XXVI. - Congruenze ed omologie tra complessi e tra cicli orientati. -

107. - Se un n-complesso orientato, c_n, ha per contorno un $(n-1)$-complesso orientato c_{n-1} (ciclo orientato o insieme di cicli orientati), si dice che c_n è congruente a c_{n-1} e si scrive $c_n \to c_{n-1}$. In particolare, se c_n non ha contorni (è cioè un ciclo orientato o un insieme di cicli orientati), si dice che è congruente a zero e si scrive $c_n \to 0$. Dal nº 101 segue senz'altro che più congruenze si posson sommare a membro a membro. In particolare, se λ è un intero positivo, da $c_n \to c_{n-1}$ deducesi $\lambda c_n \to \lambda c_n$. Denotando con $-c_n$ il complesso orientato derivante da c_n coll'inversione dei versi scelti nelle sue singole n-cellule, poichè è chiaro che $-c_n$ ha per contorno $-c_{n-1}$, cioè $-c_n \to -c_{n-1}$, vale anche la congruenza $-\lambda c_n \to -\lambda c_{n-1}$.

Dunque più congruenze si posson combinare linearmente, moltiplicando i due membri di ciascuna per un intero positivo o negativo e sommando a membro a membro.

Se γ_K, γ_{K-1} son complessi orientati sopra un dato C_n, tra i quali interceda la congruenza $\gamma_K \to \gamma_K$ si dice che γ_{K-1} è un $(K-1)$-complesso orientato omologo a zero, e si scrive $\gamma_{K-1} \sim 0$. Un $(K-1)$-complesso orientato omologo a zero, che consti di $(K-1)$-cellule di C_n e sia il contorno di un K-complesso orientato costituito da K-cellule di C_n, si dice altresì un K-complesso orientato circondante di C_n

Se γ_K, γ'_K son due K-complessi orientati sopra un C_n, e il K-complesso $\gamma_K - \gamma'_K$ è omologo a zero, cioè $\gamma_K - \gamma'_K \sim 0$, si scrive altresì $\gamma_K \sim \gamma'_K$, e si dice che i due K-complessi orientati sono fra loro omologhi.

Poichè le omologie si riducono a congruenze, ne segue che più omologie si posson combinare linearmente con coefficienti interi (positivi o negativi) arbitrari.

L'omologia $\gamma_K \sim 0$ implica la congruenza $\gamma_K \to 0$ (nº 106); ma non necessariamente viceversa.

Havvi inoltre una notevole diversità tra congruenze e omologie inerenti a complessi orientati, la quale non si presenta per le congruenze e le omologie fra complessi non orientati. Dalla congruenza $\lambda c_n \to \lambda c_{n-1}$, ove λ è un intero (positivo o negativo), si deduce ovviamente la congruenza $c_n \to c_{n-1}$; mentre dall'omologia $\lambda c_n \sim \lambda c'_n$ non può affatto dedursi in generale l'omologia $c_n \sim c'_n$.

Un'omologia del tipo $\lambda c_n \sim \lambda c'_n$ o $\lambda(c_n - c'_n) \sim 0$, ove λ è un intero con $|\lambda| > 1$, dalla quale non possa ricavarsi l'omologia $c_n \sim c'_n$, vien chiamata da Poincaré un'omologia senza divisione.

La relazione che intercede tra due complessi come c_n, c'_n può designarsi, con Lefschetz, mediante il simbolo $\approx$, e questo simbolo si dirà rappresentare un'omologia con divisione, appunto perchè la relazione si scrive come se la divisione per l'intero λ fosse lecita.

XXVII. – Riduzione a forma normale delle matrici di orientamento. I numeri di Betti e i coefficienti di torsione di Poincaré.–

108. L'estensione ai complessi orientati degli sviluppi del § XXIII si presenta ormai agevole, e la indicheremo rapidamente. Si designi con σ_k il rango della matrice d'orientamento $\mathcal{L}_k$, e si conservino le consuete notazioni. Esistono in primo luogo due determinanti C_{k-1}, D_k degli ordini rispettivi α_{k-1}, α_k, e il cui valore è ± 1, tali che la matrice (1) $C_{k-1}^{-1}\mathcal{L}_k D_k=\mathcal{L}_k^*$, simile ad $\mathcal{L}_k$, ha tutti gli elementi nulli, tranne i primi σ_k elementi della diagonale principale, che sono uguali ai divisori elementari di $\mathcal{L}_k$ (pag. 216). Designeremo con d_k^j gli elementi della diagonale principale di $\mathcal{L}_k^*$, intendendo che sia $d_k^j=0$ per $j>\sigma_k$. La relazione (1) può altresì scriversi sotto la forma (2) $\mathcal{L}_k D_k=C_{k-1}\mathcal{L}_k^*$ ed equivale ad un sistema di α_k equazioni della forma:

$$(3)\qquad \mathcal{L}_k\cdot\begin{Vmatrix} x_{1j}\\ x_{2j}\\ \vdots\\ x_{\alpha_k j}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} d_k^j\; y_{1j}\\ d_k^j\; y_{2j}\\ \vdots\\ d_k^j\; y_{\alpha_{k-1}j}\end{Vmatrix}$$

in cui $x_{1j}, x_{2j},\dots, x_{\alpha_k j}$ son gli elementi della j-esima colonna di D_k, e $y_{1j}, y_{2j},\dots, y_{\alpha_{k-1}j}$ quelli della j-esima colonna di C_{k-1}. (Il secondo membro svanisce quando $j>\sigma_k$). Pertanto:

La j-esima colonna del determinante D_k è simbolo di un

k-complesso orientato sopra C_n, il cui contorno è disteso sul (k-1)-complesso orientato sopra C_n rappresentato dalla j-esima colonna del determinante C_{k-1}, e vi è disteso tante volte quante sono le unità contenute nel divisore d_k^j (quel contorno e questo complesso hanno lo stesso verso o verso contrario, secondo che d_k^j è positivo o negativo).

Ne deriva che ognuna delle ultime $\alpha_k-\sigma_k$ colonne di D_k rappresenta un k-complesso orientato congruo a zero (ciclo o insieme di cicli orientati).

Ripetendo il ragionamento del n° 94, si deduce in primo luogo che le ultime $\alpha_k-\sigma_k$ colonne di D_k $(k=0,1,\dots,n)$ posson esser modificate, senza venir meno alla (2), in guisa che ciascuna di esse rappresenti un solo k-ciclo orientato; ed in secondo luogo che le colonne di D_k posson esser modificate (senza venir meno alla (2)) in modo che ognuna delle prime σ_k rappresenti un k-complesso orientato sopra C_n, il cui contorno è disteso un certo numero d_k^i di volte su di un (k-1)-complesso orientato sopra C_n; ognuna delle successive $\alpha_k-\sigma_k-\sigma_{k+1}$ rappresenti un solo k-ciclo orientato sopra C_n, linearmente indipendente dai k-cicli orientati circondanti di C_k; e infine ciascuna delle ultime σ_{k+1} colonne rappresenta un k-ciclo orientato o un insieme di cicli siffatti sopra C_n, che è ricoperto un certo numero d_{k+1}^i di volte dal contorno di un (k+1)-complesso orientato sopra C_n.

Si può inoltre supporre, mantenendo sempre la (2), che le colonne di C_k sieno ottenute da quel le di D_k scambiando mutuamente di posto il primo dei tre gruppi suindicati ed il terzo.

Osservazione. – Essendo $D_k = \pm 1$, $C_{k-1} = \pm 1$, i numeri di una colonna (o di una riga) di D_k o di C_{k-1} son interi primi fra loro.

109. – Poichè le ultime $\alpha_k - \sigma_k$ colonne di D_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ rappresentano k-cicli orientati o insiemi di siffatti k-cicli, ciascuna di esse è una soluzione in numeri interi del sistema $(\mathfrak{L}_k)$ (pag. 296)(*). E si tratta di $\alpha_k - \sigma_k$ soluzioni linearmente indipendenti giacchè $D_k = \pm 1$. Queste $\alpha_k - \sigma_k$ soluzioni costituiscono perciò un sistema completo di soluzioni indipendenti di $(\mathfrak{L}_k)$, in quanto il rango della matrice $\mathfrak{L}_k$ è appunto σ_k.

Dunque: Ogni k-complesso orientato congruo a zero (ciclo orientato o insieme di cicli siffatti) sopra c_n, è combinazione lineare dei k-complessi simboleggiati dalle ultime $\alpha_k - \sigma_k$ colonne di D_k.

Il sistema $(\mathfrak{L}_k)$ ammette altresì σ_{k+1} soluzioni linearmente indipendenti provenienti dalle colonne di $\mathfrak{L}_{k+1}$, ciascuna delle quali è il simbolo del k-ciclo orientato contorno di una $(k+1)$-cellula orientata di c_n. Pertanto vi sono $\alpha_k - \sigma_k - \sigma_{k+1}$ soluzioni linearmente indipendenti di $(\mathfrak{L}_k)$, e soltanto tante, le quali son simboli di k-cicli orientati o insiemi di cicli siffatti, linearmente indipendenti dai k-cicli orientati circondanti di c_n. Un tal insieme di soluzioni, è dato appunto dal secondo gruppo di colonne della matrice D_k, trasformata come si è detto alla fine del n° prec.;

(*) La numerazione delle ultime tre dispense va corretta, diminuendo di un'unità la cifra delle centinaia.

anzi ciascuna di queste colonne è il simbolo di un solo k-ciclo orientato sopra c_n. Concludendo:

Se si designa con p_k il numero (massimo) dei k-cicli orientati sopra c_n, linearmente indipendenti tra loro e dai k-cicli orientati circondanti di c_n, sussiste la relazione:

$$p_k = \alpha_k - \sigma_k - \sigma_{k+1} \quad (0 < k < n). \tag{4}$$

Si osserverà che ciascuno dei p_k cicli suddetti è semplice, cioè non copre più volte un k-ciclo di c_n, a causa della proprietà segnalata nell'Oss. del n° prec.

Il gruppo delle $n-1$ relazioni (4) verrà completato aggiungendovi le relazioni

$$p_0 = \alpha_0 - \sigma_1 \;, \quad p_n = \alpha_n - \sigma_n \;,$$

la seconda delle quali definisce p_n come il numero (massimo) degli n-cicli orientati indipendenti di c_n (non avendo senso di considerare in c_n n-cicli circondanti!). Quanto alla prima, proveremo che il carattere p_0 in essa figurante coincide collo 0-esimo rango di connessione r_0 di C_n (pag. 221), ossia col numero degli n-complessi orientati (connessi) distinti tra loro (non aventi cellule comuni) in cui scindesi c_n.

Invero, assumiamo ad es. il segno + per tutte le 0-cellule di c_n, cosicchè la matrice $\mathfrak{L}_0$ s'identifica colla H_0 (pag. 289), e quindi il sistema di equazioni $(\mathfrak{L}_0)$ di pag. 296 col sistema (H_0) di pag. 221.

Conservando le notazioni di pag. 197, sieno $C_n^{m_1}, C_n^{m_2-m_1}, \dots, C_n^{\alpha_0 - m_{r_0-1}}$ gli r_0 complessi connessi, in cui scindesi C_n, e scriviamo la matrice d'incidenza H_1 ponendovi come prime m_1 righe quelle esprimenti le relazioni d'incidenza degli m_1 vertici di $C_n^{m_1}$ colle 1-cellule di

C_n, come ulteriori m_2-m_1 righe quelle esprimenti le relazioni d'incidenza degli m_2-m_1 vertici di $C_n^{m_2-m_1}$ colle 1-cellule di C_n ecc. Avremo una matrice del tipo

$$H_1 = \left\Vert \begin{array}{c|c|c|c}
H_1^{m_1} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & 0 \\ \cdots & \cdot \\ \dots & 0 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & H_1^{m_2-m_1} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & 0 \\ \cdots & \cdot \\ \dots & 0 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & H_1^{m_3-m_2} & \begin{matrix} \dots & 0 \\ \cdots & \cdot \\ \dots & 0 \end{matrix} \\
\hline
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array} \right\Vert$$

ove $H_1^{m_1}$, $H_1^{m_2-m_1}$ .... sono le matrici d'incidenza d'indice 1 dei complessi $C_n^{m_1}$, $C_n^{m_2-m_1}$, ...

La matrice d'orientamento $\mathcal{L}_1$ di C_n potrà scriversi in modo del tutto analogo: essa differirà da H_1 soltanto per ciò che dei due elementi uguali ad 1 che compariscono in ogni verticale di H_1 (la quale, all'infuori di tali elementi contiene tutti elementi nulli), uno si è cangiato in $+1$ e l'altro in -1. Cosicchè la somma delle orizzontali di ciascuna delle matrici $\mathcal{L}_1^{m_1}$, $\mathcal{L}_1^{m_2-m_1}$ corrispondenti a $C_n^{m_1}$, $C_n^{m_2-m_1}$, ... sarà zero. Otterremo pertanto τ_0 relazioni lineari fra le righe di $\mathcal{L}_1$, e saranno relazioni indipendenti, perchè le prime m_1 righe di $\mathcal{L}_1$ o le ulteriori m_2-m_1 ecc., hanno nulli gli elementi allineati verticalmente con elementi non nulli degli altri gruppi di righe. D'altro canto, fra le righe di $\mathcal{L}_1^{m_1}$ per es., non può esistere una relazione lineare diversa da quella già segnalata, perchè combinando le due relazioni se ne avrebbe una fra m_1-1 righe (al più) di $\mathcal{L}_1^{m_1}$, donde, riducendo al modulo 2, si trarrebbe una relazione lineare fra certe $\mu\ (\le m_1-1)$ righe di $H_1^{m_1}$. Ora ciò è assurdo, perchè ogni colonna della matrice formata da quelle μ righe dovrebbe contenere elementi tutti nulli, oppure $\mu-2$ elementi nulli e 2 uguali ad 1.

I vertici corrispondenti a quelle righe, godrebbero pertanto della proprietà che ogni 1-cellula incidente ad uno di essi sarebbe incidente ad un altro dello stesso insieme; epperò quei μ vertici e le 1-cellule di $C_n^{m_1}$ ad essi incidenti formerebbero un 1-complesso non connesso cogli elementi restanti di $C_n^{m_1}$, che invece è, per ipotesi, connesso. Dunque fra le righe di $\mathcal{L}_1$ intercedono τ_0 e soltanto τ_0 relazioni lineari indipendenti. Ciò significa che la caratteristica σ_1 di $\mathcal{L}_1$ uguaglia $\alpha_0-\tau_0$; ossia $\alpha_0-\sigma_1=\tau_0=p_0$; c. d. d.

Si osserverà che è altresì $\sigma_1=\rho_1$, cioè *le matrici* H_1, $\mathcal{L}_1$ *hanno la stessa caratteristica*. Invero è (pag. 221) $\rho_1=\alpha_0-\tau_0=\sigma_1$.

I numeri interi (≥ 0) p_k sono stati chiamati da *Poincaré* i *numeri di Betti*, perchè sostanzialmente considerati la prima volta dall'insigne analista nostro, in relazione ai periodi degl'integrali multipli. Li chiameremo anche *ordini di connessione*. In verità taluni, per $0<k\leq n$, rispettando la tradizione chiamano numeri di *Betti* o ordini di connessione gl'interi p_k+1. Noi preferiamo, con molti altri, la definizione data, che tratta simmetricamente tutte le p.

110. – Aggiungendo dunque alle (4) come prima relazione $p_0=\alpha_0-\sigma_1$ e come ultima $p_n=\alpha_n-\sigma_n$, e moltiplicando indi alternatamente le $n+1$ relazioni per $+1$ e -1, per poi addizionarle a membro a membro, risulta:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\,(\alpha_i-p_i)=0$$

che è la formula di Eulero estesa agli n-complessi orientati (cfr. colla pag. 222).

La caratteristica $\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^n \alpha_n$ dello n-complesso, uguaglia sia $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i p_i$ come $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i r_i$.

Per un C_n connesso è $p_0 = 1$. Se inoltre il C_n è un n-ciclo, (necessariamente connesso) orientabile, risulta (pag. 291) $\sigma_n = \alpha_n - 1$, cioè $p_n = \alpha_n - \sigma_n = 1$. (Caso particolare questo di relazioni di dualità che si vedranno tosto). Se il C_n è un ciclo non orientabile, è $\sigma_n = \alpha_n$, cioè $p_n = 0$.

111. - Passiamo ora a definire i coefficienti di torsione.

Sieno $t^1_{k-1}, t^2_{k-1}, \dots, t^{\tau_{k-1}}_{k-1}$ i valori assoluti di quelli fra i numeri interi d^j_k $(j = 1, 2, \dots, \sigma_k)$ introdotti nel n° 108 (divisori elementari della matrice $\mathcal{L}_k$), che son differenti da ± 1. Questi numeri interi positivi si chiamano, con Poincaré, coefficienti di torsione di dimensione $k-1$.

Li supporremo sempre ordinati in tal guisa, che ognuno di essi sia il massimo comun divisore di sè stesso e dei successivi (possibilità che consegue dalla definizione dei divisori elementari; pag. 216).

Ogni coefficiente di torsione t, di dimensione k, pel n° 108, è associato ad una determinata colonna del determinante C_k, la quale rappresenta sopra C_n un k-complesso orientato γ_k (insieme di k-cicli orientati), che, contato t volte, diventa un complesso circondante sopra C_n. Non esiste però alcun $(k+1)$-complesso orientato, formato di $(k+1)$-cellule coincidenti con altrettante di C_n, il cui contorno completo copra γ_k un numero di volte t' minor di t, perchè t' risulterebbe alla sua volta

il valore assoluto di un divisore elementare di $\mathcal{L}_k$, corrispondente ad un'altra colonna di C_k, e questa e la colonna precedente sarebbero linearmente dipendenti (secondo i coefficienti $\frac{t}{t'}$, 1).

Osservazione. - Come vedremo in seguito, il concetto di coefficienti di torsione di Poincaré, nel caso della riemanniana di una superficie algebrica, è intimamente legato al concetto, dovuto al Severi, di divisione per un intero di una curva algebrica tracciata sulla superficie; il che è stato genialmente posto in rilievo dal Lefschetz.

112. - È facile verificare che non esistono coefficienti di torsione di dimensione zero, e che, nel caso di un n-ciclo omogeneo orientabile, non esiston neppure coefficienti di torsione di dimensione $n-1$.

Ciò equivale a dimostrare, per quanto concerne la prima affermazione, che i divisori elementari di $\mathcal{L}_1$ hanno tutti il valore assoluto 1, e, per quanto concerne la seconda, che lo stesso accade dei divisori elementari di $\mathcal{L}_n$.

Si ricordi la struttura della matrice $\mathcal{L}_1$. Ogni verticale di $\mathcal{L}_1$, essendo il simbolo del contorno di una 1-cellula orientata di C_n, contiene due soli elementi non nulli, uno dei quali è $+1$ e l'altro -1. È facile da ciò dedurre che ogni determinante estratto da $\mathcal{L}_1$ vale $+1$ o -1 o 0, e quindi che i divisori elementari valgono ± 1. Questo è evidentemente vero pei minori di 1° ordine di $\mathcal{L}_1$: onde basterà ammetterlo pei minori di ordine ν, e dedurlo per quelli di ordine $\nu + 1$. Se un minore di ordine $\nu + 1$ contiene una verticale a elementi nulli o con un solo elemento uguale a +1 o a −1, la cosa è evidente. Se poi contiene una verticale con un elemento uguale a +1 e l'altro uguale a −1, basta sostituire alla orizzontale che contiene il primo di quei due elementi la somma di tutte le orizzontali del minore, per ricadere nel caso precedente.

La matrice $\mathfrak{L}_n$, se c_n è un ciclo omogeneo orientabile, ha la stessa struttura di $\mathfrak{L}_1$ (salvo lo scambio delle orizzontali colle verticali), perchè una orizzontale di $\mathfrak{L}_1$ fornisce le relazioni d'incidenza orientata, di una $(n-1)$-cellula orientata di c_n colle n-cellule orientate del complesso; e, attesa la omogeneità, due sole n-cellule incidono con una data $(n-1)$-cellula, e vi incidono con orientamenti opposti, per la orientabilità di c_n. Pertanto in ogni orizzontale di $\mathfrak{L}_n$ vi è un elemento +1, un altro −1, e tutti i restanti nulli.

113. – Se c_n <u>è un n-complesso orientato, che reticoli una varietà omogenea (chiusa) M_n unilatera</u>, c_n <u>possiede sempre un sol coefficiente di torsione $(n-1)$-dimensionale, e questo vale 2.</u>

Costruiamo invero un determinante D_n, d'ordine α_n, prendendo come prime $\alpha_n - 1$ colonne i simboli di altrettante n-cellule orientate di c_n, e la colonna restante tutta formata da elementi +1. È chiaro che $D_n = \pm 1$, perchè ognuna delle prime $\alpha_n - 1$ colonne contiene un sol elemento uguale ad 1. Il prodotto $\mathfrak{L}_n \cdot D_n$ è una matrice, le cui prime $\alpha_n - 1$ colonne sono i simboli dei contorni orientati delle prescelte n-cellule di c_n (pag. 295), e la colonna restante è la somma di tutte le colonne di $\mathfrak{L}_n$. Poichè, attesa la omogeneità di M_n, ogni orizzontale di $\mathfrak{L}_n$ contiene due soli elementi non nulli, il cui valore assoluto è 1, ogni

elemento dell'ultima colonna di $\mathfrak{L}_n D_n$ vale 0 oppure ±2. Nè può darsi che tutti gli elementi di quella colonna valgano 0, altrimenti le colonne di E_n sarebbero linearmente dipendenti, contrariamente al fatto che la caratteristica di E_n vale α_n (pag. 291). Pertanto (pag. 216) esiste un determinante unitario (a elementi interi) C_{n-1}^{-1}, tale che la matrice $E_n^* = C_{n-1}^{-1} \cdot \mathfrak{L}_n \cdot D_n$, simile alla $\mathfrak{L}_n$, ha nulli tutti gli elementi tranne quelli della trasversale principale. E questi elementi non nulli valgono ±1, eccetto l'ultimo che vale ±2. Ricordato il teorema di pag. 216, tenuto presente inoltre il nº 108, si conclude nel modo enunciato.

<u>Osservazione</u>. – Poichè la proprietà di una M_n omogenea (chiusa) di esser unilatera o bilatera è topologica, dai nn. 112, 113 segue che:

<u>Una varietà omogenea (chiusa) M_n è bilatera o unilatera, secondo che non possiede o possiede coefficienti di torsione $(n-1)$-dimensionale. In quest'ultimo caso havvi un solo di questi coefficienti, ed ha il valore 2.</u>

Il coefficiente di torsione 2 per la M_n unilatera può considerarsi indipendentemente dal c_n che reticola M_n, perchè il suo valore è sempre lo stesso. Questo è un caso particolare della invarianza topologica dei coefficienti di torsione, che si stabilirà fra breve.

114. – È facile ora stabilire una <u>relazione fra i ranghi e gli ordini di connessione della stessa dimensione</u>. Si osservi all'uopo, che da $\mathfrak{L}_k$ si passa ad H_k riducendo gli elementi della prima rispetto al modulo 2. Pertanto i divisori elementari corrispondenti delle due

matrici son equivalenti rispetto al modulo 2. Ma i divisori elementari pari di $\mathcal{S}_k$, ridotti al modulo 2 divengono uguali a zero; dunque il numero dei divisori elementari di $\mathcal{S}_k$ (cioè la caratteristica σ_k di $\mathcal{S}_k$) supera il numero di quelli di H_k (cioè la caretteristica ρ_k di H_k) di δ_{k-1} unità, ove δ_{k-1} designa il numero dei divisori elementari, o, in altri termini, dei coefficienti di torsione $(k-1)$-dimensionale che sono pari. Dalla relazione $\sigma_k - \rho_k = \delta_{k-1}$, tenuto conto delle uguaglianze che definiscono r_k e p_k, segue:

$$r_k - p_k = \delta_{k-1} + \delta_k \quad .$$

Tosto che avremo dimostrato la invarianza topologica dei coefficienti di torsione, epperò dei numeri δ_k, potremo pertanto affermare che i ranghi e gli ordini di connessione della stessa dimensione di una varietà topologica, coincidono, allora e solo allora che la varietà è senza torsione oppure quando i coefficienti di torsione son tutti dispari.

XXVIII. – Congruenze e omologie fondamentali.-

115. – La riduzione a forma normale delle matrici d'orientamento, indicata nel N° 108, conduce a dare una forma normale alle congruenze ed omologie tra complessi orientati costituiti da cellule di un dato C_n, analogamente a quanto si fece nel § XXIII nel caso di complessi non orientati.

Anzitutto osserviamo che le relazioni d'incidenza orientata espresse da $\mathcal{S}_k$, posson essere altresì simboleggiate dalle congruenze

$$(\mathcal{S}'_k) \qquad e_k^j \to \sum_{i=1}^{\alpha_{k-1}} \lambda_k^{ij} e_{k-1}^i \qquad (j = 1, 2, \dots, \alpha_k) \; ,$$

ove la matrice $\mathcal{S}'_k$ dei coefficienti di queste congruenze è la trasposta di $\mathcal{S}_k$ (cioè la matrice ottenuta prendendo le righe per colonne e viceversa).

Il k-complesso orientato $x_1 e_k^1 + x_2 e_k^2 + \dots + x_{\alpha_k} e_k^{\alpha_k}$, il cui simbolo è $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$, ha il contorno fornito dalla relazione (pag. 294)

$$\mathcal{S}_k \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha_k} \end{Vmatrix} = d \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{\alpha_{k-1}} \end{Vmatrix} \; ,$$

ove le y son prime fra loro, e d è un conveniente intero positivo (≥ 1). Si può pertanto scrivere:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_k} x_j \, e_k^j \to d \sum_{i=1}^{\alpha_{k-1}} y_i \, e_{k-1}^i \quad .$$

Le $(\mathcal{S}'_k)$ danno poi luogo alle omologie:

$$\sum_{i=1}^{\alpha_{k-1}} \lambda_k^{ij} e_{k-1}^i \sim 0 \quad .$$

Se ora consideriamo la matrice $\mathcal{S}_k$ ridotta a forma normale secondo il n° 108, le relazioni fornite dalle congruenze e dalle omologie fondamentali sopra indicate, possono essere sostituite dalle seguenti:

(a) $\quad \Delta_k^i \to \Delta_{k-1}^i \qquad (i = 1, 2, \dots, \sigma_k - \tau_{k-1})$,

(b) $\quad \Delta_k^i \to t_{k-1}^{i-\sigma_k+\sigma_{k-1}} \Delta_{k-1}^i \qquad (i = \sigma_k - \tau_{k-1} + 1, \dots, \sigma_k)$,

(c) $\quad \Delta_k^i \to 0 \qquad (i = \sigma_k + 1, \dots, \sigma_k + p_k)$,

(d) $\quad \Delta_k^i \sim 0 \qquad (i = \alpha_k - \sigma_{k+1} + 1, \dots, \alpha_k - \tau_k)$,

(e) $\quad t_k^{i-\alpha_k+\tau_k} \Delta_k^i \sim 0 \qquad (i = \alpha_k - \tau_k + 1, \dots, \alpha_k)$.

Il gruppo (a) di congruenze proviene da $\sigma_k - \tau_{k-1}$ colonne di D_k (nº 108), delle prime σ_k, per le quali i numeri d_k^i là considerati valgono ± 1. Il gruppo (b) dalle colonne di D_k restanti delle prime σ_k, per le quali invece i numeri d_k^i hanno valori assoluti maggiori di 1. Il gruppo (c) proviene dalle $\alpha_k - \sigma_k - \sigma_{k+1}$ colonne di D_k, che seguon le prime σ_k. E si ricordi che nessuna combinazione lineare dei cicli Δ_k^i del gruppo (c), può esser il contorno di un $(k+1)$-complesso orientato formato di cellule di C_n. Le omologie (d) corrispondono a quelle delle ultime σ_{k+1} colonne di D_k, che sono uguali alle prime $\sigma_{k+1} - \tau_k$ colonne di C_k. Perciò i k-complessi Δ_k^i del gruppo (d) – che son cicli o insiemi di cicli – son gli stessi che figuran nei secondi membri delle congruenze del gruppo (a) dell'insieme di congruenze e omologie corrispondenti alla matrice $\mathcal{L}_{k+1}$. Infine le omologie (e) provengono dalle ultime τ_k colonne di D_k, come pure dalle colonne di C_k cui corrispondon coefficienti di torsione k-dimensionali maggiori di 1; epperò i k-complessi Δ_k^i del gruppo (e) (cicli o insiemi di cicli) figuran altresì nel secondo membro delle congruenze (b) dell'insieme di congruenze ed omologie corrispondenti alla matrice $\mathcal{L}_{k+1}$.

116. – La regola di Cramer, tenuto conto che $D_k = \pm 1$, mostra che il simbolo $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$ di un qualunque k-complesso orientato sopra C_n, si esprime con una combinazione lineare a coefficienti interi delle α_k colonne di D_k. Se trattasi di un k-complesso orientato congruo a zero, Γ_k (ciclo o insieme di cicli), esso si esprimerà con una combinazione lineare a coefficienti interi

dei k-complessi congrui a zero corrispondenti alle ultime $\alpha_k - \sigma_k$ colonne di D_k (nn.i 108, 109). Cioè Γ_k sarà omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei k-complessi dei gruppi (c) (d) (e) del nº prec.. Ma, in virtù delle (d) stesse, trattandosi di omologia, si potranno trascurare i termini corrispondenti al gruppo (d). Di ciascuna delle (e) si potrà poi profittare per sostituire, nella combinazione lineare, al coefficiente del complesso Δ_k^i $(i = \alpha_k - \tau_k + 1, \dots, \alpha_k)$ il resto della divisione del coefficiente stesso per $t_k^{i-\alpha_k+\tau_k}$, sicchè in definizione verrà

$$(5) \qquad \Gamma_k \sim \sum_{i=1}^{p_k} \lambda_i \Gamma_k^i + \sum_{i=1}^{\tau_k} \mu_i \Gamma_k^{p_k+i} ,$$

ove si è posto:

$$\Gamma_k^i = \Delta_k^{\sigma_k+i} \ (i=1,\dots,p_k), \quad \Gamma_k^{p_k+i} = \Delta_k^{\alpha_k-\tau_k+i} \ (i=1,2,\dots,\tau_k),$$

e le λ, μ son interi, colla condizione:

$$|\mu_i| < t_k^i$$

Concludendo ogni k-complesso orientato congruo a zero (e quindi in particolare ogni k-ciclo orientato) sopra C_n, si esprime con un'omologia del tipo (5).

I k-complessi orientati $\Gamma_k^{p_k+i}$, in quanto soddisfanno alle omologie $t_k^i \Gamma_k^{p_k+i} \sim 0$ $(i = 1, 2, \dots, \tau_k)$, si chiamano k-complessi (cicli o insiemi di cicli) divisori dello zero. È facile verificare che tra i divisori dello zero non intercedono altre omologie distinte dalle precedenti, cioè che ogni omologia tra i divisori dello zero è combinazione lineare (a coefficienti interi) delle omologie fondamentali $t_k^i \Gamma_k^{p_k+i} \sim 0$ $(i = 1, 2, \dots, \tau_k)$.

XXIX. - Invarianza topologica dei cicli fondamentali, dei divisori dello zero e dei corrispondenti caratteri numerici. -

117. - Si può ora porre pei k-cicli orientati di c_n la questione analoga a quella risoluta nel § XXI. E la risposta si ottiene seguendo la stessa linea concettuale, coi lievi cangiamenti che sono necessari pel fatto che i cicli (anzi i complessi congrui a zero) che ora si considerano son orientati, e che essi posson non essere omologhi a zero, pur essendo summultipli di cicli omologhi a zero.

Non ci fermiamo ad esporre questa dimostrazione, che non offrirebbe nulla di concettualmente nuovo, e ci limitiamo a sottolinearne la conclusione.

Ogni k-ciclo orientato, Γ_k, dato sopra una varietà topologica M_n (irriducibile o riducibile, omogenea o no) si esprime con un'omologia del tipo (5), ove $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{p_k}$ son k-cicli orientati omologicamente indipendenti appartenenti ad un n-complesso orientato c_n, scelto comunque fra quelli che reticolano M_n, e $\Gamma_k^{p_k+1}, \dots, \Gamma_k^{p_k+\tau_k}$ sono i divisori dello zero inerenti al complesso stesso.

118. - Una prima conseguenza del teor. prec. è che, se si considera un altro n-complesso orientato c'_n reticolante M_n e si denotan con $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \dots, \Delta_k^{p'_k}$ i k-cicli orientati omologicamente indipendenti, analoghi ai $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{p_k}$ relativi a c_n, è $p'_k = p_k$. Dal che, attesa la invarianza topologica del concetto di omologia orientata, consegue che i numeri di _Betti_ sono invarianti topologici.

Infatti, sussiston le omologie
$$\Delta_k^i \sim \sum_{j=1}^{p_k} \lambda_{ij}\Gamma_k^j + \sum_{j=1}^{\tau_k} \mu_{ij}\Gamma_k^{p_k+j} \quad (i=1,2,\dots,p'_k),$$
dalle quali, moltiplicando i due membri per l'ultimo coefficiente di torsione $t_k^{\tau_k}$, inerente a c_n, si trae:
$$t_k^{\tau_k}\Delta_k^i \sim t_k^{\tau_k}\sum_{j=1}^{p_k}\lambda_{ij}\Gamma_k^j ,$$
cioè (n° 107):
$$(6) \qquad \Delta_k^i \approx \sum_{j=1}^{p_k}\lambda_{ij}\Gamma_k^j \qquad (i=1,2,\dots,p'_k)$$

La matrice $\|\lambda_{ij}\|$ ha p'_k righe e p_k colonne. Se fosse $p'_k > p_k$, si potrebbero determinare dei numeri interi $m_1, m_2, \dots, m_{p'_k}$, non tutti nulli, soddisfacenti alle equazioni
$$\sum_{i=1}^{p'_k}\lambda_{ij} m_i = 0 \qquad (j=1,2,\dots,p_k),$$
e dalle (6) si trarrebbe:
$$\sum_i m_i\Delta_k^i \approx \sum_j \Gamma_k^j \sum_i \lambda_{ij} m_i ,$$
cioè $\sum_i m_i\Delta_k^i \approx 0$, e quindi moltiplicando i due membri per un conveniente intero t s'avrebbe $t\cdot\sum_i m_i\Delta_k^i \sim 0$. Pertanto i k-cicli $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \dots, \Delta_k^{p'_k}$ risulterebbero omologicamente dipendenti, contro il supposto. Dunque non può essere $p'_k > p_k$; similmente, scambiando le veci dei sistemi di cicli, si vede che non può essere $p_k > p'_k$; epperò $p'_k = p_k$.

119. - Per dimostrare la invarianza topologica dei coefficienti di torsione, procediamo (secondo accenna il _Lefschetz_ a pag. 5 del suo trattato citato a pag. 212) come il _Severi_ (*)

(*) _Complementi alla teoria della base, ecc._ (Rendiconti di Palermo, 1910).

nella questione analoga delle curve che son divisori della curva zero, sopra una superficie algebrica.

Osserviamo in primo luogo che i divisori dello zero sono in numero finito, nel senso che, a meno di k-complessi omologhi a zero, essi riduconsi a un numero finito(*). Invero, se Γ_k è un k-complesso divisore dello zero, sussiste l'omologia

$$\Gamma_k \sim \sum_{i=1}^{p_k} \lambda_i \Gamma_k^i + \sum_{i=1}^{\tau_k} \mu_i \Gamma_k^{p_k+i}$$

Ma siccome $\Gamma_k - \sum \mu_i \Gamma_k^{p_k+i}$ è un divisore dello zero, e d'altra parte nessuna combinazione lineare dei k-cicli $\Gamma_k^1, \dots, \Gamma_k^{p_k}$ può divider lo zero (se no, moltiplicata per un conveniente intero, sarebbe omologa a zero), così $\lambda_1 = \lambda_2 \quad \lambda_{p_k} = 0$; cioè:

$$\Gamma_k \sim \sum_{i=1}^{\tau_k} \mu_i \Gamma_k^{p_k+i}$$

Ed in questo, come abbiamo osservato nel n° 116, può supporsi $|\mu_i| < t_k^i$. Pertanto ciascuna delle μ può assumer solamente un numero finito di valori donde la conclusione.

Diciamo ν_k il numero dei divisori dello zero sopra M_n, incluso tra essi anche un k-ciclo omologo a zero (divisore dello zero col quoziente 1). È manifesto che ν_k è un invariante topologico, perchè ogni divisore dello zero si muta in un divisore dello zero, trasformando omeomorficamente M_n. Il numero ν_k si chiama l'indice di torsione k-dimensionale di M_n.

(*) L'affermazione analoga per le curve algebriche di una superficie, consegue da ciò che le curve di un determinato ordine si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici completi, distinti.

Denotiamo con $\Lambda_k^1, \dots, \Lambda_k^{\nu_k}$ i ν_k divisori dello zero distinti appartenenti a M_n. Sia inoltre c_k un qualunque k-complesso orientato congruo a zero di M_n. Allora è chiaro che i k-complessi orientati congrui a zero (uno dei quali è omologo addirittura a c_k):

$$c_k + \Lambda_k^1 \ , \ c_k + \Lambda_k^2, \dots, c_k + \Lambda_k^{\nu_k} \ ,$$

sono fra loro omologhi con divisione:

$$c_k + \Lambda_k^1 \approx c_k + \Lambda_k^2 \approx \dots \approx c_k + \Lambda_k^{\nu_k} \ .$$

Viceversa, se $c_k^1, c_k^2, \dots, c_k^{\varepsilon_k}$ son ε_k k-complessi omologhi con divisione a c_k, i k-complessi orientati congrui a zero $c_k^1 - c_k^1, c_k^1 - c_k^2, \dots, c_k^1 - c_k^{\varepsilon_k}$ (di cui il primo è addirittura omologo a zero), son divisori dello zero, e quindi omologhi a certi ε_k dei divisori Λ_k^j. Dunque i k-complessi orientati congrui a zero, omologhi con divisione a un dato, sono esattamente in numero di ν_k. Considerato $+\Lambda_k^j$ come un simbolo operativo che fa passare da un k-complesso orientato congruo a zero ad uno de' suoi omologhi con divisione, le operazioni $+\Lambda_k^1, +\Lambda_k^2, \dots, +\Lambda_k^{\nu_k}$ formano ovviamente un gruppo, G_{ν_k}, che è il gruppo della torsione k-dimensionale. Si tratta di un gruppo abeliano, in quanto le sue operazioni sono a due a due permutabili.

Ricordiamo ora(*) che in un gruppo abeliano si può sempre trovare una base (sia nel nostro caso costituita dai divisori dello zero $\Lambda_k^1, \Lambda_k^2, \dots, \Lambda_k^{\bar{\tau}_k}$), tale che:

1) Le operazioni della base son indipendenti; ossia non sussiste alcuna relazione del tipo $\eta_1 \Lambda_k^1 + \eta_2 \Lambda_k^2 + \dots + \eta_{\bar{\tau}_k} \Lambda_k^{\bar{\tau}_k} \sim 0$ ove le η son interi (positivi o negativi o nulli), senza che,

(*) Ved. per es. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni, ecc. (Pisa, Spoerri 1900), pagg. 73-76.

designati con $\bar{t}_k^1, \bar{t}_k^2, \dots, \bar{t}_k^{\bar{\tau}_k}$ i periodi delle operazioni della base, necessariamente non accada che $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\bar{\tau}_k}$ sieno rispettivamente multipli di $\bar{t}_k^1, \bar{t}_k^2, \dots, \bar{t}^{\bar{\tau}_k}$.

2) I periodi $\bar{t}_k^1, \bar{t}_k^2, \dots, \bar{t}_k^{\bar{\tau}_k}$ (ordinate convenientemente le operazioni della base) godon della proprietà che ciascuno è il m. c. d. di sè stesso e dei successivi.

3) L'ordine v_k del gruppo è espresso da $v_k = \bar{t}_k^1 \bar{t}_k^2 \dots \bar{t}_k^{\bar{\tau}_k}$.

4) Ogni operazione di gruppo è del tipo $\eta_1 \Lambda_k^1 + \dots + \eta_{\bar{\tau}_k} \Lambda_k^{\bar{\tau}_k}$, colle η interi (positivi, negativi o nulli).

Ebbene i divisori dello zero $\Gamma_k^{p_k+1}, \dots, \Gamma_k^{p_k+\tau_k}$, costruiti a partire dal complesso c_n, soddisfanno essi medesimi alla condizione di formare una base per la totalità dei divisori dello zero (cfr. col. n° 116); dunque, a cagion della invarianza topologica di G_{v_k}, risulta $\bar{\tau}_k = \tau_k$, $\bar{t}_k^1 = t_k^1, \dots, \bar{t}_k^{\tau_k} = t_k^{\tau_k}$. La conclusione è che anche i coefficienti di torsione k-dimensionale son invarianti topologici.

120. – Al teorema fondamentale del n° 117 si può dare un più suggestivo significato, estendendo le considerazioni del n° 91 ai complessi orientati. Due k-complessi orientati sopra una M_n son omologhi allora e solo allora che uno di essi può considerarsi come somma dell'altro e di un numero finito di k-cicli orientati, riducibili a punti per deformazione continua entro M_n.

XXX. – Relazioni di dualità fra i coefficienti di torsione e i numeri di Betti d'una varietà omogenea. –

121. – Sia M_n una varietà omogenea bilatera e c_n un n-complesso orientato che la reticoli. Ogni orizzontale

della matrice d'incidenza H_n di C_n, contiene due soli elementi uguali ad 1 (e gli altri nulli) [ciò deriva dalla omogeneità], ed ogni orizzontale della matrice di orientamento $\mathfrak{L}_n$ di c_n contiene un elemento uguale a $+1$, un altro uguale a -1 (e i restanti nulli) [ciò deriva dalla bilateralità].

Le precedenti matrici d'incidenza $H_{n-1}, H_{n-2}, \dots, H_1$ di C_n e quelle di orientamento $\mathfrak{L}_{n-1}, \mathfrak{L}_{n-2}, \dots, \mathfrak{L}_1$ di c_n restan definite in modo ricorrente dalle condizioni

$$H_k \cdot H_{k+1} = 0 \;, \quad \mathfrak{L}_k \cdot \mathfrak{L}_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n-1).$$

Sia C'_n un complesso duale a C_n, reticolante M_n (pag. 265). Indicata con $\bar{H}_{k+1}$ la matrice trasposta di H_{k+1}, risulta (pag. 268) $H'_{n-k} = \bar{H}_{k+1}$, ove H'_{n-k} è la $(n-k)$-esima matrice d'incidenza di C'_n.

Definiamo ora la matrice $\mathfrak{L}'_{n-k}$ in guisa che $\mathfrak{L}'_{n-k} = \bar{\mathfrak{L}}_{k+1}$ (ciò si otterrà distribuendo convenientemente i segni + e − dinanzi agli elementi di H'_{n-k}). Poichè la condizione $\mathfrak{L}_k \cdot \mathfrak{L}_{k+1} = 0$ equivale alla $\bar{\mathfrak{L}}_{k+1} \cdot \bar{\mathfrak{L}}_k = 0$, risulterà: $\mathfrak{L}'_{n-k} \cdot \mathfrak{L}'_{n-k+1} = \bar{\mathfrak{L}}_{k+1} \cdot \bar{\mathfrak{L}}_k = 0$, epperò le matrici $\mathfrak{L}'_1, \mathfrak{L}'_2, \dots, \mathfrak{L}'_n$ potranno assumersi come matrici di orientamento di c'_n (complesso C'_n convenientemente orientato).

Ora i divisori elementari di $\mathfrak{L}_{k+1}$ e di $\bar{\mathfrak{L}}_{k+1}$ son gli stessi, e son altresì i medesimi di quelli della matrice $\mathfrak{L}'_{n-k}$, che è identica ad $\bar{\mathfrak{L}}_{k+1}$. Dunque i coefficienti di torsione $(n-k-1)$-dimensionale di una M_n omogenea, bilatera, son gli stessi dei coefficienti di torsione k-dimensionale.

Ne deriva che i gruppi di torsione $(n-k-1)$-dimensionale e k-dimensionale son oloedricamente isomorfi, perchè le operazioni delle basi dei due gruppi son nello designati con $\bar{t}_k^1, \bar{t}_k^2, \dots, \bar{t}_k^{\bar{\tau}_k}$ i periodi delle operazioni della base, necessariamente non accada che $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\bar{\tau}_k}$ sieno rispettivamente multipli di $\bar{t}_k^1, \bar{t}_k^2, \dots, \bar{t}^{\bar{\tau}_k}$.

2) I periodi $\bar{t}_k^1, \bar{t}_k^2, \dots, \bar{t}_k^{\bar{\tau}_k}$ (ordinate convenientemente le operazioni della base) godon della proprietà che ciascuno è il m. c. d. di sè stesso e dei successivi.

3) L'ordine ν_k del gruppo è espresso da $\nu_k = \bar{t}_k^1\, \bar{t}_k^2 \dots \bar{t}_k^{\bar{\tau}_k}$.

4) Ogni operazione del gruppo è del tipo $\eta_1 \Lambda_k^1 + \dots + \eta_{\bar{\tau}_k} \Lambda_k^{\bar{\tau}_k}$, colle η interi (positivi, negativi o nulli).

Ebbene i divisori dello zero $\Gamma_k^{p_k+1}, \dots, \Gamma_k^{p_k+\tau_k}$, costruiti a partire dal complesso c_n, soddisfanno essi medesimi alla condizione di formare una base per la totalità dei divisori dello zero (cfr. col. n° 116); dunque, a cagion della invarianza topologica di G_{ν_k}, risulta $\bar{\tau}_k = \tau_k$, $\bar{t}_k^1 = t_k^1, \dots, \bar{t}_k^{\tau_k} = t_k^{\tau_k}$. La conclusione è che anche i coefficienti di torsione k-dimensionale son invarianti topologici.

120. – Al teorema fondamentale del n° 117 si può dare un più suggestivo significato, estendendo le considerazioni del n° 91 ai complessi orientati. Due k-complessi orientati sopra una M_n son omologhi allora e solo allora che uno di essi può considerarsi come somma dell'altro e di un numero finito di k-cicli orientati, riducibili a punti per deformazione continua entro M_n.

XXX. – Relazioni di dualità fra i coefficienti di torsione e i numeri di Betti d'una varietà omogenea. –

121. – Sia M_n una varietà omogenea bilatera e c_n un n-complesso orientato, che la reticoli. Ogni orizzontale

della matrice d'incidenza H_n di C_n, contiene due soli elementi uguali ad 1 (e gli altri nulli) [ciò deriva dalla omogeneità], ed ogni orizzontale della matrice di orientamento $\mathfrak{L}_n$ di c_n contiene un elemento uguale a $+1$, un altro uguale a -1 (e i restanti nulli) [ciò deriva dalla bilateralità].

Le precedenti matrici d'incidenza $H_{n-1}, H_{n-2}, \dots, H_1$ di C_n e quelle di orientamento $\mathfrak{L}_{n-1}, \mathfrak{L}_{n-2}, \dots, \mathfrak{L}_1$ di c_n restan definite in modo ricorrente dalle condizioni

$$H_k \cdot H_{k+1} = 0 \;, \quad \mathfrak{L}_k \cdot \mathfrak{L}_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n-1).$$

Sia C'_n un complesso duale a C_n, reticolante M_n (pag. 265). Indicata con $\bar{H}_{k+1}$ la matrice trasposta di H_{k+1}, risulta (pag. 268) $H'_{n-k} = \bar{H}_{k+1}$, ove H'_{n-k} è la $(n-k)$-esima matrice d'incidenza di C'_n.

Definiamo ora la matrice $\mathfrak{L}'_{n-k}$ in guisa che $\mathfrak{L}'_{n-k} = \bar{\mathfrak{L}}_{k+1}$ (ciò si otterrà distribuendo convenientemente i segni + e − dinanzi agli elementi di H'_{n-k}). Poichè la condizione $\mathfrak{L}_k \cdot \mathfrak{L}_{k+1} = 0$ equivale alla $\bar{\mathfrak{L}}_{k+1} \cdot \bar{\mathfrak{L}}_k = 0$, risulterà: $\mathfrak{L}'_{n-k} \cdot \mathfrak{L}'_{n-k+1} = \bar{\mathfrak{L}}_{k+1} \cdot \bar{\mathfrak{L}}_k = 0$, epperò le matrici $\mathfrak{L}'_1, \mathfrak{L}'_2, \dots, \mathfrak{L}'_n$ potranno assumersi come matrici di orientamento di c'_n (complesso C'_n convenientemente orientato).

Ora i divisori elementari di $\mathfrak{L}_{k+1}$ e di $\bar{\mathfrak{L}}_{k+1}$ son gli stessi, e son altresì i medesimi di quelli della matrice $\mathfrak{L}'_{n-k}$, che è identica ad $\bar{\mathfrak{L}}_{k+1}$. Dunque i coefficienti di torsione $(n-k-1)$-dimensionale di una M_n omogenea, bilatera, son gli stessi dei coefficienti di torsione k-dimensionale.

Ne deriva che i gruppi di torsione $(n-k-1)$-dimensionale e k-dimensionale son oloedricamente isomorfi, perchè le operazioni delle basi dei due gruppi son nello stesso numero e cogli stessi periodi.

Ricordando infine le relazioni di dualità $\tau_{n-k}=\tau_k$ fra i ranghi di connessione di una M_n omogenea (pag. 268), e le relazioni $\tau_k - p_k = \delta_{k-1} - \delta_k$ del n° 114, se ne deduce subito $p_{n-k} = p_k$; cioè fra i numeri di Betti di una varietà omogenea (chiusa) bilatera, sussiston le relazioni $p_{n-k}=p_k$ $(k=0,1,\dots,n)$.

Osservazione 1ª. – Le relazioni fra i coefficienti di torsione, come pur quelle fra i numeri di Betti, divengon più complesse quando M_n è una varietà unilatera. Ved. per es. a tal proposito un lavoro sulla topologia astratta di W. Mayer (Monatshefte für Math. und Physik, 1929, p.1).

Osservazione 2ª. – A proposito di varietà a torsione (cioè con qualche coefficiente di torsione >1), ricorderemo che Poincaré ha dimostrato che ogni varietà a torsione contiene necessariamente varietà unilatere, donde una specie di torsione interna della varietà. Ma la proprietà non è caratteristica delle varietà a torsione.

122.– Sia $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{p_k}, \dots, \Gamma_k^q$ $(q=p_k+\tau_k)$ un sistema di k-complessi congrui a zero, orientati, di M_n, soddisfacenti al teor. del n° 116, sicchè:

$$(7) \qquad \Gamma_k \sim \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \Gamma_k^i ,$$

Γ_k essendo un qualsiasi k-ciclo orientato di M_n. Diremo che i complessi Γ_k^i $(i=1,2,\dots,q)$ formano una base minima per la totalità dei k-complessi nulli orientati di M_n.

Quanto ai complessi $\Gamma_k^1,\Gamma_k^2,\dots,\Gamma_k^{p_k}$, seguendo la terminologia usata dal Severi nella sua teoria delle base per

le curve di una superficie algebrica (che esporremo in seg to), diremo ch'essi formano una base intermediaria per totalità dei predetti k-complessi, nel senso che nel legam

$$\lambda\Gamma_k \sim \mu_1\Gamma_k^1+\dots+\mu_{p_k}\Gamma_k^{p_k} ,$$

fra un qualunque k-ciclo orientato (o k-complesso cong a zero orientato) e i complessi $\Gamma_k^1,\dots,\Gamma_k^{p_k}$, l'intero λ è un visore di $\mu_1,\dots,\mu_{p_k}$.

Invero, Γ_k è legato a $\Gamma_k^1,\dots,\Gamma_k^{p_k}$ da una relazione di q sto tipo, che si ottiene moltiplicando i due membri della (7) per l'ultimo coefficiente di torsione $t_k^{\tau_k}$; e d'altrond se vi è un secondo legame del tipo considerato

$$\lambda'\Gamma_k\sim\mu_1'\Gamma_k^1+\dots+\mu'_{p_k}\Gamma_k^{p_k} ,$$

dai due legami si deduce:

$$(\lambda'\mu_1-\lambda\mu_1')\Gamma_k^1+\dots+(\lambda'\mu_{p_k}-\lambda\mu'_{p_k})\Gamma_k^{p_k}\sim 0 ,$$

sicchè è $\lambda'\mu_1-\lambda\mu_1'=\dots=\lambda'\mu_{p_k}-\lambda\mu'_{p_k}=0$, onde se è μ_i risulta altresì $\mu_i'=\lambda'\rho_i$.

123.– Per le applicazioni alla Geometria algebrica va la osservazione seguente:

Sia $F(\Gamma_k)$ un funzionale lineare dei k-cicli orientati di M cioè una corrispondenza che associa ad ogni k-ciclo or tato di M_n, un numero ben determinato, valore del fu zionale su quel ciclo, e tale inoltre che sempre risulti $F(\Gamma_k'+\Gamma_k'')=F(\Gamma_k')$

Suppongasi che il funzionale sia nullo in corris denza ad ogni k-ciclo orientato omologo a zero, pel c occorre e basta (pag. 298) che sia nullo lungo ogni k-c orientato contorno di una (k-1)-cellula di M_n. È chiar allora ch'esso è altresì nullo sopra ogni divisore dello zer ed assume valori uguali sopra due cicli omologhi, ed a sopra due cicli omologhi con divisione. Pertanto la totalità dei valori del funzionale ammette una base (minima), nel senso che il valore sopra un k-ciclo orientato qualunque, è combinazione lineare a coefficienti <u>interi</u> dei valori assunti dal funzionale sopra i k-cicli di una base intermediaria. Mentre invece se si assumono in M_n p_k k-cicli orientati qualsiansi omologicamente indipendenti, il valore del funzionale lungo un k-ciclo orientato di M_n si esprime con una combinazione lineare a coefficienti <u>razionali</u> dei valori sui cicli stessi.

Il gruppo dei valori sopra un sistema di k-cicli orientati indipendenti, dicesi un <u>sistema di periodi del funzionale</u>. Quando i k-cicli orientati formano una base intermediaria si ha un <u>sistema di periodi primitivi</u> (*).

XXXI. - Intersezioni orientale di cicli entro una varietà topologica. - Indice di Kronecker. -

124. - Studiamo ora le mutue intersezioni di cicli entro una varietà omogenea (chiusa), bilatera, M_n. Nel seguito si supporrà sempre che l'ambiente sia una varietà siffatta, epperò ci dispenseremo dal ripetere gli attributi. Sieno M'_h, M''_k due varietà bilatere contenute in M_n. Per semplicità le supporremo omogenee, pur potendo trattarsi di varietà aperte. L'<u>omogeneità per</u>

(*) Ved. per es. a tal proposito la Memoria del <u>Severi</u> <u>Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard</u> (Rend. di Palermo, 1906).

<u>una varietà aperta, va intesa nel senso che</u>: ogni punto interno alla varietà ha come intorno, nella varietà, una sola cellula a cui quel punto è interno; mentre, se il punto è sul contorno, il suo intorno, nella varietà, è ancora una sola cellula, ma il punto considerato appartiene al contorno di questa.

Se due varietà M'_h, M''_k si taglian generalmente lungo una varietà (eventualmente riducibile) N_l, di dimensione $l = h + k - n$. Se per es. (ed è il caso che a noi più interessa in vista delle applicazioni alla Geometria algebrica) le M_n, M'_h, M''_k son varietà analitiche (pagg. 89 e 149) dotate di soli punti semplici (pag. 150)(*), e P è un punto comune alle M'_h, M''_k, in generale gli spazi tangenti S'_h, S''_k delle due varietà in P, saranno indipendenti entro lo S_n tangente a M_n in P. Onde - supposto $h + k \geq n$ - essi si taglieranno in un S_l ($l = h + k - n$). È facile allora dedurre dal teorema di esistenza delle funzioni implicite, che le M'_h, M''_k si tagliano, nell'intorno di P, lungo una varietà analitica N_l, avente in P un punto semplice (cioè omogenea come le varietà date).

Fissiamo un'orientazione per ciascuna delle M_n, M'_h, M''_k e, chiamato A_1 il punto P, sia $V_l = A_1 A_2 \ldots A_{l+1}$ un poliedroide elementare ad l dimensioni di N_l, che,

(*) I concetti di punti semplici, di punti terminali o punti contorno in senso metrico-proiettivo, trovansi anche sviluppati (per le linee), ed in modo più rapido che in queste Conferenze, nella Nota del <u>Severi</u>, <u>Le curve intuitive</u> (Rendiconti di Palermo, 1930). In particolare ivi trovasi una rapidissima dimostrazione dell'invarianza topologica degli estremi di una linea, stabilita qui in modo meno semplice a pag. 95.

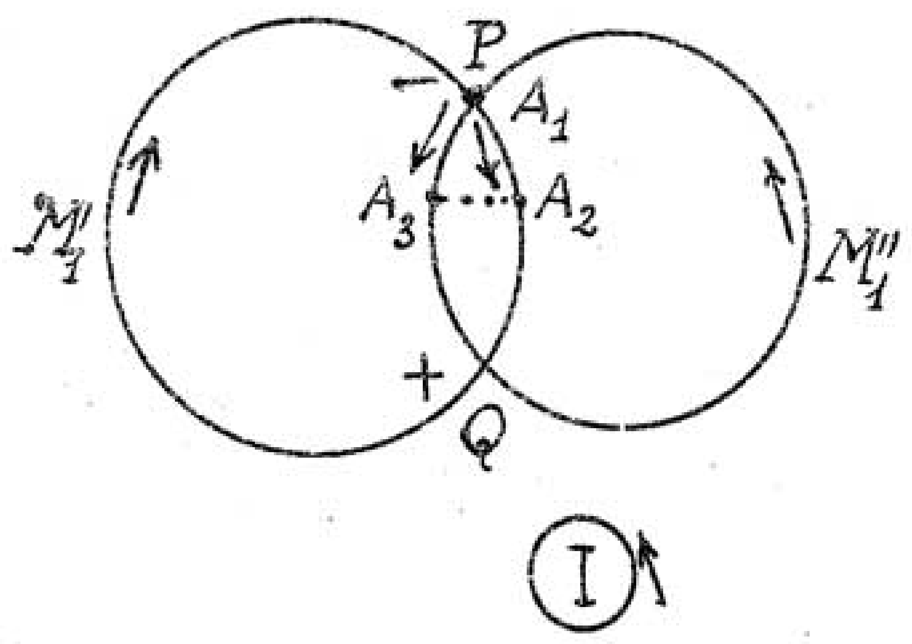
insieme alla sua orientazione (data dalla successione dei vertici, nell'ordine scritto), fornisce l'indicatrice di N_l (esattamente, di quella parte irriducibile e bilatera di N_l, che passa per P) (pag. 288). Similmente sia $\mu'_h = A_1 A_2 \dots A_{l+1} A_{l+2} \dots A_{h+1}$ l'indicatrice di M'_h (contenente ν_l come parte), $\mu''_k = A_1 A_2 \dots A_{l+1} A_{h+2} \dots A_{n+1}$ l'indicatrice di M''_k (contenente ν_l), e infine $\mu_n = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ (contenente μ'_h, μ''_k) l'indicatrice di M_n.

Se tutte le varietà considerate hanno in A_1 un punto semplice, a norma dell'Oss. di pag. 284, potremo altresì assumere come indicatrici, degli angoli poliedri formati da tangenti alle singole varietà.

Ma suppongasi che, pur essendo μ'_h, μ''_k, ν_l indicatrici di M'_h, M''_k, N_l, il poliedroide μ_n, costruito colla successione di vertici $A_1 A_2 \dots A_n$, non abbia lo stesso verso dell'indicatrice prefissata su M_n.

Nel primo caso si dice che in P le M'_h, M''_k si tagliano *positivamente* (rispetto all'ambiente), nel secondo caso che *si tagliano negativamente*.

Consideriamo la parte irriducibile, omogenea e bilatera, dell'intersezione delle M'_h, M''_k, che passa per P: e diciamola appunto N_l. Scorrendo P su N_l e seguendo la deformazione continua di ciascuna delle indicatrici fissate, esse restano sempre indicatrici di costante orientazione nelle varietà cui si riferiscono (pag. 279). Perciò *le M'_h, M''_k si taglian positivamente o negativamente in ogni punto di N_l, se così rispettivamente accade in un particolar punto*. E si scrive nel primo caso che dell'intersezione di M'_h, M''_k fa parte $+N_l$; nel secondo caso che ne fa parte $-N_l$. Così per es. i due cicli lineari orientati M'_1, M''_1 di cui in figura, sopra una superficie orientata (omogenea e chiusa) bilatera,



di cui sia I l'indicatrice, si taglian negativamente in P e positivamente in Q. Invero le cellule $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ son indicatrici di M'_1, M''_1 (coi loro versi) il triangoloide $A_1 A_2 A_3$ ha, sulla superficie, verso contrario a quello di I. L'opposto accade in Q.

Il segno di un'intersezione dipende naturalmente dall'ordine in cui si considerano le M'_h, M''_k. Se, anzichè nell'ordine M'_h, M''_k, si consideran nell'ordine M''_k, M'_h, il poliedroide $\mu_n = A_1 A_2 \cdots A_{l+1} A_{l+2} \cdots A_{h+1} A_{h+2} \cdots A_{n+1}$ si muta nel poliedroide $\bar{\mu}_n = A_1 A_2 \cdots A_{l+1} A_{h+2} \cdots A_{n+1} A_{l+2} \cdots A_{h+1}$ e siccome la successione dei vertici del secondo presenta $(n-h)(n-k)$ inversioni rispetto alla successione dei vertici del primo, ne segue che il segnante di N_l, come intersezione, si ottiene dal segnante ± 1 che aveva in precedenza, moltiplicandolo per $(-1)^{(n-h)(n-k)}$.

Designata con $(M'_h M''_k)$ l'intersezione completa delle due date varietà, e supposto ch'essa consti di un numero finito di varietà irriducibili omogenee e bilatere, di dimensione $l = h+k-n$, scriveremo

$$(M'_h M''_k) = \sum (-1)^i N_l^i ,$$

ove N_l^i è la generica delle parti irriducibili e $(-1)^i$ il suo segnante come intersezione. Sarà inoltre:

$$(M''_k M'_h) = (-1)^{(n-h)(n-k)} \sum (-1)^i N_l^i .$$

In particolare, nel caso $k = n-h$, si ha, nelle nostre ipotesi, un gruppo $(M'_h M''_k)$ di un numero finito di punti comuni alle due varietà. Se esiston ν' di questi punti che son positivi, come intersezione, e v'' negativi, la somma algebrica $v' - v''$ dei numeri di queste intersezioni, che designeremo col simbolo $[M'_h M''_k]$, si chiamerà il numero algebrico delle intersezioni delle due varietà; mentre il numero aritmetico, cioè effettivo, di tali intersezioni, è $v' + v''$.

Il numero algebrico delle intersezioni verrà altresì chiamato indice di Kronecker, perchè la sua considerazione spetta in sostanza all'eminente analista, che l'ha introdotto nella ricerca delle soluzioni comuni a più equazioni.

125.- L'importanza dell'indice di Kronecker deriva da ciò che, quando le varietà che s'intersecano son chiuse (cicli o insiemi di cicli), esso è un invariante topologico.

Noi per brevità, daremo la dimostrazione di questo fatto mediante le argomentazioni di carattere essenzialmente intuitivo, accennate nel libro del Lefschetz citato a pag. 212, che è, su questa parte, prevalentemente riassuntivo. E ci limiteremo alle ipotesi sopra specificate per le varietà prese in considerazione.

Reputiamo però opportuno di avvertire che dell'importante proprietà e di altre più generali - e sotto più ampie ipotesi - sono state date dimostrazioni esaurienti dallo stesso Lefschetz (Ved. sopratutto, Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. of the American Math. Society, January 1926; Closed point sets on a manifold, Annals of Mathematics, april 1928).

In questi lavori si troveranno numerose indicazioni bibliografiche in proposito.

La linea concettuale del procedimento del Lefschetz

è di approssimare i complessi che s'intersecano entro una M_n, mediante complessi regolari di poliedroidi (costruiti, come in Veblen, rispetto ad una «straightness» data sulla varietà, cioè rispetto ad un modo prefissato di definir i segmenti rettilinei, le faccie piane ecc. dei poliedroidi con cui si reticola la varietà; cfr. colla pag. 109 di queste «Conferenze»), e di mostrare che il complesso di intersezione orientata di questi complessi approssimanti (ivi compreso il caso che sia uno 0-complesso) rimane omologo a sè stesso, quando i complessi approssimanti variano entro certi limiti di approssimazione, e quando cangia la prefissata «straightness».

Per es. due linee piane orientate chiuse di Jordan danno luogo ad un indice di Kronecker, che può definirsi nel modo seguente:

Alle due linee si sostituiscano due poligonali «approssimanti» sufficientemente vicine. E si orientino queste poligonali come suggerisce la loro vicinanza colle due linee. Il numero algebrico delle intersezioni delle due poligonali non cangia, variando le poligonali entro certi limiti di approssimazione; e ciò anche se le due linee hanno infiniti punti comuni.

126. - Le argomentazioni accennate nel citato trattato del Lefschetz, per giungere alla dimostrazione della invarianza dell'indice di Kronecker, sono queste

a) L'intersezione del contorno di M'_h colla varietà chiusa M''_k è, a meno del segno, contorno dell'intersezione delle due varietà.

b) Se Γ_h è un ciclo (bilatero) orientato omologo a zero, risulta $(\Gamma_h \Gamma'_k) \sim 0$ qualunque sia il ciclo (bilatero) orientato Γ'_k. In particolare, se $k=n-h$, è sempre $[\Gamma_h \Gamma'_k]=0$.

L'affermazione a) acquista carattere intuitivo, quando si pensi al significato metrico-proiettivo - da noi specificato (pagg. 150, 152) - del contorno di una varietà.

La b) è conseguenza immediata della a). Invero, il complesso $(\Gamma_h \Gamma'_k)$ sarà il contorno della traccia su Γ'_k dello $(h+1)$-complesso contornato da Γ_h, epperò, a norma delle definizioni, risulterà $(\Gamma_h \Gamma'_k) \sim 0$. Pertanto $(\Gamma_h \Gamma'_k)$ sarà altresì congruo a zero; cioè un ciclo o un insieme di cicli orientati. Nel caso particolare $k=n-h$, avremo perciò un insieme di un numero finito di 0-cicli orientati, cioè di coppie di punti associati l'uno al segno + e l'altro al segno −. Le intersezioni positive saranno dunque nello stesso numero delle negative e quindi $[\Gamma_h \Gamma'_k]=0$.

Il risultato evidentemente è pur vero se Γ_h è un insieme di cicli omologo a zero.

Dalla b) deriva poi come ovvio corollario che:

Date in M_n due varietà chiuse, bilatere, orientate Γ_h, Γ'_{n-h}, l'indice di Kronecker $[\Gamma_h, \Gamma'_{n-h}]$ è un invariante topologico.

Invero, considerando una varietà $\bar{\Gamma}_h$ omologa a Γ_h, sarà $\Gamma_h - \bar{\Gamma}_h \sim 0$ e quindi $[\Gamma_h - \bar{\Gamma}_h, \Gamma'_{n-h}]=0$, cioè $[\Gamma_h, \Gamma'_{n-h}] = [\bar{\Gamma}_h, \Gamma'_{n-h}]$. E similmente $[\bar{\Gamma}_h, \Gamma'_{n-h}] = [\bar{\Gamma}_h, \bar{\Gamma}'_{n-h}]$; ove $\bar{\Gamma}'_{n-h} \sim \Gamma'_{n-h}$.

127 - Se Γ_h è un ciclo bilatero orientato, divisore dello zero ($\lambda \Gamma_h \sim 0$, con λ intero conveniente), risulta $[\lambda \Gamma_h, \Gamma'_{n-h}] = \lambda [\Gamma_h, \Gamma'_{n-h}]$ epperò è $[\Gamma_h, \Gamma'_{n-h}]=0$. La inversione di questa proprietà, intuita da Poincaré

(J. de l'Éc. Poly. 1895), fu dimostrata indipendentemente da Veblen (Trans. Am. Math. Soc. 1923), e da Weyl (Revista Matem. Hispano-Americana, 1923) ed estesa notevolmente dal Lefschetz nell'ultimo dei lavori citati poco fa.

È ovvio che, se $\Gamma_h^1, \dots, \Gamma_h^{p_h}$; $\Gamma_{n-h}^1, \dots, \Gamma_{n-h}^{p_h}$ son due sistemi di cicli (s'intende sempre ormai bilateri e orientati) costituenti una base intermediaria rispettivamente pei cicli ad $h, n-h$ dimensioni, il teorema di Veblen-Weyl equivale a ciò che il determinante $\left\| [\Gamma_h^i \Gamma_{n-h}^j] \right\|$ $(i,j=1,2,\dots,p_h)$ è diverso da zero. Invero, se per un ciclo Γ_h è $[\Gamma_h \Gamma_{n-h}^j]=0$ $(j=1,2,\dots,p_h)$, senza che sia $\Gamma_h \approx 0$, risulterà

$$\Gamma_h \approx \lambda_1 \Gamma_h^1 + \dots + \lambda_{p_h} \Gamma_h^{p_h} ,$$

ove le λ son interi non tutti nulli. E quindi:

$$(j=1,2,\dots,p_h) \quad [\Gamma_h \Gamma_{n-h}^j] = 0 = \lambda_1 [\Gamma_h^1 \Gamma_{n-h}^j] + \dots + \lambda_{p_h} [\Gamma_h^{p_h} \Gamma_{n-h}^j],$$

donde $\left\| [\Gamma_h^i \Gamma_{n-h}^j] \right\| = 0$.

128.- Sieno $\Gamma_k^1, \dots, \Gamma_h^q$ $(q=p_k+\tau_k)$ e $\Gamma_{n-k}^1, \dots, \Gamma_{n-k}^r$ $(r=p_k+\tau_{n-k})$ due basi minime rispettivamente per i k-cicli e gli $(n-k)$-cicli di M_n. I primi p_k cicli di ciascuna delle due formino una base intermediaria. Se Γ_k, Δ_{n-k} son due cicli qualunque di dimensioni $k, n-k$ di M_n (si sottintende sempre bilateri, orientati), verrà

$$\Gamma_k \sim \sum_{i=1}^{q} x_i \Gamma_k^i , \quad \Delta_{n-k} \sim \sum_{j=1}^{r} y_j \Gamma_{n-k}^j ,$$

donde:

$$(1) \qquad [\Gamma_k \Delta_{n-k}] = \sum_{ij} x_i y_j [\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^j] .$$

Mutando base minima si avrà similmente

$$(2)\qquad \left[\Gamma_k \Delta_{n-k}\right] = \sum_{st} x'_s y'_t \left[\bar{\Gamma}_k^s \bar{\Gamma}_{n-k}^t\right] .$$

D'altro canto:

$$(3)\qquad \bar{\Gamma}_k^s \sim \sum_i a_{si} \Gamma_k^i \ , \quad \bar{\Gamma}_{n-k}^t \sim \sum_j b_{tj} \Gamma_{n-k}^j \ ,$$

ove le a, b son interi, e

$$\left[\bar{\Gamma}_k^s \bar{\Gamma}_{n-k}^t\right] = \sum_{i,j} a_{si}\, b_{tj} \left[\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^j\right] \ ,$$

sicchè effettuando nella (2) il cangiamento di variabili

$$(4)\qquad x_i = \sum_s a_{si}\, x'_s \ , \quad y_j = \sum_t b_{tj}\, y'_t \ ,$$

la forma bilineare (1) si muta nella (2), cioè si passa da (1) a (2) con sostituzioni lineari a coefficienti interi sulle variabili. Potendosi effettuare similmente anche il passaggio inverso, si conclude che le due forme bilineari (1), (2) son *equivalenti*, cioè hanno gli stessi divisori elementari e la stessa caratteristica.

Ora, ammesso il teorema di *Veblen* - *Weyl*, ne consegue che la caratteristica comune alle matrici $\left\|\left[\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^j\right]\right\|$, $\left\|\left[\bar{\Gamma}_k^s, \bar{\Gamma}_{n-k}^t\right]\right\|$, aventi q orizzontali ed r verticali, è precisamente p_k, perchè in ciascuna di esse son nulli tutti gli elementi che hanno uno degli apici i, j oppure s, t maggiori di p_k, sicchè in entrambe vi è un solo determinante d'ordine massimo p_k, non nullo, ed è quello formato dalle prime p_k orizzontali e dalle prime p_k verticali. I divisori elementari delle due matrici saranno dunque in numero di p_k: $e_1, e_2, \dots, e_{p_k}$. Essi son manifestamente invarianti topologici.

Il *Lefschetz* ha però dimostrato nell'opera citata a pag. 212, che, almeno nel caso delle riemanniane

delle superficie algebriche, le e_i son eguali ad 1 (la cosa è ovvia per le riemanniane delle curve algebriche).

Il *Veblen* ha dimostrato più in generale che son sempre 1.(*)

Vediamo quale conseguenza si tragga da ciò nei riguardi delle basi intermediarie.

Dalla teoria delle forme bilineari segue che, scegliendo le sostituzioni (3) unimodulari (il che garantisce ovviamente che i k-cicli $\bar{\Gamma}_k^s$ e gli $(n-k)$-cicli $\bar{\Gamma}_{n-k}^t$ formino basi *minime* pei k-cicli e per gli $(n-k)$-cicli), ed effettuando in corrispondenza le sostituzioni (4), la (1) si riduca (omettendo gli apici delle x', y') alla forma $\sum_{i=1}^{p_k} e_i x_i y_i$, e quindi, ammesso il teorema di *Lefschetz*-*Veblen*, alla forma $\sum x_i y_i$.

Per non moltiplicar le notazioni, chiamiamo ancora $\Gamma_k^1, \dots, \Gamma_k^q, \Gamma_{n-k}^1, \dots, \Gamma_{n-k}^r$ le basi minime per cui la forma bilineare fondamentale assume questo aspetto, ritenendo sempre che i primi p_k cicli di ciascun gruppo formino una base intermediaria. Basi minime e basi intermediarie siffatte, si diranno *canoniche*. Ne deriva che $\left[\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^i\right] = 1$ $(i \le p_k)$ e $\left[\Gamma_k^i \Gamma_{n-k}^j\right] = 0$ per $i \neq j$ o per $i = j > p_k$.

Si osserverà però che i complessi $\Gamma_k^i, \Gamma_{n-k}^j$ possono non esser cicli nel senso finora dato a questa parola perchè non è detto che alle combinazioni lineari (3) corrispondano cicli (irriducibili), ma soltanto k-complessi e $(n-k)$-complessi congrui a zero, cioè insiemi di cicli o *cicli riducibili*, come brevemente può dirsi.

(*) *Veblen*, Transactions of the Am. Math. Society, 1923, p. 540. Il *Lefschetz*, che, come si è detto, già aveva dimostrato la cosa nel caso delle riemanniane delle superficie algebriche, in Trans. of the Am. Math. Society, 1926, p. 44, dà una nuova dimostrazione del suddetto teorema di *Veblen*, per ogni varietà topolo-

In conclusione:

Si posson sempre trovare due basi intermediarie pei k-cicli e per gli $(n-k)$-cicli di M_n, tali che ogni k-ciclo (irriducibile o riducibile) della prima base abbia un numero algebrico uguale ad 1 d'intersezioni con un ben determinato $(n-k)$-ciclo (irriducibile o riducibile) della seconda, avendo cogli altri $(n-k)$-cicli di questa un numero algebrico nullo d'intersezioni.

XXXII. - Prime proprietà topologiche delle varietà riemanniane.-

129. - Dimostriamo che:

La riemanniana di una varietà algebrica irriducibile a un numero qualunque di dimensioni, è una varietà topologica chiusa, omogenea, bilatera.

Il teorema è vero sotto l'ipotesi che la varietà algebrica che si considera sia stata prima ridotta a non possedere punti multipli. Per varietà riemanniana (pag. 78) si intende una varietà reale, i cui punti sieno in corrispondenza biunivoca, bicontinua, senza eccezioni, coi punti complessi della varietà algebrica.

Dimostreremo il teorema riferendoci alle riemanniane delle superficie algebriche; ma vedremo che le deduzioni hanno carattere generale.

Anzitutto occorre provare che la riemanniana della data superficie F, si può, nello spazio cui essa appartiene, supporre situata tutta al finito. Ciò consegue in sostanza dal fatto che la superficie F vien considerata in uno spazio proiettivo, ove i punti all'infinito non si

distinguono dai punti al finito, in quanto si posson appunto portare al finito, mediante trasformazioni omografiche. Ora è facile altresì costruire un modello della riemanniana situato tutto *attualmente* (e non soltanto *potenzialmente*, rispetto ai suoi punti considerati staccatamente) al finito. Riferiamoci al modello R_4 di riemanniana algebrica, costruito a pag. 84. Esso appartiene ad un certo spazio (euclideo) S_r $(r = 35)$. Assunto un punto O fuori di R_4, la distanza di O dai punti di R_4 ammetterà un minimo > 0. Sia ρ un numero minore di questo minimo. Allora la ipersfera di S_r, di centro O e raggio ρ, non incontra R_4. Ponendo una proiettività tra le quadriche di S_r (considerate come elementi) e gli iperpiani di uno spazio S_l $(l = \frac{r(r+3)}{2})$, e facendo corrispondere a un punto di S_r (concepito come sostegno di un sistema ∞^{l-1} di quadriche passanti per esso) il punto di S_l centro della stella di iperpiani corrispondente, mediante la posta proiettività, a quel sistema di quadriche, S_r si muta birazionalmente in una varietà razionale V_r (cfr. colla pag. 12, n° 3), e R_4 in una varietà algebrica R'_4 tracciata in V_r. La R'_4 (al pari della V_r) è priva di punti multipli, come R_4, perchè le quadriche di S_r, che passano per un punto, non hanno in conseguenza altri punti fissi (punti base del sistema). La R'_4, essendo riferita a R_4 con una corrispondenza biunivoca algebrica - epperò continua - senza eccezioni, è omeomorfa a R_4, ossia è un altro modello della riemanniana di F. Ebbene, se alla sfera di centro O e raggio ρ, nella posta proiettività, si fa corrispondere l'iperpiano all'infinito di S_l, la R'_4 non ha punti comuni con tal iperpiano, e quindi è una figura finita.

Assodato che la riemanniana R_4 di F, è una figura finita, o si può considerar come tale, osserviamo che l'intorno di un punto di R_4, in quanto rappresenta l'intorno di un punto di F, che è *origine* di una *sola* falda analitica, costituisce una sola 4-cellula, a cui quel punto è *interno*. Perciò R_4 non ha contorni (è chiusa) ed omogenea: il che è ben d'accordo col fatto che R_4 non ha punti multipli (pag. 84). D'altronde R_4 è una varietà topologica (anzi analitica, perchè algebrica), reticolabile con un 4-complesso costituito da un numero finito di cellule (pag. 147).

Dimostriamo infine che R_4 è bilatera. All'uopo consideriamo un modello di F nello spazio ordinario, dotato di sole singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli), ottenuto da F con una proiezione generica (pag. 39). Sia $f(x, y, z)=0$ l'equazione di questo modello di S_3.

Essendo prefissato su F (cioè sulla riemanniana R_4) un ciclo lineare γ', si può sempre supporre di avere scelto il centro di proiezione, che è una retta a dello S_5 di F, in tal guisa che il ciclo lineare γ proiezione di γ' da a, sullo S_3, Σ, dove si proietta, non incontri la linea doppia D di F (cioè che il ciclo corrispondente su R_4 non abbia punti comuni colla superficie di *Riemann* imagine di D)(*). Invero, mutando a, la curva D', luogo dei punti d'appoggio delle corde di F che incontrano a, varia in un sistema (razionale) ∞^8 di curve, non aventi punti base. Le D' che passan per un punto P di γ' sono ∞^7, cioè dipendon da 7 parametri complessi e quindi da 14 reali. Onde le D' che incontran γ' dipendono da 15 parametri reali; mentre tutte le D' dipendono da 16 parametri reali. Esistono dunque infinite D' non incontranti γ', e resta così

(*) Non sarebbe essenziale di soddisfare a questa condizione. La poniamo soltanto per maggior chiarezza.

provata la nostra asserzione.

Il ciclo lineare γ, tracciato sulla $f(x, y, z)=0$, può supporsi tutto al finito e non incontrante la curva k di f, luogo dei punti di contatto delle tangenti parallele all'asse z. Ciò si ottiene con una conveniente trasformazione omografica, tenuto conto che i piani che incontran γ (come si vede ripetendo un ragionamento analogo a quello di sopra) non son tutti i piani dello spazio, e similmente che non tutte le curve di contatto dei coni circoscritti a f, dai singoli punti dello spazio, incontran γ. Dopo ciò, se distendiamo le due variabili complesse x, y sopra un S_4 reale euclideo (pagg. 74, 188), la z, come funzione di x, y a un certo numero m di valori, resterà distesa sullo S_4 contato m volte; e vi sarà una superficie (di *Riemann*, algebrica) di diramazione Q, imagine della curva K. Partendo da un punto O di S_4, e ritornandovi dopo aver percorso un ciclo lineare di S_4, se si segue il prolungamento analitico delle m determinazioni di z, si ritorna colle stesse determinazioni, eventualmente permutate. E poichè è chiaro che la stessa permutazione fra le determinazioni di z si ottiene tenendo fisso O e assoggettando il ciclo ad una deformazione piccolissima (vale lo stesso ragionamento che si fa per le ordinarie superficie di *Riemann*), così è certo che *il ciclo non produce alcuna permutazione fra le determinazioni di z, se si può ridurre per deformazione continua ad O, senza incontrare Q; mentre generalmente si ha una permutazione non identica, se nella deformazione del ciclo s'incontra di necessità Q.*

Tutto questo sia detto per inciso, giacchè non è necessario pel nostro scopo.

Ci è soltanto sembrato opportuno di coglier l'occasione propizia per sottolineare un fatto importante.

Ritornando alla nostra questione, avremo in S_4 un ciclo lineare σ, corrispondente a γ, epperò situato tutto al finito e non incontrante Q, nè la superficie di Riemann (algebrica), che rappresenta la linea doppia D. Sicchè in tutti i punti di σ le m determinazioni di z sono distinte. E partendo da un punto O di σ con una conveniente determinazione di z si dovrà ritornare a quella, ottenendosi in tal guisa quella catena ∞^1 di terne di valori di (x, y, z), che costituisce appunto γ. La corrispondenza fra F (cioè fra R_4) e S_4 è una corrispondenza biunivoca continua, senza eccezioni, se la limitiamo a quell'insieme di punti di F, che è costituito dagl'intorni dei punti di γ. Pertanto, se γ invertisse il senso di un'indicatrice di F cioè di R_4, il ciclo σ invertirebbe il senso di un'indicatrice dello spazio S_4, contrariamente al fatto che ogni pezzo finito di S_4 è bilatero.

Un'altra dimostrazione della stessa proprietà, aveva dato il prof. Severi nelle sue lezioni del 1910-11 citate a pag. 75, ed era ispirata a questo concetto: che ad ogni punto di F_4 si può attribuire il segno + ed il segno − (cioè riguardarlo come due punti - di faccie opposte - sovrapposti) in quanto lo si considera come rappresentante o di un punto complesso di F o di un punto complesso di $\bar{F}$ (ci riferiamo alle notazioni di pag. 82 e segg.). Da un punto positivo di R_4 non si può andare ad un punto negativo con un cammino continuo tracciato sulla varietà, perchè altrimenti si scambierebbero fra loro, per una circolazione della retta generatrice di ζ i due punti complesso-coniugati che questa retta contiene (cioè s'invertirebbe il

della retta), mentre i due punti complessi si muovono su due distinte superficie, prive di punti comuni.

130. - Fra i cicli bidimensionali (s'intende sempre bilateri e orientati!) della riemanniana R_4 di una superficie algebrica F, hanno particolare importanza quelli che il Lefschetz ha chiamato cicli algebrici, cioè le superficie di Riemann appartenenti ad R_4, imagini delle curve algebriche tracciate su F. Con questa denominazione, trattandosi di un concetto che vogliamo sia topologico, intendiamo naturalmente anche ogni ciclo di R_4 omologo ad una di quelle superficie di Riemann.

I cicli algebrici soddisfanno ad un teorema fondamentale, dovuto al Lefschetz:

Il valore assoluto del numero algebrico delle intersezioni di due cicli algebrici, uguaglia il numero aritmetico delle intersezioni stesse.

In altri termini:

Qualunque sia l'orientazione di R_4 e comunque sieno orientati due cicli algebrici di R_4, le loro intersezioni (supposte distinte) hanno lo stesso segno.

Il Lefschetz nel suo trattato citato a pag. 212 dà una dimostrazione sintetica di questo teorema, ed accenna in nota (a piè di pag. 19) ad una dimostrazione analitica, che varrebbe la pena di sviluppare diffusamente. La dimostrazione sintetica, esposta a pag. 20, non sembra soddisfacente. L'argomentazione essenziale si svolge attorno alle sezioni piane della superficie; e si capisce a priori che debba poi esser facile passare, in qualche modo a due curve qualunque. Il Lefschetz dice:

Orientiamo una sezione piana data H di F (supposta casione propizia per sottolineare un fatto importante.

Ritornando alla nostra questione, avremo in S_4 un ciclo lineare σ, corrispondente a γ, epperò situato tutto al finito e non incontrante Q, nè la superficie di Riemann (algebrica), che rappresenta la linea doppia D. Sicchè in tutti i punti di σ le m determinazioni di z sono distinte. E partendo da un punto O di σ con una conveniente determinazione di z si dovrà ritornare a quella, ottenendosi in tal guisa quella catena ∞^1 di terne di valori di (x, y, z), che costituisce appunto γ. La corrispondenza fra F (cioè fra R_4) e S_4 è una corrispondenza biunivoca continua, senza eccezioni, se la limitiamo a quell'insieme di punti di F, che è costituito dagl'intorni dei punti di γ. Pertanto, se γ invertisse il senso di un'indicatrice di F cioè di R_4), il ciclo σ invertirebbe il senso di un'indicatrice dello spazio S_4, contrariamente al fatto che ogni pezzo finito di S_4 è bilatero.

Un'altra dimostrazione della stessa proprietà, aveva dato il prof. Severi nelle sue lezioni del 1910-11 citate a pag. 75, ed era ispirata a questo concetto: che ad ogni punto di R_4 si può attribuire il segno + ed il segno − (cioè riguardarlo come due punti - di faccie opposte - sovrapposti) in quanto lo si considera come rappresentante o di un punto complesso di F o di un punto complesso di $\bar{F}$ (ci riferiamo alle notazioni di pag. 82 e segg.). Da un punto positivo di R_4 non si può andare ad un punto negativo con un cammino continuo tracciato sulla varietà, perchè altrimenti si scambierebbero fra loro, per una circolazione della retta generatrice di ϕ, i due punti complesso-coniugati che questa retta contiene (cioè s'invertirebbe il

della retta), mentre i due punti complessi si muovono su due distinte superficie, prive di punti comuni.

130. - Fra i cicli bidimensionali (s'intende sempre bilateri e orientati!) della riemanniana R_4 di una superficie algebrica F, hanno particolare importanza quelli che il Lefschetz ha chiamato cicli algebrici, cioè le superficie di Riemann appartenenti ad R_4, imagini delle curve algebriche tracciate su F. Con questa denominazione, trattandosi di un concetto che vogliamo sia topologico, intendiamo naturalmente anche ogni ciclo di R_4 omologo ad una di quelle superficie di Riemann.

I cicli algebrici soddisfanno ad un teorema fondamentale, dovuto al Lefschetz:

Il valore assoluto del numero algebrico delle intersezioni di due cicli algebrici, uguaglia il numero aritmetico delle intersezioni stesse.

In altri termini:

Qualunque sia l'orientazione di R_4 e comunque sieno orientati due cicli algebrici di R_4, le loro intersezioni (supposte distinte) hanno lo stesso segno.

Il Lefschetz nel suo trattato citato a pag. 212 dà una dimostrazione sintetica di questo teorema, ed accenna in nota (a piè di pag. 19) ad una dimostrazione analitica, che varrebbe la pena di sviluppare diffusamente. La dimostrazione sintetica, esposta a pag. 20, non sembra soddisfacente. L'argomentazione essenziale si svolge attorno alle sezioni piane della superficie; e si capisce a priori che debba poi esser facile passare, in qualche modo a due curve qualunque. Il Lefschetz dice:

Orientiamo una sezione piana data H di F (supposta in S_3). Ne risulterà un'orientazione per ogni altra sezione piana H', perchè $H' \sim H$.

Sieno P, P' due intersezioni distinte delle H, H' (non tangenti). Essendo già date le indicatrici di H, H' in P, questo punto avrà un segno, rispetto ad una prescelta orientazione di R_4. Scegliamo l'orientazione di R_4 in modo che P sia positivo. Facciamo variare il piano di H senza che venga mai a toccare H' e riportiamo H alla posizione iniziale, in guisa che P si cangi in P'. Allora H ritornerà colla stessa orientazione, perchè si è conservata sempre omologa a sè stessa. Pertanto le orientazioni di H, H' in P' si troveranno nella stessa posizione relativa delle orientazioni in P; epperò anche P' sarà positivo.

Ora tutto ciò non par che regga, di fronte all'osservazione che l'esser le sezioni piane a due a due omologhe (deducibili l'una all'altra per deformazione continua) non costituisce una ragione sufficiente perchè orientatane una, risultino senza ambiguità orientate tutte!

I circoli nello spazio sono a due a due omologhi, ma orientatone uno non sono affatto orientati tutti; il verso di uno si può infatti invertire con un ribaltamento attorno ad un diametro. La cosa analoga non succede nel piano.

Tutto sta insomma a vedere se, orientato un ciclo bidimensionale bilatero in una varietà topologica bilatera a quattro dimensioni, esso possa o meno invertirsi per deformazione continua sulla varietà.

La invertibilità non è certo da escludersi sempre. Se infatti si considera la M_4 contornata da un'ipersfera di S_4, una sfera orientata Σ, a due dimensioni, contenuta nella M_4 concentrica con essa, può esser invertita, senza uscire da M_4, ribaltando, attorno ad un piano diametrale dell'ipersfera, lo S_3 che contiene Σ.

Tuttavia sulla validità del teorema del Lefschetz non c'è dubbio, e notevole resta il suo merito di averlo intuito.

Eccone una dimostrazione esauriente:

Riferiamoci, come modello della riemanniana di F, allo S_4 reale m-plo, che abbiamo usato nei nn. prec.(*). Consideriamo due sezioni piane H, H' di F (che sia nello S_3 ed abbia l'equazione $f=0$), parallele all'asse z. Esse vengon rappresentate in S_4 da due certi piani m-pli α, α'. Non è restrittivo il supporre che le H, H' si taglino al finito. Supporremo inoltre che si taglino in m punti distinti. Allora il punto al finito P, comune ai piani α, α', rappresenta quelle m intersezioni, ed i valori di z depositati in P sono tra loro distinti.

Il piano m-plo α è la riemanniana (colla solita convenzione per l'infinito!) di H. Proviamo che ad un'orientazione di H risponde un'orientazione di ciascuno degli m fogli e che tutte queste orientazioni sono concordi, cioè coincidono con una medesima orientazione del comune sostegno α. Consideriamo infatti un punto (semplice) di H: per es. uno P_1 dei punti $P_1, \dots, P_m$ rispon-

(*) Affinchè lo S_4 m-plo si possa considerare come un modello della riemanniana di F, occorre considerare l'infinito, in ognuno degli m fogli sovrapposti, nel modo specificato a pag. 74. La congruenza lineare ellittica K di rette improprie viene ad esser, coi suoi elementi (rette), l'imagine m-pla della sezione di F col piano all'infinito di S_3. Quando però, come nel testo, si consideran soltanto elementi al finito, è inutile porre mente alla interpretazione dell'infinito.

denti a P. Nell'omeomorfismo tra l'intorno di P_1 e l'intorno di P sul foglio (diciamolo primo) ove P va considerato come imagine di P_1, a un'indicatrice I di H contenuta in quell'intorno, corrisponde un'indicatrice I_1 del primo foglio, contenuta in quest'ultimo intorno. Si tracci in α un cammino σ, che parta da P e vi ritorni, senza attraversare punti di diramazione, portando la determinazione di z rispondente a P_1 in quella che risponde a P_2 (cosa sempre possibile per la irriducibilità di H)(*).

Si segua la variazione continua lungo σ dell'indicatrice I_1. Essa, attesa la bilaterità di ogni pezzo finito di α, rimane sempre concorde con una fissata indicatrice J di α. D'altronde, alla variazione di I_1 lungo σ risponde la variazione di I lungo il cammino σ', che su H (cioè sopra una riemanniana semplice di H) corrisponde a σ, e che va da P_1 a P_2. Pertanto all'indicatrice di H (concorde colla orientazione ivi fissata) in P_2, risponde, nell'intorno di P sul secondo foglio, un'indicatrice I_2 (posizione finale di I_1) concorde con J. E similmente per gli altri fogli.

Il fatto analogo vale per H', e per la stessa superficie F (cioè per R_4) in quanto rappresentato sullo S_4 m-plo. Ossia fissata un'orientazione su F, ad essa risponde un'orientazione su ciascuno degli m fogli quadridimensionali; e queste orientazioni sono tra loro concordi, coincidendo con una medesima, dello S_4 comune sostegno di quei fogli. Vale, mutatis mutandis, lo

(*) Si può anche, se si vuole che fra le due determinazioni non avvenga mai neppure una coincidenza apparente, escludere che σ attraversi qualcuno dei punti ove l'imagine della linea doppia di F sega α. Ma ciò non è necessario.

stesso ragionamento che sopra.

Ora, per decider del segno delle intersezioni $P_1, \ldots, P_m$ di H, H', rispetto alle orientazioni fissate in H, H', F, possiamo riferirci allo S_4 m-plo. Sul primo foglio di H, l'orientazione fissata dà luogo in P a un certo angolo orientato $a_1 b_1$; e similmente sul primo foglio di H' si ha un certo angolo orientato $a'_1 b'_1$ di vertice P. Le quattro semirette a_1, b_1, a'_1, b'_1, considerate nell'ordine $a_1 b_1 a'_1 b'_1$, costituiscono un angolo tetraedro orientato, che è un'indicatrice del primo foglio di S_4. Se quest'indicatrice è concorde colla orientazione che su S_4 corrisponde a quella fissata su F, il punto P_1 è intersezione positiva di H, H'; altrimenti è intersezione negativa. Ma, in forza di quanto precede, secondochè se si presenta la prima o la seconda alternativa in P_1, lo stesso accade in $P_2, \ldots, P_n$. Dunque le intersezioni di H, H' hanno lo stesso segno.

La conclusione è applicabile a due sezioni piane qualunque di una superficie F (che si seghino in punti distinti), perchè, mediante una conveniente trasformazione omografica, esse possono esser portate sempre nelle condizioni di H, H'. Ed è altresì applicabile a due curve qualunque - che si seghino in punti distinti - di un sistema lineare semplice (pag. 12), almeno ∞^3, tracciato su F, perchè con una conveniente trasformazione birazionale della superficie, ci si può ancora ridurre al caso precedente.

Sieno infine A, B due curve algebriche qualunque di F, che si taglino in punti distinti (*).

(*) Cioè abbiamo molteplicità d'intersezione 1 in ciascuno dei punti comuni. La molteplicità d'intersezione in un punto P comune a due curve algebriche A, B, appartenenti a uno spazio qualunque, si può

Anzichè introdurre altri simboli pei cicli algebrici che rappresentan su R_4 le A, B, designeremo quei cicli (come del resto abbiamo fatto per le H, H') coi simboli stessi delle curve; e, posto che con $[A,B]$, seguendo la notazione del Severi, si designa il numero delle intersezioni delle curve A, B (con (A,B), fra parentesi tonde, il gruppo di tali intersezioni), denoteremo con $[A,B]'$ il numero algebrico delle intersezioni dei cicli A, B.

Proviamo che il teorema del Lefschetz vale quando una delle A, B, per es. A, appartiene ad un sistema lineare semplice, almeno ∞^3. Da elementari teoremi di geometria sopra una superficie, risulta che è possibile determinare un sistema lineare $|C|$ semplice, di curve di F, che contenga parzialmente B, per modo che il sistema residuo $|D| = |C-B|$ sia esso pure semplice e almeno ∞^3.

Scelta genericamente una C, il gruppo (CA) consta d'intersezioni distinte; onde per convenienti orientazioni di C, A, F è $[C,A]' = [C,A]$. Sia D una curva generica del sistema $|D|$, che seghi A in punti distinti. La C può ridursi per continuità alla curva spezzata $B+D$, senza che mai C venga ad avere due intersezioni coincidenti con A. Si fissi il cammino di variazione da C a $B+D$. Allora l'indicatrice positiva di C indurrà per continuità un'indicatrice positiva su ciascuna delle B, D. E siccome durante la

---

definire o mediante il concetto d'intersezioni infinitamente vicine, o facendo una proiezione generica delle due curve in un piano. La molteplicità d'intersezione nel punto P', proiezione di P, delle A', B', proiezioni delle A, B, non cangia mutando il sistema di proiezione, e può assumersi perciò come molteplicità d'intersezione delle A, B in P. Una definizione (più generale) trovasi in una Nota del prof. Severi (Atti Acc. Scienze di Torino, 1908). Tutte queste definizioni conducono naturalmente allo stesso numero.

variazione continua resta sempre $[C,A]' = [C,A]$, tale relazione varrà anche al limite. Pertanto tutte le intersezioni di $B+D$ con A son positive rispetto alle orientazioni fissate sulle A, F, e a quelle indotte su B, D. E ciò accade in particolare per le intersezioni del gruppo (A,B).

Se ora nè A nè B appartengono ad un sistema lineare semplice almeno ∞^3, si determini ancora $|D| = |C-B|$ come sopra. Scelta genericamente una C e orientatala opportunamente, sarà, in virtù di quanto precede, $[CA]' = [CA]$, perchè una delle due C, A appartiene ad un sistema lineare semplice, almeno ∞^3. Ripetendo allora il ragionamento precedente, si conclude che tutte le intersezioni del gruppo (A,B) hanno lo stesso segno. E così il teorema è dimostrato in ogni caso.

Osservazione 1ª. - Poichè il numero algebrico $[A,B]'$ non muta per una variazione continua delle curve, si potrà considerare anche quando esse abbiano intersezioni con molteplicità d'intersezione >1, purchè ognuna di queste si conti collo stesso segno di un'intersezione semplice, tante volte quant'è la sua molteplicità.

Osservazione 2ª. - Non si deve pensare che si possa senz'altro invertire la orientazione di una sezione piana H di F, ribaltando il piano α, che la rappresenta in S_4, attorno ad una sua retta, entro un S_3 di S_4, che contenga α, perchè in un fascio siffatto di piani non c'è altro che α che possa rappresentare una sezione piana di F, in quanto lo S_3 considerato contiene una sola retta della congruenza K.

XXXIII. - Sunto di alcune proprietà fondamentali di geometria sopra una superficie.-

131.- Esponiamo in sunto in questo paragrafo alcune proprietà di geometria sopra una superficie, algebrica (irriducibile) F, che occorre aver presenti per la piena intellegibilità del seguito(*).

Un sistema lineare completo $|C|$ di curve sopra F, è virtualmente privo di punti base (pagg. 26, 28) quando è costituito da tutte le curve di livello costante di una funzione razionale del punto di F, che abbia come curva polare (del 1º ordine) una C. Il sistema $|C|$ può avere però nel fatto dei punti base. Per es., se F contiene una curva eccezionale E di 1ª specie (pag. 59), che non sia fondamentale per $|C|$ (cioè che sia incontrata dalla generica C), trasformando birazionalmente F in una superficie F^*, in guisa che E si muti in un punto semplice E^* di F^*, il sistema $|C^*|$ trasformato di $|C|$, ha in E^* un punto base; e tuttavia $|C^*|$, come totalità di curve di livello costante di una funzione razionale soggetta alla sola condizione di avere come curva polare di 1º ordine una C^*, è virtualmente privo di punti base.

Se invece si vuole la totalità di quelle curve di livello

(*) Per indicazioni bibliografiche più dettagliate di quelle che qui daremo, ved. l'articolo di F. Severi, Die geometrie auf einer algebraischen Fläche in Repertorium der hök. Math. II Bd., II Häfte, Teubner, 1922, pag. 741 e l'articolo di Castelnuovo-Enriques Die algebraischen Flächen, in Encyk. der Math. Wissen., Teubner, 1914, pag. 674.

costante di una funzione razionale, avente come curve polare di 1º ordine la C, che soddisfanno alla condizione ulteriore di possedere certi punti multipli fissi P_i, di molteplicità assegnate s_i, in altrettanti punti di C, di molteplicità effettive per C $t_i \geq s_i$, si ha un sistema lineare completo $|C|$ con punti base s_i-pli assegnati. Le molteplicità effettive della generica C nei punti base assegnati potranno (alcune o tutte) risultare maggiori delle s_i; ma noi astragghiamo da queste ipermolteplicità.

Il concetto di sistema lineare virtualmente privo di punti base è un concetto invariante assoluto nelle trasformazioni birazionali di C; mentre il concetto di sistema lineare completo con punti base assegnati è invariante in senso relativo, cioè un sistema con date molteplicità assegnate si muta in uno colle stesse molteplicità assegnate per le trasformazioni birazionali di F, biunivoche senza eccezione.

Noi nel seguito ci riferiremo sempre, salvo avviso contrario, a sistemi virtualmente privi di punti base. Questi concetti, che trovansi in germe in Jung (1887) e più diffusamente in Castelnuovo (1891), furono dati e usati nella loro più ampia generalità, per le superficie, da Enriques (1896).

Data su F una curva irriducibile C, e considerato un sistema $|D|$ irriducibile, che contenga parzialmente C, ma non come parte fissa, posto $|E| = |D-C|$, la serie lineare, effettiva o virtuale(*), $|(DC)-(EC)|$ sulla curva C, non

(*) I gruppi virtuali di punti sopra una curva, e le curve virtuali sopra una superficie furono introdotti dal Severi (1905). Ved. a tal proposito a pag. 109 del Trattato di Geometria algebrica del dipende da $|D|$. Lo si verifica subito sul fondamento del Restsatz. Essa è la serie caratteristica di C, virtualmente priva di punti fissi, e s'indica con $|(CC)|$. In particolare, se C appartiene ad un sistema continuo Σ, la serie lineare staccata su C dalle curve di Σ che le sono infinitamente vicine, appartiene totalmente alla serie $|(CC)|$ (che dunque in questo caso è una serie effettiva o la serie zero, nel caso che Σ sia un fascio irrazionale o razionale, privo di punti base). Più particolarmente ancora, se C appartiene ad un sistema lineare infinito $|C|$, sopra C le altre curve del sistema segano gruppi caratteristici.

A Segre (1887) spetta di aver introdotto il concetto di serie caratteristica per un sistema lineare di curve piane, traendone interessanti conseguenze. Altre importanti conseguenze ne trasse poco dopo (1891) Castelnuovo nella sua teoria generale dei sistemi lineari di curve piane. Il concetto fu poi sistematicamente sfruttato da Enriques (1893, 96) e da Castelnuovo (1897) per le superficie.

Al Severi (1904) spetta di aver dato al concetto di serie caratteristica su C la più ampia portata, svin-

---

Severi (vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, 1926). Un gruppo virtuale $A-B$, ove A, B son gruppi effettivi, può considerarsi come un simbolo operativo $+A-B$, che applicato ad un gruppo effettivo G conveniente conduce ad una serie lineare effettiva $|G+A-B|$. Analogamente per le curve virtuali. –

Gruppi e curve virtuali si posson introdurre, in virtù del teorema del resto, che conduce ai concetti di somma e sottrazione di sistemi lineari, come s'introducono i numeri negativi dell'algebra, dopo aver definito la somma e la sottrazione di numeri positivi.

colando, come sopra si è esposto, il concetto stesso dalla considerazione di un sistema lineare infinito $|C|$ di curve a cui la C debba appartenere. Prima di lui cioè, la serie caratteristica su C era sempre la serie segata sulla C dalle altre curve del sistema. Questo permise al Severi d'introdurre il fondamentale concetto di serie caratteristica di un sistema continuo non lineare, concetto che rapidamente condusse nel 1904 e negli anni immediatamente seguenti a progressi notevoli nella geometria sulle superficie.

132. – L'ordine della serie caratteristica di C (che può risultar negativo, quando la serie sia virtuale) è il grado virtuale della curva. Il grado virtuale si può altresì considerare se C è riducibile, perchè, determinati $|D|$, $|E|$ come sopra, resta sempre che il numero $[DC]-[EC]$ non dipende da $|D|$ e può quindi definirsi come grado virtuale $[CC]$ di C (numero virtuale delle intersezioni di C con sè stessa).

Accanto al grado virtuale deve porsi il genere virtuale della curva C, virtualmente priva di punti fissi. Per definirlo rapidamente, si determinino ancora $|D|$, $|E|$ come sopra. Detti π_D, π_E i generi effettivi (riemanniani) delle generiche D, E (che per noti teoremi di Bertini, trasportati alle superficie da Enriques, son prive di punti multipli), si prova agevolmente che l'espressione $\pi_D - \pi_E - [E,C]$ non muta cangiando $|D|$. Questo è dunque un carattere di C. Ebbene, posto $\pi_C = \pi_D - \pi_E - [E,C] + 1$, si chiama π_C il genere virtuale della C, virtualmente priva di punti fissi. È superfluo avvertire che questo numero può risultar negativo. Quando C sia irriducibile e priva di punti multipli, π_C coincide col genere effettivo $\overline{\pi}_C$ di C. Se C ha punti multipli, distinti o infinitamente vicini, ed s è la molteplicità del generico tra essi, si prova che

$$\pi_C = \bar{\pi}_C + \sum \frac{s(s-1)}{2}$$

Se C_1, C_2 son due curve di gradi virtuali n_1, n_2 e di generi virtuali π_1, π_2, ed i è il numero delle loro intersezioni (contate colle debite molteplicità), il grado n ed il genere virtuale π della curva $C_1 + C_2$, somma delle due, son dati dalle formule:

$$n = n_1 + n_2 + 2i$$
$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

I concetti di grado e genere virtuale di una curva, furon introdotti da Castelnuovo (1891) per le curve piane e da Enriques (1893, 1896) per le superficie. La formula che dà il genere virtuale di una curva spezzata risale però a Noether (1886).

133. - Dato su F un sistema lineare irriducibile $|C|$, effettivamente privo di punti base, di dimensione $r \geq 1$ e che non contenga più che ∞^{r-2} curve spezzate, le curve C' della superficie soddisfacenti alla condizione di segare sopra una generica C gruppi canonici(*), appartengono ad uno stesso sistema lineare $|C'|$, che dicesi il sistema aggiunto a $|C|$. Se $|D|$ è un sistema in condizioni analoghe a $|C|$, vale la relazione $C + D' \equiv C' + D$, che costituisce il teorema fondamentale dell'aggiunzione.

Questo teorema permette di estendere il concetto di sistema aggiunto ad ogni curva E di F (irriducibile o no), perchè il sistema lineare (eventualmente virtuale)

(*) Ved. il citato Trattato del Severi, pag., 122.

$|E'| = |E + C' - C|$, come risulta dal predetto teorema, è indipendente da $|C|$. E poichè, quando E determini un sistema $|E|$ analogo a $|C|$, $|E'|$ così definito non è altro che l'aggiunto ad $|E|$, si può in generale definire $|E'|$ come il sistema aggiunto alla curva virtualmente priva di punti fissi E.

Il sistema aggiunto è un invariante relativo del sistema dato, cioè la relazione di aggiunzione si conserva inalterata soltanto per le trasformazioni birazionali di F, biunivoche senza eccezione. L'operazione $+C' - C$ dicesi l'operazione di aggiunzione. È chiaro che $(C + D)' \equiv C' + D \equiv C + D'$.

Il sistema aggiunto ad un sistema di curve piane fu considerato da Brill - Noether (1873) e da Castelnuovo (1891), che ne fece uso sistematico.

Il concetto fu introdotto per le superficie, sotto forma invariante nella definizione stessa, da Enriques (1896), a cui si deve la forma riferita del teorema fondamentale dell'aggiunzione, che contiene in sè, come vedremo, l'invarianza del sistema canonico, stabilita prima altrimenti da Clebsch e da Noether.

Altre dimostrazioni più semplici del predetto teorema furono date da Enriques (1901) e dal Severi (1906), il quale lo dedusse come facile conseguenza dei suoi criteri di equivalenza, di cui in appresso (nº 137).

Il teorema dell'aggiunzione permise all'Enriques di dare una teoria organica e generale degl'invarianti di una superficie, considerati per lo innanzi frammentariamente dal Noether e da altri.

Anzitutto si deduce facilmente che il sistema (che si può considerare, con Severi, anche nel caso che sia virtuale)

$|C'-C|$, liberato dalle curve eccezionali di 1ª specie, che figurano in esso come parti fisse, dà luogo ad un sistema lineare $|K|$, che è invariante assoluto nelle trasformazioni birazionali di F. È il sistema canonico della superficie. Il numero delle curve (canoniche) linearmente indipendenti contenute in questo sistema, è un numero invariante assoluto: il genere geometrico p_g di F.

Clebsch (1868) e Noether (1874) dimostrarono l'invarianza del sistema canonico, come sistema segato sulla F - supposta in S_3, d'ordine m e, per semplicità, con sola linea doppia e punti tripli - dalle superficie aggiunte d'ordine $m-4$: sistema segato fuori della linea doppia, le aggiunte essendo appunto definite dalla condizione di passaggio per questa linea. La dimostrazione di Clebsch è trascendente. A Noether si deve la prima dimostrazione algebrica. L'ufficio delle curve eccezionali in questo teorema, trascurato in un primo tempo, fu considerato da Noether, ma in modo incompleto e imperfetto.

Naturalmente, oltre al sistema sono altresì invarianti assoluti i suoi successivi multipli $|iK|$. Ed è notevole che $|K|$ può non essere effettivo e tuttavia posson essere effettivi taluni de' suoi multipli. Il primo esempio in proposito fu dato da Enriques (1896). È una superficie per cui $|K|$ non è effettivo, mentre esiste il sistema bicanonico $|2K|$. Da ciò la necessità di considerare, come fece l'Enriques (1896), i plurigeneri. Lo i-genere P_i, è il numero delle curve i-canoniche linearmente indipendenti. La loro considerazione è importante anche per esprimer le condizioni di razionalità di una superficie (Castelnuovo, 1896), e le condizioni di riferibilità di una superficie rigata (Enriques, 1905).

134. - Per calcolare il genere geometrico di una superficie F, d'ordine m, di S_3 con singolarità ordinarie (linea doppia D e punti tripli), si deve togliere dal numero $\binom{m-1}{3}$ delle superficie linearmente indipendenti d'ordine $m-4$, il numero $\varphi(m-4)$ delle condizioni lineari indipendenti che s'impongono a una superficie d'ordine $m-4$, volendo che contenga D.

Ora il numero $\varphi(l)$ delle condizioni che D presenta alle superficie d'ordine l, che debbono contenerla, per $l \geq \lambda$, ove λ è un intero conveniente, si esprime con un binomio di 1º grado in l, $al+b$, ove a, b son numeri composti con taluni caratteri proiettivi di D. Ma questa formula (che chiamasi di postulazione) non vale se $l < \lambda$. Ebbene se $\lambda \leq m-4$, il genere p_g sarà dato da:

$$p_g = \binom{m-1}{3} - a(m-4) - b \qquad (1)$$

ma se $\mu > m-4$, nulla si potrà dire, con questa sola considerazione, del valore di p_g. In ogni caso il secondo membro della formula (1), anche quando non sia uguale a p_g, dà luogo ad un numero p_a, che si dimostra essere un invariante assoluto di F, di fronte alle trasformazioni birazionali: il genere aritmetico. Si prova che è sempre $p_g \geq p_a$. Il genere p_a può anche risultar negativo.

L'invarianza di p_a, dato dal secondo membro della (1), fu dimostrata prima dallo Zeuthen (1871) (è però del Cayley un'osservazione anteriore, dello stesso anno, che portò l'attenzione sul p_a), e poi da Noether (1874). Altre dimostrazioni furon date da Enriques (1896), che inquadrò il p_a nella sua teoria generale degl'invarianti, e dal

$|C'-C|$, liberato dalle curve eccezionali di 1ª specie, che figurano in esso come parti fisse, dà luogo ad un sistema lineare $|K|$, che è invariante assoluto nelle trasformazioni birazionali di F. È il sistema canonico della superficie. Il numero delle curve (canoniche) linearmente indipendenti contenute in questo sistema, è un numero invariante assoluto: il genere geometrico p_g di F.

Clebsch (1868) e Noether (1874) dimostrarono l'invarianza del sistema canonico, come sistema segato sulla F - supposta in S_3, d'ordine m e, per semplicità, con sola linea doppia e punti tripli - dalle superficie aggiunte d'ordine $m-4$: sistema segato fuori della linea doppia, le aggiunte essendo appunto definite dalla condizione di passaggio per questa linea. La dimostrazione di Clebsch è trascendente. A Noether si deve la prima dimostrazione algebrica. L'ufficio delle curve eccezionali in questo teorema, trascurato in un primo tempo, fu considerato da Noether, ma in modo incompleto e imperfetto.

Naturalmente, oltre al sistema sono altresì invarianti assoluti i suoi successivi multipli $|iK|$. Ed è notevole che $|K|$ può non essere effettivo e tuttavia posson essere effettivi taluni de' suoi multipli. Il primo esempio in proposito fu dato da Enriques (1896). È una superficie per cui $|K|$ non è effettivo, mentre esiste il sistema bicanonico $|2K|$. Da ciò la necessità di considerare, come fece l'Enriques (1896), i plurigeneri. Lo i-genere P_i, è il numero delle curve i-canoniche linearmente indipendenti. La loro considerazione è importante anche per esprimer le condizioni di razionalità di una superficie (Castelnuovo, 1896), e le condizioni di riferibilità di una superficie rigata (Enriques, 1905).

134. - Per calcolare il genere geometrico di una superficie F, d'ordine m, di S_3 con singolarità ordinarie (linea doppia D e punti tripli), si deve togliere dal numero $\binom{m-1}{3}$ delle superficie linearmente indipendenti d'ordine $m-4$, il numero $\varphi(m-4)$ delle condizioni lineari indipendenti che s'impongono a una superficie d'ordine $m-4$, volendo che contenga D.

Ora il numero $\varphi(l)$ delle condizioni che D presenta alle superficie d'ordine l, che debbono contenerla, per $l \geq \lambda$, ove λ è un intero conveniente, si esprime con un binomio di 1º grado in l, $al+b$, ove a, b son numeri composti con taluni caratteri proiettivi di D. Ma questa formula (che chiamasi di postulazione) non vale se $l < \lambda$. Ebbene se $\lambda \leq m-4$, il genere p_g sarà dato da:

$$p_g = \binom{m-1}{3} - a(m-4) - b \qquad (1)$$

ma se $\mu > m-4$, nulla si potrà dire, con questa sola considerazione, del valore di p_g. In ogni caso il secondo membro della formula (1), anche quando non sia uguale a p_g, dà luogo ad un numero p_a, che si dimostra essere un invariante assoluto di F, di fronte alle trasformazioni birazionali: il genere aritmetico. Si prova che è sempre $p_g \geq p_a$. Il genere p_a può anche risultar negativo.

L'invarianza di p_a, dato dal secondo membro della (1), fu dimostrata prima dallo Zeuthen (1871) (è però del Cayley un'osservazione anteriore, dello stesso anno, che portò l'attenzione sul p_a), e poi da Noether (1874). Altre dimostrazioni furon date da Enriques (1896), che inquadrò il p_a nella sua teoria generale degl'invarianti, e dal

Severi (1902).

La differenza $q = p_g - p_a$ chiamasi l'irregolarità della superficie. Se $q > 0$ la superficie è irregolare; altrimenti è regolare.

Ad Enriques (1896) è dovuto il teorema che se $|C|$ è un sistema lineare irriducibile di F, la somma delle deficienze delle serie lineari staccate sulla generica C dai sistemi $|C'|, |C'+C|, |C'+2C|, \dots$ è uguale a q; e a Castelnuovo (1897) il teorema che assegna q come massimo raggiungibile della deficienza δ della serie caratteristica di $|C|$. Una dimostrazione molto più semplice di quest'ultimo fatto, fu più tardi data dal Severi (1903). Quanto al teorema di Enriques, occorre aggiungere che il Picard (1905), con mezzi trascendenti indiretti potè dimostrare che, se $|C|$ è il sistema delle sezioni piane di F (dotata di singolarità ordinarie), è già uguale a q la deficienza della serie segata da $|C'|$ su C; cioè $|C'+C|, |C'+2C|, \dots$ segano su C serie complete. Il Severi dimostrò poi geometricamente (1908) che lo stesso vale più in generale se C è una curva irriducibile, atta a variare in un sistema continuo di grado > 0.

135. - Dato su F un sistema lineare irriducibile $|C|$, infinito, effettivamente privo di punti base, il sistema $|C'-C|$ sega sulla generica C gruppi residui della serie $|(CC)|$ rispetto alla serie canonica di C. Cosicchè l'indice di specialità j (*) della serie caratteristica di C è almeno uguale a $p_g - i$, ove i è il numero delle curve canoniche di F, linearmente indipendenti che contengono C, cioè l'indice di specialità del sistema $|C|$. D'altronde la deficienza δ

(*) Vid. Severi, Trattato di Geom. algebrica, pag. 157

della serie caratteristica segata su C dalle altre curve del sistema, serie che ha la dimensione $r-1$, se r è la dimensione di $|C|$, è $\leq p_g - p_a$, onde pel teorema di Riemann-Roch (*) sulla curva C, sarà $r - 1 + \delta = n - \pi + j$, ove n, π denotano grado e genere effettivi di C (coincidenti col grado e genere virtuali, perchè C non ha punti multipli). Essendo $\delta \leq p_g - p_a$, $j \geq p_g - i$, risulta

$$(2) \qquad r \geq n - \pi + p_a + 1 - i$$

Questa disuguaglianza costituisce il teorema di Riemann-Roch sulle superficie. Essa si estende subito a sistemi lineari con punti base. La (2) fu data da Noether (1886) sotto l'ipotesi che fosse $\delta = 0$, mentre come si vede più tardi (Castelnuovo, 1896, 1897), tale ipotesi è vera per tutti i sistemi soltanto sopra le superficie regolari. La (2) fu dimostrata da Enriques (1896) pei sistemi che, sopra una superficie posson considerarsi come aggiunti di altri, e in generale da Castelnuovo (1897), come corollario del teorema $\delta \leq q$.

Esistono su ogni F sistemi per cui nella (2) vale il segno $=$. La differenza σ fra r ed il secondo membro chiamasi sovrabbondanza del sistema. Il secondo membro della (2) chiamasi anche dimensione virtuale del sistema. Se $\sigma = i = 0$ il sistema è regolare. È per es. regolare un multiplo abbastanza alto delle sezioni iperpiane di una superficie di S_r priva di singolarità (Castelnuovo, Severi), oppure l'aggiunta di una curva C variabile in un sistema continuo di grado > 0 (Picard, Severi).

Al Severi (1905, 1909) è dovuto il teorema generale di R.R.

(*) Vid. Severi, loc. ultimamente citato, pag. 157.

sulle superficie, relativo a una curva C, di caratteri virtuali n, π, i, la quale sia effettiva o virtuale, irriducibile o riducibile, virtualmente priva di punti base o dotata di punti base con molteplicità assegnate minori o uguali alle effettive. Egli ha dimostrato che per una tal curva vale ancora la (2)*, sicchè se la curva, com'egli dice, è aritmeticamente effettiva, cioè se

$$n-\pi+p_a+1-i\geq 0\ ,$$

è certo $r\geq 0$, ossia essa è anche geometricamente effettiva su F. Si ha così insomma una condizione aritmetica sufficiente perchè si possa, nel campo delle curve effettive, eseguire la sottrazione $A-B$, ove A, B sieno due curve (effettive o virtuali) di F (Severi, 1905).

Il Severi ha pur dato (1909) la condizione necessaria e sufficiente perchè si possa eseguire la differenza $A-B$, ove A, B sieno curve effettive, di cui la B suscettibile di variare in un sistema continuo di grado >0: tale condizione è che $|B'|$ seghi su A una serie speciale.

Un altro teorema, che si riconnette ad una maggior determinazione del teorema R-R, e da cui son derivate importanti conseguenze, è il seguente (Severi, 1908):

Se C è su F una curva suscettibile di variare in un sistema continuo di grado >0, e $|D|$ un sistema irriducibile che contenga parzialmente C, il sistema residuo $|D-C|$ sega su D una serie lineare completa.

136.- Definita (nº 131) la serie caratteristica di un sistema continuo non lineare, sorgeva spontaneo il pensiero che, come sulle superficie regolari la serie caratteristica di un sistema lineare completo è completa, così accadesse sulle superficie irregolari per la serie caratteristica

di un sistema algebrico completo di curve. Già vari sintomi facevano presentire che la distinzione più profonda fra le superficie regolari e irregolari consistesse in ciò: che sulle prime non esistono che sistemi completi lineari, mentre sulle seconde esistono sistemi completi (algebrici) non lineari.

Invero, esempi di superficie irregolari contenenti sistemi completi non lineari erano stati costruiti da Castelnuovo, da Enriques, dal Severi, dal Maroni e dal De Franchis ed Enriques (1899) aveva dimostrato che ogni superficie contenente un sistema completo non lineare, è irregolare.

Il concetto di serie caratteristica di un sistema continuo, posto dal Severi nel febbraio del 1904, gettò subitanea luce sopra una delle questioni più importanti all'ordine del giorno nel campo della Geometria algebrica, giacchè la conseguenza immediata che il Severi trasse da quel concetto, e cioè che, se in un sistema algebrico completo di curve C sono contenuti $\infty^{q'}$ sistemi lineari completi distinti, è $q'\leq q$, e quindi la deficienza della serie caratteristica del generico sistema $|C|$ vale almeno q', lasciava presagire che, come la deficienza di $|C|$ può raggiungere il valore q, lo stesso accadesse di q'. Dimostrato questo (cioè che la serie caratteristica del sistema continuo completo contenente le C, è completa), restavano caratterizzate le superficie irregolari come quelle contenenti sistemi completi non lineari di curve.

Siffatto modo di veder la questione il Severi comunicò all'Enriques, appunto al principio del 1904, e l'Enriques nel dicembre dello stesso 1904 credette di poter rispondere che ogni sistema continuo completo ha la serie caratteristica completa; ma la dimostrazione non è giusta, e la questione dal lato strettamente algebrico-geometrico rimane tuttora aperta. Di ciò si accorse il Severi molto più tardi

(Lincei, giugno 1921, pag. 297), e fu fortuna, perchè il fatto è almeno nel suo lato più sostanziale, vero, e, ove esso fosse stato subito sottoposto ad una grave obiezione, non se ne sarebbero tratte così rapidamente tutte le importanti conseguenze che ne furon tratte negli anni successivi, e che conservan la loro piena validità, nonostante l'obiezione che toglie alla dimostrazione dell'Enriques il suo valore conclusivo. Ridotta in termini analitici, l'obiezione consiste in ciò: che non si può ricavar alcuna conclusione circa la dipendenza funzionale di più funzioni, conoscendo la caratteristica della loro matrice funzionale soltanto in un punto del loro campo di esistenza.

Tuttavia della dimostrazione dell'Enriques, prescindendo dallo scopo a cui mirava, rimane un principio utilissimo circa lo spezzamento di una curva variabile; e d'altronde, come risulta dalle riflessioni del Severi, il ragionamento vale per concludere che sopra una superficie di genere geometrico $p_g = 0$, un sistema lineare regolare appartiene ad un sistema continuo a serie caratteristica completa.

Nello stesso lavoro del 1921 (ove del resto tale questione è trattata in via incidentale) il Severi dimostra, con mezzi trascendenti, che sopra ogni superficie F un sistema continuo completo, la cui curva generica sia aritmeticamente effettiva, consta di ∞^q $(q = p_g - p_a)$ sistemi lineari, cioè ha la serie caratteristica completa. Resta dubbia la completezza della serie caratteristica per sistemi la cui curva non sia aritmeticamente effettiva.

Comunque il Severi ha provato che sistemi eccezionali, se pur esistono, si possono presentare soltanto sopra superficie contenenti sistemi riducibili d'integrali di Picard di 1ª specie. Tutto ciò basta per rendere pienamente validi i risultati ottenuti dopo il 1904 nella Geometria sopra le superficie, in conseguenza del concetto di serie caratteristica d'un sistema continuo.

137. - Termineremo questo rapido sunto con alcuni criteri di equivalenza, che troveranno subito applicazione nel successivo §.

Un primo criterio di equivalenza fu dato dal Severi nel 1905:

Due curve A, B, tracciate su F che stacchino gruppi equivalenti sulla generica curva C di un fascio Σ razionale, o irrazionale, son equivalenti o differiscono per curve contenute totalmente o parzialmente sul fascio.

Nel caso più importante di un fascio Σ razionale (cioè lineare), il criterio può stabilirsi così:

Si può anzitutto, con una trasformazione birazionale di F, ridurre il fascio ad esser segato sopra una $f(x, y, z) = 0$ di S_3 dai piani $z = cost.$, avendo la retta all'infinito di questi piani molteplicità $s \geq 0$ per f. Resta allora, per ipotesi, determinata razionalmente (rispetto al parametro z che individua la posizione della curva C nel fascio Σ) una funzione razionale $\varphi(x, y; z)$ del punto variabile su C, la qual funzione ha in (CA) il gruppo degli zeri (di 1º ordine) e in (CB) il gruppo dei poli (di 1º ordine). La φ dipende razionalmente da z, ossia è in definitiva funzione razionale del punto di f. Le sue curve di livello zero e infinito $\bar{A}, \bar{B}$ segan la C generica in (CA), (CB) ed eventualmente in altri punti, che però non possono esser che di indeterminazione per la $\varphi(x, y; z)$, cioè punti base del fascio $\varphi = cost.$, epperò anche del fascio

Σ (z = cost.). Sicchè $\bar{A}$ contiene A come parte, e il resto è una curva che, non segando le C fuori dei punti base del loro fascio, consta di curve contenute, parzialmente o totalmente, nelle C. Lo stesso dicasi della curva $\bar{B}-B$, donde il teorema.

Di questo criterio il Severi diede successivamente varie estensioni, delle quali talune di carattere trascendente (1905, 1906, 1911). Ci limitiamo a riferire due di esse:

Se le A, B segano gruppi equivalenti sopra la generica curva C di un qualunque sistema continuo $\Sigma\,\infty'$, d'indice ν (cioè tale che per un punto generico di F passano ν curve C), le curve νA, νB son equivalenti o differiscono per curve fondamentali di Σ (curve non aventi intersezioni variabili colle C).

Se si sa che le A, B segano gruppi equivalenti sopra una determinata curva del sistema Σ di cui sopra, si può concludere ch'esse sono equivalenti quando si sappia che le A, B appartengano al medesimo sistema continuo, e che Σ è di grado > 0.

Il 1º criterio in particolare, permette di concluder l'equivalenza delle A, B, quando il fascio Σ sia lineare e non contenga curve spezzate.

Mostriamo come da ciò si possa trarre la più semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'aggiunzione, cui accennammo nel nº 133 (Severi, 1906).

Sieno $|A|$, $|B|$ due fasci lineari su F, privi di curve spezzate e (per semplicità) dotati di soli punti base semplici. La curva T, luogo dei contatti delle A, B, passa semplicemente pei punti base dei due fasci, e stacca sopra una A, fuori dei punti base, il gruppo jacobiano (*) della serie

(*) Ved. Severi "Trattato" pag. 113.

segnata su A da $|B|$, cioè (*) un gruppo equivalente a $\Delta + 2(AB)$, Δ essendo un gruppo canonico di A. Pertanto, se A' è una curva aggiunta ad A, così che $(AA') \equiv \Delta$, le curve T, $A + A' + 2B$ segan complessivamente su A (includendo nei gruppi d'intersezione anche i punti base) due gruppi equivalenti, epperò son equivalenti. Lo stesso si conclude mutando le veci dei due fasci. Perciò:

$$T \equiv A + A' + 2B \equiv B + B' + 2A$$

donde:

$$A' + B \equiv A + B'$$

che è appunto il teorema dell'aggiunzione.

XXXIV. - La teoria della base per le curve di una superficie algebrica. -

138. - Come applicazione elegante e notevole della topologia della riemanniana di una superficie algebrica F, esponiamo ora la teoria della base per la totalità delle curve algebriche di F, costruita dal Severi (1905, 1906, 1908, 1910), mediante l'intima fusione di proprietà geometriche con proprietà degl'integrali picardiani di 3ª specie, appartenenti ad F. Questa teoria mostra come le curve di F dieno luogo ad un'algebra, di cui esse son le unità. Il modo di conseguire il teorema fondamentale della teoria, che seguiremo in queste «Conferenze», deriva dai geniali ravvicinamenti posti dal Lefschetz fra i risultati del Severi, concernenti la suddetta teoria, e le concezioni topologiche di

(*) Ved. Severi, "Trattato" pag. 122.

Poincaré, e si può dire che il metodo è dovuto nelle sue parti sostanziali al Lefschetz (ved. il suo trattato più volte citato). L'Albanese (1927) ha potuto liberare in un punto la trattazione del Lefschetz dall'intervento degl'integrali picardiani di 1ª specie, inerenti ad F. Ne risulta così una bella dimostrazione algebrico-topologica del teorema fondamentale della base, che è appunto quella che ci accingiamo ad esporre, non senza aver prima avvertito che la base per le curve di F fu ritrovata altrimenti dal Poincaré nel 1910 e che il procedimento di Poincaré, nel quale intervengono pure gl'integrali picardiani di 1ª specie, fu semplificato e posto in nuova luce dal Severi nel 1921. Acquisito il teorema fondamentale, il resto procede esattamente come nella trattazione originaria del Severi.

139. - Due curve (algebriche) A, B tracciate su F si dicono algebricamente equivalenti, e si scrive $A \equiv B$, quando i sistemi lineari completi $|A|, |B|$ da esse individuati appartengono ad uno stesso sistema algebrico irriducibile (prendendone come elementi i sistemi lineari). In particolare può essere $|A| = |B|$, e allora le due curve son equivalenti $(\equiv)$.(*)

(*) Si può anche considerare un'equivalenza algebrica in senso più stretto, intendendo che A, B sieno a. e. quando appartengono ad un medesimo sistema algebrico irriducibile, come totalità di curve, invece che di sistemi lineari. I due concetti non sempre coincidono, perchè, come mostrò il Rosenblatt (1912), esistono sistemi irriducibili come totalità di sistemi lineari e riducibili come varietà di curve. L'Albanese ha però provato (1915, 1927) che il teorema fondamentale della base e il numero-base, che in esso figura, rimangon gli stessi anche rispetto all'equivalenza ristretta. Noi ci occuperemo dell'equivalenza algebrica nel senso più largo del testo, perchè è quella veramente importante.

La relazione $A \equiv B$ si scrive altresì sotto la forma $A - B \equiv 0$ e si legge che "la curva virtuale $A - B$ è equivalente algebricamente alla curva zero". È superfluo avvertire che la relazione può considerarsi altresì se le A, B son virtuali, in quanto allora esiste sempre qualche curva effettiva E di F, tale che $E + A$, $E + B$ son effettive; e scrivere $A \equiv B$ vorrà dire $E + A \equiv E + B$. Ma perchè le curve effettive vengan nella definizione trattate come le virtuali, occorrerà estendere il significato di equivalenza algebrica, intendendo che, in ogni caso scrivere $A \equiv B$, equivale ad affermare che esiste qualche curva effettiva E tale che le $E + A$, $E + B$ son effettive e i sistemi lineari $|E + A|$, $|E + B|$ appartengono allo stesso sistema algebrico irriducibile (di sistemi lineari).

Il punto di partenza della teoria della base, anche nella originaria costruzione, è il seguente criterio di equivalenza algebrica:

Se sopra F due curve A, B (effettive o virtuali) dello stesso ordine, hanno lo stesso grado virtuale n (positivo, nullo o negativo) ed è

$$[AA] = [AB] = [BB] = n \quad ,$$

esiste un intero λ (≥ 1) tale che $\lambda A \equiv \lambda B$ (*).

Ecco la dimostrazione di questo criterio:

Sieno α, β i generi virtuali delle A, B, per es. con $\beta \geq \alpha$; $|C|$ il sistema delle sezioni piane o iperpiane di F, $|L|$ il sistema $|C' - C|$. È allora possibile scegliere un multiplo $|E|$, così elevato di $|C|$, che le E abbian l'ordine maggiore delle L e quindi che ogni sistema dell'ordine delle E sia non speciale, e che

(*) Naturalmente, se A, B son virtuali, $[A, B]$ si definisce così: sieno A_1, A_2; B_1, B_2 curve effettive, tali che $A \equiv A_1 - A_2$, $B \equiv B_1 - B_2$. Allora $[AB] = [A_1 - A_2, B_1 - B_2] = [A_1 B_1] - [A_1 B_2] - [A_2 B_1] + [B_1 B_2]$. Sul fondamento del Restsatz si trova la dimensione virtuale $\nu-\rho+p_a+1$ di $|E|$, di grado virtuale ν e genere virtuale ρ, sia maggiore di zero. Il grado e il genere virtuali della curva virtuale $E+A-B$ risultano (per le formule del n° 132) uguali a $\nu, \rho+\alpha-\beta$, sicchè la dimensione virtuale di $|E+A-B|$, che è non speciale, viene espressa da $\nu-\rho+p_a+1+\beta-\alpha>0$. Perciò la curva $E+A-B$ sarà aritmeticamente e quindi geometricamente effettiva (n° 135). Posto $|E_1|=|E+A-B|$, le E_1 hanno lo stesso ordine delle E e la dimensione virtuale di E_1+A-B è $\nu-\rho+p_a+1+2(\beta-\alpha)$; onde anche $|E_2|=|E_1+A-B|$ è effettivo.

In generale è effettivo $|E_i|=|E+i(A-B)|$, ove i è un intero positivo qualunque; ed ha lo stesso ordine di $|E|$. E poichè la dimensione virtuale di $|E_i|$ è $\nu-\rho+p_a+1+i(\beta-\alpha)$, se fosse $\beta>\alpha$, questa dimensione, epperò anche la dimensione effettiva, crescerebbero oltre ogni limite con i. Ora questo è assurdo, perchè le curve algebriche di dato ordine su F si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici completi distinti, onde la dimensione di $|E_i|$ non può superare quella del più ampio di tali sistemi. Pertanto è $\beta=\alpha$.

Inoltre, siccome i sistemi lineari della successione $|E|, |E_1|, \dots, |E_i| \dots$, devon distribuirsi in un numero finito di sistemi algebrici distinti, o essi medesimi si riducono ad un numero finito di sistemi lineari distinti e allora l'operazione $+A-B$ è periodica con un certo periodo λ e risulta $\lambda A\equiv\lambda B$; oppure esiste un sistema algebrico Σ, irriducibile come totalità di sistemi lineari, contenente infiniti di quei sistemi lineari distinti fra loro; sieno:

$$|E_{r_1}|,\ |E_{r_2}|,\ |E_{r_3}|, \dots \qquad (r_1<r_2<r_3<\dots).$$

subito che $[AB]$ rimane immutato, comunque cangino le coppie A_1, A_2; B_1, B_2 sotto le condizioni poste.

Posto $\lambda = r_s - r_1$, il grado ed il genere virtuale della curva virtuale $E_{r_1}+\lambda A - D$, D essendo una curva generica di Σ, son dati da

$$\lambda^2 n,\ n\binom{\lambda}{2}+\lambda(\alpha-1)+1$$

e quindi la dimensione virtuale da $n\binom{\lambda+1}{2}-\lambda(\alpha-1)+p_a$. Ora, se $n>0$, scegliendo l'indice s abbastanza grande, la predetta dimensione virtuale, che tende a $+\infty$ per s e quindi λ tendenti a $+\infty$, riuscirà positiva e la curva virtuale $E_{r_1}+\lambda A-D$ sarà non speciale. Per quel valore di s esisterà dunque $E_{r_1}+\lambda A-D$, qualunque sia D in Σ. Al variare continuo di $|D|$ entro Σ, il sistema lineare $|G|=|E_{r_1}+\lambda A-D|$ descriverà un sistema algebrico Σ', i cui elementi (sistemi lineari) son in corrispondenza birazionale cogli elementi $|D|$. E poichè Σ è irriducibile, lo è anche Σ'. Ora, quando $|D|$ viene a coincider con $|E_{r_1}|$ o con $|E_{r_s}|$, il sistema $|G|$ coincide rispettivamente con $|\lambda A|$ e con $|\lambda B|$; dunque $|\lambda A|, |\lambda B|$ appartengono al medesimo sistema Σ', ossia è $\lambda A\equiv\lambda B$.

Se invece $n\leq 0$, aggiungendo alle A, B un multiplo abbastanza alto E, delle sezioni piane o iperpiane di F, avremo due curve effettive $A_1=E+A$, $B_1=E+B$ dello stesso ordine, di grado virtuale $n_1>0$ e soddisfacenti alla condizione $[A_1A_1]=[A_1B_1]=[B_1B_1]=n_1>0$, onde, per quanto precede, sarà, per un certo λ, $\lambda A_1\equiv\lambda B_1$, cioè $\lambda E+\lambda A\equiv\lambda E+\lambda B$, e quindi ancora $\lambda A\equiv\lambda B$.

140. – Dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un intero λ tale che $\lambda A\equiv\lambda B$, è che i cicli algebrici A, B (opportunamente orientati) imagini delle curve omonime sulla riemanniana R_4 di F, sieno omologhi o differiscon per un divisore dello zero, cioè che $A-B$ sia un ciclo nullo o un divisore dello zero.

Si avvertirà che in quest'enunciato il significato della parola «ciclo» si è leggermente esteso, intendendosi come tale anche un ciclo riducibile (pag. 331), cioè un complesso somma algebrica di un numero qualsiasi di cicli comunque orientati.

Invero, se è $\lambda A \equiv \lambda B$, ossia se esiste una curva effettiva E tale che $|E+\lambda A|$, $|E+\lambda B|$ appartengano alla stessa varietà irriducibile di sistemi lineari, la curva (il ciclo) $E+\lambda A$ potrà deformarsi con continuità entro F (entro R_4) sino a ridurlo alla curva (al ciclo) $E+\lambda B$, e orientato il primo ciclo (cioè ognuna delle sue parti), riuscirà orientato il secondo, onde $E+\lambda A \sim E+\lambda B$, cioè $\lambda(A-B) \sim 0$.

Viceversa, se $\lambda(A-B)\sim 0$, ossia $\lambda A \sim \lambda B$, i due cicli A, B incontreranno nello stesso numero algebrico = aritmetico (nº 129) di punti *ogni* ciclo opportunamente orientato di R_4; cioè le curve A, B incontreranno nello stesso numero di punti ogni curva algebrica C di F. Da ciò segue che le A, B hanno lo stesso ordine e che, presa la curva E tale che $E+A, E+B$ siano effettive, dovrà essere:

$$[E+A, B] = [E+A, A] = [E+B, A] = [E+B, B] ,$$

donde:

$$[AA] = [AB] = [BB] .$$

Pertanto esiste un intero μ tale che $\mu A \equiv \mu B$.

141. — Il numero dei cicli algebrici (orientati) omologicamente indipendenti di R_4, è necessariamente finito, non potendo superare l'ordine di connessione bidimensionale p_2 di R_4. Diciamolo $\rho (\leq p_2)$. Sarà dunque possibile trovare ρ curve algebriche $C_1, C_2, \dots, C_\rho$, tracciate su F, tali che, essendo C un'altra curva algebrica qualunque di F, tra i cicli (orientati) $C, C_1, \dots, C_\rho$ sussiste la omologia

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho \sim 0 ,$$

ove le $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ son interi (positivi, negativi o nulli) non tutti nulli. Ed è certo $\lambda \neq 0$, perchè i cicli $C_1, \dots, C_\rho$ sono omologicamente indipendenti. La relazione precedente, in virtù del teorema ora dimostrato, ci dice che

$$(1) \qquad \lambda C + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho \equiv 0 ,$$

senza che tra le $C_1, \dots, C_\rho$ sussista una relazione analoga a coefficienti non tutti nulli. La (1) si chiama un *legame di dipendenza algebrica* fra le $C, C_1, \dots, C_\rho$. Concludendo si ha *il teorema fondamentale della base*:

Si può fissare sopra una superficie algebrica qualunque F un certo numero ρ di curve algebriche $C_1, \dots, C_\rho$ algebricamente indipendenti, tali che ogni altra curva algebrica della superficie sia algebricamente dipendente da quelle.

Il numero ρ, che chiamasi il *numero-base* di F, non supera l'ordine di connessione superficiale della corrispondente riemanniana.

142. — Il *Severi* ha poi dimostrato la possibilità di scegliere le ρ curve della base in tal guisa che, qualunque sia C, nella (1), l'intero λ sia sempre un divisore comune a $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$. Una base così fatta egli l'ha chiamata *intermediaria*. La costruzione di una tal base si potrebbe effettuare imitando un procedimento noto di *Frobenius*, applicato variamente in casi formalmente analoghi da *Weierstrass* e da *Klein*.

Preferiamo invece di seguire la via indicata dal *Severi*, che profitta del concetto di *discriminante della base* e si raccosta perciò di più alla teoria dei numeri algebrici.

Avendosi su F un insieme di l curve $D_1, \dots, D_l$, posto $n_{ik} = [D_i D_k] = n_{ki}$ e denotato con m_i l'ordine di D_i, *matrice discriminante* di quell'insieme è la matrice

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{matrix} \right\|$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le $D_1, \dots, D_l$ sieno algebricamente dipendenti, è che sia nulla la loro matrice discriminante.

Infatti, se $\lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_l D_l \equiv 0$ per valori non tutti nulli delle λ, segando successivamente la curva virtuale zero $\lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_l D_l$ colle curve $D_1, \dots, D_l$ e con una sezione piana o iperpiana di F, s'ottiene un sistema di equazioni lineari omogenee cui soddisfanno le λ e che ha per matrice (2). Onde la (2) è nulla. Viceversa, se la (2) è nulla, si potranno determinare gl'*interi* λ non tutti nulli in guisa che

$$\lambda_1 n_{i1} + \lambda_2 n_{i2} + \dots + \lambda_l n_{il} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, l)$$
$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_l m_l = 0 \quad .$$

Se le $D_1, \dots, D_l$ hanno ordini non negativi, le λ non hanno certamente il medesimo segno; se qualcuna delle D, per es. D_1, ha ordine negativo, si sostituirà prima, nell'insieme, colla curva virtuale opposta $-D_1$; ed è chiaro che basterà dimostrare l'esistenza di un legame algebrico fra le curve del nuovo insieme, perchè ne consegua subito un legame fra le curve del primitivo. Possiamo dunque supporre che le λ non abbian tutte lo stesso segno. Sieno per es. positive le $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ e negative le altre. Porremo $\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \dots, \mu_l = -\lambda_l$, $A = \lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_t D_t$, $D = \mu_{t+1} D_{t+1} \dots + \mu_l D_l$.

Mercè le formule del n° 132 si trova

$$[AA] = \Sigma \lambda_i \lambda_k n_{ik} \; (i, k = 1, \dots, t), \quad [BB] = \Sigma \mu_r \mu_s n_{rs} \; (r, s = t+1, \dots, l)$$

e inoltre:

$$[AB] = \Sigma \lambda_i \mu_r n_{ir} \begin{pmatrix} i = 1, \dots, t \\ r = t+1, \dots, l \end{pmatrix} \quad .$$

Ora le prime t relazioni (3) moltiplicate ordinatamente per $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ e sommate a membro a membro, porgono $[AA] - [AB] = 0$; e così, moltiplicando le $l - t$ relazioni successive ordinatamente per $\mu_{t+1}, \dots, \mu_l$ e sommando, si ha $[AB] - [BB] = 0$. Poichè le due curve A, B, in forza dell'ultima delle (3), hanno lo stesso ordine, si conclude ch'esse sono algebricamente legate (n° 139), donde la conclusione.

Il determinante formato dalle prime l orizzontali della matrice discriminante delle l curve si chiama il *discriminante* di questo insieme di curve.

Se ρ è il numero-base di F, condizione necessaria e sufficiente affinchè ρ curve $C_1, C_2, \dots, C_\rho$ di F sieno algebricamente indipendenti, cioè formino una base, è che il discriminante delle ρ curve sia diverso da zero.

Posto $n_{ik} = [C_i C_k]$, indichiamo con $D = |n_{ik}|$ il discriminante della base e supponiamo che le C formino base. Consideriamo un'altra base $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\rho)$ e sia $\Delta = |\nu_{ik}|$ il suo discriminante. Varranno le relazioni:

$$\lambda_1 \Gamma_1 \equiv \lambda_{11} C_1 + \lambda_{12} C_2 + \dots + \lambda_{1\rho} C_\rho$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_\rho \Gamma_\rho \equiv \lambda_{\rho 1} C_1 + \lambda_{\rho 2} C_2 + \dots + \lambda_{\rho\rho} C_\rho \quad ,$$

dalle quali si traggon le:

$$\lambda_i [\Gamma_i C_k] = \sum_{r=1}^{\rho} \lambda_{ir} [C_r C_k] = \sum_{r=1}^{\rho} \lambda_{ir} n_{rk}$$

e le:

$$\lambda_i [\Gamma_i \Gamma_k] = \sum_{r=1}^{\rho} \lambda_{ir} [C_r \Gamma_k] \quad ,$$

ossia

$$\lambda_i \lambda_k \nu_{ik} = \sum_{r=1}^{\rho} \sum_{s=1}^{\rho} \lambda_{ir} \lambda_{ks} n_{rs} = \sum_{r,s} c_{rs} n_{rs} \quad ,$$

ove c_{rs} son gli elementi del determinante Λ^2, essendo $\Lambda = |\lambda_{ik}|$. D'altronde le $\lambda_i \lambda_k \nu_{ik}$ son gli elementi di un determinante uguale a $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\rho)^2 \Delta$; perciò si ha la relazione fondamentale fra i due discriminanti:

(A) $$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\rho)^2 \Delta = \Lambda^2 D \quad .$$

Da questa intanto segue che se fosse nullo il discriminante di una base, sarebbe nullo il discriminante di ogni altra base. Onde basterà provare che esiste una base a discriminante non nullo, perchè tutte godan della stessa proprietà. Ora per formare la base $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\rho$ possiamo cominciare a scegliere una sezione piana o iperpiana Γ_1 di F, poi una curva Γ_2 algebricamente indipendente da Γ_1, poi una curva Γ_3 algebricamente indipendente da Γ_1, Γ_2; ecc.. La matrice discriminante dell'insieme $(\Gamma_1, \dots \Gamma_\rho)$ sarà

$$\left\| \begin{matrix} \nu_{11} & \nu_{12} \dots & \nu_{1\rho} \\ \nu_{21} & \nu_{22} \dots & \nu_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots \\ \nu_{\rho 1} & \nu_{\rho 2} \dots & \nu_{\rho\rho} \\ \nu_{11} & \nu_{12} \dots & \nu_{1\rho} \end{matrix} \right\|$$

Questa matrice dovrà esser non nulla, perchè le $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\rho$ son indipendenti. Dunque dovrà esser non nullo il determinante delle sue prime ρ righe, che è appunto Δ. Viceversa, se un insieme di ρ curve ha il discriminante non nullo, anche la matrice discriminante è non nulla, e quindi le ρ

curve sono indipendenti, ossia formano una base. Il teorema è così completamente dimostrato.

Osservazione. — Nella (A) gl'interi $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ son tutti diversi da zero, perchè altrimenti si avrebbe un legame fra le $C_1, \dots, C_\rho$. Pertanto il primo membro della (A), e così il secondo, son diversi da zero. Onde D, Δ hanno lo stesso segno. Dunque i discriminanti delle varie basi hanno tutti il medesimo segno.

Da ciò segue per es. nel caso $\rho = 1$ che ogni curva (effettiva o virtuale) della superficie ha il grado virtuale > 0, perchè il discriminante della base (una curva) si riduce al grado virtuale di questa e sulla superficie le sezioni piane o iperpiane hanno grado virtuale positivo.

143. — Vediamo come si costruisce una base intermediaria, a partire da una base $(C_1, \dots, C_\rho)$ che non lo sia. Poichè $(C_1, \dots, C_\rho)$ non è intermediaria, esisterà su F qualche curva Γ tale che nella relazione

$$\lambda \Gamma \equiv \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho \quad ,$$

che la lega alla base, λ non divide tutte le $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$; per es. non divida λ_1. Sia θ il massimo comune divisore (≥ 1) di λ, λ_1. Si potranno determinare altri due interi μ, μ_1, tali che $\lambda \mu + \lambda_1 \mu_1 = \theta$. Allora la curva $\Gamma_1 = \mu C_1 + \mu_1 C$ si esprime mediante la base data, colla relazione:

$$\lambda \Gamma_1 \equiv \theta C_1 + \mu_1 \lambda_2 C_2 + \dots + \mu_1 \lambda_\rho C_\rho \quad .$$

Le ρ curve $\Gamma_1, \Gamma_2 = C_2, \dots, \Gamma_\rho = C_\rho$ hanno il discriminante Δ legato al discriminante D della base dalla relazione (ved. la (A) del n° prec.) $\lambda^2 \Delta = \theta^2 D$. Ne segue che $\Delta \neq 0$, al pari di D, epperò le $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\rho$ formano una base. Il discriminante

Δ di questa base è un divisore di D e siccome $\frac{D}{\Delta}=\frac{\lambda^2}{\theta^2}>1$, così ne segue che $|\Delta|<|D|$. Pertanto, se una base non è intermediaria, se ne può sempre costruire un'altra, il cui discriminante abbia valore assoluto minore del discriminante della prima. Sicchè una base il cui discriminante abbia il valore assoluto minimo è intermediaria.

Osservazione 1ª. – Risulta altresì da quanto precede che il discriminante di una base intermediaria è un divisore del discriminante di ogni altra base, e il quoziente dei due discriminanti è un quadrato perfetto.

Osservazione 2ª. – In particolare, se $\rho=1$, una base intermediaria è data da una curva di F di grado virtuale (>0; nº prec. Oss.) minimo.

144. – Se A, B son due curve di F, tali che $\lambda A\equiv B$, si dice che A si ottiene dividendo B per l'intero λ. L'operazione di divisione non è sempre possibile (non lo è per es. quando l'ordine di B sia un numero primo e la superficie non contenga curve virtuali del 1º ordine); e, quando è possibile, non è necessariamente univoca.

Dimostriamo che esiste un intero (positivo) σ tale che, qualunque sia la curva che si vuol dividere per un intero e qualunque sia questo divisore, il numero delle curve algebricamente distinte che s'ottengon come quoziente non supera σ, che risulta dunque un carattere della superficie.

Consideriamo su F una curva (effettiva o virtuale) $C'-C$, essendo C una curva di F e C' una sua aggiunta. Sia m l'ordine di $C'-C$ ed A_1 sia una curva d'ordine $l>m$, che dia luogo ad una dimensione virtuale $n-\pi+$

$+p_a+1\geq 0$ (n, π grado e genere virtuali di A_1; p_a genere aritmetico di F), sicchè essa sia aritmeticamente effettiva. In forza di un teorema del Severi (Atti R. Ist. Veneto, 1906, pag. 638) si può allora affermare che A_1 individua un sistema algebrico completo, che la contiene totalmente (*). Lo designeremo con $\{A_1\}$.

Se su F vi sono dei sistemi continui $\{A\}$ dello stesso ordine di A_1, distinti da $\{A_1\}$ e soddisfacenti alle condizioni $n=[AA]=[AA_1]=[A_1A_1]$, un multiplo conveniente di A risulterà algebricamente equivalente all'equimultiplo di A_1, in modo che le A avranno lo stesso grado e lo stesso genere virtuali delle A_1, epperò $\{A\}$ sarà individuato da uno qualunque dei suoi sistemi lineari $|A|$. Il numero dei sistemi $\{A\}$ è finito (si tratta di sistemi di curve dello stesso ordine), onde possiamo designare tali sistemi con

$$\{A_1\},\{A_2\},\ldots,\{A_\sigma\}$$

includendovi $\{A_1\}$.

Sia $\{B_1\}$ un sistema soddisfacente alle stesse condizioni di $\{A_1\}$ (ordine $l'>m$, dimensione virtuale non negativa). Le curve $B_1+A_1-A_2$, $B_1+A_1-A_3$, ..., $B_1+A_1-A_\sigma$, avendo l'ordine $l'>m$ e dimensione virtuale non negativa, son effettive; per guisa che son individuati i sistemi continui

$$\{B_i\}=\{B_1+A_1-A_i\} \qquad (i=1,2,\ldots,\sigma)$$

soddisfacenti alle condizioni

$$[B_1B_1]=[B_1B_i]=[B_iB_i]$$

E siccome i sistemi $\{B_i\}$ sono distinti (chè altrimenti coin-

(*) Si badi che il sistema è individuato come totalità di sistemi lineari.

aderebbero due sistemi $\{A_i\}$), ne deriva che il numero dei sistemi $\{B\}$ soddisfacenti alla condizione di avere lo stesso ordine di $\{B_1\}$ e inoltre alle $[BB]=[BB_1]=[B_1B_1]$, è dato da $\sigma' \geq \sigma$. Partendo dai sistemi $\{B\}$ si arriva similmente alla conclusione $\sigma \geq \sigma'$. Dunque $\sigma = \sigma'$, epperò σ è un carattere di F.

Ciò posto, se C è una curva qualunque di F (effettiva o virtuale) e $D_1, \dots, D_\delta$ sono curve ottenute da C dividendo per l'intero λ, per guisa che $\lambda D_1 \equiv \lambda D_2 \equiv \dots \equiv \lambda D_\delta \equiv C$, senza che alcuna delle D sia equivalente algebricamente a qualche altra, dico che $\delta \leq \sigma$.

Consideriamo infatti la curva $A_1 + D_1 - D_i$, $(i = 1, 2, \dots, \delta)$. Poichè il suo ordine è $l > m$ e la dimensione virtuale è positiva, essa è effettiva. Ne segue che i sistemi $\{A_i'\} = \{A_1 + D_1 - D_i\}$ di curve dello stesso ordine di A_1 e soddisfacenti alle condizioni $[A_1 A_i] = [A_1 A_i'] = [A_i' A_i']$, sono compresi fra i sistemi $\{A_i\}$; epperò $\delta \leq \sigma$.

Il limite σ (definito nel modo esposto nella dimostrazione) è effettivamente raggiunto. Invero, esiste certo un intero λ per cui $\lambda A_1 \equiv \lambda A_2 \equiv \dots \equiv \lambda A_\sigma$ (basta prendere il minimo comune multiplo dei numeri λ_i soddisfacenti alle $\lambda_i A_1 \equiv \lambda_i A_i$) ed esiste una curva effettiva E, tale che $E + \lambda A_1$, ..., $E + \lambda A_\sigma$ appartengono al medesimo sistema continuo C (basta prendere la somma delle curve E_i tali che $E_i + \lambda A_1$, $E_i + \lambda A_i$ appartengano allo stesso sistema continuo). Allora la curva $C - E$, divisa per λ, dà luogo esattamente a σ curve $A_1, \dots, A_\sigma$ fra loro distinte.

Osservazione 1ª. — Superficie per cui la divisione è univoca sono le superficie più generali d'ordine m dello spazio ordinario (ciò segue da un classico teorema di

Noether) le superficie delle coppie di punti di due curve, distinte o coincidenti (Severi, 1903); le superficie, regolari o irregolari, con curva canonica d'ordine zero (Severi, 1908) epperò tutte le superficie iperellittiche di genere geometrico 1 (come la superficie di Kummer, la superficie d'onda); ecc.

Esempi di superficie in cui la divisione non è univoca, vengono dat da tutte le superficie di genere zero, che contengono curve pluricanoniche d'ordine zero (cioè che hanno $p_g = 0$ e qualche plurigenere $P_i = 1$). Se si tratta di superficie regolari, si ricade sulle superficie di Enriques (1906), che si riconducono birazionalmente a una superficie del 6° ordine, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro (essa ha $p_g = 0$, $P_2 = 1$); se si tratta di superficie irregolari, si ricade sulle superficie iperellittiche di rango 1, studiate da Enriques-Severi e da Bagnera-De Franchis (1907-08).

Osservazione 2ª. — Le curve $A_1 - A_i$ $(i = 1, \dots, \sigma)$ considerate nella dimostrazione del teorema, soddisfacendo a relazioni del tipo $\lambda_i (A_1 - A_i) \equiv 0$ $(\lambda_1 = 1)$, si possono chiamare curve divisori dello zero (la prima è addirittura la curva zero). Esse, in virtù del teorema del n° 140, sono rappresentate da cicli algebrici divisori dello zero (ivi compreso il ciclo nullo). Pertanto il teorema del presente numero si può anche ricavare come conseguenza del teorema topologico che i divisori dello zero su R_4 sono in numero finito. Le superficie su cui la divisione non è univoca offrono esempi di riemanniane a torsione bidimensionale (non nulla).

riderebbero due sistemi $\{A_i\}$), ne deriva che il numero dei sistemi $\{B\}$ soddisfacenti alla condizione di esere lo stesso ordine di $\{B_1\}$ e inoltre alle $[BB] = [BB_1] = [B_1 B_1]$, è dato da $\sigma' \geq \sigma$. Partendo dai sistemi $\{B\}$ si arriva similmente alla conclusione $\sigma \geq \sigma'$. Dunque $\sigma = \sigma'$, epperò σ è uno carattere di F.

Ciò posto, se C è una curva qualunque di F (effettiva o virtuale) e $D_1, \dots, D_\delta$ son o curve ottenute da C dividendo per l'intero λ, per guisa che $\lambda D_1 \equiv \lambda D_2 \equiv \dots \equiv \lambda D_\delta \equiv C$, senza che alcuna delle D sia equivalente algebricamente a qualche altra, dico che $\delta \leq \sigma$.

Consideriamo infatti la curva $A_1 + D_1 - D_i$, $(i = 1, 2, \dots, \delta)$. Poichè il suo ordine è $l > m$ e la dimensione virtuale è positiva, essa è effettiva. Ne segue che i sistemi $\{A'_i\} = \{A_1 + D_1 - D_i\}$ di curve dello stesso ordine di A_1 e soddisfacenti alle condizioni $[A_1 A_1] = [A_1 A'_i] = [A'_i A'_i]$, sono compresi fra i sistemi $\{A_i\}$; epperò $\delta \leq \sigma$.

Il limite σ (definito nel modo esposto nella dimostrazione) è effettivamente raggiunto. Invero, esiste certo un intero λ per cui $\lambda A_1 \equiv \lambda A_2 \equiv \dots \equiv \lambda A_\sigma$ (basta prendere il minimo comune multiplo dei numeri λ_i soddisfacenti alle $\lambda_i A_1 \equiv \lambda_i A_i$) ed esiste una curva effettiva E, tale che $E + \lambda A_1$, ..., $E + \lambda A_\sigma$ appartengono al medesimo sistema continuo C (basta prendere la somma delle curve E_i tali che $E_i + \lambda A_1$, $E_i + \lambda A_i$ appartengano allo stesso sistema continuo). Allora la curva $C - E$, divisa per λ, dà luogo esattamente a σ curve $A_1, \dots, A_\sigma$ fra loro distinte.

Osservazione 1ª. — Superficie per cui la divisione è univoca sono le superficie più generali d'ordine m dello spazio ordinario (ciò segue da un classico teorema di

Noether) le superficie delle coppie di punti di due curve, distinte o coincidenti (Severi, 1903); le superficie, regolari o irregolari, con curva canonica d'ordine zero (Severi, 1908) epperò tutte le superficie iperellittiche di genere geometrico 1 (come la superficie di Kummer, la superficie d'onda); ecc.

Esempi di superficie in cui la divisione non è univoca, vengono dat da tutte le superficie di genere zero, che contengono curve pluricanoniche d'ordine zero (cioè che hanno $p_g = 0$ e qualche plurigenere $P_i = 1$). Se si tratta di superficie regolari, si ricade sulle superficie di Enriques (1906), che si riconducono birazionalmente a una superficie del 6º ordine, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro (essa ha $p_g = 0$, $P_2 = 1$); se si tratta di superficie irregolari, si ricade sulle superficie iperellittiche di rango 1, studiate da Enriques - Severi e da Bagnera-De Franchis (1907 - 08).

Osservazione 2ª. — Le curve $A_1 - A_i$ $(i = 1, \dots, \sigma)$ considerate nella dimostrazione del teorema, soddisfacendo a relazioni del tipo $\lambda_i (A_1 - A_i) \equiv 0$ $(\lambda_1 = 1)$, si posson chiamare curve divisori dello zero (la prima è addirittura la curva zero). Esse, in virtù del teorema del nº 140, sono rappresentate da cicli algebrici divisori dello zero (ivi compreso il ciclo nullo). Pertanto il teorema del presente numero si può anche ricavare come conseguenza del teorema topologico che i divisori dello zero su R_4 sono in numero finito. Le superficie su cui la divisione non è univoca offrono esempi di riemanniane a torsione bidimensionale (non nulla).

Osservazione 3ª. - L'operazione di divisione delle curve di F per λ è analoga all'estrazione di radice d'indice λ, nel campo dei numeri. E come a quest'operazione si dà in ogni caso senso introducendo i numeri complessi, così qui si potrebbero introdurre delle curve ideali, che rendessero in ogni caso possibile l'operazione di divisione.

145. - Le operazioni $+(A_1 - A_i)$ $(i=1,2,\dots,\sigma)$, ove le A_i son le curve definite nel nº precedente, costituiscono ovviamente un gruppo abeliano G_σ, che il Severi (1910) ha chiamato gruppo fondamentale della divisione. Procedendo, come nel caso del gruppo fondamentale della torsione k-dimensionale (pag. 316) (la cui trattazione è ispirata, come s'è detto, alla teoria della base), si potranno determinare certe operazioni, sieno $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\tau$, del gruppo, formanti base entro G_σ, nel senso che ogni operazione del gruppo si potrà esprimere con una combinazione lineare $\lambda_1\Gamma_1 + \dots + \lambda_\tau\Gamma_\tau$, a coefficienti interi, delle operazioni della base, e queste sono ulteriormente irriducibili, cioè nessuna di esse può esprimersi con una simile combinazione lineare delle altre. Gli ordini (di ciclicità) delle operazioni $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau$, e sieno $t_1, \dots, t_\tau$, sono analoghi ai coefficienti di torsione e si potranno chiamare i coefficienti (fondamentali) della divisione.

La conoscenza dei divisori dello zero $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau$ permette subito di costruire su F una base minima per la totalità delle curve della superficie; cioè un insieme di un numero finito di curve, tali che ogni altra curva di F sia algebricamente equivalente a una combinazione lineare a coefficienti interi di quelle. Sia infatti $(C_1, \dots, C_\rho)$ una base intermediaria. Data una curva C qualunque di F, sarà:

$$\lambda C \equiv \lambda\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda\lambda_\rho C_\rho ,$$

colle λ interi, e quindi la curva $C - \lambda_1 C_1 - \dots - \lambda_\rho C_\rho$ è un divisore dello zero, algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi di $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau$. Dunque

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho + \mu_1\Gamma_1 + \dots + \mu_\tau\Gamma_\tau ,$$

ove anche le μ son interi. Pertanto $(C_1, \dots, C_\rho, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau)$ è una base minima. Se non ci si cura di aver la base minima costituita dal minimo numero possibile $\rho + \tau$ di curve, si potrà addirittura costruir la base minima aggiungendo $C_1, \dots, C_\rho$ le $\sigma - 1$ curve $A_1 - A_2, \dots, A_1 - A_\sigma$.

146. - In conseguenza di un notevolissimo teorema del Lefschetz (1921) (che caratterizza i cicli algebrici di R_4 come quelli che dànno luogo a periodi nulli per ogni integrale doppio di 1ª specie appartenente alla superficie) poichè lungo ogni ciclo divisore dello zero un integrale doppio qualunque di 1ª specie di F dà periodo nullo, si conclude che ogni divisore dello zero è un ciclo algebrico, epperò l'invariante σ è uguale all'indice di torsione superficiale σ_2 di R_4 (pag. 316), e quindi (pag. 319) anche all'indice di torsione lineare σ_1. Si ha cioè questo altro teorema di Lefschetz (1921):

L'invariante σ ha lo stesso valore degl'indici di torsione lineare e bidimensionale della superficie e il gruppo abeliano G_σ, fondamentale per la divisione, è oloedricamente isomorfo ai gruppi fondamentali di queste due torsioni.

147. - Nei riguardi del comportamento degl'inva-

Osservazione 3ª. – L'operazione di divisione delle curve di F per λ è analoga all'estrazione di radice d'indice λ, nel campo dei numeri. E come a quest'operazione si dà in ogni caso senso introducendo i numeri complessi, così qui si potrebbero introdurre delle curve ideali, che rendessero in ogni caso possibile l'operazione di divisione.

145. – Le operazioni $+(A_1 - A_i)$ $(i = 1, 2, \dots, \sigma)$, ove le A_i son le curve definite nel nº precedente, costituiscono ovviamente un gruppo abeliano G_σ, che il Severi (1910) ha chiamato gruppo fondamentale della divisione. Procedendo, come nel caso del gruppo fondamentale della torsione k-dimensionale (pag. 316) (la cui trattazione è ispirata, come s'è detto, alla teoria della base), si potranno determinare certe operazioni, sieno $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\tau$, del gruppo, formanti base entro G_σ, nel senso che ogni operazione del gruppo si potrà esprimere con una combinazione lineare $\lambda_1\Gamma_1 + \dots + \lambda_\tau\Gamma_\tau$, a coefficienti interi, delle operazioni della base, e queste sono ulteriormente irriducibili, cioè nessuna di esse può esprimersi con una simile combinazione lineare delle altre. Gli ordini (di ciclicità) delle operazioni $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau$, e sieno $t_1, \dots, t_\tau$, sono analoghi ai coefficienti di torsione e si potranno chiamare i coefficienti (fondamentali) della divisione.

La conoscenza dei divisori dello zero $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau$ permette subito di costruire su F una base minima per la totalità delle curve della superficie; cioè un insieme di un numero finito di curve, tali che ogni altra curva di F sia algebricamente equivalente a una combinazione lineare a coefficienti interi di quelle. Sia infatti $(C_1, \dots, C_\rho)$ una base

intermediaria. Data una curva C qualunque di F, sarà:

$$\lambda C \equiv \lambda\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda\lambda_\rho C_\rho \quad ,$$

colle λ interi, e quindi la curva $C - \lambda C_1 - \dots - \lambda_\rho C_\rho$ è un divisore dello zero, algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi di $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau$. Dunque

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho + \mu_1\Gamma_1 + \dots + \mu_\tau\Gamma \quad ,$$

ove anche le μ son interi. Pertanto $(C_1, \dots, C_\rho, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\tau)$ è una base minima. Se non ci si cura di aver la base minima costituita dal minimo numero possibile $\rho + \tau$ di curve, si potrà addirittura costruir la base minima aggiungendo $C_1, \dots, C_\rho$ le $\sigma - 1$ curve $A_1 - A_2, \dots, A_1 - A_\sigma$.

146. – In conseguenza di un notevolissimo teorema del Lefschetz (1921) (che caratterizza i cicli algebrici di R_4 come quelli che dànno luogo a periodi nulli per ogni integrale doppio di 1ª specie appartenente alla superficie) poichè lungo ogni ciclo divisore dello zero un integrale doppio qualunque di 1ª specie di F dà periodo nullo, si conclude che ogni divisore dello zero è un ciclo algebrico, epperò l'invariante σ è uguale all'indice di torsione superficiale σ_2 di R_4 (pag. 316), e quindi (pag. 319) anche all'indice di torsione lineare σ_1. Si ha cioè questo altro teorema di Lefschetz (1921):

L'invariante σ ha lo stesso valore degl'indici di torsione lineare e bidimensionale della superficie e il gruppo abeliano G_σ, fondamentale per la divisione, è oloedricamente isomorfo ai gruppi fondamentali di queste due torsioni.

147. – Nei riguardi del comportamento degl'inva-

Osservazione 3ª. – L'operazione di divisione delle curve di F per λ è analoga all'estrazione di radice d'indice λ, nel campo dei numeri. E come a quest'operazione si dà in ogni caso senso introducendo i numeri complessi, così qui si potrebbero introdurre delle *curve ideali*, che rendessero in ogni caso possibile l'operazione di divisione.

145. – Le operazioni $+(A_1-A_i)$ $(i=1,2,\dots,\sigma)$, ove le A_i son le curve definite nel nº precedente, costituiscono ovviamente un gruppo abeliano G_σ, che il *Severi* (1910) ha chiamato *gruppo fondamentale della divisione*. Procedendo, come nel caso del gruppo fondamentale della torsione k-dimensionale (pag. 316) (la cui trattazione è ispirata, come s'è detto, alla teoria della base), si potranno determinare certe operazioni, sieno $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\tau$, del gruppo, formanti base entro G_σ, nel senso che ogni operazione del gruppo si potrà esprimere con una combinazione lineare $\lambda_1\Gamma_1+\dots+\lambda_\tau\Gamma_\tau$, a coefficienti *interi*, delle operazioni della base, e queste sono ulteriormente irriducibili, cioè nessuna di esse può esprimersi con una simile combinazione lineare delle altre. Gli ordini (di ciclicità) delle operazioni $\Gamma_1,\dots,\Gamma_\tau$, e sieno $t_1,\dots,t_\tau$, sono analoghi ai coefficienti di torsione e si potranno chiamare i *coefficienti* (*fondamentali*) *della divisione*.

La conoscenza dei divisori dello zero $\Gamma_1,\dots,\Gamma_\tau$ permette subito di costruire su F una *base minima* per la totalità delle curve della superficie; cioè un insieme di un numero finito di curve, tali che ogni altra curva di F sia algebricamente equivalente a una combinazione lineare a coefficienti interi di quelle. Sia infatti $(C_1,\dots,C_\rho)$ una base

intermediaria. Data una curva C qualunque di F, sarà:

$$\lambda C \equiv \lambda\lambda_1 C_1+\dots+\lambda\lambda_\rho C_\rho ,$$

colle λ interi, e quindi la curva $C-\lambda_1 C_1-\dots-\lambda_\rho C_\rho$ è un divisore dello zero, algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi di $\Gamma_1,\dots,\Gamma_\tau$. Dunque

$$C \equiv \lambda_1 C_1+\dots+\lambda_\rho C_\rho+\mu_1\Gamma_1+\dots+\mu_\tau\Gamma ,$$

ove anche le μ son interi. Pertanto $(C_1,\dots,C_\rho,\Gamma_1,\dots,\Gamma_\tau)$ è una base minima. Se non ci si cura di aver *la base minima costituita dal minimo numero possibile* $\rho+\tau$ *di curve*, si potrà addirittura costruir la base minima aggiungendo $C_1,\dots,C_\rho$ le $\sigma-1$ curve $A_1-A_2,\dots,A_1-A_\sigma$.

146. – In conseguenza di un notevolissimo teorema del *Lefschetz* (1921) (che caratterizza i cicli algebrici di R_4 come quelli che dànno luogo a periodi nulli per ogni integrale doppio di 1ª specie appartenente alla superficie) poichè lungo ogni ciclo divisore dello zero un integrale doppio qualunque di 1ª specie di F dà periodo nullo, si conclude che ogni divisore dello zero è un ciclo algebrico, epperò l'invariante σ è uguale all'indice di torsione superficiale σ_2 di R_4 (pag. 316), e quindi (pag. 319) anche all'indice di torsione lineare σ_1. Si ha cioè questo altro teorema di *Lefschetz* (1921):

L'invariante σ ha lo stesso valore degl'indici di torsione lineare e bidimensionale della superficie e il gruppo abeliano G_σ, fondamentale per la divisione, è oloedricamente isomorfo ai gruppi fondamentali di queste due torsioni.

147. – Nei riguardi del comportamento degl'inva-

rianti ρ, σ, di fronte alle trasformazioni birazionali della superficie, si vede facilmente che ρ aumenta (o diminuisce) di un'unità per ogni curva eccezionale di 1ª specie che s'introduca (o sparisca) nella trasformazione, mentre σ non muta. Dunque ρ è un invariante relativo e σ un invariante assoluto.

148. – Nota sulla superficie F una base qualunque (anche non intermediaria) $(C_1, C_2, \dots, C_\rho)$, se due curve C, D sono legate alla base dalle relazioni

$$(5) \qquad \lambda C + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho \equiv 0, \quad \mu D + \mu_1 C_1 + \dots + \mu_\rho C_\rho \equiv 0,$$

segando i due membri della prima con D e i due membri della seconda con C_i $(i = 1, \dots, \rho)$ ed eliminando fra le $\rho + 1$ equazioni lineari, che così s'ottengono, le $[C_1 D], \dots, [C_\rho D]$, risulta

$$(6) \qquad [CD] = \frac{1}{\lambda\mu} \sum n_{ik} \lambda_i \mu_k \quad (n_{ik} = [C_i C_k])$$

In particolare il grado virtuale $[CC]$ di C viene espresso da:

$$(7) \qquad [CC] = \frac{1}{\lambda\mu} \sum n_{ik} \lambda_i \lambda_k$$

Segando i due membri della prima delle (5) con $D, C_1, \dots, C_\rho$ ed eliminando fra le equazioni risultanti $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_\rho$, viene:

$$(8) \qquad [CD] = \sum \Delta'_{ik} [CC_i][DC_k] \quad ,$$

ove Δ'_{ik} è l'elemento generico del determinante reciproco del discriminante della base. In particolare risulta:

$$(9) \qquad [CC] = \sum \Delta'_{ik} [CC_i][CC_k]$$

La (8) esprime il teorema di Bézout sulla F, perchè fornisce il numero dei punti comuni alle C, D in funzione di quelli che si posson chiamare gli ordini delle due curve rispetto alla base. Nel caso del piano si ricade nell'ordinario teo-

rema di Bézout; nel caso delle rigate in una nota formula di C. Segre; ecc.

Naturalmente anche il genere virtuale di C può in modo molto semplice esprimersi mediante gli ordini di C e i caratteri della base. (La formula trovasi nella prima Memoria del Severi sulle base).

149. – Nell'ultima Memoria sulle base (1910) il Severi mostra che si può scegliere su F una base intermediaria $(C_1, \dots, C_\rho)$ siffatta che la determinazione delle curve effettive di grado positivo $\lambda^2 n$, sulla F, si riduce al problema aritmetico di rappresentare n mediante la forma quadratica $\sum n_{ik} \lambda_i \lambda_k$ $(n_{ik} = [C_i C_k])$. Ad ogni valor di n rispondono infinite curve le quali, per un dato λ (maggiore d'un conveniente limite), si distribuiscono in σ sistemi continui distinti, ottenibili l'uno dall'altro mediante le operazioni di G_σ. La forma quadratica considerata dicesi fondamentale per la base. Si dimostra che le somme quadratiche fondamentali relative alle diverse basi intermediarie son tutte propriamente o impropriamente equivalenti (cioè si passa dall'una all'altra mediante sostituzioni lineari a coefficienti interi, di modulo ± 1). Pertanto si può parlare di forma quadratica fondamentale della superficie.

Se la superficie F è regolare, e possiede un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali, quel gruppo si rispecchia in un gruppo isomorfo (oloedricamente o meriedricamente, ma con indice di meriedria finito) di trasformazioni lineari a coefficienti interi, di modulo ± 1, mutanti in sè la forma quadratica fondamentale.

Ciò rende possibile la ricerca di superficie regolari con gruppi discontinui di trasformazioni birazionali, riducendosi la questione a problemi di teoria dei numeri. Un elegante esempio in proposito è stato dato dallo stesso Severi, che ha determinato (1910) il gruppo infinito discontinuo di tutte le trasformazioni birazionali, che mutano in sè una superficie del 4° ordine (dello spazio ordinario) passante per una sestica di genere due(*); dal Fano e da altri.

Complementi varii.

Aggiunta a pag. 71. -- Una V_{2r} di tipo ellittico ammette sempre, nello spazio $S_{r(r+2)}$ cui appartiene, qualche iperpiano che non la incontra in punti reali; e quindi può trasformarsi omograficamente in una V_{2r} finita (tutta contenuta in una conveniente ipersfera dell'ambiente).

Aggiunta a pag. 85. -

a) Definita una corrispondenza biunivoca bicontinua fra due insiemi I, K col porre la condizione che ad ogni punto d'accumulazione appartenente ad un insieme comunque scelto in uno qualsiasi dei due dati, corrisponda sempre un punto d'accumulazione dell'insieme omologo nell'altro, la definizione ha senso indipendentemente dall'ipotesi che i due insiemi I, K sieno completi, pur accadendo, in tal caso, che entro ciascuno degl'insiemi non vale il criterio di Bolzano, nè, quindi, il criterio di convergenza di Cauchy.

Però affinchè la condizione della continuità non resti lettera morta nei riguardi di talune coppie di elementi corrispondenti dei due insiemi, occorre che gl'insiemi I, K sieno dovunque densi (cioè che ogni punto di I o di K sia punto di accumulazione di punti dello stesso insieme). Così è per es. dei due insiemi di punti razionali dei piani (x, y) $(x'y')$, tra i quali può porsi la corrispondenza biunivoca bicontinua $x = x'$, $y = y'$.

(*) Sulla qual superficie già il Fano aveva dimostrato (1906) l'esistenza di trasformazioni birazionali non periodiche.

b) Nella topologia di solito una n-cellula ipersferica si definisce come la totalità dei punti interni ad una n-sfera di S_n, escludendo i punti del contorno. Questo è vantaggioso per la perfetta aderenza del linguaggio al concetto di n-complesso (pag. 165); chè nell'associare ad un $(n-1)$-complesso C_{n-1} un certo insieme di n-cellule, aventi ognuna per contorno un $(n-1)$-ciclo di C_{n-1}, i punti delle $(n-1)$-cellule di C_{n-1} vengon a figurare due volte nel discorso, se la n-cellula è definita includendovi i punti del contorno. Una volta invero essi vi figurano come punti di C_{n-1} ed una volta come punti delle n-cellule che si aggiungono. Ma avvertito ciò, la definizione di n-cellula coll'inclusione dei punti del contorno, apparisce vantaggiosa sotto molti altri aspetti.

c) Un cambiamento della terminologia usata nella teoria degl'insiemi, ove si voglian evitare dissonanze col linguaggio usato nella topologia, la quale pure abbisogna di quella teoria, sembra assolutamente necessario (un cerchio col suo contorno è chiuso per Cantor e aperto per la topologia, appunto perchè ha un contorno). Ma forse la denominazione di insieme completo per insieme contenente il suo derivato (insieme chiuso di Cantor) non è felice, perchè la parola completo è usata in senso diverso, ancorchè simile, nella moderna teoria degl'insiemi astratti (ved. Les espaces abstraits di Fréchet, Paris, Gauthier-Villars, 1928, pag. 74). (Completo è un insieme astratto in cui vale il criterio di convergenza di *Cauchy*). Potrebbe forse esser più opportuna la seguente nomenclatura, alla quale ci atterremo nelle aggiunte ulteriori.

Insieme *finito* = insieme i cui punti hanno a due a due distanze minori d'un segmento fisso.

Insieme *chiuso* = insieme senza contorno topologico.

Insieme *aperto* = insieme possedente contorno topologico.

Aggiunta a pag. 86. –

La definizione di *insieme continuo* si può dare con *Cantor* o con *Jordan*. Secondo *Cantor* un insieme continuo è un insieme limitato (usiamo la terminologia dell'aggiunta precedente) e *concatenato* (ciò tale che, dato comunque un segmento ε, due punti qualunque dell'insieme possan esser congiunti da una poligonale di lati $< \varepsilon$, i cui vertici appartengono all'insieme). Per *Jordan* un insieme continuo è un insieme limitato non repartibile in due sistemi limitati privi di punti comuni (*disgiunti*).

La definizione di *Jordan* è più generale di quella di *Cantor*, in quanto insiemi continui nel senso di J. posson non esserlo nel senso di C., ma non viceversa. D'altronde, come osserva giustamente il *Fréchet* (op. cit. pag. 262) la definizione di J. è più conforme all'intuizione. Le due definizioni coincidono per gl'insiemi finiti e, nel campo degli spazi astratti, per gli insiemi che *Fréchet* chiama *compatti*.

Noi intendiamo adottata per gl'insiemi continui la definizione di *Jordan*.

Un segmento è un insieme continuo.

Infatti, se I, K son due insiemi limitati in cui è stato repartito l'insieme dei punti di un segmento s, preso un punto P di I, se è di accumulazione per K, appartiene

a K; se non è di accumulazione per K, l'insieme dei segmenti PQ a destra di P, che non contengono punti di K, ma soltanto punti di I, ha un estremo superiore PQ'. Ora o Q' è un estremo di s, oppure è di accumulazione per punti di K; ma siccome è di accumulazione anche per punti di I, appartiene ad I; cioè anche in tal caso troviamo un punto comune a I, K. Se Q' è un estremo di s, a sinistra di P si avrà un punto analogo R', che non potrà esser l'altro estremo di s, se no K mancherebbe; epperò R' sarà comune a I, K. In ogni caso dunque I, K hanno qualche punto comune, e quindi s è un continuo.

Si osserverà che il *postulato della continuità* (sotto una forma o sotto un'altra) interviene quando si afferma l'esistenza dell'estremo superiore PQ' dei segmenti PQ.

Aggiunta a pag. 93. –

Quanto è esposto nel § XI circa le linee (e in particolare la invarianza topologica del concetto di contorno e di versi) si può conseguire molto più rapidamente, come il *Severi* ha mostrato nella Nota, *Le curve intuitive* (Rend. di Palermo, 1930), ove sono altresì determinati i rapporti tra quei concetti topologici e i concetti intuitivi (metrico-proiettivi) corrispondenti. È interessante, come fa il *Fréchet* (op. cit. pag. 148), raffrontare il concetto di *curva piana di Jordan*, col concetto di una *curva piana di Cantor* (insieme piano continuo, non avente, come insieme piano, punti *interni*, cioè punti tali che in un intorno piano, abbastanza piccolo, di ognuno di essi, non vi sieno che punti dell'insieme) ed estendere la definizione cantoriana alle linee dello spazio, profittando della nozione importante, dovuta al *Fréchet*, di *tipo di dimension*

Le curve cantoriane son più generali di quelle di Jordan.

Aggiunta a pag. 104.-

L'uso che qui si fa del postulato di Zermelo, sia pure in una forma ristretta, che può essere da chiunque accettata, è evitabile osservando che è possibile fissare una legge contenente un numero finito di alternative, mediante la quale, dato un qualunque insieme finito e limitato di punti, resta univocamente determinato (scelto) un suo punto.

Ecco qual'è la legge: Se l'insieme I, che si considera, è di punti sulla retta, si sceglierà il suo estremo superiore, che appartiene ad I (il quale per ipotesi è limitato).

Se I è un insieme di punti del piano, fissati due assi cartesiani x, y, le proiezioni dei punti di I su x formano un insieme finito (è evidente!) e limitato (si prova agevolmente col teorema relativo all'esistenza del punto di Weierstrass corrispondente all'estremo inferiore delle distanze dei punti di I dalla parallela all'asse y per un punto di accumulazione delle suddette proiezioni su x) K, ed entro questo, colla legge precedente, si sceglierà un punto P. Dall'insieme L dei punti di I, che hanno per proiezione P, situati cioè sopra una parallela all'asse y, che s'intenderà naturalmente orientata come y, si sceglierà un punto colla legge precedentemente fissata.

È chiaro che questo modo di determinar la legge di scelta si può estendere ad insiemi appartenenti ad uno spazio euclideo a un numero qualunque n, dato di dimensioni.

Ne deriva che data in un S_n una successione $I_1, I_2, I_3, \ldots$ di insiemi finiti e limitati di punti, è sempre possibile fissare un criterio di scelta che determini univocamente, per ciascuno di quegli insiemi, un punto ad esso appartenente.

La successione $P_1, P_2, P_3, \ldots$ considerata a pag. 104 si costruisce allora, mercè il suddetto criterio di scelta, estraendo un punto da ciascuno degl'insiemi $L_1, L_2, L_3, \ldots$. Si avvertirà che questi insiemi (finiti) son limitati, in quanto L_1, per es., è costituito dai punti del dato insieme I, che appartengono ad una certa corona ipersferica, contorno incluso; onde L_1 risulta limitato, tale essendo I. E analogamente per $L_2, L_3, \ldots$. Potrà, è vero, accadere, che due insiemi successivi, come L_1, L_2, abbiano qualche punto comune, sopra la parte di contorno comune alle due corone, cui L_1, L_2 appartengono. Ma ciò non produrrà inconveniente alcuno, perchè porterà soltanto la conseguenza che punti consecutivi della successione $P_1, P_2, P_3, \ldots$ potranno coincidere.

Aggiunta a pag. 88 - [che si mette a questo punto, anzichè prima dell'aggiunta a pag. 93, perchè nell'attuale aggiunta si profitta di concetti (relativi alle linee) introdotti dopo la pag. 88]. Diamo qui notizie più complete circa la invarianza topologica del concetto di dimensione d'una varietà. Tale invarianza è stata dimostrata da Lebesgue e da Brouwer nel 1911 (e più semplicemente da Lebesgue nel 1924) dal punto di vista generale dei tipi di dimensione, provando cioè che uno spazio cartesiano ad un numero finito n di dimensioni (cartesiano nel senso di Menger) non può essere omeomorfo ad un insieme di punti appartenenti ad uno spazio cartesiano di dimensione $< n$. In particolare il risultato vale per gli spazi euclidei, che sono speciali spazi cartesiani.

È ormai classico, che, in seguito all'osservazione di Cantor, che può porsi una corrispondenza biunivoca fra i punti d'un quadrato e quelli d'un segmento (e più in generale che tutti i continui hanno la stessa potenza), si trovò necessario di distinguere il concetto di potenza d'un continuo, da quello di dimensione, legando quest'ultimo, non più alle corrispondenze biunivoche (come si faceva avanti Cantor), ma agli omeomorfismi. Il Netto dimostrò pel primo che una corrispondenza come quella che il Cantor aveva posto tra un quadrato o un segmento, non poteva esser continua ed il Lüroth dimostrò poi (1899, 1907) l'impossibilità di porre un omeomorfismo tra un piano ed una retta o tra lo spazio e un piano, dal che veniva riabilitata la concezione intuitiva di dimensione d'un continuo. Ecco una semplicissima dimostrazione dei teoremi di Netto e di Lüroth, che è stata esposta dal Severi, insieme alle riflessioni d) relative al teorema generale dell'invarianza delle dimensioni, al Congresso della Società spagnuola pel progresso delle scienze, tenutosi a Barcellona nel maggio 1929 (*).

a) Teorema di Netto: Un quadrato non può esser omeomorfo ad un segmento.

Premettiamo che una figura finita convessa F omeomorfa ad un segmento, è un segmento (**). Invero, agli estremi

(*) Del teorema di Netto, come s'è detto a pag. 88 (ove però la citazione ha tal forma da attribuire alla noticina del Bachiller una portata che non ha, perchè essa riferiscesi soltanto alla prima osservazione di Netto e non al teorema generale di Brouwer) è stata data un'altra dimostrazione molto semplice da T. R. Bachiller.

(**) S'intende figura "convessa" nel senso che il segmento che ne congiunge due punti qualunque appartiene sempre alla figura (Minkowski, Peano). Il segmento, eventualmente privato d'un estremo o di entrambi, è l'unica

A, B del segmento corrispondono in F due punti A', B', determinanti un segmento $A'B'$, appartenente ad F. Ai punti di $A'B'$ corrispondono in AB punti di un insieme continuo I, che coincide con AB (l'ipotesi che in AB esista un punto non appartenente ad I, epperò necessariamente interno ad AB, porta infatti la divisione di I in due insiemi limitati e disgiunti).

Poichè un quadrato è una figura convessa, segue, come immediato corollario, il teorema di Netto.

b) 1° teorema di Lüroth: Il piano non è omeomorfo alla retta.

Premettiamo l'osservazione banale che "se un insieme I di punti della retta è limitato e infinito, si può da esso estrarre un insieme di infiniti punti, non avente alcun punto di accumulazione (s'intende al finito)". Prendasi invero un punto P_1 di I e sia per es. I infinito a destra. Scelgasi inoltre una lunghezza l. Tra i punti di I a destra di P_1 ve ne saranno infiniti distanti da P_1 non meno di l. Il loro estremo inferiore P_2 appartiene ad I. Fra i punti di I a destra di P_2 ve ne sono infiniti distanti da P_2 non meno di l. Il loro estremo inferiore P_3 appartiene ad I. Così proseguendo si ottiene l'insieme voluto $P_1, P_2, P_3, \ldots$

Ciò posto, se esistesse un omeomorfismo tra un piano α ed una retta a, ad un quadrato Q di α risponderebbe in a un insieme Q' (perfetto e continuo), necessariamente

figura convessa rettilinea. Ved. a pag. 260 dell'Appendice al vol. I dell'edizione spagnuola degli Elementi di geometria di F. Severi (Editorial Labor, Barcellona, 1929). Ved. altresì una nota del Severi, Sull'estensione delle figure convesse nel Bollettino di matematica (Bologna, 1929).

finito. Perchè se Q' fosse infinito, da esso potrebbe estrarsi un insieme I' di infiniti punti, privo di punti di accumulazione e ad I' corrisponderebbe in Q un insieme I d'infiniti punti privo (a causa dell'omeomorfismo) di punti d'accumulazione. Ciò contraddice al teorema di Bolzano. L'ipotesi che Q' sia infinito è dunque assurda. Sieno A', B' gli estremi, inferiore e superiore, di Q'. Nel segmento $A'B'$ non può esistere alcun punto (interno) M', non appartenente a Q' (se no Q' si ripartirebbe in due insiemi limitati disgiunti). Dunque il segmento $A'B'$ è il luogo dei punti corrispondenti a Q nel dato omeomorfismo: contrariamente al teorema di Netto. L'ipotesi che esista un omeomorfismo tra α ed a è pertanto assurda.

Il ragionamento precedente prova pure che un insieme piano di punti, possedente un interno(*), non può esser omeomorfo ad un insieme di punti della retta, perchè un punto interno può sempre considerarsi come appartenente a un cerchio (o quadrato o triangolo) tutto formato da punti dell'insieme: donde la conclusione.

c) Passiamo ora a dimostrare il secondo teorema di Lüroth, che lo spazio non può esser omeomorfo al piano. Anzi (seguendo l'accennata comunicazione del Severi) proveremo, più in generale, che un insieme spaziale di punti, avente un interno, non può esser omeomorfo ad un insieme piano di punti (avente un interno(**)).

Sia S una sfera riempita da punti del dato insieme e

(*) Un insieme di punti di uno spazio (euclideo) S_n si dice che ha un interno quando contiene qualche n-sfera.

(**) Questa ipotesi è superflua, ma meno facilmente eliminabile.

P, Q sieno due punti distinti interni ad S. Esista, se è possibile, un omeomorfismo tra S e un insieme piano S'; P', Q' denotino i punti di S' omologhi di P, Q, e supponiamo che P' sia un punto interno all'insieme S'. Indichiamo infine con α il cerchio sezione di S con un piano per PQ.

Attesa la continuità della corrispondenza, scelto comunque un raggio ρ' (e lo sceglieremo $< P'Q'$), è possibile determinare un intorno di un certo raggio ρ, del punto P, sul cerchio α, tale che gli omologhi dei punti di quell'intorno cadano tutti sul cerchio di raggio ρ' e centro P'. Impiccolendo, se occorre, ρ, in modo da renderlo $< PQ$, la proprietà non cessa di sussistere; sicchè alle circonferenze di centro P e di raggio $< \rho$, situate in α, rispetto alle quali Q è un punto esterno, corrispondono in S' linee di Jordan chiuse, semplici e non intrecciate, rispetto alle quali Q' è esterno(*). E siccome queste, col tendere a zero dei raggi delle rispettive circonferenze, tendono al punto P', se non esistesse in S' alcun punto interno rispetto a qualcuna di queste linee, in un intorno comunque piccolo di P' vi sarebbero sempre punti non appartenenti ad S', epperò P' non sarebbe interno all'insieme. Esiste perciò qualche linea γ' cui corrisponde una circonferenza γ di centro P tale che vi sono in S' punti interni rispetto ad essa e punti esterni (per es. il punto Q'). Inoltre ai punti di α, esterni rispetto a γ, rispondon punti di S', che son tutti esterni o tutti interni rispetto a γ', perchè due di essi posson sempre esser congiunti da una linea di Jordan non incontrante γ'. E siccome al punto esterno Q risponde il punto esterno Q', ai punti di α esterni rispetto a γ, ri-

(*) Qui e nel seguito si fa uso del classico teorema di Jordan che una linea piana omeomorfa ad una circonferenza divide il piano in due regioni (dei punti interni e dei punti esterni).

spondon punti di S' esterni rispetto a γ'.

Ora, se R' è un punto qualunque di S', interno rispetto a γ', il punto R, che gli corrisponde in S, non può star fuori di α, nè essere un punto esterno rispetto a γ, perchè, in caso contrario, esisterebbe una linea di Jordan congiungente R con un punto M di α esterno rispetto a γ e non incontrante γ; e ad essa, corrisponderebbe in S' una linea di Jordan congiungente il punto interno R' col punto esterno M', senza che la linea stessa incontrasse γ': il che è assurdo. Dunque ad ogni punto di S', interno rispetto a γ', corrisponde un punto di α interno rispetto a γ; e viceversa ad ogni siffatto punto corrisponde un punto interno rispetto a γ', perchè due punti omologhi di due punti interni rispetto a γ, posson sempre esser congiunti da una linea non segante γ'.

Similmente, se R' è un punto di S', esterno rispetto a γ', il punto omologo R non può star fuori di α, perchè altrimenti al segmento RM, che va ad un punto M interno rispetto a γ risponderebbe una linea congiungente un punto esterno con un punto interno rispetto a γ', e non incontrante γ'; il che è assurdo. Dunque gli omologhi dei punti di S' son tutti sul cerchio α, contrariamente al supposto. Il teorema è così dimostrato.

d) Ammesso il teorema di Jordan generalizzato (Lebesgue - Brouwer), che cioè in S_n una varietà omeomorfa ad un n-sfera divide lo spazio in due regioni, il ragionamento c) si estende senz'altro e porta alla conclusione che un insieme di punti avente un interno, entro uno spazio S_n, non può essere omeomorfo ad un insieme (avente un interno) appartenente ad uno spazio a un minor numero di dimensioni.

E infine, ammesso il teorema di Jordan negli spazi cartesiani (nel senso di Menger), se ne deduce in modo analogo il teorema dell'invarianza topologica della dimensione, nel senso più lato di Lebesgue - Brouwer, che è quello dei "tipi di dimensione" di Fréchet.

Poichè anche l'invarianza topologica del concetto di contorno di una varietà topologica, deriva facilmente, come si è visto, dal teorema di Jordan generalizzato, si conclude che il solo punto d'appoggio delle questioni fondamentali di topologia (dimensione e contorno) è il teorema di Jordan generalizzato.

Aggiunta a pag. 105. -

Oltre ai modi di dimostrazione accennati del teorema di Schoenflies - Lebesgue - Brouwer (il quale si enuncia in generale dicendo che in due insiemi finiti e limitati omeomorfi di due spazi cartesiani dello stesso numero n di dimensioni, si corrispondono i punti interni, epperò i punti contorno), si può dare un'altra dimostrazione poggiata sulla più semplice proprietà che una $(n-1)$-cellula non singolare interna ad una n-sfera di S_n non ne rompe la connessione. Ecco come da ciò si deduce che in due n-sfere Σ, Σ' omeomorfe i contorni si corrispondono. Se esistesse un punto P del contorno di Σ, cui non rispondesse un punto del contorno di Σ', si potrebbe determinare un n-intorno di P in cui non cadessero punti omologhi di punti del contorno di Σ', e quindi si potrebbe praticare una sezione T di Σ, con un iperpiano I abbastanza vicino a P, tale che alla $(n-1)$-sfera T corrispondesse in Σ' una $(n-1)$-cellula non singolare T' interna a Σ'. La T divide Σ in due parti, aventi per comune contorno T e situate da bande opposte di I. A due punti

A, B, rispettivamente interni a queste due parti, rispondono due punti A', B' di Σ', non giacenti su T', e quindi congiungibili con una linea l' di Jordan, situata in Σ', e non incontrante T'. Ad essa risponde una linea l di Jordan congiungente A, B e non incontrante T. Ciò è assurdo, perchè il continuo l sarebbe repartibile in due insiemi limitati disgiunti, costituiti dai punti di l situati da una parte e dall'altra di I.

Aggiunta a pag. 122. -
L'estremo superiore delle distanze dei punti di I' da I e dei punti di I' da I può assumersi come distanza dei due insiemi di punti I, I' entro M_n (ved. la Nota del Severi, Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili, Atti della R. Accademia dei Lincei, 1929). Questa distanza, quando i due insiemi sieno limitati, soddisfa alle condizioni poste dal Fréchet (op. cit. pag. 55) per poter assumere un numero come distanza di due elementi entro uno spazio astratto (come sarebbe quello degli insiemi limitati di punti di M_n).

Aggiunta a pag. 131. -
Le cose esposte nei nn.i 48, 49, 50 formano oggetto, insieme ad altro e con qualche semplificazione, di due Note di F. Severi e di B. Segre (Un paradosso topologico; Ancora sopra un paradosso topologico, negli Atti dei Lincei, 1929).

Aggiunta a pag. 142. -
Gli argomenti trattati nelle Osservazioni del n.o 51, nonchè nei nn.i 53, 54 sino a tutta la pag. 156, formano oggetto, insieme ad altro e con molteplici semplificazioni, della citata Nota di F. Severi, Le curve intuitive, nei Rend.

di Palermo, 1930.

Aggiunta a pag. 138. -
Circa la più opportuna rappresentazione del campo di variabilità di due variabili complesse x, y, vedasi la Nota del Severi citata nell'aggiunta a pag. 122. Si vedrà da questa Nota come, prendendo ... modello del campo suddetto la varietà V_4^6 di C. Segre ... si risponda per es. in modo del tutto naturale alla questione di caratterizzare le funzioni analitiche di x, y, che sieno olomorfe (come funzioni delle due variabili indipendenti) in tutti i punti di una varietà lineare $ax+by+c=0$ o di una varietà algebrica $\varphi(x,y)=0$. Si dimostra che tali funzioni son necessariamente costanti. -

Errata - Corrige

Pag.	Riga	Dal	Errata	Corrige
10	5	alto	omoloidica	omaloidica
16	2	basso	intersezionale	intersezione
18	1	basso	contata	contato
19	12	alto	v	v
21	7	alto	. . . . Sopprimere la prima $\mathfrak{L}$	
64	2	basso	complementare . . .	completamente
80	7	alto	autogoniugata . . .	autoconiugata
83	4	alto	appogiano	appoggiano,
106	8	alto	estenzione	estensione.
111	5	basso	aggiungere dopo il; la frase "i vertici di R' son i punti $P^{(i)}$;"	
133	14	alto	sulla varietà stessa	sulle varietà stesse

A, B, rispettivamente interni a queste due parti, rispondono due punti A', B' di Σ', non giacenti su T', e quindi congiungibili con una linea l' di Jordan, situata in Σ', e non incontrante T'. Ad essa risponde una linea l di Jordan congiungente A, B e non incontrante T. Ciò è assurdo, perchè il continuo l sarebbe repartibile in due insiemi limitati disgiunti, costituiti dai punti di l situati da una parte e dall'altra di I.

Aggiunta a pag. 122. -

L'estremo superiore delle distanze dei punti di I' da I e dei punti di I' da I può assumersi come distanza dei due insiemi di punti I, I' entro M_n (ved. la Nota del Severi, Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili, Atti della R. Accademia dei Lincei, 1929). Questa distanza, quando i due insiemi sieno limitati, soddisfa alle condizioni poste dal Fréchet (op. cit. pag. 55) per poter assumere un numero come distanza di due elementi entro uno spazio astratto (come sarebbe quello degli insiemi limitati di punti di M_n).

Aggiunta a pag. 131. -

Le cose esposte nei nn.i 48, 49, 50 formano oggetto, insieme ad altro e con qualche semplificazione, di due Note di F. Severi e di B. Segre (Un paradosso topologico; Ancora sopra un paradosso topologico, negli Atti dei Lincei, 1929).

Aggiunta a pag. 142. -

Gli argomenti trattati nelle Osservazioni del n° 51, nonchè nei nn.i 53, 54 sino a tutta la pag. 156, formano oggetto, insieme ad altro e con molteplici semplificazioni, della citata Nota di F. Severi, Le curve intuitive, nei Rend.

di Palermo, 1930.

Aggiunta a pag. 188. -

Circa la più opportuna rappresentazione del campo di variabilità di due variabili complesse x, y, vedasi la Nota del Severi citata nell'aggiunta a pag. 122. Si vedrà da questa Nota come, prendendo per modello del campo suddetto la varietà V_4^6 di C. Segre, si risponda per es. in modo del tutto naturale alla questione di caratterizzare le funzioni analitiche di x, y, che sieno olomorfe (come funzioni delle due variabili indipendenti) in tutti i punti di una varietà lineare $a x + b y + c = 0$ o di una varietà algebrica $\varphi(x, y) = 0$. Si dimostra che tali funzioni son necessariamente costanti. -

Errata - Corrige

Pag.	Riga	Dal	Errata	Corrige
10	5	alto	omoloidica	omaloidica
16	2	basso	intersezionale	intersezione
18	1	basso	contata	contato
19	12	alto	v	v
21	7	alto	. . . . . .	Sopprimere la prima L
64	2	basso	complementare . . .	completamente
80	7	alto	autogoniugata . . .	autoconiugata
83	4	alto	appogiano	appoggiano,
106	8	alto	estenzione	estensione.
111	5	basso	aggiungere dopo il; la frase "i vertici di R' son i punti $P^{(i)}$;"	
133	14	alto	sulla varietà stessa	sulle varietà stesse

A, B, rispettivamente interni a queste due parti, rispondono due punti A', B' di Σ', non giacenti su T', e quindi congiungibili con una linea l' di Jordan, situata in Σ', e non incontrante T'. Ad essa risponde una linea l di Jordan congiungente A, B e non incontrante T. Ciò è assurdo, perchè il continuo l sarebbe repartibile in due insiemi limitati disgiunti, costituiti dai punti di l situati da una parte e dall'altra di I.

Aggiunta a pag. 122. -

L'estremo superiore delle distanze dei punti di I' da I' e dei punti di I' da I può assumersi come distanza dei due insiemi di punti I, I' entro M_n (ved. la Nota del Severi, Sull'insieme dei punti singolari di una funzione analitica di più variabili, Atti della R. Accademia dei Lincei, 1929). Questa distanza, quando i due insiemi sieno limitati, soddisfa alle condizioni poste dal Fréchet (op. cit. pag. 55) per poter assumere un numero come distanza di due elementi entro uno spazio astratto (come sarebbe quello degli insiemi limitati di punti di M_n).

Aggiunta a pag. 131. -

Le cose esposte nei nn.i 48, 49, 50 formano oggetto, insieme ad altro e con qualche semplificazione, di due Note di F. Severi e di B. Segre (Un paradosso topologico; Ancora sopra un paradosso topologico, negli Atti dei Lincei, 1929).

Aggiunta a pag. 142. -

Gli argomenti trattati nelle Osservazioni del n.º 51, nonchè nei nn.i 53, 54 sino a tutta la pag. 156, formano oggetto, insieme ad altro e con molteplici semplificazioni, della citata Nota di F. Severi, Le curve intuitive, nei Rend.

di Palermo, 1930.

Aggiunta a pag. 188. -

Circa la più opportuna rappresentazione del campo di variabilità di due variabili complesse x, y, vedasi la Nota del Severi citata nell'aggiunta a pag. 122. Si vedrà da questa Nota come, prendendo per modello del campo suddetto la varietà V_4^6 di C. Segre, si risponda per es. in modo del tutto naturale alla questione di caratterizzare le funzioni analitiche di x, y, che sieno olomorfe (come funzioni delle due variabili indipendenti) in tutti i punti di una varietà lineare $ax + by + c = 0$ o di una varietà algebrica $\varphi(x, y) = 0$. Si dimostra che tali funzioni son necessariamente costanti. -

Errata - Corrige

Pag.	Riga	Dal	Errata	Corrige
10	5	alto	omoloidica	omaloidica
16	2	basso	intersezionale	intersezione
18	1	basso	contata	contato
19	12	alto	"	"
21	7	alto	. . . . . Sopprimere la prima L	
64	2	basso	complementare . . .	completamente
80	7	alto	autogoniugata . . .	autoconiugata
83	4	alto	appogiano	appoggiano,
106	8	alto	estenzione	estensione.
111	5	basso	aggiungere dopo il; la frase "i vertici di R son i punti $P^{(i)}$;"	
133	14	alto	sulla varietà stessa	sulle varietà stesse

Pag.	Riga	Dal	Errata	Corrige
137	ultima		S_{nk}	S_{n-k}
144	4	alto	ora	in
149	11	basso	dell'insieme	degl'insiemi
149	10	basso	dell'intorno.	di ogni intorno
"	6	basso	dell'insieme.	degl'insiemi
"	5	basso	dell'intorno.	di ogni intorno
156	9	basso	mancano le parole «intuitiva, di»	
190	13	alto	aggiungere le sostituzioni $x = x'$, $y = 1 : y'$ ed $x = 1 : x'$, $y = y'$, le quali pure sono inadeguate come la $x = 1 : x'$, $y = 1 : y'$.	
192	7	alto	taluni o tutti . . .	tutti - Ciò risulta dalla Nota del Severi, citata nell'aggiunta a pag. 122.
220	11	basso	dopo «K-cicli» aggiungere la parola «nulli». Sarà però meglio dire «K-complessi circondanti», perchè i K-complessi cui si allude posson essere anche composti da più cicli.	
337	14	alto	. . . .	aggiungere dopo "cicli algebrici" la parola "irriducibili"
373			. . . . . . Da questa pagina alla 396, la cifra delle centinaia nel numero della pagina va diminuita di 1	
396 (cioè 296)	2	alto	equazione	equazioni
301	7	basso	c_n	c_k
341	14	alto	. . . . . sopprimere il "se"	

Prefazione

La geometria algebrica propriamente detta, entra soltanto in piccola parte nelle «Conferenze» raccolte in queste litografie [1]: e cioè in una prima parte riassuntiva di concetti fondamentali, ed introduttiva per talune applicazioni della topologia alla geometria algebrica; ed in un'ultima parte dove si inquadra nella topologia la teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.

Il rimanente, ovvero la parte più cospicua delle «Conferenze», si riferisce alla topologia. I concetti ed i processi fondamentali sono stati largamente ripensati e rimaneggiati da un punto di vista personale: tuttavia in varie parti della topologia combinatoria mi son conservato vicino all'eccellente trattazione del Veblen.

Il mio assistente prof. Beniamino Segre ha raccolto soltanto alcune delle «Conferenze»; ma la parte maggiore, specie per ciò che concerne la topologia, è stata redatta personalmente da me.

Spero che questa pubblicazione, sia pure nella modesta veste litografica e nella forma di «Conferenze», possa invogliare i giovani matematici italiani allo studio della topologia: branca importantissima, che progredendo intreccierà senza dubbio rapporti sempre più vasti con tutti i rami dell'analisi e della geometria. La fecondità e l'alta capacità di sintesi della topologia, sono già dimostrati dalla luce ch'essa ha gettato finora nei campi più disparati della matematica pura ed applicata.

È necessario che anche in Italia non si ignori l'intenso lavorio che, specie negli ultimi 20 o 25 anni, è stato fatto in una branca,

(1) Le "Conferenze" sono state tenute presso la R. Università di Roma negli anni 1927-28 e 1928-29.

che ripete le sue origini da questioni di geometria algebrica, e che nel nostro Paese deve perciò trovare clima particolarmente adatto.

È superfluo che dichiari che le "Conferenze" non potranno che esser considerate come elementari e incomplete da parte dei più profondi cultori della topologia. -

Roma, gennaio 1930 - VIII.

Francesco Severi

Indice

Aggiungere a pag. 380, dopo la 7a riga:

Insieme limitato = insieme contenente i propri punti limite.

Insieme illimitato = insieme non limitato.