + \frac{\text{sen.}^2 AXB}{\text{sen.}^2 ABX} - \frac{2\, \text{sen.}\, AXB \; \text{sen.}\, AZB}{\text{sen.}\, ABX \,.\, \text{sen.}\, ABZ} \cos.\, XAZ \right)}}.$$

PROBLEMA VI.

Trovare la distanza delle due parallele AB, CD *nel trapezio* ABCD *per via dei soli lati.*

Soluzione. Sia $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$ (*fig.* 31); la distanza delle due parallele sarà $= \frac{\sqrt{[2(d^2 + b^2)(a-c)^2 - (a-c)^4 - (d^2 - b_2)_2]}}{2(a-c)}$

Dimostr. *Ritenute le denominazioni date ai lati, sia* DM $=$ CN $= y$ *ambedue perpendicolari sopra il lato* AB,

$$AM = x,$$

$$NB = a - c - x.$$

Dai due triangoli rettangoli DMA, CNB *avremo il doppio valore di* $y^2 = d^2 - x^2$,

$$2.^{\circ}\; y^2 = b^2 - (a - c - x)^2,$$

eguagliando questi due valori, nascerà l'equazione $d^2 - x^2 = b^2 - (a - c - x)^2$, *da cui*

$$x = \frac{d^2 + b^2 + (a-c)^2}{2(a-c)},$$

quadrando questo valore si ha

$$x^2 = \frac{(d^2 - b^2)^2 + 2(a-c)^2(d^2 - b^2) + (a-c)^4}{4(a-c)^2},$$

mettendo questo valore di x^2 *sviluppato nel valore di* $y^2 = d^2 - x^2$, *diventerà*

$$y^2 = [\,2a^2d^2 - 4acd^2 + 2c^2d^2 - (a-c)^4 - (d^2 - b^2)^2 + 2b^2a^2 + 2c^2b^2 - 4cab^2\,] : 4(a-c)^2$$

ovvero essendo

$$2a^2d^2 - 4acd^2 + 2c^2d^2 + 2b^2a^2 + 2c^2b^2 - 4cab^2 = 2(d^2 + b^2)(a - c)^2$$

si avrà

$$y = DM = \frac{\sqrt{[2(d^2+b^2)(a-c)^2 - (a-c)^4 - (d^2-b^2)^2]}}{2(a-c)}.$$

PROBLEMA VII.

Dati i tre angoli A, B, C *d'un triangolo, e l'area* S *del medesimo trovare un lato per esempio* AB.

Soluzione. Sarà $AB = \sqrt{\frac{2S \cdot \text{sen. } C}{\text{sen. } A \,\text{sen. } B}}$ (*fig.* 59).

Dimostr. *Calata la perpendicolare* AD *sopra* CB *prolungato se bisogna, avrò*

$$AD = AB \text{ sen. } B \text{ \textit{avrò poi}}$$

$$CB = \frac{AB \text{ sen. } A}{\text{sen. } C};$$

mettendo queste espressioni di AD, *e* CB *nel valor della superficie del triangolo*

$$ACB = S = \tfrac{1}{2} \, CB \,.\, AD \text{ \textit{avrò}}$$

$$S = \tfrac{1}{2} \frac{AB^2 \,.\, \text{sen. } A \text{ sen. } B}{\text{sen. } C}, \text{ \textit{da qui cavasi}}$$

$$AB = \sqrt{\frac{2S \text{ sen. } C}{\text{sen. } A \text{ sen. } B}}.$$

PROBLEMA VIII.

Trovare la distanza AB *inaccessibile fuori che ai punti* A *e* B, *dai quali si ponno vedere due estremi* X *e* Z *di una retta tutta inaccessibile, ma conosciuta di lunghezza* (*fig.* 30).

Soluzione 1. Sarà

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}\cos. XAZ\right)}}$$

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 BAX}{\text{sen.}^2 BXA} + \frac{\text{sen.}^2 BAZ}{\text{sen.}^2 BZA} - 2\frac{\text{sen. } BAX \text{ sen. } BAZ}{\text{sen. } BXA \text{ sen. } BZA}\cos. XBZ\right)}}.$$

Dimostr. *Dal triangolo* ABX *si ha*

$$AX = \frac{AB \,.\, \text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB};$$

dal triangolo ABZ *si ha*

$$AZ = \frac{AB \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AZB};$$

dal triangolo XAZ *si avrà poi*

$$XZ = \sqrt{(AX^2 + AZ^2 - 2AX.AZ.\cos.XAZ)}$$

sostituendo ad AX *e* AZ *i suoi valori avrò*

$$XZ = AB\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}\cos. XAZ\right)}$$ *da qui si ha*

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}\cos. XAZ\right)}}$$

nell'istessa maniera trovasi il secondo valore di AB.

Soluzione 2. Si dia un valore di falsa posizione alla *AB*, e si supponga incognita la *XZ*, e si adoperi la *Soluzione* 14 del *Problema III*, ne risulterà un valore falso della *ZX*; poi si faccia come questo valor falso della *XZ* al valor falso preso della *AB*, così il valor vero conosciuto della *ZX* al valor vero dell'incognita *AB*.

Dimostr. *Si chiami* M *il valor falso della* AB, *il valor di* XZ, *che deriverà da questa falsa supposizione sarà come sopra sostituendo ad* AB, M, *cioè*

$$XZ = M\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\frac{\text{sen. } ABX.\text{sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}\cos. XAZ\right)},$$

e poichè due quantità son tra loro, come le lor parti simili si avrà

$$M\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}\cos. XAZ\right)} : M = XZ : AB,$$

onde come prima

$$AB = \frac{XZ}{\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2 ABX}{\text{sen.}^2 AXB} + \frac{\text{sen.}^2 ABZ}{\text{sen.}^2 AZB} - 2\frac{\text{sen. } ABX \text{ sen. } ABZ}{\text{sen. } AXB \text{ sen. } AZB}\cos. XAZ\right)}}.$$

PROBLEMA IX.

Dati due lati a *e* b *d'un triangolo, e la sua area* m; *trovare il suo terzo lato* c.

Soluzione. Sarà

$$c = \sqrt{[a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(a^2b^2 - 4m^2)}]}.$$

Dimostr. *L'area del triangolo data per i tre lati è*

$$m = \tfrac{1}{4}\sqrt{[2(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2 - c^4]}$$

Vedi lib. III, n.º 4, nella qual equazione considerando la c *per incognita, e facendo per maggior facilità di calcolo* $c^2 = y$, *sarà* $c^4 = y^2$, *con ciò avrò*

$$m^2 = \tfrac{1}{16}\,[\,2\,(a^2+b^2)\,y - (a^2-b^2)^2 - y^2\,]$$

separando i membri che contengono l'incognita, si ha $y^2 - 2\,(a^2+b^2)\,y = -(a^2-b^2) - 16\,m^2$, *compiendo il quadrato* $y^2 - 2\,(a^2+b^2)\,y + (a^2+b^2)^2 = (a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 - 16\,m^2 \ldots\ldots$ $y = a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(a^2\,b^2 - 4\,m^2)}$, *sostituendo ad* y *il suo valore* c^2, *ed estraendo di nuovo la radice si avrà per ultimo*

$$c = \sqrt{[\,a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(a^2\,b^2 - 4\,m^2)}\,]}.$$

LIBRO SECONDO

DELLA DIREZIONE DELLE LINEE, E DELLA MISURA DEGLI ANGOLI

PROBLEMA I.

Continuare la retta AB *in* C *e* D *al di là dell'ostacolo* X *che impedisce il traguardo.*

Soluzione 1. Si guidi un'indefinita *AP* che faccia l'angolo acuto *BAP*, e guidata ad essa la *BM* (*fig.* 32), che faccia con essa un qualunque angolo *BMA* (sarà più comodo se sarà retto); si facciano ai punti *N* e *P* gli angoli *ANC*, *APD* eguali ad *AMB*, e si prenda

$$CN = AN\,\frac{BM}{AM},$$

$$PD = AP\,\frac{BM}{AM};$$

i punti *C* e *D* saranno nella retta *AB*.

Dimostr. *S'immagini la* AB *protratta passare per* C *e* D; *le linee* BM, CN, DP *per costruzione* *parallele; dunque essendo il triangolo* APD *tagliato parallelamente al lato* PD *vi saranno questi rapporti eguali*

$$AM : AN : AP :: BM : CN : PD,$$ *onde*

$$CN = \frac{AN \cdot BM}{AM},$$

$$PD = \frac{AP \cdot BM}{AM}.$$

Soluzione 2. Si faccia semi-retto l'angolo BAM, e retti gli angoli in N e P, e si prenda

$$CN = AN;$$
$$PD = AP.$$

Dimostr. *Allora il terzo angolo sarà pure semi-retto, perciò isosceli i due triangoli, ed*

$$AN = CN,$$
$$AP = DP.$$

Soluzione 3. Guidata una LP distante (*fig.* 33) dalla AB, e fatti eguali gli angoli in L, M, N, P si faccia

$$CN = \frac{LN \cdot BM - AL \cdot MN}{LM},$$

$$PD = \frac{LP \cdot BM - AL \cdot MP}{LM}.$$

Dimostr. *Continuati i due lati* AB e LM *sino al mutuo incontro in* X, *avremo qui pure il*

triang. XPD *tagliato parallelamente dalle linee* AL, BM, CN, PD, *perciò i seguenti rapporti*

$$XL : AL :: XM\ (= XL + LM) : BM,$$
$$XL \cdot BM = LM \cdot AL + AL \cdot XL,$$ *da qui*

$$XL = \frac{LM \cdot AL}{BM - AL}.$$ *Di più*

$$CN : BM = XN\ (= XL + LN) : XL + LM,$$

indi messo il valore di XL *si avrà*

$$CN:BM = \frac{AL.LM + LN(BM - AL)}{BM - AL} : \frac{AL\,LM + LM(BM - AL)}{BM - AL},$$

ovvero

$$CN:BM = AL(LM - LN) + BM.LN : BM.LM,$$

ovvero

$$CN : 1 :: BM \cdot LN - AL \cdot MN : LM,$$ *onde*

$$CN = \frac{BM \cdot LN - AL \cdot MN}{LM}.$$

Istessamente si avrà

$$PD = \frac{LP \cdot BM - AL \cdot MP}{LM}.$$

Soluzione 4. Se si sarà preso

$$LM = MN = NP,$$ si avrà

$$CN = 2BM - AL,$$
$$PD = 3BM - 2AL.$$

Soluzione 5. Per via degli angoli M, N, P

retti si avrà nella costruzione del n.° 3

$CN = MN$ (tang. BLM — tang. AML) + LM tang. BLM

$DP = MP$ (tang BLM — tang. AML) + LM tang. BLM.

Dimostr. *La formola di* CN *del n.° 3 colla trasformazione di* LN *in* LM + MN *diventa*

$$CN = \frac{BM \cdot LM}{LM} + MN\left(\frac{BM}{LM} - \frac{AL}{LM}\right);$$

ora dal retto triangolo LMB *si ha*

$$\frac{BM}{LM} = \frac{\text{sen. } BLM}{\text{cos. } BLM} \text{ tang. } BLM,$$

e dall'altro triangolo ALM *si ha*

$$\frac{AL}{LM} = \text{tang. } AML,$$

onde sostituiti questi valori si avrà

$$CN = LM \text{tang.} BLM + MN(\text{tang.} BLM - \text{tang.} AML).$$

Così pure trovasi DP.

ovvero

Trovato il punto D colla

$PD = MP$ (tang. BLM — tang. AML) + LM tang. BLM

si trovi sulle tavole trigonometriche l'angolo, che ha per tangente la differenza delle due tangenti

di BLM, ed AML, e si faccia PDC eguale ad esso.

Dimostr. *Nel triang. rettangolo* XPD *cerchisi l'angolo* PDX *dati i due lati*

$$XP = XL + LM + MP, \text{ ovvero}$$

$$= \frac{ML \cdot BM + MP\,(BM - AL)}{BM - AL}, \text{ e}$$

$$PD = \frac{LP \cdot BM - AL \cdot MP}{LM} \text{ così;}$$

$$\frac{ML \cdot BM + MP\,(BM - AL)}{BM - AL} :$$

$$\frac{LP \cdot BM - AL \cdot MP}{LM} :: 1 : \text{tang. } PDC, \text{ onde}$$

$$\text{tang. } PDC = \frac{(LP \cdot BM - AL \cdot MP)\,(BM - AL)}{LM \cdot [ML \cdot BM + MP\,(BM - AL)]},$$

ovvero facendo LP = LM + MP *avremo*

$$\text{tang. } PDC = \frac{[ML\, BM + MP\,(BM - AL)] \times (BM - AL)}{[ML \cdot BM + MP\,(BM - AL)] \cdot LM},$$

e per ultimo

$$\text{tang. } PDC = \frac{BM - AL}{LM}, \text{ ovvero}$$

$$\text{tang. } PDC = \text{tang. } BLM - \text{tang. } AML.$$

Soluzione 6. Preso un punto V, dal quale si possano misurare le AV, BV, CV, DV, e i loro angoli, si dovrà prendere

$$VC = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVC - VB \,.\, \text{sen. } BVC}$$

$$VD = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVD - VD \text{ sen. } BVD}$$

ovvero trovato il punto C colla

$$VC = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVC - VA \text{ sen. } BVC} \quad (\textit{fig. } 34)$$

si faccia l'angolo $VCD = VAB + AVC$.

Dimostr. *Dal triangolo* AVB *si ha*

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos. AVB)};$$

dallo stesso triangolo si ha

$$\text{sen. } BAV = \frac{BV \,.\, \text{sen. } AVB}{\sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos. AVB)}};$$

dal triangolo AVC *si ha*

$$VC = \frac{AV \,.\, \text{sen. } BAV}{\text{sen. } ACV = \text{sen. } (BAV + AVC)}, \textit{ ovvero}$$

$$VC = \frac{AV \,.\, \text{sen. } BAV}{\text{sen. } BAV \cos. AVC + \text{sen. } AVC \cos. BAV}, \textit{ ovvero}$$

$$VC = \frac{AV \text{ sen. } BAV}{(\text{sen. } BAV \cos. AVC + \text{sen. } AVC \sqrt{(1 - \text{sen.}^2 BAV)}}$$

sostituendo il valore trovato di sen. BAV *si ha* $VC = AV \,.\, BV \text{ sen. } AVB : [BV \cos. AVC \text{ sen. } AVB + \text{sen. } AVC \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos. AVB - BV^2 \text{ sen.}^2 AVB)}]$ *nel radicale del denominatore havvi*

$BV^2 - BV^2 \,.\, \text{sen.}^2 AVB$, *che riducesi a* $BV^2 (1 - \text{sen.}^2 AVB) = BV^2 \cos.^2 AVB$ *dunque* $CV = AV \,.\, BV \text{ sen. } AVB : [BV \cos. AVC \text{ sen. } AVB + \text{sen. } AVC \sqrt{(AV^2 - 2AV \,.\, BV \cos. AVB + BV^2 \cos.^2 AVB)}]$,

$VC = AV \,.\, BV \text{sen } AVB : [BV \,.\, \text{sen. } AVB \cos. AVC - BV \cos. AVB \text{ sen. } AVC + AV \text{ sen. } AVC]$,

$$VC = \frac{AV \,.\, BV \text{ sen. } AVB}{AV \text{ sen. } AVC + BV \text{ sen.} (AVB - AVC) (= -BVC)}$$

e per ultimo

$$VC = \frac{AV \,.\, BV \text{ sen. } AVB}{AV \text{ sen. } AVC - BV \text{ sen. } BVC} \textit{ ovvero}$$

Trovato il punto C con quest'equazione si faccia l'angolo $VCD = VAB + AVC$ essendo l'angolo esterno uguale alla somma dei due angoli interni opposti. Vedi *Bossut*, pag. 31, Prob. III.

Soluzione 7. Se non si possono misurare le VA, VB, ma solo le VC, VD; presa una base VZ che si possa misurare, e tale che da Z si possano vedere A e B, (*fig.* 34), si dovrà prendere

$$VC = VZ \frac{\text{sen. } AZV \,.\, \text{sen. } BZV \text{ sen. } AVB}{[\text{sen. } AZV \text{ sen. } VBZ \text{ sen. } AVC - \text{sen. } BZV \text{ sen. } VAZ \text{ sen. } BVC]}$$

$$VD = VZ \frac{\text{sen. } AZV \text{ sen. } BZV \text{ sen. } AVB}{[\text{sen. } AZV \text{ sen. } VBZ \text{ sen. } AVD - \text{sen. } BZV \text{ sen. } VAZ \text{ sen. } BVD]}$$

Dimostr. *Dal triangolo* AVZ *si ha*

$$AV = VZ \frac{\text{sen. } AZV}{\text{sen. } VAZ};$$

dal triangolo VBZ

$$VB = VZ \frac{\text{sen. } BZV}{\text{sen. } VBZ}$$

sostituendo questi valori di VA *ed* VB *nella formola di*

$$VC = \frac{VA \,.\, VB \text{ sen. } AVB}{VA \text{ sen. } AVC - VB \text{ sen. } BVC} \;(n.^o\ 6),$$

ella diverrà conforme alla soluzione; *istessamente si troverà* VD; *ovvero*

Trovato il punto C colla formola di questo numero, e l'angolo VAB per via dell'equazione

$$\text{sen. } VAB = \frac{\text{sen. } AVB}{\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}^2 VZA \text{ sen.}^2 VBZ}{\text{sen.}^2 VAZ \text{ sen.}^2 VZB} - 2\frac{\text{sen. } VZA \text{ sen. } VBZ}{\text{sen. } VAZ \text{ sen. } VZB}\cos. AVB\right)}}$$

si faccia l'angolo $VCD = VAB + AVC$.

Dimostr. *Si trova tal equazione di* sen. VAB *così: dal triangolo* AVB *si ha*

$$\text{sen. } VAB = \frac{VB}{AB} \text{ sen. } AVB;$$

dallo stesso triangolo si ha

$$AB = \sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos. AVB)};$$

dunque

$$\text{sen. } VAB = \frac{VB \text{ sen. } AVB}{\sqrt{(AV^2 + BV^2 - 2AV \,.\, BV \cos. AVB)}},$$

adoperando quivi i valori di AV *e* BV *da questo numero derivati, si troverà la data equazione per il* sen. VAB.

Soluzione 8. Se si potrà misurare l'angolo BAV, e la AV, si farà

$$VC = AV \frac{\text{sen. } VAB}{\text{sen. } (VAB + AVC)},$$

$$VD = AV \frac{\text{sen. } VAB}{\text{sen. } (VAB + AVD)} \;(\textit{fig. } 34) \textit{ ovvero}$$

Trovato il punto C colla formola di questo numero, si farà l'angolo

$$VCD = VAB + AVC.$$

Dimostr. *Nel triangolo obliquangolo* AVC *si hanno dati i due angoli* VAB *e* AVC *col lato intermedio* AV, *dunque risolvendo si ha*

$$VC = \frac{AB \text{ sen. } VAB}{\text{sen. } ACV\, [= \text{sen. } (VAB + AVC)]};$$

così pure si ottiene VD *nel triangalo* AVD.

Soluzione 9. Se gli angoli VAB ed AVC saranno semi-retti, si avrà $VC = \frac{AV}{\sqrt{2}}$.

Dimostr. *Protratta la* AB *in* C, *il triangolo* AVC *sarà retto in* C, *ed avrà i due lati* VC, AC *eguali* (*fig.* 35); *onde*

$$2 \cdot CV^2 = AV^2,$$

$$e\ CV = \frac{AV}{\sqrt{2}}.$$

Soluzione 10. Fatto semi-retto l'angolo *BAV*, e retto *AVC* si dovrà prendere $VC = VA$ (*fig.* 36) e l'angolo *VCD* eguale a tre semi-retti.

Dimostr. *Sarà qui pure semi-retto l'angolo* VCA *formato dalla* AB *protratta sino all'incontro della* VC, *ed i lati d'un triangolo opposti ad angoli eguali essendo eguali, dovrà essere* VC = AV; *sarà poi* VCD = 3 *semi-retti poichè l'angolo esterno* VCD *vale la somma dei due interni opposti* VAB, AVC.

Soluzione 11. Se si potrà misurare la *AB*, e gli angoli *ABV*, *BAV* senza che si possano misurare *AV*, *BV* (*fig.* 34), si farà

$$VC = AB \frac{\text{sen. } ABV \text{ sen. } VAB}{\text{sen. } AVB \text{ sen. } (VAB + AVC)}.$$

Dimostr. *Dal triangolo* AVB *si ha*

$$AV = AB \frac{\text{sen. } ABV}{\text{sen. } AVB},$$

mettendo questo valore di AV *nell'equazione di* VC *al n.*° 8 *di questo Problema si ha la proposta formola.*

PROBLEMA II.

Alla linea inaccessibile xz *condurre una parallela per un punto dato* D. *Si suppongono accessibili i punti* x, z.

Soluzione 1. Condotta la *Dx* (*fig.* 37), e pel punto *V* che è alla metà della medesima condotta la *zVE*, e fatta $VE = Vz$, la *DE* sarà la parallela.

Dimostr. *I due triangoli* VDE, Vxz *saranno perfettamente eguali avendo ambedue l'angolo al vertice* V *eguale compreso da lati eguali ciascuno a ciascuno, e per proprietà dei triangoli eguali, e simili gli angoli opposti ai lati omologhi eguali essendo eguali, sarà ang.* EDV = *ang.* zxV, *cioè gli angoli alterni interni eguali. Dunque le due linee* DE, xz *sono parallele. Vedi* Bossut, *pag.* 30, *Teor. III.*

Se il punto *V* non sia alla metà della *Dx*: fatta

$$VE = \frac{DV \cdot Vz}{Vx};$$

sarà *DE* la parallela.

Dimostr. *Il triangolo* DVE *sarà allora simile al triangolo* zVx *avendo ambedue un angolo eguale compreso da lati proporzionali, e perchè gli angoli opposti ai lati omologhi sono eguali; dunque ang.* VDV $=$ *ang.* zxV, *e le linee* DE, zx *per conseguenza parallele*, ovvero

Da un punto V si continui la VD in z, e ad un angolo arbitrario con essa Vz si collochi la Vx (*fig.* 38).

Si prenda $VE = \frac{xV \cdot VD}{zV}$;

la DE sarà la parallela, ovvero

Preso dall'altra parte il punto W, e condotte le due rette WD e We, che tagli in y la zx si prenda

$$We = \frac{Wy \cdot WD}{Wz},$$

la De sarà la parallela.

Soluzione 2. Fissato sulla xz il punto V, dove piantando lo squadro si abbia retto l'angolo zVD, si faccia retto l'angolo VDE (*fig.* 39) la DE sarà la parallela.

Soluzione 3. Tirata per D la Vx, che faccia qualunque angolo colla xz (*fig.* 40), si faccia l'angolo $VDE = Vxz$; la DE sarà la parallela.

Soluzione 4. Se si potranno misurare le DX, DZ, e l'angolo XDZ, ma non si potrà traguardare da X in Z; almeno uno dei due angoli X e Z sarà acuto per esempio XZD opposto al minor lato (*fig.* 47); esso si trovi per via dell'equazione

$$\text{sen.}\, XZD = \frac{DX \text{ sen. } XDZ}{\sqrt{(DX^2 + DZ^2 - 2DX \cdot DZ \cos. XDZ)}}$$

e ad esso si faccia eguale l'angolo ZDE, la DE sarà la parallela cercata.

PROBLEMA III.

Alla linea XZ *tutta inaccessibile condurre una parallela per un punto dato, per esempio* A (fig. 41 *e* 42) *e* D (fig. 43, 44 *e* 45).

Soluzione. 1. Preso un punto C sulla AZ, ed un punto B sulla CX, e pel punto M, che è alla metà della AB traguardando in X e Z, e marcando i punti Q e P sulle CA, CB (*fig.* 41), e presa sulla CB la

$$CE = \frac{BC \cdot CQ(BP - CP)}{(AQ - CQ)CP},$$

la AE sarà la parallela.

Dimostr. *Essendo la* AE *per supposizione parallela sarà*

l'angolo EAC $=$ *ang.* XZC,

ang. CEA $=$ *ang.* CXZ;

dunque simili i due triangoli XCZ, ACE, *e dalla loro similitudine si avrà*

$$CE = \frac{XC \cdot CA}{CZ},$$

mettendo qui il valore trovato nella Soluzione 1, *Prob. III, Lib. I,*

$$di\ XC = \frac{BC \cdot CQ}{AQ - CQ},$$

$$e\ di\ CZ = \frac{AC \cdot CP}{BP - CP}$$

avremo come sopra

$$CE = \frac{BC \cdot CQ\,(BP - CP)}{(AQ - CQ) \cdot CP}.$$

Soluzione 2. Se il punto *M* non si potesse prendere alla metà della *AB*, si dovrà prendere

$$CE = \frac{MA \cdot BC \cdot CQ\,(MA \cdot BC - AB \cdot CP)}{MB \cdot CP\,(MB \cdot AC - AB \cdot CQ)}.$$

La Soluzione 2, *Prob. III, Lib. I, insegna trovare in tal caso le* XC *e* CZ, *le quali sostituite nella*

$$CE = \frac{XC \cdot CA}{CZ}$$

tratta dalla similitudine dei due triangoli CAE, CXZ *si trova come sopra* CE $=$ *ec.*

Soluzione 3. Fatto l'angolo *ZAV* eguale all'angolo *ZAX*, e ritirandosi tanto sulla *AV* che l'angolo *AVX* (*fig.* 42) riesca eguale a $90^\circ - ZAV$; si faccia l'angolo

$ZAE = 180^\circ - ZAV - ZVA$, la *AE* sarà la parallela.

Dimostr. *La teoria delle parallele importa che l'ang.* ZAE *sia* $=$ *ang.* AZX, *convien dunque mostrare che*

ang. AZX $= 180^\circ -$ ZAV $-$ ZVA *così*

ang. AVX $= 180^\circ -$ ZAV $-$ ACV, *per costruzione* AVX $= 90^\circ -$ ZAV, *dunque* $180^\circ -$ ZAV $-$ ACV $= 90^\circ -$ ZAV, *da qui* ACV *angolo retto, come pure il suo conseguente* ACX; *ed i due triang.* ACV, ACX *saranno in tutto eguali avendo essi il lato comune* AC *adjacente, a due angoli eguali; sarà perciò* AV $=$ AX. *I due triangoli* AZV, AZX *saranno pure eguali, e simili avendo ambedue un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque*

ang. AVZ $=$ *ang.* AXZ.

Ma AZX $= 180^\circ -$ ZAX $-$ ZXA, *sarà pure* AZX $= 180^\circ -$ ZAV $-$ ZVA.

Soluzione 4. Preso sulla XV che taglia AZ in qualche punto C un punto V tale che sia l'angolo XVZ eguale all'angolo XAZ, e presa sulla CV la

$$CD = \frac{AC^2}{VC};$$

la AD sarà parallela alla XZ.

Dimostr. *Essendo l'ang.* ZVX *per costruzione* = *ang.* XAZ, *e l'ang.* ZCV = *ang.* XCA *perchè opposti al vertice sarà pure* AXV = AZV, *simili dunque saranno i due triangoli* CVZ, XAC *e si avrà*

$$XC = \frac{CA \cdot CZ}{CV}.$$

Ora supposta AE *parallela ad* XZ *sarà ang.* EDV = *ang.* ZXV, *è altresì*

$$EDV = ADC,$$
$$ACD = XCZ,$$

per conseguenza sarà pure

$$XZC = CAD;$$

simili perciò saranno anche i due triangoli ACD, XCZ, *e si avrà*

$$XC = \frac{CD \cdot CZ}{CA},$$

paragonando i due valori di XC *si avrà l'equazione*

$$\frac{CD \cdot ZC}{CA} = \frac{CA \cdot CZ}{CV}, \ldots . CD = \frac{CA^2}{CV}.$$

Soluzione 5. Preso un punto A sulla DX dove collo squadro si possa traguardare in Z ed X, e preso altrove un qualunque punto B, dove pure collo squadro si possa traguardare in Z ed X (*fig.* 43); e notato il punto C dove le AX, BZ si tagliano; se il punto C è tra D ed X; sulla CB si prenda

$$CE = \frac{CD \cdot CA}{CB},$$

la DE sarà la parallela.

Se il punto D è tra C ed X (*fig* 44), si prenda sulla CZ la $CE = \frac{CD \cdot CA}{CB}$.

Dimostr. *In ambedue i casi saranno simili i due triangoli* DCE, XZC, *e si avrà*

$$CZ = \frac{CE \cdot CX}{CD};$$

simili sono pure i due triangoli ZAC, XCB *avendo gli angoli in* A *e* B *retti per costruzione, e gli angoli in* C *opposti al vertice eguali, dalla loro similitudine si ha*

$$CZ = \frac{CA \cdot CX}{CB},$$

eguagliando i due valori di CZ *si ha*

$$\frac{CA \cdot CX}{CB} = \frac{CE \cdot CX}{CD}, \ldots . CE = \frac{CD \cdot CA}{CB}.$$

Soluzione 6. Preso un punto A sulla DZ, d'onde si possa traguardare collo squadro in Z ed X (*fig.* 45), e preso dovunque un altro punto B simile, e notato il punto C, dove si tagliano le ZA, XB; si prenda

$$CE = CD \frac{CA}{CB};$$

la DE sarà la parallela.

Dimostr. *I due triangoli* ZBC, XAC *sono simili avendo essi un angolo comune, ed ambedue un angolo retto per costruzione, e si ha dalla loro similitudine*

$$CZ = \frac{CB \cdot XC}{CA};$$

supposta la DE *parallela a* ZX *simili pure saranno i due triangoli* ZCX, DCE, *e si avrà*

$$CZ = \frac{CD \cdot CX}{CE}; \textit{ dunque}$$

$$\frac{CD \cdot CX}{CE} = \frac{CB \cdot CX}{CA} \ldots CE = \frac{CD \cdot CA}{CB}.$$

Soluzione 7. Se gli angoli ZAX, ZBX fossero semi-retti, o qualunque, ma eguali tra loro, la soluzione sarebbe la medesima come ne' due numeri 5 e 6 (*fig.* 43, 44, 45).

Soluzione 8. Agli estremi D e C d'una base DC che si possa misurare s'osservino gli angoli di traguardo in X e Z (*fig.* 46, 47); si trovi nelle tavole quale angolo ha il suo seno

$$= \frac{\text{sen. } XDZ}{\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}^2 DCX \text{ sen.}^2 DZC}{\text{sen.}^2 DXC \text{ sen.}^2 DCZ} - 2\frac{\text{sen. } DCX \text{ sen. } DZC}{\text{sen. } DXC \text{ sen. } DCZ} \cos. XDZ\right)}}$$

questo sarà l'angolo DXZ; il quale sarà acuto, se la quantità espressa dalla formola

$$\frac{\text{sen. } DCX}{\text{sen. } DXC} - \frac{\text{sen. } DCZ}{\text{sen. } DZC} \cos. XDZ$$

sarà positiva; e viceversa sarà ottuso.

Facendo dunque XDE eguale al supplemento di DXZ, la DE sarà la parallela.

Dimostr. *Risolvendo il triangolo* XDC *si ha*

$$DX = DC \frac{\text{sen. } DCX}{\text{sen. } DXC},$$

risolvendo il triangolo DZC *si ha*

$$DZ = DC \frac{\text{sen. } DCZ}{\text{sen. } DZC};$$

dal triangolo poi XDZ *si ha*

$$XZ = \sqrt{(DX^2 + DZ^2 - 2DX \cdot DZ \cos. XDZ)},$$

dal medesimo si ha pure

$$\text{sen. } DXZ = \frac{DZ}{XZ} \text{ sen. } XDZ$$

$$= \frac{DZ \text{ sen. } XDZ}{\sqrt{(DX^2 + DZ^2 - 2DX \,.\, DZ \cos. XDZ)}},$$

ove sostituiti poi i valori di DX *e* DZ *avremo la data formola per il seno dell'angolo* DXZ, *il quale sarà acuto se*

$$\frac{\text{sen. } DCX}{\text{sen. } DXC} - \frac{\text{sen. } DCZ}{\text{sen. } DZC} \cos. XDZ,$$

o il suo equivalente

$$DX - DZ \cos. XDZ$$

sarà quantità positiva; poichè allora calata da Z *la* ZP *perpendicolare sopra* XD *si ha*

$$PD \; (= DZ \cos. XDZ) < XD$$

come dalla fig. 46 *apparisce. Se poi* ZP *cadesse sopra* XD *prolungata dalla parte* D *allora l'angolo* XDZ *sarà ottuso, ed il suo coseno negativo, per cui la quantità sarà ancora positiva.*

Sarà PD > XD, *ovvero* DX — DZ cos. XDZ *quantità negativa ogni volta che* ZP *cada perpendicolare sopra* DX *prolungata da* X *in fuori* (*fig.* 47), *ed allora l'ang.* DXZ *sarà ottuso.*

PROBLEMA IV.

Alla retta tutta accessibile zx *da un punto dato* C *fuori di essa tirare la normale* CN *senza ajuto di squadro o di grafometro.*

Soluzione 1. Condotte alla zx le Cz, Cx che facciano gli angoli Czx, Cxz (*fig.* 48) entrambi acuti, del che può giudicare l'occhio; si prenda

$$xN = \frac{xz^2 + Cx^2 - zC^2}{2xz},$$

la CN sarà la perpendicolare cercata.

Dimostr. *Sia* $xC = a$, $zC = b$, $xz = m$, $xN = x$, $zN = m - x$, $CN = y$ *supposta normale la* CN, *avremo da due triangoli rettangoli* $y = a^2 - x^2$, *ed* $y^2 = b^2 - (m - x)^2$, *dunque* $a - x^2 = b^2 - (m - x)^2$, *da qui*

$$x = \frac{a^2 - b^2 + m^2}{2m}, \text{ ovvero}$$

$$xN = \frac{Cx^2 + xz^2 - Cz^2}{2 \,.\, xz}.$$

Soluzione 2. Si prenda $zx = zC$;

$$xN = \frac{Cx^2}{2xz};$$

la CN sarà la perpendicolare.

PROBLEMA V.

Dal punto V della xz alzare la perpendicolare VT senza ajuto di squadro o di grafometro.

Soluzione 1. Tirate da un punto C alla zx le Cx, Cz che facciano gli angoli Cxz, Czx acuti, il che si fa ad occhio (*fig.* 49); si prenda sulla xC

$$\text{la } xT = \frac{2xV \cdot xC \cdot xz}{xz^2 + xC^2 - zC^2};$$

la VT sarà la normale cercata.

Dimostr. *Abbassata la perpendicolare* CN *sopra* zx *simili saranno i triangoli* xNC, xVT, *dunque per l'analogia avremo*

$$xT = \frac{xC \cdot xV}{xN}$$

mettendo per xN *il suo valore trovato nel problema superiore si avrà*

$$xT = \frac{2xV \cdot xC \cdot zx}{xC^2 - zC^2 + zx^2}.$$

Soluzione 2. Presa una VC che faccia l'angolo CVx acuto, e presa $Vx = VC$, (*fig.* 50) e sulla xC la xT eguale a $\frac{2xV^2}{xC}$ la VT sarà la normale cercata.

Dimostr. *Dal numero* 2 *problema superiore si ha*

$$xN = \frac{Cx^2}{2CV},$$

ora per l'analogia dei due triangoli simili xCN, xTV *si ha*

$$xT = \frac{xV \cdot xC}{xN\left(= \frac{xC^2}{2CV}\right)} \text{ da qui}$$

$$xT = \frac{2CV \cdot xV}{Cx}$$

ma $CV = xV$, *dunque*

$$xT = \frac{2 \cdot xV^2}{Cx}.$$

PROBLEMA VI.

Alla inaccessibile XZ *condurre una visuale perpendicolare al punto* X.

Soluzione 1. Segnata la xz parallela ed eguale alla XZ col metodo delle soluzioni del Prob. III, lib. I, e presa da x verso z (*fig.* 51) la $xV = \frac{xz^2 + xC^2 - zC^2}{xz}$

$$= xz + \frac{(xC + zC)\,(xC - zC)}{xz}$$

la retta che anderà da V in X sarà la perpendicolare cercata al punto X.

Dimostr. *Si cali dal punto* C *la* CN *perpendicolare sopra* zx, *ne nasceranno i due triangoli simili* XVx, CNx, *e perciò*

$$Vx = \frac{Xx \,.\, xN}{xC},$$

xN *per il Problema IV è*

$$= \frac{xz^2 + Cx^2 - zC^2}{2xz}, \text{ dunque}$$

$$Vx = \frac{Xx \,.\, (xz^2 + Cx^2 - zC^2)}{2 \,.\, xz \,.\, xC};$$

per la perfetta eguaglianza dei due triangoli zCx, ZCX *si ha* xC = CX, *ovvero* $xC = \frac{1}{2} xX$, *e quindi*

$$Vx = \frac{xz^2 + Cx^2 - zC^2}{xz},$$

e svolta ne' suoi fattori sarà

$$Vx = xz + \frac{(Cx + zC)\,(xC - zC)}{xz}.$$

Soluzione 2. Trovata in qualunque maniera la zx parallela alla XZ, si potrà collo squadro trovare il punto V, dove l'angolo xVX sia retto.

Soluzione 3. Fatto l'angolo ZAB eguale all'angolo ZAX (*fig.* 52), e trovato sulla AB un punto B dove sia l'angolo $ABX = 90^\circ - ZAB$; si guidi la BC perpendicolare alla BZ, che tagli la AZ in C. La CX sarà perpendicolare XZ nel punto X.

Dimostr. *I due triangoli* APB, APX *sono retti ed eguali; sono retti perchè essendo per costruzione ang.* ABX $= 90^\circ -$ ZAB, *ovvero* ABX + ZAB $= 90^\circ$, *il terzo ang.* APB *supplemento a* 180° *sarà pure* $= 90^\circ$. *Dunque le due rette* XB, AZ *si tagliano ad angolo retto: sono eguali poi avendo un lato comune adjacente a due angoli eguali; dunque* PX = PB. *Da ciò pure deriva l'eguaglianza perfetta dei due triangoli* XPZ, ZPB *avendo l'angolo retto compreso da due lati eguali ciascuno a ciascuno, dunque anche* XZ = ZB, *e l'ang.* BZP = *ang.* PZX. *I due triangoli* CXZ, CBZ *saranno pure eguali in tutto avendo essi un angolo eguale compreso da lati eguali ciascuno a ciascuno; dunque anche* CX = CB, *ed ang.* CXZ, = *ang.* CBZ, *che per costruzione è retto.*

Soluzione 4. Se la XZ sarà accessibile ai soli estremi, e non si potrà traguardare da X in Z (*fig.* 53); preso un punto A fuori di essa, e misurate le AX, AZ, e l'ang. XAZ; si prende

$$AC = AX \frac{AX - AZ \cos. XAZ}{AX \cos. XAZ - AZ}$$

se il suo valore riesce positivo; il punto C dovrà prendersi tra A e Z, e la CX sarà la perpendicolare cercata.

Se il valore

$$AX \frac{AX - AZ \cos. XAZ}{AX \cos. XAZ - AZ}$$

sarà negativo, si dovrà prendere AC (*fig.* 34) sulla continuazione della ZA, e la CX sarà la perpendicolare cercata.

Dimostr. *Sia* $AX = a$,
$AZ = b$,
$AC = y$,
$XZ = x$,
angolo $XAZ = p$,
$ACX = q$,
$XCZ = m$,
$AZX = z$,
$AXZ = u$,
$AXC = t$.

Dal triangolo XAZ *si cava*

$$x = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. p)},$$

$$\text{sen. } z = \frac{a}{x} \text{ sen. } p, \textit{ ovvero}$$

$$\text{sen. } z = \frac{a \text{ sen. } p}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. p)}}.$$

Dal triangolo ACX *si ha*

$$y = a \frac{\text{sen. } t}{\text{sen. } q}, \textit{ ma}$$

$$\text{sen. } t = \text{sen. } (p + q)$$

$$\text{sen. } t = \text{sen. } p \cos. q + \text{sen. } q \cos. p, \textit{ ma}$$

$$\text{sen. } q = \text{sen. } m = \cos. z, \textit{ e } \cos. q = \text{sen. } z,$$

dunque

$$\text{sen. } t = \text{sen. } p \text{ sen. } z + \cos. p \cos. z$$

ripigliando y, *e facendo le debite sostituzioni, diverrà*

$$y = a \frac{(\text{sen. } p \text{ sen. } z + \cos. p \cos. z)}{\cos. z}$$

mettendo il valore di sen. z *si avrà*

$$y = \left\{ \frac{\text{sen. } p \,.\, a \text{ sen. } p}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. p)}} + \cos. p \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \text{ sen. } p}{a^2 + b^2 - 2ab \cos. p}\right)} \right\} : \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 \text{ sen.}^2 p}{a^2 + b^2 - 2ab \cos. p}\right)}$$

riducendo i termini al medesimo denominatore, invertendo la frazione, e dividendo per $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. p)}$, *si avrà*

$$y = a \frac{[a . \text{sen.}^2 p + \cos. p \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. p - a^2 \text{sen.}^2 p)}]}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. p - a^2 \text{sen.}^2 p)}}$$

ovvero

$$y = a \frac{[a \,\text{sen}^2 p + \cos p \sqrt{(a^2 (1 - \text{sen.}^2 p) - 2ab \cos p + b^2)}]}{\sqrt{(a^2 (1 - \text{sen.}^2 p) - 2ab \cos p + b^2)}}$$

e poichè $1 - \text{sen.}^2 p = \cos.^2 p$, *avrò*

$$y = a \frac{[a \,\text{sen.}^2 p + \cos. p \sqrt{(a^2 \cos. p - 2ab \cos. p + b^2)}]}{\sqrt{(a^2 \cos.^2 p - 2ab \cos. p + b^2)}}$$

$$y = a \frac{[a \,\text{sen.}^2 p + \cos. p \,(a \cos. p - b)]}{a \cos. p - b}$$

$$= \frac{a^2 \text{sen}^2 p + a^2 \cos^2 p - ab \cos. p}{a \cos. p - b},$$

$$y = \frac{a^2 - ab \cos. p}{a \cos. p - b},$$

rimettendo alle lettere le linee e gli angoli, si avrà

$$AC = AX \frac{AX - AZ \cos XAZ}{AX \cos. XAZ - AZ}.$$

Se questo valore riesce positivo, il punto C *dovrà prendersi tra* A *e* Z, *e la* CX *sarà la perpendicolare cercata* (fig. 53); *se lo stesso valore sarà negativo si dovrà prendere* AC *sulla continuazione della* ZA, *e la* CX *sarà la perpendicolare cercata* (fig. 54).

Nel 1.° *caso* (fig. 53) *l'angolo* AXZ *essendo ottuso, ed avendo abbassata da* Z *la perpendicolare* ZP *sopra* AX *prolungata evidentemente, e dal num.* 8, *Prob. III, Lib. II, si vede essere*

$$AX - AZ \cos. XAZ \; (= AP)$$

quantità negativa; calata poi da X *la* XQ *perpendicolare sopra* AZ, *dalla stessa figura risulta*

$$AQ < AZ, \text{ ovvero } AX \cos. XAZ - AZ$$

quantità negativa, onde negativo il numeratore, e negativo il denominatore; positivo sarà il quoto loro.

Nel 2.° *caso* (fig. 54) *l'angolo* AXZ *essendo acuto, potrà essere il triangolo* XAZ *d'angoli tutti acuti, o avere l'angolo* XAZ *ottuso in ambedue i casi sarà pel numero sopraccitato la quantità*

$$AX - AZ \cos. XAZ$$

quantità positiva nel numeratore, e negativa l'altra

$$AX \cos. XAZ - AZ$$

nel denominatore, per cui il quoto sarà negativo.

Soluzione 5. Se la *XZ* sarà tutta inaccessibile; presa una base *AB* (*fig.* 55) che si possa misurare, ed agli estremi della quale si possa traguardare in *X* e *Z*, si prenda

$$AC = AB\,\frac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}\,\frac{\dfrac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}-\dfrac{\text{sen.}\,ABZ}{\text{sen.}\,AZB}\cos.\,XAZ}{\dfrac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}\cos.\,XAZ-\dfrac{\text{sen.}\,ABZ}{\text{sen.}\,AZB}}$$

se il suo valore riesce positivo, il punto C sulla AZ dovrà essere tra A e Z; e la CX sarà la perpendicolare cercata.

Se il suo valore riesce negativo, si dovrà prendere AC (*fig.* 56) sulla continuazione della ZA, e la CX sarà la perpendicolare cercata.

Dimostr. *Si cerchino i valori di* AX *ed* AZ *per via della base nota* AB, *e gli angoli noti di traguardo; si sostituiscono poi questi valori nella formola di* AC *trovata al numero superiore, dal qual numero deducesi pure il resto.*

Soluzione 6. Per via dell'equazione

$$\text{sen.}\,AXZ = \frac{\text{sen.}\,XAZ}{\sqrt{\left(1+\dfrac{\text{sen.}^2\,ABX\ \text{sen.}^2\,AZB}{\text{sen.}^2\,AXB\ \text{sen.}^2\,ABZ}-2\,\dfrac{\text{sen.}\,ABX\ \text{sen.}\,AZB}{\text{sen.}\,AXB\ \text{sen.}\,ABZ}\cos.\,XAZ\right)}}$$

si troverà l'angolo AXZ, il quale sarà ottuso se

$$\frac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}-\frac{\text{sen.}\,ABZ}{\text{sen.}\,AZB}\cos.\,XAZ$$

sarà una quantità negativa (*vedi n.*° 8, *Prob. III, Lib. II*). In tal caso presa sulla AB (*fig.* 57)

la $AV = AB\,\dfrac{\text{sen.}\,ABX\ \text{sen.}\,(AXZ-90^\circ)}{\text{sen.}\,AXB\ \text{sen.}\,(270^\circ - XAB\ \text{sen.} - AXZ)}$

la VX sarà la perpendicolare cercata.

Dimostr. *Dal triangolo* AVX *si ha*

$$AV = AX\,\frac{\text{sen.}\,AXV}{\text{sen.}\,AVX},\ \textit{ma}$$

sen. AXV $=$ sen. (AXZ $-$ 90°),
sen. AVX $=$ sen. (180° $-$ XAB $-$ AXV) $=$ sen. (270° $-$ XAB $-$ AXZ), *e dal triangolo* AXB *si ha*

$$AX = AB\,\frac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}.$$

Dunque

$$AV = AB\,\frac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}\,\frac{\text{sen.}\,(AXZ-90^\circ)}{\text{sen.}\,(270^\circ - XAB - AXZ)}.$$

Se la quantità

$$\frac{\text{sen.}\,ABX}{\text{sen.}\,AXB}-\frac{\text{sen.}\,ABZ}{\text{sen.}\,AZB}\cos.\,XAZ\ (\textit{fig}\ 58)$$

sarà positiva, l'angolo AXZ sarà acuto. (*Vedi n.*° 8, *Prob. III, Lib. II*). In tal caso presa sulla continuazione della BA la

$$AV = AB\,\frac{\text{sen.}\,ABX\ \text{sen.}\,(90^\circ - AXZ)}{\text{sen.}\,AXB\ \text{sen.}\,(XAB + AXZ - 90^\circ)}$$

la VX sarà la perpendicolare cercata.

Dimostr. *Si avrà come sopra*

$$AV = AX \frac{\text{sen. } AXV}{\text{sen. } AVX}, \textit{ ma}$$

$$\text{sen. } AXV = \text{sen. } (90^o - AXZ), \textit{ e}$$

$$\text{sen. } VAX = \text{sen. } (180^o - XAB),$$

$$\text{sen. } AVX = \text{sen. } (180^o - VAX - AXV),$$

ovvero

$$\text{sen. } AVX = \text{sen. } (XAB + AXZ - 90^o),$$

$$AX = \frac{AB \cdot \text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB}. \textit{ Dunque}$$

$$AV = AB \frac{\text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB} \frac{\text{sen. } (90^o - AXZ)}{\text{sen. } (XAB + AXZ - 90^o)}.$$

LIBRO TERZO

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE

PROBLEMA I.

Misurare la superficie di un triangolo ABC.

Soluzione 1. Calata da qualche angolo A (*fig.* 59 la AD perpendicolare al lato BC opposto all' angolo A continuato se fa bisogno; sarà l'area, o superficie del triangolo ABC espressa dalla formula $\frac{1}{2}\, AD \cdot BC$. Vedi *Bossut*, pagina 65, *Corol. II.*

Soluzione 2. Se si potranno misurare due lati, ed un angolo intercetto, per esempio i lati AB, AC, e l'angolo A; sarà la superficie

$$= \tfrac{1}{2}\, AB \cdot AC \text{ sen. } A.$$

Dimostr. *Dal numero superiore si ha* *area* $= \frac{1}{2}$ AB . PC, *ma* PC $=$ AC . sen. A, *dunque area* $= \frac{1}{2}$ AB . AC . sen. A.

Da qui deducesi il lemma che spesse volte occorrerà nelle seguenti dimostrazioni; cioè le aree

Dimostr. *Si avrà come sopra*

$$AV = AX \frac{\text{sen. } AXV}{\text{sen. } AVX}, \textit{ ma}$$

$$\text{sen. } AXV = \text{sen. } (90^\circ - AXZ), \textit{ e}$$
$$\text{sen. } VAX = \text{sen. } (180^\circ - XAB),$$
$$\text{sen. } AVX = \text{sen. } (180^\circ - VAX - AXV),$$

ovvero

$$\text{sen. } AVX = \text{sen. } (XAB + AXZ - 90^\circ),$$

$$AX = \frac{AB \cdot \text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB}. \textit{ Dunque}$$

$$AV = AB \frac{\text{sen. } ABX}{\text{sen. } AXB} \frac{\text{sen. } (90^\circ - AXZ)}{\text{sen. } (XAB + AXZ - 90^\circ)}.$$

LIBRO TERZO

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE

PROBLEMA I.

Misurare la superficie di un triangolo ABC.

Soluzione 1. Calata da qualche angolo *A* (*fig.* 59 la *AD* perpendicolare al lato *BC* opposto all' angolo *A* continuato se fa bisogno; sarà l'area, o superficie del triangolo *ABC* espressa dalla formula $\frac{1}{2}$ *AD* . *BC*. Vedi *Bossut*, pagina 65, *Corol. II.*

Soluzione 2. Se si potranno misurare due lati, ed un angolo intercetto, per esempio i lati *AB*, *AC*, e l'angolo *A*; sarà la superficie

$$= \tfrac{1}{2} AB \cdot AC \text{ sen. } A.$$

Dimostr. *Dal numero superiore si ha* *area* $= \frac{1}{2}$ AB . PC, *ma* PC $=$ AC . sen. A, *dunque area* $= \frac{1}{2}$ AB . AC . sen. A.

Da qui deducesi il lemma che spesse volte occorrerà nelle seguenti dimostrazioni; cioè le aree *di due triangoli che hanno un angolo di seno eguale, stanno tra loro come il prodotto dei due lati che contengono tal angolo.*

Soluzione. 3. Se si potranno misurare due lati, ed un angolo adjacente ad uno di essi; per esempio i lati AB, AC, e l'angolo C; sarà la superficie
$= \frac{1}{2} AC . \text{sen.} C [AC . \cos . C + \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{sen.}^2 C)}]$.

Dimostr. *Si trovi il terzo lato così. Si cali la perpendicolare* AD *sul lato* BC, *si avrà*

$$DC = AC . \cos . C,$$

$$BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{sen.}^2 C)};$$

dunque $DC + BD$

$$= BC = AC . \cos . C + \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{sen.}^2 C)}$$

e l'area $= \frac{1}{2} BC . AD$ *diventerà*

$$= \frac{1}{2} AC \, \text{sen.} C [AC . \cos . C + \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{sen.}^2 C)}].$$

Si potrà ancora trovare l'angolo B per via della formula

$$\text{sen.} B = \frac{AC . \text{sen.} C}{AB},$$

e la superficie sarà $= \frac{1}{2} AB . AC \, \text{sen.} (B + C)$.

Dimostr. *Si prenda per base* AB, *e per altezza* $PC = AC . \text{sen.} A = AC \, \text{sen.} (B + C)$, *e si avrà* $\frac{1}{2} AB . PC = \frac{1}{2} AB . AC \, \text{sen.} (B + C)$.

Soluzione 4. Se si potranno misurare i tre lati, la superficie sarà

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(AB + AC + BC)(AB + AC - BC)(AB - AC + BC)(AC + BC - AB)}.$$

Dimostr. *Sia* $BC = A$,

$$AC = c,$$

$$AB = b.$$

Tirata la AD *perpendicolare sopra* BC, *e divisa per metà la* BC *in* m;

sia $Dm = x$,

$$AD = y.$$

Pei triangoli rettangoli sarà

$$AC^2 = AD^2 + DC^2,$$

ovvero $c^2 = y^2 + (x + \frac{1}{2} a)^2 = y^2 + x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2$,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$, *cioè*

$$b^2 = y^2 + (\frac{a}{2} - x)^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2.$$

Sottraendo un'equazione dall'altra si ha

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2a}.$$

Il qual valore introdotto nelle equazioni superiori, si avrà

$$\frac{ay}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - c^4 - b^4)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c) \times (b + c - a)]},$$ *cioè* $\frac{BC . AD}{2} =$

$$\frac{1}{4} \sqrt{[(BC + AB + AC)(BC + AB - AC) \times (BC - AB + AC)(AB + AC - BC)]}.$$

Soluzione 5. Se si potrà misurare un lato, e due angoli, dai quali risulta anche il terzo; per esempio se si abbia il lato *BC*, ed i tre angoli *A*, *B*, *C*; la superficie sarà

$$\tfrac{1}{2}\,BC^2\,\frac{\text{sen } B \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}.$$

Dimostr. *Come al solito calata la perpendicolare* CP *sopra* AB *si ha area* $= \tfrac{1}{2}$ AB . CP,

$$\textit{ma}\ AB = \frac{BC \text{ sen. } C}{\text{sen. } A},$$

$$CP = BC \,.\, \text{sen. } B,$$

$$\textit{dunque area} = \tfrac{1}{2}\,BC^2\,\frac{\text{sen. } C \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}.$$

Soluzione 6. Se nel triangolo *ABC* non sarà accessibile altro che il lato *AB*, e non si possano impiegare i seni, continuando il lato *CA* in *L* finchè sia *AL* = *AB*, (*fig.* 60), e divisa la *LB* per metà in *M*, e notato il punto *P*, dove la visuale *MC* taglia la *AB*, sarà l'area del triangolo

$$ABC = \frac{AM \,.\, LM \,.\, AP}{BP - AP}.$$

Dimostr. *Si tiri la* MS *parallela a* LC; *simili saranno i due triangoli* BLA, BMS, *e poichè* MB = ML *per costruzione sarà pure*

$$MS = BS = \tfrac{1}{2}\,BA,$$

$$PS = \frac{2BP - BA}{2}.$$

Saranno inoltre simili i due triang. MSP, APC, *per cui si avrà*

$$AC = \frac{AP \,.\, LA}{2PB - BA} = \frac{AP \,.\, LA}{BP - PA}$$

si chiami l'area del triangolo BLC = y. *Per il lemma superiore saranno l'aree dei due triangoli* BLA, BLC *come i rettangoli dei due lati, che racchiudono l'angolo eguale; dunque*

$$\frac{BL \,.\, AM}{2} : y = AL \,.\, BL : BL \,.\, LC = AL : LC,$$

$$\textit{onde}\ y \,.\, AL = \frac{BL \,.\, AM}{2}\,(LA + AC),\ \textit{ovvero}$$

$$y \,.\, AL = \frac{BL \,.\, AM \,.\, LA}{2} + \frac{BL \,.\, AM \,.\, AP \,.\, LA}{2(BP - PA)}$$

$$y = \frac{BA \,.\, AM \,.\, BP}{2(BP - PA)}.\ \textit{Ora area}$$

$$BAC = y - \frac{BL \,.\, AM}{2};$$

nella quale equazione introdotto il valore di y, *e fatte l'altre operazioni deducesi area*

$$BAC = \frac{BM \,.\, AM \,.\, PA}{BP - PA}.$$

Soluzione 7. Sia inaccessibile la AB, e si possano solo misurare le AC, BC (*fig.* 61), e presa sulla CB la $CD = CA$ si possa misurare la AD; sarà l'area del triangolo

$$ABC = \tfrac{1}{2}\, AD \,.\, BC \times \sqrt{\left(1 - \frac{AD^2}{4\,AC^2}\right)},$$

e volendo impiegare i logaritmi, sarà il logaritmo dell'area $= l\,.\,\tfrac{1}{2}\, AD - l\,.\,AC + l\,.\,BC + \tfrac{1}{2}\,[l\,.\,(AC + \tfrac{1}{2}\, AD) + l\,.\,(AC - \tfrac{1}{2}\, AD)]$.

Dimostr. *Dal numero* 4, *Libro III*, *Prob. I derivasi area* $ACD = \tfrac{1}{4}\, AD \sqrt{(4\,AC^2 - AD^2)}$, *e fatta area* $ACB = y$ *per il noto lemma si avrà* $\tfrac{1}{4}\, AD \sqrt{(4AC^2 - AD^2)} : y =$ $AC \,.\, CD : AC \,.\, CB = CD : CB$,

$$y = \tfrac{1}{4}\, \frac{AD \sqrt{(4\,AC^2 - AD^2)}\,.\,CB}{AC} \;.\;.\;.\;.\;.$$

$$y = A\,.\,ACB = \tfrac{1}{2}\, AD \,.\, BC \sqrt{\left(1 - \frac{AD^2}{4AC^2}\right)}$$

per i logaritmi trasformisi la formula così:

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{AD\,.\,BC}{AC} \sqrt{\left(AC^2 - \frac{AD^2}{4}\right)}, \text{ ovvero}$$

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{AD\,.\,BC}{AC} \sqrt{\left\{\left(AC + \frac{AD}{2}\right)\left(AC - \frac{AD}{2}\right)\right\}},$$

$$y = A\,.\,ACB = l\,.\,\tfrac{1}{2}\, AD - l.\,AC + l.BC + \tfrac{1}{2}\left\{l.\left(AC + \frac{AD}{2}\right) + l\,.\left(AC - \frac{AD}{2}\right)\right\}.$$

Se non si potrà misurare la AD; prese eguali le due CP, CQ sopra le CA, CB, e misurata la PQ, sarà l'area

$$ABC = \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, PQ \,\frac{AC}{PC} \sqrt{\left(1 - \frac{PQ^2}{4PC^2}\right)},$$

ed il suo logaritmo

$$= l\,.\,PQ - l\,2 - 2l\,.\,PC + l\,.\,BC + l\,.\,AC + \tfrac{1}{2}\, l\,(PC + \tfrac{1}{2}\, PQ) + \tfrac{1}{2}\, l\,(PC - \tfrac{1}{2}\, PQ).$$

Dimostr. *Dalla similitudine dei due triangoli simili* ACD, PCQ *si ha*

$$AD = \frac{AC\,.\,PQ}{CP},$$

il qual valore introdotto nella formula primitiva di y *si avrà*

$$y = A\,.\,ACB = \tfrac{1}{2}\,\frac{BC\,.\,AC\,.\,PQ}{CP} \sqrt{\left(1 - \frac{PQ^2}{4\,.\,CP^2}\right)}.$$

SCOLIO.

Potendosi ogni poligono dividere in triangoli, il presente Problema servirà a trovare l'area di qualunque poligono, sommando le aree dei triangoli nei quali si può dividere per mezzo del Problema seguente.

PROBLEMA II.

Dividere un poligono ABCDEF *in tanti triangoli.*

Soluzione 1. Preso un punto O dentro il poligono (*fig.* 62), da esso si tirino agli angoli le rette OA, OB, OC, OD, OE, OF, e avremo tanti triangoli che compongono il poligono, quanto sono i lati dello stesso poligono.

Soluzione 2. Preso un punto O sopra un qualunque lato AB (*fig.* 63) del poligono, e condotte da esso agli angoli le OC, OD, OE, OF avremo tanti triangoli quanto sono i lati del poligono meno uno.

Soluzione 3. Da un angolo qualunque A (*fig.* 64) del poligono condotte le AC, AD, AE agli altri angoli, avremo tanti triangoli component il poligono, quanti sono i suoi lati meno due.

PROBLEMA III.

Misurare l'area di un parallelogrammo ABCD.

Soluzione 1. La sua area è eguale al prodotto d'un lato preso per base nell'altezza del parallelo-

grammo, cioè nella distanza dell'altro lato parallelo (*fig.* 65), cioè fatta PQ perpendicolare alle due AB, DC ed MN perpendicolare alle due AD, BC; sarà l'area

$$ABCD = DC \,.\, PQ = AD \,.\, MN.$$

Soluzione 2. Sarà la stessa area eguale al prodotto di due lati contigui moltiplicati tra loro, e col seno dell'angolo che formano, cioè

$= AD \,.\, DC$ sen. $ADC = DC \,.\, CB$ sen. DCB.

Se il parallelogrammo sarà rettangolo (*fig.* 66), la sua area sarà eguale al prodotto di due lati contigui $= AB \,.\, BC$.

PROBLEMA IV.

Misurare l'area d'un trapezio ABCD, *nel quale* AB *e* CD *sono i due lati paralleli.*

Soluzione 1. Condotta la PQ normale ai due lati paralleli, l'area del trapezio sarà (*fig.* 67)

$$= \tfrac{1}{2}\,(AB + CD)\,PQ.$$

Soluzione 2. Divisi per metà i due lati AD, BC, che non sono paralleli in M ed N, e condotta la MN; sarà l'area del trapezio $= MN \,.\, PQ$.

Dimostr. *Tirata la diagonale* AC, *il trapezio sarà diviso in due triangoli aventi per altezza la medesima linea* PQ, *e per base i due lati paralleli, dunque area del trapezio*
$= \frac{1}{2} AB . PQ + \frac{1}{2} DC . PQ = \frac{1}{2}(AB + DC). PQ.$
Se poi si conduce la retta MN *parallela ad* AB, *o* DC, *e che divida per metà i lati non paralleli avremo dall'analogìa dei triangoli simili* ADC, AMF, $MF = \frac{1}{2} DC$, *dall'analogìa degli altri due triangoli simili* ACB, FCN, *avremo* $FN = \frac{1}{2} AB$, *ma* $MF + FN = MN$, *dunque* $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$ *introdotto questo valore nella prima formula avremo area del trapezio* $= MN . PQ.$

Soluzione 3. Sia $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; l'area sarà

$$= \frac{(a+c)}{4(a-c)} \sqrt{\left[2(d^2 + b^2)(a-c)^2 - (a-c)^4 - (d^2 - b^2)^2\right]}.$$

Dimostr. *Si avrà l'area del trapezio data, che per i lati prendendo il valore dell'eltezza sua dal Probl. VI, Lib. I, e moltiplicandola per la metà della somma dei due lati paralleli.*

PROBLEMA V.

Ridurre un poligono ABCDEFGHIKL *in tanti triangoli e trapezi.*

Soluzione. Condotta una retta, per esempio la *AF* (*fig.* 68), che divida il poligono in due parti; sopra essa da tutti i punti degli angoli del poligono si calino le perpendicolari *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *Gg*, *Hh*, *Ii*, *Kk*, *Ll*. Il poligono resterà diviso in trapezi e triangoli.

SCOLIO.

Questo metodo riesce molte volte più comodo della divisione in triangoli per avere l'area d'un poligono, e si eseguisce facilmente collo squadro.

PROBLEMA VI.

Misurare un poligono ABCDEF *per via d'un rettangolo, e di tanti trapezi e triangoli.*

Soluzione 1. Si iscriva nel poligono il rettangolo *APQa* (*fig.* 69), il quale si procuri che sia il maggiore o uno de' maggiori che si possano iscrivere. Dai punti B, C, D si calino sui lati del rettangolo le perpendicolari Bb, Cc, Dd. La somma di tutte le parti darà la misura del tutto.

Soluzione 2. Al medesimo poligono si circoscriva il rettangolo $FfeE$, che si procuri che sia il minore possibile. Dagli angoli del poligono, i quali non si trovano essere sui lati del rettangolo, per esempio dai punti A, B, D si calino sui lati del medesimo rettangolo le perpendicolari Aa, Bb, Dd (*fig.* 70). Sottraendo dall'area del rettangolo $FfeE$ le aree che restano esterne al poligono $ABCDEF$, resterà l'area del poligono.

PROBLEMA VII.

Misurare l'area del quadrilatero ABXZ.

Soluzione 1. Se si potranno misurare le diagonali AZ, BX (*fig.* 71), e la superficie di uno dei quattro triangoli ACB, BCZ, ZCX, XCA, per esempio di $BCA = A$; sarà la superficie di tutto il quadrilatero

$$= A\,\frac{AZ\,.\,BX}{AC\,.\,BC}.$$

Dimostr. *L'aree di due triangoli che hanno la medesima altezza, stanno tra loro come le basi; dunque chiamata* y *la superficie di* XAC, A *quella di* ACB, *ambedue d'eguale altezza, avremo*

$$y : A = XC : CB,\; y = \frac{A\,.\,CX}{CB}.$$

Così pure i due triangoli ABC, CBZ, *che hanno la medesima altezza, staranno come le due basi* AC, CZ, *chiamata* Z *la superficie di* CBZ, *si avrà* $Z : A = CZ : AC$, *e* $Z = \frac{A\,.\,CZ}{AC}$.

Finalmente chiamata X *la superficie di* CZX, *e paragonata colla superficie di* CZB, *che hanno la medesima altezza, si avrà* $X : Z = XC : CB$,

$$\text{e } X = \frac{Z\,.\,XC}{CB},$$

messo il valore di Z *si ha*

$$X = \frac{A\,.\,CZ\,.\,XC}{AC\,.\,CB}.$$

Sommate le quali superficie avremo area

$$AXZB = A + \frac{A\,.\,XC}{CB} + \frac{A\,.\,CZ}{AC} + \frac{A\,.\,CZ\,.\,CX}{AC\,.\,CB},$$

ovvero area

$$AXZB = \frac{A(CB\,.\,AC + AC\,.\,XC + CB\,.\,CZ + CX\,.\,CZ)}{AC\,.\,CB} =$$

$$\frac{A\,[CB\,.\,AC + XC\,(AC + CZ) + CB\,.\,CZ]}{AC\,.\,CB} =$$

$$\frac{A\,[CB\,.\,AC + XC\,.\,AZ + CB\,.\,CZ]}{AC\,.\,CB} =$$

$$\frac{A\,[XC.AZ + CB\,(AC + CZ)]}{AC\,.\,CB} = \frac{A[XC\,.\,AZ + CB\,.\,AZ]}{AC\,.\,CB},$$

e finalmente area

$$AXZB = \frac{A\,.\,AZ\,.\,BX}{AC\,.\,BC}.$$

Soluzione 2. Se non si potranno misurare se non tre rette AB, AC, BC, preso un punto M alla metà di AB, e notati sulle CA, CB i punti Q e P per via delle MX, MZ, e chiamando A l'area del triangolo ACB, sarà l'area

$$ABZX = A\,\frac{BP\,.\,AQ}{(AQ - CQ)(BP - CP)}.$$

Dimostr. *Si ha dal numero superiore area*

$$AXZB = A\,\frac{AZ\,.\,BX}{AC\,.\,BC} = A\,\frac{(AC + CZ)\,(BC + CX)}{AC\,.\,BC}$$

servendosi del valore di CZ, *e* CX *trovato al num.* 1, *Prob. III, Lib. I si avrà*

$$S.\,AZXB = \frac{A\left(AC + \frac{CP\,.\,AC}{BP - CP}\right)\left(BC + \frac{BC\,.\,CQ}{AQ - CQ}\right)}{AC\,.\,BC}$$

riducendo al medesimo denominatore i termini,

eliminando, e dividendo avrò

$$Sup.\ AXZB = A\,\frac{BP\,.\,AQ}{(BP - CP)(AQ - CQ)}.$$

Se il punto M non si potrà prendere alla metà della AB, sarà l'area

$$ABZX = A\left(1 + \frac{MB.CP}{MA.BC - AB\,CP}\right)\left(1 + \frac{MA.CQ}{MB.AC - AB.CQ}\right).$$

Dimostr. *Qui pure servendosi dei valori di* CZ *e* CX *trovati al n.°* 2, *Prob. III, Lib. I, si otterrà la proposta formula.*

Soluzione 3. Se si potranno continuare due lati convergenti qualunque, per esempio XB, ZA sino a che s'incontrino in C, e si potranno misurare le linee XC, ZC (*fig.* 72), e l'area A del triangolo ABC; sarà l'area del quadrilatero

$$ABXZ = A\left(\frac{CX\,.\,CZ}{CA\,.\,CB} - 1\right).$$

Dimostr. *I due triangoli* CXZ, CBA *avendo l'angolo* C *comune, avranno le loro aree in ragion del prodotto dei due lati racchiudenti l'angolo eguale; dunque chiamata* y *l'area del triangolo* CXZ, *avremo*

$$y : A = CX\,.\,CZ : CA\,.\,CB,$$

$$e\ y = \frac{A\,.\,CX\,.\,CZ}{CA\,.\,CB}.$$

Ma superficie ABXZ $=$ y $-$ A, *ovvero*

$$Sup.\,ABXZ = \frac{A.CX.CZ}{CA\,.\,CB} - A = A\left(\frac{CX.CZ}{CA.CB} - 1\right).$$

Se in vece della superficie *A* del triangolo *ABC* si abbia la superficie *S* del triangolo *CXZ*, sarà la superficie del quadrilatero

$$ABXZ = S\left(1 - \frac{CA\,.\,CB}{CX\,.\,CZ}\right).$$

Dimostr. *Allora chiamata* y *l'area del triangolo* ACB, *per il medesimo principio avremo*

$$y = S\,\frac{CA\,.\,CB}{CX\,.\,CZ};$$

$$area\ ABXZ = S - y = S\left(1 - \frac{CA\,.\,CB}{CX\,.\,CZ}\right).$$

Soluzione 4. Se non si potranno misurare se non le tre rette *AB*, *AC*, *BC*, preso il punto *M* alla metà della *AB*, e notati sulle *AC*, *BC* i punti *Q* e *P* dove sono tagliate dalle *XM*, *ZM*, e chiamata *A* l'area del triangolo *ABC*; sarà l'area

$$ABXZ = A\left(\frac{CP\,.\,CQ}{(CP - BP)(CQ - AQ)} - 1\right).$$

Se il punto *M* non si potrà prendere alla metà della *AB*, sarà l'area

$$ABXZ = A\left(\frac{MA.CQ}{AB.CQ - MB.AC} \cdot \frac{MB.CP}{AB.CP - MA.BC} - 1\right).$$

Dimostr. *Dal numero superiore abbiamo*

$$Sup.\,ABXZ = A\left(\frac{CX\,.\,CZ}{CA\,.\,CB} - 1\right),$$

dove sostituiti per CX *e* CZ *i valori indicati dal n.° 5 e 6, Prob. III, Lib. I si rinverranno le proposte formule.*

Soluzione 5. Preso il punto *M* alla metà della *AB*, se la *XB* continuata da *X* verso *B* sarà tagliata in *P* dalla continuazione *ZM* (*fig.* 73), e la *ZA* in *Q* dalla continuazione della *XM*; tirata la *PQ*, e fatta l'area

$$AMQ = a;$$
$$QMP = c;$$
$$PMB = b \text{ sarà}$$

$$\text{l'area } ABXZ = ab\,\frac{3c - a - b}{(c - a)(c - b)}.$$

Dimostr. *Si denomini* x *l'area* BMX, y *l'area* XMZ, z *quella di* AMZ. *Per il premesso lemma, per cui l'aree di due triangoli che hanno un angolo eguale, stanno come i rettangoli dei due lati intorno all'angolo eguale avremo*

$$QP\,.\,PM : QP\,.\,QX = c : c + b + x,$$

$$\ldots\ x = \frac{c\,.\,MX - b\,.\,QM}{QM},$$ *così pure*

$PQ \,.\, QM : PQ \,.\, PZ = c : c + a + z, \ldots$

$z = \frac{c \,.\, MZ - a \,.\, PM}{PM}$, *e finalmente*

$XM \,.\, MZ : PM \,.\, MQ = y : c \ldots.$

$$y = \frac{c \,.\, XM \,.\, MZ}{PM \,.\, QM}.$$

Sommando l'area di tre triangoli componenti il quadrilatero ABXZ, *avremo*

$$Sup.ABXZ = \frac{c \,.\, MX - b \,.\, QM}{QM} + \frac{c \,.\, MZ - a \,.\, PM}{PM} +$$

$$\frac{c \,.\, XM \,.\, MZ}{PM \,.\, QM} \ldots Sup.\ ABXZ =$$

$$\frac{c \,.\, XM \,.\, PM + c \,.\, XM \,.\, MZ + c \,.\, MZ \,.\, QM}{PM \,.\, QM} - a - b.$$

Per lo stesso lemma ovvero

$x : a = BM \,.\, MX : MA \,.\, QM$, *ma per cond.* $MA = BM$; *dunque*

$$x = \frac{a \,.\, MX}{QM},$$

eguagliando questo valore di x *con quello che già si trovò, avremo l'equazione*

$$\frac{a \,.\, MX}{QM} = \frac{c \,.\, MX - b \,.\, QM}{QM}, \text{ da cui}$$

$$MX = \frac{b \,.\, QM}{c - a};$$

paragonando poi l'aree dei due triangoli MAZ, PMB, *che hanno pure l'angolo eguale opposto al vertice, caveremo un altro valore di* z, *che paragonato col primo darà un'equazione, dalla quale si dedurrà*

$$MZ = \frac{a \,.\, PM}{c - b}.$$

Usando questi valori delle rette MX, MZ, *avremo*

$$Sup.ABXZ = \frac{cb}{c-a} + \frac{cba}{(c-a)(a-b)} + \frac{c}{c-b} - a - b$$

riducendo i termini al medesimo denominatore effettuando le moltipliche, e sottraendo si avrà:

$$Superficie\ ABXZ = ab\,\frac{3c - a - b}{(c-a)(c-b)}.$$

Se il punto *M* non sarà alla metà della *AB*; sarà (*sull'istessa traccia*)

$$\text{area } ABXZ = ab\,\frac{c\left(1 + \frac{MA}{MB} + \frac{MB}{MA}\right) - a - b}{\left(c\,\frac{MA}{MB} - a\right)\left(c\,\frac{MB}{MA} - b\right)}.$$

PROBLEMA VIII.

Misurare l'area del pentagono ADEFG *per via delle tre diagonali* AE, AF, GD.

Soluzione. Sia la *GD* tagliata in *B* dalla *AF*, ed in *C* dalla *AE* (*fig.* 74). Chiamando *A* l'area del triangolo *ABC*, sarà l'area del pentagono

$$ADEFG = A\left(\frac{AF.BG}{AB.BC} + \frac{AE.CD}{AC.CB} + \frac{AF.AE}{AB.AC}\right).$$

Dimostr. *Sia area* FAG $=$ y, FAE $=$ z, EAD $=$ u, FBG $=$ m, ECD $=$ n, ABC $=$ A. *Si richiami qui pure il noto lemma; onde avremo questa serie di rapporti d'aree di differenti triangoli, che hanno un angolo eguale;*

1.° $m : A = FB \,.\, BG : CB \,.\, BA$,

$$m = A\,\frac{FB \,.\, BG}{CB \,.\, BA};$$

2.° $y : m = AF \,.\, FG : FB \,.\, FG$,

ove messo per m *il suo valore, si avrà*

$$y = A\,\frac{BG \,.\, FA}{CB \,.\, BA};$$

3.° $n : A = EC \,.\, CD : BC \,.\, CA$,

$$n = A\,\frac{EC \,.\, CD}{BC \,.\, CA};$$

4.° $u : n = EA \,.\, ED : EC \,.\, ED$,

servendosi del valore di n *si ha*

$$u = A\,\frac{CD \,.\, EA}{BC \,.\, CA};$$

5.° $Z : A = AF \,.\, AE : AC \,.\, AB$,

$$Z = A\,\frac{AF \,.\, AE}{AC \,.\, AB}.$$

Sommando le tre aree y, u, *z, che compongono il pentagono, avremo*

$$\textit{Sup.}\, ABEFG = A\left(\frac{BG \,.\, FA}{AB \,.\, BC} + \frac{AE \,.\, CD}{AC \,.\, CB} + \frac{AF \,.\, AE}{AC \,.\, AB}\right).$$

PROBLEMA IX.

Misurare l'area dell'esagono DEFGHK *per via delle tre diagonali* DG, EH, FK.

Soluzione. Chiamando *A* l'area del triangolo *ABC* (*fig.* 75) che ha i suoi tre angoli alla intersezione delle diagonali, si avrà l'area dell'esagono

$$= A\left(\frac{AE.AF + AH.AK}{AB.AC} + \frac{BD.BK + BF.BG}{BA.CB} + \frac{CE.CD + CG.CH}{CA.CB} - 2\right).$$

Dimostr. *Sia* FAE $=$ x, HAK $=$ y, BDK $=$ z,

$FBG = u$, $GCH = t$, $ABC = A$, $ECD = \phi$. *Si paragonino per il noto lemma l'aree dei triangoli che hanno un angolo eguale; onde si avrà*

$$x = A\,\frac{FA\,.\,AE}{BA\,.\,AC},\quad \phi = \frac{CE\,.\,CD}{CA\,.\,CB},$$
$$y = A\,\frac{HA\,.\,KA}{BA\,.\,AC},\quad z = A\,\frac{BK\,.\,BD}{BA\,.\,BC},$$
$$u = A\,\frac{FB\,.\,BG}{CB\,.\,BA},\quad t = A\,\frac{GC\,.\,CH}{BC\,.\,CA};$$

si ha poi $ACKD = z - A$, *ovvero*

$$ACKD = A\left(\frac{BK\,.\,BD}{BA\,.\,BC} - 1\right),$$
$$GBAH = t - A,\ \textit{ovvero}$$
$$GBAH = A\left(\frac{GC\,.\,CH}{BC\,.\,CA} - 1\right).$$

Ma $x + y + u + \phi + ACKD + GBAH$ *compongono l'esagono; dunque sommandone i valori arriveremo alla formula prescritta.*

PROBLEMA X.

Misurare l'area dell' esagono DEFGHK *per via de' lati* DK, GH, EF *continuati sino al mutuo incontro in* A, B, C (*fig.* 76).

Soluzione. Chiamando A l'area del triangolo ABC, l'area dell'esagono sarà

$$= A\left(1 - \frac{AH\,.\,AK}{AB\,.\,AC} - \frac{BF\,.\,BG}{BA\,.\,BC} - \frac{CD\,.\,CE}{CA\,.\,CB}\right).$$

Dimostr. *Sia* $HAK = x$, $CDE = y$, $BFG = z$. *Dal noto lemma si cavano i seguenti valori*

$$x = A\,\frac{HA.AK}{BA\,.AC};\ y = A\,\frac{CD\,.CE}{CA\,.\,CB},\ z = A\,\frac{BF\,.BG}{BC\,.\,BA}.$$

Sottraendo queste aree dal triangolo $ABC = A$, *si avrà l'area dell'esagono data.*

PROBLEMA XI.

Misurare il poligono BCDEFG *colle intersezioni de' suoi lati continuati sino ai lati di un triangolo circoscritto, come nella figura.*

Soluzione. Supposto che i lati BG, CD (*fig.* 77) si taglino in A in maniera che il poligono resti compreso dentro il triangolo ABC, continuata la DE sino a che tagli la AB in H, e la EF in K; se si chiami A l'area ABC, sarà l'area del poligono

$$= A\left(1 - \frac{AD.AH}{AB.AC} - \frac{AD.HE.HK}{AC\,.\,HD.AB} - \frac{AD.HE.KF.KG}{AC.HD.KE.\,AB}\right).$$

Se si chiami S l'area ADH sarà l'area del poligono

$$= S\left(\frac{AB\,.\,AG}{AD\,.\,AH} - 1 - \frac{HE\,.\,HK}{HA\,.\,HD} - \frac{HE\,.\,KF\,.\,HG}{HA\,.\,HD\,.\,KE}\right).$$

Dimostr. *Sieno l'aree dei triangoli esteriori al poligono* AHD $=$ x, KHE $=$ y, GKF $=$ z, *e cercando col noto lemma i loro valori analitici*, *avremo* $x = A \frac{AH \cdot AD}{AB \cdot AC}$, $y = x \frac{HE \cdot KH}{HD \cdot AH}$, *ovvero* $y = A \frac{AD \cdot HE \cdot KH}{AB \cdot AC \cdot HD}$, $z = y \frac{KF \cdot GK}{KE \cdot HK}$, *ovvero* $z = A \frac{AD \cdot HE \cdot KF \cdot KG}{AB \cdot AC \cdot HD \cdot KE}$.

Sottraendo queste tre aree dall'area A, *avremo la superficie del poligono come fu data.*

Per il secondo caso si cerchino col medesimo lemma l'aree dei triangoli KHE, GKF, *e si sottraghino colla data* AHD *dall'area del triangolo* ABC, *che pur si cercherà coll'istesso metodo.*

PROBLEMI SULLE DIVISIONI PROPORZIONALI DELLE AREE.

PROBLEMA XII.

Dividere il triangolo ABC *di area data in due aree di data ragione.*

Soluzione. Se la divisione si ha da fare per un angolo, per esempio per *C*, si divida la base

opposta *AB* in *D* nella data ragione, e si conduca la *CD* (*fig.* 78).

Dimostr. *Due triangoli che hanno la medesima altezza, stanno tra sè come le loro basi.* Bossut, *pag.* 67, *Coroll. III.*

Se fosse dato un punto *D* sopra un lato *AC*, pel quale dovesse passare la retta che divide il triangolo, e sia la data ragione che si vuole di una parte al tutto quella di $p : t$; sulla *CB* si prenda

$$CE = \frac{p \cdot CA \cdot CB}{t \cdot CD},$$

e si guidi la *DE* (*fig.* 79); il triangolo *CDE* sarà questa parte. Se però *CE* riuscisse maggiore di *CB*; allora sulla *AB* si prenda

$$Ae = \frac{(t - p) \cdot AC \cdot AB}{t \cdot AD},$$

ed il quadrilatero *DCBe* sarà questa parte.

Dimostr. *Condotta la linea* DE, *i due triangoli* ACB, CDE *hanno l'angolo comune* C; *perciò il solito rapporto dell'aree*

ACB : CDE $=$ AC . CB : CD . CE;

si ha pure per condizione del Problema proposto

ACB : CDE $=$ t : p, *ovvero*

AC . CB : CD . CE $=$ t : p, *d'onde*

$$CE = \frac{AC \cdot CB \cdot p}{t \cdot CD};$$

se poi CE > CB *dirigasi la linea* De *sul lato* AB, *e si avrà per condizione*

ACB : CDBe (= ACB — ADe) = t : p,

ovvero

AC . AB : AC . AB — AD . AE = t : p;

p . AC . AB = t . AC . AB — t . AD . AE;

da qui $Ae = \frac{AC \cdot AB\,(t - p)}{AD \cdot t}$

PROBLEMA XIII.

Dividere il parallelogrammo ABCD *in due parti; sicchè una delle due parti stia al tutto come* p : t.

Soluzione. Se la divisione si vuol fare con una *ce* parallela ai lati (*fig.* 80), si prenda

$$Be = \frac{p \cdot AB}{t};$$

il parallelogrammo *eBCc* sarà la parte *p*.

Se la divisione si vuol fare per via di un angolo *C* colla *CE*; chiamando *p* la parte minore, si prenda $BE = \frac{2p \cdot AB}{t}$, il triangolo *CEB* sarà la parte *p*.

Se poi sia dato un punto *P* sopra un lato *AB* (*fig.* 81) pel quale debba passare la retta che divide il parallelogrammo, si prenda sul lato opposto *CD* la

$$CQ = \frac{2p \cdot AB}{t} - PB,$$

se *PB* è minore di

$$\frac{2p \cdot AB}{t}.$$

Se è maggiore, si prenda sulla *BC* la

$$BR = \frac{2p \cdot BA \cdot BC}{t \cdot BP}.$$

Se *CQ* riuscisse maggiore di *CD*, si prenda sulla *AD* la

$$AT = \frac{2(t - p)\,AB \cdot AD}{t \cdot AP}.$$

In tutti e tre i casi la parte omologa a *p*, sarà la parte a destra di chi guarda la figura.

Dimostr. *Per i due primi casi vale il Coroll. III di* Bossut, *pag.* 67, *cioè due parallelogrammi, come pure due triangoli che hanno medesima altezza, stanno tra sè come le basi loro.*

Nel terzo caso (*fig.* 81) *chiamisi* L *l'altezza del parallelogrammo. Per enunciato del Problema si avrà* ABCD : QBCP = t : p, *ovvero*

$$AB \,.\, L : (BP + QC)\,\frac{L}{2} = t : p \ldots.$$

$$QC = \frac{2AB \,.\, p}{t} - PB, \text{ se}$$

$$PB < \frac{2p \,.\, AB}{t}, \text{ ecc.}$$

Se poi maggiore cerchisi sulla BC *la* BR *così*

$$2AB \,.\, BC : PB \,.\, BR = t : p;$$

$$2AB \,.\, BC \,.\, p = t \,.\, PB \,.\, BR, \text{ onde}$$

$$BR = \frac{2 \,.\, AB \,.\, BC \,.\, P}{t \,.\, PB}.$$

Se CQ $>$ CD, *allora trovisi il punto* T *sulla* AD *come poc'anzi, cioè*

$$2\,AB.AD : 2AB.AD - AP \,.\, AT = t : p, \text{ da qui}$$

$$AT = \frac{2 \,.\, (t - p) \,.\, AB \,.\, AD}{t \,.\, AP}.$$

PROBLEMA XIV.

Dividere in una ragione data l'area del trapezio ABCD *per un punto* P *dato sopra uno dei due lati paralleli* AB, DC.

Soluzione. Si voglia che la parte *PQCB* stia al tutto come $p : t$; dovrà prendersi

$$QC = \frac{p\,(AB + DC)}{t} - PB.$$

Se *QC* riuscisse negativo (*fig.* 82), si prenda

$$BR = \frac{p \,.\, BC\,(AB + CD)}{t \,.\, BP}.$$

Se riuscisse maggior di *DC*, si prenda

$$AT = \frac{(t - p)\ AD\ (AB + DC)}{t \,.\, AP}.$$

Dimostr. *Chiamata* l *l'altezza, si avrà per condizione* $\frac{AB + DC}{2} \,.\, l : \frac{BP + QC}{2} \,.\, l = t : p$, *onde*

$$QC = \frac{(AB + DC)\,p}{t} - PB.$$

Se QC *riesce negativo, guidisi la* PR *sul lato* CB, *e si cerchi* BR *così. S'abbassi la perpendicolare* RN *sul lato* AB, *il di cui valore evidentemente sarà*

$$RN = \frac{CM \,.\, RB}{CB} = \frac{l \,.\, RB}{CB}.$$

Per condizione avremo

$$\frac{(AB + DC)}{2} \,.\, l : \frac{BP \,.\, RB}{2CB} \,.\, l = t : p, \text{ e quindi}$$

$$BR = \frac{(AB + DC) \,.\, BC \,.\, p}{t \,.\, BP}.$$

Se QC *riuscisse maggiore di* DC, *cerchisi il punto* T *sul lato* AD, *a cui condurre da* P *la linea* PT. *Come prima calisi* TN' *perpendicolare* *sopra* AB, *e sarà* $TN = \frac{AT\,.\,l}{AD}$, *poi per condizione*

$$\frac{AB+DC}{2}.\,l : \left(\frac{AB+DC}{2} - \frac{AP\,.\,AT}{2AD}\right).\,l = t : p, \ldots$$

$$AT = (t - p)\,\frac{(AB+DC)\,.\,AD}{t\,.\,AD}.$$

PROBLEMA XV.

Dato un punto P *in uno de' due lati non paralleli del trapezio* ABCD, *assegnare il valore ai tre triangoli* ABP, BPC, CPD *per rapporto al tutto.*

Soluzione. Chiamando A (*fig.* 83) l'area del trapezio, sarà

$$ABP = \frac{A\,.\,AP\,.\,AB}{(AB+DC)\,DA}$$

$$BPC = \frac{A\,.\,(AB\,.\,DP + AP\,.\,DC)}{(AB+DC)\,DA}$$

$$CPD = \frac{A\,.\,DP\,.\,DC}{(AB+DC)\,DA}.$$

Dimostr. *Sia* $APB = x$, $PDC = y$, $PCB = z$, *l'altezza* $MN = l$, *s'avrà* PM *altezza del triangolo*

$$APB = \frac{AP\,.\,l}{AD},\ PN = \frac{PD\,.\,l}{AD},$$

altezza del triangolo PDC. *Paragonando ora le aree, si avrà*

$$1.^o\ x : A = \frac{AB\,.\,AP\,.\,l}{2AD} : \frac{(AB+DC)\,.\,l}{2},$$

$$ed\ x = APB = \frac{A\,.\,AP\,.\,AB}{(AB\,.+DC)\,.\,DA};$$

$$2.^o\ y : A = \frac{DC\,.\,PD\,.\,l}{AD} : \frac{(AB+DC)\,.\,l}{2},$$

$$ed\ y = \frac{A\,.\,DC\,.\,PD}{(AB+DC)\,.\,AD} = PDC;$$

$$3.^o\ z = A - x - y,\ ovvero$$

$$z = \frac{A(AP+PD)(AB+DC) - A.AB.AP - A.DC.PD}{AD\,(AB+DC)}$$

$$\ldots z = \frac{A\,(AP\,.\,DC + PD\,.\,AB)}{AD\,(AB+DC)} = PCB.$$

PROBLEMA XVI.

Dividere il trapezio ABCD *in due parti di una data ragione per un punto* P *preso sopra uno de' due lati non paralleli.*

Soluzione. Avendosi dal Prob. XV i valori dei triangoli *ABP*, *BPC*, *CPD* per rapporto al tutto, sarà facile vedere sopra quale delle tre basi *AB*, *BC*, *CD* debba cadere la divisione, e il

Problema si ristringerà a dividere uno dei tre triangoli in una data ragione; sicchè basterà dividere in quella ragione la sua base in *Q* o in *R*, ovvero in *T*.

PROBLEMA XVII.

Misurare l'area d'un quadrilatero ABCD (*fig.* 84) *che ha un angolo retto in* A.

Soluzione. Sia $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$, sarà l'area del quadrilatero

$$= \tfrac{1}{2} ad + \tfrac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c-d)(a+b-c+d) \times (a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 4a^2d^2 - 8abcd]}.$$

Dimost. *Si tiri la diagonale* BD, *si avrà diviso il quadrilatero in due triangoli, uno rettangolo,* DAB, *e di cui l'area sarà* $= \tfrac{1}{2}$ ad; *l'altro obliquangolo* DCB, *di cui cui si cerchi l'area per via dei lati* CD = c, BC = b,

$$DB = \sqrt{(a^2 + d^2)},$$

la quale pel n.° 4, Prob. I, Lib. III, sarà

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[c+b+\sqrt{(a^2+d^2)}][c+b-\sqrt{(a^2+d^2)}] \times [c-b+\sqrt{(a^2+d^2)}][-c+b+\sqrt{(a^2+d^2)}]}$$

effettuata la moltiplica, e ridotta l'equazione s'avrà

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2d^2 + 2b^2d^2 + 2b^2c^2 - 2a^2d^2 - a^4 - b^4 - d^4 - c^4)}$$

aggiungendo i termini $4a^2d^2 + 8abcd$ *e poi sottraendo, l'equazione varierà di formula, non di valore; dunque*

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2d^2 + 2b^2d^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd) - 4a^2d^2 - 8abcd]}.$$

Svolgendo quest'equazione nei suoi fattori coi metodi dell'algebra, e sommando l'aree dei due triangoli avrò quella del quadrilatero

$$= \tfrac{1}{2} ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b-c+d) \times (a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 4a^2d^2 - 82abcd]}.$$

PROBLEMA XVIII.

Misurare l'area d'un quadrilatero ABCD (*fig.* 84), *nel quale la somma di due angoli opposti è eguale a due retti; ossia il quadrilatero si può iscrivere nel cerchio.*

Soluzione. Denominando i lati come nel Prob. XVII, sarà l'area del quadrilatero

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d) \times (a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Dimostr. *Dall'angolo* C *s'abbassi* CE *perpendicolare sopra il lato* AD *prolungato, e* CF *sopra* AB, *e suppongasi condotta la diagonale* AC. *Ciò fatto, l'angolo* EDC *supplemento dell'angolo* ADC *sarà eguale all'angolo* ABC *pure supplemento di* ADC *per costruzione. Tale angolo chiamisi* m. *Si avrà dalla trigon.*

$$FC = b \text{ sen. } m,$$
$$EC = c \text{ sen. } m,$$
$$FB = b \text{ cos. } m,$$
$$DE = c \text{ cos. } m;$$

dai due triangoli rettangoli AEC, AFC *s'avranno due valori di* AC^2; *dal primo* AEC *si ha*

$$AC^2 = d^2 + 2d.c.\text{cos. } m + c^2\text{cos.}^2 m + c^2 \text{ sen.}^2 m,$$

ovvero $AC^2 = d^2 + c^2 + 2cd \text{ cos. } m,$

dall'altro AFC *si ha pure*

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ cos. } m;$$

eguagliati questi due valori avremo l'equazione, dalla quale

$$\text{cos. } m = \frac{a^2 + b^2 - d^2 - c^2}{2(cd + ab)},$$

$\text{sen. } m = \sqrt{(1 - \text{cos.}^2 m)}$, *ovvero*

$$\text{sen. } m = \sqrt{\left(1 - \frac{(a^2 + b^2 - d^2 - c^2)^2}{4(cd + ab)^2}\right)} \ldots .$$

$$\text{sen. } m = [\sqrt{(2a^2d^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 + 2c^2b^2 + 2b^2d^2 + 8abcd - a^4 - b^4 - c^4 - d^4)}]:$$

$2(cd + ab)$, *e fatto* $=$ Q *il numeratore,*

sarà $\text{sen. } m = \frac{Q}{2(cd + ab)}$.

Ora area $ABCD = \frac{AD \,.\, CE}{2} + \frac{AB \,.\, FC}{2}$,

e mettendo i valori analitici

$$\text{area } ABCD = \frac{cd + ab}{2} \text{ sen. } m$$
$$= \frac{(cd + ab)}{2} \cdot \frac{Q}{2(cd + ab)} = \frac{Q}{4},$$

e svolgendo Q *nei suoi fattori*

$$\text{area } ABCD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + c -) \times (a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}.$$

PROBLEMA XIX.

Misurare l'area d'un rombo ABCD (*fig.* 85).

Soluzione. Condotte le due diagonali *AC*, *BD* sarà l'area $= \frac{1}{4}$ *AC* . *BD*.

PROBLEMA XX.

Misurare l'area d'un poligono regolare.

Soluzione. Sia il lato *AB* (*fig.* 86) del poligono regolare $= a$; il numero de' suoi lati $= n$; il raggio AC del cerchio circoscritto R; il raggio NC del cerchio iscritto $= r$, l'area del poligono $= S$, si avrà

$$S = \tfrac{1}{4} na^2 \text{ cotang. } \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{2} nR^2 \text{ sen. } \frac{360^\circ}{n} = nr^2 \text{ tang. } \frac{180^\circ}{n}.$$

Dimostr. *Dividasi il poligono in tanti triangoli aventi l'apice al centro, e per base il lato comune* AB $=$ a, *e comune altezza* CN $=$ r, *onde area di ciascuno sarà* $= \frac{ar}{2}$, *ed* $S = \frac{nar}{2}$.

Le tre seguenti equazioni derivate dai due triangoli ACN, ACB; *cioè*

1.^{a} $r = \frac{1}{2}$ a cotang. ACN $\left(ACN = \frac{180^\circ}{n}\right)$,

2.^{a} ar $=$ R^2 sen.^{2} ACB $\left(ACB = \frac{360^\circ}{n}\right)$,

3.^{a} $\frac{1}{2}$ a $=$ r . tang. $\frac{180^\circ}{n}$,

e sostituite ciascuna a parte nella primitiva $S = \frac{nar}{2}$ *danno tre nuovi valori di* S, *cioè*

$$S = \tfrac{1}{4} na^2 \text{cotang.} \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{2} nR^2 \text{ sen.} \frac{360^\circ}{n} = nr^2 \text{tang.} \frac{180^\circ}{n}.$$

PROBLEMA XXI.

Misurare l'area d'un cerchio di raggio, o di circonferenza data.

Soluzione. Sia R il raggio, C la circonferenza, A l'area; il rapporto della circonferenza al diametro $= \pi = \frac{22}{7} = \frac{355}{113} = 3{,}1415926535$, si avrà $A = \frac{1}{2} RC = R^2 \pi = \frac{C^2}{4\pi}$.

Dimostr. *Il cerchio è un poligono regolare d'un'infinità di lati, la di cui somma è la circonferenza, ed apotema il raggio. La sua superficie dunque sarà eguale alla metà del prodotto della sua circonferenza per il raggio, cioè*

$$A = \tfrac{1}{2} R \,.\, C;$$

essendo poi le circonferenze tra sè come i diametri loro, cioè $\frac{C}{2R} = \frac{22}{7} \pi$, *s'avrà*

$$C = 2\pi R, \text{ ed } R = \frac{C}{2\pi};$$

introdotti questi due valori alternativamente nella prima equazione $A = \frac{1}{2}$ RC, *si avranno le due seguenti* $A = R^2 \pi$, $A = \frac{C^2}{4\pi}$.

PROBLEMA XXII.

Misurare l'area d'un elisse.

Soluzione. Sia il suo semi-asse maggiore $= M$; il semi-asse minore $= N$; l'eccentricità, ossia la distanza del centro da un foco $= C$; la sua area $= A$, si avrà

$$A = MN.\pi = M\pi\sqrt{(M^2 - C^2)} = N\pi\sqrt{(N^2 + C^2)}.$$

Dimostr. *Immaginisi descritto un circolo sull'asse maggiore dell'elisse* 2M *come diametro; si elevi lungo detto asse infinito numero di perpendicoli infinitamente vicini, e si protraggano sino all'incontro delle due curve. Avremo così le due aree l'elittica, e la circolare divise in egual numero di trapezi misti-linei, che per approssimazione potranno riguardarsi come rettangoli di basi eguali ed infinitesime, onde il rapporto degli uni agli altri sarà quello delle altezze loro, od ordinate; ora stando l'ordinata dell'elisse all'ordinata del cerchio costruito sopra il di lei asse maggiore nel rapporto costante degli assi dell'elisse, cioè* N : M; *tale sarà pure il rapporto dei rettangoli suddetti, e tale quello delle due aree curvi-linee composte dalla somma dei medesimi rettangoli, onde area dell'elisse* ($=$ A): *area del cerchio* ($= M^2\pi$) $=$ N : M), *perciò*

$$A = MN\pi.$$

Essendo poi per proprietà dell'elisse

$$N = \sqrt{(M^2 - C^2)},$$
$$M = \sqrt{(N^2 + C^2)},$$

s'avranno con tali sostituzioni le due formole seguenti

$$A = M\pi\sqrt{(M^2 - C^2)},$$
$$A = N\pi\sqrt{(N^2 + C^2)}.$$

PROBLEMA XXIII.

Misurare la superficie d'una sfera.

Soluzione. Sia R il suo raggio, C la circonferenza d'un suo cerchio massimo, S la sua superficie, si avrà

$$S = 2RC = 4R^2\pi = \frac{C^2}{\pi}.$$

Dimostr. *Essendo la superficie della sfera quadrupla dell'area d'un suo cerchio massimo non si avrà che moltiplicare per 4 le formule date dal Problema XXI.*

PROBLEMA XXIV.

Misurare la superficie d'un cono retto.

Soluzione. Sia R il raggio del cerchio della base; C la sua circonferenza; T l'altezza del cono; L il lato, o sia la distanza del suo vertice da qualunque punto della circonferenza della base; S la sua superficie, si avrà

$$S = \tfrac{1}{2}(L + R)\,C = (L + R)\,R\pi$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(L + \frac{C}{2\pi}\right)C = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(T^2 + R^2)} + R\right]C$$
$$= \left[\sqrt{(T^2 + R^2)} + R\right]R\pi$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\left(T^2 + \frac{C^2}{4\pi^2}\right)} + \frac{C}{2\pi}\right]C.$$

PROBLEMA XXV.

Misurare la superficie d'un cilindro retto.

Soluzione. Sia R il raggio, e C la circonferenza del cerchio della sua base; T l'altezza del cilindro; S la sua superficie. Si avrà

$$S = (\tfrac{1}{2}R + T)\,C = (\tfrac{1}{2}R + T)\,R\pi = \left(\frac{C}{4\pi} + T\right)C.$$

LIBRO QUARTO

POLIGONOMETRIA

DEFINIZIONE PRIMA.

Per angolo esterno d'un poligono intenderemo sempre l'angolo che fa un lato del poligono colla continuazione dell'altro lato.

Sia per esempio il poligono $ABCD$ (*fig.* 87). Per l'angolo esterno al punto D di questo poligono, che sarà da noi chiamato l'angolo D, intenderemo sempre l'angolo CDQ, che nel punto D, è formato dal lato CD colla DQ che è la continuazione del lato AD.

DEFINIZIONE SECONDA.

Per angolo sporgentesi in un poligono s'intende quell'angolo che volta la punta al di fuori come ABC, CDA (*fig.* 87).

Angolo rientrante è quello che volta la sua punta al di dentro come CDA (*fig.* 88).

L'angolo esterno dell'angolo rientrante *CDA* (*fig.* 88), cioè l'angolo *CDQ* si noterà così $-D$ col segno negativo. Laddove l'angolo esterno dello sporgentesi *CDA* (*fig.* 87), cioè *CDQ* si noterà così $+D$ col segno positivo.

PROBLEMA I.

Trovare una distanza AB *inaccessibile fuori che ne' due estremi* A *e* B, *per via dei tre lati* BC CD, DA, *e dei due angoli* C *e* D *del poligono* ABCD (*fig.* 87 *e* 88).

Soluzione. Si avrà
$AB = \sqrt{[BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2BC.CD \cos. C + 2CD.DA \cos. \pm D + 2BC.DA \cos.(C \pm D)]}$ il segno $+$ serve per la *fig.* 87, ed il $-$ per la 88.

Dimostr. *Si protraggano i due lati* AD, BC *in* Q, *s'abbassino dai punti* B *e* C *le* BL, CP *perpendicolari sopra il lato* AD *prolungato, e si tiri la* CG *parallela al medesimo; si denomini* $AB = x$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. *Nella fig.* 87 *sarà*

$BL = BG + CP = b \text{ sen. } BQA + c \text{ sen. } D = b \text{ sen. }(C + D) + c \text{ sen. } D$; *così pure*

$AL = AD + PD - PL = d + c \cos. D + b \cos.(C + D)$.

Nella fig. 88 *si ha*

$BL = BQ \text{ sen. } BQA = (BC - CQ) \text{ sen. } BQA$, *ma*

$CQ = \dfrac{-CD \text{ sen. } -D}{\text{sen. } BQA}$; *dunque*

$BL = b \text{ sen. }(C - D) + c . \text{ sen. } -D$; *così pure*

$AL = AD + DP - PQ - QL = d + c \cos. -D - b \cos.(QCD + QDC) = d + c \cos. -D + b \cos.(C - D)$

valori identici coi primi, colla sola variazione del segno $-$ *avanti l'angolo esterno dell'angolo rientrante. Ora si ha* $x^2 = BL^2 + AL^2$ *per ambedue le figure, dove sostituiti a* BL, *ed* AL *i valori sopra trovati, si avrà la formula comune ai due casi, cioè:*

$$x^2 = b^2[\text{sen.}^2(C \pm D) + \cos.^2(C \pm D)] + c^2[\text{sen.}^2 \pm D + \cos.^2 \pm D] + d^2 + 2bc[\text{sen.} \pm D \text{ sen.}(C \pm D) + \cos. \pm D . \cos.(C \pm D)] + 2cd \cos. \pm D + 2db \cos.(C \pm D) \ldots.$$

$$AB = \sqrt{[BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2BC.CD \cos. C + 2CD.DA \cos. \pm D + 2BC.DA \cos.(C \pm D)]}.$$

PROBLEMA II.

Trovare la stessa distanza AB *per via dei quattro lati* BC, CD, DE, EA, *e dei tre angoli* C, D, E (*fig.* 89 *e* 90).

Soluzione. Sarà

$$AB = \sqrt{}\,[BC^2 + CD^2 + DE^2 + EA^2 + 2BC\,.\,CD \cos. C + 2CD\,.\,DE \cos. D + 2DE\,.\,EA \cos. \pm E + 2BC\,.\,DE \cos. (C + D) + 2CD\,.\,EA \cos. (D \pm E) + 2\,BC\,.\,EA \cos. (C + D \pm E)].$$

Il segno + vale per la *fig.* 89, ed il — per la 90.

Dimostr. *Fig.* 89. *Si continui il lato* ED *in* M, CD *in* u, *i due* BC, AE *in* Q *si tirino da* B, C, D *le* BL, CN, DP *perpendicolari alla* Au, *e le* CH, DXG *parallele alla medesima, si avrà* BL = BH + CX + DP, *ma*

BH = BC sen BQA = BC sen. (E + D + C),
CX = CD sen. DuE = CD sen. (D + E),
DP = ED sen. E, *dunque* BL = ED sen. E + CD sen. (D + E) + BC sen. (E + D + C), *ed*
AL = AE + EP — PN — NL =
AE + ED cos. E + CD cos. (D + E) + BC . cos. (E + D + C).

Nella fig. 90 *si continuino i lati* AE, CD *sino in* u, *ed i due* BC, ED *sino in* M. *Dai punti* B, C, D *si abbassino le* BL, CN, DP *perpendicolari sopra* Au, *e si tiri la* CH *parallela alla medesima, si avrà*

BL = BQ sen. BQA,
BQ = BC — CQ, *e*

$$CQ = \frac{CN}{\text{sen. } BQA},$$

CN = DP — DH,
DP = — DE sen. — E,
DH = CD sen. EuD = CD sen. (D — E);
ritrocedendo si ha

$$CQ = \frac{- DE \text{ sen. } - E - CD \text{ sen. } (D - E)}{\text{sen. } BQA},\ e$$

BL = BC sen. (C + D — E) + DE sen. — E + CD sen. (D — E). *Così pure si ha*
AL = AE + EP + PN — NQ — QL = AE + ED cos. — E + CD cos. (D — E) + BC . cos. (C + D — E) *valori identici coi primi, colla sola differenza del segno — posto alla lettera dell'angolo rientrante. Onde qui pure sostituiti i valori di* BL *ed* AL *nell'equazione* $AB^2 = BL^2 + AL^2$, *si avrà la formula proposta per* AB *comune ad ambedue le figure colla*

differenza del segno avanti le lettere degli angoli di differente specie.

PROBLEMA GENERALE PRIMO.

Trovare il lato incognito d'un poligono dati gli altri lati e tutti gli angoli eccetto i due adjacenti al lato incognito.

Soluzione. Il lato incognito si troverà eguale alla radice della somma dei quadrati di tutti i lati cogniti; e de' doppj rettangoli di ciascun lato in ciascun altro moltiplicato rispettivamente nel coseno della somma degli angoli esterni intermedj dalla parte opposta al lato cercato.

PROBLEMA III.

Trovare il lato AB (*fig.* 87 *e* 88) *nel quadrilatero* ABCD *per via dei soli due lati* BC, CD, *e degli angoli* A, D, C.

Soluzione. Sarà

$$AB = \frac{CD \text{ sen.} \pm D + CB \text{ sen} (\pm D + C)}{\text{sen.} A}$$

Dimostr. *Dal triangolo retto* ABL *si ha*

$AB = \frac{BL}{\text{sen.} A}$, *dove sostituito a* BL *il valore trovato nel Problema I del presente libro, si ha la formula del lato* AB *come sopra per ambedue le figure.*

PROBLEMA IV.

Trovare il lato AB *nel pentagono* ABCDE (*fig.* 89 *e* 90) *per via dei lati* BC, CD, DE *e degli angoli.*

Soluzione. Sarà $AB =$

$$\frac{ED \text{ sen.} \pm E + DC \text{ sen.} (\pm E + D) + CB \text{ sen.} (\pm E + D + C)}{\text{sen.} A}.$$

Dimostr. *Si prenda qui pure dal Problema II di questo libro il valore di* BL *comune alle due figure, e sostituiscasi nell'equazione*

$$AB = \frac{BL}{\text{sen.} A}.$$

PROBLEMA GENERALE SECONDO.

Trovare un lato incognito d'un poligono, dati tutti gli altri lati eccetto uno dei due contigui al lato incognito, e tutti gli angoli.

Soluzione. Si avrà il lato cercato presa la somma de' prodotti di tutti i lati dati moltiplicati ciascuno rispettivamente nel seno della somma degli angoli esterni intermedj posti tra di esso e il lato incognito non cercato dalla parte opposta al lato cercato, e dividendo questa somma pel seno dell'angolo formato dai lati incogniti.

PROBLEMA V.

Trovare il lato AB *nel quadrilatero* ABCD *per via de' lati* BC, DA (*fig.* 91 *e* 92), *e degli angoli.*

Soluzione. Sarà

$$AB = \frac{BC \,.\, \text{sen.}\ C - DA\ \text{sen.} \pm D}{\text{sen.}\ (\pm D + A)}$$

$$= \frac{DA\ \text{sen.} \pm D - BC\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ (B + C)}.$$

Dimostr. *Si continui il lato* CD *sino a che tagli la* AB *in* R, *si avrà*

$$\text{BR} = \frac{\text{BC sen. BCR}}{\text{sen. BRC}} = \frac{\text{BC sen. C}}{\text{sen.}\ (\pm \text{D} + \text{A})},$$

$$\text{AR} = \pm \frac{\text{AD sen.} \pm \text{D}}{\text{sen.}\ (\pm \text{D} + \text{A})};\ \textit{ora}$$

$$\text{AB} = \text{BR} \mp \text{AR} = \frac{\text{BC.sen. C} - \text{AD sen.} \pm \text{D}}{\text{sen.}\ (\pm \text{D} + \text{A})},$$

ovvero poichè

$$\text{sen. BCR} = \text{sen.}\,(\pm \text{D} + \text{A}) = -\,\text{sen.}\,(\text{B} + \text{C}),$$

si avrà l'altra

$$\text{AB} = \frac{\text{AD . sen.} \pm \text{D} - \text{BC . sen. C}}{\text{sen.}\ (\text{B} + \text{C})}.$$

Se fosse B + C = 180°; *nel qual caso sarebbero parallele le* AB, CD, *si troverebbe* AB $= \frac{0}{0}$; *e però il problema riceverebbe infinite soluzioni.*

PROBLEMA VI.

Trovare il lato AB *nel pentagono* ABCUEA *per via dei lati* BC, UE, EA (*fig.* 91), *e degli angoli.*

Soluzione. Sarà

$$AB = \frac{BC.\text{sen.}C - VE\,\text{sen.}V - AE\,\text{sen.}(V+E)}{\text{sen.}(V+E+A)},\ \text{ovvero}$$

$$AB = \frac{VE \text{ sen. } V + AE \text{ sen. } (V + E) - BC. \text{ sen. } C}{\text{sen. } (B + C)}.$$

Dimostr. $AD = AE + \frac{EV \text{ sen. } V}{\text{sen. } D}$, *ed ang.* QDC, *ovvero ang.* $D = V + E$, *sostituiti questi valori nelle espressioni di* AB *del Problema precedente, si avrà la prima formula indicata. Essendo poi* sen. $(V + E + A) = -$ sen. $(B + C)$, *con tale sostituzione s'avrà la seconda.*

PROBLEMA VII.

Trovare il lato AB *nell'esagono* ABGFVEA *per via dei lati* BG, GF, EV, EA (*fig.* 91), *e degli angoli.*

Soluzione. Sarà

$$AB = \frac{GF \text{ sen. } F + BG \text{ sen. } (F + G) - EV \text{ sen. } V - AE \text{ sen. } (E + V)}{\text{sen. } (V + E + A)},$$

$$AB = \frac{EV \text{ sen } V + AE \text{ sen. } (E + V) - GF \text{ sen. } F - BG \text{ sen. } (F + G)}{\text{sen. } (B + G + F)}.$$

Dimostr. $BC = BG + \frac{GF \text{ sen. } F}{\text{sen. } QCD}$, sen. QCD *ovvero* sen. $C =$ sen. $(G + F)$, *sostituiti questi valori nell'espressione di* AB *del Problema precedente, si avrà la prima formula; si avrà poi*

la seconda col sostituire a sen. $(V + E + A)$ *l'altro* $-$ sen. $(B + G + F)$ *al primo eguale. Qui pure come nel Problema VI resta il valore di* AB *indeterminato nel caso che* A, E, V *fosse eguale a* 180°.

PROBLEMA GENERALE TERZO.

Trovare un lato incognito d'un poligono essendo dati tutti gli altri lati eccetto uno qualunque e tutti gli angoli.

Soluzione. Si avrà il lato cercato prendendo la somma dei prodotti di ciascuno dei lati posti da una parte dei lati incogniti nel seno della somma degli angoli esterni intermedj tra esso lato cercato e il lato non dato; meno la somma dei simili prodotti dall'altra parte, e dividendo pel seno della somma degli angoli esterni intermedj ai due lati incogniti da questa parte.

Questo Problema generale terzo contiene il secondo.

Bisogna eccettuare il caso, nel quale i due lati incogniti fossero paralleli; nel quale il Problema riesce indeterminato.

PROBLEMA VIII.

Misurare l'area del quadrilatero ABCD *per via dei tre lati* BC, CD, DA, *e dei due angoli* C *e* D (*fig.* 87 *e* 88).

Soluzione. Sarà l'area

$$= \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, CD \text{ sen. } C + \tfrac{1}{2}\, CD \,.\, DA \text{ sen. } \pm D + \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, DA \text{ sen. } (C \pm D).$$

Dimostr. *Congiungansi i lati* AD *e* BC *del quadrilatero in* Q, *e s'abbassino da* B *e da* Q *le due* BL, QR *perpendicolari l'una sopra* AQ, *l'altra sopra* DC; *essendo poi*

$$DQ = \frac{DC \text{ sen. } C}{\text{sen. } CQD},$$

$$CQ = \pm \frac{DC \text{ sen. } \pm D}{\text{sen. } CQD},$$

ed introducendo questi valori nell'espressione $\tfrac{1}{2}$ AQ . BQ. sen. BQA *della superficie del triangolo* ABQ, *si avrà*

$$sup.ABQ = \tfrac{1}{2}(DQ + AD)(BC \pm CQ) \text{ sen. } CQD =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{DC \text{sen.} C}{\text{sen. } CQD} + AD\right)\left(BC + \frac{DC \text{sen.} \pm D}{\text{sen. } CQD}\right) \text{sen. } CQD$$

$$= \frac{DC^2 \text{ sen. } C \text{ sen. } \pm D}{2 \text{ sen. } CQD} + \frac{BC \,.\, DC \,.\, \text{sen. } C}{2} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{AD \,.\, DC \,.\, \text{sen. } \pm D}{2} + \frac{AD \,.\, BC \text{ sen. } CQD}{2} \quad (S).$$

Esprimendo $\left(\pm \tfrac{1}{2} \frac{DC^2 \text{ sen. } C \text{ sen. } \pm D}{\text{sen. } CQD}\right)$ *la superficie del triangolo* QCD *da sottrarsi nella fig.* 87, *e da aggiungersi nella fig.* 88 *al valore* (S); *ciò fatto sarà in ambedue i casi*

$$la\ sup.\ ABCD = (S) - \frac{DC^2 \text{ sen. } C \text{ sen. } \pm D}{\text{sen. } CQD},$$

$$= \tfrac{1}{2} BC \,.\, DC \text{ sen. } C + \tfrac{1}{2} AD \,.\, DC \text{ sen. } \pm D + \tfrac{1}{2} AD \,.\, BC \text{ sen. } (C \pm D)$$

il segno + *vale per la fig.* 87, *ed il* — *per la* 88.

PROBLEMA IX.

Misurare l'area del pentagono ABCDE *per via dei lati* BC, CD, DE, EA, *e degli angoli* C, D *ed* E (*fig.* 89 *e* 90).

Soluzione. Sarà l'area

$$= \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, CD \text{ sen. } C + \tfrac{1}{2}\, CD \,.\, DE \,.\text{ sen. } D + \tfrac{1}{2}\, DE \,.\, EA \text{ sen. } \pm E + \tfrac{1}{2} BC \,.\, DE \text{ sen. } (C + D) + \tfrac{1}{2} CD \,.\, EA \text{ sen. } (D \pm E) + \tfrac{1}{2} BC \,.\, EA \text{ sen. } (C + D \pm E).$$

Dimostr. *Protraggansi qui pure i lati* BC, ED *sino in* M, *e si faccia* BC = b, CD = c, DE = d, AE = e, *si avrà*

$$DM = \frac{c \text{ sen. } C}{\text{sen. } CMD \,(= \text{sen. } M)},$$

$$CM = \frac{c \text{ sen. } D}{\text{sen } M};$$

se si sostituiscano questi valori nell'espressione della superficie ABME $= \frac{1}{2}$ BM . ME sen. M $+$ $\frac{1}{2}$ ME . AE sen. $\pm$ E $\frac{1}{2}$ $+$ BM . AE sen. (M $\pm$ E) *tratta dal Problema precedente, si avrà*

$$sup.ABME = \tfrac{1}{2}\left(b + \frac{c \text{ sen. } D}{\text{sen. } M}\right)\left(d + \frac{c \text{ sen. } C}{\text{sen. } M}\right)\text{sen. } M + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\left(d + \frac{c \text{ sen. } C}{\text{sen. } M}\right) e \text{ sen. } \pm E +$$

$$\tfrac{1}{2}\left(b + \frac{c \text{ sen. } D}{\text{sen. } M}\right) . e \text{ sen. } (M \pm E) =$$

$$\tfrac{1}{2} bd \text{ sen. } M + \tfrac{1}{2} cd \text{ sen. } D + \tfrac{1}{2} bc \text{ sen. } C +$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{c^2 \text{ sen. } C \text{ sen. } D}{\text{sen. } M} + \tfrac{1}{2} de \text{ sen. } \pm E +$$

$$\tfrac{1}{2} be \text{ sen. } (M \pm E) +$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{ce}{\text{sen. } M} [\text{sen. } C \text{ sen. } \pm E + \text{sen. } D \text{ sen. } (M \pm E)]$$

ora sen. C sen. $\pm$ E $+$ sen. D sen. (M $\pm$ E) $=$ sen. C sen. $\pm$ E sen. D sen. (C $+$ D $\pm$ E) $=$ sen. C sen. $\pm$ E $+$ cos. $\pm$ E sen. C cos. D sen. D $+$ cos. $\pm$ E cos. C sen.^{2} D $+$ sen. $\pm$ E cos. C cos. D sen. D $-$ . . .

sen. $\pm$ E sen. C sen.^{2} D $=$ cos.^{2} D sen. C sen. $\pm$ E $+$ sen.^{2} D cos. C cos. $\pm$ E $+$ cos. C sen. D cos. D sen. $\pm$ E $+$ . . . sen. D cos. D sen. C cos. $\pm$ E $=$ sen. (D $\pm$ E) sen. (C $+$ D),

e levando dalla espressione della superficie ABME *il termine* $\frac{1}{2} \frac{c^2 \text{ sen. } C \text{ sen. } D}{\text{sen. } M}$, *che esprime il triangolo* CMD, *resterà la superficie* ABCDE $= \frac{1}{2}$ BC . CD . sen. C $+$ $\frac{1}{2}$ CD . DE sen. D $+$ . . . $\frac{1}{2}$ DE . EA sen $\pm$ E $+$ $\frac{1}{2}$ BC . DE sen. (C $+$ D) $+$ $\frac{1}{2}$ CD . EA sen. (D $\pm$ E) $+$ $\frac{1}{2}$ BC . EA sen. (C $+$ D $\pm$ E).

PROBLEMA GENERALE QUARTO.

Misurare l'area d'un poligono per via dei lati e degli angoli.

Soluzione. Non prevalendosi di un suo lato, nè dei due angoli adjacenti ad esso, sarà l'area eguale alla semisomma dei prodotti di ciascun lato in ciascun altro, e nel seno della somma degli angoli esterni intermedj ad essi due lati.

SCOLIO.

Se il poligono sarà di molti lati come *ABCD EFGH* (*fig.* 94) sarà più spedito supporlo diviso in due con una diagonale come *AE* la quale formi i due poligoni *ABCDE*, *EFGHA*, che o abbiano lo stesso numero di lati, o si superino di un solo, e calcolarli separatamente non prevalendosi del lato *AE* comune ad entrambi nè degli angoli adjacenti al medesimo.

PROBLEMA X.

Nel quadrilatero ABCD *trovare gli angoli* A *e* B *adjacenti al lato incognito* AB (*fig.* 87 *e* 88).

Soluzione. Sarà

$$\text{tang. } BAD = \frac{DC \text{ sen.} \pm D + CB \text{ sen.} (C \pm D)}{AD + DC \cos. D + CB \cos. (C \pm D)}$$

$$\text{tang. } ABC = \frac{CD \text{ sen. } C + DA \text{ sen.} (C \pm D)}{BC + CD \cos. C + DA \cos. (C \pm D)}.$$

Dimostr. *Calata la* B *la* BL *perpendicolare sopra* AQ, *si avrà* tang. $\text{BAD} = \frac{\text{BL}}{\text{AL}}$; *servendosi*

in quest'equazione dei valori di BL, AL *trovati nel Prob. 1. di questo libro, cioè*

$$\text{BL} = \text{CD sen.} \pm \text{D} + \text{BC . sen.} (\text{C} \pm \text{D}),$$
$$\text{AL} = \text{AD} + \text{CD} \cos. \pm \text{D} + \text{BC} \cos. (\text{C} \pm \text{D}),$$

si avrà

$$\text{tang. BAD} = \frac{\text{DC sen.} \pm \text{D} + \text{BC sen.} (\pm \text{D})}{\text{AD} + \text{CD} \cos. \pm \text{D} + \text{BC} \cos. (\text{C} \pm \text{D})};$$

egualmente trovasi tang. ABC *coll'abbassare da* A *una perpendicolare sopra* BQ.

PROBLEMA XI.

Nel pentagono ABCDE *trovare gli angoli* A *e* B *adjacenti al lato incognito* AB (*fig.* 89 *e* 90).

Soluzione. Sarà

$$\text{tang. } BAE = \frac{ED \text{sen.} \pm E + CD \text{sen.} (\pm E + D) + CB \text{ sen.} (\pm E + D + C)}{AE + ED \cos. E + DC \cos (\pm E + D) + CB \cos. (\pm E + D + C)}$$

$$\text{tang. } ABC = \frac{CD \text{ sen. } C + DE \text{ sen.} (C + D) + EA \text{ sen.} (C + D \pm E)}{BC + CD \cos. C + DE \cos. (C + D) + EA \cos. (C + D \pm E)}.$$

Dimostr. *Coi valori di* BL, *ed* AL *presi dal Probl. II di questo libro, e sostituiti nell'equazione*

$$\text{tang. BAE} = \frac{\text{BL}}{\text{AL}},$$

si avrà la detta tang. BAE *come nella soluzione; si avrà poi collo stesso metodo anche* tang. ABC.

PROBLEMA GENERALE QUINTO.

Trovare in un poligono due angoli incogniti adjacenti ad un lato incognito, dati tutti gli altri angoli e lati.

Soluzione. Si avrà la tangente di ciascun angolo interno incognito dividendo la somma dei prodotti di ciascun lato non formante l'angolo incognito nel seno della somma degli angoli esterni posti tra esso e il lato cognito dell'angolo incognito per la somma dei prodotti di ciascuno dei medesimi lati nel coseno della somma dei medesimi angoli aggiuntovi il lato cognito dell'angolo incognito.

PROBLEMA XII.

Nel quadrilatero ABCD *trovare il lato* CD, *e gli angoli* A *e* B (*fig.* 87), *dati gli altri lati ed angoli.*

Soluzione. Sarà

$$CD = \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C)^2)} - AD \cos. D - BC \cos. C$$

$$\text{tang.} BAD = [\text{sen.} D \sqrt{(AB^2 - (AD \text{sen.} D - BC \text{sen.} C)^2)} - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \cos. D] :$$
$$[\cos. D \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ . sen. } C)^2)} + (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \text{ sen. } D]$$
$$\text{tang.} ABC = [\text{sen.} C \sqrt{(AB^2 - (AD \text{sen.} D - BC \text{sen.} C)^2)} + (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \cos. C] :$$
$$[\cos. C \sqrt{(AB^2 - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C)^2)} - (AD \text{ sen. } D - BC \text{ sen. } C) \text{ sen. } C].$$

Per la *fig.* 88 si scriva $-D$ in luogo di D.

Dimostr. *Dal Problema I. del presente libro si ha* $AB^2\ (x^2) = b^2 + c^2 + d^2 + 2bc \cos. C + 2cd \cos. \pm D + 2bd \cos. (C \pm D)$, *riguardando la lettera* c *per incognita, e trattando l'equazione quadratica col solito metodo delle equazioni del secondo grado, si avrà*

$$c^2 + 2c(b \cos. C + d \cos. \pm D) + (b \cos. C + d \cos. \pm D)^2 =$$
$$x^2 - b^2 - d^2 - 2bd \cos. (C \pm D) + (b \cos. C + d \cos. \pm D)^2 =$$
$$x^2 - b^2 - d^2 - 2bd \cos. C \cos. \pm D + 2bd \text{ sen. } C \text{ sen. } \pm D + b^2 (1 - \text{sen.}^2 C) + 2bd \cos. C \cos. \pm D + d^2(1 - \text{sen.}^2 \pm D) \ldots$$
$$c = \sqrt{[x^2 - (d \text{ sen. } \pm D - b \text{ sen. } C)^2]} - b \cos. C - d \text{ . } \cos. \pm D$$
rimesse alle lettere le linee, si ha

$CD = \sqrt{[AB^2 - (AD \text{ sen.} \pm D - BC. \text{ sen. } C)^2]}$ $- AD \text{ cos.} \pm D - BC \text{ . cos. } C$, *introducendo il qual valore di* DC *nelle espressioni di* tang. BAD, *e di* tang. ABC *del Problema X, si avranno le formule date nella soluzione.*

PROBLEMA GENERALE SESTO.

Trovare in un poligono due angoli adjacenti ad un lato cognito, e un lato qualunque incognito.

Soluzione. Dal Problema generale primo si ha quest'equazione: il quadrato del lato interposto agli angoli incogniti = alla somma dei quadrati degli altri lati più i doppj rettangoli di ciascuno di questi in ciascun altro moltiplicati rispettivamente nel coseno della somma degli angoli esterni intermedj tra lor due dalla parte opposta al lato primo. Da questa equazione del secondo grado è facile ricavare il lato incognito.

Trovato il lato incognito, si troveranno i due angoli incogniti per mezzo del Problema generale quinto.

PROBLEMA GENERALE SETTIMO.

Trovare nel qualunque poligono ABCDEFGHI *un lato* HG, *e due angoli per esempio* A, D (*fig.* 93) *non successivi nè adjacenti al lato.*

Soluzione. Si tiri una diagonale pei due angoli incogniti *A* e *D*. Nel poligono *ABCD* di lati tutti cogniti, eccetto la *AD*, e di angoli pure cogniti, eccetto i due adjacenti alla *AD*, per mezzo del Problema generale primo si trovi la *AD*, e per mezzo del Problema generale quinto si trovino i due angoli adjacenti ad essa *BAD*, *ADC*.

Nel poligono *ADEFGHI* posto dall'altra parte della diagonale *AD*, nel quale vi è il lato incognito *HG*, per mezzo del Problema generale sesto si trovino i due angoli *IAD*, *ADE* adjacenti alla *AD*, ed il lato incognito *HG*.

Oltre il lato *HG* si avrà ancora

$$IAB = IAD + BAD \text{, e}$$
$$CDE = ADC + ADE.$$

PROBLEMA GENERALE OTTAVO.

In qualunque poligono ABCDEFGHI *trovare tre angoli qualunque* A, D, G (*fig.* 93), *dati gli altri angoli e tutti i lati.*

Soluzione. Descritto il triangolo *ADG* si trovino i suoi lati per mezzo del Problema generale primo, impiegando i tre poligoni *ABCD, DEFG, GHIA*, che hanno gli altri lati ed angoli cogniti sul perimetro del poligono proposto. In questi tre poligoni, per mezzo del Problema generale quinto, si trovino pure gli angoli *BAD, CDA*; *GDE, DGF*; *HGA, GAI*.

Per mezzo dei lati del triangolo *AGD* si trovino i suoi angoli colla trigonometria. Quindi si avranno *IAB, CDE, FGH*.

Tali sono i problemi del *metodo dell'Autore di misurare i poligoni piani* stampati l'anno 1787 in Pavia, i quali comprendono tutti i Problemi della poligonometria di M. L'Huilier stampata in Ginevra l'anno 1789.

AGGIUNTA

Per la maggiore generalità de' Problemi precedenti.

Gli angoli de' poligoni sono stati qui sopra divisi in sporgentisi, e rientranti, essendosi assegnato il segno + agli angoli esterni degli sporgentisi, ed il segno — agli esterni dei rientranti.

Ma se queste due specie di angoli si vorranno considerare sotto un altro aspetto, ne nascerà una regola facile non solo pel calcolo de' poligoni che abbiamo esaminati, ma ancora per altre linee che seguendosi l'una l'altra sino a che si torni da capo, s'incrocicchiano, e per gli angoli, che esse formano tra loro, come si vedrà dagli esempj.

Quando gli angoli d'un poligono sono tutti sporgentisi, si troverà che seguitando il giro del poligono, incominciando da qualche suo punto, quando si passa da un lato all'altro si piega sempre dalla stessa parte. Per esempio nel poligono *ABCDE* (*fig.* 89) andando da *A* verso *B*, quando al punto *B* si entra sul lato *BC*, si fa una deviazione a destra dal lato *AB*. Egualmente quando si è in C entrando sul lato CD si fa un'altra deviazione a destra dal lato BC, e così di seguito; cosicchè essendo tutti gli angoli sporgentisi si devia sempre a destra a tutti gli angoli, finchè compito il perimetro si ritorna in A.

Al contrario nel poligono $ABCDE$ (*fig.* 90) dove l'angolo E è rientrante cominciando il giro da A in B, e seguitando il perimetro finchè si torni in A, si troverà che in B, in C, ed in D si devia a destra; ma che in E dove è l'angolo rientrante, si devia a sinistra; che giunti che siamo in A e rientrando sul lato AB si torna a deviare a destra appunto perchè l'angolo A è uno degli sporgentisi.

Si troverà pure che l'angolo di deviazione è appunto l'angolo che noi abbiamo chiamato esterno, o sia l'angolo, che è formato dalla continuazione d'un lato del poligono col lato susseguente. Così nelle *fig.* 89 e 90 l'angolo di deviazione in E è l'angolo QED.

Se il giro del poligono si facesse sul verso contrario, cioè se per esempio nelle *fig.* 89 e 90 si andasse da A in E, da E in D, da D in C ec., si troverebbe che gli angoli sporgentisi hanno una deviazione a sinistra e gli angoli rientranti l'hanno a destra.

Si dirà dunque in generale che gli angoli sporgentisi, e gli angoli rientranti hanno tra loro una deviazione contraria. Che gli angoli sporgentisi hanno una deviazione verso l'interno del poligono, ed i rientranti verso l'esterno.

Si troverà pure che la somma degli angoli esterni intermedj a due lati non è altro che la deviazione di un lato dall'altro. Così nella *fig.* 89 $B + C$ non è altro che la deviazione del lato CD dal lato AB, essendosi deviato prima in B per la quantità dell'angolo B; poi in C per la quantità dell'angolo C per porsi sulla direzione CD. Nella *fig.* 90 $B + C + D - E$ non è altro se non la deviazione del lato EA dal lato AB.

Alla deviazione interna si è dato il segno $+$ e all'esterna il segno $-$

Considerando gli angoli esterni sotto l'aspetto di angoli di deviazione nella maniera fin qui spiegata, in vece del primo Problema generale si può sostituire il seguente anche più generale; poichè non solo abbraccerà tutti i casi del primo Problema generale, ma ancora i casi degli esempj che gli si soggiungeranno, ed altri simili.

NUOVO PROBLEMA GENERALE PRIMO.

Posto che più rette sieno poste ad angoli tra loro una dietro l'altra successivamente in maniera che l'ultima di esse colla sua estremità si unisca ad angolo col principio della prima, ed una d'esse sia incognita, come pure gli angoli tra' quali è posta, tutte le altre rette poi e gli angoli sieno cogniti; trovare la retta incognita.

Soluzione. La retta incognita interposta agli angoli incogniti si troverà eguale alla radice della somma de' quadrati di tutti i lati cogniti, e dei doppj rettangoli di ciascun lato in ciascun altro moltiplicati rispettivamente nel coseno della loro mutua deviazione.

Esempio I.

Siano date di lunghezza e di posizione le tre rette BC, CD, DA (*fig.* 95), e i loro angoli BCD, CDA; trovare la retta AB, che nella figura interseca la DC tra D e C.

Se si scorrano successivamente i tre lati BC, CD, DA andando da B in A, ovvero da A in B, si troveranno gli angoli di deviazione in C e D essere in un verso contrario l'uno all'altro. Dando ad uno di essi ad arbitrio il segno positivo e all'altro il negativo, per esempio il positivo a C, si avrà come per la *fig.* 88.

$$AB = \sqrt{[BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2BC \,.\, CD \cos. C + 2CD \,.\, DA \cos. D + 2BC \,.\, DA \cos. (C - D)]}.$$

Esempio II.

Sieno misurate le quattro strade rette AE, ED, DC, CB, e gli angoli che esse fanno tra loro in E, D e C (*fig.* 96), trovare la distanza de' due punti A e B.

Essendo la deviazione in E contraria alle deviazioni in D e C, e però dandole segno contrario si avrà come per la *fig.* 90

$$AB = \sqrt{[BC^2 + CD^2 + DE^2 + EA^2 + 2BC \,.\, CD \cos. C + 2CD \,.\, DE \cos. D + 2DE \,.\, EA \cos. E + 2BC \,.\, DE \cos. (C + D) + 2CD \,.\, EA \cos. (D - E) + 2BC \,.\, EA \cos (C + D - E)]}.$$

Egualmente qui si potrebbero sostituire altri problemi più generali in luogo di quelli che sono stati posti qui sopra. Per far questo basterà che negli antecedenti problemi generali, in luogo di *poligono* si sostituisca l'espressione: *sistema di più rette poste ad angoli tra loro una dietro l'altra successivamente in maniera, che l'ultima di esse colla sua estremità si unisca ad angolo col principio della prima.* Così pure in luogo di angoli *sporgentisi* o *rientranti* si sostituisca *angoli* di *deviazione positiva* o *negativa.*

In questa guisa sulla *fig.* 95 avranno luogo tutti i problemi proposti sulla *fig.* 88 e 92, e sulla *fig.* 96 tutti i proposti sulla *fig.* 90 senza che qui se ne ripetano inutilmente gli esempj. Solo sarà utile fissare alcune regole generali che nascono dalla diversità delle figure.

Regola I.

Quando nell'espressione del valore dell'incognita non entrano se non i coseni della deviazione, è indifferente chiamare una deviazione piuttosto positiva che negativa, essendo cos. $A =$ cos. $- A$. Nell'aggregato però delle deviazioni converrà dare segno contrario alle deviazioni contrarie essendo cos. $(A + B)$ diverso

da cos. $(A - B)$. Un caso di questa regola l'abbiamo già veduto nei due esempj del nuovo Problema generale primo.

Regola II.

Quando nell'espressione del valore dell'incognita ci entrano i seni della deviazione, e l'incognita è una linea retta o un angolo, ancora sarà indifferente chiamare una deviazione piuttosto positiva che negativa; posto però che alla contraria si dia il segno contrario, tanto se è sola quanto se è unita con altre. Il valore che se ne avrà per l'incognita in un caso e nell'altro, non sarà diverso se non nel segno. Questa diversità indicherà appunto la direzione del lato e la deviazione dell'angolo che si cercavano, e che riescon diverse secondo le due denominazioni diverse che si son prese degli angoli dati.

Esempio I.

Sieno note le lunghezze delle quattro strade *AE*, *ED*, *DC*, *CB* (*fig.* 96), e i loro angoli in *E*, *D*, *C*, e non si possa traguardare da *B* in *A*.

Si vorrebbe fare una strada dritta da B in A. Per quest'oggetto si desidera l'angolo CBA.

Siccome a questa *figura* 96 sono applicabili tutte le formole della *figura* 90, si avrà come nel Problema XI.

$$\text{tang. } ABC = \frac{CD \text{ sen. } C + DE \text{ sen. } (C+D) + EA \text{ sen. } (C+D-E)}{BC + CD \cos. C + DE \cos. (C+D) + EA \cos. (C+D-E)}.$$

Essendosi qui presa positiva la deviazione in C, ed essendo dello stesso genere la deviazione in B; se il valore di tang. ABC riesce positivo, sarà l'angolo ABC minor d'un retto. Se riesce negativo, sarà maggiore. Tutto appunto come nella *figura* 90.

Esempio II.

Si voglia ora fare la stessa strada, ma cominciando da A verso B. Si desidera l'angolo EAB.

Applicando anche qui la formula della *fig.* 90, Probl. XI, si avrà

$$\text{tang. } BAE = \frac{ED \text{ sen. } -E + CD \text{ sen. } (D-E) + CB \text{ sen. } (C+D-E)}{AE + ED \cos. E + DC \cos (D-E) + CB \cos (C+D-E)}.$$

Essendosi qui presa negativa la deviazione in E, ed essendo dello stesso genere la deviazione in A; se il valore di tang. BAE riesce positivo, sarà qui (al contrario dell'esempio I) l'angolo BAE maggior d'un retto; se riesce negativo, sarà minore. Il che segue anche al contrario di quello che si ha nella *figura* 90 dove la deviazione in A è di diverso genere della deviazione in E.

In questi due esempj si vede, che si poteva egualmente prendere in senso contrario le due deviazioni in C e in E cangiando tutti i segni nelle espressioni degli angoli che stanno sotto il carattere *sen.*, cioè scrivendo sen. $-C$, sen. $(-C-D)$, sen. $(-C-D+E)$, pel primo esempio, e sen. E, sen. $(E-D)$, sen. $(E-D-C)$ pel secondo. Allora le tangenti acquistavano il segno contrario, il che riusciva conforme alla qualità dei loro angoli, che avrebbero acquistato diverso genere di deviazione.

Regola III.

In quei sistemi di molte rette, nei quali due qualunque rette non consecutive si tagliano nella *fig.* 95, dove la DC taglia la AB in x, e nella 96 dove la DE taglia pure la AB in x; applicandovi la soluzione del Problema generale quarto, nel quale si cerca l'area; non si avrà la somma delle aree opposte al vertice nell'incrocicchiamento x, ma la loro differenza, cioè il residuo che nasce dalla sottrazione delle aree, nelle quali le deviazioni prese negative riescono gli angoli esterni degli sporgentisi, dalle aree, nelle quali gli angoli esterni degli sporgentisi coincidono colle deviazioni positive. Per esempio l'espressione $\frac{1}{2}\, BC \,.\, CD$ sen. $C + \frac{1}{2}\, CD \,.\, DA$ sen. $-D + \frac{1}{2}\, BC \,.\, DA$ sen. $(C - D)$ applicata alla *fig.* 95, indica l'area $BCx - xDA$.

Misura de' poligoni per via di una base.

Daremo qui la maniera di potere in qualunque poligono

Trovare	Dati
I. La superficie II. I lati III. Gli angoli	Un lato del poligono, gli angoli che fa questo lato colle diagonali che passano pei due estremi di questo lato, e coi lati contigui.

PROBLEMA I.

Trovare la superficie.

Soluzione. Primo. Si divida il poligono in tanti triangoli cha abbiano tutti il vertice ad uno dei due estremi di quel lato che si prende per base.

Secondo. Si trovi l'espressione generale di ciascuno di essi triangoli, come si insegnerà qui subito appresso.

Terzo. Si sommino o si sottraggano essi triangoli, secondo che converrà alla figura del poligono. Tutto s'intenderà meglio dagli esempj.

Esempio I.

Sia data la base AB del poligono $ABCDEF$ (*fig.* 97), che ha gli angoli tutti sporgentisi, e sieno dati tutti gli angoli fatti colla medesima AB in A e B dalle diagonali AC, AD, AE, BD, BE, BF, e dai due lati AF, BC contigui ad essa base AB. Si avrà per questo stesso

Primo. Il poligono diviso nei triangoli BCD, BDE, BDF, BFA che hanno tutti il vertice in B;

ovvero, se più piaccia se lo avrà diviso nei triangoli ACB, ADC, AED, AFE (*fig.* 97), che hanno tutti il vertice in A.

Secondo. L'espressione di uno qualunque di questi triangoli, per esempio del triangolo BDE si avrà, moltiplicando la metà del quadrato della base AB per una frazione il numeratore della quale è il prodotto de' due seni degli angoli che fanno colla base AB all'estremo A dove non è il vertice del triangolo le diagonali DA, EA, che passano pei due angoli del triangolo; il denominatore poi è il prodotto dei due seni degli angoli che fanno le stesse diagonali DA, EA coi lati del triangolo DB, EB; e di nuovo moltiplicando pel seno dell'angolo che forman tra loro i due lati del triangolo all'estremo della base in B, cioè sarà l'area

$$DBE = \tfrac{1}{2} AB^2 \frac{\text{sen. } DAB \text{ sen. } EAB}{\text{sen. } ADB \text{ sen. } AEB} \text{ sen. } DBE.$$

Quest'espressione si semplifica pel triangolo che ha per lato la base AB, per esempio pel triangolo FBA; l'area del quale si ha moltiplicando la metà del quadrato della stessa AB pel prodotto dei seni dei due angoli in A e B, e dividendo pel seno dell'angolo opposto ad AB; cioè si ha l'area

$$FBA = \tfrac{1}{2} AB^2 \frac{\text{sen. } FAB \text{ sen. } FBA}{\text{sen. } AFB}.$$

Terzo. Sarà dunque sommando i triangoli BCD, BDE, BEF, BFA l'area del poligono $ABCDEF =$

$$\tfrac{1}{2} AB^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\text{sen. } CAB \text{ sen. } DAB \text{ sen. } CBD}{\text{sen. } ACB \text{ sen. } AEB} + \\[2mm] \dfrac{\text{sen. } DAB \text{ sen. } EAB \text{ sen. } DBE}{\text{sen. } ADB \text{ sen. } AEB} + \\[2mm] \dfrac{\text{sen. } EAB \text{ sen. } FAB \text{ sen. } EBF}{\text{sen. } AEB \text{ sen. } AFB} + \\[2mm] \dfrac{\text{sen. } FAB \text{ sen. } FBA}{\text{sen. } AFB} \end{array} \right\}.$$

Egualmente sommando i triangoli ACB, ADC, AED, AFE sarà la stessa area $=$

$$\tfrac{1}{2} AB^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\text{sen. } CBA \text{ sen. } CAB}{\text{sen. } BCA} + \\[2mm] \dfrac{\text{sen. } CBA \text{ sen. } DBA \text{ sen. } CAD}{\text{sen. } BCA \text{ sen. } BDA} + \\[2mm] \dfrac{\text{sen. } DBA \text{ sen. } EBA \text{ sen. } DAE}{\text{sen. } BDA \text{ sen. } BEA} + \\[2mm] \dfrac{\text{sen. } EBA \text{ sen. } FBA \text{ sen. } EAF}{\text{sen. } BEA \text{ sen. } BFA} \end{array} \right\}.$$

Esempio II.

Sia data la base del poligono $ABCDEF$, che ha l'angolo DEF rientrante. Condotte al punto B da tutti gli angoli del poligono le DB, EB, FB, e dagli stessi al punto A le CA, DA, EA (*fig.* 98), si avrà l'area del poligono eguale alle aree $CBD + DBE + EBF + FBA$, come pure eguale alle aree $CBA + DCA - EDA + FEA$. Si avrà dunque l'area $ABCDEFA =$

$$\frac{1}{2} AB^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\text{sen. } CAB \text{. sen. } DAB \text{ sen. } CBD}{\text{sen. } ACB \text{ sen. } ADB} + \\ \dfrac{\text{sen. } DAB \text{ sen. } EAB \text{ sen. } DBE}{\text{sen. } ADB \text{ sen. } AEB} + \\ \dfrac{\text{sen. } EAB \text{ sen. } FAB \text{ sen. } EBF}{\text{sen. } AEB \text{ sen. } AFB} + \\ \dfrac{\text{sen. } FAB \text{ sen. } FBA}{\text{sen. } AFB} \end{array} \right\}.$$

La stessa area sarà =

$$\frac{1}{2} AB^2 \times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\text{sen. } CBA \text{ sen. } BAC}{\text{sen. } BCA} + \\ \dfrac{\text{sen. } CBA \text{ sen. } DBA \text{ sen. } CAD}{\text{sen. } BCA \text{ sen. } BDA} - \\ \dfrac{\text{sen. } DBA \text{ sen. } EBA \text{ sen. } DAE}{\text{sen. } BDA \text{ sen. } BEA} + \\ \dfrac{\text{sen. } EBA \text{ sen. } FBA \text{ sen. } EAF}{\text{sen. } BEA \text{ sen. } BFA} \end{array} \right\}.$$

PROBLEMA II.

Trovare i lati.

Soluzione. Servono a questo le due Soluzioni 14 e 15 del Probl. III del Lib I (*fig.* 97 e 98).

Per esempio se si voglia trovare il lato DE basterà sostituire nelle formule di esse soluzioni la lettera E in luogo della lettera X, e la D in luogo della Z.

PROBLEMA III.

Trovare gli angoli.

Soluzione. S'intenderà meglio la regola da un esempio. Si voglia l'angolo CDE. Si avrà l'angolo CDA per via dell'equazione (*fig.* 97 e 98)

$$\text{tang. } CDA = \frac{\text{sen. } DAB - \dfrac{\text{sen. } CAB}{\text{sen. } ACB} \text{ sen. } (DAB + CBA)}{\dfrac{\text{sen. } DBA}{\text{sen. } BDA} + \cos. DAB + \dfrac{\text{sen. } CAB}{\text{sen. } ACB} \cos. (DAB + CBA)}.$$

Si avrà pure l'angolo BDE per via dell'equazione

$$\text{tang. } BDE = \frac{\text{sen. } DBA - \dfrac{\text{sen. } EBA}{\text{sen. } BEA} \text{ sen. } (DBA + EAB)}{\dfrac{\text{sen. } DAB}{\text{sen. } BDA} + \cos. DBA + \dfrac{\text{sen. } EBA}{\text{sen. } BEA} \cos. (DBA + EAB)}.$$

Dalla somma trovata $CDA + BDE$ si sottragga l'angolo BDA, si avrà l'angolo cercato CDE.

Descrizione d'un Istromento che potrebbe servire a questo metodo di misurare i Poligoni.

Siccome in tutto questo metodo si fa uso continuo dei seni e dei coseni degli angoli de' poligoni, e questi soli colla cognizion de' lati bastano alla soluzione di tutti i problemi proposti qui sopra; così potrebbe esser comodo al geometra usare un quadrante di traguardo, il quale nello stesso tempo che indicasse l'angolo, indicasse anche il seno, ed il coseno del medesimo. Sia il quarto di circonferenza APB (*fig.* 103) diviso in gradi 90, e suddiviso in parti d'essi gradi. Sia una regola PC armata di traguardi, che girando intorno al centro C scorra col punto P il medesimo quarto di circonferenza. Sia essa divisa in parti decimali da C in P per esempio in 1000. Descritti i due semicerchi AQC, BSC co' due diametri BC, AC, che sono raggi del cerchio APC, sopra uno de' quali raggi sieno pure i traguardi; i punti Q ed S, dove essi cerchi taglieranno la PC, indicheranno in parti decimali il seno ed il coseno d'ogni angolo. Poichè cominciando la numerazione delle divisioni della CP da C venendo in P, sarà SC il seno dell'angolo PCA, QC il suo coseno, ovvero il seno dell'angolo PCB. Di fatti tirate le SB, AQ, e la PN perpendicolare alla AC; la PM perpendicolare alla BC; saranno i triangoli PCN, AQC eguali, e simili; poichè essi sono rettangoli in Q ed N; hanno un angolo comune in C, ed il lato PC è eguale al lato AC; similmente si trova che i triangoli PMC, BSC sono eguali, e simili tra loro. Inoltre il triangolo PMC è eguale, e simile al triangolo PNC, essendo ciascuno la metà del parallelogrammo $PNCM$. Dunque tutti quattro questi triangoli sono simili, ed eguali tra loro. Sarà dunque $SC = MC = PN$ seno dell'angolo PCA. Così pure sarà $QC = NC = PM$ seno dell'angolo PCB, e coseno dell'angolo PCA.

LIBRO QUINTO

DELLA MISURA DEI SOLIDI

PROBLEMA I.

Misurare un prisma o un cilindro.

Soluzione. Si moltiplica la sua base per l'altezza, il prodotto dà la solidità del prisma o del cilindro. Sia la base $= b$; l'altezza $= a$, sarà la solidità $s = ab$.

PROBLEMA II.

Misurare una piramide o un cono.

Soluzione. Si moltiplica la base per l'altezza, e si prende il terzo. Sia la base $= b$; l'altezza $= a$, sarà la solidità $s = \frac{1}{3}\, ab$.

PROBLEMA III.

Misurare una piramide tronca o un cono tronco.

Soluzione. Si sommano le due basi parallele; si aggiunge a questa somma una base, che sia

media proporzionale tra le due basi; quest'aggregato si moltiplica pel terzo dell'altezza della piramide tronca o del cono tronco, e si ha la sua solidità. Sia la base inferiore $= B$; la superiore $= b$; l'altezza del tronco $= a$, sarà la sua solidità $s = \frac{1}{3}\, a\, (B + b + \sqrt{Bb})$.

PROBLEMA IV.

Trovare la solidità di una sfera.

Soluzione. Si ha moltiplicando la sua superficie pel terzo del raggio. Sia il raggio della sfera $= r$, la circonferenza d'un suo cerchio massimo $= c$; la superficie della sfera $= s$; il rapporto della circonferenza al diametro

$$= \pi = \frac{22}{7} = \frac{355}{113} = 3,1415926535.$$

Sarà la solidità della sfera

$$S = \frac{1}{3} rs = \frac{2}{3} r^2 c = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{cs}{\pi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{c^3}{\pi^2}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{s^3}{\pi}}.$$

PROBLEMA V.

Misurare la solidità d'un settore di sfera.

Soluzione. Si moltiplica la superficie sferica del settore pel terzo del raggio della sfera.

Sia il raggio della sfera $= R$; il raggio del cerchio che termina la superficie sferica del settore $= r$; la sua circonferenza $= c = 2r\pi$. Sarà la solidità del settore

$$= \tfrac{2}{3} R^3\pi \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \right]$$

$$= \tfrac{2}{3} R^2\pi \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{4\pi^2 R^2}\right)} \right].$$

PROBLEMA VI.

Misurare la solidità d'un segmento sferico.

Soluzione. Si moltiplichi la superficie sferica del segmento pel terzo del raggio. Da questo prodotto si sottragga la solidità del cono, che ha la stessa base col segmento e il vertice al centro della sfera.

Sia il raggio della sfera $= R$; il raggio del cerchio, che termina la superficie sferica, cioè della base del segmento $= r$; l'altezza del segmento $= a$. Sarà la solidità del segmento

$$= \frac{a^2\pi}{3}(3R - a) = \frac{a\pi}{6}(3r^2 - a^2).$$

PROBLEMA VII.

Misurare una piramide per via de' lati.

Soluzione. Sia la piramide $ABCD$ (*fig.* 99) e sia

$$\begin{array}{ll} AB = b & BC = f \\ AC = c & CD = g \\ AD = d & BD = k \end{array}$$

sarà la solidità della piramide $=$

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} +bbgg(cc+dd+ff+kk-bb-gg) \\ +cckk(bb+dd+ff+gg-cc-kk) \\ +ddff(bb+cc+gg+kk-dd-ff) \\ -bbccff-bbddkk-ccddgg-ffggkk \end{array}\right\}}.$$

Dimostr. *Dall'apice* A *della piramide sulle basi* CD, CB *dei due triangoli laterali* ACD, ABC *s'abbassino le perpendicolari* AN, AM, *e dai punti* N *ed* M *normalmente ai medesimi lati guidinsi nel piano* BCD *le* NO, MO, *che s'in-*

tersecheranno in O, *la retta* AO *sarà l'altezza della piramide, onde la sua solidità* $= \frac{1}{3}$ AO . B (*chiamando* B *la sua base*), *condotta poi* CO *sarà*

$$AO = \sqrt{(AC^2 - CO^2)} = \sqrt{(AC^2 - CN^2 - NO^2)},$$

e continuata la MO *in* S, *e chiamato l'angolo* DCB (a), *sarà*

$$MS = CM \cdot \text{tang. } a,$$

$$CS = \frac{CM}{\cos.\ a}, \text{ ed } NS = \frac{CM}{\cos.\ a} - CN;$$

dalla similitudine dei due triang. MCS, NOS, *si ha* MS : MC : CS = NS : NO : OS, *da qui*

$$NO = \frac{CM \cdot NS}{MS} = \frac{NS}{\text{tang. } a}, \text{ ovvero}$$

$$NO = \frac{CM}{\text{sen. } a} = \frac{CN}{\text{tang. } a}, \text{ ovvero}$$

$$NO = \frac{CM - CN \cos.\ a}{\text{sen. } a}, \text{ unde}$$

$$CO^2 = CN^2 + NO^2 = \frac{CN^2 + CM^2 - 2CM.CN \cos a}{\text{sen.}^2\ a}, \text{ ed}$$

$$AO^2 = \frac{AC^2 \text{ sen.}^2\ a - CN^2 - CM^2 + 2CM \cdot CN \cos.\ a}{\text{sen}^2\ a},$$

e la solidità della piramide =

$$\frac{1}{3} \frac{B}{\text{sen. } a} \sqrt{(AC^2 \text{ sen.}^2\ a - CN^2 - CM^2 + 2CM \cdot CN \cos.\ a)};$$

ma B $= \frac{1}{2}$ fg sen. a, *e dalla Dimostr. num.* 4, *Problema* I, *Libro* I *si ha*

$$CN = \frac{g^2 + c^2 - d^2}{2g},$$

$$CM = \frac{f^2 + c^2 - b^2}{2f};$$

innoltre dalla Dimos. Prob. XVIII, Lib. III si deduce

$$\cos.\ a = \frac{g^2 + f^2 - k^2}{2gf}, \text{ e}$$

$$\text{sen.}^2 a = 1 - \frac{(g^2 + f^2 - k^2)^2}{4g^2 f^2}$$

questi valori sostituiti s'avrà di nuovo solidità della Piramide

$$= \frac{1}{6} fg \sqrt{\left[c^2 \left(1 - \frac{(g^2 + f^2 - k^2)^2}{4f^2 g^2}\right) - \frac{(g^2 + c^2 - d^2)^2}{4g^2} - \frac{(f^2 + c^2 - b^2)^2}{4f^2} + \frac{(g^2 + c^2 - d^2)(f^2 + c^2 - b^2)(g^2 + f^2 - k^2)}{4g^2 f^2}\right]} =$$

$$\frac{1}{12} \sqrt{[4g^2 f^2 c^2 - c^2 (g^2 + f^2 - k^2)^2 - f^2 (g^2 + c^2 - d^2)^2 - g^2 (f^2 + c^2 - b^2)^2 + (g^2 + c^2 - d^2)(f^2 + c^2 - b^2)(g^2 + f^2 - k^2)]}.$$

Quest'equazione svolta si ridurrà a quella che fu data nella soluzione.

COROLLARIO PRIMO.

Se sarà $AB = AC$; $DB = DC$, sarà la solidità $= \frac{1}{12} f \sqrt{(2b^2 g^2 + 2b^2 d^2 + 2d^2 g^2 - b^4 - d^4 - g^4 - d^2 f^2)}$, e se l'area del triangolo $ABD = ADC$ si chiami A, sarà la solidità della piramide $=$

$$\frac{1}{12} f \sqrt{(16A^2 - d^2 f^2)}.$$

COROLLARIO SECONDO.

Se sarà $AB = AC = DB = DC$, sarà la solidità $=$

$$\frac{1}{12} fd \sqrt{(4b^2 - d^2 - f^2)}.$$

COROLLARIO TERZO.

Se sarà $AB = AC = AD$; $BC = CD = BD$; sarà la solidità $=$

$$\frac{1}{12} f^2 \sqrt{(3b^2 - f^2)}.$$

COROLLARIO QUARTO.

Se tutti i lati saranno eguali sarà la solidità $=$

$$\frac{1}{12} (AB)^3 \sqrt{2}.$$

SCOLIO.

Possono servire le formule di questi corollarj per avere speditamente la solidità di poliedri di facce triangolari, i quali abbiano qualche regolarità. Si supponga per esempio che intorno alla AD come ad esse sieno poste delle piramidi tutte simili alla $ABCD$, che ha le condizioni del Corollario I si avrà subito la solidità del poliedro moltiplicando la formula del Corollario I nel numero delle piramidi.

PROBLEMA VIII.

Misurare la solidità d'una piramide per via di tre lati che concorrono in uno dei suoi angoli solidi, e dei tre angoli piani, che essi formano.

Soluzione. Sia la piramide $ABCD$, e sia

$$BC = f \qquad BCA = p$$
$$CD = g \qquad ACD = q$$
$$AC = c \qquad BCD = r$$

sarà la solidità della piramide $=$

$$\frac{1}{6} cgf \sqrt{(1 - \cos.^2 p - \cos.^2 q - \cos.^2 r + 2 \cos. p \cos. q \cos. r)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\, cgf \sqrt{(\text{sen.}\,\frac{p+q+r}{2}\,\text{sen.}\,\frac{p+q-r}{2} \times}$$

$$\sqrt{\text{sen.}\,\frac{p-q+r}{2}\,\text{sen.}\,\frac{q+r-p}{2})}$$

$$= \tfrac{1}{6}\, cgf \sqrt{[(\cos.(r-p)-\cos.q)(\cos q-\cos.(r+p))]}.$$

Dimostr. *Dalla Dimostr. del Prob. VII, Lib. V fatti i debiti cangiamenti, si ha*

$$AO = \frac{\sqrt{(AC^2\,\text{sen.}\,r^2 - CN^2 - CM^2 + 2CN\,CM\cos.r)}}{\text{sen.}\,r};$$

pei triangoli retti ANC, AMC *si ha*

$CN^2 = AC^2 \cos.^2 q$,

$CM^2 = AC^2 \cos.^2 p$; *dunque*

$$AO = \frac{AC}{\text{sen.}\,r}\sqrt{(1-\cos.^2 r-\cos.^2 q-\cos.^2 p + 2\cos.r\cos.p\cos.q)},$$

e la solidità della piramide

$$= \frac{1}{2.3}\, AO \,.\, BC \,.\, CD\ \text{sen.}\,r$$

fatte le sostituzioni diverrà =

$$\tfrac{1}{6}\, gfc\sqrt{(1-\cos.^2 p-\cos.^2 q-\cos.^2 r + 2\cos.p\cos.q\cos.r)} \ldots = $$

$$\tfrac{1}{3}\, cgf\sqrt{(\text{sen.}\,\frac{p+q+r}{2}\,\text{sen.}\,\frac{p+q-r}{2}\times}$$

$$\sqrt{\text{sen.}\,\frac{p-+r}{2}\,\text{sen.}\,\frac{q+r-p}{2})}.$$

Da qui deducesi, che di tre angoli piani componenti un angolo solido due presi assieme sono sempre maggiori del terzo.

COROLLARIO.

Se sarà $p = q = r$, la solidità sarà $= \tfrac{1}{6}\, gfc\sqrt{(1 - 3\cos.^2 p + 2\cos.^3 p)} = \frac{gfc}{12}\sqrt{2(\cos.3p - 3\cos.2p + 3\cos.p - 1)} = \frac{gfc}{3}\sqrt{\text{sen.}\,3\,\frac{p}{2}\,.\,\text{sen.}^3\,\frac{p}{2}}$.

PROBLEMA IX.

Misurare la solidità d'un corpo che ha due basi opposte ABCD, abcd (*fig.* 100) *parallele cogli angoli tutti sporgentisi, e quattro facce laterali* ABba, BCcb, CDdc, DAad *piane poste comunque.*

Soluzione 1. Si misurino due angoli opposti nelle basi, per esempio B e D, che saranno rispettivamente eguali agli angoli b e d; e misurino pure tutti i lati nelle due basi, e l'altezza del corpo, ossia la distanza delle basi parallele; la quale si chiami *P*. Si avrà la solidità

$$= \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, ABC \,[\, AB\,(BC + \tfrac{1}{2} bc) + ab\,(bc + \tfrac{1}{2} BC)\,]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, ADC \,[\, CD\,(DA + \tfrac{1}{2} da) + cd\,(da + \tfrac{1}{2} DA)\,].$$

Dimostr. *Facciansi le due sezioni* MNPQ, mnpq *parallele alle basi, ed infinitamente vicine, s'abbassino dall'ongolo* b, *o qualunque le due* bX, bZ *una perpendicolare sopra la base, l'altra perpendicolare sopra il lato* AB *della medesima. I due punti, ove la base, e cadauna sezione è incontrata da queste due linee s'uniscano colle parallele* ZX, ϕu, ΦU *nei detti piani. Per costruzione del solido essendo ciascuna faccia laterale del medesimo un trapezio, si avrà il valor analitico di ciascun lato della sezione* MNPQ *così. Nel trapezio* ABab, bZ *sarà la distanza dei due lati paralleli* AB, ab, *perciò*

$(AB + ab)\,\tfrac{1}{2} \,.\, bZ = (MN + ab)\,\tfrac{1}{2} \,.\, bU + (MN + AB)\,\tfrac{1}{2}\, UZ$ . . . . *da qui*

$$MN = \frac{AB \,.\, bU + ab \,.\, UZ}{bZ},$$ *ovvero, poichè*

$(bZ : bU : UZ :: bX : b\Phi : \Phi X)$,

$$MN = \frac{AB \,.\, b\Phi + ab \,.\, \Phi X}{bX},$$ *e così degli altri lati*;

Si chiami $AD = G$, $DC = F$, $CB = E$, $AB = K$, $ad = g$, $dc = f$, $cb = e$, $ab = k$, $bX = P$, $b\,\Phi = y$, $\Phi\phi = dy$, $\Phi X = P - y$, *onde*

$$MN = \frac{Ky + k\,(P - y)}{P} = \frac{y\,(K - k) + kP}{P}$$

$$PQ = \frac{Fy + f\,(P - y)}{P} = \frac{y\,(F - f) + fP}{P}$$

$$NP = \frac{Ey + e\,(P - y)}{P} = \frac{y\,(E - e) + eP}{P}$$

$$MC = \frac{Gy + g\,(P - y)}{P} = \frac{y\,(G - g) + gP}{P}.$$

Supposto ora il quadrilatero MNPQ *diviso in due triangoli* MNP, MQP. *Dal num. 2, Prob. I, Lib. III, s'avrà area*

$MNPQ = \tfrac{1}{2}\, MQ.PQ \,\text{sen.}\, MQP + \tfrac{1}{2}\, MN.NP \,\text{sen.}\, MNP$

ove sostituiti i valori analitici dei lati, s'avrà nuovamente area

$$MNPQ = \tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\, MQP \,[\frac{y(G - g) + gP}{P}]\,[\frac{y(F - f) + fP}{P}]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\, MNP \,[\frac{y\,(K - k) + kP}{P}]\,[\frac{y(E - e) + eP}{P}];$$

quest' area moltiplicata per l'altezza infinitesima $\Phi\phi = dy$ *darà la solidità del prismetto infinitesimo* MNPQmnpq, *ossia differenziale del* *solido* abcdMNPQ =

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{sen. MQP}}{P^2}\,[y^2dy(G-g)(F-f)+ydy(F-f)gP$$

$$+\,ydy(G-g)fP+fgP^2dy]$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\frac{\text{sen. MNP}}{P^2}\,[y^2dy(K-k)(E-e)+$$

$$ydy(E-e)kP+ydy(K-k)eP+ekP^2dy].$$

Solido abcdMNPQ

$$=\frac{1}{2}\,\text{sen MQP}\,[\frac{(G-g)(F-f)}{P^2}\int y^2dy+$$

$$\frac{(F-f)gP}{P^2}\int ydy+\frac{(G-g)fP}{P^2}\int ydy\ \frac{fgP^2}{P^2}\int dy]$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\text{sen. MNP}\,[\frac{(K-k)(E-e)}{P^2}\int y^2dy+$$

$$\frac{(E-e)kP}{P^2}\int ydy+\frac{(K-k)eP}{P^2}\int ydy+\frac{ekP^2}{P^2}\int dy]$$

$$=\frac{1}{2}\,\text{sen. MQP}\,[\frac{(G-g)(F-f)y^5}{3P^2}+$$

$$\frac{(F-f)gP}{2P^2}y^2+\frac{(G-g)fP}{2P^2}y^2+\frac{fgP^2}{P^2}y]$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\text{sen MNP}\,[\frac{(K-k)(E-e)y^3}{3P^2}+$$

$$\frac{(E-e)kPy^2}{2P^2}+\frac{(K-k)ePy^2}{2P^2}+\frac{ekP^2y}{P^2}]$$

non s'aggiunge costante, poichè svanendo la y, *svanisce pure il solido, dunque* cost. = o. *Fa-*

cendo y = P, *riducendo i termini, e sostituendo le linee alle lettere, e ricordandosi, che*
ang. MQP = ang. ADC,
ang. MNP = ang. ABC, *avremo solido*

$$\text{abcdABCD}=\frac{1}{2}\,P\ \text{sen. ADC}\,[CD(DA+\tfrac{1}{2}da)$$

$$+\,cd\,(da+\tfrac{1}{2}DA)]+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{6}P\ \text{sen. ABC}\,[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)].$$

Scolio I.

Se si concepisce che la diagonale che passa per *a* e *c*, radesse le due *aA*, *cC* stando sempre in un piano parallelo alle basi finchè venisse in *AC*; essa dividerebbe il solido in due parti, delle quali quella che contiene l'angolo *ABC* avrebbe per misura della sua solidità

$$\frac{1}{6}P\,\text{sen.}ABC\,[AB(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab(bc+\tfrac{1}{2}BC)]$$

e l'altra che contiene l'angolo *ADC* sarebbe misurata dall'altra espressione

$$\frac{1}{6}P\,\text{sen.}\,ADC\,[CD(DA+\tfrac{1}{2}da)+cd\,(da+\tfrac{1}{2}DA].$$

Se le *Aa*, *Cc* non sono nello stesso piano, la superficie descritta dal movimento della diagonale *ac* non sarà un piano.

Quindi si ha un metodo di misurare la solidità d'una specie di piramide triangolare troncata, che ha le due basi ABC, abc parallele, e due facce piane $ABba$, $CBbc$, e la terza $ACca$ o piana o no; ma però tale, che ogni sezione del solido, che si faccia parallela alle basi riesca anch' essa un triangolo rettilineo. La sua solidità è espressa dalla prima delle due formule poste qui sopra.

Scolio II.

Se due angoli solidi, per esempio a e b coincidessero, e che per conseguenza due facce $ABba$, $dcba$ di quadrilatere diventassero triangolari, basterà nell'espressione della solidità porre $ab = 0$.

Soluzione 2. Vedi lo Scolio del Probl. XI.

PROBLEMA X.

Misurare la solidità d'un corpo che ha tutte le condizioni del Problema precedente, se non che ha un angolo nelle basi rientrante, per esempio l'angolo DCB (*fig.* 101).

Soluzione 1. Se si misurino come nella Soluzione 1. del Problema IX que' due angoli opposti nelle basi che sono entranti sporgentisi, come

ADC, ABC, e sia la distanza delle due basi parallele $= P$, si avrà la sua solidità espressa dalla stessa formula del Problema precedente IX.

Soluzione 2. Se si misurino i due angoli opposti uno de' quali è sporgentisi come DAB, e l'altro rientrante come DCB, l'espressione della solidità sarà analoga, se non che il seno dell'angolo rientrante avrà il segno —, e si avrà la solidità

$$= \tfrac{1}{6} P \operatorname{sen.} DAB \, [DA(AB + \tfrac{1}{2}ab) + da(ab + \tfrac{1}{2}AB)]$$
$$- \tfrac{1}{6} P \operatorname{sen.} DCB \, [DC(CB + \tfrac{1}{2}cb) + dc(ab + \tfrac{1}{2}CB)].$$

Soluzione 3. Vedi lo Scolio del Problema XI.

Scolio.

Nei problemi precedenti è stato indifferente prendere un angolo per esempio ABC (fig. 100) del poligono $ABCD$, ovvero il suo supplemento, essendovisi impiegato il seno, il quale è lo stesso per l'angolo e pel suo supplemento. Nei problemi seguenti quando si nominerà un angolo d'una base per via d'una lettera, per esempio l'angolo B della base $ABCD$, s'intenderà supplemento dell'angolo ABC, ossia la deviazione del lato AB dal lato BC, appunto come nella Poligonometria piana. Non occorrerà poi mai d'impiegare altri angoli, che gli angoli piani delle basi opposte e parallele.

PROBLEMA XI.

Misurare la solidità d'un corpo che ha due basi opposte ABCD, abcd (*fig.* 100) *parallele cogli angoli tutti sporgentisi; tre facce laterali piane* ABba, BCcb, CDdc *poste comunque, e la quarta faccia laterale* ADda *o piana, o almen tale, che ogni sezione del corpo parallela alle basi si tagli con essa in una linea retta.*

Soluzione. Chiamando P l'altezza del corpo, ossia la distanza delle due basi parallele, sarà la sua solidità

$$= \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, B [AB\,(BC + \tfrac{1}{2} bc) + ab\,(bc + \tfrac{1}{2} BC)]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}\, C [BC\,(CD + \tfrac{1}{2} cd) + bc\,(cd + \tfrac{1}{2} CD)]$$
$$+ \tfrac{1}{6} P \,\text{sen.}(B + C) [AB\,(CD + \tfrac{1}{2} cd) + ab(cd + \tfrac{1}{2} CD)].$$

Dimostr. *Ritenute le medesime denominazioni delle linee, ed i stessi valori analitici dei lati, che nel Prob. IX si trovi per il Prob. VIII della Poligonometria piana l'area della sezione quadrilatera* MNPQ, *data per via dei tre lati* MN, NP, PQ *escluso quello nella faccia eccettuata, e per via degli angoli* N, P *rispettivamente eguali agli angoli* B *e* C;

tal area $MNPQ = \tfrac{1}{2} MN \,.\, NP \,\text{sen.}\, B + \tfrac{1}{2} NP \,.\, PQ \,\text{sen.}\, C + \tfrac{1}{2} MN \,.\, QP \,\text{sen.}\, (B + C)$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\frac{y\,(K - k) + kP}{P}\right] \left[\frac{y\,(E - e) + eP}{P}\right] \text{sen.}\, B +$$
$$\tfrac{1}{2} \left[\frac{y\,(E - e) + eP}{P}\right] \left[\frac{y\,(F - f) + fP}{P}\right] \text{sen.}\, C$$
$$+ \tfrac{1}{2} \left[\frac{y\,(K - k) + kP}{P}\right] \left[\frac{y\,(F - f) + fP}{P}\right] \text{sen.}\,(B + C),$$

questa moltiplicata per dy, *darà il prismetto infinitesimo* mnpqMNPQ *elemento del solido indefinito* abcdMNPQ =

$$\tfrac{1}{2} \text{sen.}\, B \left[\frac{(K - k)(E - e)}{P^2} y^2 dy + \frac{(K - k)\, eP}{P^2} y dy + \frac{(E - e)\, kP}{P^2} y dy + \frac{ekP^2 y}{P^2} dy\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2} \text{sen.}\, C \left[\frac{(E - e)(F - f)}{P^2} y^2 dy + \frac{(E - e)\, fP}{P^2} y dy + \frac{(F - f)\, eP}{P^2} y dy + \frac{efP^2}{P^2} dy\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2} \text{sen.}\, (B + C) \left[\frac{(K - k)\,(F - f)}{P^2} y^2 dy + \frac{(K - k)\, fP}{P^2} y dy + \frac{(F - f)\, kP}{P^2} y dy + \frac{fkP^2}{P^2} dy\right],$$

integrando s' avrà solido abcdMNPQ $=$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,B\,[\frac{(K-k)(E-e)}{3P^2}y^3+\frac{(K-k)eP}{2P^2}y^2+$$

$$\frac{(E-e)kP}{2P^2}y^2+\frac{k\,e\,P^2}{P^2}y\,]$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,C\,[\frac{(E-e)(F-f)}{3P^2}y^3+\frac{(E-e)fP}{2P^2}y^2+$$

$$\frac{(F-f)eP}{2P^2}y^2+\frac{efP^2}{P^2}y\,]$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,(B+C)\,[\frac{(K-k)(F-f)}{3P^2}y^3+$$

$$\frac{(K-k)fP}{2P^2}y^2+\frac{(F-f)kP}{2P^2}y^2+\frac{fkP^2}{P^2}y\,].$$

Qui pure cost. $=$ o. *Facendo ormai* y $=$ P *altezza totale del solido, riducendo i termini, sostituendo alle lettere le linee, si avrà solido intero* ABCDabcd *espresso colla formula proposta nella soluzione.*

Scolio.

Si vede che questa soluzione appartiene anche al Probl. IX, nel quale la faccia *ADda* si suppone piana.

Se l'angolo *DCB* fosse rientrante, basterà nella formula della solidità scrivere — *C* in vece

di *C* (*fig.* 101), e la formula così cangiata scioglierà anche il Probl. X, nel quale la faccia *ADda* si suppone piana.

PROBLEMA XII.

Misurare la solidità d'un corpo che ha due basi ABCDE, abcde *parallele* (*fig.* 102), *e le facce intorno ad esse piane poste comunque.*

Soluzione 1. Si supponga il corpo diviso in due da una diagonale, per esempio dalla *ad*, che scorra lungo i due spigoli *aA*, *dD* stando sempre in un piano parallelo alle basi. La porzione *AEDdea* essendo l'altezza $= P$, avrà per misura della sua solidità

$$\tfrac{1}{6}P\ \text{sen.}\ E\,[\,AE\,(ED+\tfrac{1}{2}ed)+ae\,(ed+\tfrac{1}{2}ED)\,]$$

l'altra porzione *ABCDdcba* avrà la sua solidità espressa dalla formula del Problema XI.

$$\tfrac{1}{6}P\,\text{sen.}\,B\,[\,AB\,(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab\,(bc+\tfrac{1}{2}BC)\,]$$
$$+\tfrac{1}{6}P\ \text{sen.}\,C\,[\,BC(CD+\tfrac{1}{2}cd)+bc\,(cd+\tfrac{1}{2}CD)\,]$$
$$+\tfrac{1}{6}P\text{sen.}(B+C)\,[\,AB(CD+\tfrac{1}{2}cd)+ab\,(cd+\tfrac{1}{2}CD)\,].$$

Soluzione 2. Vedi la Soluzione del Problema XIII.

SCOLIO.

Se ci fossero degli angoli rientranti, si dovrebbe scrivere il segno — avanti la lettera, che esprime i loro supplementi.

PROBLEMA XIII.

Misurare la solidità di un corpo che ha due basi parallele ABCDE, abcde (*fig.* 102), *e le facce intorno ad esse tutte piane, eccetto forse una, per esempio la* AEea, *che è però tale che ogni sua sezione con un piano parallelo alle basi sia una retta.*

Soluzione. Essendo l'altezza $= P$, sarà la solidità $=$

$$\frac{P}{6}\times\left\{\begin{array}{l}\text{sen.}\,B\,[AB\,(BC+\tfrac{1}{2}bc)+ab\,(bc+\tfrac{1}{2}BC)]\\ \text{sen}\;C\,[BC\,(CD+\tfrac{1}{2}cd)+bc\,(cd+\tfrac{1}{2}CD)]\\ \text{sen.}\,D\,[CD\,(DE+\tfrac{1}{2}de)+cd\,(de+\tfrac{1}{2}DE)]\\ \text{sen.}\,(B+C)[AB(CD+\tfrac{1}{2}cd)+ab(cd+\tfrac{1}{2}CD)]\\ \text{sen}\,(C+D)[BC(DE+\tfrac{1}{2}de)+bc\,(de+\tfrac{1}{2}DE)]\\ \text{sen.}(B+C+D)[AB(DE+\tfrac{1}{2}de+ab(de+\tfrac{1}{2}DE)\end{array}\right\}$$

Dimostr. *Immagininsi in questa figura fatte le medesime operazioni, che nella fig.* 100. *Si trovi col Probl. IX della Poligonometria piana l'area della variabile sezione quintilatera data per via di quattro lati, e tre angoli escludendo il lato, nella faccia eccettuata, ed i due angoli adjacenti alla medesima.*

Col medesimo processo di calcolo che nel Problema IX di questo libro si giugnerà alla formula prescritta per la solidità del solido proposto.

SCOLIO I.

Se ci saranno degli angoli rientranti, si noteranno col segno negativo.

SCOLIO II.

Se due angoli vicini coincideranno, si annullerà nelle formule il lato che li congiunge.

SCOLIO III.

Da questi esempj apparisce la regola che si deve tenere per ogni altro caso di maggior numero di angoli. Si confrontino le formule poste negli esempj antecedenti colle formule che somministra la poligonometria per avere la superficie delle due basi parallele, e si rileverà facilmente la soluzione del seguente

PROBLEMA GENERALE.

Esprimere immediatamente la solidità di qualunque corpo che abbia due basi parallele, e le facce laterali intorno ad esse basi tutte piane eccettuatane una al più, la quale però abbia anch'essa la condizione di avere una retta per comune sezione con qualunque piano parallelo alle basi.

Soluzione. Si trovi colla Poligonometria piana l'espressione dell'area delle basi per via dei lati e degli angoli omettendo il lato che è nella faccia eccettuata, e i due angoli adjacenti.

Alla somma di queste due basi si aggiunga la somma di altre due basi formate a parte dalle due prime col sostituire in ogni prodotto di due lati in vece del secondo lato preso nella stessa base la metà del lato analogo preso nell'altra base.

La somma delle quattro basi si moltiplichi per un terzo dell'altezza.

Scolio I.

Se tutte le facce laterali saranno piane, si potrà per avere il calcolo più semplice supporre diviso il corpo in due parti dal moto di una diagonale che divida le basi parallele in due poligoni o di egual numero di lati, o colla differenza di un solo, la quale diagonale scorra lungo i due spigoli che tagliano stando sempre in piani paralleli alle basi. Allora si avranno due corpi della condizione del Problema Generale che avranno la faccia eccettuata comune. Si potranno adunque esprimere separatamente le due solidità, e la loro somma avrà una espressione più semplice che se il corpo non fosse stato così diviso. Una regola simile è stata data pei poligoni piani.

Scolio II.

Questo Problema si può estendere ancora più generalmente a qualunque poliedro così:

1.° Si supponga collocato il poliedro sopra una delle sue facce come base.

2.º Si conduca un piano parallelo a questa base per tutti gli angoli solidi del poliedro.

In tal guisa si sarà diviso il poliedro in tanti altri, ciascuno de' quali avrà le condizioni di questo Problema Generale. Misurando dunque a parte la solidità di ciascuno di essi, e facendone la somma, si avrà la solidità di tutto il poliedro a superficie piane di qualunque figura egli sia.

AGGIUNTE INEDITE

DELL'AUTORE.

Pag. 94. *Soluzione del* PROBLEMA VII.

6. Se si potranno misurare le diagonali AZ, BX, e l'angolo che fanno tra loro in C; si avrà l'area $ABZX = \frac{1}{2} AZ \,.\, BX$ sen. C.

7. Se si potranno misurare i quattro lati, e un angolo, per esempio A; si avrà la superficie

$$ABZX = \tfrac{1}{2} AB \,.\, AX \text{ sen. } A$$
$$+ \tfrac{1}{4}[(XZ+BZ)^2 - (AX+AB)^2 + 2AB.AX(1+\cos.A)] \times$$
$$[(AX-AB)^2 - (XZ-BZ)^2 + 2AB.AX(1-\cos.A)]$$

(vedi pag. 27, num. 4).

8. Se si potranno misurare i quattro lati e una retta MN (*fig.* 1, *tav. agg.*), che taglia due qualunque di essi contigui sarà l'area $ABZX =$

$$\tfrac{1}{4}\frac{AX.AB}{AM.AN}\sqrt{[(AM+AN+MN)(AM+AN-MN)}$$
$$\overline{(AM-AN+MN)(-AM+AN+MN)]} +$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(XZ+BZ)^2-(AX+AB)^2+\dfrac{AB.AX}{AM.AN}\\(AM+AN+MN)(AM+AN-MN)]\\ [(AX-AD)^2-(XZ-DZ)^2+\\ \dfrac{AB.AX}{AM.AN}(MN+AM-AN)(MN-AM+AN)]\end{array}\right\}}$$

(Vedi Soluzione antecedente).

PROBLEMA.

Nel (fig. 2) XZ inaccessibile fuori che nei due punti X e Z trovare il rapporto di XV ad VZ.

Soluzione. Siavi qualche segnale Q pel quale si possa vedere V da qualche punto P, ed essendo accessibili i due lati PX, PZ per lo stesso punto Q, si possa vedere Z da qualche punto M della PX ed X da qualche punto N della PZ sarà

$$\frac{XV}{VZ} = \frac{NP \cdot MX}{NZ \cdot MP}.$$

(Vedi *Bernoulli*, tom. IV, pag. 33).

Soluzione 16 *del* PROBLEMA I, *Libro I.*

Se si potranno misurare le due rette AC, BC (*fig.* 3), e se continuata la BC in D cosicchè sia $CD = BC$; si potrà misurare la AD; si avrà quindi

$$AB = \sqrt{(2AC^2 + 2BC^2 - AD^2)}.$$

Questo è un Corollario della Soluzione 4.

Soluzione 17 *del* PROBLEMA I.

Se sia $BV = EV = 1$; sarà

$$AB = \sqrt{(BV - AV^2 + AV \cdot BV \cdot DE^2)}$$

è un Corollario della 4.

Soluzione 10 *del* PROBLEMA IX.

Fatto retto l'ang. ZCB (*fig* 4), e l'ang. ZBD, sarà

$$CZ = \frac{CB^2}{CD}.$$

Soluzione 11.

Fatto l'angolo $ZCB = ZAD$ sarà (*fig.* 5)

$$CZ = \frac{AC \cdot CB}{AD - CB}.$$

Soluzione 9 *del* PROBLEMA III *del Libro II*, *pag.* 61, *fig.* 46.

Si voglia alla XZ condurre una parallela pel punto D. Osservato l'angolo XDZ, e trovato un altro punto C dove sia $XCD = XDZ$, e osservato l'angolo XCD, e fatto $ZDE = XCD$ sarà DE parallela alla XZ.

Tratta da M. *Manesson Mallet.*

Aggiunta sui Poliedri.

I poliedri di facce piane si possono dividere in piramidi, che si ponno misurare ciascuna così: si prenda un angolo solido nel poliedro; ad esso angolo come a vertice comune si concepiscono terminate tante piramidi quante sono le facce del poliedro, eccettuate quelle che si trovano nei lati piani dell'angolo solido. Ciascuna di queste piramidi si potrà cubare così: si misuri la superficie della sua base, cioè la faccia del poliedro, che le forma la base, e si moltiplichi pel terzo dell'altezza. Per avere l'altezza della piramide, si concepisca una piramide triangolare tetraedra che ha tre spigoli comuni colla piramide che si vuole misurare; uno spigolo che venga dal vertice comune alla base, e gli altri due spigoli, che adjacenti a questo fanno l'angolo solido alla base. Questa piramide avrà l'altezza comune che si potrà misurare. Vedi i problemi sulla misura della piramide tetraedra.

PROBLEMA.

Misurare la solidità d'un prisma tronco ABCcba (*fig.* 6), *nel quale cioè sono parallele le linee* aA, bB, cC *ma non eguali.*

Soluzione. Sopra una delle basi non parallele, per esempio sopra la base ABC, si guidino le tre perpendicolari $a\alpha$, $b\beta$, cx, e sia $a\alpha = a$; $b\beta = b$; $cx = c$, e sia l'area $ABC = A$ sarà la solidità del prisma $= \frac{A}{3}(a + b + c)$.

PROBLEMA.

Misurare la solidità del poliedro ABCDEF (*fig.* 7), *nel quale le due facce* ABCF, CDEF *sono perpendicolari fra loro e le tre* AB, FC, FD *parallele.*

Soluzione. Condotte le due AP, EQ normali alla FC, sarà la solidità del poliedro

$$\tfrac{1}{6}\, AP \,.\, EQ\, (AB + FC + ED).$$

Quando tutti gli angoli di un triangolo possono essere osservati, e si tratta di trovare un suo lato inacessibile, è meglio formare se si può un triangolo equilatero; quando non si possono osservare che due lati, è meglio farli ciascuno di gradi 45.

Vedi un'eccellente Memoria del Gen. *Roy's. Philosof. Transact.* 1787, vol. 77, Part. I, pag. 189 e 190, dove dà un'ottima regola di misurare una lunghezza per via di una serie di triangoli equilateri alternativi, col qual mezzo si ha la lunghezza AB (*fig.* 8) moltiplicando un lato misurato di essi triangoli per la metà del numero di essi.

La misura che ha fatto questo Capitano per mezzo della base di *Hounslow-Heath* sino a *Dover* all'oggetto di unire la specola di Greenwich con quella di Parigi è stimata un capo d'opera di precisione da *Lalande* nel *Journal des Sciences*.

TEOREMA.

Nel poliedro prismatico troncato $ABCDEF$ (*fig.* 9) nel quale i tre spigoli AB, CF, DE sono paralleli, la solidità è eguale ad un sesto del prodotto della somma dei tre spigoli paralleli nella distanza di uno di essi dal piano opposto moltiplicata nella larghezza di esso piano, ossia

$$= \tfrac{1}{6}\,(AB + FC + ED)\; PQ\,.\,MN.$$

Corollario al PROBLEMA VIII, *pag.* 169.

Se sarà $p = q = r$, la solidità sarà

$$\tfrac{1}{6}\, bcd \sqrt{(1 - 3\cos.^2 p + 2\cos.^3 p)}$$

$$= \frac{bcd}{2}\sqrt{2(\cos.3p - 3\cos.2p + 3\cos.p - 1)}$$

$$= \frac{bcd}{3}\sqrt{\mathrm{sen}.\,3\frac{p}{2}\,\mathrm{sen}.^3\frac{p}{2}}$$

Ivi si avrà

$$\cos.BDC = \frac{d^2 + bc\,.\cos.p + bd\cos.q + cd\cos.r}{\sqrt{[(d^2 + b^2 - 2bd\cos.q)(d^2 + c^2 - 2cd\cos.r)]}}$$

$b = c = d$ si avrà

$$\cos.BDC = \frac{1 + \cos.p + \cos.q + \cos.r}{4\,\mathrm{sen}.q\,\mathrm{sen}.r}.$$

pi che hanno qualche regolarità e del modo di misurare la solidità loro.

rova presso tutti gli autori il modo di mi- il cubo, il prisma, la piramide o intera o ta. Ma se si tratti di misurare un solido n sia alcuno di questi, si tiene subito per are, e qualora sia terminato da superficie si dà il metodo per ridurlo in tante pira- misurando la solidità delle quali e som- le si ha in fine la solidità di tutto il corpo. sono molti corpi, ne' quali si può consi- utilmente qualche regolarità, benchè non nè prismi nè piramidi, e ricavare da questa orzione di regolarità dei metodi onde avere più speditamente l'espressione della loro tà. E in primo luogo:

Se si avrà un prisma tronco triangolare ba (*fig.* 10), cioè tale, che le sue due basi ABC, iangolari non sieno parallele, essendo però pa- i tra loro i tre spigoli Aa, Bb, Cc; se si calc-

all'oggetto di unire la specola di Greenw
quella di Parigi è stimata un capo d'o
precisione da *Lalande* nel *Journal des S*

TEOREMA.

Nel poliedro prismatico troncato $ABCDE$
nel quale i tre spigoli AB, CF, DE son
leli, la solidità è eguale ad un sesto del p
della somma dei tre spigoli paralleli nella
di uno di essi dal piano opposto molt
nella larghezza di esso piano, ossia

$= \frac{1}{6} (AB + FC + ED)\ PQ\ .\ MN$

Corollario al PROBLEMA VIII, *pag.* 1

Se sarà $p = q = r$, la solidità sarà

$\frac{1}{6} bcd \sqrt{(1 - 3 \cos.^2 p + 2 \cos.^3 p)}$

$= \frac{bcd}{2} \sqrt{2(\cos. 3p - 3\cos. 2p + 3\cos. p - 1}$

$= \frac{bcd}{3} \sqrt{\text{sen.}\ 3 \frac{p}{2} \text{sen.}^3 \frac{p}{2}}$

Ivi si avrà

$\cos. BDC = \frac{d^2 + bc\ .\ \cos.\ p + bd \cos.\ q + cd \cos}{\sqrt{[(d^2 + b^2 - 2bd \cos.\ q)(d^2 + c^2 - 2cd}}$

se sia $b = c = d$ si avrà

$$\cos.\ BDC = \frac{1 + \cos.\ p + \cos.\ q + \cos.\ r}{4\ \text{sen.}\ q\ \text{sen.}\ r}.$$

Dei corpi che hanno qualche regolarità e del modo di misurare la solidità loro.

Si trova presso tutti gli autori il modo di misurare il cubo, il prisma, la piramide o intera o troncata. Ma se si tratti di misurare un solido che non sia alcuno di questi, si tiene subito per irregolare, e qualora sia terminato da superficie piane, si dà il metodo per ridurlo in tante piramidi, misurando la solidità delle quali e sommandole si ha in fine la solidità di tutto il corpo. Ma ci sono molti corpi, ne' quali si può considerare utilmente qualche regolarità, benchè non sieno nè prismi nè piramidi, e ricavare da questa loro porzione di regolarità dei metodi onde avere molto più speditamente l'espressione della loro solidità. E in primo luogo:

1.° Se si avrà un prisma tronco triangolare $ABCcba$ (*fig.* 10), cioè tale, che le sue due basi ABC, abc triangolari non sieno parallele, essendo però paralleli tra loro i tre spigoli Aa, Bb, Cc; se si caleranno sopra una delle basi, per es. sopra ABC, le tre perpendicolari $a\alpha$, $b\beta$, cx, le quali si chiamino a, b, c, e la base ABC si chiami A, si avrà la solidità di questo prisma tronco espresso dalla formula

$$\frac{A}{3}(a+b+c).$$

2.° Se si avrà un prisma tronco parallelogrammo $ABCDdabc$ (*fig.* 11), cioè tale che le sue due basi parallelogrammiche $ABCD$, $abcd$ non sieno parallele fra loro, essendo più paralleli gli spigoli Aa, Bb, Cc, Dd, se si caleranno sopra una delle basi, per esempio sopra $ABCD$ due perpendicolari da due angoli opposti nel parallelogrammo opposto $abcd$, le quali perpendicolari sieno, per es. $a\alpha=a$, $cx=c$; e la base $ABCD$ si chiami A; sarà la solidità di questo prisma espressa dalla formula

$$\frac{A}{2}(a+c).$$

3.° Lo stesso succederà se la base sia un qualunque poligono regolare di un numero pari di lati, ed a, e, c sieno due angoli opposti. Chiamando A la base, ed a, e, c le due perpendicolari calate da quegli angoli, la formula ultima servirà ad esprimere ancora la solidità di questo prisma.

4.° Un corpo $ABCDEFG$ (*fig.* 12) terminato da due triangoli opposti AFD, BGC, e da tre quadrilateri $ABCD$, $CDFG$, $FCBA$, sarà sempre il tronco di una piramide $BAHFGC$ triangolare il di cui vertice H è nel concorso di due rette qualunque BA, GF che congiungono gli angoli de' triangoli opposti. Ciò posto se i tre angoli al punto H si chiamino p, q, r e i tre lati HB, HC, HG si chiamino b, c, g, i tre lati HA, HF, HD si chiamino a, f, d, e sia la formula

$$\sqrt{(1-\cos.^2p-\cos.^2q-\cos.^2r+2\cos.p\cos.q\cos.r)}=F$$

si avrà la piramide $HBCG=\frac{1}{6}\,bcg\,.\,F$

la piramide $HADF=\frac{1}{6}\,afd\,.\,F$

sia $AB=\beta$; $DC=y$; $FG=\delta$ sarà

$$a=b-\beta;\ f=c-y;\ d=g-\delta,$$

e però sarà la solidità del corpo $=$

$$\frac{F}{6}(bcg-(b-\beta)(c-y)(g-\delta))=\frac{F}{6}(bcg-bcg+bcd+byg)$$

PROBLEMA.

Misurare la solidità del prisma tronco ABCDdabc *retto* (*fig* 13).

Soluzione. Chiamando B l'area ABC, D l'area ADC e fatto $Aa = a$

$$Bb = b$$
$$Cc = c$$
$$Dd = d$$

si avrà la solidità del prisma

$$= \frac{B(a+b+c)+D(a+d+c)}{3}.$$

SCOLIO.

Quindi si può raccogliere quanto sia erronea la maniera di misurare questa sorta di solidi usata dagli Ingegneri di Pavia, la quale computa la solidità dalla formula

$$\frac{(B+D)(a+b+c+d)}{4}.$$

Perchè le due formule convenissero, converrebbe che fosse

$$4(B+D)(a+c)+4Bb+4Dd=3(B+D)$$
$$(a+c)+3(B+D)(b+d) \text{ cioè}$$
$$(B+D)(a+c)+Bb+Dd=3Bd+3D.b\,(A).$$

Ora stando costanti le quantità B, D, b e d; possono variarsi a e c in guisa che non sia eguale l'aumento di una alla diminuzione dell'altra, cosicchè si varj $a+c$. Si supponga che stando tutto il resto a suo luogo, si muova il piano $adcb$ intorno all'asse bd, e che nello stesso tempo l'asse bd non tagli per metà la retta ac.

Questo appunto sarà il caso espresso.

Sia (*fig.* 14) $AC = b$

$$BP = a$$
$$AM = m$$
$$Bb = d$$
$$Cn = n$$

e sia il prisma tronco retto sulla base ABC, sarà l'area $amnc = ac \times \frac{am+cn}{2} = b\,\frac{(m-d)+(n-d)}{2}$;

si moltiplichi questa per $\frac{a}{3}$, e si avrà la solidità

della piramide $amncb = ab\,\frac{(m-d)+(n-d)}{2\,.\,3}$;

aggiungete a questa la solidità del prisma $AabcCB$,

che è $= \frac{ab}{2}d$, ed avremo per la solidità del prisma

tronco $\frac{ab}{2\,.\,3}\,[\,3d+(m-d)+(n-d)\,]$, e chiamando A l'area della base ABC sarà la solidità del prisma tronco

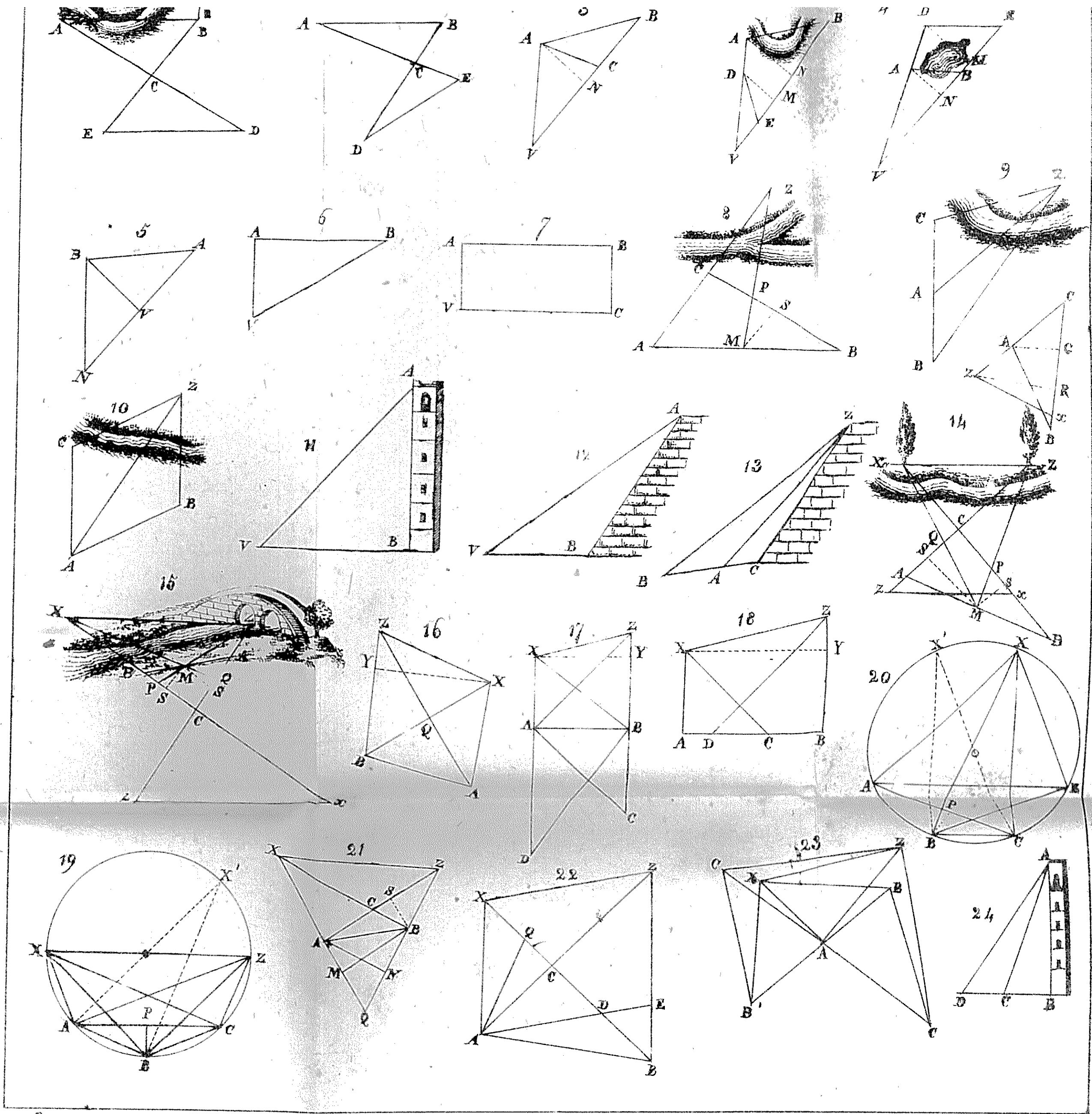
$$\frac{A}{3}[3d+(m-d)+(n-d)]=\frac{A}{3}(m+n+d).$$

Se il prisma è obbliquo, restando la stessa base A, e le stesse altezze m, n, d, avrà la stessa solidità.

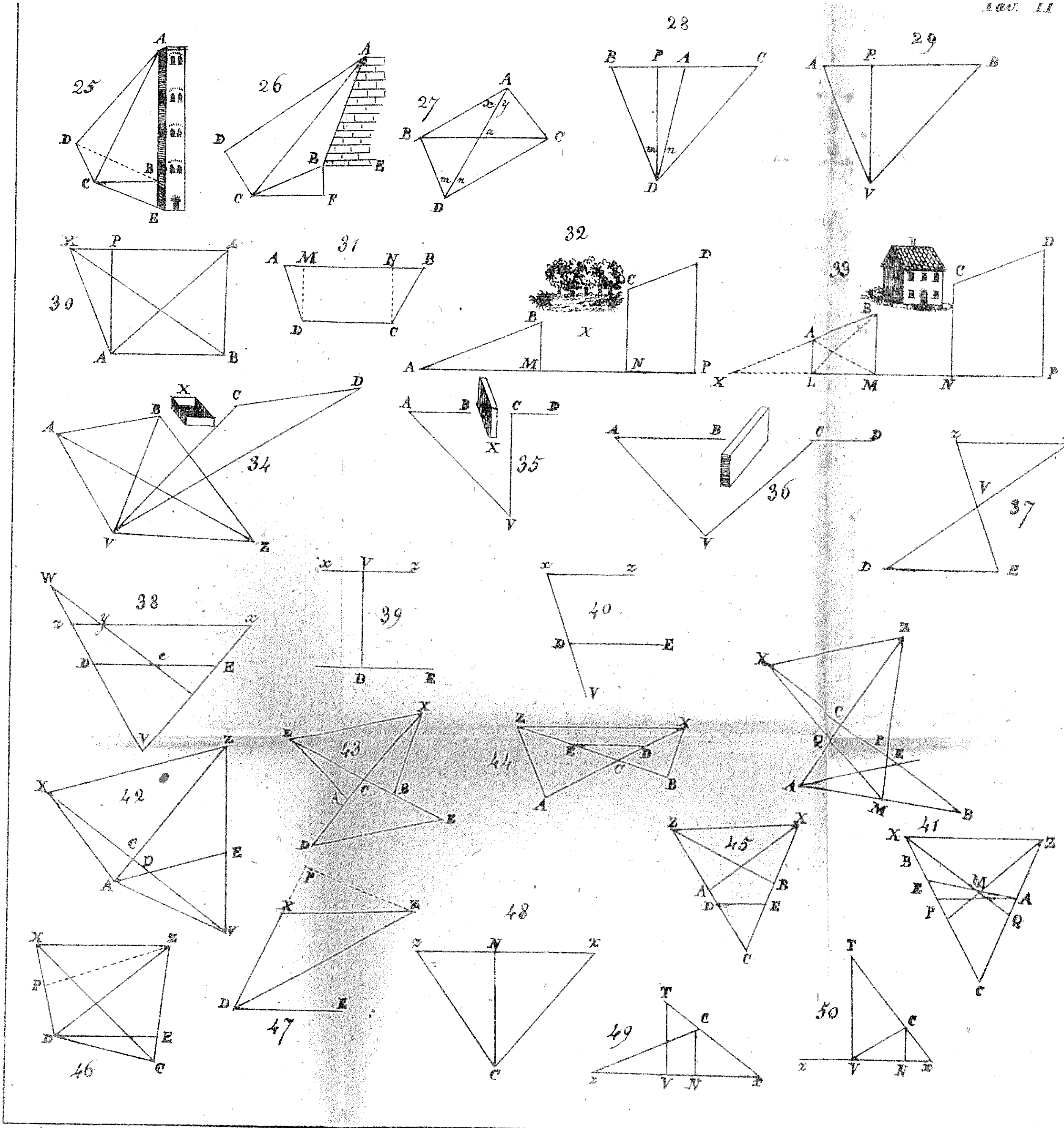
FINE.

INDICE.

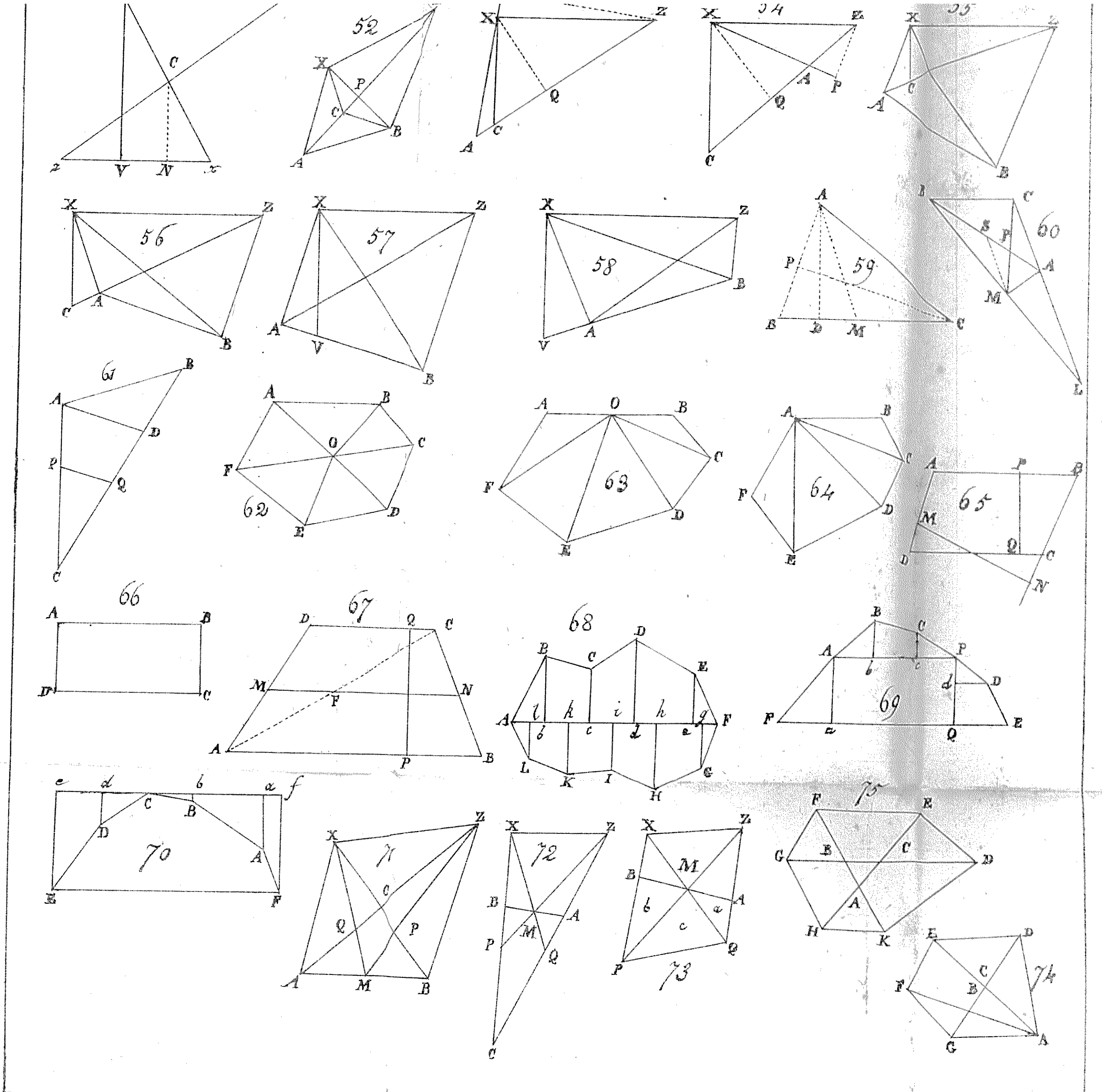
ERRORI			CORREZIONI
pag. 19	l. 19	AC_2	AC^2
„ 21	„ 2	qua	quà
„ 22	„ 10	XAB	BAZ
„ 24	„ 6	Xy	XY
„ ivi	„ 8	Xy^2	XY^2
„ 32	„ 7	*mezzo*	*messo*
„ 40	„ 6	cotang. $(B-n$	cotang. $(B-n)$



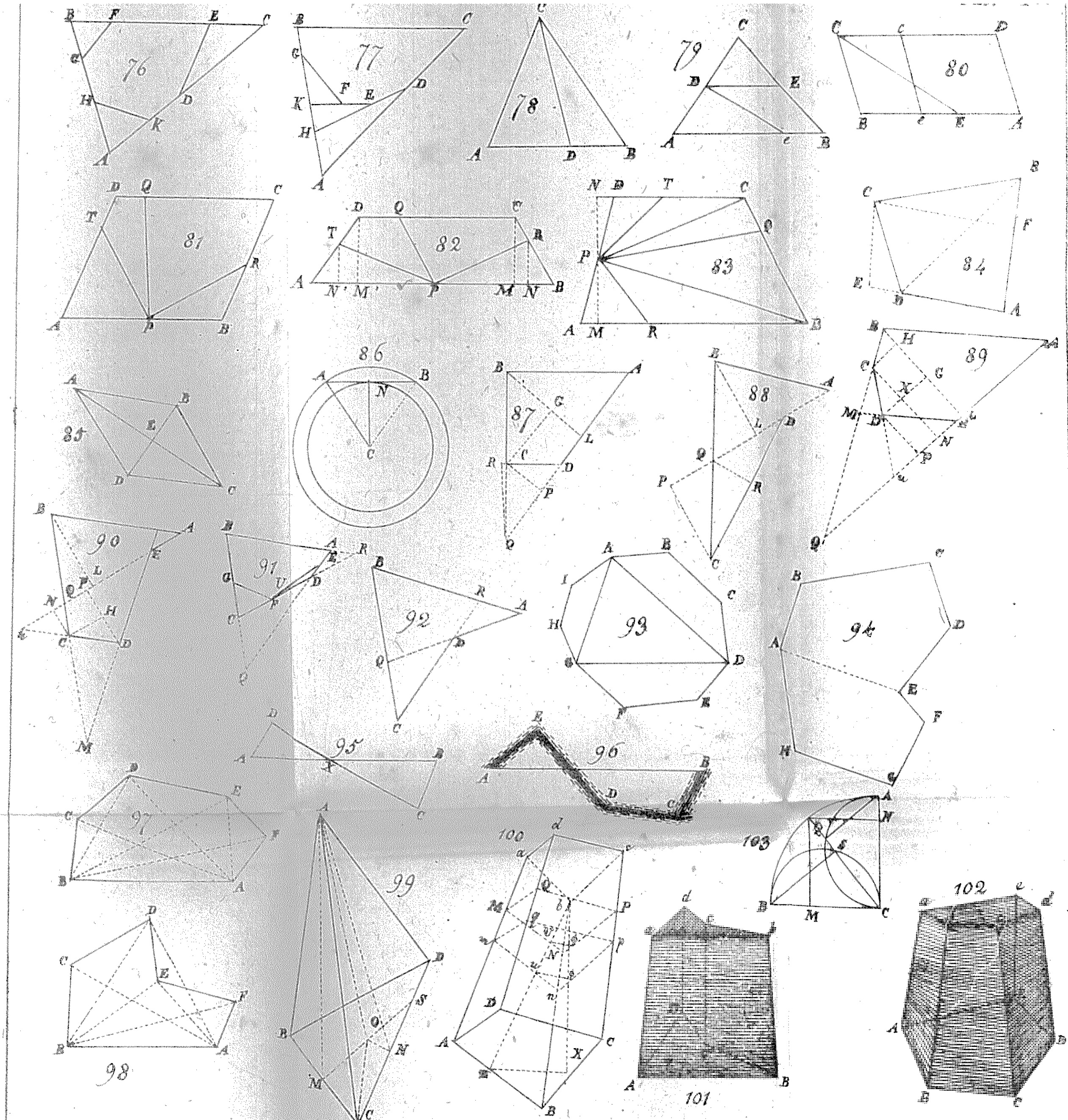
Lit. Silvestri



Lit. Silvestri



Lit. Silvestri.



Lit. Pelissier