DE' PRINCIPJ
DELLA MECCANICA
LETTERE

DI

VINCENZO RICCATI

AL P. VIRGILIO CAVINA

Professore delle Matematiche in Cagliari di Sardegna.

IN VENEZIA MDCCLXXII.

NELLA STAMPERIA COLETI

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

PRINCIPJ
DELLA MECCANICA.

Dell'Inerzia de' Corpi e dell'Esistenza delle Potenze.

LETTERA PRIMA.

Comunque molte, e gravi sieno in quest'anno le occupazioni, che m'allontanano da miei studj; pure tali sono l'obbligazioni, che vi professo, e tanto l'amor, che vi porto, che non posso a meno di non impiegare qualche ritaglio di tempo libero per soddisfare alle pressanti vostre domande. Voi mi richiedete in qual guisa io stabilisca i sicuri principj della Meccanica senza mai urtare in petizion di principio: vizio difficilissimo da evitarsi, e da cui non so se vadano illesi i più accreditati Scrittori. Non rimanendo voi, siccome mi scrivete, soddisfatto a pieno delle cose, che ritrovate scritte ne' libri loro, ne dubitate al pari di me. Se converrà moltiplicare le lettere, attribuitelo alla dilicatezza dell' impresa, a cui per ubbidire a voi, P. Virgilio Riveritissimo, prontamente m'accingo.

I vecchi Filosofi, che fiorirono innanzi al secolo decimo settimo, conobbero chiaramente, che non può un corpo passare dallo stato di quiete a quello di movimento, quando non l'obblighi una cagione proporzionale alla mutazione, che dee soffrire: ma parlando de' corpi in movimento furon d'avviso, ch' il moto per se medesimo divenisse più languido, e ch' il corpo a poco a poco s'avvicinasse, e si riducesse alla quiete. Avendo per cotal pregiudizio ottenebrata la mente, non è maraviglia, se non abbiano intorno al movimento de' corpi scoperta alcuna cosa di vero, e se collo spiegare i fenomeni non altro fatto abbiano, che renderli più inviluppapati, e più oscuri. Giuseppe Ballo in una operetta stampata in Padova l'anno 1635., c'ha per titolo *Dimostrazione del moto naturale de' corpi*, per quanto io sappia, è stato il primo, ch' abbia sostenuta la vera sentenza, cioè che il corpo conserva in perpetuo il movimento, che ha, quando non v'abbia una cagione, che lo minori, o l' accresca. Di questo principio si sono pure serviti i due sommi uomini Galileo, e Cartesio, seguitati concordemente da tutti i Matematici fioriti dappoi.

Questa verità viene evidentemente comprovata dall'infallibile principio dell' indifferenza. Imperciochè il corpo, che supponesi esser in quiete, può dal suo stato passare a qual si sia stato di movimento, e ciò per infinite serie di movimenti intermedj. Affinchè questo meglio s' intenda, rappresenti la linea A B (*Fig.* 1.) un qualunque tempo, o spazio dato: non è egli manifesto, ch' un corpo, il quale riposa in A, nel punto B può essere dotato di qualunque movimento e maggiore e minore? di più espresso il movimento per la linea B C normale all' A B, non è manifesto, che lo stesso corpo dalla quiete al movimento B C può passare per infiniti movimenti intermedj, che vengano rappresentati per l' ordinate d' infinite curve A C? dunque in un qualunque siasi tempo, o spazio dalla quiete può trasferirsi ad infiniti movimenti, e ciò per infinite serie di movimenti intermedj, a quali tutti è indifferentissimo: dunque non può il corpo partirsi dal suo riposo, se non v' intervenga una cagione, che tolga l' indifferenza: ma tal cagione non può a meno, che non sia proporzionale alla mutazione, che segue: dunque non può un mobile passare dalla quiete allo stato di movimento, quando non ne venga costretto da una cagione proporzionale; e però senza così fatta cagione egli starà eternamente in riposo. Con questo invincibile argomento dimostrasi, ch' il mobile rimane in riposo, quando da una cagione proporzionale non sia il suo stato cangiato.

Lo stesso argomento s' applica al mobile d' un dato movimento fornito. Imperciocchè egli può egualmente passare dallo stato del movimento, che ha, allo stato d' infiniti movimenti e maggiori e minori, e ciò per infinite serie di movimenti intermedj. Sia A B (*Fig.* 2.) un tempo od uno spazio qualunque. Al principio il movimento, di cui si suppone dotato il mobile, s' esprima per la normale A E. Non è manifesto, ch' il mobile al fine del detto tempo o spazio può esser dotato di qualunque movimento o maggiore B C, o minore B C? non è manifesto, ch' il mobile può arrivare al movimento novello per infinire serie di movimenti rappresentati dall' ordinate delle curve E C, E C? Adunque il mobile è indifferente a passare dal movimento, in cui è, ad infiniti movimenti, e ciò per infinite serie di movimenti intermedj: dunque conserverà il movimento, di che è fornito, quando non v' intervenga cagione, che tolga così fatta indifferenza, la qual cagione sarà senza dubbio proporzionale alla mutazione di stato, che seguir deve. Ed ecco provato col sicuro principio dell' indifferenza, ch' il corpo mantiene lo stato suo di quiete, o di movimento, quando non sia costretto a cangiarlo da una cagione proporzionale alla mutazione di stato, che soffre. Cotal proprietà, di cui i corpi sono essenzialmente dotati, suol esprimersi col vocabolo d' Inerzia, di cui noi pure in appresso ci serviremo per brevità.

Ciò che s' è detto del cangiamento di stato, vuol dirsi similmente del cangiamento di direzione. Conciossiachè il mobile partendo dalla direzione, in cui viaggia, può passare ad infinite direzioni, alle quali ha un' indifferenza totale. Non passerà per tanto dalla sua ad altra direzione, quando non v' abbia una forza, che togliendo cotal indifferenza, sia valevole a produrre un tal cangiamento. Ma noi per ora parleremo soltanto della mutazione di stato, riserbandoci a parlare a suo luogo di quella di direzione.

Ma qui interrompendo per poco il filo del raziocinio, esponiamo la giusta idea di quella quantità, che si chiama velocità, per poter in appresso più sicuramente parlare. Rimossa ogni cagione di mutazione, dovendo il corpo in virtù della sua inerzia conservare il medesimo movimento, egli è evidente, che sarà costretto a percorrere in qual si sia tempo eguale uno spazio eguale, il qual movimento in appresso lo chiameremo equabile od uniforme. Se eguali sono gli spazj passati in tempi eguali qualunque sieno, egli è cosa facile a dimostrarvi con tutto il rigor geometrico, che gli spazj percorsi saranno sempre in ragion de' tempi, in cui si percorrono. S' io non riguardo se non il movimento equabile dello stesso corpo, questa proposizione è bastante. Ma se paragono due mobili viaggianti equabilmente bensì, ma in maniera, ch' uno in un tempo dato

dato compia uno spazio maggiore, l'altro un minore; il primo si dice più veloce del secondo, e le velocità si fissano proporzionali agli spazj nel dato tempo passati. Quindi si stabilisce la fondamentale proposizione: Le velocità di due corpi sono proporzionali agli spazj, che percorrono in tempi eguali.

Ora passiamo a determinare in qual ragione saranno le velocità co' tempi, in cui si scorrono spazj eguali. I due mobili A, B, (*Fig.* 3.) con movimenti equabili viaggino per gli spazj eguali AD, BF in diversi tempi. Si segni lo spazio BE, che venga da B passato in quel tempo, in cui A viaggia per AD. La velocità di A sarà alla velocità di B come AD a BE: ma BF, ossia AD è a BE come il tempo per BF al tempo per BE, ch' eguaglia il tempo per AD: dunque la velocità di A alla velocità di B sarà come il tempo per BF al tempo per AD: cioè a dire le velocità sono in ragion reciproca de' tempi, in cui si passano spazj eguali: e questa è la seconda proposizione.

Ma se tanto gli spazj, quanto i tempi saran disuguali, nascerà la terza più universale: Le velocità di due mobili equabilmente viaggianti sono in ragion composta diretta degli spazj passati, e inversa de' tempi, in cui si percorrono: la qual proposizione così dimostro. Sieno AD, BE gli spazj passati da due mobili AB, ne' tempi M, N. Si tagli BF eguale all' AD; e sia P il tempo, in cui B viaggia per BF. Essendo le velocità reciprocamente come i tempi in cui si passano spazj eguali, sarà la velocità di A alla velocità di B come P : M, ossia in ragion composta di P : N, e di N : M; ma P : N è come BF ossia AD a BE: dunque la velocità di A a quella di B è in ragion composta di AD a BE, e di N a M, cioè in ragion diretta degli spazj inversa de' tempi. Quindi chiamata la velocità $= u$, lo spazio $= s$, il tempo $= t$, s'avrà u proporzionale a $\frac{s}{t}$. Da tutto ciò, che abbiam detto, nasce la giusta e chiara idea della velocità, la quale altra cosa non è, se non se la relazione dello spazio passato nel moto equabile al tempo, in cui si passa. E questa idea sarà di mestieri tener in progresso stampata indelebilmente nella memoria.

Ri-

Ripigliamo ora il filo de' nostri raziocinj. Il corpo non può passare dallo stato di quiete a quello di movimento, nè dallo stato d'una velocità a quello di velocità maggiore, o minore, quando non v'abbia una cagione proporzionale alla mutazione di stato: ma di cotai mutazioni tutto giorno nè veggiamo seguir in natura: dunque nella natura vi sono cagioni atte a cangiare lo stato de' corpi. La prima proposizione è stata di sopra invincibilmente provata: della seconda una quotidiana sperienza dubitar non ci lascia; da esse evidentemente deriva la conseguenza. Quelle quantità, ch' agendo son valevoli di cangiar lo stato de' corpi, in avvenire le chiameremo Potenze, della cui esistenza il premesso sillogismo ci rende certi.

Per isgombrar ogni equivoco, che potesse render sospetta la seconda proposizione, io avverto, che non ogni apparenza di mutazione di stato prova una mutazione reale. Eccovene il caso. Il mobile A (*Fig.* 4.) conservando il suo stato viaggi equabilmente per la retta AD: egli è certissimo, che non v'ha alcuna reale mutazione di stato. Trattanto lo spettator quieto in C rimiri il corpo viaggiante. Condotta la CA normale all' AD, col raggio CA si descriva il cerchio AF, e segate Ab, b2b, 2b3b ec. eguali, si menino le Ceb, C2e2b, C3e3b ec. Egli è manifesto, che lo spettatore in C ne' tempi, in cui il mobile scorre le Ab, A2b, A3b ec., che sono in ragion aritmetica, cioè come 1, 2, 3 ec., vedrà il corpo allontanarsi da se per l'intercette eb, 2e2b, 3e3b ec., li quali crescono in maggior ragione di quel, che crescano i tempi proporzionali alle rette Ab, A2b, A3b ec.; per modo che se Ab, e l'altre parti eguali saranno infinitesime, gli spazj d'allontanamento verranno ad essere in ragion duplicata de' tempi. Adunque sembrerà allo spettatore, ch' il mobile s'allontani con moto accelerato, e che cangi stato portandosi da un moto minore ad un maggiore. Ma tal cangiamento è solo apparente, perchè in realtà lo spettatore sta in riposo, ed il mobile conserva il movimento, che ha.

Osservo però, che questo caso è accompagnato da due importantissime circostanze, cioè che lo spettatore è situato fuori di quella linea, che vien descritta dal corpo, e ch' egli riguarda non quegli spazj, per cui il mobile viaggia, ma quelli, per cui s'allontana. Se queste due circostanze non abbian luogo, l'apparente mutazione di stato invincibilmente comproverà la reale. E vaglia il vero.

Es-

Essendo lo spettatore situato in D dentro la linea, che vien descritta dal mobile, se questo cammina equabilmente, lo vedrà approssimarsi od allontanarsi per ispazj eguali in tempi eguali: dunque se gli spazj osservati son disuguali in tempi eguali, è evidente, ch'il mobile viaggia con moto accelerato o ritardato, e che per conseguenza cangia realmente stato, passando ad una velocità maggiore, o minore. Nè vi cadesse mai in pensier d'obbiettarmi, poter ciò provenire dal movimento dello spettatore. Imperciocchè se tanto il mobile, quanto lo spettatore si muove con moto equabile, equabile sarà senza dubbio il movimento apparente: dunque se questo è accelerato, o ritardato, si deduce, ch'il mobile, o lo spettatore, o amendue muovansi non equabilmente, e che per conseguenza mutino stato: dunque in natura segue mutazione di stato; lo che al presente v'è sol bisogno di dimostrare.

Lo stesso vuol dirsi, quando lo spettatore situato fuor della retta descritta dal mobile osservi non gli spazj d'allontanamento, ma gli spazj descritti. Imperciocchè se questi in tempi eguali son disuguali, chiara cosa è, ch'il mobile, o lo spettatore, o amendue, passando dalle velocità, c'hanno, a velocità maggiori o minori, cangiano stato, e che perciò si dà in natura vero cangiamento di stato. Non è qui luogo di trattare con minutezza de' movimenti apparente, e reale. A me basta per ora, che da alcune apparenti mutazioni di stato si deduca senza dubbietà intervenire in natura de' reali cangiamenti di stato; perciocchè con questo solo resta bastantemente comprovata l'esistenza delle potenze.

Io v'accordo, direte voi, che la quotidiana sperienza dimostra, ch'in natura necessariamente esistono le potenze. Ma qual cosa sono queste potenze, e qual è la natura loro? Io, e tutti i Filosofi, se vogliono usare sincerità, siamo costretti di fare una schietta confessione di non saperlo. Quanto è certa la loro esistenza, altrettanto è oscura la lor natura ed essenza; nè v'ha barlume di speranza di poterla o presto o tardi conoscere. Finchè la Fisica s'è impiegata nel ricercar l'essenza delle potenze, non ha avanzato un passo, nè scoperta una verità; ed altro non ha fatto, se non produrre ipotesi insussistenti, ed aumentare la storia dell'opinioni. Egli è vero, ch'alle potenze si sono dati de'nomi speciosi: ma questi prendonsi o dall'indole de' movimenti, ch'esse producono, o da qualche circostanza, che li accompagna. Alla potenza, che spinge i corpi verso la terra, s'è dato il nome di gravità: alla potenza, ch'apre un elastro costipato, o lo chiude distratto, s'è dato quello d'elasticità. Se due corpi s'accostano, o s'allontanano, dicesi, che son dotati d'attrazione o di ripulsione: se ad un corpo soffregato s'unisce un corpo leggiere, la potenza si chiama elettrica, perchè tal proprietà è stata nell'elettro primamente scoperta: la potenza, ch'è nella calamita di muover il ferro, dicesi magnetica: e quella, onde gli animali muovon le proprie membra, ed i corpi esterni, dicesi animale. Ma tutti questi vocaboli speciosi niente dichiarano la natura, e l'essenza delle potenze. Lasciamo dunque da parte così fatte vane ricerche, perchè all'umana intelligenza son superiori.

Ma, soggiungerete voi, mancandoci ogni fil di speranza da penetrare nella natura delle potenze, come mai ci potrà riuscire di portar innanzi la meccanica facoltà, la quale senza dubbio nelle potenze stabilisce il suo fondamento? Comunque ci sia, e ci sia per essere sempre oscura l'essenza delle potenze; pure usando d'un metodo rigoroso, e d'un sottil raziocinio possiamo acquistare, anzi acquistaremo moltissime cognizioni riguardanti il respettivo loro valore, colle quali si promuoverà la meccanica assai più di quello, ch'i principj parean promettere. Ciò vi si farà palese nelle molte lettere, ch'alla prima terranno dietro. Intanto disponetevi a spargere la semente matematica in un terreno, che per non averla conosciuta giammai con istupore l'accoglierà nel suo seno. Comandatemi, e abbiate cura della vostra sanità.

Bologna li 26. Ottobre 1770.

LETTERA II.

Della Proporzione tra i valori d' alcune Potenze, e della Natura dell' Equilibrio.

Non può, ſiccome s' è dimoſtrato, un mobile cangiare di ſtato, nè paſſare dalla quiete al movimento, nè da un movimento all' altro, quando ad eſſo non ſieno applicate potenze, della cui eſiſtenza non ci è più permeſſo di dubitare. Ma non vuolſi inverter la propoſizione, e dire: ogni qual volta al mobile ſieno applicate potenze, interviene in eſſo mutazione di ſtato. Imperciocchè può accadere, e accade ſpeſſiſſimo, ch' eſſe potenze con egual contraſto talmente ſostenganſi, onde nel mobile non ſegua mutazione di ſtato, e ſi mantenga nello ſtato, in cui è, o di quiete, o di movimento. In queſto caſo ſi può concepire, che l' effetto da alcune prodotto ſia dall' oppoſite interamente diſtrutto; e ciò non vuol dir altro, ſe non che le potenze per l' oppoſizion loro vicendevolmente impediſconſi di produrre qual ſi ſia effetto. Un tal vicendevol contraſto ſi domanda da meccanici equilibrio delle potenze.

Egli è manifeſto, che l' equilibrio non può ſuccedere, ſe non v' abbia un' egualità appartenente alle potenze contrarie, dalla quale dipenda la negazion dell' effetto. Ma qual ſia così fatta egualità, e per quali quantità coſtituita, è tuttora incertiſſimo: nè v' ha ſperanza di riſaperlo, ſe prima non ſi ſtabiliſca qualche legge d' equilibrio certa e ſicura: e queſto non ci è permeſſo d' ottenere, ſe non ci rendiam nota la proporzione tra il valor d' alcune potenze. Sebbene le potenze ſono egualmente equilibrate, o ſtian fermi, o ſi muovano i corpi, a' quali ſon applicate; pure in appreſſo ſupporremo il corpo in quiete, perchè cotal equilibrio a noſtri diſegni meglio s' affà.

Egli è vero, che m' è conceſſo di fiſſar qualche ſemplice legge d' equilibrio coll' incontraſtabil principio dell' indifferenza. Concioſſiacchè ſe concepirò applicate ad un corpo due potenze eguali e contrarie, il principio dimoſtrerà, ch' il corpo rimane quieto, e le potenze equilibrate. Di più ſe ſi concepiſca una verga rettilinea e rigida mobile intorno al punto, che la divide egualmente, ed alle ſue eſtremità applicate due potenze ad eſſa normali, ed eguali ſquiſitamente, il principio fa vedere, che v' ha equilibrio: e queſto caſo coll' indifferenza è ſtato pure da Archimede provato. Lo ſteſſo accaderà, ſe le due braccia facciano un qualunque angolo al centro del movimento, purchè le potenze facciano colle ſteſſe braccia un angolo retto, o almeno eguale. Ma gli equilibrj dedotti dal principio dell' indifferenza, quanto ſono certi e ſicuri, altrettanto ſembrano infecondi, ed inutili, nè ſervir poſſono a liberarci dall' incertezze, in cui ſiamo.

Studiamoci per tanto di ſtabilire la proporzione tra alcune potenze, nel che ci farà ſcorta lo ſteſſo principio dell' indifferenza. Ci ſerviremo di quella potenza, che ſpinge i corpi verſo la terra. Se della ſteſſa materia ſi formeranno più corpi ſimili, e perfettamente eguali, come più cubi, o più ſfere, il principio dell' indifferenza inſegna, che nella ſteſſa regione, e nella ſteſſa diſtanza dalla terra ſaranno tutti forniti della medeſima gravità: dunque la potenza d'uno alla potenza di qualunque altro ſarà in ragione d'egualità, alla potenza di due come 1 : 2, a quella di tre come 1 : 3, e così via via: anzi generalmente la gravità de' corpi in numero n ſarà a quella de' corpi in numero m come n : m. Ecco per tanto ritrovate alcune potenze, de' cui valori ſappiamo la proporzione. Si potrebbe ancora far uſo della bilancia di braccia eguali ſituata orizzontalmente, nella quale ſono evidentemente eguali i peſi, che fanno equilibrio.

Ritrovata in cotal guiſa la proporzion tra i valori d' alcune potenze, vale a dir di due peſi, ricerchiamo con una ſicura ſperienza, in quali diſtanze rimangano equilibrati. Si formi una verga rigida, la quale intorno al centro del moto, che chiamaſi ancora fulcro o ipomoclio, poſta orizzontalmente ſia in un perfetto equilibrio: dall' una parte le ſi ſoſpenda il peſo 2 ad una data diſtanza; dall' altra ſi ſoſpenda il peſo 1, il quale ſi rimuova dal fulcro fin a tanto che l' equilibrio s' ottenga: ſi ritroverà, che le diſtanze rieſcono in ragion reciproca de' peſi, perchè la diſtanza del peſo 1 ſi ritroverà doppia di quella del peſo 2. La ſteſſa ſperienza ſi verificherà, quando prendanſi peſi in altra proporzione, perchè ſi ritroveranno ſempre le diſtanze a peſi reciprocamente proporzionali. Si fiſſi

fissi adunque la prima legge, che se le potenze sono reciprocamente come le distanze dal fulcro, esse nel vette (così chiamasi la verga rigida) saranno in un perfetto equilibrio.

La natura dell' equilibrio domanda, che s' alle due potenze equilibrate una io ne aggiunga in un de' due punti di sospensione, essa infallibilmente produrrà moto: perchè contrastandosi ed equilibrandosi l' altre due, essa non n' avrà alcuna, con cui contrastare ed equilibrarsi: ma la potenza insieme coll' aggiunta sarà all' altra in maggior ragione, che la reciproca delle distanze; dunque la potenza, ch' avrà all' altra maggior ragione, che la reciproca delle distanze, infallibilmente prevalerà. Quindi si raccoglie per legittima conseguenza, che di due potenze eguali quella, ch' è applicata a maggiore distanza, prevalerà, perchè l' eguale all' eguale ha maggior ragione ch' il minore al maggiore.

La natura dell' equilibrio, siccome abbiam avvertito poco dianzi, esige una strettissima eguaglianza tra quantità, ch' appartengono alle potenze. Le semplici leggi d' equilibrio, ch' abbiam fissate, fanno vedere, che tal egualità generalmente non passa tra le potenze. La ragione salta agli occhi. Perchè se nell' egualità delle potenze fosse posta la natura dell' equilibrio, due potenze eguali farebbero sempre equilibrio, due disuguali non mai: ma per le semplici leggi testè stabilite potenze eguali non s' equilibrano, se sono in disuguali distanze, e potenze disuguali s' equilibrano, se sono in distanze reciproche: dunque nell' egualità delle potenze l' equilibrio generalmente non fondasi. Io dico, che l' equilibrio dipende dall' egualità dell' azioni delle potenze. Se vi venisse voglia di sapere quel, ch' io pensi intorno alla natura dell' azioni delle potenze, raffrenate per poco la vostra curiosità, ch' io nella terza lettera mi studierò d' appagarla. Conservatemi la vostra amicizia.

Bologna li 27. Ottobre 1770.

Dell'

LETTERA III.

Dell' Idea dell' Azioni, e dell' Eguaglianza loro nell' Equilibrio.

PEr dichiarare siccome si distinguano le potenze, e l' azioni loro, io concepisco un corpo grave sospeso da un filo, che gl' impedisce di discendere, e d' avvicinarsi alla terra. Fin ora altro non intendo, ch' una potenza di gravità applicata al corpo, a cui è direttamente contraria l' elasticità del filo, che le contrasta, e non la lascia produrre effetto di sorte alcuna. Io tronco il filo, e levo l' elasticità contraria alla gravità. Ora oltre la potenza intendo, ch' essa successivamente e continuamente replica i suoi impulsi o sollicitazioni contra del corpo, il quale è obbligato di cangiare stato. La somma e l' aggregato di cotai impulsi si vuol chiamare l' azione di tal potenza; e l' effetto ossia la mutazione di stato non alla potenza, ma all' aggregato de' suoi impulsi è proporzionale. Tre quantità per tanto si voglion distinguere, cioè la potenza considerata in se stessa, la qual pressione ancora si suol chiamare; l' azione, che è l' aggregato degli impulsi, onde la potenza spinge il corpo; la quale è in ragion composta della potenza e del numero degli impulsi; e l' effetto, ossia la mutazione di stato, che soffre il corpo, il qual effetto è in proporzione non della potenza, ma della sua azione.

Piacemi di rischiarare la distinzione tra le quantità accennate con un esempio geometrico, di cui altre volte mi son servito. All' estremità della A B (*Fig.* 5.) colloco a squadra la retta A C. Finora io non intendo altro, che la retta A C insistente ad angoli retti sovra l' A B. Io fo fluire l' A C sopra la stessa A B; ed oltre la retta A C concepisco il suo flusso, ch' è una successiva replicazione della stessa A C in qual si sia punto dell' altra A B. Con sì fatto flusso si genera la superficie rettangola A D, la quale non alla linea A C, ma al suo flusso ancora riesce proporzionale.

Alla linea C A insistente sovra l' A B debbo paragonare la gravità o la pressione applicata al corpo: e siccome nel primo caso non intendo fin ora altro, che la linea C A; così non intendo fin ora altro

altro nel secondo, se non la gravità e la pressione. Al flusso della retta C A corrisponde l'azion della gravità: e siccome concepito il flusso intendo alcuna cosa di più oltre la retta C A, cioè la sua successiva replicazione; così concepita l'azione intendo alcuna cosa di più oltre la gravità, e la pressione, cioè l'aggregato de' suoi successivi impulsi contra del corpo. Alla superficie rettangola generata col flusso della linea vuolsi metter a riscontro la mutazion dello stato seguita nel corpo: e siccome il rettangolo generato è proporzionale non alla linea C A, ma al suo flusso; così la mutazion dello stato seguita nel corpo è proporzionale non alla gravità, ed alla pressione, ma bensì all'azione. Ho riguardata la linea fluente, e la potenza agente come costante: che se fusser variabili, basterà considerare un flusso ed un'azione infinitesima, per poterle riguardare come costanti. Per altro non verrebbe meno nè il paragone nè la dottrina, quand'anche fusser variabili.

Ma proseguendo ritorniamo all' equilibrio, in cui, siccome s' è dedotto dalla sua natura, è necessaria un'eguaglianza tra quantità, ch' appartengano alle potenze. Or bene: altre quantità nè possono concepirsi, nè possono aversi, se non o le potenze medesime, o l' azioni loro: ma s' è nella passata lettera invincibilmente provato coll' equilibrio del vette, che la necessaria eguaglianza non è posta tra le potenze: dunque dee passar tra l' azioni delle potenze, le quali azioni senza alcun dubbio debbono esser ancor contrarie. Per la qual cosa è necessario, ch' in ogni equilibrio v' abbia eguaglianza tra l' azioni eguali e contrarie: nè v' avrà egualità di potenze se non nel caso, in cui l' egualità dell' azioni provi quella delle potenze; lo che non interviene, se i numeri degl' impulsi non sono eguali.

Ma qui fa d' uopo soffermarci per rimuovere una dubitazione, che potrebbe ingombrar la mente de' meno attenti. Lo stato d'equilibrio, può dire alcuno, non è uno stato di quiete, nel quale non v' ha, nè vi può avere effetto di sorte alcuna, e per conseguenza neppur azione. Come dunque si dice, che l' essenza dell' equilibrio domanda l' egualità dell' azioni contrarie? Il dubbio merita d' essere rischiarato. Incominciamo dal fissare la differenza, che passa tra li due stati di pura quiete, e d' equilibrio. Nel primo la materia si sta in riposo per mancanza d' ogni potenza; nel secondo non per mancanza di potenze, ch' anzi non vi sarebbe equilibrio, se non vi fussero, ma perchè esse vicendevolmente impedisconsi. Ma come impediscònsi? non perch' esse sieno eguali, come s' è veduto di sopra: dunque non per altro, se non perchè sono in tali circostanze costituite, ch' una non può esercitare azion benchè minima, se l' altra non n' esercita una eguale in senso contrario, e vicendevolmente; lo che non potendo seguire è necessario, che non s' eserciti nè dall' una, nè dall' altra potenza azione di sorte alcuna.

Affinchè ciò meglio s' intenda, mettiamo sotto degli occhi due potenze non equilibrate nel vette, giacchè questo è l' unico caso, che sin ora noi conosciamo. Al vette A B (*Fig. 6.*) mobile intorno al punto C sieno applicate ad angoli retti due potenze A M, B N a distanze disuguali C A, C B, in maniera, che A M : B N sia in maggior ragione di C B : C A. Egli è provato, che la potenza A M prevalerà. Agisca dunque la potenza A M, e rivolga il vette intorno al punto C: egli è palese, che nello stesso tempo la potenza B N sarà costretta ad esercitare un'azione contraria, la quale sarà minore: dunque sottratta questa dalla maggiore s' otterrà la differenza delle due azioni, a cui nella materia inerte corrisponderà la mutazione di stato. Si diminuisca alquanto la potenza A M ma in modo, che segua ad avere alla B N maggior ragione, che la reciproca delle distanze; si diminuirà la differenza delle due azioni, e l' effetto per essa prodotto, fin a tanto che diminuita l'A M in guisa, che sia alla B N reciprocamente come le distanze, nulla sarà delle due azioni la differenza, e nulla l' effetto, e per conseguenza v' avrà equilibrio. Questo progresso fa toccar con mano, che per ciò appunto v' è equilibrio, perchè seguendo azione, dovrebbe esser nulla la differenza dell' azioni contrarie, e per conseguenza eguali le medesime azioni. Stabiliam per tanto il principio verissimo, e incontrastabile, ch' allor s' avrà equilibrio, quando le potenze saranno in tai circostanze, nelle quali esercitandosi azione, l' azioni sarebbero contrarie ed eguali.

Quindi deriva il metodo per conoscere, se vi sia equilibrio sì o no. Suppongasi un minimo movimento; appresso si misurino l'azioni contrarie, e s' osservi s' esse sieno eguali, cioè a dire se sieno eguali i prodotti delle potenze contrarie nel numero degli impulsi loro. Se sì, v' ha l' eguaglianza richiesta dall' equilibrio, e niuna azio-

azione potrà efercitarfi ficuramente. Si noti il genere dell' argomento. Si fuppone il moto per dimoftrare coll' egualità dell' azioni, che movimento alcuno non può feguire. Con ciò mi fembra ogni cofa rifchiarata, in guifa, che non rimanga ombra alcuna di dubbietà. Tutto bene, fembrami di fentirvi mormorare tra denti: ma fin ora con tutte quefte ricerche non s'ottiene un principio acconcio a difcuoprire le verità: quefto è un viaggiare con paffo lento foverchiamente. Rifpondo, che voi pure moftrate premura non di arrivare prefto alla voftra Ifola, ma d'arrivare ficuro. Abbiate memoria di me.

Bologna li 28. Ottobre 1770.

LETTERA IV.

Della Mifura dell'Azioni, e del Principio univerfal della Statica.

L'Incontraftabile principio derivante dalla natura dell'equilibrio, ch'in effo l'azioni contrarie devono effer eguali, non ci può per anche fembrar fecondo ed utile, perchè la mifura dell'azioni è tuttora fconofciuta. Sappiamo effer l'azione proporzionale alla potenza, e al numero degli impulfi: ma cotal numero a che è proporzionale, e fecondo qual elemento la potenza replica i fuoi impulfi? Spieghiamoci chiaramente. La potenza efercita la fua azione in un tempo, e per uno fpazio. Potrebbe egualmente avvenire, ch'ella replicaffe i fuoi impulfi o in ragion del tempo, o in ragion dello fpazio. Nel primo cafo farebbe l'azione in ragion compofta della potenza, e del tempo; nel fecondo della potenza, e dello fpazio. Di quefte due mifure qual è la vera? La materia è fcabrofa; e per le diverfe opinioni, anzi per gli oftinati impegni degli Scrittori inviluppata, e confufa. Onde dobbiam ftare in guardia per avanzare con metodo rigorofo, e precifo.

Sta-

Stabilifco il feguente principio, ch'è fuperiore ad ogni eccezione. Quella mifura d'azione devefi rigettar fenza fallo, la quale non mantiene la neceffaria egualità dell'azioni contrarie nell' equilibrio; e quella folo ricevere, la quale la predetta eguaglianza indifpenfabilmente conferva. Con tal principio alla mano ripigliamo l'unico equilibrio, che ci è conofciuto, cioè quello del vette, in cui le potenze ad effo normali, che fuppongonfi difuguali, ferbano la ragion inverfa delle diftanze, ed efaminiamo quale delle due mifure conferva in effo l'egualità dell'azione. Si concepifca il vette A C B trasferirfi con un minimo movimento nel fito infinitamente proffimo a C b (*Fig. 6.*).

Incominciamo dalla prima mifura, che fa l'azioni proporzionali alle potenze, ed a' tempi. In queft' ipotefi l'azion della potenza A M all'azion della potenza B N farà in ragion compofta di A M : B N, e del tempo, in cui A fi porta in a al tempo in cui B fi trasferifce in b: ma eguali fono i tempi della traslazione di A in a, e di B in b: dunque l'azione di A M all'azione B N è in ragion di A M : B N : ma le potenze A M, B N fi fuppongono difuguali; dunque l'azioni loro fon difuguali. La mifura adunque dell'azione per la potenza nel tempo non falva nell'equilibrio la neceffaria egualità dell'azioni; e perciò devefi in perpetuo efiliar dalla Fifica.

Paffiamo all'altra mifura, ed offerviamo, fe regge. Effendo manifefto, che gli fpazj, pe' quali agifcono le potenze A M, B N, fono gli archetti A a, B b, fe la mifura dell'azione vuolfi defumere dallo fpazio, farà l'azione della potenza A M a quella della potenza B N in ragion compofta della potenza A M alla B N, e dell' archetto A a all'archetto B b: ma per la fimilitudine de' fettori l'archetto A a è a B b come la diftanza C A alla C B: dunque l'azion della A M all'azion della B N è in ragion compofta della A M alla B N, e della diftanza C A alla C B: ma per l'equilibrio del vette le potenze A M, B N fono in ragion reciproca delle diftanze C A, C B: dunque l'azione della potenza A M eguaglia quella della potenza B N.

Di queft' argomento, di cui io mi fono fervito ne' miei dialoghi nel fine della giornata fettima, fcuoprendo un fottile paralogifmo del celebre Leibnitzio, niuno finora ha detta fillaba in oppofito. Ed in fatti egli mi fembra evidente così, che non ammetta repli-

C ca

ca alcuna. La miſura per tanto dell'azioni va deſunta non da tempi, ne' quali agiſcono, ma dagli ſpazj, pe'quali agiſcono. Quindi ſi vede chiaro, perchè la potenza minore A M faccia equilibrio colla potenza maggiore B N, per eſempio dupla. Concioſſiachè eſſendo la diſtanza C A dupla della C B, e per conſeguenza lo ſpazietto A a duplo di B b, il numero degl' impulſi, che dà la potenza A M, ſarà duplo del numero degl'impulſi, che dà la potenza B N. Laonde il maggior numero degl' impulſi compenſerà preciſamente la minoranza della potenza. Per tanto quando le potenze ſieno in queſte circoſtanze coſtituite, ſaran coſtrette a ſoſtenerſi vicendevolmente, e ad equilibrarſi.

Abbiamo fatta una buona parte del viaggio; ma non ſiamo per anche giunti a buon termine, perchè non abbiamo acquiſtata una miſura dell' azioni ſchietta e preciſa. Nel caſo del vette A B, a cui ſono perpendicolari le direzioni delle potenze A M, B N, gli ſpazietti A a, B b ſono tanto quelli, per cui viaggiano i punti A, B, a' quali le potenze ſono applicate, quanto quelli per cui ſi fa l'accoſtamento o il diſcoſtamento da' centri delle potenze. Finchè queſti due generi di ſpazj confondonſi, non vi può eſſer equivoco, perchè qualunque ſi aſſuma, la miſura dell' azione non diſcorda dal vero. Ma quando ſon diſuguali, e diſtinti, lo che interviene il più delle volte, a quale de' due ſarà proporzionale il numero degl' impulſi, e da quale dovrà deſumerſi dell'azion la miſura? La coſa è incerta, ed a rimuovere cotal incertezza niuna utilità ci reca il caſo del vette ſinora conſiderato. Convien dunque fare ogni sforzo per diſcuoprire colla ſperienza alla mano un altro caſo d' equilibrio, che ſia valevole col lume, ch'egli ci accende, a diſſipar queſte tenebre.

Si formi una verga infleſſa B C A (*Fig.* 7.) mobile intorno al punto C; dove le ſue braccia fan angolo, e ſia coſtituita per modo, che, poſta C B orizzontale, eſſa riposi in un perfetto equilibrio. Al punto B le s'applichi un dato peſo B N, la cui direzione ſarà perpendicolare al braccio C B. All' altro braccio C A s' adatti il peſo A M, e ſi rimuova da C ſin a tanto, che ſi vegga eſſer eſſo equilibrato col peſo B N. La ſperienza fa vedere, ch' il peſo A M al peſo B N avrà maggior ragione che C B : C A, e ch' il rettangolo A M . C A è maggiore del rettangolo B N . C B. Alla direzione A M del peſo A M prodotta dal centro C ſi meni la perpen-

pen-

pendicolare C H: moſtra la ſperienza, che A M : B N è in ragion reciproca della diſtanza C H alla diſtanza C B. Per eſempio ſe A M ſia la metà di B N, ſi ritrova C B eſſer la metà di C H, e così dell'altre proporzioni. Intendendo per nome di diſtanze le perpendicolari alle direzioni delle potenze, ſi forma la propoſizione: i peſi, ovver le potenze verticali ſono equilibrate, quando ſervano la ragion inverſa delle diſtanze, ovvero quando ſono eguali i prodotti delle potenze nelle diſtanze.

Il caſo d'equilibrio or ora conſiderato ci leverà ogn' incertezza. Si concepiſca nel vette un infiniteſimo movimento, e traſferendoſi il punto B in b, ſi traſporti il punto A in a deſcrivendo il minimo archetto A a. La nuova poſizione della potenza A M ſia a K, la quale tagli la vecchia nel punto K, ch' in avvenire chiameremo centro della potenza. Col centro K, e l' intervallo K a ſi deſcriva l'archetto circolare a m. Se la nuova direzione della potenza A M fuſſe paralella alla prima, come avviene ne' peſi, il centro K s' allontanerebbe all' infinito, e la minima a m ſarebbe una retta normale alle due direzioni.

Dalla parte della potenza A M abbiam due ſpazietti, cioè A a, per cui viaggia il punto A, a cui la potenza è applicata, e lo ſpazietto A m, per cui ſi fa l'accoſtamento al centro della potenza: i quai due ſpazj nella fatta ipoteſi dalla parte di B N ſi confondono, e s' uniſcono nel ſolo B b. Veggiamo in prima, ſe l'azione della potenza A M, quando ſi miſuri dallo ſpazio A a, rieſca eguale all' azione della B N, come la natnra richiede dell' equilibrio. L'azion dell'A M a quella della B N, ſuppoſta cotal miſura, dev' eſſer in ragion compoſita di A M : B N, e di A a : B b: ma per l' egualità degli angoli A C a, B C b è A a : B b : : C A : C B: dunque l'azion di A M a quella di B N in ragion compoſita di A M : B N, e di C A : C B, oſſia com' il rettangolo A M . C A : B N . C B: ma s' è dimoſtrato eſſer nell' equilibrio A M . A C maggior di B N . C B: dunque l' azion della potenza A M è maggiore di quella della potenza B N: dunque miſurandoſi l' azione della potenza A M per lo ſpazietto A a deſcritto dal punto A, non s' ottiene l' egualità tra l' azioni, che l' equilibrio domanda. Per cotale ſpazio adunque l' azione non deveſi miſurare.

All' oppoſito ſe l' azion della potenza A M ſi miſuri dallo ſpazietto

zietto d'accoſtamento A m, eſſa ſi ritroverà egualiſſima all' azione della potenza B N. Alla dimoſtrazione premetto, ch' i due triangoli C H A, A m a ſono ſimili: perchè eſſendo retto l'angolo C A a, i due angoli C A H, a A m eguaglieranno un retto, e perciò eguaglieranno gli angoli C A H, H C A, eſſendo H retto: dunque levando il comune reſterà l'angolo a A m eguale ad A C H: ma in H, m gli angoli ſono retti: dunque ſon ſimili i due triangoli: dunque avremo A m : A a :: C H : C A: ma eſſendo eguali gli angoli A C a, B C b, ſarà A a : B b :: C A : C B; dunque A m : B b :: C H : C B. Ciò poſto l' azion dell'A M all' azione della B N nella ſuppoſta miſura è in ragion compoſta di A M : B N, e di A m : B b, oſſia di C H : C B, ovvero come il rettangolo A M . C H : B N . C B: ma s' è trovato nel caſo dell' equilibrio A M . C H = B N . C B: dunque eguali ſono l' azioni delle due potenze A M, B N.

Con l'esperienza

Le quali coſe così eſſendo nella preſente lettera con metodo lento sì, ma ſicuro ho diſcoperta la vera miſura dell' azioni, di cui non ci è più permeſſo di dubitare. La miſura dell' azione va preſa non dal tempo, in cui s' eſercita, non dallo ſpazio, che vien deſcritto dal punto, a cui è applicata la potenza, ma dallo ſpazio, per cui ſi fa l' accoſtamento, o il diſcoſtamento dal centro della potenza. Centro della potenza s' è nominato quel punto, in cui ſi tagliano due direzioni infinitamente vicine; il qual centro varia, come ognun vede, ſecondo la varia poſizione della potenza. Due caſi poſſono egualmente accadere, che cotal centro ſia ſituato o da quella parte, ove dirigeſi la potenza, ovvero dalla parte oppoſita. Se nel primo caſo lo ſpazio ſia d' accoſtamento al centro, nel ſecondo di diſcoſtamento, l' azione la chiamaremo ſpontanea, perchè s' eſercita da quella parte, ove la potenza è diretta. All' oppoſito ſe nel primo caſo lo ſpazio ſia di diſcoſtamento, nel ſecondo d' accoſtamento, l' azione la diremo ſforzata, perchè s' eſercita contro la direzione della potenza. Di fatto queſto genere d' azione non può eſſere in verun modo eſercitato dalla potenza, quando non ne ſia coſtretta dalle maggiori azioni ſpontanee delle potenze prevalenti.

Dichiarate in cotal guiſa le coſe, eccovi il principio general della Statica. Se, concepito un moto minimo, l' azioni ſpontanee delle potenze ſieno eguali all' azioni ſforzate dell' altre potenze, s'

avrà

avrà un ſicuro equilibrio. Se l' azioni ſpontanee ſaran maggiori delle ſforzate, infallibilmente ſeguirà movimento. Finalmente ſe l' azioni ſpontanee ſono minori, da quella parte non può ſeguir movimento; ma ſe, ſuppoſto il minimo moto in parte contraria, l' azioni ſpontanee trovaranſi maggiori, ritornerà il caſo antecedente. Tutte l' azioni poi ſi vogliono ſempre mai deſumere da' prodotti delle ſteſſe potenze negli ſpazj d' accoſtamento, o di diſcoſtamento.

Io deſidero, anzi vi prego, ch' eſaminiate le dottrine in queſte lettere contenute con tutta la ſeverità, e che mi manifeſtiate lo ſchietto voſtro giudicio, che pregio aſſai. Perciocchè ſe reggono ſiccome mi luſingo, le dimoſtrazioni, che reco, tengo per fermo, che reggeran egualmente tutte le conſeguenze, che nell' altre lettere dedurrò. Vi rinnovo la mia ſervitù.

Bologna il primo di Novembre 1770.

LETTERA V.

Dichiarate le velocità virtuali ed i momenti delle Potenze, s' illuſtra con alcuni eſempj il Principio ed il Metodo dell' Azioni.

TRa gli Scrittori c' hanno trattata la Statica, ne troverete parecchi, che ſervonſi del metodo delle velocità virtuali, ch' è fondato in queſto principio: quando i prodotti delle potenze nelle loro velocità virtuali poſitive ſieno eguali ai prodotti dell' altre potenze nelle velocità virtuali negative, s' avrà l' equilibrio. Il principio e il metodo delle velocità virtuali, a dir vero, non è diverſo da quello dell' egualità dell' azioni miſurate dagli ſpazj d' acceſſo, e di receſſo. Ma al preſente è meſſo più in chiaro, e più ſolidamente provato. Imperciocchè eſſi non hanno giammai ſpiegato, qual coſa fuſſero codeſte velocità virtuali da eſſi introdotte nella Meccanica, e ſolo ammaeſtrati da alcuni eſempj l' hanno fatte propor-

por-

porzionali agli spazietti presi nelle direzioni delle potenze. Il principio poi non d'altra evidenza era fornito, se non di quella, che gli potea dare una non fallace induzione, la qual facea vedere, condur esso sempre mai alle verità, ch'altronde erano conosciute. Ma il progresso, ch' abbiam tenuto, ha dissipata ogni nebbia, ed ha dimostrato, che le velocità virtuali, o per dir meglio, gli spazj d'accesso, e di recesso son quelle quantità, da cui va misurata l'azione, ed a cui è proporzionale il numero degl'impulsi della potenza. Il principio poi non è altro, che l'egualità dell'azioni spontanee e sforzate richiesta dalla natura dell'equilibrio.

Non è qui mio disegno di trattare tutta la Statica col principio stabilito dell'egualità dell'azioni; ma sol di dichiarare con qualch' esempio, quant' abbia d'uso e di fecondità. Trattiamo in prima generalmente del vette. Sia il vette ARCSB (*Fig.* 8.) di qualunque siasi figura mobile intorno al punto C, a cui sieno applicate le potenze AM, BN ne' punti A, B. Si concepisca seguire un minimo movimento, e trasferirsi i punti A, B per gli archetti simili Aa, Bb. Le nuove direzioni delle potenze sieno aH, bK, le quali seghino le prime ne' punti H, K, che sono i centri delle medesime; co' quai centri descrivansi gli archetti am, bn. Sarà Am spazio d' accesso, Bn spazio di recesso, e l' azion per Am sarà spontanea, per Bn sarà sforzata. Adunque l' egualità dell' azioni proverà l' equilibrio, quando il rettangolo AM. Am = BN. Bn, ovvero quando sia Am : Bn :: BN : AM.

Si congiungano le rette CA, CB, e dal punto C si menino CP, CQ normali alle direzioni delle potenze. Am : Bn è in ragion composta di

Am : Aa
Aa : Bb : ma
Bb : Bn

come s'è altre volte provato,
Am : Aa :: CP : CA, Aa : Bb :: CA : CB,
Bb : Bn :: CB : CQ : dunque
Am : Bn in ragion composta

CP : CA
CA : CB, o sia in ragion semplice di CP :
CB : CQ

CQ: ma il principio domanda, che le potenze AM, BN sieno in ragion inversa di Am : Bn; dunque in ragion inversa delle di-

stanze CP, CQ. Ecco dunque la condizione richiesta nel vette. Se più di due fossero le potenze applicate al vette, con poco diverso ragionamento si proverà, che s'avrà equilibrio, ogni qualvolta vi sia egualità tra i rettangoli delle potenze nelle distanze loro dal centro del movimento, supposta la necessaria contrarietà.

Arrivati gli antichi Meccanici ad un così fatto teorema, conobbero essi pure, che l'equilibrio non dipendea dall'egualità delle potenze; ma conobbero altresì, che qualche egualità era richiesta. Quindi dissero, per trarsi fuori d'impaccio, che non le potenze, ma i momenti loro dovevano esser eguali: e tai momenti costituirono proporzionali ai prodotti delle potenze nelle loro distanze dall' ipomoclio; e con tal principio alla mano stabilirono egregiamente le leggi dell'equilibrio in tutte le macchine, che si riducono al vette, cioè in quelle, in cui si può concepire un punto fisso o ipomoclio, intorno a cui il movimento si compia. Il chiamare momenti delle potenze quelle quantità, dalla cui egualità l' equilibrio dipende, è una pura definizione di nome: ma qual cosa eran essi, e chi n'aveva una chiara idea? La sperienza aveva ad essi insegnato, che nel vette dovean esser proporzionali alle potenze, ed alle distanze dal fulcro. Ma nelle macchine, che o difficilmente o in niuna maniera si riducono al vette, mancando le distanze dall' ipomoclio, a quali quantità saranno proporzionali? Per mancanza di tal cognizione di cotai macchine i vecchi Meccanici niente insegnar poterono, e perciò l'ingegno aguzzarono per condurle al vette, quando riuscisse. Al presente ognuno comprende, ch'i momenti delle potenze non altro sono, che quell'azioni, le quali devono essere necessariamente eguali nell'equilibrio.

Per mettere in buona vista il nostro metodo, e l'uso del principio, non debbo ommettere una osservazione, che sembrami importantissima. Quando non sia possibile, se non se un movimento, come avviene a' corpi, che si raggirano intorno ad un asse, allora se concepito un minimo movimento, l'azioni spontanee e sforzate misurate dallo spazio d'accesso e di recesso si ritrovano eguali, senza altra cautela si deduca l'equilibrio delle potenze. Ma quando liberi sieno più movimenti e in più direzioni, se concependo un qualche movimento ad arbitrio, io ritrovo come sopra l'egualità dell'azioni, non posso affermar un equilibrio pieno e compito, ma sol-

ſoltanto pronunciare, che quel movimento è impoſſibile, e che in quella direzione equilibrate ſon le potenze. Ben è vero, che il più delle volte accade, che provato l'equilibrio in due movimenti, e in due direzioni con non recondito raziocinio ſi prova, che per riguardo ad ogni movimento e ad ogni direzione v' avrà l' egualità dell'azioni richieſta dall'equilibrio, il quale ſarà perfetto e compito. Di tutto ciò diamo un chiaro eſempio in tre potenze paralelle applicate ad angoli retti ad una verga rigida e rettilinea.

Sieno tre potenze AM, BN, CP (*Fig.* 9.) normalmente applicate alla retta AB. Egli è patente, che nel piano, ove ſon applicate le potenze, tutti i movimenti ſon liberi, e niuno reſta per le circoſtanze determinato. Ponghiamo ſeguire il movimento intorno al punto C, e trasferirſi la verga nel ſito aCb, eſſendo Aa, Bb gli ſpazj d' acceſſo, e di receſſo. La legge dell'equilibrio richiede, che ſia $AM . Aa = BN . Bb$: ma $Aa : Bb :: CA : CB$: dunque $AM . CA = BN . CB$: e però ſe le potenze ſaranno in ragion reciproca delle diſtanze dal punto C, vi ſarà equilibrio. Ma ſarà egli completo? Ciò non prov' altro, ſe non ch'è impoſſibile il moto intorno al punto C, e che per riguardo a tal centro le potenze ſono equilibrate. Ma lo ſaranno egualmente intorno a qualſiſia altro punto, ovvero intorno ad altri punti potrà ſeguir movimento?

Innoltriamo, e veggiamo, qual condizione richiedaſi, perchè facciano equilibrio intorno al punto B. Si concepiſca un minimo movimento, e ſi trasferiſca la verga nel ſito Bca. Per l'equilibrio è neceſſario, che $AM . Aa = CP . Cc$: ma $Aa . Cc :: BA : BC$: dunque $AM . BA = CP . BC$: e perciò le due potenze AM, CP dovranno eſſer in ragion reciproca di $BA : BC$. Se vi ſarà anche queſta ſeconda condizione, le tre potenze ſaranno equilibrate non ſolo intorno al punto C, ma ancora intorno al punto B: ma ſe mancherà la ſeconda, intorno a C vi ſarà equilibrio, ma intorno a B potrà ſeguir movimento. Si può dubitare, ſe le due condizioni fiſſate baſtino a provar un equilibrio pieno e compito. Convien eſaminarlo, e per far ciò convien vedere, ſe poſte le due condizioni, concependo un minimo movimento intorno a qualſivoglia punto, ſieno l'azioni ſpontanee delle potenze eguali alle ſforzate. Veggiamolo in prima nel moto intorno al punto A.

Facciaſi adunque un minimo movimento intorno al punto A, e paſſi

paſſi

paſſi la verga nel ſito infinitamente proſſimo Acb, eſſendo Bb lo ſpazio d'acceſſo, e Cc quel di receſſo. Dico, che poſte le due condizioni di ſopra, s'avrà equilibrio intorno al punto A. Imperciocchè le condizioni preſentano le due proporzioni $AM : BN :: BC : AC$, $AM : CP :: BC : AB$, dalle quali naſce la terza $BN : CP :: AC : AB$: ma $AC : AB :: Cc : Bb$: dunque $BN : CP :: Cc : Bb$; dunque $BN . Bb = CP . Cc$: dunque l' azioni ſpontanee e ſforzate ſi ritrovano eguali; e perciò ancora intorno al punto A vi ſarà equilibrio. Qui fa d'uopo avvertire ciò, che nel progreſſo ci ſarà d'uſo, che non può a meno, che la CP non ſia eguale alla ſomma delle due AM, BN. Perciocchè eſſendo $AM : BN :: BC : AC$, ſarà componendo $AM : AM + BN :: BC : AB$; ma $AM : CP :: BC : AB$; dunque $AM + BN : CP :: AB : AB$; dunque $AM + BN = CP$

Paſſiamo a dimoſtrare, che l'equilibrio ſuſſiſte intorno al punto K poſto nella linea AB. (*Fig.* 10.) Il rettangolo $AM . KA$ è al rettangolo $AM . KC$ aritmeticamente come $BN . KC$ a $BN . KB$: perchè il primo rettangolo ſupera il ſecondo per $AM . CA$, e il terzo ſupera il quarto per $BN . CB$, le quali due differenze ſi ſuppongono eguali. Adunque $AM . KA + BN . KB = AM + BN . KC$: ma $AM + BN = CP$; dunque $AM . KA + BN . KB = CP . KC$ Quindi ſuppoſto al ſolito il minimo movimento gli ſpazietti Aa, Cc, Bb eſſendo proporzionali alle diſtanze KA, KC, KB naſcerà $AM . Aa + BN . Bb = CP . Cc$, e però eguali eſſendo l'azioni ſpontanee e ſforzate delle potenze, ſuſſiſterà l'equilibrio.

Reſta da dimoſtrarſi, che l'equilibrio non manca, intorno a qualſiſia punto K poſto fuor della retta AB. (*Fig.* 11.) Dal punto K ſi menino le rette KA, KB, KC, e ſi ſupponga farſi un minimo moto intorno a K, onde da' punti A, B, C ſi deſcrivano gli archetti ſimili Aa, Bb, Cc. Sieno am, bn, cp perpendicolari alle direzioni delle potenze, e determinino gli ſpazj d'acceſſo Am, Bn, e quel di receſſo Cp. Si conduca KH normale all'AB. Poichè gli angoli KAa, HAm ſon retti, detratto il comune HAa rimarranno eguali KAH, aAm: dunque ſaranno ſimili i triangoli KAH, aAm: dunque $HA : Am :: KA : Aa$. Collo ſteſſo metodo dimoſtrerò $HB : Bn :: KB : Bb$, $HC : Cp ::$

D KC:

$KC : Cc$: ma essendo gli archetti simili si ha $KA : Aa :: KB : Bb :: KC : Cc$: dunque Am, Bn, Cp sono proporzionali alle HA, HB, HC : ma s'è dimostrato, essere $AM \cdot HA + BN \cdot HB = CP \cdot HC$; dunque $AM \cdot Am + BN \cdot Bn = CP \cdot Cp$: dunque l'azioni spontanee essendo eguali alle sforzate, intorno al punto K sussisterà l'equilibrio. Quindi è palese, che se le potenze sono equilibrate intorno a due punti C B, lo saranno egualmente intorno a qualsisia punto; e però l'equilibrio sarà compito. Agli esempj esposti in questa lettera aggiungerò quello dell'equivalenza delle potenze, che tratterò nella seguente. Non vi dimenticate di me.

Bologna li 23. Novembre 1770.

LETTERA VI.

Si proseguisce ad illustrare il metodo, ed il principio dell'azioni coll'esempio di tre potenze applicate ad un medesimo punto.

Sieno allo stesso punto A applicate tre potenze AM, AN, AP: (*Fig.* 12.) si domanda, in quali circostanze sieno per essere equilibrate. Si concepisca seguire un minimo movimento nella direzione contraria a quella della potenza AP, e trasferirsi il punto A in a. Le nuove direzioni delle potenze AM, AN seguino l'antecedenti ne' punti R, S. Con questi centri si descrivano gli archetti am, an: gli spazietti, onde si vogliono misurare l'azioni, sono Am, An, Aa i primi due d'accesso, l'ultimo di recesso. Da punti M, N nella PA prodotta si conducano le normali MF, NG.

Il metodo dell'azioni insegna, che vi sarà equilibrio, quando $AM \cdot Am + AN \cdot An = AP \cdot Aa$. Ma $Am : Aa :: AF : AM$, perchè sono simili i due triangoli rettangoli Aam, AMF aventi comune l'angolo in A; dunque $AM \cdot Am = AF \cdot Aa$. similmente dimostrerò AN, $An = AG \cdot Aa$: dunque l'egualità richiesta dall'equilibrio sarà $AF \cdot Aa + AG \cdot Aa = AP \cdot Aa$, ovvero $AF + AG = AP$. Per tanto saranno equilibrate le tre potenze, quando AP sia eguale alle due AF, AG, ovvero fatta $FB = AG$, quando $AP = AB$.

L'equilibrio, ch'abbiam col raziocinio provato, sarà egli pieno e compito? La dimostrazione, che abbiam recata, non altro fa vedere, se non che vi sarà equilibrio nella direzione della terza potenza AP, ma non nell'altre direzioni. Fa d'uopo collo stesso metodo dell'azioni disaminar questo punto con diligenza. Veggiamo in prima quali condizioni richiedansi, perchè le stesse potenze sieno equilibrate nella direzione perpendicolare alla terza potenza AP. Sia dunque HK (*Fig.* 13.) normale all'AP, ed in essa si trasferisca il punto A pel minimo spazietto Aa. Le nuove direzioni delle potenze sieno aR, aS, aT. Co' raggi Ra, Sa, Ta si descrivano gli archetti am, an, ap, e da' punti M, N nella direzion HK si menino le perpendicolari MH, NK. L'azioni delle tre potenze saranno $AM \cdot Am$, $AN \cdot An$, $AP \cdot Ap$, la prima d'accesso, l'altre due di recesso. Convien dimostrare, che l'azione della potenza AP è infinitesima rispetto all'azioni dell'altre due. Essendo finito il raggio Ta dell'arco ap, ed il seno Aa infinitesimo, sarà il seno Ap infinitesimo del secondo ordine: dunque $AP \cdot Ap$ azione della potenza AP sarà infinitesima del secondo ordine: ma l'azioni dell'altre due potenze sono infinitesime del primo, perchè Am, An hanno con Aa proporzione finita: dunque l'azione della potenza AP è minima rispetto all'azioni dell'altre potenze AM, AN.

Ommessa per tanto così fatta azione infinitesima del secondo ordine, pel principio dell'azioni s'avrà l'equilibrio, quando $AM \cdot Am = AN \cdot An$: ma per la similitudine de' triangoli Aam, AMH, si ha $Am : Aa :: AH : AM$: dunque $AM \cdot Am = AH \cdot Aa$. Similmente dimostrerò $AN \cdot An = AK \cdot Aa$: dunque $AH \cdot Aa = AK \cdot Aa$, ossia $AH = AK$. (*Fig.* 12.) Per le quali cose s'avrà l'equilibrio in amendue le direzioni PB, HK, quando $AP = AF + AG$, e $AH = AK$, ossia $MF = NG$. Congiungo MB, NB. Li due triangoli AGN, MFB sono in tutto eguali, perchè F B s'è fatta eguale all' A G, e M F si suppone eguale a N G, e gli angoli in F, G son retti: dunque M B e eguale e paralella ad A N: dunque il quadrilatero A M B N è un paralellogrammo: adunque s'avrà l'equilibrio nelle due direzioni, quando A P eguagli la diagonale del paralellogrammo, i cui lati sono l'altre potenze A M, A N.

Per le cose dimostrate egli è evidente, che se A P sia eguale al diametro del paralellogrammo, di cui l'altre due potenze sieno i lati, le tre potenze nelle due esposte direzioni sono in equilibrio: ma lo saranno esse in tutte l'altre direzioni? Io affermo, che lo saranno. A dimostrarlo premetto questo lemma geometrico. (*Fig.* 14.) Se pel punto A nel paralellogrammo A M B N si meni qualunque retta I A L, a cui da punti M, N, B si conducono le perpendicolari M K, N H, B L, dico che A K + A H = A L. Dimostrazione. Da punti M, N s'abbassino nella diagonale A B le normali M F, N G, e si notino i punti R, S, ove M K, e N H prodotte segano il diametro. I due triangoli M F R, N G S sono simili, perchè tutti i lati loro son paralelli: dunque M F : N G :: F R : G S: ma M F = N G; dunque F R = G S. Adunque sarà A F : A R aritmeticamente come A S : A G: dunque A F + A G = A R + A S; ma A F + A G = A B; dunque A R + A S = A B. Essendo simili i triangoli A R K, A S H, A B L, saranno A R, A S, A B proporzionali alle A K, A H, A L: dunque componendo A R + A S : A B :: A K + A H : A L: ma A R + A S = A B; dunque A K + A H = A L; come avea proposto di dimostrare.

Ciò provato si faccia un minimo movimento per A a, e co' centri delle potenze si descrivano gli archetti a m, a n, a p: gli spazj d'accesso saranno A m, A n, quel di recesso A p. Poichè A P = A B, sarà A I = A L: ma A L = A K + A H; dunque A K + A H = A I; dunque A K. A a + A H. A a = A I. A a: ma la similitudine de' triangoli da A K. A a = A M. A m, A H. A a = A N. A n, A I. A a = A P. A p: dunque A M. A m + A N. A n = A P. A p: dunque l'azioni spontanee delle potenze A M, A N sono eguali alla sforzata dell' A P, e però in qualunque direzion A L trovansi le potenze equilibrate: dunque l'equilibrio è pieno e compito.

La

La potenza A B eguale all' A P, che fa equilibrio pieno e compito colle due A M, A N, dicasi equivalente delle medesime: onde l'equivalente alle due A M, A N eguaglia la diagonale del paralellogrammo di cui esse sono i lati. Quindi, salvo l'equilibrio, si potrà surrogare alle due laterali A M, A N la diagonale A B, la qual operazione dicesi composizione delle potenze. Similmente in luogo della diagonale A B sarà lecito sostituire le due laterali A M, A N, la qual operazione suol dirsi risoluzione. La composizione è determinata, perchè in luogo di due se ne può sostituire una sola: ma indeterminata è la risoluzione, perchè in luogo d'una si possono sostituire infinite coppie di potenze ad essa equivalenti: onde ne' casi particolari si sceglierà quella risoluzione, che condurrà a fine la dimostrazione, o almeno la renderà più elegante. Questa lettera non solo dà maggior lume al metodo dell' azioni, ma sparge ancora i primi semi del principio dell'equivalenza delle potenze, di cui si fa frequente uso nella meccanica. Non so, se il vento contrario v'impedisca tuttora ad uscir dal porto. Io desidero, ch'il propizio ascolti i vostri inviti, e che v'accompagni sempre nella vostra non lunga navigazione. Addio.

Bologna li 26. Novembre 1770.

LETTERA VII.

S'applica il metodo e il principio dell'azioni all'equilibrio de' Fluidi gravi.

Gli esempj, che nelle passate lettere v'ho esposti, P. Virgilio Stimatissimo, v'avranno convinto, ch'il principio dell'azioni determina ogni sorte d'equilibrio nelle macchine rigide, e ne' corpi solidi, a cui qualsisia numero di potenze venga applicato: ma starete per ventura in dubbio, s'abbia luogo egualmente ne' corpi fluidi, ne' quali le particelle separate, e sconnesse sono animate dalle

par-

particolari loro potenze. Ma rimovete pure ogni dubbietà; il principio è così universale e fecondo, c'ha giurisdizione ancora ne' fluidi: ed in questa lettera ve lo farò vedere ne' fluidi gravi. Incominciamo.

Sieno due tubi comunicanti AEDB (*Fig.* 15.) cilindrici e verticali, riempiti dello stesso fluido grave: si domanda in quali altezze AE, BD dovrà ne' due tubi sostenersi il fluido, perchè equilibrato rimanga. Si concepisca un minimo movimento, e nel tubo FE discenda il fluido per lo spazietto Aa; e nell'altro tubo GD ascenda per lo spazietto Bb. Perciocchè tutte le particelle nel tubo FE discendono egualmente, e nel tubo GD egualmente ascendono; l'azione di ciascuna particella nel primo tubo verrà espressa dalla sua gravità nello spazietto d'accesso Aa: dunque la somma loro, o sia l'azione della gravità di tutto il fluido sarà espressa dalla medesima gravità nello spazietto Aa. Similmente proverò, che l'azione di tutto il fluido GD s'esprime dalla sua gravità in Bb spazietto di recesso. Adunque s'avrà equilibrio, quando sieno eguali cotali azioni, ovvero quando la gravità di FE sia a quella di GD reciprocamente come Aa: Bb. Ma perciocchè lo spazio Fa, che si lascia vuoto da un fluido, è eguale a Gb, che si riempie dall'altro, saranno eguali i cilindretti Fa, Gb: dunque Aa: Bb sarà in ragion reciproca della base FA alla base GB: dunque allora avremo equilibrio, quando la gravità FE alla gravità GD sarà in ragion diretta della base AF alla base BG: ma le gravità sono come i cilindri: dunque nell'equilibrio sarà il cilindro FE al cilindro GD come la base FA alla base GB: ma cotal proporzione non può sussistere, se l'altezze EA, DB non sieno eguali: dunque l'equilibrio esige, che nell'uno e nell'altro tubo il fluido si sostenga alla stessa altezza, e per conseguenza le due superficie AF, BG sieno nella medesima orizzontale.

Egli è vero, che l'antecedente dimostrazione non può adattarsi, se non a tubi retti, ch'abbiano figura cilindrica o prismatica: ma un non difficil giro di raziocinio lo stesso teorema proverà egualmente di tutti i tubi di qualunque sieno figura. Il tubo GD (*Fig.* 16.) comunichi col tubo FE: il primo sia retto e cilindrico, il secondo di qualunque figura; in questo si concepisca la linea AO verticale. Fatto un minimo movimento discenda la su-

superficie del liquore FE da FH in fh per la minima altezza Aa, e nell'altro tubo ascenda da BG in bg per l'altezza Bb. In questo tubo GD tutte le particelle del fluido ascendono per uno spazietto eguale a Bb; onde cosa facil è il determinare l'azione di tutto il fluido: ma nell'altro, che non è un cilindro retto, ciascuno strato discende per uno spazietto disuguale, onde per aver l'azione totale sarà di mestieri prender la somma di tutte l'azioni parziali. A questo fine avverto in prima, ch'il cilindretto FfhH è = BbgG, perchè quel fluido, ch'abbandona un tubo, entra nell'altro a riempierlo. Ciò avvertito si divida il fluido FE orizzontalmente in cilindretti tutti eguali al cilindro Bg, un de' quali sia KklL, la cui altezza Ii. L'azione di questo cilindretto sarà Kl. Ii: ma per la costruzione Kl = Bg; dunque l'azione del cilindretto sarà Bg. Ii, lo che di tutti i cilindretti provandosi, fatta l'integrazione, la somma dell'azioni di tutti i cilindretti, o sia l'intera azione del fluido FE sarà = Bg. AO: ma l'azione del fluido GD è = GD. Bb = Bg. BD: dunque nell'equilibrio dovrà essere Bg. AO = Bg. BD; dunque AO = BD, cioè a dire eguali l'altezze.

Il metodo non è diverso, quando v'abbian due fluidi eterogenei, e di diversa specifica gravità. Ne' tubi comunicanti AOB (*Fig.* 17.) sia dall'una parte il liquor BE di minore specifica gravità, il rimanente DOA sia riempito del fluido più grave: si domanda, quando riposeranno in equilibrio. Suppongansi i fluidi esser equilibrati: e sia il confin loro DE orizzontale, che prodotto seghi l'altro tubo in H. Egli è manifesto, ch'il fluido DOH sarà in un perfetto equilibrio, e che supponendosi un minimo moto, l'azione di quel ch'è contenuto in un tubo, sarà eguale all'azione di quel, ch'è contenuto nell'altro. Adunque basterà determinare l'altezze AH, BD, perchè i fluidi diversi rimangano equilibrati. Si supponga un minimo moto e discenda il primo in af, ascenda l'altro in bg. L'equilibrio domanda, che le gravità de' fluidi FH, DG sieno reciprocamente come gli spazietti Aa, Bb: ma le gravità de' fluidi sono come l'altezze AH, BD, le basi AF, BG, e le gravità specifiche, che chiamerò M, N: dunque i prodotti M. AH. AF, N. BD. BG sono recipro-

camen-

camente come Aa, Bb: ma essendo eguali i cilindretti Af, Bg, saranno le Aa, Bb reciprocamente come le basi AF, BG: dunque i prodotti M. AH. AF, N. BD. BG sono direttamente come AF, BG; dunque M. AH = N. BD, ovvero AH: BD :: N : M, cioè a dire l'altezze de' liquori sopra il comune confine reciprocamente come le specifiche gravità. Quando adunque abbia luogo questa ragion reciproca, s'avrà ne' due diversi fluidi l'equilibrio: come si dovea ritrovare.

Lascio addietro moltissime verità, perchè ciò, che s'è addotto in esempio, è sufficiente a rischiarare il metodo, e ad illustrare il principio. Ma non voglio ommettere il modo di determinar le pressioni, ch'esercitano i fluidi contro al fondo, ed ai lati del vase, perchè in tali ricerche potrebbe a taluno sembrar inutile il principio dell'egualità dell'azioni. Sia il vaso cilindrico AMNB, (*Fig.* 18.) nel cui fondo MN si segni un circoletto FG, il quale si separi dall'altro in modo, che possa muoversi liberamente in su e in giù: ma se gli applichi la potenza P valevole ad impedire, ch'egli non sia rimosso dalla pressione del fluido contenuto nel vase. Egli è chiaro, che la potenza P sarà eguale alla pressione, che dal fluido patisce la minima base FG. Ciò posto si concepisca un minimo movimento, ed il fondo mobile si porti in fg, uscendo pel foro il cilindro del liquore Fg, e abbassandosi il liquore nel vase sino ad ab. Per la legge dell'equilibrio sarà P. Ff = al fluido AN. Aa, o sia Ff: Aa com'il fluido AN: P: ma Ff: Aa come la base AB: FG: dunque la base AB:FG come il fluido AN: P: ma come la base AB alla FG così il fluido AN al cilindro fluido insistente sopra FG: dunque il fluido AN al cilindro fluido insistente sopra FG, come lo stesso fluido AN alla potenza P: dunque la potenza P è eguale alla gravità del cilindro insistente sopra FG: ma la potenza P è eguale alla pressione, che soffre FG; questa dunque eguaglia la gravità d'un cilindro, c'ha per base FG per altezza MA. La stessa verità si dimostrarebbe egualmente, se il vaso non fusse cilindrico, ma di qualunque figura.

A ritrovar con somigliante raziocinio la pressione contro del lato, prendo a considerare il cilindro obliquo AOB, (*Fig.* 19.) nel

nel cui lato apro un foro infinitesimo FG, e lo chiudo con una parte mobile, a cui applico una potenza P, la qual impedisca, che sia rimossa dalla pressione. E' chiaro, che la potenza, e la pressione s'eguaglieranno. Dal punto F condotta l'orizzontal FH, è patente, che l'acqua sottoposta a questa orizzontale nè accresce, nè diminuisce la pressione contra FG. S'intenda un minimo movimento, e discenda la superficie AB per l'altezza Aa della verticale AM, e si porti la parte mobile in fg. L'equilibrio esige, che P. Ff sia eguale alla gravità del fluido posto sopra FH moltiplicata in Aa: dunque avremo Aa: Ff come P alla gravità del detto fluido, la qual eguaglia la gravità d'un cilindro, c'ha per base AB, e per altezza AM: ma Aa: Ff è in ragion reciproca della base AB alla FG: dunque AB: FG, ovvero il cilindro, c'ha per base AB, per altezza AM al cilindro c'ha per base FG, per altezza AM sarà come il cilindro della base AB e dell'altezza AM alla potenza P: dunque P, e per conseguenza la pressione del fluido sarà eguale alla gravità del cilindro, la cui base sia FG, e la cui altezza sia AM: come si dovea ritrovare.

Voi vedete, che collo stesso principio dell'azioni potrei con eguale facilità, risolvere molte altre quistioni, che riguardano l'idrostatica: ma non essendo qui mio disegno di profondar le teorie, ma d'additarne il metodo, ed i principj, credo d'aver bastantemente soddisfatto al mio impegno. Qui farò fine di trattare dell'equilibrio, ed in appresso mi studierò di fissare i veri principj del movimento. Se vaglio a servirvi, comandatemi.

Bologna li 7. Decembre 1770.

LETTERA VIII.

Del movimento, che conviene ad una Potenza costante.

INcominciando a trattare del movimento lascierò indietro, o piuttosto supporrò le leggi del moto equabile, nel quale non v'ha un minimo cangiamento di stato. Questo movimento in due occasioni può ottenersi in natura, cioè e quando al corpo non sia applicata potenza di sorte alcuna, e quando v'abbiano più potenze, che facciano equilibrio tra loro. In questo secondo caso parecchi m'han mosso dubbio, se le potenze esercitino vera azione sì, o no. La quistione monta pochissimo: perciocchè o non vi sia azione alcuna, o vi sieno vere azioni bensì, ma eguali e contrarie, cioè a dire l'une spontanee, l'altre sforzate, il corpo non soffrirà alcuna mutazione di stato, e proseguirà a viaggiare equabilmente. Contuttociò i principj stabiliti sembrano decidere la quistione in favore dell'esistenza dell'azioni. Imperciocchè sembra chiaro, che le potenze replicano gl'impulsi loro in proporzione degli spazj d'accesso, o di recesso dal centro loro, i quali nella nostra ipotesi il più delle volte non mancano. Ho detto il più delle volte, perchè se le potenze equilibrate fossero sempre perpendicolari alla direzione del moto, non eserciterebbero azione. L'azioni, che domandiamo spontanee, s'esercitano liberamente, ogni qualvolta le potenze non sieno impedite o da altre potenze o dalla natura del movimento: all'opposito l'azioni, che diciamo sforzate, non s'esercitano dalle potenze, quando non sieno costrette o dalle maggiori azioni spontanee, o dalla direzione del moto. Se l'azioni spontanee sono maggiori delle sforzate, il corpo passerà dallo stato di minore a quello di maggiore velocità, e s'avrà il movimento, che dicesi accelerato: se son eguali l'azioni spontanee e sforzate, conserverà il corpo lo stato suo, e s'avrà l'equabile movimento: finalmente se l'azioni spontanee son superate dalle sforzate, il corpo passerà dallo stato di maggiore allo stato di minore velocità, e s'avrà il moto, che dicesi ritardato.

Ma

Ma lasciando star questo, passiamo a veder il modo, onde date le potenze si determinano le proprietà del movimento, ovver date le proprietà del movimento si determinano le potenze. La cosa è scabrosa più assai, ch'a prima vista non pare, e sarà necessario il chiamar qualche sperienza in soccorso. Ed in prima convien fissare una potenza, il cui valor ci sia noto in qualunque luogo nel suo movimento il corpo pervenga. Non ci partiam dalla gravità de' corpi terrestri. Io dico per tanto, che nelle distanze, in cui si sogliono prendere le sperienze de' gravi cadenti, la gravità è fisicamente costante ed invariabile. Per dimostrarlo colla sperienza alla mano, non possiam far uso del movimento senz'aperta petizion di principio, perchè d'esso finora non sappiam nulla. Converrà fermarsi nell'equilibrio. Nella sommità d'una torre alta mediocremente io sospendo da un'esatta bilancia un corpo, intorno a cui si rivolga un filo lungo quasi quanto è la torre, e nell'altra lance pongo un contrappeso, con cui squisitamente s'equilibri. Appresso svolgendo il filo, abbasso il corpo, sicchè rimanga vicinissimo a terra; ed osservo, che l'equilibrio nella bilancia come prima sussiste. Ciò posto così la discorro. La gravità del corpo in cima alla torre insieme col filo è eguale al contrappeso; così vuole l'equilibrio della bilancia: la gravità del corpo al fondo della torre, aggiunto pur il filo, è eguale allo stesso stessissimo contrappeso: dunque la gravità del corpo in cima la torre è eguale alla gravità dello stesso corpo al fondo della torre: dunque per tutta la lunghezza della torre la gravità del corpo è costante e invariabile: ma tali sono al più le distanze, in cui si sogliono desumer gli esperimenti: dunque in cotali distanze la gravità è una potenza costante e invariabile. Voi vedete, che non pretendo di provare un'invariabilità matematica, ma solo fisica, e di sperienza.

Ritrovata una potenza costante, sarà di mestieri multiplicar le sperienze, e determinare la proprietà del movimento, ch'ad essa compete. Se discendendo un corpo si segnino, quanto più accuratamente si può, gli spazj, ch'in tempi eguali successivamente descrive, si ritroverà, ch'essi serbano la ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 ec.: ma la gravità che spinge abbasso il corpo è costante: dunque alla potenza costante compete il movimento dotato della proprietà, che gli spazj ne' successivi tempi eguali

E 2 pas-

paſſati ſieno in proporzione de' numeri diſpari.

Voi m' accuſerete di ſoverchia franchezza nel produrre sì fatta ſperienza così in ſuccinto. Avete ragione: molte rifleſſioni abbiſognano, perchè eſſa ſia deciſiva. In primo luogo comunque la gravità ſia coſtante, pure la potenza applicata al mobile, che diſcende, è variabile, e continuamente ſi fa minore. Imperciocchè eſſendo coſtretto il mobile a cacciar di luogo l' aria, ch' incontra, patiſce un genere di reſiſtenza, la quale certamente è maggiore, eſſendo maggior la velocità. La potenza per tanto, ch' accompagna il mobile, il qual diſcende, ſarà la gravità coſtante detratta la reſiſtenza variabile, la qual potenza ſenza dubbio è variabile. Tuttavolta rifletto, che ſe i tempi ſucceſſivamente eguali ſono notabili, notabili parimente ſon le velocità, e per conſeguenza ancora le reſiſtenze dell' aria: ma ſe diminuiſco i detti tempi, ſi diminuiſcono pure le velocità, e le reſiſtenze per modo, che preſi i tempi infiniteſimi, infiniteſime pur ſono le velocità, e le reſiſtenze: ma la gravità coſtante è finita; dunque le reſiſtenze hanno ad eſſa una minor ragion di qualunque data, e perciò ſi poſſono traſcurare. Per tanto nell' ipoteſi de' tempi infiniteſimi abbiamo la potenza veracemente coſtante.

Appreſſo mi rivolgo agli ſperimenti, e diligentemente conſiderandoli oſſervo, che ſe i tempi, che s' aſſumono ſucceſſivamente eguali, ſono notabili, gli ſpazj, che in eſſi ſcovronſi, deviano notabilmente dalla proporzione de' numeri diſpari: ma minorandoſi i tempi, gli ſpazj ſi vanno appreſſando alla medeſima proporzione per modo, che ne' minuti ſecondi gli ſpazj tanto ſonoſi ad eſſa avvicinati, che non vi ſi rinviene differenza ſenſibile. Quindi chiamiamo in ajuto il noto principio delle ſerie, che ſe i ſuoi ſucceſſivi termini s' accoſtano ſenz' alcun limite ad una proprietà, gli ultimi termini ne ſaranno eſattamente dotati. Accoſtandoſi per tanto la ſerie degli ſperimenti preſi in tempi minori alla proprietà, che gli ſpazj ſieno come i numeri caffi, negli ultimi termini, cioè quando i tempi ſono infinitamente piccioli, gli ſpazj paſſati ne' tempicelli ſucceſſivamente eguali ſaranno come i numeri diſpari eſattamente. Ma s' è poco dianzi provato, che ne' tempicelli infiniteſimi la potenza è coſtante: dunque quando la potenza è coſtante, gli ſpazj ne' ſucceſſivi tempi eguali paſſati ſono come i numeri diſpari.

Nè vi cada in penſiero di obbiettare ciò, che talora, mentre amichevolmente eſponeva cotal ragione, m' è ſtato oppoſto: che ſi prova bensì, eſſere gli ſpazj in ragion de' numeri diſpari, quando i tempi ſucceſſivamente eguali ſono infinitamente piccioli; ma non quando ſono finiti. Imperciocchè geometricamente dimoſtraſi, che ſe gli ſpazj ſono come i numeri diſpari poſti i tempi infiniteſimi, lo ſaranno egualmente, quando i tempi ſono finiti. Queſto proviene dalla natura della ſerie degli ſteſſi numeri diſpari, nella quale ſommando i termini a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec., naſcono ſempre ſerie, i cui termini ſono come i numeri diſpari. Facile è la dimoſtrazione.

Sia la ſerie A de' numeri diſpari

[A] 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 ec.

Si ſommino i termini a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, e naſceranno le ſerie

[B] 4, 12, 20, 28, 36, 44 ec.
[C] 9, 27, 45, 63 ec.
[D] 16, 48, 80 ec.

Se queſte ſi divideranno per li primi termini 4, 9, 16, ſpunterà in tutte la ſerie de' numeri diſpari. Ciò poſto egli è evidente, che ſe gli ſpazj paſſati ne' tempi infiniteſimi eguali ſono come i numeri diſpari, lo ſaranno egualmente gli ſpazj paſſati ne' tempi eguali compoſti di due, di tre, di quattro ec. anzi d' infiniti de' primi tempicelli: ma i tempi compoſti d' infiniti tempi infiniteſimi ſon finiti: dunque gli ſpazj paſſati ne' tempi eguali finiti ſono in proporzion de' numeri diſpari.

Per le quali coſe reſta manifeſtamente provato, che la potenza coſtante produce un movimento, in cui gli ſpazj in eguali tempi ſucceſſivamente paſſati ſono in ragion de' numeri diſpari, e ch' il movimento fornito di tal proprietà proviene da una potenza coſtante. Da così fatta proprietà raccogliamo per legittima conſeguenza, che gli ſpazj preſi dal punto di quiete ſono in ragion duplicata de' tempi, o come i quadrati de' tempi. Concioſſiachè mi metto innanzi le tre ſerie

[A]	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7	ec.
[B]	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13	ec.
[C]	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49	ec.

La prima serie A esprime co' suoi termini il primo, secondo, terzo ec. de' tempi eguali, ovvero i tempi interi presi dal punto di quiete. La seconda B esprime gli spazj negli eguali tempi successivamente passati. Sommando i termini di questa serie avremo gli spazj interi presi dal punto di quiete: ma cotal somma produce la serie C, i cui termini sono i quadrati de' termini corrispondenti della serie A esprimente i tempi: dunque gli spazj sono come i quadrati de' tempi.

Da questa prima legge ne raccoglieremo altre due, ch' introdurranno le velocità, quando avremo avvertito, ch' in un movimento variabile preso un tempicello, od uno spazietto minimo, si può in esso considerare il movimento siccome equabile, perchè qualunque variazione ha alla velocità antecedente minor ragion di qualunque data: dunque la velocità sarà in ragion diretta dello spazietto, ed inversa del tempicello, in cui si trascorre. Ciò posto vengano espressi i tempi dalla linea AT, (*Fig.* 20.), e menata a qualungue angolo la retta AV, s' eccitino a squadra l' ordinate TV. Poichè gli spazj son in ragion duplicata de' tempi AT, potranno esprimersi dall' aja ATV, che parimenti è in ragion duplicata di AT. S' accresca il tempo AT del tempicello Tt, e menata l' ordinata tu, lo spazio percorso nel tempo At verrà espresso dall' aja Atu: dunque lo spazietto passato nel tempicello Tt sarà espresso dall' aja TVut, ovvero, se sia condotta Vm paralella a Tt, dal rettangolo TVmt. La velocità per tanto sarà in ragion diretta di TVmt, ed inversa di Tt, ovvero come l' ordinata TV: ma questa è in ragion del tempo AT; dunque la velocità è come il tempo: ma lo spazio è in ragion duplicata del tempo; dunque ancor della velocità.

Queste due leggi: il tempo è come la velocità; lo spazio è in ragion duplicata della velocità, si possono dimostrare in altra maniera per mezzo della parabola. Essendo gli spazj in ragion duplicata de' tempi, sarà lecito di rapresentar gli spazj coll' assisse AS, (*Fig.* 21.) ed i tempi coll' ordinate ST della parabola apolloniana AT. Preso uno spazietto infinitesimo Ss, e menata l' ordinata st e la Tm paralella a Ss, è chiaro, che lo spazietto Ss verrà scorso nel tempo tm: dunque la velocità al punto S sarà in ragion diretta di Ss, ovvero Tm, e inversa di tm: dunque condotta la tangente TB, la velocità sarà in ragion diretta di BS, e inversa di TS: ma BS è come AS, perchè la prima è doppia della seconda: dunque la velocità è in ragion diretta di AS inversa di TS: ma nella parabola l' ordinata TS è in ragion composta diretta di AS inversa di TS: dunque la velocità è come TS, cioè a dir come il tempo: ma lo spazio è in ragion duplicata del tempo; dunque è ancora in ragion duplicata della velocità.

Qui facciam punto contenti d' avere stabilite le due leggi nel movimento, che proviene da una potenza costante: il tempo è in ragion della velocità; lo spazio è in ragion duplicata della velocità. Nella lettera seguente ricaveremo dell' importanti conseguenze, e ad esse daremo estensione maggiore. Addio.

Bologna li 10. Decembre 1770.

LETTERA IX.

Fissata la giusta proporzion degli effetti s' ampliano le leggi delle Potenze costanti.

DAlle due leggi, che la passata lettera ha stabilite, raccogliamo in questa primamente una importantissima conseguenza. Abbiamo invincibilmente provato, che la misura dell' azione vuol desumersi non dal tempo, ma dallo spazio: dunque posta sempre la medesima potenza, ch' or si suppone costante, la sua azione sarà proporzionale non al tempo, ma allo spazio: dunque non nella legge, che stabilisce il tempo proporzionale alla velocità, ma nell' altra, che fissa lo spazio proporzionale al quadrato della velocità,

cità, s'ha l'azione della potenza: ma all'azione della potenza è proporzionale l'effetto, o sia la mutazion dello stato: dunque non alla velocità, ma al suo quadrato è proporzionale l'effetto, o sia la mutazione di stato. Perciò la legge, ch'insegna, esser lo spazio in ragion duplicata della velocità, si è la principale, che proporziona la cagione all'effetto, ed avrà luogo in tutti i casi possibili; l'altra, ch'insegna esser il tempo come la velocità, sarà accessoria, e dipendente dalle particolari circostanze. Avvertite, che per ora suppongo, la medesima massa ricevere il movimento.

Comunque il metodo sia esatto, e la ragione dimostrativa: pure io so, ch'alla più parte riuscirà strana la conseguenza dedotta, parendo ad essi, che la velocità sia l'unica quantità, da cui debbasi desumer l'effetto: perciocchè essa sola ritrovasi nella massa, non avendo il quadrato della velocità esistenza, se non nella mente de'geometri. Chiunque obbietta così, s'è senza dubbio dimenticato della vera idea della velocità. Non senza il suo motivo ho fatto avvertire sin da principio, che la velocità non è una quantità assoluta, ch'esista realmente ne'corpi mossi, ma una quantità relativa, ch'utilmente viene da geometri conceputa. Imperciocchè essa non è altro, ch'una relazione, o sia una ragione dello spazio, che si percorre, o si percorrerebbe nel moto equabile, al tempo, in cui si percorre, o si percorrerebbe. Richiamata questa giusta idea della velocità, v'accorgerete per voi medesimo, che l'obbiezion non ha forza: perciocchè essa è fondata sopra d'un pregiudizio nato dal frequente introdurre la velocità ne'teoremi, che toglie dalla mente la sua vera nozione.

Or io domando: la ragione dello spazio al tempo, parlo sempre del moto equabile, è l'unica relazione, che si possa considerare nel corpo mosso? E perchè non posso egualmente considerare la ragion duplicata, triplicata, ed in qualunque modo multiplicata dello spazio al tempo, anzi infinite altre relazioni, le quali son tutte del medesimo genere? Or tra tante quantità relative, ch'esistono nella mente de'geometri, qual è quella che merita la preminenza sovra le altre, ed a cui si vuol proporzionare l'effetto? Egli è vero, che la relazione dello spazio al tempo è stata distinta col suo proprio vocabolo, e chiamata velocità o celerità, e che a formar le leggi del moto d'essa si son serviti i geometri assai so-

sovente. Ma ciò è provenuto, perch'essa più dell'altre s'affà all'uso, ed al comodo degli uomini. Quando trattasi di movimento, qual cosa si suol ricercare il più delle volte? Quanto tempo richiedasi a compiere un dato spazio, ovvero quanto spazio compier si possa in un dato tempo. A risolvere così fatte quistioni è necessario considerare la relazione dello spazio al tempo, e l'altre relazioni riescono inutili. Ma l'aver questa relazione il suo proprio nome, ed il servir agli usi umani più dell'altre, è ella una ragione forte e convincente per pronunciare, ch'ad essa per esclusione di tutte l'altre è proporzionale l'effetto? Per tanto essendo impossibile per questa strada di determinare la vera proporzion dell'effetto, fa di mestieri appigliarsi al metodo, c'ho tenuto, e fissare colle leggi dell'equilibrio la vera misura dell'azione; appresso ritrovar le leggi d'un qualche movimento; e combinando una verità coll'altra ricavare la conseguenza, ch'il metodo ci presenta: il qual metodo passo passo ne conduce alla conseguenza, che l'effetto, o sia la mutazione di stato è in ragion duplicata delle velocità.

Ripigliamo il filo del raziocinio. Quanto alla misura dell'azione ella è compita, sapendo essere come la potenza, e lo spazio, qualunque sia la potenza purchè costante: ma dell'effetto non sappiam altro, se non ch'egli è in ragion duplicata della velocità supposta la stessa massa. Ma se si paragonino diverse masse, egli è certo, che cotal elemento dovrà entrare nella proporzion dell'effetto. Per distinguere tra l'infinite funzioni della massa, quale componga la proporzion dell'effetto, fa d'uopo determinare una legge di movimento, nel quale due masse ineguali vengano paragonate.

Io dico per tanto, che qualor le potenze sempre costanti sono in ragion delle masse, queste in tempi eguali passano spazj eguali, ed acquistano per conseguenza eguali velocità. A dimostrarlo io mi servo di due elegantissimi raziocinj dell'incomparabile Galileo. Io formo della stessa materia due corpi eguali, per esempio due paralellepipedi, i quali essendo distanti per esempio due braccia, li lascio cadere da altezze eguali: egli è chiaro, ch'essendo e masse, e gravità, ed ogni altra cosa pari arriveranno in tempi eguali all'orizzontal pavimento, e con eguali velocità. Li avvici-

 no,

no, ſicchè non ſien diſtanti ſe non d'un braccio, e li laſcio dalle ſteſſe altezze cadere: nello ſteſſo tempo di prima il pavimento percuoteranno; e lo ſteſſo ſeguirà, ſe vado ſucceſſivamente le diſtanze loro diminuendo; dunque ſe ancor ſi tocchino, e la diſtanza ſia nulla; dunque ſe ancor s'incollino inſieme: ma così uniti formano un corpo duplo: dunque un corpo duplo diſcende per iſpazj eguali nel medeſimo tempo, che un corpo ſimplo. Collo ſteſſo progreſſo unendo un corpo duplo ad un ſimplo, un corpo triplo ad un corpo ſimplo, o ad un duplo, e così di mano in mano dimoſtrerò, che tutti queſti corpi in tempi eguali paſſano ſpazj eguali, ed acquiſtano eguali velocità: ma in cotai corpi le potenze, cioè le gravità, ſono come le maſſe: dunque le maſſe animate da potenze ad eſſe proporzionali in tempi eguali paſſano ſpazj eguali, ed acquiſtano eguali celerità: com'era da dimoſtrarſi.

Il ſecondo raziocinio ſi fonda ſopra il principio, che ſe due corpi dotati di diverſe velocità ſi congiungano inſieme, il più veloce accelererà il più tardo, ed il più tardo ritarderà il più veloce; onde la velocità d'amendue ſarà media tra le due velocità maggiore e minore. Ciò poſto ſe i corpi forniti di potenze proporzionali alle maſſe, come ſono i corpi gravi compoſti della ſteſſa materia, non ſi muovono con eguali velocità, dovrà eſſer o il maggior più veloce, ovvero il minore: ma nè l'una coſa nè l'altra può dirſi. Se il maggior A è più veloce, ed il minor B più lento, congiunti inſieme A accelererà B, e B ritarderà A: dunque A e B inſieme diſcenderanno con una velocità media, la quale è minore della velocità di A: ma A e B inſieme formano un corpo maggior di A: dunque il corpo maggiore A e B è più tardo nel diſcendere del corpo minore A; lo che è aſſurdo, perchè ripugna all'ipoteſi. Lo ſteſſo aſſurdo deduceſi, quando dicaſi, ch'il minore dee diſcendere più velocemente del maggiore. Adunque devono i corpi maggiori e minori diſcendere con eguale celerità, e paſſare ſpazj eguali in tempi eguali come dovea dimoſtrarſi. I raziocinj, comunque non n'abbiſognino, pure vengono confermati dalla ſperienza; perchè i corpi, anche ſol differenti nella grandezza, nella macchina del Boile eſtratta l'aria, dall'alto della mac-

macchina nello ſteſſo momento laſciati in libertà, battono il fondo nello ſteſſo momento. L'aver menzionata cotale ſperienza m'obbliga a dire, che accadendo lo ſteſſo in tutti i corpi di qualunque ſpecie ſi ſieno, è chiaro, ch'in tutti le gravità ſono proporzionali alle maſſe.

Avanziamo nel raziocinio. In ciaſcun de' predetti movimenti lo ſpazio è come il quadrato della velocità: ma ne' medeſimi la potenza è come la maſſa: dunque componendo le ragioni, la potenza nello ſpazio è come la maſſa nel quadrato della velocità: ma la potenza nello ſpazio eſprime l'azione: dunque l'effetto o ſia la mutazion dello ſtato è come la maſſa nel quadrato della velocità: dunque la funzion della maſſa, ch'entra nella proporzion dell'effetto, non è altro che la medeſima maſſa. Quindi dovendo eſſer ſempre mai all'effetto proporzionale l'azione, qualunque ſieno le potenze, e le maſſe, purchè coſtanti, ſarà vera la legge: la potenza nello ſpazio come la maſſa nel quadrato della velocità. Da queſta ſi ricava l'altra: la potenza nel tempo come la maſſa nella velocità. Eſprima l'aſſiſſa AS lo ſpazio, e l'ordinata ST (*Fig.* 21.) la velocità. Accreſciuto lo ſpazio dell'elemento Ss, s'ordini st, e ſi meni Tm paralella a Ss. Per la legge ſtabilita s'avranno, fatta la potenza $= \underline{p}$, la maſſa $= \underline{m}$,

$\underline{p}\,.\,As$ come $\underline{m}\,.\,ts^2$ | dunque la ſeconda proporzion levando dal-
$\underline{p}\,.\,AS$ come $\underline{m}\,.\,TS^2$ | la prima, s'avrà

$\underline{p}\,.\,Ss$ come $\underline{m}\,.\,ts^2 - TS^2 = \underline{m}\,.\,2TS\,.\,tm$: dunque $\underline{p}\,.\,\frac{Ss}{TS}$ come $\underline{m}\,.\,tm$: ma $\frac{Ss}{TS}$ è come il tempicello, in cui ſi paſſa Ss: dunque $\underline{p}$ nel detto tempicello come $\underline{m}\,.\,tm$, e poichè $\underline{p}$, $\underline{m}$ ſono coſtanti ſarà integrando $\underline{p}$ nel tempo, in cui ſi ſcorre la AS, come $\underline{m}$ nella velocità TS.

Nelle leggi, ch'abbiam ſiſſate ſin ora, gli ſpazj e i tempi hanno cominciamento dal punto, ove il corpo era in ripoſo: da eſſe è facile raccoglier quelle, nelle quali gli ſpazj, ed i tempi incominciano da' punti, ov'il corpo è dotato d'una finita velocità. Rappreſenti DT (*Fig.* 20.) il tempo, nel cui principio ſia fornito il mobile della velocità DC. Si determini il tempo AD, nel-

nel quale partendo il mobile dalla quiete acquistarebbe la velocità DC: al punto T abbia la velocità TV. Le leggi dimostrate c'insegnano, che chiamata la potenza = p, la massa = m, varranno le due proporzioni

p. AT come m. TV | dunque sottraendo la seconda dalla pri-
p. AD come m. DC | ma, nascerà la legge

p. $\overline{AT - AD}$ = p. DT come m. $\overline{TV - DC}$; cioè a dire la potenza nel tempo, come la massa nella differenza delle due velocità terminale e iniziale.

Similmente essendo DS (*Fig.* 21.) lo spazio, nel cui principio il mobile ha la velocità DC, si ritrovi lo spazio AD, per cui il mobile acquista la velocità DC, e nel punto S abbia la velocità ST. Avranno luogo le due proporzioni

p. AS come m. ST^2 | e sottraendo dalla prima la seconda,
p. AD come m. DC^2 | nascerà

p. $\overline{AS - AD}$ = p. DS come m. $\overline{ST^2 - DC^2}$, cioè la potenza nello spazio come la massa nella differenza de' quadrati delle due velocità terminale e iniziale. Da questa formula si deduce, ch'il cangiamento di stato, che soffre il corpo passando da una velocità minore ad una maggiore, è proporzionale alla massa nella differenza de' quadrati della velocità. Imperciocchè p. DS esprime l'azione; ma l'azione è proporzionale al cangiamento di stato, e p. DS è come m. $\overline{ST^2 - DC^2}$; dunque il cangiamento di stato è come m. $\overline{ST^2 - DC^2}$.

Le cose dette fin ora riguardano il moto accelerato; ma una semplice riflessione le trasporterà al ritardato. Egli è manifesto, che s'un mobile dopo aver acquistata in virtù d'una potenza costante una determinata velocità, si concepisca rivolger il cammino contro alla direzione della potenza con una velocità eguale, la potenza eserciterà la medesima azione, con questo sol di divario, che nel primo caso cospirando la direzione della potenza con quella della velocità, ed essendo l'azione spontanea, la velocità anderà aumentando; laddove nel secondo la velocità si diminuirà, perciocchè la sua direzione è contraria a quella della potenza, e l'azione

è sfor-

è sforzata. Adunque cogli stessi gradi s'accresce nel primo caso, con cui si diminuisce nel secondo: adunque e nell'un caso e nell'altro vagliono le leggi: la potenza nel tempo è come la massa nella differenza delle velocità: la potenza nello spazio è come la massa nella differenza de' quadrati delle velocità: nè v'ha altra differenza, se non che la velocità iniziale è minore nel primo caso, maggior nel secondo della velocità terminale.

Qui sembrami luogo acconcio per dichiarare alcune espressioni, di cui per parlare più speditamente mi servirò in avvenire. Quando non v'abbia azione di sorte alcuna, o quando sieno eguali l'azioni spontanee e sforzate, dirò, ch'il mobile conserva la medesima quantità di stato, la quale devesi porre proporzionale al prodotto della massa nel quadrato della velocità. Ma quando l'azioni spontanee maggiori sono delle sforzate o viceversa, diremo, che v'ha mutazione di quantità di stato, o semplicemente mutazione di stato, che sempre sarà proporzionale alla massa nella differenza de' quadrati delle velocità iniziale e terminale. La velocità terminale sarà maggiore, se sieno maggiori l'azioni spontanee; sarà maggiore la velocità iniziale, se sieno maggiori l'azioni sforzate. Avverto, ch'abbiam parlato de' moti, in cui la stessa è la direzione del moto e della potenza, dove lo spazio percorso dal mobile è lo stesso, che quello onde si fa l'accostamento, o il discostamento dal centro delle potenze. Negli altri movimenti convien aver memoria che l'azione va misurata non dallo spazio scorso dal mobile, ma dallo spazio d'accesso o di recesso dal centro delle potenze.

Poste in tutto il suo lume le leggi delle potenze costanti, e determinata la misura della mutazion dello stato, la lettera ha pienamente adempito ciò, che s'era proposta di fare, e con ciò spera eziandio d'aver pienamente a voi soddisfatto: onde vi viene innanzi, promettendosi d'esser accolta benignamente.

Bologna lì 14. Dicembre 1770.

LET-

LETTERA X.

Ridotte a miſure preciſe le quantità ſi parla delle potenze variabili, delle potenze, che ſono in data ragione, e delle potenze naſcenti.

Le leggi delle potenze coſtanti, ch'accreſcono e diminuiſcono il movimento ai corpi, che da prima forniti erano d'una finita velocità, ci preſentano un metodo geometrico, e ſicuro per rinvenir le leggi delle potenze in qualunque modo variabili. Imperciocchè preſo un tempicello, od uno ſpazietto minimo, in eſſo ſi vuol la potenza riguardare come coſtante, perchè qualunque incremento, o decremento, ch'ella riceva, egli è infiniteſimo, ed ha alla ſteſſa potenza una ragion minor di qualunque data: dunque ſi può prendere come nullo, e la potenza come coſtante. Applicando dunque le leggi delle potenze coſtanti, perverremo a due equazioni differenziali, le quali acconciamente integrate ci metteranno innanzi le leggi delle potenze variabili.

Il metodo ha biſogno d'eſſere ſpiegato con più minutezza. Rappreſentino le AB (*Fig.* 22.) i tempi, ovvero gli ſpazj, e ſia DP la ſcala delle potenze, che vengano eſpreſſe dall'ordinate BP. Prendaſi un tempicello od uno ſpazietto infiniteſimo Bb. E' chiaro, ch'in queſto elemento la potenza BP ſi può riguardare come coſtante: dunque in queſto elemento ſi poſſono applicar le leggi delle potenze coſtanti. Chiamata per tanto la potenza $= p$, la maſſa $= m$, il tempo $= t$, lo ſpazio $= s$, gli elementi loro $= dt$, ds, la velocità in $B = u$, in $b = u + du$, ſarà la differenza delle velocità $= du$, e la differenza de' quadrati $= 2udu + du^2$, nella quale ommeſſo il du^2, ſi ritroverà la detta differenza $= 2udu$. Eſſendo per la legge delle potenze coſtanti la potenza nel tempo come la maſſa nella differenza delle velocità, avremo pdt come mdu. Similmente eſſendo la potenza nello ſpazio come la maſſa nella differenza de' quadrati delle velocità, avrem pds come $mudu$. Nel moto ritardato le formule riceveran pochiſſima mutazione, perchè baſterà conſiderar come negativo l'incremento della velocità, e ſcrivere $-du$ in cambio di du; onde s'avrà pdt come $-mdu$, e pds come $-mudu$. Se ſia dato il valor della potenza variabile pel tempo, lo che accade rade volte o non mai, baſterà integrare la prima formula, e s'avrà una legge del movimento, da cui tutte l'altre ſi potranno geometricamente raccogliere. All'oppoſito ſe data ſia la potenza per lo ſpazio, come ſuol eſſere, l'integrazion della ſeconda formula ci porgerà la legge del movimento, da cui ſi ricaveranno l'altre.

Sin ora non abbiam parlato ſe non di proporzione. Prima di paſſar oltre, e di dar un qualche eſempio delle potenze variabili, ſarà bene di ridur ad una preciſa miſura tutte le quantità, e di fiſſare una più rigoroſa eguaglianza. Do principio dal moto equabile, nel quale la velocità non è altro, che la ragione diretta dello ſpazio paſſato, ed inverſa del tempo impiegato: onde chiamata la velocità $= u$, lo ſpazio $= s$, il tempo $= t$, ſarà u come $\frac{s}{t}$. Per convertire la proporzione in egualità, moltiplico la frazione $\frac{s}{t}$ per un tempo coſtante $= k$, onde ſia $u = \frac{ks}{t}$. Se pongo $t = k$, ritrovo $u = s$. dal che deduco, che la ſpecie u eſprime lo ſpazio s, che nel tempo coſtante $= k$ vien percorſo dal mobile equabilmente. Comunque ſia in libertà di rappreſentare per la ſpezie k qualunque determinata parte di tempo, pure ſembrami molto comodo il fiſſarla eguale ad un minuto ſecondo: nella qual ipoteſi la velocità u ſarà quello ſpazio, che dal mobile ſi paſſa in un minuto ſecondo con moto equabile. Or in qualunque movimento accelerato, e ritardato potendoſi, come s'è detto dianzi, riguardar come equabile il movimento per lo ſpazietto ds, e nel tempicello dt, s'avrà $u = \frac{kds}{dt}$; e queſta è la prima formula d'egualità, che vuolſi adoprare, per indagare le proprietà del movimento.

Legge univerſale del moto accelerato ſi è, che la potenza nello ſpa-

ſpazio minimo è proporzionale alla maſſa, alla ſua velocità, e al ſuo incremento, cioè $p\,ds$ come $m\,u\,du$. Egli è certo, che poſſo convertire la proporzione in egualità multiplicando $p\,ds$ per una determinata coſtante, che chiamo $= \lambda$, onde s'abbia $\lambda p\,ds = m\,u\,du$. La ſpecie λ eſprimente una coſtante deveſi ridurre a miſure certe. In luogo di u ſi ſoſtituiſca il ſuo valore $\frac{k\,ds}{dt}$, onde naſca $\lambda p\,ds = \frac{mk\,ds\,du}{dt}$, ovvero $\lambda p\,dt = mk\,du$. Perciocchè λ dev'eſſer coſtante, qualunque ſia il valore delle due p, m, ſupponiamo l'una e l'altra coſtante, e facciamo l'integrazione $\lambda pt = mku$. Di nuovo ſi ſoſtituiſca il valor di u, onde ſia $\lambda pt = \frac{mk^2 ds}{dt}$, o ſia $\lambda pt\,dt = mk^2 ds$, e di nuovo integrando $\frac{\lambda pt^2}{2} = mk^2 s$. Si faccia $t = k$, ed s ſarà quello ſpazio, per cui la potenza coſtante p nel tempo k promuove la maſſa m, il quale ſpazio in appreſſo diremo $= \varepsilon$. Adunque riſulterà $\frac{\lambda p}{2} = m\varepsilon$. Ponghiamo, eſſer p il peſo d'un corpo terreſtre in una data ragione, a cui la maſſa è proporzionale; onde ſi poſſa la maſſa m eſprimer pel ſuo peſo p. Ritroveremo $\lambda = 2\varepsilon$, cioè a dire λ eguaglierà il doppio di quello ſpazio, che nel tempo k con moto accelerato ſi traſcorre dal corpo terreſtre. Che ſe k ſia un minuto ſecondo, lo ſpazio ε ſarà eguale proſſimamente a piedi renani 15. 625, ovvero a piedi parigini 15. 0 96. Le potenze l'eſprimeremo co' peſi de' corpi terreſtri, co' quali direttamente fanno equilibrio: le maſſe poi co' peſi de' corpi terreſtri, che contengono la ſteſſa quantità di materia.

Così ſtabilite le coſe, le formule, che voglionſi adoperare in qualſiſia movimento ſon le ſeguenti $u = \frac{k\,ds}{dt}$, $2\varepsilon p\,ds = m\,u\,du$,

da

da cui, quando una ſteſſa ſia la direzione del moto e della potenza, deriva l'altra $2\varepsilon p\,dt = m\,du$. L'elemento du vuolſi prender poſitivamente nel moto accelerato, negativamente nel ritardato. In queſte formule u è lo ſpazio, che verrebbe traſcorſo dal mobile nel tempo k equabilmente, ſe ceſſaſſe ogni accelerazione, o ritardazione: p è il peſo del corpo terreſtre, ch' eguaglia la potenza: m il peſo del corpo terreſtre, che contiene la ſteſſa quantità di materia, ch'è nel corpo moſſo: ε lo ſpazio, pel quale il peſo p qualunque viaggia diſcendendo nel tempo k. Le antecedenti formule paragonano lo ſpazio, o il tempo colle velocità. Chi amaſſe d'avere quella, che paragona il tempo e lo ſpazio, nell' ipoteſi, che la direzione del moto ſia la ſteſſa colla direzione della potenza, può procedere con queſto metodo. S' integri la formula $\frac{2\varepsilon p\,ds}{m} = u\,du$, e s'avrà $\frac{4\varepsilon}{m} S p\,ds = u^2$; dunque $2\sqrt{\frac{\varepsilon S p\,ds}{m}} = u = \frac{k\,ds}{dt}$, o ſia $dt = \frac{k\sqrt{m}\,.\,ds}{2\sqrt{\varepsilon S p\,ds}}$: e queſta è la formula che paragona il tempo e lo ſpazio. Se p è coſtante, ſi prenda la ſommatoria di $p\,ds$, in ſuppoſizion che $= 0$, ſe $s = 0$, e ſarà ps: dunque $dt = \frac{k\sqrt{m}\,.\,ds}{2\sqrt{p\varepsilon}\,.\,\sqrt{s}}$ e integrando $t = \frac{k\,.\sqrt{m}\,.\sqrt{s}}{\sqrt{p\varepsilon}}$, ovvero $\frac{t^2}{k^2} = \frac{ms}{p\varepsilon}$; della qual formula faccio particolar menzione, perchè d'eſſa in altro tempo avrò biſogno.

Quando non s' uſino altro, ch' i calcoli aritmetici ed analitici, le quantità ſon ridotte a preciſe miſure; ma ſe ſi voglia paſſare alle coſtruzioni geometriche, oltre alle quantità s, u, ε, che ſono vere linee, convien eſprimer per linee le quantità k, t, p, m. Si prenda una linea determinata ad arbitrio, per cui s' eſprima il dato tempo k, la linea che ſi ritroverà eſprimer la ſpecie t, darà il tem-

G po;

po; perchè la linea assunta a questa sarà come k al tempo cercato. Similmente s'esprima per una determinata linea un dato peso, per esempio una libbra, la linea esprimente la potenza dovrà essere a questa come la potenza al peso assunto: e la linea esprimente la massa dovrà essere all'assunta come la massa del corpo mosso alla massa del peso assunto. Sembra non aver bisogno la cosa d'ulteriore dichiarazione.

M'accingo a dar un esempio delle potenze variabili, e sciego quello, in cui si suppone essere la potenza come la distanza dal centro. Sia C (*Fig.* 23.) il centro delle potenze, che spingono il corpo. Presa una data distanza $CA = a$, sia la data potenza in A $= P$. Discendendo il mobile dal punto di quiete B, posta la distanza $CB = b$, arrivi in D. Chiamata $CD = s$, è chiaro, che sarà $CA = a : CD = s :: P : \frac{Ps}{a}$, ch'esprimerà la potenza applicata al mobile in D. Si prenda l'elemento Dd, che sarà $= -ds$. Adunque nascerà la formula $-\frac{2\varepsilon Psds}{a} = mudu$: dunque integrando colla necessaria aggiunta della costante $A - \frac{\varepsilon Ps^2}{a} = \frac{mu^2}{2}$. A determinare la costante A, s'avverta, che $u = o$, quando $s = b$: dunque $A = \frac{\varepsilon Pb^2}{a}$, e però l'equazione sarà $\frac{2\varepsilon P}{ma} \cdot \overline{bb - ss} = uu$.

Per la costruzione col raggio CB descritto il circolo BFE, è chiaro, che sarà l'ordinata $DF = \sqrt{bb - ss}$: dunque l'equazione trovata sarà $\frac{\sqrt{2\varepsilon P}}{\sqrt{ma}} \cdot DF = u$. Avrà per tanto la velocità in D all'ordinata DF la ragione costante di $\sqrt{2\varepsilon P} : \sqrt{ma}$. Se tal ragione sia d'egualità, il circolo sarà la scala delle velocità; ma se sia ragione d'inegualità, la scala delle velocità sarà un ellissi, il cui semiasse BC sarà al semiasse conjugato in ragione di $\sqrt{ma} : \sqrt{2\varepsilon P}$. Il circolo, com'è noto, è una curva, che ritorna in se stessa. Il primo quadrante BE serve al movimento accelerato, quando il corpo dal punto di quiete B si porta al centro C, dove è dotato d'una data celerità $= \frac{\sqrt{2\varepsilon P}}{\sqrt{ma}} \cdot b$. Il secondo quadrante E 2 B serve al moto ritardato, quando cioè viaggiando per C 2 B perde la velocità acquistata, e si riduce al punto di quiete 2 B. Il terzo quadrante 2 B 2 E, ove l'ordinate son negative, serve al moto accelerato, quando da 2 B ritorna in C. L'ultimo 2 E B serve al moto ritardato, quando da C perdendo la velocità ritorna in B, dove si ferma. Quivi arrivato ritornerà a muoversi, come prima.

Passiamo a' tempi. Avverto, che posto il seno totale $= b$, DF è il seno dell'arco BF, che chiamerò $= \mu$, onde sia $DF = Sc. \mu$. Per tanto s'avrà $\frac{\sqrt{2\varepsilon P}}{\sqrt{ma}} \cdot Sc. \mu = u$: ma $CD = s = Cc. \mu$; dunque $-ds = -dCc. \mu$; dunque $u = -\frac{kdCc. \mu}{dt}$: dunque $\frac{\sqrt{2\varepsilon P}}{\sqrt{ma}} \cdot Sc. \mu = -\frac{kdCc. \mu}{dt}$, ovvèro $dt = -\frac{k\sqrt{ma} \cdot dCc. \mu}{\sqrt{2\varepsilon P} \cdot Sc. \mu}$: ma $-dCc. \mu = \frac{d\mu \cdot Sc. \mu}{b}$: dunque $dt = \frac{k\sqrt{ma}}{\sqrt{2\varepsilon P}} \cdot \frac{d\mu}{b}$, e integrando $t = \frac{k\sqrt{ma}}{\sqrt{2\varepsilon P}} \cdot \frac{\mu}{b}$: dunque sarà $k : t$ in ragion composta di $b : \mu$, e di $\sqrt{2\varepsilon P} : \sqrt{ma}$. Se ponghiamo il mobile arrivato al punto C, sarà $b : \mu$ come il raggio al quadrante, la qual proporzione è sempre la stessa, comunque si muti il raggio, cioè lo spazio, per cui il mobile è disceso.

Nel-

Se a' due corpi, che partono da N, n con velocità servanti la ragione $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{m}}$, s'oppongano due potenze in ragione di A : a, le quali conservino questa proporzione, quando gli spazj passati sieno in ragione di B : b: dico, che passati questi spazj le velocità saranno nella stessa ragione di $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{m}}$, e i tempi, in cui si passano, in ragione di $\frac{\sqrt{MB}}{\sqrt{A}} : \frac{\sqrt{mb}}{\sqrt{a}}$. La proposizione è inversa, e col la dimostrazione assai facile.

Se la ragione di A : a è d'egualità, le velocità saranno come $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{m}}$, ed i tempi come $\sqrt{MB} : \sqrt{mb}$. Perciò se le masse sieno in ragione diretta di B : b, le velocità saranno eguali; e se le masse sieno in ragion reciproca di B : b, saranno eguali i tempi. Quest' ultima ipotesi s' ha in due serie d' elastri perfettamente eguali, ma composti d' un disugual numero d' elastri. Conciossiachè poste le serie AM, am, (*Fig.* 25.) che sieno immobilmente fisse ne' punti A, a, ed in cui tutti gli elastri si trovino egualmente chiusi, egli è chiaro, che gli spazj AM, am saranno come i numeri degli elastri, che diremo B, b. Alle masse M, m saranno applicate potenze eguali; lo che avverrà sempre, quando gli spazj, per cui si aprono o si chiudono le due serie, sieno in ragion de' numeri degli elastri B, b, ovvero quando ciascun degli elastri s' apre egualmente. Posta A = a, vagliono i teoremi sopra esposti. Adunque aperte, o chiuse le serie in ragion de' numeri degli elastri, le velocità saranno eguali, quando le masse sieno in ragion diretta de' numeri degli elastri; ed eguali i tempi, quando le masse sieno in ragion reciproca de' numeri degli elastri, ch' in questo caso saran come le velocità. Ho fatto particolar menzione di quest' ipotesi, perchè d'essa

sa

sa, in appresso mi servirò. L' altre le lascio interamente alla vostra industria.

La terza riflessione si è, che finora s' è detto dagli autori comunemente, che quando al corpo in quiete sia applicata una potenza = o, egli non si muoverà mai, ma si starà eternamente in riposo. La dottrina è vera, quando non s' escludano le potenze nascenti, le quali quantunque da prima sien nulle, pure nascendo producono moto, che sovente cresce, finchè diviene finito. Dichiarerò il mio pensiero con un semplicissimo esempio. Ad una corda elastica AC (*Fig.* 26.) posta nella sua natural distensione sia legata la massa C. Io tengo stretta tra le dita l' altra estremità della corda A. Fin a tanto che io tengo ferma la mano, egli è chiaro più della luce del mezzogiorno, che rimanendo la corda nello stato suo naturale, non verrà il corpo da potenza veruna sollecitato, ond' egli si starà perpetuamente in riposo. Ma s' io muovo l' estremità A verso S, egli è egualmente chiaro, che distraendosi la corda, anderà nascendo la potenza contro al corpo C, la quale a poco a poco agendo cangierà il suo stato di quiete, e lo condurrà allo stato di velocità.

In questi casi hanno luogo gli stessi principj, ma le formule, che si presentano, riescono più difficili a maneggiarsi. Illustrerò il metodo col trattar un caso semplicissimo, cioè quando le potenze sono come le distrazioni delle corde, ed il punto A si muove con moto equabile. Trattanto ch' il punto A ha viaggiato equabilmente per AS, il corpo C con moto accelerato sia passato in X. Si chiami AS = s, CX = x. E' chiaro, che la distrazion della corda sarà = s − x: dunque se chiamisi = p la potenza, onde è fornita la corda, posta la distrazion = a, la potenza sollecitante il corpo in X sarà = $p \cdot \frac{s-x}{a}$. Presi per tanto gli elementi Ss = ds, Xx = dx passati nel medesimo tempo, e chiamata la velocità di A = C, quella del corpo C = u, avremo l'equazione $2\varepsilon p \cdot \frac{s-x}{a}$.

d

$dx = mudu$; ma $u : C :: dx : ds$; dunque $u = \frac{Cdx}{ds}$, e presa per costante ds, sarà $du = \frac{Cddx}{ds}$: dunque $s - x \,.\, dx = \frac{maC^2}{2\varepsilon p} \,.\, \frac{dxddx}{ds^2}$, ovvero $s - x \,.\, ds^2 = \frac{maC^2}{2\varepsilon p} \,.\, ddx$. Si faccia $\frac{maC^2}{2\varepsilon p} = rr$, di più $s - x = z$, che dinoterà la distrazion della corda, onde sarà $ds - dx = dz$, e $ddx = -ddz$: nascerà la equazione $zds^2 = -rrddz$.

L'integral completo di questa equazione si sa essere $z = A \,.\, \mathrm{Cc.}\, s + B \,.\, \mathrm{Sc.}\, s$, posto r il seno totale. A determinare i valori delle costanti assunte A, B, s'avverta, che se $s = 0$, e per conseguenza $\mathrm{Sc.}\, s = 0$, $\mathrm{Cc.}\, s = r$, devono esser x, $z = 0$: dunque $0 = rA$, o sia $A = 0$: dunque l'equazione $z = B\,\mathrm{Sc.}\, s$. In oltre s'avverta, che presa s infinitamente picciola, onde sia $\mathrm{Sc.}\, s = s$, deve x esser infinitamente picciola rispetto alla s, e però $z = s$: dunque $s = Bs$, e però $B = 1$, e l'equazione $z = \mathrm{Sc.}\, s$: ma $z = s - x$; dunque $x = s - \mathrm{Sc.}\, s$. Per ritrovare la velocità si differenzi, e sarà $dx = ds - d\,\mathrm{Sc.}\, s$: ma $d\,\mathrm{Sc.}\, s = \frac{ds.\, \mathrm{Cc.}\, s}{r}$; dunque $dx = ds - \frac{ds.\, \mathrm{Cc.}\, s}{r}$: dunque $dx : ds :: r - \mathrm{Cc.}\, s : r$: ma $ds : dx :: u : C$; dunque $u : C :: r - \mathrm{Cc.}\, s : r$, o sia $u = \frac{C.\, r - \mathrm{Cc.}\, s}{r}$. Facil cosa sarebbe il rappresentare la proporzione delle quantità ritrovate con una semplice costruzione: ma questo basta ad indicare il metodo, onde si vogliono anche alle potenze nascenti applicare i principj già stabiliti.

Ho sentito con piacere il felice vostro arrivo in codesta isola. Mi sembra lunga una navigazione di tredici giorni da Livorno a Cagliari; nè so intendere la ragione, perchè tanto siate trascorso fino a discoprire le montagne di Tunisi; quando non v'abbia spinto un ardente desiderio di respirare l'aria Africana. Addio.

Bologna li 24. Dicembre 1770.

LETTERA XI.

Delle Potenze poste in mezzo a due Corpi.

Sinora non ho trattato se non d'una potenza applicata ad un corpo, e della mutazione di stato, ch'in esso produce colla sua azione. Alquanto più inviluppata si è la teoria d'una potenza posta in mezzo a due corpi, il cui valore sia dato in qualunque maniera per la distanza de' medesimi corpi. Per aver sotto degli occhi un qualch' esempio di tai potenze, immaginatevi una serie d'elastri immateriali, che sieno stati sin ad un certo grado costipati, la qual serie stia in mezzo a due corpi dotati di qualsivoglia celerità. E' chiaro, che l'elasticità applicata con contraria direzione a due corpi agirà contra d'essi per l'una parte e per l'altra, e anderà successivamente lo stato loro cangiando. Lo stesso dicasi, quando gli elastri fossero distratti più del natural loro stato. La potenza dell'elasticità poi dipenderà dalla distanza degli stessi corpi, benchè ignota ne sia sinora la proporzione. Prenderò l'ipotesi più universale, e determinerò il metodo, che si vuol usare con ispeditezza per determinare le leggi regolatrici di tai movimenti.

Io suppongo due corpi A, a, (*Fig.* 27.) muoventesi colle velocità C maggiore, e c minore per la medesima direzione, e in mezzo ad essi la potenza $= p$, che tenta d'allontanarli con direzioni contrarie. I corpi A, a, tra quali è posta la potenza, nel principio quando son dotati delle velocità C, c, sieno in A, a, e sia la distanza loro $Aa = a$. Percorrano nello stesso tempo gli spazj $AB = S$, $ab = s$, e si chiami la distanza $Bb = x$. Si segnino gli ele-

elementi $BS = dS$, $bs = ds$ passati nello stesso tempicello. Il tempo, in cui si scorrono AB, ab sia $= t$, ed il suo elemento, in cui si scorrono BS, bs, sarà $= dt$. Le masse si chiamino M, m, e le velocità in B, b sieno U, u.

Così preparate le cose, i principj nell'antecedenti lettere dimostrati ci offrono subito due equazioni $2\mathcal{E}pds = -MUdU$, $2\mathcal{E}pds = mudu$. Perciocchè non è p data nè per S, nè per s, poco vantaggio ricaveremo da queste equazioni, quando non ci riesca d'allontanar le due specie S, s, e d'introdurre la x. Egli è visibile, che sarà $Aa - Bb = AB - ab$, ovvero $a - x = S - s$, e differenziando $-dx = dS - ds$. Quindi levando la seconda equazion dalla prima, ricaveremo $2\mathcal{E}pdS - 2\mathcal{E}pds = -MUdU - mudu$: dunque $-2\mathcal{E}pdx = -MUDU - mudu$, e integrando $2\mathcal{E}S - pdx = \frac{MC^2 + mc^2 - MU^2 - mu^2}{2}$. Colla costante aggiunta s'ottiene, ch'al principio essendo $U = C$, $u = c$, la sommatoria $S - pdx$ sia $= 0$. Adunque

$$\frac{MU^2 + mu^2}{2} + 2\mathcal{E}S - pdx = \frac{MC^2 + mc^2}{2},$$

nella qual equazione è contenuta la prima legge. A ben intenderla, s'avverta, che $2\mathcal{E}SpdS$ è l'azione esercitata dalla potenza p contro al corpo A, dalla quale la quantità di stato viene diminuita nello stesso corpo A, e $2\mathcal{E}Spds$ è l'azione esercitata contro al corpo a, ch'accresce la sua quantità di stato: le quali due azioni si vogliono considerare come contrarie, perchè una diminuisce, e l'altra accresce dello stato la quantità: dunque $2\mathcal{E}S - pdx$ sarà la differenza delle due azioni contrarie, e però in avvenire la chiamerò azione totale della potenza media. Perciò la prima legge sarà, che la somma delle quantità di stato, che primamente si ritrovavano nelle masse A, a, è eguale alla somma dell'attuali quantità di stato, quando a questa s'aggiunga l'azion totale della potenza media. Qualunque volta poi cotal azione sia $= 0$, la somma delle quantità di stato sarà eguale alla primitiva.

Ri-

Ripigliamo le due prime equazioni $2\mathcal{E}pdS = -MUdU$, $2\mathcal{E}pds = mudu$: ma $dS = \frac{Udt}{k}$, $ds = \frac{udt}{k}$; dunque $\frac{2\mathcal{E}pdt}{k} = -MdU$, $\frac{2\mathcal{E}pdt}{k} = mdu$: dunque $-MdU = mdu$, e integrando $MC - MU = mu - mc$, ovvero $MC + mc = MU + mu$: dunque le quantità del moto primitive sono eguali alle quantità del moto attuali; e ciò in qualunque luogo si ritrovino i corpi, e qualunque sia l'azione totale della potenza media: e questa è la legge seconda.

Dispongo così l'equazion della prima legge $MC^2 - MU^2 = mu^2 - mc^2 + 4\mathcal{E}S - pdx$, e così quella della seconda legge $MC - MU = mu - mc$. Si divida l'una per l'altra, e si troverà $C + U = u + c + \frac{4\mathcal{E}S - pdx}{MC - MU} = u + c + \frac{4\mathcal{E}S - pdx}{mu - mc}$: dunque $C - c = u - U + \frac{4\mathcal{E}S - pdx}{MC - MU}$: cioè la velocità relativa, che si ha nel principio del moto, eguaglia l'attuale, quando a questa s'aggiunga il doppio dell'azione della potenza media divisa per $MC - MU$, o sia per $mu - mc$: e questa la riguarderò come la terza legge. Se $S - pdx = 0$, ritroveremo $C - c = u - U$, cioè saranno eguali le velocità relative, l'una delle quali sarà d'accostamento, l'altra di discostamento.

Passiamo a determinare le velocità, ch'esigono un calcolo non difficile, ma lunghetto. La prima legge, multiplicando per m, ci fornisce l'equazione $4m\mathcal{E}S - pdx = MmC^2 + m^2c^2 - MmU^2 - m^2u^2$. La seconda legge ci fornisce $mu = MC + mc - MU$, la qual quadrata da $m^2u^2 = M^2C^2 + 2MmCc + m^2c^2 - 2MU.MC + mc + M^2U^2$. Fatta per tanto la sostituzione, nascerà l'equazione $4m\mathcal{E}S - pdx = MmC^2 + m^2c^2 - MmU^2 - M^2C^2 - 2MmCc - m^2c^2 - M^2U^2$

Se

$+ 2 MU . \overline{MC + mc}$: la qual ridotta, e trasportati i termini, diventerà $U^2 . M . \overline{M + m} - 2 MU . \overline{MC + mc} = M . \overline{M - m} . C^2 - 2 MmCc - 4 m \varepsilon \overline{S - pdx}$; ovvero $U^2 - 2 U . \frac{MC + mc}{M + m}$

$$= \left| \frac{M - m}{M + m} C^2 - \frac{2 mCc}{M + m} - \frac{4 m \varepsilon \overline{S - pdx}}{M . \overline{M + m}} \right.$$

, ed aggiunto il quadrato della metà del coefficiente

$$\overline{U - \left\{\frac{MC + mc}{M + m}\right.}^2 = \frac{M^2 C^2}{\overline{M + m}^2} + \frac{2 MmCc}{\overline{M + m}^2} - \left\{\frac{M - m}{M + m} C^2 - \frac{2 mCc}{M + m}\right.$$

$$+ \frac{M^2 c^2}{\overline{M + m}^2} - \frac{4 m \varepsilon \overline{S - pdx}}{M . \overline{M + m}}$$

$$= \frac{\overline{mC - mc}^2}{\overline{M + m}^2} - \frac{4 m \varepsilon \overline{S - pdx}}{M . \overline{M + m}}$$

: dunque estratta la radice, e fatta la trasposizione

$$U = \frac{MC + mc}{M + m} \pm m \sqrt{\frac{\overline{C - c}^2}{\overline{M + m}^2} - \frac{4 \varepsilon \overline{S - pdx}}{Mm . \overline{M + m}}}$$

Se $S - pdx = 0$, ritroveremo $U = \frac{MC + mc \pm mC \mp mc}{M + m}$.

Se prendansi i segni superiori, si ha $U = C$, che dà il principio del movimento; se gl'inferiori, ritroveremo $U = \frac{MC - mC + 2 mc}{M + m}$

Con somigliante metodo si troverà

$$u = \frac{MC + mc}{M + m} \mp M \sqrt{\frac{\overline{C - c}^2}{\overline{M + m}^2} - \frac{4 \varepsilon \overline{S - pdx}}{Mm . \overline{M + m}}}$$

e se $S - pdx = 0$, $u = \frac{MC + mc \mp MC \pm Mc}{M + m}$.

Se prendansi i segni superiori, si ritorna allo stato iniziale de' corpi; se gl'inferiori, sarà $u = \frac{2 MC + mc - Mc}{M + m}$. Questa quarta legge ci fornisce le velocità de' due corpi.

A ritrovar il tempo, richiamiamo l'equazione $2 \varepsilon pdS = - MUdU$, dalla quale essendo $dS = \frac{Udt}{k}$, ricaviamo $\frac{dt}{k} = - \frac{MdU}{2 \varepsilon p}$. Differenziamo l'equazione, che ci dà la velocità U, e ritroveremo

$$dU = \frac{\pm 4 m \varepsilon pdx}{2 M . \overline{M + m} \sqrt{\frac{\overline{mC - mc}^2}{\overline{M + m}^2} - \frac{4 m \varepsilon \overline{S - pdx}}{M . \overline{M + m}}}}$$

ovvero $- dU = \frac{\mp 2 \varepsilon pdx}{\sqrt{\frac{M^2 . \overline{C - c}^2 - M . \overline{M + m} . 4 \varepsilon \overline{S - pdx}}{m}}}$;

dun-

dunque $\frac{dt}{k} = \frac{\mp dx}{\sqrt{(C-c)^2 - \frac{(M+m).4\varepsilon\,\overline{S-p\,dx}}{Mm}}}$

la qual formula integrata per modo, che posta $t = o$, sia $x = a$, ci offrirà il tempo dato per la distanza de' corpi, ed in essa abbiamo la quinta legge. La stessa formula si ritroverebbe, facendo uso dell' altra equazione $2\varepsilon p\,ds = mu\,du$.

Non rimane altro se non di ritrovare i valori di S, s dati per x. Poichè $dS:ds::U:u$, sarà dividendo $dS:dS-ds=-dx::U:U-u$, e $dS-ds=-dx:ds::U-u:u$; dunque $dS = \frac{-U\,dx}{U-u}$, $ds = \frac{-u\,dx}{U-u}$. Ritroviamo dalle formule antecedenti $U-u$ in tal guisa

$$U-u = \overline{M+m}\,.\,\pm\sqrt{\frac{(C-c)^2}{(M+m)^2} - \frac{4\varepsilon\,\overline{S-p\,dx}}{Mm.\overline{M+m}}};$$

adunque

$$\frac{U}{U-u} = \frac{MC+mc}{(M+m)^2 \pm\sqrt{\frac{(C-c)^2}{(M+m)^2} - \frac{4\varepsilon\,\overline{S-p\,dx}}{Mm.\overline{M+m}}}} + \frac{m}{M+m}$$

$$\frac{u}{U-u} = \frac{MC+mc}{(M+m)^2 \pm\sqrt{\frac{(C-c)^2}{(M+m)^2} - \frac{4\varepsilon\,\overline{S-p\,dx}}{Mm.\overline{M+m}}}} - \frac{M}{M+m}$$

Pertanto

$$\frac{-U\,dx}{U-u} = dS = \frac{MC+mc}{(M+m)^2}\,.\,\frac{\mp dx}{\sqrt{\frac{(C-c)^2}{(M+m)^2} - \frac{4\varepsilon\,\overline{S-p\,dx}}{Mm.\overline{M+m}}}} - \frac{m\,dx}{M+m}$$

$$\frac{-u\,dx}{U-u} = ds = \frac{Mc+mc}{(M+m)^2}\,.\,\frac{\mp dx}{\sqrt{\frac{(C-c)^2}{(M+m)^2} - \frac{4\varepsilon\,\overline{S-p\,dx}}{Mm.\overline{M+m}}}} + \frac{M\,dx}{M+m}$$

nelle quali formule si rinchiude la sesta, ed ultima di quelle leggi, che riguardano una potenza frapposta a due masse inerti.

Ma per penetrarne ben l'uso consideriamo più attentamente il caso, ch' abbiam proposto. Poichè i due corpi A, a viaggiano dalla stessa parte, A colla velocità maggiore $= C$, ed a colla minore $= c$, egli è evidente, ch' i corpi s' anderanno accostando, e la potenza media tra essi colle sue azioni diminuirà la quantità di stato, e la velocità del corpo A, ed accrescerà quella del corpo a. Poichè delle due azioni l' una è impiegata a diminuire, l' altra ad accrescere, si dovranno riputare come contrarie, e l'azione, che noi domandiam totale della potenza media, sarà eguale alla differenza loro, e s'impiegherà a distruggere. Le due velocità C, c, la prima delle quali si minora, l'altra s' accresce, si vanno accostando all' egualità, dove finalmente arrivano. In questo caso con somma facilità la seconda legge ci presenta la velocità u comune a due corpi, cioè $u = \frac{MC+mc}{M+m}$, colla quale, rimovendo di mezzo ad essi la potenza, in perpetuo cammineranno. Qui abbiamo la legge della comunicazion del moto tra corpi molli, nei quali mentre segue la contusione, avvi una potenza, che altera i loro movimenti, ma fornita la contusione, quando le velocità sono eguali, la contusione non si restituisce, e la potenza vien meno.

Quando le due velocità son fatte eguali, la distanza tra corpi ver-

verrà ad eſſer la minima, perchè, com'or or vedremo, ſe la potenza ſuſſiſte, in appreſſo ſi farà maggiore. Di fatto nella formula, ch'abbiam nella prima legge $-2\varepsilon p\,dx = -MU\,dU - mu\,du$, ſe facciaſi $dx = o$, ſarà $-MU\,dU - mu\,du = o$, o ſia $-MU\,dU = mu\,du$: ma per la ſeconda legge $-M\,dU = m\,du$; dunque fatta la diviſione $U = u$. Similmente poſta $U = u$, avremo $-2\varepsilon p\,dx = u.\,-M\,dU - m\,du$: ma $-M\,dU - m\,du = o$: dunque $p\,dx = o$, o ſia $dx = o$, che dinota eſſer la diſtanza x in queſto caſo la minima.

La quantità dell'azione totale della potenza media, poſta $U = u = \frac{MC + mc}{M + m}$ ſi determina coll'equazione $2\varepsilon S - p\,dx = \frac{M\overline{C}^2 + mc^2}{2} - \left\{ \frac{M^2C^2 + 2MmCc + m^2c^2}{2.\,\overline{M+m}} \right.$, la quale eſpurgata da $2\varepsilon S - p\,dx = \frac{Mm.\,\overline{C - c}^2}{\overline{M+m}\;\;2}$ Queſta medeſima ſi ritroverà, ſe nelle due formule delle velocità ſi pongano le due radicali $= o$, il che poſto ſi ritroveranno le due velocità tra loro eguali. I tempi, e gli ſpazj ſcorſi da due mobili, e le velocità medie tra lo ſtato iniziale e lo ſtato ultimo delle velocità eguali dipendono dalla ſommatoria $S - p\,dx$, la quale ne' caſi particolari s'otterrà ſe non altro colle quadrature.

Se viaggiando i corpi A, a, colla ſteſſa velocità, ſuſſiſte la potenza media, che tenta d'allontanarli, egli è manifeſto, ch'accreſcerà la velocità del corpo a, che precede, e diminuirà quella del corpo A, che lo ſegue. La diſtanza tra due corpi s'anderà a poco a poco accreſcendo, finchè arriverà a farſi eguale alla primitiva $= a$. Egli è chiariſſimo, che l'azione totale della potenza media, che traſporta i corpi dallo ſtato di velocità eguali a quello della

della diſtanza $= a$, è eguale a quella, che traſporta dallo ſtato della diſtanza $= a$ allo ſtato delle velocità eguali: ma cotai azioni ſi debbono riputare contrarie, perchè nel primo caſo impiegaſi a produrre, nell'altro a diſtruggere: dunque, ritornati che ſieno i corpi alla diſtanza $= a$, l'azione $2\varepsilon S - p\,dx = o$. Avremo in queſto caſo le leggi della comunicazione del movimento tra i corpi perfettamente elaſtici; onde la velocità del corpo A $= \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$ e quella del corpo a $= \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$. Ritrovandoſi poi la ſommatoria $S - p\,dx$ ne' caſi particolari, s'avranno i tempi, gli ſpazj paſſati dai mobili, e le velocità intermedie.

Ritornati che ſieno i mobili alla diſtanza $= a$, ſe la potenza infrappoſta non mutando direzione ſeguita a reſpingerli, è indubitato, ch'eſſa accreſcerà vie più la velocità del mobile a, e quando il mobile A ſeguiti ad avere velocità coſpirante, eſſa la ritarderà, finchè la riduca a zero, e poſcia la renderà negativa, ed in queſto ſenſo l'anderà ſempre maggiormente accreſcendo. Ma ſe ſupporremo alla diſtanza $= a$, la potenza eſſer nulla, in diſtanza minore repellente, in diſtanza maggiore attraente, verrà ritardata la velocità del corpo a: ma la velocità del corpo A, ſe ſia coſpirante, verrà accelerata; ſe ſia contraria, verrà diſtrutta, e poi prodotta in ſenſo contrario, fin a tanto che ſieno ridotti i corpi ad un'eguale velocità, avendoſi in tal caſo la diſtanza maſſima. Appreſſo diminuendo vieppiù la velocità di a, e creſcendo quella di A, ſi diminuirà la diſtanza fin a farſi $= a$: ed allora i corpi ſaranno nello ſtato primitivo, A colla velocità $= C$, ed a colla velocità $= c$: e così all'infinito anderanno reciprocando i lor movimenti.

Penſo d'aver a ſufficienza dichiarato, in qual guiſa debba trattarſi così fatto genere di quiſtioni, e come vogliano applicarſi i principj ſtabiliti alle potenze frappoſte a' corpi. Voleva aggiungere il metodo per ritrovar il movimento di più corpi prodotti da più po-

potenze in direzioni paralelle: ma essendosi la lettera allungata più di quello, ch' io credeva, lo riservarò ad un' altra, la quale colla sua brevità compenserà la lunghezza delle due ultime. Non vi dimenticate di me.

Bologna li 29. Dicembre 1770.

LETTERA XII.

Delle Potenze producenti il Moto in direzioni paralelle.

Breve sarà la presente lettera, in cui volendo dir pur qualche cosa delle potenze, che producono il movimento nelle direzioni paralelle alle loro, scioglierò il seguente problema, che servirà d'esempio del modo, che si vuol tenere in altre somiglianti ricerche. Da due ruote (*Fig.* 28.) tra lor connesse mobili intorno al punto C, i cui raggi CR, Cr, che si suppongono prive d'inerzia, e di gravità, pendano i due corpi gravi A, a, i quali lasciati in libertà si muovano, discendendo il primo per AB, ascendendo l'altro per ab: si domanda, di quai proprietà sieno i movimenti loro dotati. Seguitino i corpi a muoversi per gli elementi BS, bs. Si chiamino $AB = S$, $BS = dS$, $ab = s$, $bs = ds$, la velocità di A in $B = U$, quella di a in $b = u$, i due raggi CR, Cr dicansi R, r, la gravità, e la massa del corpo $A = M$, quella del corpo $a = m$.

Egli è evidente in primo luogo, che gli spazj S, s, gli elementi loro dS, ds, e le velocità U, u sono in ragion de'raggi R, r. L'azione della gravità del corpo A sarà $= 2\varepsilon MdS$, quella del corpo $a = 2\varepsilon m ds$: ma queste due azioni sono contrarie, perchè l'una

l'una s'impiega a produr il movimento, l'altra tenta d'impedirlo: dunque l'azion totale sarà $2\varepsilon MdS - 2\varepsilon m ds$: ma la mutazion dello stato, che segue ne'corpi, sarà $MUdU + mudu$. Adunque avrem l'equazione $2\varepsilon MdS - 2\varepsilon m ds = MUdU + mudu$, la qual integrata da $4\varepsilon MS + 4\varepsilon ms = MU^2 + mu^2$. Ma abbiamo $U : u :: R : r$; dunque $u = \frac{rU}{R}$, $U = \frac{Ru}{r}$. Di più $S : s :: R : r$; dunque $s = \frac{rS}{R}$, $S = \frac{Rs}{r}$.

$$\text{Quindi } 4\varepsilon.\overline{MS - \frac{mrS}{R}} = MU^2 + \frac{mr^2U^2}{R^2}$$

$$4\varepsilon.\overline{\frac{MRs}{r} - ms} = \frac{MR^2u^2}{r^2} + mu^2$$

$$\text{dunque } \frac{4\varepsilon R.\overline{MR - mr}}{MR^2 + mr^2} = U^2$$

$$\frac{4r\varepsilon.\overline{MR - mr}.s}{MR^2 + mr^2} = u^2.$$

Se $MR = mr$, si ritrovano $U, u = 0$; la qual conseguenza è verissima, perchè questo è il caso notissimo dell'equilibrio. Se $m = 0$, si ritrova $U^2 = 4\varepsilon S$; lo che parimente è conforme alla verità, perchè in tal caso il corpo A discende liberamente.

Differenziando la formula antecedente avremo

$$\frac{2\varepsilon R.\overline{MR - mr}.dS}{MR^2 + mr^2} = UdU\text{: ma } dS = \frac{Udt}{k},$$

chiamando il tempo $= t$: dunque

$$\frac{2\varepsilon R.\,\overline{M R - m r}}{M R^2 + m r^2}.\frac{dt}{k} = dU, \text{ e integrando}$$

$$\frac{2\varepsilon R.\,\overline{M R - m r}}{M R^2 + m r^2}.\frac{t}{k} = U. \text{ Con ſomigliante metodo ſi troverà}$$

$$\frac{2\varepsilon r.\,\overline{M R + m r}}{M R^2 + m r^2}.\frac{t}{k} = u. \text{ Se } t = k$$

ſarà $U : 2\varepsilon :: R.\,\overline{M R - m r} : M R^2 + m r^2$

$u : 2\varepsilon :: r.\,\overline{M R + m r} : M R^2 + m r^2.$

Rimane da paragonare i tempi, e gli ſpazj. Quadrando la formula de' tempi, s'avrà

$$\frac{4\varepsilon^2 R^2.\,\overline{M R - m r}^2}{\overline{M R^2 + m r^2}^2}.\frac{t^2}{k^2} = U^2 = \frac{4\varepsilon R.\,\overline{M R - m r}}{M R^2 + m r^2}.S:$$

dunque $\dfrac{\varepsilon R.\,\overline{M R - m r}}{M R^2 + m r^3}.\dfrac{t^2}{k^2} = S$. Con ſimile metodo troverò

$\dfrac{\varepsilon r.\,\overline{M R - m r}}{M R^2 + m r^2}.\dfrac{t^2}{k^2} = s$. Quindi ponendo $t = k$, s'avrà

$S : \varepsilon :: R.\,\overline{M R - m r} : M R^2 + m r^2$

$s : \varepsilon :: r.\,\overline{M R - m r} : M R^2 + m r^2$

Comprendendoſi in queſte formule le proprietà del moto, c'ho preſo a conſiderare, ho ſciolto compiutamente il problema propoſto, che può ſervir in altri caſi ſimili per eſempio. Bramerei di ſape-

ſapere, come l' aria del novello voſtro ſoggiorno vi conferiſce. Addio.

Bologna li 15. Gennaro 1771.

LETTERA XIII.

Dell' Equivalenza delle Potenze che producono movimento.

FInora v' ho trattenuto unicamente ne' movimenti accelerati o ritardati nella direzione delle potenze, che li producono, o al più nelle direzioni paralelle: convien ora, che mi rivolga alla teoria aſſai più ſpinoſa delle potenze, che producono il movimento in altre direzioni. Parlando dell'equilibrio ho provato, che con due potenze applicate ad un punto fa equilibrio una terza, ch'è eguale e contraria a quella, che s'eſprime pel diametro del parallellogrammo, di cui eſſe ſono i lati; e che però la diagonale è equivalente alle due laterali, e ſi potrà nelle dimoſtrazioni ſoſtituire l'una per l'altre, e viceverſa. Mi convien ora provare la ſteſſa coſa del movimento, affinchè il principio dell'equivalenza delle potenze abbia tutta la ſua eſtenſione.

Sieno le potenze A M, A N (*Fig.* 12.) applicate alla maſſa A: chiuſo il paralellogrammo A M B N, ſi conduca la diagonale A B. Io dico in prima, che agendo inſieme le potenze A M, A N, la direzióne del movimento iniziale ſarà nella direzione della diagonale A B. Imperciocchè la potenza A P eguale, e contraria all'A B ſa equilibrio colle due A M, A N: dunque dev'impedire ogni movimento: ma non potrebbe impedirlo, ſe le potenze A M, A N portaſſero il corpo per una direzion diverſa da A B: dunque A B è la direzióne del moto iniziale. Se preſa l'infiniteſima A a, giunto che ſia il mobile in a, le potenze ad eſſo applicate ſi mantengano eguali e paralelle, non meno la velocità, ch'il corpo ha in a, che

che quella, la qual novellamente producesi, avrà per direzione la diagonale A B, e così successivamente negli elementi seguenti: dunque il movimento accelerato seguirà sempre mai la direzione della medesima A B. Ma se le potenze non si mantenessero eguali, e paralelle, la direzion dell' equivalente per lo più si cangierebbe, e per conseguenza le potenze laterali devierebbero il mobile dalla direzione del movimento iniziale, ed egli sarebbe costretto a descrivere una curva, non una retta. Per la qual cosa, affinchè ciò che diremo, universalmente a tutte le potenze applicar si possa, parleremo soltanto del movimento iniziale: e tutto ciò, che verrà dimostrato, avrà luogo ancor nel moto finito, quando conservinsi le potenze paralelle ed eguali.

Il corpo A nel moto iniziale per A a acquisterà la medesima velocità, o sia spinto dalle due potenze A M, A N, o dalla sola potenza diagonale A B. Fatta la medesima costruzione, che fatta abbiamo nell' equilibrio, si chiami $= \underline{d}\,\underline{U}$ la velocità, ch' il mobile riceve dalle due potenze laterali A M, A N, e $\underline{d}\,\underline{u}$ quella, che riceve dalla diagonale A B. L' azioni delle due potenze laterali saranno $2\,\varepsilon.\,AM.\,Am$, $2\,\varepsilon.\,AN.\,An$: dunque chiamata $= \underline{m}$ la massa del corpo, avremo

$$2\,\varepsilon.\,AM.\,Am + 2\,\varepsilon.\,AN.\,An = \frac{\underline{m}\,\underline{d}\,\underline{U}^2}{2}.$$

L' azione della diagonale è $2\,\varepsilon.\,AB.\,Aa$: dunque $2\,\varepsilon.\,AB.\,Aa = \frac{\underline{m}\,\underline{d}\,\underline{u}^2}{2}$: ma per le cose altra volta dimostrate $2\,\varepsilon.\,AM.\,Am + 2\,\varepsilon.\,AN.\,An = 2\,\varepsilon.\,AF.\,Aa + 2\,\varepsilon.\,AG.\,Aa = 2\,\varepsilon.\,AB.\,Aa$: dunque $\frac{\underline{m}\,\underline{d}\,\underline{U}^2}{2} = \frac{\underline{m}\,\underline{d}\,\underline{u}^2}{2}$; dunque $\underline{d}\,\underline{U} = \underline{d}\,\underline{u}$. Adunque o il mobile venga spinto dalle due potenze A M, A N, ovver dalla sola A B, viaggiando per A a, acquisterà la stessa velocità, e per conseguenza v' impiegherà il medesimo tempo. Per la qual cosa siccome nell' equilibrio, così nel moto si potrà in luogo delle laterali sostituire la diagonale, e in luogo di questa le laterali, e potrà usarsi la composizione e la risoluzione delle potenze.

Dal punto a si menino le due a q, a p paralelle alle A M, A N, onde

onde si formi il paralellogrammo A p a q. Io dico, che la potenza A M sola trasporterà il corpo A per A p nel medesimo tempo, in cui la diagonale A B, o le due potenze insieme A M, A N lo trasporteranno per la A a. Lo stesso dir si vuole della potenza A N, che lo trasporta per A q. Il tempo per A a si chiami $= \underline{d}\,\underline{t}$, il tempo per A p $= \underline{d}\,\theta$; la velocità in a $= \underline{d}\,\underline{u}$, la velocità in p $= \underline{d}\,\underline{w}$. Noi abbiamo $2\,\varepsilon.\,AM.\,\frac{\underline{d}\,\underline{\theta}}{\underline{k}} = \underline{m}\,\underline{d}\,\underline{w}$: dunque

$$\frac{4\,\varepsilon^2.\,AM^2}{2\,\underline{m}}.\,\frac{\underline{d}\,\underline{\theta}^2}{\underline{k}^2} = \frac{\underline{m}\,\underline{d}\,\underline{w}^2}{2}: \text{ ma } 2\,\varepsilon.\,AM.\,Ap = \frac{\underline{m}\,\underline{d}\,\underline{w}^2}{2};$$

dunque $\frac{4\,\varepsilon^2\,AM^2}{2\,\underline{m}}.\,\frac{\underline{d}\,\theta^2}{\underline{k}^2} = 2\,\varepsilon.\,AM.\,Ap$, ovvero

$$\frac{\underline{d}\,\underline{\theta}^2}{\underline{k}^2} = \frac{\underline{m}.\,Ap}{\varepsilon.\,AM}.$$ Collo stesso metodo proverò

$$\frac{\underline{d}\,\underline{t}^2}{\underline{k}^2} = \frac{\underline{m}.\,Aa}{\varepsilon.\,AB}: \text{ dunque } \underline{d}\,\underline{\theta}^2 : \underline{d}\,\underline{t}^2 :: \frac{Ap}{AM} : \frac{Aa}{AB}:$$

ma essendo a p paralella all' A N, o sia alla B M, sarà $\frac{Ap}{AM} = \frac{Aa}{AB}$: dunque $\underline{d}\,\theta^2 = \underline{d}\,\underline{t}^2$, o sia $\underline{d}\,\theta = \underline{d}\,\underline{t}$: dunque il tempo, in cui la sola potenza A M trasporta il corpo per A p, è eguale al tempo, in cui la diagonale A B trasporta lo stesso corpo per A a, ovvero in cui le due potenze laterali A M, A N insieme lo trasportano per A a. Lo stesso raziocinio farà vedere, che la potenza B N da se sola trasporta il corpo A per A q in quel tempo, in cui A B, ovvero le due A M, A N insieme lo trasportano per A a.

Essendo A p a q un paralellogrammo, egli è manifesto, che le due potenze separatamente trasporteranno il corpo A pe' lati del paralellogrammo in quel tempo, in cui unitamente lo trasferiscono pel diametro. Paragoniamo posatamente l' azioni, che nello stesso tempo po eſercitano le potenze ſeparate, e le potenze congiunte. L'azioni delle potenze ſeparate ſaranno come i prodotti A M. A p, A N. A q: l'azioni delle congiunte come A M. A m, A N. A n. Se l'angolo M A N ſia retto, egli è manifeſto, che i punti p, q coincidono co' punti m, n, e che A p = A m, A q = A n: dunque i prodotti A M. A p + A N. A q = A M. A m + A N. A n: dunque eguali ſono l'azioni eſercitate nello ſteſſo tempo dalle potenze ſeparate, e congiunte, quando eſſe concorrono ad angolo retto. Quando l'angolo M A N ſia ottuſo, il punto p caderà dopo i punti A, m, ed il punto q dopo A, n, e ſarà A p > A m, A q > A n: dunque i prodotti A M. A p + A N. A q ſaranno > A M. A m + A N. A n: dunque l'azioni delle potenze ſeparate ſaran maggiori dell'azioni delle potenze congiunte, quando in egual tempo vengano eſercitate, poſto ottuſo l'angolo delle due laterali potenze. Ma quando acuto ſia l'angolo M A N, ſarà A p < A m, A q < A n, cadendo il punto p in mezzo a due A, m, ed il punto q in mezzo a due A, n: dunque A M. A p + A N. A q < A M. A m + A N: dunque l'azioni delle potenze ſeparate in tempo eguale ſono minori dell'azioni delle congiunte, ſe l'angolo M A N ſuppongaſi acuto.

Non ſo, ſe leggendo così fatta dottrina, vi ſorgerà nell'animo un'oppoſizione, che m'ha tenuto lunga pezza dubbioſo, ed a cui ho aſſai penato a ritrovar la vera riſpoſta. Quando le potenze agiſcono ſeparatamente, egli è certo, ch'una non opponeſi all'altra: ma quando agiſcono inſieme, vicendevolmente s'oppongono, e l'una all'altra è d'impedimento. L'oppoſizione è maggiore, quanto è maggiore l'angolo, in cui concorrono; ma ſempre qualche oppoſizione ſuſſiſte, fin a tanto che le potenze non ſono coincidenti. Adunque le potenze congiunte a cagion dell'impedimento, che recanſi, in un dato tempo dovrebbero ſempremai eſercitare azione minore delle potenze ſeparate, che niun impedimento ſi recano. Ma ſecondo la dottrina ſtabilita ſe l'angolo ſia retto, l'azioni ſono eguali; e ſe l'angolo ſia acuto, maggiore è l'azione delle potenze congiunte, che delle potenze ſeparate: dunque la dottrina s'oppone a'primi principj, nè ſi può ammettere. L'obbiezione ſembra gagliarda, e d'impoſſibile ſoluzione.

Il principio, che conſervandoſi pari tutte l'altre coſe, le potenze impedite devono eſercitare in tempo eguale minor azione, che le ſteſſe

ſteſſe potenze non impedite, è d'incontraſtabile verità. Egli è certiſſimo ſimilmente, che due potenze, le quali agiſcono inſieme, s'apportano qualche impedimento che non ſoffrono, quando agiſcono ſeparatamente. Ma il vizio dell'oppoſizione conſiſte in queſto, che l'altre coſe non ſi mantengono eguali. Imperciocchè io vi domando, qual maſſa ſi muove dalle potenze congiunte? non altra ſe non ſe la maſſa del corpo A. Domando in oltre, qual maſſa ſi muove dalle potenze ſeparate? S'alcun diceſſe la maſſa del corpo A, caderebbe ſicuramente in errore. Concioſſiachè tanto la potenza A M, quanto la potenza A N dà moto alla maſſa A: dunque queſta ſi muove due volte: dunque la maſſa, che muoveſi dalle potenze ſeparate, è doppia di quella, che muoveſi dalle potenze congiunte. Ciò ſuppoſto io aggiungo un altro principio. Rimanendo tutte l'altre coſe pari, le potenze applicate a maſſa maggiore eſercitano in un dato tempo minor azione, ch'applicate a maſſa minore.

Stabiliti i giuſti principj, ritorniamo al noſtro ſoggetto, e riflettiamo, che v'intervengono due elementi, i quali ſi contrariano l'uno all'altro. A cagion dell'oppoſizione dovrebbero due potenze congiunte in un dato tempo eſercitare minor azione, che due potenze ſeparate. A cagion della minor maſſa, che muovono, dovrebbero due potenze congiunte eſercitare maggiore azione nello ſteſſo tempo, che due potenze ſeparate. Se de' due elementi contrarj l'uno compenſi eſattamente l'altro, cioè a dire ſe tanto debb'eſſer minor l'azione delle potenze congiunte per cagion dell'oppoſizione, quanto debb'eſſer maggiore per cagion della maſſa minore, l'azioni in egual tempo eſercitate ſaranno eguali. Queſto interviene nell'angolo retto. Nell'angolo ottuſo creſce l'oppoſizione rimanendo le ſteſſe maſſe: dunque l'azione delle potenze congiunte dev'eſſer minore in dato tempo, che quella delle ſeparate. Nell'angolo acuto l'oppoſizione diminuiſce, e però l'azione delle congiunte in dato tempo dev'eſſer maggiore dell'azione delle ſeparate. La dottrina per tanto da noi dedotta da principj incontraſtabili non è combattuta da alcuna vera difficoltà.

Per far meglio conoſcer la robuſtezza della riſpoſta, ſarà ben fatto, che dimoſtriamo, che ſe le potenze dian moto ſeparatamente a due parti, in cui dividaſi la maſſa A, eſerciteranno ſempre in dato tempo azioni maggiori dell'azioni delle ſteſſe potenze, quando

K con-

congiuntamente trasportano la massa A per la diagonale Aa. A questo fine premetto la soluzion del seguente problema. Domandasi in quali parti vuolsi divider la massa A, acciocchè la somma dell' azioni delle due potenze AM, AN in un dato tempo riesca la minima. Ricordatevi della formula in altre lettere dimostrata, che paragona i tempi, e gli spazj, ch'è la seguente $\frac{\varepsilon p}{m}.\frac{t^2}{k^2}=s$; dunque multiplicando per $\frac{2\varepsilon p}{m}$, s'avrà $\frac{2\varepsilon^2 p^2}{m}.\frac{t^2}{k^2}=2\varepsilon ps$: ma $2\varepsilon ps$ esprime l'azione della potenza p; dunque l'azione della potenza p esercitata nel tempo $=t$, sarà $=\frac{2\varepsilon^2 p^2}{m}.\frac{t^2}{k^2}$. Ciò posto si chiami la massa $A=A$, le parti sue, che voglionsi determinare m, n, le potenze $AM=M$, $AN=N$, il tempo $=dt$. Sarà l'azione della potenza $M=\frac{2\varepsilon^2 M^2}{m}.\frac{dt^2}{k^2}$, quella della potenza $N=\frac{2\varepsilon^2 N^2}{n}.\frac{dt^2}{k^2}$: dunque la somma loro $=\frac{2\varepsilon^2 dt^2}{k^2}.\overline{\frac{M^2}{m}+\frac{N^2}{n}}$; la quale nel dato tempo dt sarà la minima, qualunque volta sia minima $\frac{M^2}{m}+\frac{N^2}{n}$. Pongasi dunque $=0$ la sua differenza, e s'avrà $-\frac{M^2dm}{m^2}-\frac{N^2dn}{n^2}=0$. Ma perciocchè $A-n=m$, sarà $-dn=dm$: dunque $-\frac{M^2dm}{m^2}+\frac{N^2dm}{n^2}=0$, o sia $\frac{M^2}{m^2}=\frac{N^2}{n^2}$: dunque

que $\frac{M}{m}=\frac{N}{n}$; e perciò $m:n::M:N$. Per tanto affinchè la somma dell' azioni sia minima, si dee divider la massa A in parti, che sieno in ragion diretta delle potenze AM, AN. In qualunque altra proporzion si divida, la somma dell'azioni proverrà maggiore.

Or dimostriamo, che divisa la massa A nelle due parti m, n, che sieno in ragion delle potenze AM, AN, l'azioni di queste, mentre separatamente trasferiscono le parti m, n, sono maggiori dell' azioni delle medesime agenti unitamente, e trasportanti l'intera massa A per Aa, supposto il tempo lo stesso. S'è provato, che nel tempo, in cui le due potenze unite trasportano la massa A per Aa diagonale, la potenza AM la stessa massa A trasporta per Ap lato del parallelogrammo. Sia Ar lo spazio, per cui la stessa potenza AM trasporta la massa m nello stesso tempo. La formula c'insegna essere Ap : Ar in ragion reciproca delle masse A, m, cioè come $\frac{1}{A}:\frac{1}{m}$: dunque dividendo $Ap:pr::\frac{1}{A}:\frac{1}{m}-\frac{1}{A}=\frac{A-m}{Am}=\frac{n}{Am}$: dunque $Ap:pr::m:n::Ap:Aq=pa$; dunque $pr=pa$. Menata pertanto ra, il triangolo rap sarà isoscele: dunque la am, quando non cada o dopo i punti r, p, o nel punto p, caderà tra i punti p, r: dunque sarà $Ar > Am$: ma l'azione della potenza AM trasferente sola la massa m per Ar alla azione della stessa, che coll'AN trasporta la massa A per Aa, è come Ar : Am: dunque la prima è maggiore della seconda. Collo stesso metodo proverò, che l'azione della potenza AN, che trasporta la massa n per As, è maggiore dell'azione della stessa, ch'unita all'altra potenza nello stesso tempo trasporta la massa A per Aa. Per tanto la somma dell'azioni delle due potenze, ch'in dato tempo trasportano separatamente le parti m, n a se stesse proporzionali, è maggiore delle azioni delle due potenze unite, le quali danno moto all'intero corpo A. Ma pel problema testè sciolto, ſe dividaſi la maſſa A in altra proporzione, la ſomma delle azioni rieſce ſempre maggiore: dunque ſuppoſto lo ſteſſo tempo l'azioni delle potenze ſeparate, che traſportano le parti del corpo A, ſono ſempre maggiori delle azioni delle congiunte, che muovono l'intero corpo A: come ſi dovea dimoſtrare.

M'accuſarete per avventura, ch'in queſta lettera io ſia ſtato più lungo, che la coſa non meritava. Ma non m'è ſembrato ſuperfluo il diſgombrare colla poſſibile evidenza alcuni equivoci, che ſiccome ho ſperimentato più volte, a moltiſſimi teneano aſcoſa la verità. Il voſtro giudizio mi certificherà, ſe l'abbia ottenuto. Addio.

Bologna li 24. Gennaro 1771.

LETTERA XIV.

Delle Potenze coſtrette a muovere i corpi per direzioni neceſſarie.

NElla paſſata lettera ho parlato di due potenze, che liberamente traſportano il mobile, a cui ſono applicate. Fa di meſtieri parlar al preſente delle potenze coſtrette a muovere il corpo per una direzion neceſſaria. Incomincierò da una potenza ſola, e poi paſſerò a due. Sia la potenza A M (*Fig. 29.*) applicata al mobile A, il quale non può viaggiare, ſe non per la direzion rettilinea A a. Per ottenere la potenza univerſalmente coſtante, parlerò qui pure del ſolo moto iniziale. Tutto ciò, che dimoſtrerò, s'applicherà agevolmente da chi che ſia alle potenze coſtanti, che mantengono le direzioni paralelle: lo che interviene ne' corpi gravi collocati ſopra de' piani inclinati.

S'intenda ch' il mobile ſpinto dalla potenza A M, viaggi per la minima A a, e ſia a R la nuova poſizione della potenza. Col centro R ſi deſcriva il minimo arco a m, chiamiſi la maſſa $=$ A, e la

velocità in a $=$ d u. Il principio dell'azioni darà $2\,\varepsilon.\,AM.\,Am = \frac{A\,du^2}{2}$. Condotta M F perpendicolare all'A a prodotta, ſarà A M : A F : : A a : A m; dunque A M. A m $=$ A F. A a: dunque $2\,\varepsilon.\,AF.\,Aa = \frac{A\,du^2}{2}$. Da queſte equazioni ricavaſi, che le due potenze A M, A F, traſportando il corpo per A a, eſercitano nello ſteſſo tempo la ſteſſa azione, e producono nel mobile la ſteſſa velocità. Per tanto alla potenza A M ſarà nella direzion neceſſaria equivalente la A F poſta nella medeſima direzione, e queſta a quella ſi potrà ſoſtituir legittimamente per determinar le proprietà del movimento.

Si nomini $=$ d w la velocità, ch'in m acquiſta il mobile ſpinto dalla potenza A M liberamente per la ſua direzione. E' manifeſto pel metodo dell'azioni, che ſarà $2\,\varepsilon.\,AM.\,Am = \frac{A\,dw^2}{2}$: dunque $A\,dw^2 = A\,du^2$, o ſia $dw = du$. Adunque le velocità del mobile viaggiante o per la direzion libera A m, o per la neceſſaria A a in m, a, ſaranno eguali. Non ſi penſi però, che s'acquiſtino in tempi eguali, nè che la potenza eguali azioni eſerciti in tempi eguali. Anzi eſſendo in tutti i punti analoghi eguali le velocità, i tempi per A m, A a ſaranno come gli ſteſſi ſpazietti A m, A a.

Determiniamo lo ſpazietto A f, il quale ſi paſſi nella direzion neceſſaria in quel tempo, in cui nella libera ſi percorre A m. Il tempo per A a al tempo per A m s'è provato come A a : A m: ma il tempo per A m dev' eſſer eguale al tempo per A f: dunque il tempo per A a al tempo per A f è come A a : A m: ma il tempo per A a al tempo per A f è in ragion dimidiata di A a : A f: dunque A a : A m in ragion dimidiata di A a : A f: dunque le tre A a, A m, A f ſono continue proporzionali: dunque la retta m f ſarà perpendicolare all' A a: e però cotal perpendicolare determinerà lo ſpazietto A f, che ſi paſſerà nel medeſimo tempo, in cui ſi paſſa A m.

La

La potenza A M sempre mai sforzasi di trasportare il corpo per la sua direzione, e questo non prende altra direzione se non costretto. L'impedimento pertanto, che soffre, è la vera cagione, per cui la potenza esercita la stessa azione in tempo maggiore, ovvero nello stesso tempo esercita azion minore di quel, che sarebbe nella sua direzione. Quando la direzion è necessaria, contra di questa, che supponesi inamovibile, preme il corpo tentando di abbandonarla; ed essa vicendevolmente preme in senso contrario contro al corpo, ch'è costretto di viaggiare per essa. Convien adunque concepire una potenza media interposta tra la direzion necessaria ed il corpo, la qual si deve determinare. La potenza media premente il corpo è d'uopo, che faccia equilibrio colla potenza A M nella direzion normale alla direzion necessaria. Sia A Q così fatta potenza, e s'intenda seguire un minimo movimento per A e nella direzion perpendicolare all'A a. La nuova posizione della potenza sia e R. Col centro R, e col raggio R e si descriva l'archetto e i. L'azione della potenza A M sarà come A M. A i; quella della potenza A Q sarà come A Q. A e. Affinchè vi sia equilibrio, è necessario, che queste due azioni, le quali sono contrarie, sien anche eguali: dunque s'avrà A M. A i = A Q. A e; dunque A M: A Q:: A e: A i. Ma condotta M P normale all' A e, si ha A e: A i:: A M: A P: dunque A M: A Q:: A M: A P: dunque A Q = A P. A questa dunque sarà eguale la potenza media tra il corpo, e la direzion necessaria.

In primo luogo io osservo, che le due potenze A F, A P fanno quello appunto, che fa la potenza A M nè più nè meno. Imperocchè la A F nello stesso tempo esercita quella azione, ch'esercita A M trasportando il corpo A a; ed A P è eguale a quella pressione, con cui la potenza spinge il corpo contro alla direzion necessaria. Adunque in luogo di A M sarà lecito di sostituire le due A F, A P. La figura A P M F è un rettangolo: e però alle due potenze A F, A P è equivalente la A M. Laonde si fa più esteso l'uso dell'equivalenza delle potenze, e della composizione e risoluzione. Appresso io osservo, che s' al mobile oltre alla potenza A M fosse applicata l'A Q, la A F verrebbe ad essere diagonale del parallelogrammo, che ha per lati A M, A Q. Onde A F verrebbe ad esser direzion libera, nè v'avrebbe potenza alcuna media tra

tra la direzione ed il corpo. Non ostante anche in questo caso l'azion della potenza A M sarebbe eguale a quella dell' A F, perchè essendo A Q normale alla strada, che tiene il mobile, la sua azione è minima per riguardo all'azione dell'altre potenze.

Che se oltre la potenza A M v'avesse una qualunque altra potenza A N, chiuso il paralellogrammo N A M, o la sua diagonale cade sopra A F, o no. Se cade sopra A F, ci si presenta il caso, di cui abbiam trattato nella lettera antecedente. Se la diagonale non cade sopra A F, sia il paralellogrammo N A M B, la cui diagonale sia A B. Dico, che la potenza A B farà il medesimo, che le due potenze A M, A N. Imperocchè è cosa facile a dimostrare, che trasportandosi il corpo per A a, la potenza diagonale eserciterà la medesima azione, che le due laterali. Di più condotte le tre M P, N R, B O normali alla direzione P Q, che fa angolo retto con A a, le due potenze A M, A N faran nascere contra del corpo A le due pressioni contrarie A P, A Q: dunque v'avrà una potenza media tra il corpo e la direzion necessaria eguale alla differenza delle due A P, A Q. La potenza diagonale A B farà nascere una potenza media tra il corpo, e la direzion necessaria, che sarà A o. Ma per la proprietà del paralellogrammo la differenza tra le due A P, A Q eguaglia A O: dunque nasce la stessa potenza media, o v'abbiano le potenze A M, A N, o v'abbia la sola potenza A B.

Per le quali cose resta dimostrato, che sempre mai la potenza diagonale è equivalente alle laterali, e che sempre quella in luogo di queste si può sostituire, e viceversa. La qual equivalenza è fondata sopra due principj: primo, che l'azioni delle laterali eguagliano sempre l'azion della diagonale: secondo, che le pressioni generate son le medesime, v'abbiano le potenze laterali, o v'abbia la sola diagonale. Ma tempo è omai, che lasciando i movimenti rettilinei passiamo a considerar i curvilinei, ne' quali il solo principio dell'azioni non basta, dovendosi congiungere con un altro principio, di cui nelle lettere seguenti incominceremo a trattare. Conservatemi la vostra amicizia.

Bologna li 30. Gennaro 1771.

LET-

LETTERA XV.

Delle Potenze neceſſarie ad indurre nel Mobile una mutazione di Direzione.

DOvendo entrare nella teoria de' movimenti curvilinei, è di meſtieri in primo luogo riflettere, che non può il corpo muoverſi per una curva, ſe ad eſſo non ſia applicata una potenza, da cui la ſua direzione venga di continuo alterata. Imperocchè potendo dalla direzion rettilinea ad altre infinite direzioni egualmente paſſare, è evidente, che per tutte egli ha una indifferenza totale: dunque il principio dell' indifferenza domanda, che la ſua direzione non abbandoni, quando non v' abbia una ragion valevole a togliere così fatta indifferenza: ma tal ragione non vi può eſſere, s'al mobile una potenza applicata non venga: dunque affinchè il mobile viaggi per una curva, deve avere una potenza applicata.

Appreſſo convien diſtinguere due generi di movimenti curvilinei. Altri ſi dicon liberi, altri neceſſarj. I neceſſarj ſon quelli, ne' quali il mobile per qualche cagion eſtrinſeca è coſtretto a deſcrivere una qualche curva determinata, e non altra. Queſto avviene, e quando viaggia in una curva ſolida, da cui non può dipartirſi, e quando è ſoſpeſo ad un filo, o ad una verga rigida, che non cangi lunghezza. I moti liberi s' avranno, quando la ſtrada curvilinea non venga determinata ſe non ſe dalla velocità del mobile, e dalle potenze applicate. Parleremo in prima de' moti liberi, ed appreſſo de' neceſſarj, perchè con tal metodo potremo in queſti eſattamente determinar le preſſioni.

Per procedere con ordine e con chiarezza, convien eſaminare il caſo, che di tutti gli altri è il più ſemplice, in cui altro cangiamento non v' abbia ſe non ſe quello di direzione. Queſto interviene, quando il mobile con velocità coſtante viaggia per la circonferenza d' un circolo in virtù d' una potenza coſtante, che tende al centro. Viaggiando il mobile per la circonferenza B D A (*Fig.* 30.) ſia pervenuto in A. Se ad eſſo alcuna potenza applicata non foſſe, egli è certo, che proſeguirebbe il ſuo viaggio per la tangente A m, ch' è

ch' è la vera ſua direzione nel punto A. Si tagli nella tangente l' infiniteſima A m, e ſi congiunga C m, che ſega la circonferenza in n. In quel tempo, in cui il mobile paſſerebbe la A m, egli s'allontanerebbe dalla circonferenza per lo ſpazietto m n. Adunque aſfinchè dalla circonferenza non ſi diparta, fa di meſtieri, che venga ſollecitato da una potenza, la quale ſia valevole a traſportarlo per lo ſpazietto m n nel tempo, in cui percorre la A m. Per tanto ſe ci venga fatto di determinare una tal potenza, avremo quella, che dev' eſſer applicata al mobile, perchè egli nel ſuo viaggio deſcriva la circonferenza del circolo.

Chiamata la potenza $= p$, ed il tempo, in cui paſſa A m, $= dt$, avremo per le formule dimoſtrate $\frac{\varepsilon p}{m} \cdot \frac{dt^2}{k^2} = mn$: ma chiamato $= r$ il raggio del circolo, $2r : Am :: Am : mn$; dunque $mn = \frac{Am^2}{2r}$, e però la noſtra formula diverrà $\frac{\varepsilon p}{m} \cdot \frac{dt^2}{k^2} = \frac{Am^2}{2r}$ ma $k : dt :: U : Am$, chiamando $= U$ la coſtante velocità del mobile: dunque $\frac{\varepsilon p}{m} \cdot \frac{Am^2}{U^2} = \frac{Am^2}{2r}$, ovvero $p = \frac{mU^2}{2\varepsilon r}$.

Da queſta formula, ch' è interamente univerſale, ricaveremo tutti i caſi particolari come ſemplici corollarj. Per eſempio ſe lo ſteſſo corpo deſcriva lo ſteſſo cerchio con diverſe velocità, le potenze, che lo trattengono nella circonferenza, ſaranno in ragion duplicata delle velocità. Se lo ſteſſo corpo deſcriva diverſi circoli con celerità eguali, le potenze ſaranno in ragion inverſa de' raggi. Se i tempi, in cui dallo ſteſſo corpo deſcrivonſi le circonferenze, ſono eguali, cioè a dire ſe le velocità ſono come le circonferenze, o come i raggi, le potenze ſaranno in ragion diretta de' raggi. Se le potenze ſono eguali poſta la ſteſſa maſſa, ovvero ſono come le maſſe, i raggi ſaranno in ragion duplicata delle velocità. E così ſi diſcorra in tutti gli altri caſi particolari. Ma veggiamo per quale ſpa-

ſpazio la potenza p produrrà nella maſſa m la velocità U, con cui viaggia. Chiamiſi cotale ſpazio $= s$. Per le formule dimoſtrate abbiamo $4\varepsilon p s = m U^2$; dunque $4\varepsilon p s = 2\varepsilon r p$: dunque $s = \frac{1}{2} r$.

Dunque dee muoverſi la maſſa m per non dipartirſi dal cerchio, con quella velocità, che la coſtante potenza p produrebbe per la metà del raggio.

Non ommettiamo di dire una parola intorno al tempo periodico, per la qual voce intendo quel tempo, in cui traſcorreſi l'intera circonferenza. Si chiami la circonferenza $= c$, il tempo periodico $= T$. E' manifeſto, che ſarà $d t : T :: A n = A m : c$: dunque $d t = \frac{T . A m}{c}$, il qual valore ſi collochi nella formula dianzi trovata $\frac{\varepsilon p}{m} . \frac{d t^2}{k^2} = \frac{A m^2}{2 r}$, ed avremo

$$\frac{\varepsilon p}{m} . \frac{T^2}{k^2} . \frac{A m^2}{c^2} = \frac{A m^2}{2 r};\ \text{dunque}\ \frac{T^2}{k^2} = \frac{m c^2}{2 \varepsilon p r}.$$

Da queſta formula ſi raccoglierà con ſomma facilità la proporzion de' tempi periodici ne' caſi particolari. Poſta la ſteſſa maſſa, poichè le circonferenze ſon come i raggi, ſe la potenza ſia pur la ſteſſa, i tempi periodici ſaran in ragion dimidiata de' raggi: ſe p ſia come il raggio, i tempi periodici ſaranno eguali, e ſe p ſia in ragion reciproca duplicata del raggio, i quadrati de' tempi periodici ſaranno come i cubi de' raggi; e così negli altri caſi.

Prima d'andar innanzi, oſſerviamo, ch' il mobile, a cui ſia applicata una potenza tendente al centro del circolo, la quale ſia $= \frac{m U^2}{2 \varepsilon r}$, ovvero la quale agendo per la metà del raggio produca la velocità di circolazione, è obbligato a cangiar continuamente di direzione, viaggiando per la circonferenza del circolo. Eſſendo il centro del circolo lo ſteſſo, ch' il centro delle potenze, nullo ſarà lo ſpazio d'acceſſo, o di receſſo: dunque nulla azione eſerciterà la potenza. Quindi ſi raccolga quanta differenza paſſi tra le due mutazioni di ſtato, e di direzione. La mutazione di ſtato non ſi può avere, ſenza che la potenza eſerciti vera azione: laddove non è neceſſaria azione per la mutazione di direzione, ma baſta, ch' al corpo ſia una potenza acconciamente applicata.

Un mobile ſenza cangiare di ſtato può di continuo cangiare di direzione, non ſol quando viaggia per la circonferenza d'un circolo, ma ancor quando viaggia per qual ſi voglia altra curva. Nel circolo la potenza diretta al centro, o ſia perpendicolare alla curva è ſempre coſtante, perchè eſſendo coſtante la ſua curvatura, la mutazione di direzione in ogni punto è la ſteſſa: laddove nell' altre curve la potenza ad eſſe normale è variabile, perchè ſiccome è diverſa la curvatura, così è diverſa la mutazione di direzione. Per metterlo ſotto degli occhi, ſia la curva $M N$, (*Fig. 31.*) e ſia arrivato il mobile in A, dove abbia la velocità $= U$: ſi prenda il minimo archetto $A a$, e ſi menino perpendicolari alla curva $A R$, $a R$, che concorrano in R, le quali ſaranno i raggi oſculatori. Egli è noto, che l'archetto $A a$ ſi vuol riguardare come un archetto circolare, il cui centro ſia R, ed il raggio $R A$. Adunque per le coſe dimoſtrate, affinchè il mobile, ritenendo la ſteſſa velocità, non ſi diparta dall'archetto $A a$, è neceſſaria una potenza, che tenda al centro R, la quale ſia eguale $\frac{m U^2}{2 \varepsilon R}$, chiamato il raggio oſculatore $= R$, ovvero la quale agendo per la metà del raggio oſculatore produca nella maſſa m la velocità $= U$. Or eſſendo il raggio oſculatore, eccettuando il circolo, diverſo ne' diverſi punti delle curve, è manifeſto, che diverſe in tutti i punti ſaran le potenze, e ſerberanno la ragion inverſa de' raggi dell' oſculo. In queſta ipoteſi non cangiandoſi nè punto nè poco la velocità U, s' avrà bensì mutazione di direzione, ma non di ſtato.

Avendo in queſta lettera ſtabilita la legge delle potenze, ch' altro non producono ſe non mutazione di direzione, facciam pauſa: nella ſeguente tratterem del caſo, in cui ſi congiungono le due mu-

L. 2.

mutazioni di ſtato, e di direzione. Gradite la diligenza, ch' uſo nell' ubbidirvi.

Bologna li 2. Febbrajo 1771.

LETTERA XVI.

Delle Formule regolatrici de' moti liberi e curvilinei, delle Potenze paralelle, e della rifleſſione, e refrazione de' Corpi.

Due leggi univerſaliſſime abbiamo ſtabilite finora, l'una delle quali riguarda la mutazione di ſtato, l' altra quella di direzione. La prima è contenuta nella formula $2\int \underline{p}\,\underline{ds} = \underline{m}\,\underline{U}\,\underline{dU}$, nella quale $\underline{p}$ è la potenza applicata al mobile, $\underline{ds}$ lo ſpazietto d' acceſſo. La ſeconda è contenuta nella formula $2\int \underline{f}\,\underline{R} = \underline{m}\,\underline{U}^2$, nella quale R è il raggio dell' oſculo, f la potenza normale, la quale, ſe vaglia l' equazione, riterrà il mobile nella curva. Trattiamo la coſa generalmente. Viaggiando il mobile per la curva MN, ſia giunto in A, e ſeguiti a ſcorrere per l' elemento Aa. Sia AL la potenza $= \underline{p}$, e giunto il mobile in a la ſua direzione ſia aS, che concorra coll' antecedente in S. Col centro S ſi deſcriva l' archetto am, e ſia $Am = \underline{ds}$: avremo l' equazion, che determina la mutazione di ſtato $2\int \underline{p}\,\underline{ds} = \underline{m}\,\underline{U}\,\underline{dU}$: dovrebbe ſcriverſi $-\underline{m}\,\underline{U}\,\underline{dU}$, quando la potenza foſſe applicata non ad accreſcere, ma a diminuire velocità.

Poſti i raggi oſculatori AR, aR, ſicchè R ſia il centro dell' oſculo, ad AR ſi conduca normale LP. Egli è viſibile, che la po-

potenza applicata al mobile nella direzione normale alla curva ſarà AP, che di ſopra abbiamo denominata $= \underline{f}$. Se queſta ſarà tale, onde vaglia l' equazione $2\int \underline{f}\,\underline{R} = \underline{m}\,\underline{U}^2$, verrà il mobile nella curva ritenuto liberamente. Si chiami l' angolo $LAR = \varphi$, avremo $\underline{r} : \underline{Cc}.\varphi :: \underline{p} : \underline{f} = \frac{\underline{p}.\underline{Cc}.\varphi}{\underline{r}}$. Adunque la formula ſi cangierà $2\int \frac{\underline{p}.\underline{Cc}.\varphi.\underline{R}}{\underline{r}} = \underline{m}\,\underline{U}^2$. S' avverta che eſſendo l' angolo $Aam = LAP$, ſarà $\frac{\underline{Cc}.\varphi}{\underline{r}} = \frac{am}{Aa}$, la qual proporzione in molti incontri ſarà utile adoperare.

La combinazione delle due formule acconciamente maneggiate ci darà le proprietà de' movimenti tanto ne' problemi diretti, quanto negli inverſi. Io non voglio diſſimulare, ch' il più delle volte non ci è poſſibile ſvolgere ed integrare le formule ſovrappoſte, come ſarebbe d' uopo per ritrovare le proprietà, che cerchiamo. Ma ciò non proviene, perchè i principj meccanici, che rinchiudono, non ſieno legittimi e cardinali; ma perchè la geometria, e l' analiſi conoſciuta è lontana aſſai da quel grado di perfezione, ſenza di cui non è poſſibile, ch' i problemi meccanici ricevano ſoluzione. Per lo che a miſura che s' anderà accreſcendo l' analiſi, s' accreſcerà ancora la meccanica teoria. Io per dichiarar l' uſo delle due formule l' applicherò alle due più ſemplici ipoteſi, che ſono ſtate dagli autori conſiderate, e trattate, ſebbene con altro metodo. La prima ipoteſi riguarda le potenze paralelle; la ſeconda quelle, che ſi dirigono a un punto fiſſo.

Incominciando dalle potenze paralelle premetto il ſeguente lemma, che mi dà un' acconcia eſpreſſione del raggio oſculatore. Si prenda nella curva l' arco infiniteſimo Dd, (*Fig.* 32. 33.) alle cui tangenti eſtreme ſieno normali DC, dC, che determinano col concorſo loro il centro C del circolo oſculatore: ſi menino l' ordinate DH, dh normali all' aſſe della curva: ſi tagli una qualunque coſtanſtante D L, che chiameremo $= a$, e dal punto L ſi meni L M normale a D C, la quale prodotta, ſe ſarà d'uopo, incontra la dh in O. Eſſendo L M normale al raggio dell'oſculo, riuſcirà paralella a D d; dunque $dO = DL = a$. Dal punto O menisi nel raggio d C la normale O T, che taglierà C D in m. Sia D g paralella a $Hh = dx$, $dg = \pm dy$, ponendo $DH = y$: il ſegno ſuperiore riguarda la Figura 32., l'inferiore la 33. Chiamato $DM = q$, ſarà $Mm = \pm dq^2$.

Per la ſimilitudine de' triangoli d g D, L M D s'avrà $dg : Dd :: LM : LD$: di più per li triangoli ſimili O M m, C T m, ovvero C D d, ſarà $Dd : Mm :: CD : OM = LM$: dunque per la ragion perturbata ex æquo $dg : Mm :: CD : LD$, la qual eſpreſſa analiticamente da $\pm dy : \pm dq :: R : a$:

dunque $R = a . \dfrac{\pm dy}{\pm dq} = \dfrac{a\,dy}{dq}$. S'avverta

eſſere $q = \dfrac{a\,dx}{ds}$, quando la ſpecie ds eſprima l'elemento D d.

Imperciocchè i triangoli ſimili D d g, L D M danno $DM : DL :: Dg : Dd$, oſſia analiticamente $q : a :: dx : ds$; dunque $q = \dfrac{a\,dx}{ds}$.

Premeſſo un così fatto lemma, io concepiſco il corpo A, il quale viene attratto dal piano F H con direzione normale, venga ſcagliato per la direzione A Q con una determinata velocità, che chiamo $= U$. La diſtanza A F del projetto dal piano attraente ſia $= b$, la potenza applicata al corpo nel punto A ſia $= F$. Alla direzione A Q conduco la normale A B, e tagliata $A\bar{P}$ eguale ad una qualunque coſtante $= a$, dal punto P meno P B normale all'A B. Sia $AB = Q$, che poſto il ſeno totale $= a$, ſarà il ſeno dell' an-

angolo, che la potenza fa colla direzione del mobile. Il projetto deſcriva la curva A D d. A' punti D, d infinitamente vicini s'ordinino D H, d h, e ſi meni D g paralella a H h. Sia $FH = x$, $Hh = Dg = dx$, $gd = \pm dy$ la velocità del mobile $= u$.

Sia il raggio dell'oſculo $DC = R$. Tagliata $DL = a$, ſi meni L M normale a D C, e ſi chiami $DM = q$, che ſarà il ſeno dell'angolo, che la direzione del mobile farà colla direzione della potenza, ſe il ſeno totale $= a$. La potenza ſia $DI = f$, e dal punto I ſi conduca I N perpendicolare a D C. La retta $\bar{D}N$ per le coſe dette eſprimerà la potenza neceſſaria a ritenere il mobile nella curva. Eſſendo $DL : DI :: DM : DN$ ſarà analiticamente $a : f :: q : DN = \dfrac{fq}{a}$.

Ciò poſto il principio dell'azioni ci ſomminiſtra

I) $2\,\varepsilon f . \pm dy = \mp mudu$. Il principio della potenza, che ritien il mobile nella curva $\dfrac{2\,\varepsilon fqR}{a} = mu^2$.

Eſſendo $R = \dfrac{a\,dy}{dq}$, naſcerà la

II) $\dfrac{2\,\varepsilon fq\,dy}{dq} = mu^2$. Si divida la prima per la ſeconda, e riſulterà $\dfrac{dq}{q} = -\dfrac{du}{u}$, la qual integrata per modo, che fatta $q = Q$, ſia $u = U$, ſi traſformerà nella

III) $q = \dfrac{QU}{u}$. Queſta equazione ſcioglie il problema diretto: data la curva ritrovar la velocità del mobile. Per eſſa ſi ſcioglierà an-

ancora l' inverſo: data la velocità per la diſtanza dal piano attraente determinare la curva. Perciocchè ponendo nella terza il valor di q, s' avrà $\frac{a\,dx}{ds} = -\frac{QU}{u}$: dunque

$$a^2u^2dx^2 = Q^2U^2ds^2 = Q^2U^2dx^2 + Q^2U^2dy^2:$$

dunque finalmente

IV) $dx = \frac{QU\,dy}{\sqrt{a^2u^2 - Q^2U^2}}$, nella quale, eſſendo data u per y, ſono ſeparate le variabili.

Paſſando a' tempi uſerem la formula $\frac{dt}{k} = \frac{Dd}{u} = \frac{ds}{u}$, nella quale ſi ponga il valor di u, onde ſia $\frac{dt}{k} = \frac{q\,ds}{QU}$, e ſurrogando il valor di q s' avrà $\frac{dt}{k} = \frac{a\,dx}{QU}$, e integrando

V) $\frac{t}{k} = \frac{ax}{QU}$: non s' aggiunge coſtante, perchè t, x inſieme ſvaniſcono. Queſta quinta equazione manifeſta, eſſere ſempre mai i tempi proporzionali all' aſſiſſe.

Portiamo innanzi l' analiſi, ed il valor della velocità u dato nella terza equazione, collochiamolo nella ſeconda, onde ſia

VI) $2\varepsilon f\,dy = \frac{mQ^2U^2dq}{q^3}$. Da queſta equazione reſta ſciolto il problema diretto: data la curva deſcritta ritrovar la potenza applicata al mobile. Per l' inverſo s' integri l' equazion ſeſta, onde naſca

S 2 ε

$S\,2\varepsilon f\,dy = \frac{mU^2}{2} - \frac{mQ^2U^2}{2q^2}$. Poichè poſta $q = Q$, dev' eſſere $y = b$, la ſommatoria va preſa in guiſa, che poſta $y = b$, s' annulli e ſvaniſca. Fatte l' opportune operazioni avremo

$$\frac{QU\sqrt{\tfrac{1}{2}m}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}mU^2 - S\,2\varepsilon f\,dy}} = q = \frac{a\,dx}{ds} = \frac{a\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

la qual ridotta darà

$$\frac{QU\sqrt{\tfrac{1}{2}m}.\,dy}{\sqrt{\tfrac{1}{2}ma^2U^2 - a^2S\,2\varepsilon f\,dy - \tfrac{1}{2}mQ^2U^2}} = dx.$$

Chiamata $PB = P$, onde ſia $aa - QQ = PP$ s' avrà l' equazione

VII) $\frac{QU\sqrt{\tfrac{1}{2}m}.\,dy}{\sqrt{\tfrac{1}{2}mP^2U^2 - a^2S\,2\varepsilon f\,dy}} = dx$,

la qual formula, data la potenza f per y, darà ſciolto il problema inverſo. Ho fatto il calcolo nelle potenze attraenti: ſe foſſero repellenti, baſterà mutar il ſegno alle ſpecie F, f.

E nell' une e nell' altre illuſtrerò la teoria con un ſempliciſſimo eſempio. Poſto AH (*Fig.* 34.) l' aſſe attraente in modo, che le potenze ſieno in ragion delle diſtanze da queſto aſſe, e vaglia la ſeguente analogia $\varepsilon : y :: m : f$, ſi ſcagli il mobile dal punto A ſituato in AH, in guiſa che l' angolo di projezione ſia ſemiretto, colla data velocità $= U$; ſi ricerca la curva, ch' egli deſcriverà.

E' manifeſto, che $F = 0$, $b = 0$, $P = Q = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e $f = \frac{my}{\varepsilon}$. Integriamo prima la formula $S\,2\varepsilon f\,dy = S\,2my\,dy =$

M

my^2. Non s'aggiunge costante, perchè svanisce, fatta $y = b = o$.

Mettendo questo valore nella formula settima avremo $\frac{U\,dy}{\sqrt{UU - yy}} = dx$; la quale posto il seno totale $= U$, è l'equazione della curva de' seni, che verrà descritta dal mobile. Non cavo le conseguenze, che son visibili, e passo all'esempio delle potenze repellenti, dove sarò più lungo.

Suppongo come sopra l'angolo di projezione semiretto, e che sia $F = \frac{mb}{\varepsilon}$, $f = \frac{my}{\varepsilon}$. Cangiando il segno alla specie f, dobbiam trovare la sommatoria $S - 2\,m\,y\,dy$, la qual sarà $mb^2 - my^2$, perchè così svanisce fatta $y = b$. Sostituiti tutti i valori nella formula settima, sarà

$$\frac{U\,dy}{\sqrt{UU - bb - yy}} = dx$$

ovvero

$$\frac{U}{\sqrt{UU - bb}} \cdot \frac{\sqrt{UU - bb}.\,dy}{\sqrt{UU - bb + yy}} = dx.$$

Tre casi convien distinguere, o $b > U$, o $b = U$, o $b < U$. Nel primo caso la curva vien ad esser analoga alla curva de'coseni iperbolici, quando $\sqrt{bb - UU}$ si prenda per seno totale. La minima distanza s'avrà, quando $y = \sqrt{bb - UU}$, nel qual punto la direzione del mobile sarà paralella al pian repellente, onde avremo $q = a$. Perlochè la velocità $u = \frac{QU}{a} = \frac{U}{\sqrt{2}}$. Con questa velocità, se in appresso cessassero le potenze repellenti, il corpo viaggerebbe nella

nella direzion paralella all'asse: ma sussistendo le potenze repellenti, descriverà l'altro ramo della curva de' coseni.

Se $b = U$, l'equazione è alla logaritmica dotata della sotto tangente $= U$, la quale verrà descritta dal mobile, che s'accosterà sempre all'asse, nè mai lo toccherà: anderà bensì perdendo la velocità, ma essa resterà sempre maggiore di $\frac{U}{\sqrt{2}}$. Ma se $b < U$, preso il seno totale $= \sqrt{UU - bb}$, la curva è analoga alla curva de' seni iperbolici, la quale taglia l'asse sotto un dato angolo, e poi passa alla parte opposita. Cotal angolo si determinerà ponendo $y = o$, e si troverà $dy : dx$, cioè il seno al coseno come $\sqrt{UU - bb} : U$. Adunque il mobile descrivendo una curva analoga a quella de' coseni iperbolici, taglierà l'asse sotto un determinato angolo, e passerà all'altra parte.

Qui prima d'abbandonare le potenze paralelle, mi sia lecito di dir due parole della riflessione, e della refrazione de'corpi, giacchè il discorso cade in acconcio. Supponendo il piano FH (*Fig.* 35. 36.) essere repellente con qualsivoglia legge di potenze, venga il mobile scagliato nella distanza AF colla direzione AQ. Osserviam primamente, che l'integrale della formula $a^2 S - 2\,\varepsilon f dy$, prescindendo dalla costante, che deve aggiungersi, può essere e positivo e negativo. Nel primo caso aggiunta la costante, così s'esponga $\Pi.\,y - \Pi\,b$, nel secondo $\Pi.\,b - \Pi\,y$. Onde dinotando i segni superiori il primo caso, gl'inferiori il secondo, l'equazion della curva sarà

$$\frac{QU\sqrt{\tfrac{1}{2}m}.\,dy}{\sqrt{\tfrac{1}{2}m^2 P^2 \pm \Pi.\,b \mp \Pi\,y}} = dx.$$

E' noto, che la direzion del mobile sarà paralella al piano attraente, e minima la distanza $= y$, quando $\Pi\,y = \pm \frac{1}{2} m P^2 U^2 + \Pi.\,b$. Nel primo caso sempre mai, e nel secondo quando $\Pi.\,b > \frac{1}{2} m P^2 U^2$, il $\Pi.\,y$

 riusci-

riuscirà positivo, e per conseguenza reale la radice e la formula. Il mobile per tanto arriverà a camminare con direzion paralella al piano repellente. Si verifichi questo nel punto E (*Fig.* 35.), nel qual punto determiniamo generalmente la velocità. L'ipotesi vuole, ch'al punto E sia $\underline{q} = \underline{a}$: dunque per le formule già dimostrate $\underline{u} = \frac{QU}{\underline{a}}$. Sia A Q la velocità in A $= \underline{U}$. Dal punto Q si meni Q U normale all'A F. E' visibile, che sarà $QU = \frac{QU}{\underline{a}}$. Adunque il mobile giunto, che sia nel punto E più vicino al piano repellente, sarà sempre dotato della velocità Q U, colla quale seguiterà a camminare perpetuamente, quando dopo il punto E vengano meno le potenze repellenti.

Ma se le potenze dopo il punto E sussistano tai, quali erano prima, il corpo descriverà il ramo E a simile, ed eguale al primo E A: onde condotta l'ordinata E C, e tagliata C f = C F, l'ordinata a f sarà eguale all' A F. Di più la a b tangente al punto a sarà l'angolo f a b = F A B, e a b f = A B F, riuscendo b f = B F. In tai circostanze perchè non ci sarà lecito il considerare, ch' il corpo si rifletta dal piano, e passi dalla direzione diretta A B alla riflessa b a? Nella presente supposizione le due direzioni diretta e riflessa fanno gli stessi angoli e col piano attraente, e colle normali ad esso piano. Che se in pari distanza dal punto C le ripulsioni fossero minori dopo il punto E di prima, riuscirebbe l'ordinata a f < A F, e l'angolo della tangente a b col piano minore di A B F, e colle perpendicolari al piano maggiore di F A B. Tutto all'opposito seguirebbe, se dopo il punto E le repulsioni si facessero maggiori di prima.

Se supposti i segni inferiori fosse $\frac{1}{2} \underline{m} \underline{P}^2 \underline{U}^2 > \Pi \underline{b}$, nel caso di $\underline{d} \underline{y} = 0$, si troverebbe essere la formula immaginaria, lo che indica, che la direzione del mobile non è mai paralella al piano repellente, e che la curva taglia l'asse in un punto, e dopo passa alla parte opposita. Perciò il corpo viaggiando per la curva, mentre passa da una parte all'altra, si potrà dire, che si rifranga. Se dopo il punto E (*Fig.* 36.) punto della rifrazione, le potenze repellenti sieno eguali a quelle di prima, sebbene contrarie, il ramo E a sarà eguale e simile all' E A, e le tangenti A B, a b faranno lo stesso angolo e coll'asse repellente e colle normali. Se dopo il punto E in pari distanza le potenze fusser minori, la tangente a b farà coll'asse un angolo minore, e colla normale all'asse un angolo maggiore, che la tangente A B. Tutto all'opposito accaderà essendo le potenze maggiori. Se fosse $\frac{1}{2} \underline{m} \underline{P}^2 \underline{U}^2 = \Pi. \underline{b}$, il mobile acquisterà la direzion paralella, quando sarà giunto nello stesso asse di repulsione; onde così fatto caso starà di mezzo tra la riflessione, e la rifrazione.

La lettera è stata lunga, onde farò fine, riserbandomi alla seguente di parlare delle potenze, le cui direzioni concorrono in un medesimo punto. Desidero d'incontrare il vostro gradimento.

Bologna li 10. Febbrajo 1771.

LETTERA XVII.

Delle Potenze dirette ad un centro.

La teoria delle potenze tendenti ad un centro è così somigliante a quella delle potenze paralelle, che quasi espor si può colle stesse parole. Premetto per tanto il lemma di ritrovare il raggio dell'osculo nelle curve riferite al foco. La curva A D d (*Fig.* 37. 38.) si riferisca al foco F, sicchè condotte F D, F d in un angolo infinitesimo, e descritto col raggio F D l'arco minimo D g, diasi l'equazion della curva tra F D, il suo elemento d g, e il minimo arco D g: s'abbia a ritrovare il raggio dell'osculo. Da' punti D, d meninsi normali alla curva D C, d C concorrenti nel punto C. Da F si conduca F M normale a C D, e F T normale a C d, che prodotta, se d'uopo sia, incontri C D in m. E' palese, che M m sarà la differenza di D M.

Chia-

Chiamisi $FD = y$, $dg = \pm dy$, il segno superiore riguarda la Fig. 37., l'inferiore la 38. Chiamisi in oltre $Dg = dx$, $DM = q$, $Mm = \pm dy$. Sono simili i due triangoli Dgd, DMF: dunque $dg : Dd :: FM : FD$: ma simili sono parimenti FMm, CTm, ossia CdD: dunque $Dd : Mm :: CD : FM$: dunque per la ragion ex æquo perturbata $dg : Mm :: CD : FD$: onde chiamato $= R$ il raggio CD, sarà $\pm dy : \pm dq :: R : y$: dunque $R = \frac{ydy}{dq}$. Si dee avvertire, che chiamato $Dd = ds$, sarà $q = \frac{ydx}{ds}$, perchè la similitudine de' triangoli ci dà $Dd : Dg :: FD : DM$, ossia $ds : dx :: y : q = \frac{ydx}{ds}$.

Il corpo A venga scagliato per la direzione AQ con una data velocità. Dal punto A al centro F delle potenze si conduca AF, ed alla retta AQ si conduca la perpendicolare AB, e la paralella FB. Chiamisi $AF = b$, $AB = Q$, la velocità di projezione $= U$, la potenza al punto $A = F$. Pongasi, ch' il corpo nel suo moto curvilineo sia arrivato in D; la velocità in D chiamisi $= u$, $FD = y$, $DM = q$, la potenza diretta al punto $F = f$. Il principio dell'azioni ci somministra l'equazione

I) $2\varepsilon f dy = -m u du$, la quale tanto serve al caso della Fig. 37. nel quale il mobile si ritarda, quanto a quello della Fig. 38. nel quale si accelera. Per ritrovare la seconda equazione, espressa per DI la potenza, meno IN normale a DC, e ricerco il valor di DN. Essendo $FD : DI :: DM : DN$, s'avrà $y : f :: q : \frac{fq}{y} = DN$. Questa dev'esser eguale alla potenza centripeta, che ritiene il

il

il mobile nella curva; dunque s'avrà $\frac{2\varepsilon fq}{y} = \frac{mu^2}{R}$, e surrogato il valor di R, nascerà

II) $\frac{2\varepsilon fqdy}{dq} = mu^2$.

Divisa la prima equazione per la seconda nasce $\frac{dq}{q} = -\frac{du}{u}$, la qual integrata diviene

III) $q = \frac{QU}{u}$. Questa scioglie il problema diretto: data la curva trovar la velocità. Il problema inverso: data la velocità per la distanza del corpo dal centro delle potenze, maneggiando acconciamente la stessa equazione si scioglierà. Sostituendo il valor di q avremo $uydx = QUds$, e quadrando $u^2y^2dx^2 = Q^2U^2ds^2 = Q^2U^2dx^2 + Q^2U^2dy^2$; dunque $dx = \frac{QUdy}{\sqrt{u^2y^2 - Q^2U^2}}$, la qual equazione determina la natura della curva. Descritto coll'arco costante $FL = a$ un cerchio, e chiamato l'arco $LH = z$, ed il suo elemento $Hh = dz$, sarà $y : a :: dx : dz$, e però $dx = \frac{ydz}{a}$, il qual valore sostituito nascerà l'equazione

IV) $\frac{dz}{a} = \frac{QUdy}{y\sqrt{u^2y^2 - Q^2U^2}}$.

Passiamo al tempo, il cui elemento chiamiamo $= dt$. Le nostre

stre

ſtre formule ci danno $\frac{dt}{k} = \frac{ds}{u}$; dunque introducendo il valor della velocità $\frac{dt}{k} = \frac{q\,ds}{QU} = \frac{y\,dx}{QU}$: dunque

V) $\frac{t}{k} = \frac{Sq\,ds}{QU} = \frac{Sy\,dx}{QU}$, la qual formula fa vedere, eſſer i tempi in ragion diretta dell'aree deſcritte dal raggio vettore F D.

Il valor della velocità ritrovato nell'equazion terza, ſi ſoſtituiſca nella ſeconda, onde naſca $\frac{2\mathcal{E}fq\,dy}{dq} = \frac{m\,Q^2\,U^2}{q^2}$, oſſia la ſeſta

VI) $2\mathcal{E}f\,dy = \frac{m\,Q^2\,U^2\,dq}{q^3}$. Queſta equazione ſcioglie il problema diretto: data la curva deſcritta dal mobile ritrovar la potenza centrale. Quanto al problema inverſo: data la potenza centrale pel raggio vettore determinar la curva, ch'il mobile deſcrive: ſi ſommi la formula ſeſta

$S\,2\mathcal{E}f\,dy = \frac{1}{2}MU^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{m\,Q^2\,U^2}{q^2}$. La ſommatoria ſi dee prender in guiſa, che ſvaniſca fatta $y = b$. Così diſpongaſi l'equazione

$$Q^2U^2 = \overline{U^2 - \frac{2}{m}S\,2\mathcal{E}f\,dy}\,.\,q^2 = \overline{U^2 - \frac{2}{m}S\,2\mathcal{E}f\,dy}\,.\,\frac{y^2\,dx^2}{ds^2}:$$

dunque

$$Q^2U^2ds^2 = Q^2U^2.\overline{dx^2 + dy^2} = \overline{U^2 - \frac{2}{m}S\,2\mathcal{E}f\,dy}\,.\,y^2dx^2,$$

da cui proviene

$$\frac{QU\,dy}{\sqrt{U^2y^2 - Q^2U^2 - \frac{2y^2S\,2\mathcal{E}f\,dy}{m}}} = dx, \text{ ovvero}$$

$$\text{VII)}\ \frac{QU\,dy}{y\sqrt{U^2y^2 - Q^2U^2 - \frac{2y^2S\,2\mathcal{E}f\,dy}{m}}} = \frac{dz}{a}$$

per cui mezzo ſi può ſempre ottenere della curva la coſtruzione.

Con un eſempio ſolo ſemplice e facile illuſtrerò la teoria. Il mobile ſcagliato da A (*Fig. 39.*) deſcriva la circonferenza del circolo A D L, tendendo le potenze al punto F poſto nella circonferenza. Si cercano le velocità, e le potenze. Ponghiamo, ch'il corpo ſia arrivato in D; ſi meni il raggio C D, a cui dal punto F ſi meni la normale F M, che determina la D M $= q$. Si prolunghi F M in O, e dal punto F pel centro C ſi conduca il diametro F L, e ſi congiunga D L. Poichè il raggio C D divide F O perpendicolarmente, la dividerà anche in parti eguali; dunque gli archi F D, D O ſaranno eguali; dunque ancor gli angoli D F M, F L D in queſti archi inſiſtenti; dunque i triangoli D F M, F L D rettangoli in M, D ſaranno ſimili, e s'avrà F L : F D :: F D : D M oſſia $2R : y :: y : q = \frac{y^2}{2R}$. Col medeſimo diſcorſo dedurrò $Q = \frac{b^2}{2R}$. Per la formula terza $u = \frac{QU}{q}$; dunque $u = \frac{b^2U}{y^2}$, ovvero $u : U :: \frac{1}{y^2} : \frac{1}{b^2}$, cioè le velocità in ragion reciproca duplicata de' raggi vettori.

A ritrovar la proporzione delle potenze, s'avverta eſſere $dq = \frac{y\,dy}{R}$: dunque $\frac{dq}{q^3} = \frac{8R^2\,dy}{y^5}$. Queſto valore ſi ſoſtituiſca, onde de ſia $2\,\mathcal{E}\,f\,dy = \frac{8\,m\,Q^2\,U^2\,R^2\,dy}{y^5}$, e fatta la diviſion per dy,

e ſoſtituito il valore di Q, avremo $f = \frac{m\,U^2\,b^4}{\mathcal{E}\,y^5}$. Quindi

fatta $y =$, avremo $F = \frac{m\,U^2}{\mathcal{E}\,b}$: dunque $F : f :: \frac{1}{b^5} : \frac{1}{y^5}$,

cioè le potenze in ragion reciproca quintuplicata delle diſtanze.

Contentatevi per oggi di queſto, e conſervatemi la voſtra padronanza. Addio.

Bologna li 12. Febbrajo 1771.

LETTERA XVIII.

De' Movimenti curvilinei e neceſſarj.

LA teoria de' moti curvilinei e neceſſarj, di cui mi reſta da favellare, ſembra più ſpedita e più facile di quella de' moti liberi; perciocchè ſe ricerchinſi unicamente le velocità, ed i tempi del movimento, non abbiſogna d'altro principio ſe non ſe di quel dell'azioni, che dirige la mutazione di ſtato. Ma s'oltre di ciò vogliamſi indagar ancor le preſſioni, fa d'uopo chiamar in ajuto l'altro principio della potenza, che ritiene il mobile nella curva, il qual principio dirige la mutazione di direzione. Io per amore di brevità unirò inſieme l'una e l'altra ricerca, incominciando da' caſi più ſemplici.

Sia coſtretto il mobile A a (*Fig.* 40.) viaggiare per la curva ADB, nè gli ſia permeſſo di dipartirſi da eſſa. Sia ad eſſo comunicata nel punto A la velocità $= U$ nella direzione della tangente, nè v'abbia potenza alcuna ad eſſo applicata. Poichè per mancanza di potenza non interviene azione, è impoſſibile, che ſegua mutazione di ſtato, e per conſeguenza il mobile in qualunque punto D ſarà dotato della coſtante velocità $= U$; ed i tempi del movimento ſaranno in ragione degli archi AD: onde chiamati queſti $= s$, avrà luogo l'equazione $\frac{t}{k} = \frac{s}{U}$. Quanto alle preſſioni, convien avvertire, ch'eſſendo coſtretto il mobile di cangiar continuamente la ſua direzione, è neceſſario, ch'ad eſſo ſia di continuo applicata quella potenza, ch'è valevole di ritenerlo nella data curva. Queſta, come s'è dimoſtrato, dev'eſſer $= \frac{m\,U^2}{2\,\mathcal{E}\,R}$, chiamato il raggio dell'oſculo $= R$. Per tanto s'ecciterà una potenza media $= \frac{m\,U^2}{2\,\mathcal{E}\,R}$, la quale per l'una parte ſpingerà il corpo verſo il centro dell'oſculo, e ſarà quella deſſa, che lo ritien nella curva; per l'altra premerà la curva medeſima, la qual ſi ſuppone ferma così, che non poſſa eſſer dal ſuo luogo rimoſſa. In così fatto moto neceſſario interviene mutazione di direzione, ma non di ſtato.

Or ſupponghiamo, ch'al mobile ſia una potenza applicata. Viaggiando per la curva ADB ſia il mobile arrivato in D, la cui velocità $= u$, e la potenza ſia $DP = f$. Preſo l'elemento Dd arrivi in d: la direzione nuova della potenza ſia dS, ch'incontra in S l'antecedente, col qual centro ſi deſcriva l'archetto dm. A ritrovar la velocità, baſterà il principio dell'azione contenuto nella formula $2\,\mathcal{E}\,f.\,Dm = m\,u\,du$. Ritrovata la velocità ſi ritroverà la formula de' tempi coll'equazione $\frac{dt}{k} = \frac{Dd}{u}$.

Non ricercando altro, che le velocità e i tempi, ſi può ridurre il problema alla teoria delle potenze, ch'accelerano il corpo nella direzion loro. Imperciocchè condotta PO normale alla tangente DO, per

per la similitudine de' triangoli POD, dmD, sarà $DP = \underline{f} : DO :: Dd : Dm$; dunque $\underline{f}.Dm = DO.Dd$: ma $2\varepsilon\underline{f}.Dm = \underline{m}\underline{u}d\underline{u}$; dunque $2\varepsilon.DO.Dd = \underline{m}\underline{u}d\underline{u}$. Egli è adunque evidente, che la potenza DO agendo per lo spazietto Dd produce lo stesso cangiamento di stato, che la vera potenza DP. Perciò quello, ch'abbiamo insegnato del movimento rettilineo accelerato o ritardato, si vuol trasportare al curvilineo necessario, sostituendo in luogo della potenza DP la sua equivalente DO nella direzione della tangente.

Per determinar le pressioni, condotta la DR normale alla curva, ed a questa la perpendicolare PQ, è certo, ch'il mobile sarà spinto per la direzione DR colla potenza DQ. Or tre casi possono avvenire; primo che la potenza DQ sia precisamante eguale a quella, ch'è necessaria a ritenere il mobile nella curva, cioè $= \frac{\underline{m}\underline{u}^2}{2\varepsilon\underline{R}}$; secondo, che sia minore; terzo, che sia maggiore. Nel primo caso tale è la potenza DQ, ch'obbligherebbe il mobile a descriver la curva con moto libero; onde niuna potenza media nascerà tra il corpo e la curva. Nel secondo caso la DQ non è sufficiente a ritener il corpo per la curva, e perciò egli l'abbandonerebbe dalla parte convessa. Quindi essendo necessario, che DQ da un'altra potenza venga accresciuta, nascerà tra il corpo e la curva concava una potenza media, la quale dovrà esser $= \frac{\underline{m}\underline{u}^2}{2\varepsilon\underline{R}} - DQ$.

Nel terzo caso essendo DQ maggiore di $\frac{\underline{m}\underline{u}^2}{2\varepsilon\underline{R}}$, il corpo con moto libero si partirebbe dalla curva dalla parte concava: dunque una parte sola di DQ s'impiegherà a ritener il mobile nella curva, l'altra parte lo spingerà contro al convesso della curva: onde tra il corpo e la parte convessa nascerà una potenza media $= DQ - \frac{\underline{m}\underline{u}^2}{2\varepsilon\underline{R}}$. Non mi stendo a determinare minutamente ciò, che seguirebbe, se la potenza avesse le posizioni $D\overset{I}{P}$, $D\overset{II}{P}$, $D\overset{III}{P}$, perchè

dalle

dalle cose dette agevolmente deducesi.

Illustrerò brevemente la teoria coll'esempio de' penduli, che sebbene non è il più difficile, pure è il più utile. In questi la potenza media è infrapposta al corpo ed al chiodo, che lo sostiene: onde dobbiamo considerare il filo, che si riguarda come indistraibile, dotato di rigidità, che con eguale pressione trae il corpo, ed il chiodo. Supporrò, ch'il mobile pendulo sia fornito di gravità costante, le cui direzioni sien paralelle. A questo fine torna in acconcio premettere un teorema generalissimo. Posta verticale la direzione della potenza costante discenda il mobile per la curva ADB, (*Fig.* 41.) incominciando il moto dal punto A. Si meni qualunque verticale BF, e l'orizzontali AF, DG: dico, che il mobile o discenda per la curva AD, o per la verticale FG, ne' punti D, G situati nella medesima orizzontale, sarà fornito della stessa velocità. L'orizzontale dg infinitamente prossima alla DG determini gli elementi analoghi Dd, Gg. Le direzioni della potenza $= \underline{p}$, sieno DP, dP, e prodotta gd in m, si determini lo spazietto d'accesso Dm. Chiamata $= \underline{U}$ la velocità in D, e $= \underline{u}$ la velocità in G, il principio dell'azioni darà $2\varepsilon\underline{p}.Dm = \underline{m}\underline{U}d\underline{U}$, $2\varepsilon\underline{p}.Gg = \underline{m}\underline{u}d\underline{u}$: dunque essendo $Dm = Gg$, sarà $\underline{m}\underline{U}d\underline{U} = \underline{m}\underline{u}d\underline{u}$, e dividendo per m, e integrando $\underline{U}^2 = \underline{u}^2$, ossia $\underline{U} = \underline{u}$: come si dovea dimostrare. Quindi è facile a dedurre, che la velocità in $D = \frac{\sqrt{4\varepsilon\underline{p}.FG}}{\underline{m}}$

Ancorchè le potenze non fossero costanti, purchè si mantenessero paralelle, e nella medesima orizzontale anche eguali, le velocità ne' punti D, G, si ritroverebbero eguali.

Sieno due penduli di diversa lunghezza CB, cb, (*Fig.* 42.) che discendano per archi simili AB, ab, supposte le potenze proporzionali alle masse, si domanda la proporzione tra i tempi delle discese. Presi gli archi simili AD, ad, ed i loro elementi simili DE, de, e condotte l'orizzontali DG, dg, di più AF, af, discor-

ria-

riamola così. La velocità in D alla velocità in d è in ragion dimidiata di FG : fg, ovvero di CB : cb: ma il tempo per DE al tempo per de è in ragion diretta degli archetti DE, de, ossia de' raggi CB, cb, e inversa delle velocità, ossia inversa dimidiata de' raggi CB, cb: dunque il tempo per DE al tempo per de in ragion dimidiata de' raggi ossia delle lunghezze de' penduli CB, cb: la qual proporzione essendo costante ne segue, che i tempi per gli archi interi e simili AB, ab siano nella stessa ragion dimidiata delle lunghezze ovver de' raggi CB, cb.

Posta la stessa massa due penduli eguali CB, cb (*Fig.* 43.) descrivano archi eguali animati da potenze costanti sì, ma disuguali: si ricerca la proporzione de' tempi delle loro oscillazioni. Null'altro si cangia nella preparazione, se non che eguali sono gli archi AD, ad, e gli elementi loro DE, de. Le potenze disuguali si chiamino P, p. Le velocità in G, g, essendo FG = fg, saranno in ragion dimidiata delle potenze P, p: ma i tempi per gli eguali elementi DE, de sono in ragion reciproca delle velocità: dunque i tempi per DE, de saranno in ragion reciproca dimidiata delle potenze: la qual proporzione essendo costante, ne seguita, ch' i tempi per gl' interi archi AB, ab saranno nella stessa ragione reciproca dimidiata delle potenze P, p.

Poste le masse eguali, ma le potenze P, p disuguali, si cerca la proporzione tra le lunghezze de' penduli CA, ca, (*Fig.* 42.) che chiameremo R, r, affinchè esse compiano le loro oscillazioni simili nello stesso tempo. Fatta la preparazione di prima, la velocità in D alla velocità in d si ritrova come $\sqrt{P.FG} : \sqrt{p.fg}$: ma FG : fg :: R : r: dunque le velocità in D, d sono come $\sqrt{PR} : \sqrt{pr}$: ma i tempi per DE, de sono direttamente come DE : de, ovvero R : r, ed inversamente come le velocità in D, d: dunque i tempi per DE, de sono come $\frac{R}{\sqrt{PR}} : \frac{r}{\sqrt{pr}} :: \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}$: ma i tem-

pi.

pi devono esser eguali: dunque $\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}$, ossia R : r :: P : q.

Per tanto se le lunghezze de' penduli saranno in ragione delle potenze, tutti gli archetti analoghi, e per conseguenza gli archi interi si passeranno nel medesimo tempo.

Conchiuderò col ritrovar quella curva, nella quale il mobile fornito di costante gravità da qualunque punto incominci a discendere, arriva sempre al punto infimo nel medesimo tempo. Nel moto rettilineo abbiam veduto esservi isocronismo, quando le potenze sono come le distanze dal centro. Adunque riducendo il movimento curvilineo al rettilineo, s'avrà isocronismo nella curva, quando le potenze prese nella tangente saranno in ragion degli archi da passarsi fino al punto infimo. Per tanto la curva ADB (*Fig.* 44.) sarà l'isocrona, quando designata per DP la potenza costante $= p$, e condotta PQ normale alla tangente sia DQ all'arco DB in ragion costante, che potremo $p : q$. Chiamata BG $= x$, BD $= s$, GD $= y$ s'avrà $ds : dx ::$ DP $= p :$ DQ $= \frac{p\,dx}{ds}$: dunque la natura della curva verrà espressa dall'equazione $\frac{p\,dx}{ds} = \frac{ps}{q}$, ovvero $q\,dx = s\,ds$, e integrando $2qx = s^2$, ovvero $\sqrt{2qx} = s$, e differenziando $\frac{\sqrt{q}\,dx}{\sqrt{2x}} = ds$, e quadrando $\frac{q\,dx^2}{2x} = ds^2 = dx^2 + dy^2$: dunque $\frac{dx\sqrt{\frac{q}{2} - x}}{\sqrt{x}} = dy$, la quale è l'equazione della cicloide, il cui circolo genitore ha il diame-

tro

tro $= \frac{q}{2}$. Potendo esser q qualunque quantità ne seguita esser l'isocronismo proprietà di qual si voglia cicloide.

Avea disegnato di por fine con questa alla serie delle mie lettere: ma la domanda che voi mi fate, se riesca mai d' applicar con profitto al movimento de' fluidi il principio dell' azioni, m' obbliga ad aggiungerne un' altra per soddisfarvi. State sano.

Bologna li 18. Febbrajo 1771.

LETTERA XIX.

Del Principio dell' azioni applicato al movimento de' Fluidi.

IL predominio, ch'avete sopra di me, P. Virgilio riveritissimo, m' obbliga ad intrare non senza qualche ribrezzo nel movimento de' fluidi. Sebben esso è in così profonda caligine immerso, ch' agli occhi ancora più acuti e penetranti è difficilissimo il ravvisarlo: pure io son d' avviso, ch' egualmente ch' il movimento de' solidi venga regolato dal principio dell' azioni, ch' è universale. Ma per applicare il principio a dovere, e senza paralogismo è di mestieri non trascurare alcune cautele, che di leggieri sfuggono dalla vista. In questa lettera ve ne farò avvertire alcune nel movimento d' un fluido, che non essendo capace di compressione è costretto a passare da un vaso più largo ad un tubo più stretto. Parlerò soltanto del caso, in cui dovendo per ogni sezione tanto del vaso, quanto del tubo nello stesso tempo passare un' egual quantità di liquore, non può a meno, che la sua velocità nel vaso non sia a quella nel tubo in ragion reciproca della sezion del vaso a quella del tubo.

Presupposto così fatto teorema convien mettere in veduta una ve-

verissima riflessione del Signor Giovanni Bernoulli, che sarà come la fonte di tutte le cautele, di cui dobbiamo trattare. Se il liquore unicamente nell' atto di passare dal vaso largo nel tubo stretto cangiasse velocità, ne seguirebbe, che sarebbe un acquisto instantaneo d' una velocità maggiore, e d' una maggiore quantità di stato: la qual cosa è affatto contraria alle sagrosante leggi della natura, perchè siccome l' azione è del genere delle quantità successive, così lo dev' essere ancor l' effetto, e la mutazione di stato. Quindi affinchè ciò non avvenga, è necessario, che l' accelerazione nel vase si faccia a poco a poco, e dovendo esser sempre le velocità in ragion reciproca delle sezioni, è necessario, che queste divengano a poco a poco minori, e che una parte del fluido rimanga morto, e senza movimento.

Convien dichiarare colla Figura questa verità importantissima. Sia il vaso largo AE, (*Fig.* 45.) a cui sia annesso il tubo stretto BK. Si concepisca una qualunque curva NZF. Il fluido NEF, ch' è separato da questa curva, starà in riposo. Tutto il fluido compreso tra le sezioni AM, DF sarà dotato della stessa velocità, la quale di mano in mano che si diminuiscono le sezioni YZ, anderà crescendo in proporzion reciproca delle sezioni, finchè verrà ad esser massima nella sezione BN, e nel rimanente del tubo BK. L' acqua contenuta nello spazio DBNF da noi, siccome dal Bernoulli, verrà chiamata gorgo, la cui figura per mancanza di dati non ci è permesso di determinare.

Ancorchè l' acqua contenuta nella parte AF del vase, e nel tubo BK ritenendo la stessa velocità non soffra cangiamento di stato; pure evidente cosa è, che l' acqua contenuta nel gorgo passando a sezioni più strette è necessitata a cangiare stato. Che se l' acqua in AF, e per conseguenza in BK acquistasse un incremento di velocità, e di quantità di stato, egli è pure evidente, che l' acqua nel gorgo anche per questa ragione soffrirebbe mutazione di stato. La prima di queste due mutazioni la direm proveniente dal passaggio da sezione a sezione; l' altra la direm proveniente dall' incremento di velocità, ch' acquista l' acqua nel vase. L' una e l' altra di queste due mutazioni bisogna determinare: ci studierem di farlo con un medesimo calcolo.

Chiamata la sezion del vase AM, ovvero DF $= a$, quella del tubo $BN = b$, l'altezza del gorgo $BD = c$, la fezion $YZ = y$, fi concepifca con un minimo movimento paffar la fezion AM in am, la HK in hk, e la YZ in yz; onde fieno eguali i cilindretti Am, Yz, Hk. Chiamata $Aa = dz$, e $Yy = dx$, s' avrà $adz = ydx$. Sia la velocità in $A = U$, e quella in $Y = u$: onde effendo le velocità reciprocamente come le fezioni s'avrà $u = \frac{aU}{y}$, e differenziando in fuppofizione, che fia variabile tanto la U, quanto la y, s'avrà $du = \frac{-aUdy}{yy} + \frac{adU}{y}$: ma la mutazione di ftato, che foffre lo ftrato $YZzy = ydx$, è eguale allo fteffo ftrato moltiplicato in udu: dunque farà $= ydx$. $\frac{-a^2U^2dy}{y^3} + \frac{a^2UdU}{yy}$. De' due termini, de' quali è compofta la formula, il primo dinota la mutazione di ftato, che foffre lo ftrato $YZzy$ a cagione del paffaggio da fezione a fezione; il fecondo quella che foffre a cagione dell'accrefcimento della velocità U. Confideriamo l'uno e l'altro partitamente.

La prima mutazione di ftato è $ydx.\frac{-a^2U^2dy}{y^3}$: ma $ydx = adz$; dunque farà $a^3U^2dz.\frac{-dy}{y^3}$. Perciocchè per riguardo a tutti gli ftrati componenti il gorgo tanto la U, quanto la dz è la fteffa, e fi può riguardare come coftante, integriamo per modo, che pofta $y = a$, la fommatoria fia nulla, e s'avrà $a^3U^2dz.\overline{\frac{1}{yy} - \frac{1}{aa}}$. Pongafi ora $y = b$, e farà

$a^3U^2dz.\overline{\frac{1}{bb} - \frac{1}{aa}} = aU^2dz.\frac{a^2 - b^2}{bb}$, mutazione di ftato, che foffre il gorgo intero in virtù del paffaggio da fezione a fezione, mentre la fezion AM paffa in am. Poche, ma importanti confeguenze dedurrò da quefta formula.

In primo luogo riflettiamo, che nella formula non entra nè l'altezza del gorgo $DB = c$, nè quantità alcuna, che ne determini la figura, ma fol dipende dalle fezioni eftreme $DF = a$, $BN = b$, cioè dalle fezioni del vafo e del tubo. Adunque qualunque fia la figura e l'altezza del gorgo, s'avrà fempre la fteffa mutazione di quantità di ftato nell'acqua, onde il gorgo è compofto. Quindi ricavafi, che chiunque facendo infinitefima l'altezza del gorgo, ha giudicato di poter ne'fuoi calcoli ommettere la mutazion di ftato, che foffre, è caduto fenza fallo in paralogifmo, perchè ho dimoftrato, accader la fteffa mutazione, o l'altezza del gorgo fia finita o fia infinitefima.

In fecondo luogo riflettafi, che non potendofi avere cangiamento di ftato fenza azion di potenza, acciocchè il fluido nel vafe e nel tubo confervi una medefima velocità, e non cangi ftato, è neceffario, che v' abbia una potenza, la cui azione, mentre la fuperficie AM fi porta in am, fia eguale alla mutazione di ftato, che foffre il gorgo a cagione del paffaggio da fezione a fezione, cioè $= aU^2dz.\frac{a^2 - b^2}{b^2}$. Quindi fe a cagion d'efempio fupporremo applicata in AM una potenza, che diremo $= ap$, poichè la fua azione è $= 2\varepsilon apdz$, s'avrà $2\varepsilon apdz = aU^2dz.\frac{a^2 - b^2}{b^2}$: dunque $ap = \frac{aU^2}{2\varepsilon}.\frac{a^2 - b^2}{b^2}$. Se fi avrà per tanto una così fatta potenza, non feguirà verun cangiamento di ftato nell'acqua del vafo, e del tubo, ma nell'acqua del gorgo feguirà folo quella mutazione di ftato, che nafce dal paffaggio da fezione a fezione. Ma fe l'azione della potenza foffe maggiore, oltre di quefta s'otterrà un' altra mutazione di ſtato, che naſce dall' accreſcerſi la velocità nel vaſe, ch' ora fa d' uopo determinare. Queſta ci viene eſpreſſa nel ſecondo termino della noſtra formula, ch' è $ydx . \frac{a^2 U dU}{y^2} = a^2 U dU . \frac{dx}{y}$. Poichè UdU per riſpetto a tutti gli ſtrati è lo ſteſſo, integrando s' avrà $a^2 U dU . S \frac{dx}{y}$. Se queſta ſommatoria prendaſi in maniera, che ſvaniſca fatta $x = o$, $y = a$, ed appreſſo facciaſi $x = c$, $y = b$, la formula ci preſenterà la mutazione di ſtato di tutto il gorgo, che noi cerchiamo.

Evidente coſa ſi è, che così fatto cangiamento di ſtato, che ſoffre il gorgo, dipende e dalla figura e dall'altezza del medeſimo gorgo. Perchè meglio ciò ſi comprenda, e per preſentare agli occhi la ſommatoria, diſtribuiſco così la formula $\sqrt{a} . UdU . S \frac{a\sqrt{a} . dx}{y}$. Pongo $\frac{a\sqrt{a}}{y} = s$, ſicchè le linee s ſieno in ragion reciproca delle ſezioni y: onde la formula, che ci dà la mutazione di ſtato di tutto il gorgo proveniente dall' accreſcimento della velocità nel vaſe, ſarà $\sqrt{a} UdU . Ssdx$. Ad avere la $Ssdx$, s' applichino all'altezza del gorgo DB (*Fig.* 46.) l'ordinate $YX = s = \frac{a\sqrt{u}}{y}$, onde naſca la curva HXK. La $Ssdx$ preſa nell'eſpoſte circoſtanze verrà eſpreſſa dall'area DHKB, che per brevità chiamerò $= H$: dunque la predetta mutazione di ſtato ſarà $\sqrt{a} . HUdU$.

Ritrovate le due mutazioni di ſtato, che ſoffre il gorgo, il principio dell' azione ci ſomminiſtrerà agevolmente l' equazione, che contiene la legge regolatrice del movimento. Imperciocchè ſe avre-

mo

mo una potenza, ch' eſerciti un' azione maggior di quella, ch' è neceſſaria a produr la mutazione di ſtato, che ſoffre il gorgo pel paſſaggio da ſezione a ſezione, noi porremo l' azione della potenza eguale alla mutazione di ſtato, che ſoffre l'acqua ADFM (*Fig.* 45.) nel vaſe, BHKN nel tubo, e alle due mutazioni, che ſoffre il gorgo DFNB, le quali abbiamo determinate. Queſta ſarà l'equazione, che ricerchiamo. Per eſempio s' abbia in AM una potenza $= ap$, la cui azione ſia $2\varepsilon apdz$: ſi chiami $AD = f$, $BH = g$; s' avrà $2\varepsilon apdz = afUdU + \frac{bga^2UdU}{b^2} + aU^2dz . \frac{a^2 - b^2}{b^2} + \sqrt{a} . HUdU$. S' avverta, che ne' caſi particolari le ſpecie p, f, g poſſono eſſer variabili, e dipender dalla fluente z, c' ha per differenza dz. Baſtimi d' aver appianata la ſtrada, ed eſpoſto il metodo ed i principj, che ci ſomminiſtrano l'equazione.

Vi ſarete ſenza alcun dubbio avveduto, ch' in queſte lettere, che v' ho indirizzate, non è ſtato mio diſegno nè di promuovere le teorie meccaniche, nè di ſpiegare profondamente a qual ſegno ſieno ſtate ſin a noſtri tempi avanzate. In altre occaſioni, congiungendo le mie deboli all' altrui dotte fatiche, mi ſono ſtudiato di farlo, e mi ſtudierò di farlo ancora per l' avvenire. Il mio unico diſegno ſi è ſtato di ſtabilire i veri, legittimi, e cardinali principj delle Meccaniche, deducendoli con ſicuro metodo, e ſenza alcuna petizion di principio, parte dalla natura dell' equilibrio e del movimento, parte da più ſemplici e chiari fenomeni, che ſi preſentano i primi a chi la mente rivolge a così fatte ricerche.

Siccome due ſono le mutazioni, ch' intervengono a' corpi, cioè quella di ſtato, e quella di direzione; così a due ho ridotti i principj della Meccanica: l' uno regola il cangiamento di ſtato, l' altro il cangiamento di direzione. Il primo, ch' io chiamo il principio dell' azioni, conſiſte in queſto, che la ſomma de'prodotti delle potenze negli ſpazietti preſi nelle direzioni delle potenze, quando ſien coſpiranti, ovvero la differenza loro, quando ſieno contrarj, è proporzionale ſempre mai alla ſomma de' prodotti delle maſſe nelle loro velocità, e negli incrementi o decrementi delle ſteſſe velocità: per-

perciocchè i primi prodotti ci danno l'azioni delle potenze; i secondi ci presentano le mutazioni di ſtato dalle maſſe ſofferte. Il ſecondo principio, che dirige il cangiamento di direzione, e che poſſiam chiamare principio delle potenze centripete, conſiſte in queſto, che la ſomma o la differenza delle preſſioni naſcenti dalle potenze nella direzione normale alla curva dev' eſſer eguale a quella potenza, ch'è valevole di ritener il corpo nella curva, la qual potenza è in ragion compoſta ſemplice della maſſa, duplicata della velocità, e reciproca ſemplice del raggio oſculatore. Con queſti due principj alla mano ſi poſſono dimoſtrare tutte le teorie, che ſin al preſente ſono ſtate dagli Autori prodotte, ed a queſti fa d'uopo ricorrere, quando con ſicurezza e ſenza pericolo di cadere in errore ci ſtudieremo di accreſcerle e di renderle più perfette.

Da' due noſtri cardinali principj diſcendono, e ſe ne deducono molti altri, de' quali con molta lode ſi ſon ſerviti gli Autori, ed a quali ſon debitori delle loro ſcoperte. Queſti non ſon per lo più, che gli ſteſſi noſtri principj applicati ad alcune particolari circoſtanze, ovvero alcune conſeguenze, che da eſſi chiaramente diſcendono. Per eſempio molti hanno adottato il principio, ch'un corpo grave da una data altezza diſcendente, ſe cangi direzion verſo l'alto, incominciando coll'acquiſtata velocità, ſi porterà preciſamente a quell'altezza, da cui è diſceſo. Queſto non è altro, ch'il noſtro principio dell' azione applicato alla diſceſa ed all' aſceſa de' gravi. Imperciocchè quella mutazione di ſtato, ch'è prodotta da un' azione, dev' eſſer diſtrutta da un' azione eguale: ma eſſendo la medeſima la gravità, l'azioni ſaranno eguali, ſe gli ſpazj verticali, per cui s'eſercitano, ſaranno eguali: dunque lo ſpazio dell' aſceſa dev' eſſer eguale a quello della diſceſa. Che ſe nell' aſcendimento la gravità, ſebben coſtante, foſſe minore, ſarebbe d'uopo modificare il principio, e dire, ch' il mobile monta a tal altezza, ch'è allo ſpazio della diſceſa in ragion reciproca delle potenze, perchè ſuppoſta tal proporzione l'azioni ſarebbero eguali.

Similmente il Signor Giovanni Bernoulli ha poſto per principio, che ne'corpi perfettamente elaſtici i prodotti delle maſſe ne'quadrati delle velocità ſono eguali prima, e dopo dell'urto. Queſto non è altro ch' il primo noſtro principio, il qual inſegna, che ſe un' azione, la qual diminuiſce la quantità di ſtato, ſia egual a quella, la

la qual l'accreſce o ſucceſſivamente o ſimultaneamente, la quantità di ſtato ritorna la ſteſſa. Ma il principio non ha luogo ne' corpi imperfettamente elaſtici, perchè eſſendo minor l'azione, che riſtaura la quantità di ſtato, di quella, che la minora, dopo l'urto la quantità di ſtato ſarà minore di prima.

L'incomparabile Signor Newton determinando le trajettorie deſcritte da un projetto nel vacuo, quando le potenze tendono ad un centro, ſerveſi del principio, ch' i tempi ſono in ragion dell'aje deſcritte da raggi vettori. Queſto è ſtato da me invincibilmente dedotto da' due principj dell' azione, e della forza centripeta, ed è veriſſimo. Ma ſe tutte le potenze non tendano allo ſteſſo centro, il principio vien meno. Di fatto il Signor Bernoulli volendo determinar le trajettorie nel pieno, dove ſi deve metter a computo la reſiſtenza, è ſtato coſtretto d'abbandonarlo, e d'appigliarſi al più univerſale principio della potenza centripeta. Di queſti eſempj leggendo i più accreditati Scrittori, ne troverete di molti.

Laſcierò a voi diretto dal voſtro ingegno e ſapere, il ſervirvi degli univerſali principj, che ho ſtabiliti e dimoſtrati, e il diſporre con ordine più chiaro e più eſatto le teorie meccaniche già ſcoperte, e il promuoverle ed arricchirle di nuove verità, che ſtanno tutt'ora naſcoſe. Vi prego a ricevere con gradimento le fatiche, c'ho per voſtro comando ed amor ſoſtenute, e a credere, che ſono pronto in ogni incontro a ſervirvi.

Bologna li 10. Aprile 1771.

IL FINE.

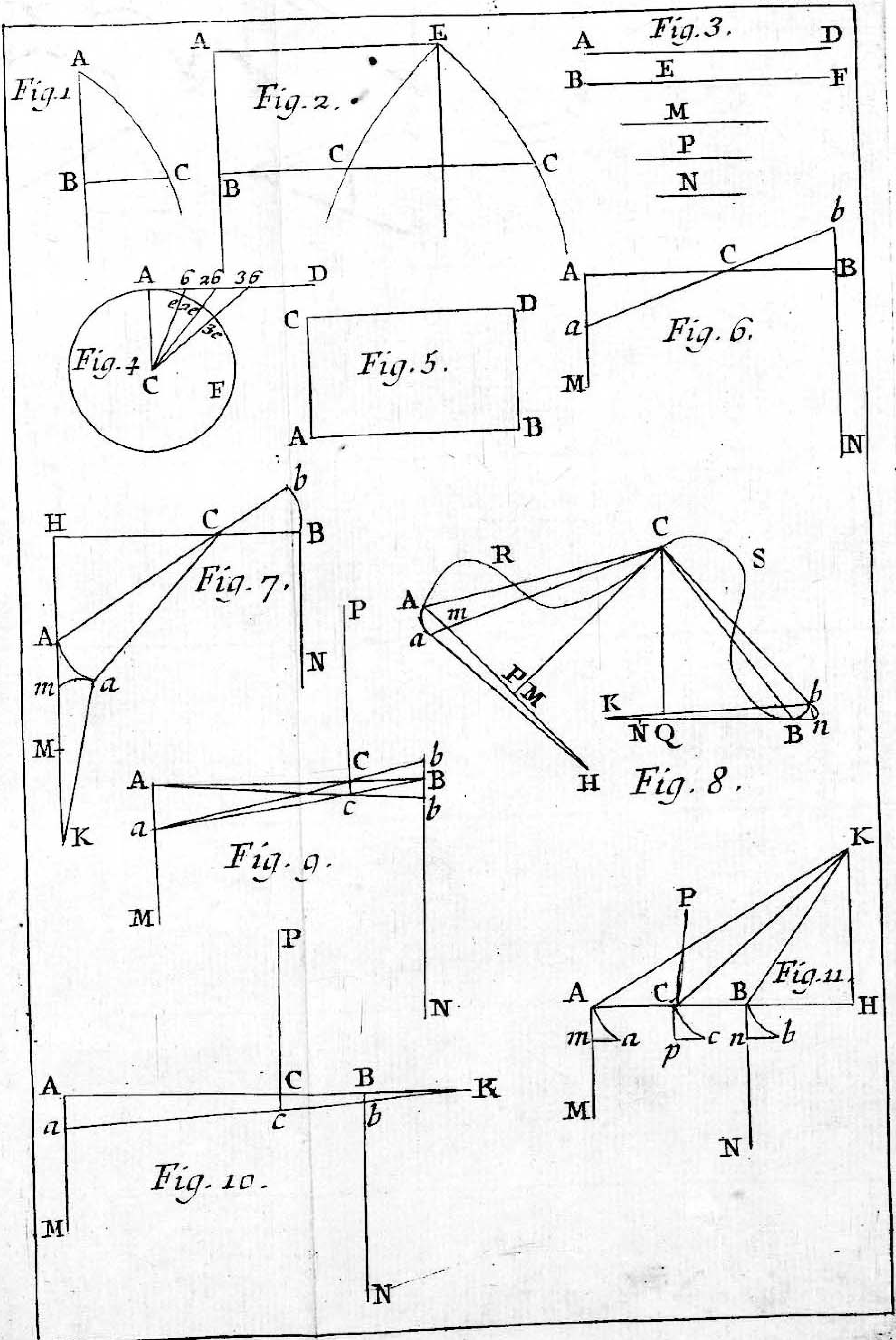
INDICE.

ERRORI. CORREZIONI.

Pag.	*Lin.*	ERRORI.	CORREZIONI.
19	28	Aa - Bb::	Aa:Bb::
67	10	$\frac{4:R\cdot\overline{MR-mr}}{MR^2+mr^2}$	$\frac{4:R\cdot\overline{MR-mr}\cdot S}{MR^2+mr^2}$
68	4.6	MR + mr	MR - mr
79	14	NR, BO	NQ, BO
90	2	$\frac{Vdy}{\sqrt{VV-yy}}$	$\frac{\frac{1}{2}Vdy}{\sqrt{\frac{1}{4}VV-yy}}$
	3	totale V	totale $\frac{1}{2}$ V
	11	$\frac{Vdy}{\sqrt{VV-bb-yy}}$	$\frac{\frac{1}{2}Vdy}{\sqrt{\frac{1}{4}VV-bb+yy}}$
	12	$\frac{V}{\sqrt{VV-bb}}\cdot\frac{\sqrt{VV-bb}\cdot dy}{\sqrt{VV-bb+yy}}$	$\frac{\frac{1}{2}V}{\sqrt{\frac{1}{4}VV-bb}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{4}VV-bb}\cdot dy}{\sqrt{\frac{1}{4}VV-bb+yy}}$
	13	$b > V,\ b = V,\ b < V$	$b > \frac{1}{2}V,\ b = \frac{1}{2}V,\ b < \frac{1}{2}V$
	15. 16	$\sqrt{bb-VV}$	$\sqrt{bb-\frac{1}{4}VV}$
91	3	$b = V$	$b = \frac{1}{2}V$
	4	$= V$	$= \frac{1}{2}V$
	6	$b < V$	$b < \frac{1}{2}V$
	7. 11	$\sqrt{VV-bb}$	$\sqrt{\frac{1}{4}VV-bb}$
	12	a quella de' coseni	a quella de' Seni
	24	$\sqrt{\frac{1}{2}m^2p^2\pm\pi\cdot b\mp\pi\cdot y}$	$\sqrt{\frac{1}{2}mP^2V^2\pm\pi\cdot b\mp\pi y}$
103	1	R:r: :p:q	R:r::P:p
106	ult.	$dz.\overline{\frac{1}{yy}-\frac{1}{aa}}$	$dz.\overline{\frac{1}{2yy}-\frac{1}{2aa}}$
107	1	$dz.\frac{1}{bb}-\frac{1}{aa}$	$dz.\frac{1}{2bb}-\frac{1}{2aa}$
	20. 22. 23	$\frac{aa-bb}{bb}$	$\frac{aa-bb}{2bb}$
109	10	$\frac{aa-bb}{bb}$	$\frac{aa-bb}{2bb}$

Nella Fig. 29 manca l'archetto e i da descriversi col centro R, e col raggio R e.
Nella Fig. 40 manca la lettera D nell'interseζione della curva, e della retta GP.
Nella stessa, non toccata la P, ch' esiste nella retta GD, l'altre tre P vanno segnate così P', P'', P'''.
Nelle Fig. 42, 43 manca la lettera C al fine della retta BF.
Nella Fig. 42 tra i punti f, b in luogo della d va posta la g.

Tab. I.



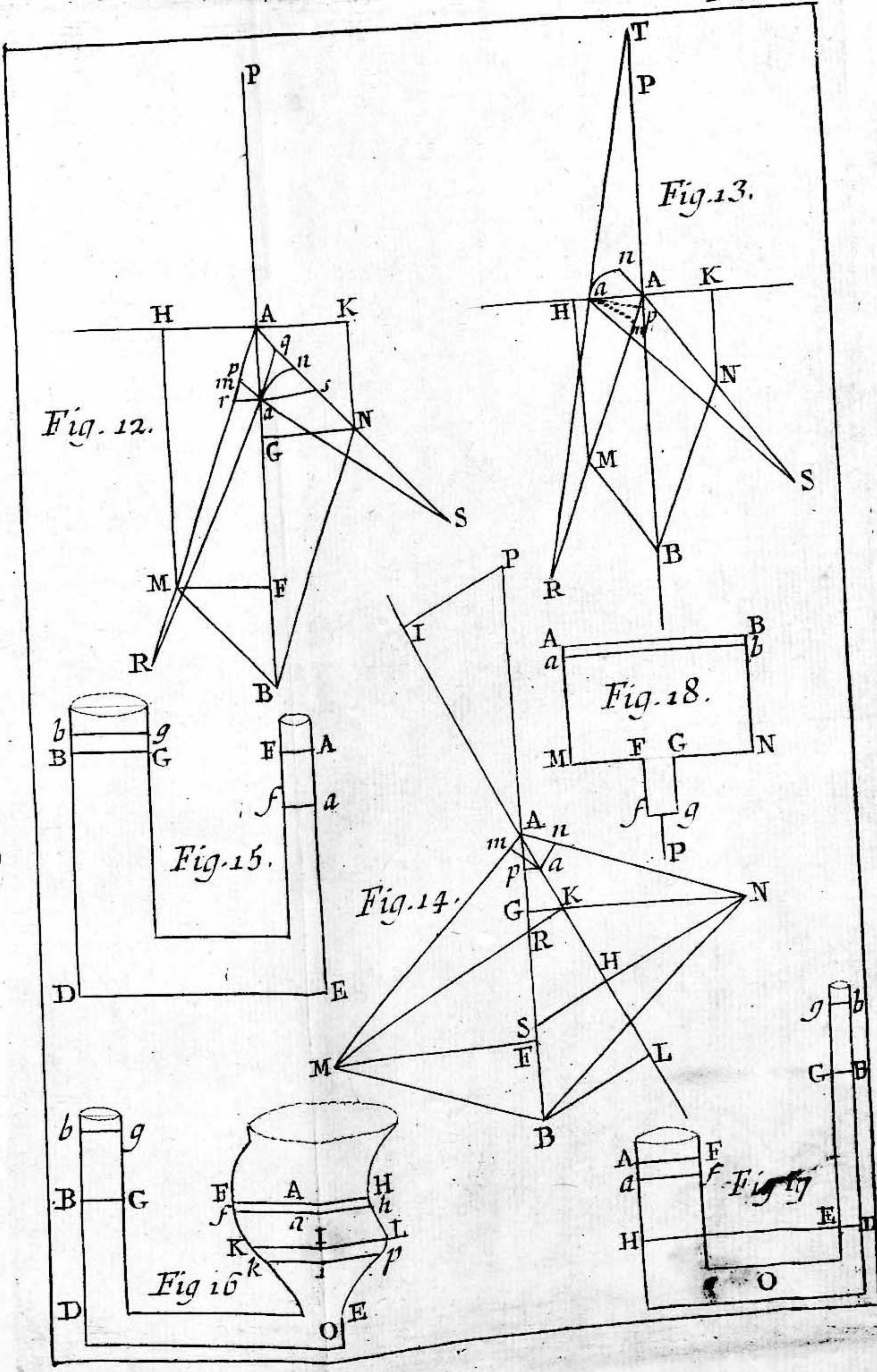


Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15. Fig 16 Fig. 17 Fig. 18.

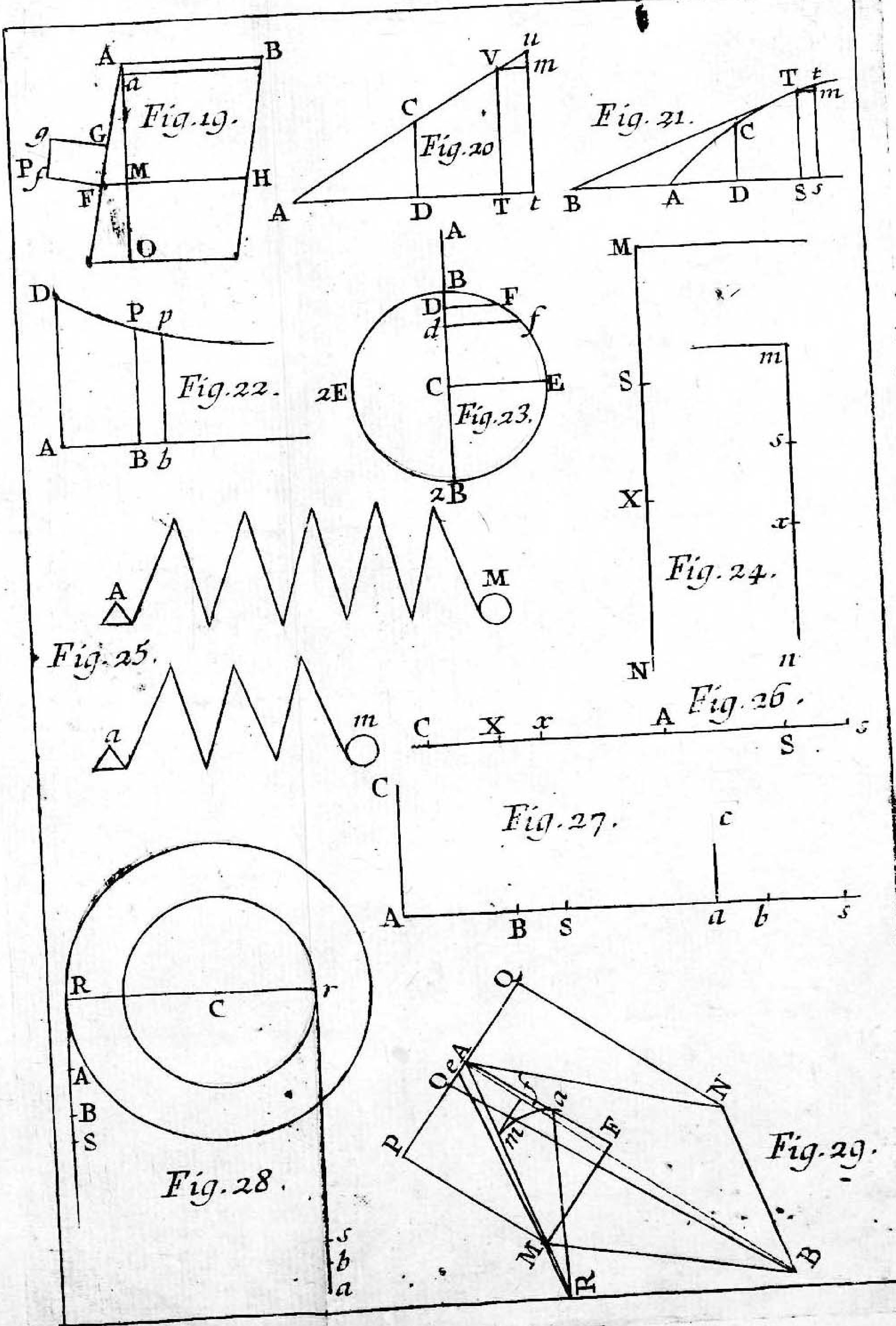


Fig. 19.
A B a G g P f M H F O
Fig. 20
u V m C A D T t
Fig. 21.
T t m C B A D S s
Fig. 22.
D P p A B b
Fig. 23.
A B D F d f C E 2E 2B
Fig. 24.
M S X N m s x n
Fig. 25.
A M a m
Fig. 26.
C X x A S s
Fig. 27.
C c A B S a b s
Fig. 28.
R C r A B S s b a
Fig. 29.
Q O e A N a f m F P M R B

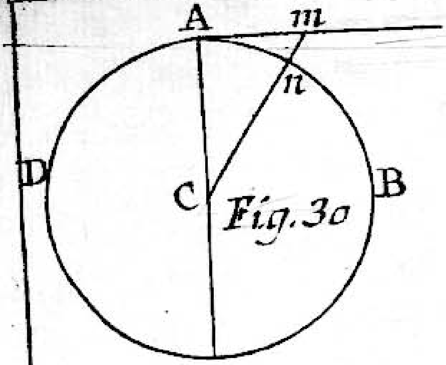


Fig. 30

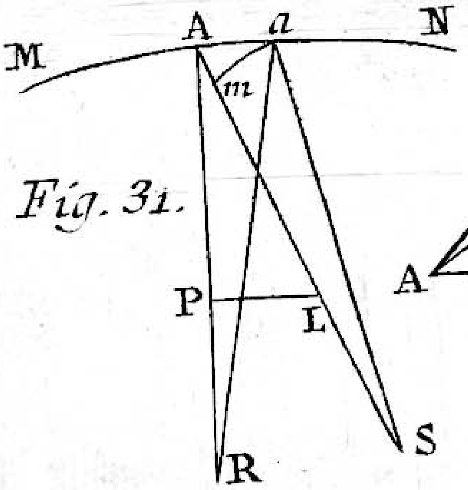


Fig. 31.

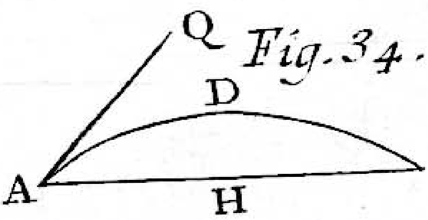


Fig. 34.

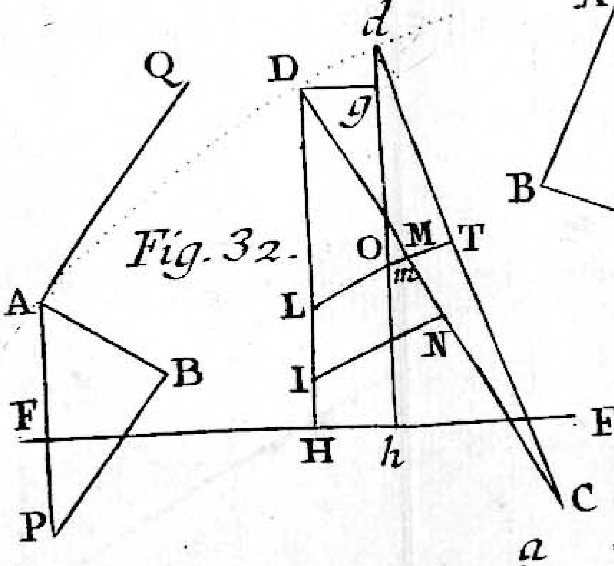


Fig. 32.

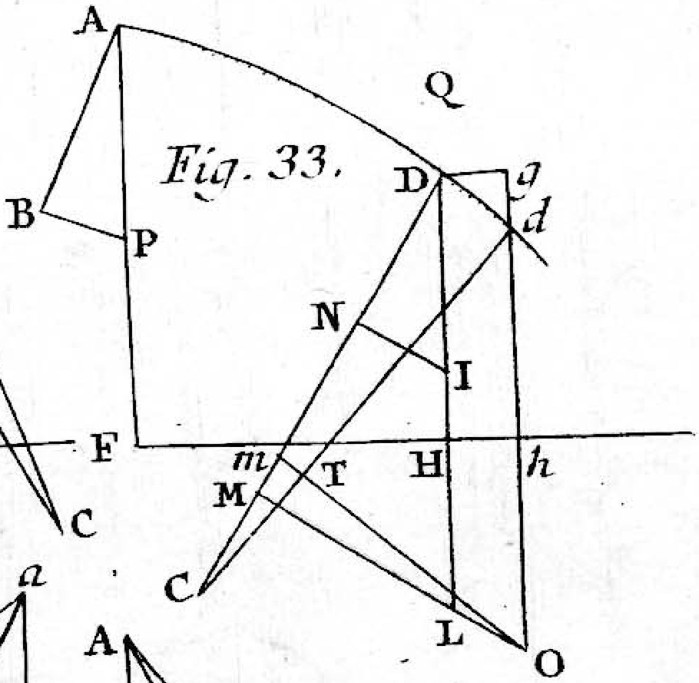


Fig. 33.

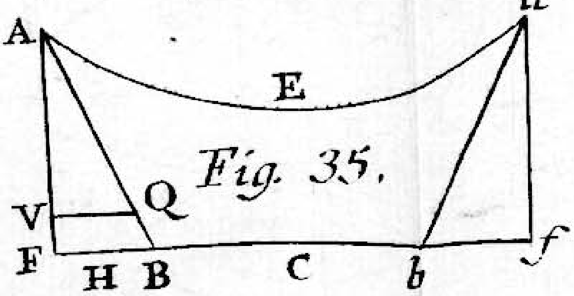


Fig. 35.

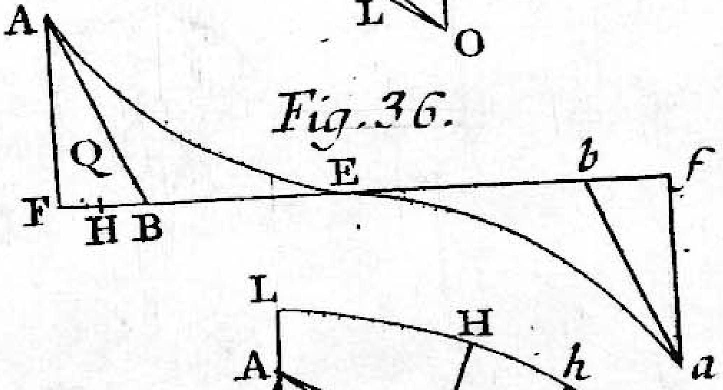


Fig. 36.

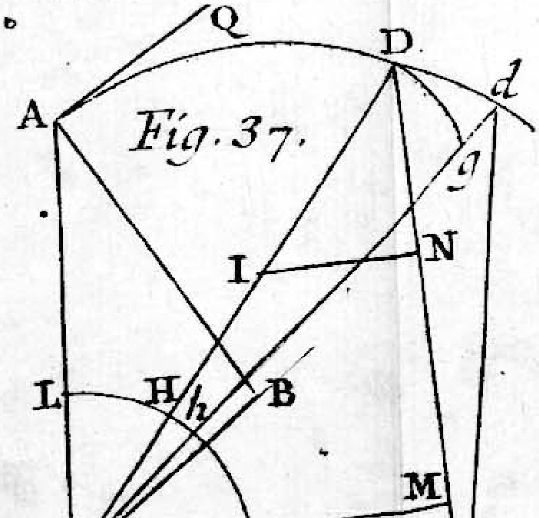


Fig. 37.

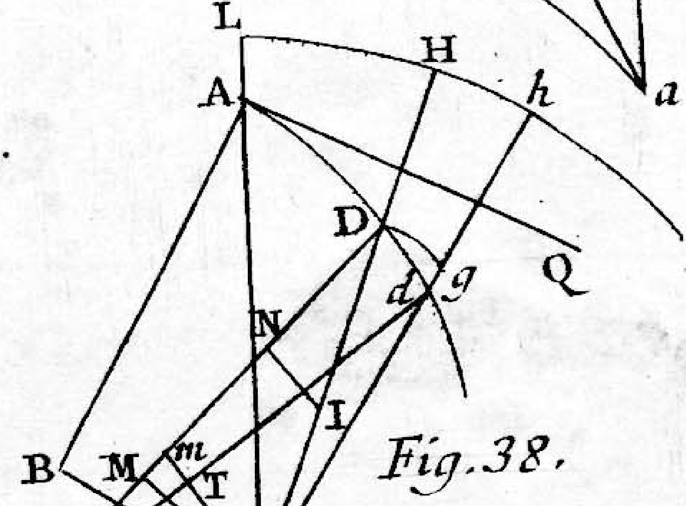


Fig. 38.

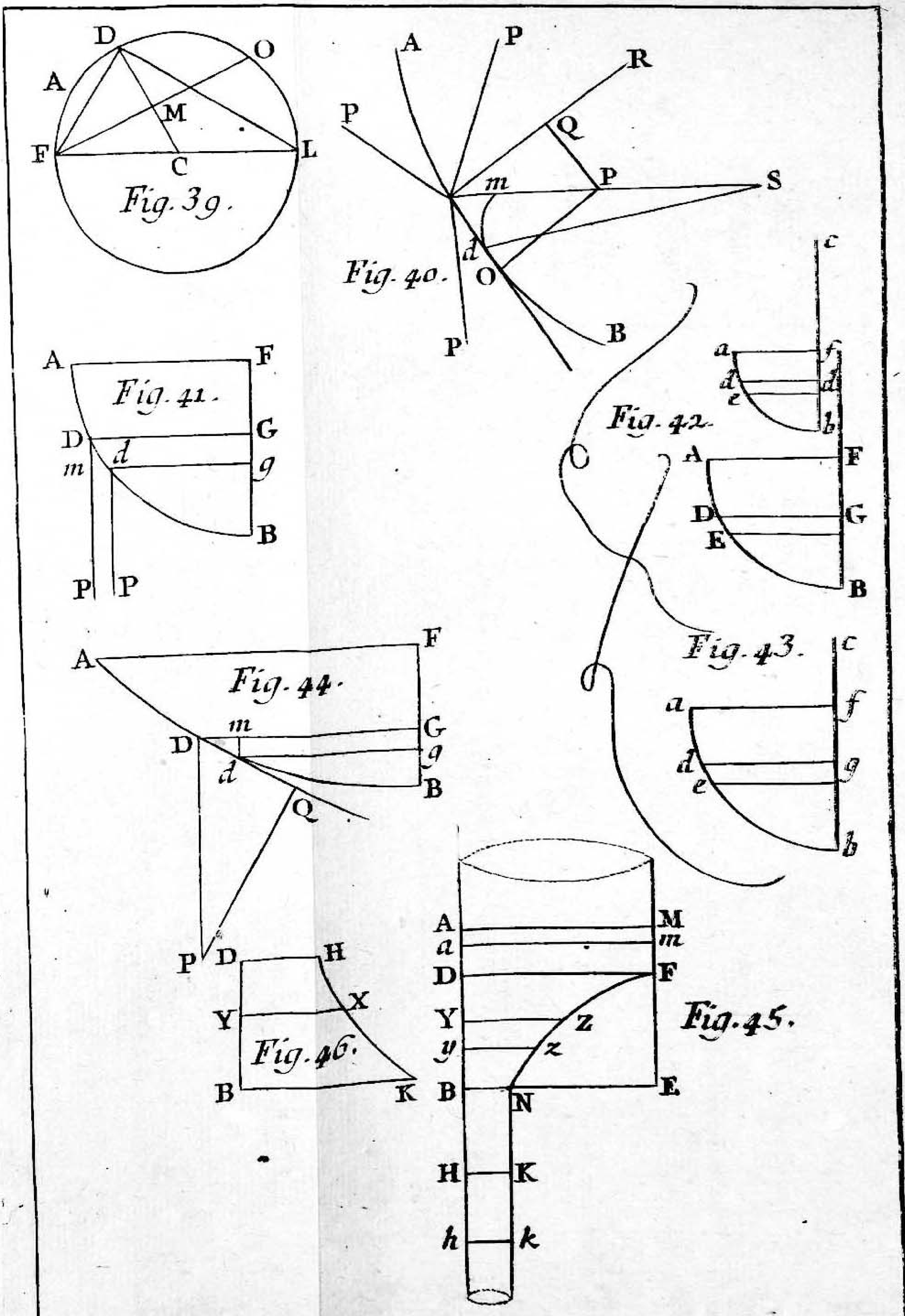


Fig. 39.
D O A M F C L
Fig. 40.
A P R P Q m P S d O P B
Fig. 41.
A F D G m d g B P P
Fig. 42.
c a f d d e b A F D G E B
Fig. 43.
c a f d g e b
Fig. 44.
A F m G D g d B Q P
Fig. 45.
A M a m D F Y Z y z B E N H K h k
Fig. 46.
D H X Y B K