TEORIA

DELLE

EQUAZIONI.

TIPOGRAFIA A. TRANI.

8114

TRATTATO ELEMENTARE

SULLA

TEORIA DELLE EQUAZIONI

CON UNA COLLEZIONE DI ESEMPI

PER

I. TODHUNTER, M.A., F.R.S.

TRADOTTO DALL'INGLESE, E CORREDATO DI AGGIUNTE
TRATTE DALL'ALGEBRA DELLO STESSO AUTORE,

DA

G. BATTAGLINI

PROFESSORE DI GEOMETRIA SUPERIORE NELL'UNIVERSITÀ
DI NAPOLI.

BIBLIOTECA DONO FIRZI

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Strada di Chiaia 60.
1872.

La presente traduzione è messa sotto la salvaguardia delle vigenti leggi sulla proprietà letteraria.

AVVERTIMENTO DEL TRADUTTORE.

Il favorevole modo nel quale è stata accolta in Italia la nostra traduzione del *Calcolo Differenziale ed Integrale* del chiar.mo Sig.r Todhunter ci ha indotto a pubblicare ancora la presente traduzione della *Teoria delle Equazioni* dello stesso Autore; opera che potrebbe servire di testo al Corso di Algebra Complementare, nei limiti tra i quali tale scienza s'insegna nelle nostre Università. Per rendere intanto il libro più utile agli Studenti abbiamo creduto conveniente di aggiungervi diversi Capitoli tratti dall'*Algebra ad uso dei Collegi e delle Scuole,* dello stesso Todhunter, i quali servono per completare alcune importanti teoriche di Algebra, che poco o nulla si studiano nei nostri Licei, come i *Determinanti*, le *Frazioni continue,* le *Serie*. La ricca e scelta Collezione di Esempii che accompagna l'opera dovrà poi renderla più accetta alla Gioventù studiosa: ne sappia trarre profitto ed i nostri voti saranno soddisfatti.

INDICE.

TEORIA DELLE EQUAZIONI.

PAGINA

I. INTRODUZIONE 1
II. Sull'esistenza di una Radice 14
III. Proprietà delle Equazioni 21
IV. Trasformazione delle Equazioni 30
V. Regola dei Segni di Descartes. 38
VI. Sulle Radici eguali 45
VII. Limiti delle Radici di un'Equazione. Separazione delle Radici 53
VIII. Radici commensurabili 69
IX. Abbassamento delle Equazioni 75
X. Equazioni reciproche 80
XI. Equazioni binomie 84
XII. Equazioni cubiche 93
XIII. Equazioni biquadratiche 105
XIV. Teorema di Sturm 114
XV. Teorema di Fourier 122
XVI. Metodo di Approssimazione di Lagrange 126
XVII. Metodo di Approssimazione di Newton con le Aggiunte di Fourier 132
XVIII. Metodo di Horner 139
XIX. Funzioni simmetriche delle Radici 152
XX. Applicazioni delle Funzioni simmetriche 161
XXI. Somme delle Potenze delle Radici 167
XXII. Eliminazione 179
XXIII. Sviluppo di una Funzione in Serie 190
XXIV. Teoremi diversi 197
XXV. Teorema di Cauchy 213

XXVI. Regola di Newton e Teorema di Sylvester 218
XXVII. Sparizione dei Termini da un'Equazione 232
Esempii 238
Risposte 256

AGGIUNTE.

PAGINA
I. Introduzione ai Determinanti 261
II. Proprietà dei Determinanti 270
III. Applicazioni dei Determinanti 286
IV. Teorema del Binomio con l'Esponente qualunque . . 300
V. Teorema del Polinomio. 315
VI. Serie esponenziale e logaritmica 322
VII. Convergenza e Divergenza delle Serie 331
VIII. Frazioni continue 339
IX. Riduzione di un Radicale quadratico ad una Frazione continua 345
X. Frazioni parziali e Coefficienti indeterminati . . . 358
XI. Serie ricorrenti 363
XII. Somma delle Serie 365
XIII. Ineguaglianze 377
XIV. Teoria dei Numeri 390
XV. Convergenza e Divergenza delle Serie 404
XVI. Frazioni continue 415
Risposte 431

TEORIA DELLE EQUAZIONI.

I. INTRODUZIONE.

1. Il lettore può acquistare facilmente un'idea generale del seguente trattato per mezzo della teoria delle equazioni quadratiche le quali si suppone di avere egli già studiate. L'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha due radici, cioè,

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

e rispetto a queste radici, sappiamo che la loro somma è $-\frac{b}{a}$, ed il loro prodotto è $\frac{c}{a}$; cioè, la loro somma è eguale al coefficiente del secondo termine dell'equazione $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, col segno cambiato, ed il loro prodotto è eguale all'ultimo termine di questa equazione. Ora si può dire che l'oggetto generale delle pagine seguenti si è di stabilire risultati rispetto alle equazioni di grado superiore al secondo, simili a quelli che sono stati stabiliti nell'Algebra rispetto alle equazioni di secondo grado. I risultati ottenuti saranno utili in altri rami delle matematiche, ed i metodi di ricerca serviranno per opportuno esercizio allo studente, poichè essi non sono troppo difficili per colui il quale ha già una conoscenza dell'Algebra, e nello stesso tempo hanno sufficiente varietà per occupare la sua attenzione.

2. Le parole *equazione* e *radice* sono già familiari allo studente per il loro uso in Algebra; ma per precisione daremo una definizione di esse.

Ogni espressione algebrica che contiene x può essere chiamata una funzione di x, ed essere dinotata con $f(x)$. Ogni quantità che sostituita per x in $f(x)$ fa svanire $f(x)$, è detta una radice dell'equazione $f(x)=0$.

Un' espressione della forma

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + kx + l,$$

in cui n è un intero positivo, ed i coefficienti $a, b, c \ldots k, l$, non contengono x, si chiama una funzione razionale intera di x dell'n^{mo} grado; e se vogliamo trovare qual valore di x fa svanire questa funzione dobbiamo trovare una radice di un'*equazione razionale intera* dell'n^{mo} grado; tali equazioni sono quelle che considereremo nel presente trattato. In una tale equazione possiamo se ci piace dividere pel coefficiente della più alta potenza di x, in modo da lasciare questa potenza con la sola unità pel suo coefficiente; l'equazione allora prende la forma

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Diremo che l'equazione è ora nella sua *forma più semplice*; come si vedrà in appresso, alcune delle proprietà delle equazioni possono essere enunciate più concisamente quando l'equazione è in questa forma che quando x^n ha un coefficiente diverso dall'unità. Se non vogliamo supporre che il coefficiente di x^n sia l'unità, possiamo dinotarlo convenientemente con p_0; allora l'equazione prende la forma

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Il termine p_n si chiama il *termine indipendente da x*.

3. Bisogna adunque rammentarsi che per *equazione* intendiamo *equazione razionale intera;* un'equazione che non è di questa forma può spesso essere ridotta ad essa con trasformazioni algebriche; per esempio, l'equazione $ax^2 + bx + c\sqrt{x} = f$ può essere ridotta ad una forma razionale intera trasponendo $c\sqrt{x}$ ed f e poi elevando a quadrato; essa diventerà così un'equazione razionale intera del quarto grado. Le equazioni che contengono funzioni logaritmiche, o funzioni esponenziali, o funzioni trigonometriche, o funzioni algebriche irrazionali, non saranno comprese direttamente nelle nostre ricerche; per esempio, equazioni tali come $\tan x - e^x = 0$, o $x \log x - a = 0$, non saranno considerate. Non pertanto, la teoria che sarà data delle equazioni razionali intere indirettamente getterà luce su queste equazioni escluse.

E quando parliamo di una funzione $f(x)$ intenderemo sempre una funzione razionale intera di x, a meno che non si specifichi il contrario.

4. Un' osservazione di qualche importanza deve essere fatta rispetto ai *coefficienti* $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$, nell' equazione

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Nell' equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$ sappiamo risolvere l'equazione senza conoscere quali numeri particolari sono dinotati da a, b, c; tutto ciò che richiediamo di conoscere si è che a, b, c siano alcuni numeri indipendenti da x. Se dobbiamo risolvere l' equazione $x^2 - 12x + 15 = 0$ possiamo o trasportare il 15 o completare il quadrato nel modo ordinario, o pure possiamo prendere le formole generali date nell' Art. 1, e porre in esse $a = 1$, $b = -2$, $c = 15$. Se vogliamo risolvere un' equazione senza che i valori numerici dei coefficienti siano previamente assegnati, andiamo cercando ciò che può chiamarsi la *risoluzione algebrica* dell' equazione, e se potessimo effettuare la risoluzione algebrica dell' equazione generale di grado qualunque, potremmo ottenere una risoluzione *numerica* di un' equazione di tal grado, sostituendo i valori numerici dei coefficienti nella formola generale che dà la risoluzione algebrica. Nell'andare innanzi troveremo che la risoluzione algebrica delle equazioni sino al quarto grado inclusivamente è stata effettuata; ma per le equazioni del terzo grado e del quarto grado, quando sostituiamo i valori numerici dei coefficienti di un' equazione speciale nella formola generale, il risultato prende una forma che è spesso praticamente inutile. Al di là delle equazioni del quarto grado la risoluzione algebrica generale delle equazioni non è stata trovata, e sembra che non possa essere trovata.

Ma rispetto a ciò che può chiamarsi la risoluzione *aritmetica* delle equazioni nelle quali i coefficienti sono numeri dati, un maggiore successo è stato ottenuto. Così, per esempio, benchè non possiamo risolvere algebricamente l' equazione generale del quinto grado, possiamo con calcolo numerico scoprire qualunque delle radici che può avere un' equazione del quinto grado con dati coefficienti numerici, o al meno possiamo approssimarci tanto quanto ci piace ad una tale radice.

5. Dinotiamo con $f(x)$ l' espressione

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n;$$

allora il valore di questa espressione quando $x = a$ può essere dino-

tato con $f(a)$. Mostreremo come nel modo più semplice possa essere calcolato il valore numerico di $f(a)$, supponendo che i coefficienti di $f(x)$, ed anche lo stesso a, siano numeri assegnati.

Si prenda per esempio un'espressione del *terzo grado;* allora vogliamo trovare il valore numerico di

$$p_0a^3+p_1a^2+p_2a+p_3.$$

Primieramente si ottenga p_0a;

si aggiunga p_1, ciò dà p_0a+p_1;

si moltiplichi per a, ciò dà $p_0a^2+p_1a$;

si aggiunga p_2, ciò dà $p_0a^2+p_1a+p_2$;

si moltiplichi per a, ciò dà $p_0a^3+p_1a^2+p_2a$;

si aggiunga p_3, ciò dà $p_0a^3+p_1a^2+p_2a+p_3$.

Possiamo disporre il procedimento nel modo seguente;

p_0	p_1	p_2	p_3
	p_0a	$p_0a^2+p_1a$	$p_0a^3+p_1a^2+p_2a$
	p_0a+p_1	$p_0a^2+p_1a+p_2$	$p_0a^3+p_1a^2+p_2a+p_3$

Possiamo procedere nello stesso modo qualunque sia il grado di $f(x)$. Per esempio, si cerchi il valore numerico di $3x^4-2x^3-5x+7$ quando $x=3$.

3	-2	0	-5	$+7$
	$+9$	$+21$	$+63$	$+174$
	$+7$	$+21$	$+58$	$+181$

Così il risultato è 181.

6. *Se una funzione razionale intera di* x *svanisce quando* x = a, *la funzione è divisibile per* x − a.

Dinoti $f(x)$ la funzione; allora si suppone che sia $f(a)=0$, e dobbiamo dimostrare che $f(x)$ è divisibile per $x-a$.

Si divida $f(x)$ per $x-a$ con l'algebra ordinaria finchè il resto non contenga più x; dinoti Q il quoziente ed R il resto se ve ne è uno. Allora $f(x)=Q(x-a)+R$. In questa identità si ponga a per x; poichè Q è una funzione razionale intera di x essa non può diventare infinita quando $x=a$; quindi $Q(x-a)$ svanisce quando $x=a$. Anche $f(x)$ svanisce quando $x=a$ per supposizione. Così R svanisce quando $x=a$; ma R non contiene x, sicchè se svanisce quando $x=a$ esso svanisce sempre. Adunque, $R=0$ ed $x-a$ divide $f(x)$.

7. La dimostrazione precedente è importante ed istruttiva; possiamo però dimostrare il teorema in altro modo, il quale avrà di più il vantaggio di esibire la forma del quoziente Q. Si supponga

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n,$$

allora poichè $f(a)=0$ abbiamo $f(x)=f(x)-f(a)$

$$=p_0(x^n-a^n)+p_1(x^{n-1}-a^{n-1})+p_2(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots+p_{n-1}(x-a).$$

Ora i termini x^n-a^n, $x^{n-1}-a^{n-1}$, ... sono tutti divisibili per $x-a$ (per l'Algebra). Eseguendo la divisione otteniamo pel quoziente

$$\begin{aligned}&p_0(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})\\&+p_1(x^{n-2}+ax^{n-3}+a^2x^{n-4}+\ldots+a^{n-2})\\&+\ldots\\&+p_{n-2}(x+a)\\&+p_{n-1}.\end{aligned}$$

Possiamo riordinare il quoziente così;

$$p_0x^{n-1}+(p_0a+p_1)x^{n-2}+(p_0a^2+p_1a+p_2)x^{n-3}+\ldots$$
$$+p_0a^{n-1}+p_1a^{n-2}+\ldots+p_{n-1},$$

e possiamo dinotarlo con

$$q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}.$$

I nuovi coefficienti sono quindi legati tra loro e con i coefficienti primitivi per mezzo delle formole

$$q_0=p_0,\quad q_1=aq_0+p_1,\quad q_2=aq_1+p_2,\quad q_3=aq_2+p_3,\ \ldots\ldots;$$

cioè, *ciascun nuovo coefficiente si trova moltiplicando il nuovo coefficiente precedente per* a *e poi aggiungendo il primitivo coefficiente corrispondente.* Si osserverà che questi nuovi coefficienti sono *successivamente* determinati col procedimento dell'Art. 5.

8. *Se* x − a *divide* f(x) *che è una funzione razionale intera di* x, *allora* a *è una radice dell'equazione* $f(x)=0$.

Infatti dinoti Q il quoziente quando $f(x)$ si divide per $x-a$, allora $f(x)=Q(x-a)$. In questa identità si ponga a per x, allora Q non è infinito, e quindi $Q(x-a)$ svanisce. Così $f(x)$ svanisce quando $x=a$, e quindi a è una radice dell'equazione $f(x)=0$.

9. *Trovare il resto quando una funzione razionale intera di* x *si divide per* x − c, *in cui* c *è una costante qualunque.*

Dinoti $f(x)$ una funzione razionale intera di x, e si divida $f(x)$ per $x-c$ finchè il resto sia indipendente da x; dinoti Q il quoziente ed R il resto. Allora

$$f(x)=Q(x-c)+R.$$

In questa identità si ponga c per x, allora Q non è infinito, e quindi $Q(x-c)$ svanisce; così $f(c)=R$. Cioè, R è eguale ad $f(c)$ quando $x=c$, ma R non contiene x, sicchè R è eguale ad $f(c)$ sempre.

Per esempio; se $3x^4-2x^3-5x+7$ si divide per $x-3$, il quoziente è $3x^3+7x^2+21x+58$, ed il resto è 181; si veggano gli Art. 5 e 7.

Per un altro esempio dividiamo la stessa espressione per $x-4$:

$$\begin{array}{r} 3-\ 2\quad 0-\ 5+\ 7 \\ +12+40+160+620 \\ \hline +10+40+155+627 \end{array}$$

Così il quoziente è $3x^3+10x^2+40x+155$, ed il resto è 627.

10. Sia $f(x)$ una funzione razionale intera di x, e si supponga messo $x+y$ per x; allora ci proponiamo di ordinare $f(x+y)$ secondo le potenze di y, e di determinare i coefficienti delle diverse potenze.

Sia $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$; allora

$$f(x+y)=p_0(x+y)^n+p_1(x+y)^{n-1}+p_2(x+y)^{n-2}+\ldots+p_{n-1}(x+y)+p_n.$$

Si sviluppino $(x+y)^n$, $(x+y)^{n-1}$, ... col teorema del Binomio, e si ordini il risultato totale secondo le potenze di y; otteniamo così per $f(x+y)$ la serie seguente;

$$\begin{aligned} & p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n \\ & +y\left\{np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\ldots+p_{n-1}\right\} \\ & +\frac{y^2}{1\cdot 2}\left\{n(n-1)p_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)p_1x^{n-3}+\ldots+2p_{n-2}\right\} \\ & +\ldots \\ & +\frac{y^r}{\lfloor r}\left\{n(n-1)\ldots(n-r+1)p_0x^{n-r}+(n-1)(n-2)\ldots(n-r)p_1x^{n-r-1}+\ldots\right\} \\ & +\ldots \\ & +\frac{y^n}{\lfloor n}\left\{\lfloor n\, p_0\right\}. \end{aligned}$$

La prima linea di questa serie è manifestamente $f(x)$. Dinotere-

mo il coefficiente di y con $f'(x)$, il coefficiente di $\frac{y^2}{1\cdot 2}$ con $f''(x)$, il coefficiente di $\frac{y^3}{\lfloor 3}$ con $f'''(x)$, e così di seguito; questa notazione diviene incomoda quando il numero degli accenti è grande, e così in generale il coefficiente di $\frac{y^r}{\lfloor r}$ sarà dinotato da $f^r(x)$. Laonde

$$f(x+y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{y^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{y^r}{\lfloor r}f^r(x)+\ldots+\frac{y^n}{\lfloor n}f^n(x).$$

Esaminando si vedrà che le funzioni $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^n(x)$ sono legate dalla legge generale seguente; per ottenere $f^{r+1}(x)$ moltiplichiamo ciascun termine di $f^r(x)$ per l'esponente di x in quel termine e poi diminuiamo l'esponente di una unità.

11. Supponiamo, per esempio, che $f(x)$ sia del quarto grado; sia

$$f(x)=p_0x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4.$$

Allora
$$f'(x)=4p_0x^3+3p_1x^2+2p_2x+p_3,$$
$$f''(x)=4\cdot 3p_0x^2+3\cdot 2p_1x+2p_2,$$
$$f'''(x)=4\cdot 3\cdot 2p_0x+3\cdot 2p_1,$$
$$f''''(x)=4\cdot 3\cdot 2\cdot p_0;$$

$$f(x+y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{y^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\frac{y^4}{\lfloor 4}f''''(x).$$

Se supponiamo assegnati valori numerici a p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, ed x, possiamo calcolare separatamente $f(x), f'(x), \ldots$ col metodo dell'Art. 5; però in appresso, spiegando il metodo di Horner per risolvere le equazioni, mostreremo il modo più conveniente e sistematico nel quale questi calcoli possono essere condotti.

Per un altro esempio supponiamo che sia $f(x)=p\,(x+c)^n$.

Allora $f(x)=p\left\{x^n+ncx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}c^2x^{n-2}+\ldots+nc^{n-1}x+c^n\right\}$;

quindi

$$f'(x)=p\left\{nx^{n-1}+n(n-1)cx^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}c^2x^{n-3}+\ldots+nc^{n-1}\right\};$$

cioè $$f'(x) = pn(x+c)^{n-1}:$$

similmente $$f''(x) = pn(n-1)(x+c)^{n-2},$$

$$f'''(x) = pn(n-1)(n-2)(x+c)^{n-3},$$

e così di seguito.

12. Se scriviamo la serie per $f(x+y)$ incominciando con *la più alta* potenza di y, avremo

$$f(x+y) = p_0 y^n + (p_1 + np_0 x) y^{n-1} + \left\{ p_2 + (n-1)p_1 x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p_0 x^2 \right\} y^{n-2}$$

$$+ \left\{ p_3 + (n-2)p_2 x + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p_1 x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} p_0 x^3 \right\} y^{n-3}$$

$$+ \ldots$$

$$+ \left\{ p_r + (n-r+1)p_{r-1} x + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}} p_0 x^r \right\} y^{n-r}$$

$$+ \ldots + f(x).$$

Questo si può vedere dalla forma già data per $f(x+y)$, o pure sviluppando separatamente ciascun termine in $f(x+y)$, ed ordinando secondo le potenze decrescenti di y.

13. La funzione $f'(x)$ si chiama la *prima funzione derivata* di $f(x)$, la funzione $f''(x)$ si chiama la *seconda funzione derivata* di $f(x)$, e così di seguito. Il lettore, se conosce gli elementi del Calcolo Differenziale, vedrà che ciascuna funzione derivata è il *coefficiente differenziale* rispetto ad x della funzione derivata che immediatamente la precede, e che l'espressione per $f(x+y)$ secondo le potenze di y è un esempio del *Teorema di Taylor*.

Inoltre, si deve osservare che $f''(x)$ è dedotta da $f'(x)$ precisamente nello stesso modo col quale $f'(x)$ è dedotta da $f(x)$. Così $f''(x)$ è la prima funzione derivata di $f'(x)$, ed $f'''(x)$ è la seconda funzione derivata di $f'(x)$, e così di seguito. Laonde per l'Articolo precedente abbiamo

$$f'(x+y) = f'(x) + yf''(x) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f'''(x) + \frac{y^3}{\underline{|3}} f''''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^{r-1}}{\underline{|r-1}} f^r(x) + \ldots + \frac{y^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^n(x).$$

Similmente

$$f''(x+y)=f''(x)+yf'''(x)+\frac{y^2}{1\cdot 2}f''''(x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{y^{r-2}}{\underline{|r-2}}f^r(x)+\ldots+\frac{y^{n-2}}{\underline{|n-2}}f^n(x).$$

E così di seguito.

14. *In una funzione razionale intera di* x *ordinata secondo le potenze decrescenti di* x, *ogni suo termine si può fare che contenga la somma di tutti quelli che lo seguono, tante volte quante ci piace, prendendo* x *sufficientemente grande, ed ogni termine si può fare che contenga la somma di tutti quelli che lo precedono, tante volte quante ci piace, prendendo* x *sufficientemente piccolo.*

Sia $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n$ una qualunque funzione razionale intera di x; supponiamo per esempio che si trovi in essa il termine r^{mo} $p_{r-1}x^{n-r+1}$; cioè, supponiamo che p_{r-1} non sia zero. Dinoti q il valore numerico del più grande dei coefficienti $p_r, p_{r+1}, \ldots p_n$. La somma di tutti i termini che seguono il termine r^{mo} non può eccedere $q(x^{n-r}+x^{n-r-1}+\ldots+x+1)$, cioè, $q\dfrac{x^{n-r+1}-1}{x-1}$. Il rapporto del termine r^{mo} a questa somma è $\dfrac{p_{r-1}(x-1)x^{n-r+1}}{q(x^{n-r+1}-1)}$, cioè, $\dfrac{p_{r-1}(x-1)}{q-qx^{-(n-r+1)}}$. Prendendo x sufficientemente grande, il numeratore si può rendere tanto grande quanto ci piace, ed il denominatore tanto prossimo a q quanto ci piace; così il rapporto si può rendere tanto grande quanto ci piace.

Questo dimostra la prima parte della proposizione. Per dimostrare la seconda parte si ponga $x=\dfrac{1}{y}$, allora otteniamo la serie

$$y^{-n}\{p_0+p_1y+p_2y^2+\ldots+p_{n-1}y^{n-1}+p_ny^n\}.$$

Dobbiamo ora dimostrare che prendendo x sufficientemente piccolo, cioè prendendo y sufficientemente grande, ogni termine p_ry^r che si trova nell'espressione si può fare che serbi un rapporto tanto grande quanto ci piace alla somma dei termini $p_0+p_1y+\ldots+p_{r-1}y^{r-1}$ che lo precedono; questo è stato già dimostrato nella prima parte.

15. Una delle prime quistioni che si possono presentare nella teoria delle equazioni si è se debba esservi una radice per ogni

equazione; e daremo ora alcune proposizioni semplici che stabiliscono l'esistenza di una radice in alcuni casi. Avremo bisogno di un teorema che sovente è ammesso come evidente, ma che può essere dimostrato nel modo esposto nell'Articolo seguente.

16. Sia $f(x)$ una funzione razionale intera di x, e siano $f(a)$, $f(b)$ i valori di $f(x)$ corrispondenti ai valori a e b di x; allora variando x da a a b la funzione $f(x)$ varierà da $f(a)$ ad $f(b)$, e passerà per ogni valore intermedio.

Sia assegnato ad x un valore qualunque c, e sia $f(c)$ il corrispondente valore di $f(x)$; sia $c+h$ un altro valore assegnato ad x; allora prendendo h sufficientemente piccolo $f(c+h)$ si può far differire tanto poco quanto ci piace da $f(c)$. Infatti

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(c)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{n-1}(c)+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(c).$$

Allora, per l'Art. 14, prendendo h sufficientemente piccolo, il primo termine della serie $hf'(c)$, $\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(c)$, $\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(c)$,... che non svanisce, si può far contenere la somma di tutto ciò che lo segue tante volte quante ci piace, e prendendo h sufficientemente piccolo questo termine stesso si renderà tanto piccolo quanto ci piace. Quindi $f(c+h)-f(c)$ si può rendere tanto piccolo quanto ci piace prendendo h sufficientemente piccolo. Questo mostra che al variare di x, $f(x)$ varia *gradatamente*, sicchè se $f(x)$ prende un valore qualunque per un valore assegnato ad x, essa prenderà un altro valore tanto vicino al primo quanto ci piace, prendendo un altro valore di x sufficientemente vicino al valore assegnato. Quindi variando x da a a b, la funzione $f(x)$ deve passare *senza alcuna interruzione* dal valore $f(a)$ al valore $f(b)$; poichè asserire che vi possa essere *interruzione* equivarrebbe ad asserire che $f(x)$ possa prendere un certo valore, e *non* possa prendere un secondo valore tanto vicino al primo quanto ci piace.

17. Nell'Articolo precedente non asseriamo che $f(x)$ cresca sempre da $f(a)$ ad $f(b)$, o decresca sempre da $f(a)$ ad $f(b)$; essa può essere alle volte crescente ed alle volte decrescente. Ciò che asseriamo si è, che essa passi senza alcun *subitaneo cambiamento* di valore, dal valore $f(a)$ al valore $f(b)$. È questa una proposizione di grande importanza, e forse riflettendovi lo studente la troverà quasi

evidente. È chiaro che $f(x)$ ha *un certo* valore finito per ogni valore finito assegnato ad x; inoltre abbiamo dimostrato che un cambiamento indefinitamente piccolo in x può produrre solamente un cambiamento indefinitamente piccolo in $f(x)$, sicchè non vi può essere alcuna interruzione nella successione dei valori che prende $f(x)$.

18. Lo studente che ha conoscenza della Geometria analitica troverà utile ed interessante il dilucidare questo soggetto immaginando descritte delle curve per rappresentare le funzioni. Così $f(x)$ sia dinotata con y, sicchè $y=f(x)$ possa intendersi essere l'equazione di una curva; allora supponendo descritta questa curva per la parte compresa tra $x=a$ ed $x=b$, si ottiene una buona idea della necessaria sequela nei valori presi da $f(x)$ tra i valori $f(a)$ ed $f(b)$.

Si deve osservare che noi non limitiamo a, b, $f(a)$, $f(b)$, ad essere quantità *positive;* e per valori intermedii fra $f(a)$ ed $f(b)$ intendiamo intermedii nel senso *algebrico;* cioè ogni quantità z che rende $z-f(a)$ ed $f(b)-z$ dello *stesso segno* è intermedia tra $f(a)$ ed $f(b)$.

19. *Se due numeri sostituiti per* x *in una espressione* f(x) *razionale intera danno risultati di segni contrarii, una radice almeno dell'equazione* f(x) $=0$ *è compresa tra questi valori di* x.

Dinotino a e b i due numeri; allora $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segni contrarii. Per l'Art. 16, mentre x varia gradatamente da a a b, l'espressione $f(x)$ passa senza alcuna interruzione di valore da $f(a)$ ad $f(b)$; ma poichè $f(a)$ ed $f(b)$ sono di segni contrarii il valore zero è compreso tra essi, sicchè $f(x)$ deve essere eguale a zero per qualche valore di x tra a e b; cioè, vi è una radice dell'equazione $f(x)=0$ tra a e b.

Noi non diciamo che vi *è solamente* una radice. E non diciamo che se $f(a)$ ed $f(b)$ sono dello *stesso* segno non vi sarà alcuna radice dell'equazione $f(x)=0$ tra a e b.

20. *Un'equazione di grado dispari ha almeno una radice reale.*

Sia l'equazione dinotata da $f(x)=0$, in cui

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_{n-1}x+p_n,$$

ed n è un numero dispari.

Quando x è sufficientemente grande il primo termine di $f(x)$, o sia p_0x^n, sarà maggiore della somma di tutto il rimanente per

l'Art. 14, e quindi il segno di $f(x)$ sarà lo stesso che il segno di $p_0 x^n$. Così, prendendo x sufficientemente grande, il segno di $f(x)$ si può fare *simile* al segno di p_0 quando x è *positivo*, e *contrario* a quello di p_0 quando x è *negativo*. Poichè dunque $f(x)$ cambia il suo segno mentre x passa da un convenevole valore negativo ad un convenevole valore positivo, vi deve essere qualche valore intermedio di x che fa svanire $f(x)$; cioè, vi deve essere qualche radice reale dell'equazione $f(x)=0$.

Possiamo determinare se questa radice è positiva o negativa. Infatti quando poniamo zero per x il segno di $f(x)$ è lo stesso che quello di p_n. Così se p_n e p_0 hanno lo stesso segno, sicchè $\frac{p_n}{p_0}$ è positivo, vi sarà certamente una radice negativa dell'equazione $f(x)=0$; e se p_n e p_0 hanno segni contrarii, sicchè $\frac{p_n}{p_0}$ è negativo, vi sarà certamente una radice positiva dell'equazione $f(x)=0$. Così se un'equazione sia di grado dispari, e sia messa nella sua forma più semplice dividendo pel coefficiente della più alta potenza di x, essa avrà una radice reale di segno contrario a quello dell'ultimo termine.

21. *Un' equazione di grado pari che è nella sua forma più semplice, ed ha il suo ultimo termine negativo, ha almeno due radici reali di segni contrarii.*

Sia $f(x)=0$ l'equazione; allora quando x è zero, $f(x)$ è negativa per supposizione. Quando x è sufficientemente grande $f(x)$ è positiva, sia x positivo o pur negativo. Così vi è qualche valore negativo di x che fa svanire $f(x)$, ed ancora qualche valore positivo di x che fa svanire $f(x)$. Cioè, l'equazione $f(x)=0$ ha certamente una radice negativa ed una radice positiva.

22. *Se l' espressione razionale intera* f(x) *consiste di un gruppo di termini in cui i coefficienti sono tutti di un segno, seguìto da un gruppo di termini in cui i coefficienti sono tutti del segno contrario, l'equazione* f(x) = 0 *ha una radice positiva e solamente una radice positiva.*

Per gli Art. 20 e 21 l'equazione $f(x)=0$ deve avere *una* radice positiva; vogliamo dimostrare che essa ha *solamente* una radice positiva.

Sia $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$.

Si suppongano i coefficienti $p_0, p_1, \ldots p_r$ tutti positivi, ed i rimanenti coefficienti negativi; sia $p_{r+1} = -P_{r+1}, p_{r+2} = -P_{r+2}, \ldots p_n = -P_n$. Allora possiamo scrivere $f(x)$ così,

$$f(x) = x^{n-r}\left\{p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + \ldots + p_r - \frac{P_{r+1}}{x} - \frac{P_{r+2}}{x^2} - \ldots - \frac{P_n}{x^{n-r}}\right\}.$$

L'espressione $p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + \ldots + p_r$ *cresce* al crescere di x, a meno che non sia $r=0$, ed allora essa rimane costante; l'espressione $\frac{P_{r+1}}{x} + \frac{P_{r+2}}{x^2} + \ldots + \frac{P_n}{x^{n-r}}$ *diminuisce* al crescere di x. Così mentre x cresce da zero in avanti, le due espressioni non possono essere eguali più di una volta. Cioè, $f(x)=0$ ha *solamente una* radice positiva.

La dimostrazione sarà la stessa se supponiamo il primo gruppo di coefficienti *negativo* ed il secondo positivo.

23. A prevenire qualche errore sarà utile di porre attenzione ai risultati precisi ottenuti negli ultimi tre Articoli.

Nell'Art. 20 si è dimostrato che l'equazione considerata ha *almeno una* radice reale; non si è dimostrato che essa ne abbia solamente una. Nell'Art. 21 si è dimostrato che l'equazione considerata ha *almeno due* radici reali; non si è dimostrato che essa ne ha solamente due. Nell'Art. 22 si è dimostrato che l'equazione considerata ha *una* radice positiva e *solamente una radice positiva:* non si è dimostrato che essa non ha alcuna radice negativa.

24. Le proposizioni negli Art. 20, 21, e 22, circa l'esistenza di radici in alcuni casi, dipendono dal fatto di poter noi dimostrare che $f(x)$ è sottoposta ad un cambiamento di segno o a cambiamenti di segno. Non possiamo viceversa conchiudere che se $f(x)$ non cambia mai il suo segno per una certa serie di valori di x non vi è alcuna radice dell'equazione $f(x) = 0$ in quella serie di valori di x. Si prenda per esempio $x^2 - 6x + 9$; questa espressione non *cambia* mai il suo segno, e pure essa svanisce quando $x = 3$: l'espressione è eguale ad $(x-3)^2$. Ma se l'equazione $f(x)=0$ non ha alcuna radice compresa in una serie assegnata di valori di x siamo sicuri che $f(x)$ non cambia mai il suo segno per quella serie di valori di x.

Le proposizioni seguenti intorno all'assenza di radici si troveranno essere di verità manifesta.

(1) Se i coefficienti in $f(x)$ sono tutti positivi, l'equazione $f(x)=0$ non ha alcuna radice positiva.

(2) Se tutt'i coefficienti delle potenze *pari* di x in $f(x)$ hanno un segno, e tutt'i coefficienti delle potenze *dispari* di x il segno contrario, l'equazione $f(x)=0$ non ha alcuna radice negativa.

(3) Se $f(x)$ contiene solamente potenze *pari* di x ed i coefficienti sono tutti dello stesso segno, l'equazione $f(x)=0$ non ha alcuna radice reale.

Si suppone in questo caso che vi sia un termine indipendente da x.

(4) Se $f(x)$ contiene solamente potenze *dispari* di x ed i coefficienti sono tutti dello stesso segno, l'equazione $f(x)=0$ non ha alcuna radice reale eccetto $x=0$.

Si suppone in questo caso, naturalmente, che non vi sia alcun termine indipendente da x.

Diciamo in questi due ultimi casi che l'equazione non ha alcuna radice *reale*, e non diciamo che l'equazione non ha alcuna radice, poichè sappiamo, per l'Algebra, che in virtù di alcune convenzioni un'equazione *può* in alcuni casi avere radici *immaginarie*. Ed in fatti passeremo ora a dimostrare che radici immaginarie *debbono* esistere.

II. SULL'ESISTENZA DI UNA RADICE.

25. Dimostreremo ora che ogni equazione razionale intera ha una radice, o reale o pure della forma $a+b\sqrt{-1}$, in cui a e b sono reali; una tale espressione $a+b\sqrt{-1}$, in cui a e b sono reali, la chiameremo una espressione immaginaria. Cioè, quando adoperiamo la parola *immaginaria* intenderemo sempre che l'espressione alla quale applichiamo questa parola è della forma $a+b\sqrt{-1}$, *in cui* a *e* b *sono reali*.

26. Si suppone che lo studente sappia che in virtù di alcune convenzioni, le espressioni immaginarie si possono usare nelle ricer-

che algebriche, e si possono stabilire teoremi rispetto ad esse. Così, per esempio, il valore positivo della radice quadrata di a^2+b^2 si chiama il *modulo* di ciascuna delle espressioni $a+b\sqrt{-1}$ ed $a-b\sqrt{-1}$; e con questa definizione possiamo dimostrare che il modulo del prodotto di due espressioni immaginarie è il prodotto dei moduli di queste due espressioni. Infatti il prodotto di $a+b\sqrt{-1}$ ed $a'+b'\sqrt{-1}$ è $aa'-bb'+(ab'+a'b)\sqrt{-1}$, ed il modulo di questo è il valore positivo della radice quadrata di $(aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2$, cioè, di $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$; cioè, il modulo è il prodotto dei moduli delle due date espressioni. Ancora un'espressione immaginaria $a+b\sqrt{-1}$ si considera svanire quando a e b svaniscono; cioè, un'espressione immaginaria svanisce quando il suo modulo svanisce. Così, per quello che or ora è stato dimostrato, se il prodotto di due espressioni immaginarie svanisce, il modulo di una delle espressioni deve svanire; sicchè *se il prodotto di due o più espressioni immaginarie svanisce, una delle espressioni stesse deve svanire; e se una delle espressioni svanisce il prodotto svanisce.*

27. Lo studente che non ha messo attenzione al soggetto delle espressioni immaginarie può consultare l'*Algebra*. La dimostrazione però che ogni equazione ha una radice, reale o immaginaria, alla quale ora passiamo, è alquanto difficile; lo studente perciò nel leggere questo soggetto per la prima volta può ammettere la proposizione, e riservare il resto di questo Capitolo per futura considerazione.

28. Dimostreremo in prima che una radice, reale o immaginaria, esiste per ciascuna delle quattro equazioni seguenti;

$$x^n=1, \quad x^n=-1, \quad x^n=+\sqrt{-1}, \quad x^n=-\sqrt{-1}.$$

(1) $x^n=1$. È chiaro che $x=1$ è una radice di questa equazione.

(2) $x^n=-1$. Se n è un numero *dispari* è chiaro che $x=-1$ è una radice di questa equazione. Se n è un numero *pari* si supponga eguale a $2m$; dobbiamo allora dimostrare che vi è una soluzione di $x^{2m}=-1$; ciò equivale a dimostrare che vi è una soluzione di $x^m=\pm\sqrt{-1}$, ed è perciò incluso nei due casi seguenti.

(3) $x^n=+\sqrt{-1}$. Se n è un numero *dispari* esso deve essere di una delle due forme $4m+1$ e $4m+3$; nel primo caso $+\sqrt{-1}$ è una

radice, poichè $(+\sqrt{-1})^{4m+1}=+\sqrt{-1}$, e nel secondo caso $-\sqrt{-1}$ è una radice, poichè $(-\sqrt{-1})^{4m+3}=+\sqrt{-1}$. Se n è un numero *pari* si supponga eguale ad mp, in cui m è un numero dispari, e p è una potenza di 2, facciamo 2^q. Si ponga $y=x^p$, allora l'equazione $x^{mp}=+\sqrt{-1}$ può essere scritta $y^m=+\sqrt{-1}$, e per ciò che è stato già dimostrato $+\sqrt{-1}$ o $-\sqrt{-1}$ è un valore convenevole di y, secondo che m è della forma $4r+1$ o $4r+3$. Dobbiamo quindi trovare un valore di x che soddisfi $x^p=+\sqrt{-1}$ o $x^p=-\sqrt{-1}$, in cui $p=2^q$. Il valore richiesto si può ottenere con l'Algebra ordinaria. In fatti si prenda la radice quadrata di $+\sqrt{-1}$ o di $-\sqrt{-1}$; ciò darà un'espressione della forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, in cui α e β sono reali; si prenda la radice quadrata di $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, la quale darà una simile espressione; e così di seguito; si vegga l'*Algebra*. Così dopo q estrazioni di radice quadrata arriviamo ad un'espressione $a+b\sqrt{-1}$, tale che $(a+b\sqrt{-1})^n=+\sqrt{-1}$ o $=-\sqrt{-1}$.

(4) $x^n=-\sqrt{-1}$. Questo caso è trattato come (3). Se n è un numero *dispari*, $-\sqrt{-1}$ o $+\sqrt{-1}$ è una radice, secondo che n è della forma $4m+1$ o $4m+3$. Se n è un numero pari si supponga eguale ad mp, in cui m è un numero dispari e $p=2^q$, e si proceda come sopra.

29. *Ogni equazione razionale intera ha una radice reale o immaginaria.*

Sia $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n$, in cui i coefficienti p_0, p_1, $\ldots$ p_{n-2}, p_{n-1}, p_n *possono essere reali o immaginarii;* dobbiamo dimostrare che l'equazione $f(x)=0$ ha una radice reale o immaginaria. Se un'espressione immaginaria si sostituisce per x in $f(x)$, otterremo un risultato della forma $U+V\sqrt{-1}$, in cui U e V sono quantità reali, ed abbiamo a dimostrare che vi deve essere un'espressione immaginaria che renderà $U=0$ e $V=0$. Ciò dimostriamo nel seguente modo. Poichè U^2+V^2 è sempre una *quantità reale positiva*, se essa non può essere zero vi deve essere un suo valore che non è maggiore di qualche altro valore, cioè, vi deve essere un suo valore che non può essere diminuito; ma dimostreremo ora che se U^2+V^2 ha un valore qualunque diverso da zero noi *possiamo diminuire* quel valore per mezzo di un convenevole cambiamento nell'espressione che si è sostituita per x; sicchè

ne segue che U^2+V^2 deve essere capace del valore zero, cioè, U e V debbono svanire simultaneamente.

Si supponga un valore particolare assegnato ad x, e sia $a+b\sqrt{-1}$; allora $f(x)$ diventi $P+Q\sqrt{-1}$, in cui P e Q non sono tutti e due zero. Si ponga ora $a+b\sqrt{-1}+h$ per x in $f(x)$; il valore che allora prende $f(x)$ si può trovare sviluppando prima $f(x+h)$ secondo le potenze di h, e poi ponendo $a+b\sqrt{-1}$ per x. Supponiamo adunque

$$f(x+h)=X+hX'+\frac{h^2}{\lfloor 2}X''+\ldots\ldots+\frac{h^n}{\lfloor n}p_0\lfloor n,$$

in cui X, X', X'', ... sono funzioni di x; si vegga l'Art. 10. Si ponga $a+b\sqrt{-1}$ per x, allora X diventa $P+Q\sqrt{-1}$. *Alcuni* dei coefficienti X', X'', ... possono svanire per questo valore di x, ma essi non possono *tutti* svanire, poichè l'ultimo coefficiente, che è quello di $\frac{h^n}{\lfloor n}$, è $p_0\lfloor n$. Si supponga h^m la più piccola potenza di h per la quale il coefficiente non svanisce, e si dinoti il coefficiente di h^m con $R+S\sqrt{-1}$, sicchè R ed S non sono tutti e due zero. Così quando $a+b\sqrt{-1}+h$ si sostituisce per x la funzione $f(x)$ diviene

$$P+Q\sqrt{-1}+(R+S\sqrt{-1})\,h^m+\ldots,$$

in cui i termini non espressi possono contenere solamente potenze di h superiori ad h^m. Si dinoti questo con $P'+Q'\sqrt{-1}$.

Sia $h=\varepsilon t$, in cui ε è una quantità reale positiva. Per l'Art. 28 è in nostro potere di prendere t in modo che t^m sia $+1$ o -1; così possiamo fare

$$P'+Q'\sqrt{-1}=P+Q\sqrt{-1}\pm(R+S\sqrt{-1})\,\varepsilon^m+\ldots,$$

sicchè
$$P'=P\pm R\varepsilon^m+\ldots,$$
$$Q'=Q\pm S\varepsilon^m+\ldots,$$
e
$$P'^2+Q'^2=P^2+Q^2\pm 2\,(PR+QS)\,\varepsilon^m+\ldots,$$

in cui i termini non espressi possono contenere solamente potenze di ε superiori ad ε^m.

Ora ε può essere presa tanto piccola che il segno di tutt'i termini contenenti ε nel valore di $P'^2+Q'^2$ sarà lo stesso che il se-

gno di $\pm 2(PR+QS)\varepsilon^m$, purchè $PR+QS$ non sia zero; si vegga l'Art. 14.

Supporremo primieramente che $PR+QS$ non sia zero. Allora il segno di $P'^2+Q'^2-P^2-Q^2$ è lo stesso che il segno di $\pm 2(PR+QS)\varepsilon^m$, quando ε è presa sufficientemente piccola; e possiamo ritenere che questo segno sarà negativo supponendo che t^m sia -1 o $+1$, secondo che $PR+QS$ è positivo o negativo. Possiamo quindi rendere $P'^2+Q'^2$ minore di P^2+Q^2.

Supponiamo ora che $PR+QS$ sia zero. Allora invece di prendere $t^m=\pm 1$, si prenda $t^m=\pm\sqrt{-1}$. Procedendo come sopra otterremo

$$P'+Q'\sqrt{-1}=P+Q\sqrt{-1}\pm(R+S\sqrt{-1})\varepsilon^m\sqrt{-1}+\dots,$$

sicchè
$$P'=P\mp S\varepsilon^m+\dots,$$
$$Q'=Q\pm R\varepsilon^m+\dots,$$

e
$$P'^2+Q'^2=P^2+Q^2\pm 2(QR-PS)\varepsilon^m+\dots,$$

in cui i termini non espressi possono contenere solamente potenze di ε superiori ad ε^m.

Ora $(PR+QS)^2+(QR-PS)^2=(P^2+Q^2)(R^2+S^2)$; e questo non può essere zero, poichè per supposizione P^2+Q^2 non è zero, ed R^2+S^2 fu dimostrato essere differente da zero. Così poichè $PR+QS$ è zero, $QR-PS$ non è zero. Quindi il segno di $P'^2+Q'^2-P^2-Q^2$ sarà lo stesso che il segno di $\pm 2(QR-PS)\varepsilon^m$ quando ε è presa sufficientemente piccola; e possiamo ritenere che questo segno sarà negativo supponendo che t^m sia $-\sqrt{-1}$ o $+\sqrt{-1}$, secondo che $QR-PS$ è positivo o negativo. Possiamo quindi rendere $P'^2+Q'^2$ minore di P^2+Q^2.

Abbiamo così dimostrato che quando U^2+V^2 ha un valore qualunque diverso da zero possiamo diminuire questo valore per mezzo di un convenevole cambiamento nell'espressione che si è sostituita per x; cioè, U^2+V^2 non è suscettibile di un valore positivo che non possa essere diminuito; quindi, come abbiamo già annunziato, deve essere possibile che siano $U=0$ e $V=0$ simultaneamente.

30. Rimane a far vedere che a e b nell'espressione $a+b\sqrt{-1}$, che è il valore di x che fa svanire $f(x)$, sono *finiti*.

Abbiamo $f(x)=p_0x^n\left\{1+\frac{p_1}{p_0x}+\frac{p_2}{p_0x^2}+\ldots+\frac{p_n}{p_0x^n}\right\}$.

Si sostituisca $a+b\sqrt{-1}$ per x; allora $f(x)$ diviene

$$p_0(a+b\sqrt{-1})^n\left\{1+\frac{p_1}{p_0(a+b\sqrt{-1})}+\frac{p_2}{p_0(a+b\sqrt{-1})^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{p_n}{p_0(a+b\sqrt{-1})^n}\right\}.$$

Si prenda uno qualunque dei termini della serie entro le parentesi, per esempio, quello che contiene p_2; abbiamo

$$\frac{p_2}{p_0(a+b\sqrt{-1})^2}=\frac{p_0(a-b\sqrt{-1})^2}{p_0(a^2+b^2)^2}=\frac{p_2(a^2-b^2)}{p_0(a^2+b^2)^2}-\frac{2p_2ab\sqrt{-1}}{p_0(a^2+b^2)^2}$$
$$=A+B\sqrt{-1}, \text{ poniamo.}$$

Allora è evidente che A e B diminuiscono senza limite quando a e b crescono senza limite. Così dinotando il valore di $f(x)$ quando $x=a+b\sqrt{-1}$ con $U+V\sqrt{-1}$, abbiamo

$$U+V\sqrt{-1}=p_0(a+b\sqrt{-1})^n\{1+A'+B'\sqrt{-1}\},$$

in cui A' e B' diminuiscono senza limite quando a e b crescono senza limite.

Se poniamo $a-b\sqrt{-1}$ per x otterremo un risultato che può essere dedotto da quello ora dato cambiando il segno di $\sqrt{-1}$: così

$$U-V\sqrt{-1}=p_0(a-b\sqrt{-1})^n\{1+A'-B'\sqrt{-1}\};$$

quindi $$U^2+V^2=p_0^2(a^2+b^2)^n\{(1+A')^2+B'^2\},$$

e questo cresce senza limite quando a e b crescono senza limite; poichè il fattore $(a^2+b^2)^n$ cresce senza limite, ed il fattore $(1+A')^2+B'^2$ tende all'unità come suo limite. Così U^2+V^2 non può svanire quando a e b sono indefinitamente grandi, o pure quando uno di essi è indefinitamente grande.

31. Si sarà osservato nella dimostrazione dell'Articolo 29, che i coefficienti dell'equazione proposta possono essere reali o immaginarii. Nondimeno nella parte seguente di questo libro supporremo sempre i coefficienti essere reali a meno che non sia indicato il contrario.

32. La dimostrazione data in questo Capitolo dell'esistenza di una radice di un'equazione è detta la dimostrazione di Cauchy. Il soggetto è stato di nuovo discusso recentemente dai matematici, e due memorie su di esso si troveranno nel decimo Volume delle Transazioni della Società Filosofica di Cambridge, l'una del signor De Morgan, e l'altra del signor Airy; vi è un supplemento a quest'ultima. Apparisce dalla memoria del signor de Morgan che la dimostrazione conosciuta come di Cauchy era stata precedentemente data nella sostanza da Argand.

Possiamo indicare brevemente un'obiezione che alcune volte è stata mossa contro la dimostrazione di Cauchy. Si è detto essere *concepibile, fino a che non si dimostri il contrario, che* U^2+V^2 *si possa avvicinare indefinitamente ad un limite maggiore di zero senza mai raggiungere questo limite.* Ma questa obiezione si può rimuovere per mezzo dell'Art. 30. Stia z per U^2+V^2, cioè, per

$$f(a+b\sqrt{-1})\times f(a-b\sqrt{-1}):$$

allora sappiamo che z è finita per valori finiti di a e b, ed infinita per valori infiniti di a e b. Quindi il minimo valore di z deve aver luogo quando a e b hanno valori finiti; e se il minimo valore di z non fosse zero la dimostrazione dell'Art. 29 sarebbe contradetta.

Lo studente che conosce gli Elementi della Geometria a tre dimensioni troverà vantaggio supponendo a, b, e z essere coordinate di un punto nello spazio, ed immaginando la superficie determinata dalla relazione

$$z=f(a+b\sqrt{-1})\times f(a-b\sqrt{-1}).$$

III. PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI.

33. *Ogni equazione ha tante radici quante ha dimensioni, e niun'altra di più.*

Si supponga l'equazione essere dell'n^{mo} grado, e si dinoti con $f(x)=0$, in cui $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n$. Pel Capitolo II. l'equazione $f(x)=0$ ha una radice reale o immaginaria; dinoti a_1 questa radice. Quindi $f(x)$ è divisibile per $x-a_1$, per l'Art. 6; sicchè $f(x)=(x-a_1)\varphi_1(x)$, in cui $\varphi_1(x)$ è una funzione algebrica razionale intera di x dell' $(n-1)^{mo}$ grado. Ancora pel Capitolo II. l'equazione $\varphi_1(x)=0$ ha una radice reale o immaginaria; dinoti a_2 questa radice. Quindi $\varphi_1(x)$ è divisibile per $x-a_2$, per l'Art. 6; sicchè $\varphi_1(x)=(x-a_2)\varphi_2(x)$, in cui $\varphi_2(x)$ è una funzione algebrica razionale intera di x dell'$(n-2)^{mo}$ grado. Quindi $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\varphi_2(x)$. Procedendo in questo modo otterremo n fattori di $f(x)$ dinotati da $x-a_1$, $x-a_2$, ... $x-a_n$; ed il solo altro fattore deve essere p_0 poichè il coefficiente di x^n in $f(x)$ è p_0. Così

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n).$$

Quindi l'equazione $f(x)=0$ ha n radici, poichè $f(x)$ svanisce quando poniamo per x una qualunque delle n quantità a_1, a_2, ... a_n. E l'equazione non ha più di n radici, poichè se attribuiamo ad x un valore c che non è uno degli n valori a_1, a_2, ... a_n, il valore di $f(x)$ diviene

$$p_0(c-a_1)(c-a_2)(c-a_3)\ldots\ldots(c-a_n);$$

questo non è zero poichè ogni fattore è diverso da zero; ed il prodotto di fattori reali o immaginarii non svanirà se niuno dei fattori svanisce; si vegga l'Art. 26.

34. Le *radici* nell'Articolo precedente sono tutte o reali, o della forma $a+b\sqrt{-1}$, in cui a e b sono reali. Ed alcune delle radici $a_1, a_2, \ldots a_n$ possono essere *eguali* sicchè non vi sono necessariamente n radici *differenti* di un'equazione dell'n^{mo} grado. Lo studente può essere forse disposto a porre in dubbio la proprietà dell'espressione che un'equazione dell'n^{mo} grado ha sempre n radici, quando queste

radici non sono necessariamente tutte differenti. Però si è trovato conveniente di considerare che un'equazione dell'n^{mo} grado ha sempre n radici, benchè alcune delle radici possano essere eguali; appunto come nell'algebra ordinaria si è trovato conveniente di parlare dell'equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$ come avente *due radici eguali* quando $b^2 = 4ac$, piuttosto che di avere allora solamente una radice.

35. Il solo Articolo precedente del libro che può essere del tutto modificato dalla considerazione della possibilità di *radici eguali*, che è stata ora introdotta, è l'Articolo 22. In quell'Articolo si è dimostrato che un'equazione di una certa forma non può avere *due radici positive diverse,* ma la dimostrazione ivi data non esclude la possibilità di una seconda radice o di più radici *eguali* alla radice che necessariamente esiste. Non pertanto dopo che avremo dimostrato *la regola dei segni di Descartes* sarà manifesto che l'equazione in quistione può avere solamente una radice positiva senza alcuna ripetizione.

36. Se conosciamo una radice a_1 dell'equazione $f(x) = 0$ sappiamo che $f(x) = (x - a_1)\varphi_1(x)$ in cui $\varphi_1(x)$ è una funzione di x di un grado inferiore ad $f(x)$; e le rimanenti radici dell'equazione $f(x)=0$ si possono trovare se possiamo risolvere l'equazione $\varphi_1(x) = 0$ che è di un grado inferiore all'equazione $f(x) = 0$. Similmente se conosciamo due radici a_1 ed a_2 dell'equazione $f(x) = 0$ sappiamo che $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\varphi_2(x)$ in cui $\varphi_2(x)$ è una funzione di x di due gradi inferiore ad $f(x)$; e le rimanenti radici dell'equazione $f(x)=0$ si possono trovare se possiamo risolvere l'equazione $\varphi_2(x) = 0$, che è di due gradi inferiore all'equazione $f(x) = 0$. E così di seguito.

37. Se $f(x)$ è una funzione algebrica razionale intera di x dell'n^{mo} grado, abbiamo dimostrato che $f(x)$ deve essere capace di risoluzione in n fattori del primo grado, sicchè

$$f(x) = p_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots (x - a_n),$$

in cui $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ sono reali o immaginarie. Si deve osservare che vi è un *solo* sistema di fattori nei quali $f(x)$ può essere risoluta; questo si è già manifestato quando le quantità $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ sono tutte disuguali, ma rimane ancora ad essere dimostrato che quando alcune delle quantità $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ sono eguali, $f(x)$ non può essere formata in differenti maniere nelle quali gli stessi fattori si

trovino con esponenti diversi. Se è possibile si supponga che

$$f(x) = p_0 (x - a_1)^r (x - a_2)^s (x - a_3)^t \ldots\ldots$$

ed anche $$f(x) = p_0 (x - a_1)^\rho (x - a_2)^\sigma (x - a_3)^\tau \ldots\ldots$$

Si supponga r maggiore di ρ; allora dividendo per $(x-a_1)^\rho$ abbiamo

$$p_0 (x - a_1)^{r-\rho} (x - a_2)^s (x - a_3)^t \ldots\ldots = p_0 (x - a_2)^\sigma (x - a_3)^\tau \ldots\ldots$$

Ora il primo membro svanisce quando $x = a_1$, ma non così il secondo membro; le espressioni quindi non possono essere identiche, e quindi $f(x)$ non può ammettere più di un sistema di fattori.

38. *Se una funzione razionale intera di* x *dell'* n^mo^ *grado svanisce per più di* n *differenti valori di* x *ogni coefficiente nella funzione deve essere zero, sicchè la funzione deve essere zero per ogni valore di* x.

Infatti se ogni coefficiente nella funzione non è zero la funzione *non* svanirà per più di n valori differenti di x, sicchè se la funzione svanisce per più di n valori differenti di x *ogni* coefficiente nella funzione deve essere zero.

39. La dimostrazione nell'Articolo precedente fa dipendere la proposizione dal fatto che un'equazione dell'n^{mo} grado ha n radici, e così in ultimo dalle investigazioni del Capitolo II. Possiamo però stabilire la proposizione con una pruova induttiva che non richiede le investigazioni del Capitolo II.

Si supponga vero che quando una funzione di x dell'n^{mo} grado svanisce per più di n valori differenti di x ogni coefficiente nella funzione è zero; e cerchiamo di dimostrare che quando una funzione di x dell'$(n+1)^{mo}$ grado svanisce per più di $n+1$ valori differenti di x ogni coefficiente nella funzione è zero.

Sia $f(x) = q_0 x^{n+1} + q_1 x^n + q_2 x^{n-1} + \ldots\ldots + q_n x + q_{n+1}$, e si supponga che più di $n+1$ valori di x facciano svanire $f(x)$. Sia a uno di questi valori sicchè $f(a) = 0$. Allora $f(x) = f(x) - f(a)$

$$= q_0(x^{n+1} - a^{n+1}) + q_1(x^n - a^n) + q_2(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots\ldots + q_n(x - a).$$

Questo può essere scritto nella forma

$$f(x) = (x - a)\, \varphi(x),$$

in cui $\varphi(x)$ è una funzione di x dell'n^{mo} grado. Poichè allora vi

sono più di n valori differenti di x, oltre di a, che fanno svanire $f(x)$, vi sono più di n valori differenti di x che fanno svanire $\varphi(x)$; quindi per la supposizione ogni coefficiente in $\varphi(x)$ è zero. Ora per l'Art. 7,

$$\varphi(x) = q_0 x^n + (q_0 a + q_1) x^{n-1} + (q_0 a^2 + q_1 a + q_2) x^{n-2} + \ldots\ldots;$$

così $q_0 = 0$ poichè il coefficiente di x^n è zero, quindi $q_1 = 0$ poichè il coefficiente di x^{n-1} è anche zero, quindi $q_2 = 0$ poichè il coefficiente di x^{n-2} è anche zero, e così di seguito.

Così ogni coefficiente in $f(x)$ è zero.

Ciò stabilisce la proposizione, poichè si sa essere vera per le espressioni del primo e del secondo grado.

40. Se $f(x)$ è una funzione di x dell'n^{mo} grado abbiamo dimostrato che $f(x)$ può essere risoluta in n fattori del primo grado. Ciascuno di questi fattori dividerà $f(x)$ sicchè $f(x)$ ammetterà n divisori del primo grado. Similmente siccome il prodotto di *due qualunque* dei fattori del primo grado contenuti in $f(x)$ sarà un fattore del secondo grado contenuto in $f(x)$, ne segue che $f(x)$ ammetterà $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ divisori del secondo grado. Procedendo così vediamo che $f(x)$ ammetterà tanti divisori dell'r^{mo} grado quante sono le combinazioni di n cose prese ad r per volta, cioè, $f(x)$ ammetterà $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$ divisori dell'r^{mo} grado.

Ma si deve rammentare che i divisori di qualsivoglia grado, per esempio il secondo, non saranno necessariamente *tutti differenti*, poichè i fattori del primo grado in $f(x)$ non sono necessariamente tutti differenti. La proposizione però mostra che *non vi possono essere più* di $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$ divisori differenti dell'r^{mo} grado.

41. *In un' equazione con coefficienti reali le radici immaginarie si trovano a coppie.*

Sia $f(x)$ una funzione razionale intera di x nella quale i coefficienti sono tutti reali; allora se $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ è una radice dell'equazione $f(x) = 0$ anche $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ è una radice.

Infatti quando $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ si pone per x la funzione $f(x)$ prende la forma $P+Q\beta\sqrt{-1}$, in cui P e Q contengono potenze *pari* di β. Questo è chiaro, poichè se si sviluppa un'espressione come x^r, in cui $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, le potenze pari di $\beta\sqrt{-1}$ daranno origine a termini *reali*, sicchè $\sqrt{-1}$ si troverà solamente in unione con le potenze *dispari* di β. *E siccome i coefficienti in* f(x) *sono supposti reali* $\sqrt{-1}$ non si può trovare eccetto che con qualche potenza dispari di β. Se allora $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ si sostituisce per x in $f(x)$ il risultato si otterrà cambiando il segno di β nel risultato ottenuto sostituendo $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ per x; il risultato è quindi $P-Q\beta\sqrt{-1}$.

Ora si supponga che $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ sia una radice di $f(x)=0$; allora

$$P+Q\beta\sqrt{-1}=0,$$

e, siccome una quantità reale P non può essere eguale ad una quantità immaginaria $-Q\beta\sqrt{-1}$, ciò richiede

$$P=0, \text{ e } Q=0.$$

E quindi $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ è anche una radice di $f(x)=0$.

42. Così se $f(x)$ è una funzione razionale intera di $f(x)$ con coefficienti reali, ed ha un fattore $x-a_1$ in cui $a_1=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, essa ha anche un fattore $x-a_2$ in cui $a_2=\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Il *prodotto* dei due fattori $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ ed $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$, è $(x-\alpha)^2+\beta^2$, o sia $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$; cioè, il prodotto è un fattore quadratico reale.

43. Siamo così giunti al risultato che ogni funzione razionale intera di x con coefficienti reali può essere riguardata come il prodotto di fattori *reali*, semplici o quadratici; e che il sistema di tali fattori è unico per ogni funzione data. Così $f(x)$ deve essere della forma $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)\varphi(x)$, in cui $a, b, c, \ldots k$ sono tutte le radici *reali* di $f(x)=0$, e $\varphi(x)$ è una funzione formata dal prodotto di fattori quadratici i quali non possono cambiare il loro segno.

44. Nel modo dell'Art. 41 si può dimostrare che se i coefficienti di una funzione razionale intera $f(x)$ di x sono essi stessi *razionali*, e l'equazione $f(x)=0$ ha una radice della forma $a+\sqrt{b}$ in cui $\sqrt{b}$ è

un irrazionale, l'equazione ha anche una radice $a-\sqrt{b}$. Così $f(x)$ ha un fattore quadratico razionale $(x-a)^2-b$.

45. *Ricercare le relazioni tra i coefficienti della funzione* f(x) *e le radici dell' equazione* f(x) = 0.

Sia $$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n;$$

e si supponga che le radici dell'equazione $f(x)=0$ siano $a_1, a_2, \ldots a_n$; allora

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Poichè queste due espressioni per $f(x)$ sono identicamente eguali, esistono relazioni tra i coefficienti $p_1, p_2, \ldots p_n$, e le quantità $a_1, a_2, \ldots a_n$; queste relazioni andremo ora ad esibire.

Con la moltiplicazione ordinaria otteniamo

$$(x-a_1)(x-a_2)=x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2,$$

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2$$
$$+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x-a_1a_2a_3.$$

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)=x^4-(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2$$
$$-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.$$

Ora in questi risultati vediamo che hanno luogo le leggi seguenti.

I. Il numero dei termini nel secondo membro supera di un'unità il numero dei fattori semplici che sono stati moltiplicati insieme.

II. L'esponente di x nel primo termine è lo stesso che il numero dei fattori semplici, e negli altri termini ciascun esponente è minore di quello del termine precedente di un'unità.

III. Il coefficiente del primo termine è l'unità; il coefficiente del secondo termine è la somma dei secondi termini dei fattori semplici; il coefficiente del terzo termine è la somma dei prodotti a due a due dei secondi termini dei fattori semplici; il coefficiente del quarto termine è la somma dei prodotti dei secondi termini dei fattori semplici presi a tre per volta, e così di seguito; l'ultimo termine è il prodotto di tutt'i secondi termini dei fattori semplici.

Dimostreremo ora che queste leggi reggono qualunque sia il numero dei fattori semplici. Si supponga che queste leggi valgano quando $n-1$ fattori sono moltiplicati insieme, cioè, si supponga

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})=x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1},$$

in cui q_1 = alla somma dei termini $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_{n-1}$,

q_2 = alla somma dei prodotti di questi termini presi due per volta,

q_3 = alla somma dei prodotti di questi termini presi tre per volta,

.....

q_{n-1} = al prodotto di tutti questi termini.

Si moltiplichino ambo i lati di questa identità per un altro fattore $(x-a_n)$; così

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=x^n+(q_1-a_n)x^{n-1}+(q_2-q_1a_n)x^{n-2}$$
$$+(q_3-q_2a_n)x^{n-3}+\ldots\ldots+q_{n-1}a_n.$$

Ora $q_1-a_n=-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-a_n$

= alla somma di tutt'i termini $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_n$;

$q_2-q_1a_n=q_2+a_n(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})$

= alla somma dei prodotti a due a due di tutt'i termini $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_n$;

$q_3-q_2a_n=q_3-a_n(a_1a_2+a_2a_3+\ldots)$

= alla somma dei prodotti a tre a tre di tutt'i termini $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_n$;

.....

$-q_{n-1}a_n$ = al prodotto di tutt'i termini $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_n$.

Quindi se le leggi valgono quando $n-1$ fattori sono moltiplicati insieme esse valgono quando n fattori sono moltiplicati insieme; ma si è dimostrato che esse valgono quando quattro fattori sono moltiplicati insieme, quindi esse valgono quando cinque fattori sono moltiplicati insieme, e così di seguito; così esse valgono in generale.

Poichè se a_1, a_2, ... a_n sono le radici dell'equazione

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0,$$

il primo membro è equivalente al prodotto dei fattori $x-a_1$, $x-a_2$, ... $x-a_n$, abbiamo i seguenti risultati. In ogni equazione nella sua forma più semplice il coefficiente del secondo termine è eguale alla somma delle radici con i loro segni mutati; il coefficiente del terzo termine è eguale alla somma dei prodotti delle radici prese a due a due con i loro segni mutati; il coefficiente del quarto termine è eguale alla somma dei prodotti delle radici prese a tre a tre con i loro segni mutati; ..... l'ultimo termine è eguale al prodotto di tutte le radici con i loro segni mutati.

O pure possiamo enunciare le leggi così: il coefficiente del secondo termine *col suo segno mutato* è eguale alla somma delle radici; il coefficiente del terzo termine è eguale alla somma dei prodotti delle radici prese a due a due; il coefficiente del quarto termine *col suo segno mutato* è eguale alla somma dei prodotti delle radici prese a tre a tre; e così di seguito. Così generalmente se p_r dinota come al solito il coefficiente di x^{n-r} nell'equazione, $(-1)^r p_r$ = alla somma dei prodotti delle radici prese ad r ad r.

46. Potrebbe forse sembrare che le relazioni date nell'Articolo precedente ci abilitassero a trovare le radici di un'equazione proposta; poichè esse forniscono equazioni che contengono le radici, ed il numero di queste equazioni è lo stesso che il numero delle radici, sicchè si potrebbe supporre praticabile di eliminare tutte le radici eccetto una e così di determinare quella radice. Ma nel tentare questa eliminazione noi *riproduciamo puramente la stessa equazione proposta*. Si prenda, per esempio, l'equazione del terzo grado

$$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0;$$

si suppongano le radici essere a, b, c; allora

$$-a-b-c = p_1,$$

$$ab + bc + ca = p_2,$$

$$-abc = p_3.$$

Per eliminare b e c e così ottenere un'equazione che contiene solamente a, il metodo più semplice si è di moltiplicare la prima

delle tre precedenti equazioni per a^2, e la seconda per a, ed aggiungere i risultati alla terza. Così

$$-a^3-a^2b-a^2c+a^2b+abc+ca^2-abc=p_1a^2+p_2a+p_3;$$

cioè,

$$a^3+p_1a^2+p_2a+p_3=0;$$

abbiamo così l'equazione proposta con a invece di x per rappresentare la quantità incognita. E non è difficile di vedere che dobbiamo aspettare un'equazione cubica in a, se eliminiamo b e c dalle relazioni che stiamo considerando. Infatti le lettere a, b, c rappresentano le radici senza alcuna distinzione di una radice dalle altre; così ogni equazione che deduciamo per determinare a deve dare tre valori per a, poichè a può rappresentare una qualunque delle tre radici dell'equazione proposta. Così ci possiamo sentire certi che riprodurremo solamente la forma originale dell'equazione proposta qualunque siano le operazioni algebriche eseguite sulle relazioni che legano i noti coefficienti dell'equazione con le sue incognite radici, allo scopo di eliminare tutte le radici ad eccezione di una.

47. Benchè le relazioni date nell'Art. 45 non determinino le radici di un'equazione proposta, troveremo che esse ci abilitano a dedurre varii risultati importanti rispetto alle equazioni. Per esempio, se a_1, a_2, ... a_n sono le radici dell'equazione

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

abbiamo

$$-p_1=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$

$$p_2=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_2a_3+\ldots;$$

così

$$p_1^2-2p_2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2,$$

cioè $p_1^2-2p_2$ è eguale alla somma dei quadrati delle radici dell'equazione proposta. Se dunque in un'equazione $p_1^2-2p_2$ è *negativa*, le radici dell'equazione non possono essere tutte reali.

48. Nello stesso modo come nell'Articolo precedente possiamo dedurre altre relazioni tra le radici. Così per esempio

$(-1)^{n-1}p_{n-1}=$ alla somma dei prodotti delle radici ad $n-1$ la volta,

$(-1)^n p_n=$ al prodotto di tutte le radici;

quindi con la divisione

$$-\frac{p_{n-1}}{p_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

$=$ alla somma dei valori reciproci delle radici.

Ancora $p_1 \dfrac{p_{n-1}}{p_n} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$

$$= n + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \ldots + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots;$$

quindi $$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \ldots + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots = \frac{p_1 p_{n-1}}{p_n} - n,$$

IV. TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI.

49. L'oggetto generale di questo Capitolo si è di dedurre da una data equazione un'altra equazione le radici della quale abbiano una relazione assegnata con quelle dell'equazione proposta. Si vedrà in prosieguo che varie trasformazioni di tal sorta si possono effettuare senza conoscere le radici dell'equazione data; ed in appresso s'incontreranno esempii i quali mostreranno che tali trasformazioni possono essere utili nella risoluzione dell'equazioni.

50. *Trasformare un'equazione in un'altra le radici della quale siano quelle dell'equazione proposta con i segni contrarii.*

Dinoti $f(x)=0$ l'equazione proposta; si ponga $y=-x$, sicchè quando x ha un particolare valore, y ha numericamente lo stesso valore ma col segno contrario; così $x=-y$, e l'equazione richiesta è $f(-y)=0$.

Se $$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

l'equazione $f(-y)=0$ è

$$p_0(-y)^n + p_1(-y)^{n-1} + p_2(-y)^{n-2} + \ldots - p_{n-1} y + p_n = 0,$$

cioè, $$p_0 y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \ldots \pm p_{n-1} y \mp p_n = 0;$$

così l'equazione trasformata si può ottenere dalla equazione proposta *cambiando il segno del coefficiente di ciascun termine alternativamente cominciando dal secondo termine.*

51. La regola in fine dell'Articolo precedente ammette che l'equazione proposta abbia tutt'i termini che si possono trovare in un'equazione del suo grado, cioè, si ammette che nessun coeffi-

ciente sia zero. Ma supponiamo che si prenda un esempio in cui non sia questo il caso; così sia richiesto di trasformare l'equazione

$$x^6+3x^5-4x^3-4x+7=0,$$

in un'altra in cui le radici siano numericamente le stesse ma con i segni contrarii. Si ponga $x=-y$, ed abbiamo

$$y^6-3y^5+4y^3+4y+7=0.$$

Possiamo se ci piace scrivere l'equazione primitiva così,

$$x^6+3x^5+0x^4-4x^3+0x^2-4x+7=0;$$

allora l'equazione trasformata secondo la regola nell'Art. 50, è

$$y^6-3y^5+0y^4+4y^3+0y^2+4y+7=0,$$

cioè,
$$y^6-3y^5+4y^3+4y+7=0,$$
come prima.

Un'equazione si dice essere *completa* quando essa ha tutt'i termini che si possono trovare in un'equazione del suo grado, cioè, quando nessun coefficiente è zero. Ed alle volte troveremo utile di rendere un'equazione completa con l'artificio usato sopra, cioè introducendo i termini mancanti con zero per coefficiente di ciascuno di essi.

52. *Trasformare un'equazione in un'altra le radici della quale siano eguali a quelle dell'equazione proposta moltiplicate per una quantità data.*

Dinoti $f(x)=0$ l'equazione proposta; e si cerchi di trasformarla in un'altra le radici della quale siano k volte così grandi. Si ponga $y=kx$, sicchè quando x ha un particolare valore, il valore di y è k volte così grande; così $x=\frac{y}{k}$, e l'equazione richiesta è $f\left(\frac{y}{k}\right)=0$.

53. Per esempio, trasformiamo l'equazione

$$x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{5x}{4}-\frac{2}{9}=0$$

in un'altra le radici della quale siano k volte così grandi. Si ponga $x=\frac{y}{k}$ e quindi si moltiplichi da per tutto per k^3; così otteniamo

$$y^3-\frac{3ky^2}{2}+\frac{5k^2y}{4}-\frac{2k^3}{9}=0.$$

Questo esempio ci mostrerà un'applicazione che si può fare della presente trasformazione. I coefficienti dell'equazione proposta non sono tutti interi; ma prendendo k convenientemente possiamo rendere i coefficienti dell'equazione trasformata tutti interi. Per esempio, se $k=6$, l'equazione trasformata è

$$y^3-9y^2+45y-48=0.$$

Generalmente, si supponga l'equazione proposta essere

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

allora se poniamo $x=\frac{y}{k}$, e moltiplichiamo tutto per k^n, tutto ciò che è necessario per far sì che i coefficienti dell'equazione trasformata siano interi si è, che per ciascun termine dell'equazione trasformata $p_rk^ry^{n-r}$, ogni fattore primo che si trova nel denominatore di p_r si trovi almeno ad eguale potenza in k^r.

54. *Trasformare un'equazione in un'altra le radici della quale siano minori di quelle dell'equazione proposta per una differenza costante.*

Dinoti $f(x)=0$ l'equazione proposta; e si cerchi di trasformare questa equazione in un'altra le radici della quale siano minori delle radici della proposta per una differenza costante k. Si ponga $y=x-k$, sicchè quando x ha un particolare valore, il valore di y ne è minore per k; così $x=k+y$, e l'equazione richiesta è $f(k+y)=0$.

Per l'Art. 10 la forma sviluppata dell'equazione $f(k+y)=0$ è

$$f(k)+yf'(k)+\frac{y^2}{1\cdot 2}f''(k)+\frac{y^3}{\lfloor 3}f'''(k)+\ldots+y^n\frac{f^n(k)}{\lfloor n}=0.$$

Così se $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$, l'equazione $f(k+y)=0$ ordinata secondo le potenze *discendenti* di y è per l'Art. 12

$$p_0y^n+(p_1+np_0k)y^{n-1}+\left\{p_2+(n-1)p_1k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p_0k^2\right\}y^{n-2}$$
$$+\ldots$$
$$+\left\{p_r+(n-r+1)p_{r-1}k+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}p_0k^r\right\}y^{n-r}$$
$$+\ldots+f(k)=0.$$

55. Se un'equazione deve essere trasformata in un'altra le radici della quale *eccedano* quelle dell'equazione proposta per la quan-

tità costante k, adoperiamo il metodo dell'Articolo precedente. Sia l'equazione proposta dinotata da $f(x)=0$, e si supponga $y=x+h$; allora $x=y-h$, e l'equazione richiesta è $f(y-h)=0$. Così dobbiamo porre solamente $-h$ per k nel risultato dell'Articolo precedente, ed otteniamo l'equazione richiesta. Ma in fatti questo è incluso nell'Articolo precedente; poichè quell'Articolo non richiede che k sia necessariamente una quantità positiva.

56. Il principale uso della trasformazione nell'Art. 54 si è di ottenere dall'equazione proposta un'altra che *manchi di un termine assegnato*. Così se vogliamo che l'equazione trasformata in y sia senza il *secondo* termine, prendiamo k tale che sia $p_1+np_0k=0$, cioè $k=-\frac{p_1}{np_0}$. Se vogliamo che l'equazione trasformata in y sia senza il *terzo* termine, dobbiamo trovare k dall'equazione quadratica

$$p_2+(n-1)\,p_1k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,p_0k^2=0.$$

E generalmente, se vogliamo che l'equazione trasformata in y sia senza il suo $(r+1)^{\text{mo}}$ termine, dobbiamo trovare k da un'equazione dell'r^{mo} grado, propriamente

$$p_0k^r+\frac{r}{n}p_1k^{r-1}+\frac{r(r-1)}{n(n-1)}p_2k^{r-2}+\ldots+\frac{\lfloor r\,\lfloor n-r}{\lfloor n}p_r=0.$$

Vedremo in seguito che la soluzione di un'equazione è alle volte facilitata col togliere prima qualche termine assegnato.

57. Per esempio, trasformiamo l'equazione $x^3-6x^2+4x+5=0$ in un'altra senza il secondo termine. Qui $p_0=1$, $p_1=-6$; così $k=2$, e l'equazione richiesta è

$$(y+2)^3-6\,(y+2)^2+4\,(y+2)+5=0,$$

cioè,
$$y^3-8y-3=0.$$

Ancora, trasformiamo l'equazione $x^3-2x^2-4x+9=0$ in un'altra senza il terzo termine. Si ponga $y+k$ per x; l'equazione trasformata è

$$(y+k)^3-2\,(y+k)^2-4\,(y+k)+9=0,$$

cioè, $y^3+y^2\,(3k-2)+y\,(3k^2-4k-4)+k^3-2k^2-4k+9=0.$

Se il terzo termine deve sparire k deve essere trovata dall'equazione $3k^2-4k-4=0$; questa dà $k=2$ o $-\frac{2}{3}$. Col valore $k=2$ l'equazione trasformata è

$$y^3+4y^2+1=0.$$

Col valore $k=-\frac{2}{3}$ l'equazione trasformata è

$$y^3-4y^2+\frac{283}{27}=0.$$

58. *Trasformare un'equazione in un'altra le radici della quale siano le reciproche delle radici dell'equazione proposta.*

Dinoti $f(x)=0$ l'equazione proposta. Si ponga $y=\frac{1}{x}$, sicchè quando x ha un particolare valore, il valore di y è il reciproco di quel valore; così $x=\frac{1}{y}$ e l'equazione richiesta è $f\left(\frac{1}{y}\right)=0$.

Così se $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$ l'equazione $f\left(\frac{1}{y}\right)=0$ è

$$\frac{p_0}{y^n}+\frac{p_1}{y^{n-1}}+\frac{p_2}{y^{n-2}}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{y}+p_n=0,$$

cioè, $$p_ny^n+p_{n-1}y^{n-1}+p_{n-2}y^{n-2}+\ldots+p_1y+p_0=0.$$

59. *Trasformare un'equazione in un'altra le radici della quale siano i quadrati delle radici dell'equazione proposta.*

Dinoti $f(x)=0$ l'equazione proposta. Si ponga $y=x^2$, sicchè quando x ha un particolare valore il valore di y è il quadrato di quel valore: così $x=\sqrt{y}$ e l'equazione richiesta è $f(\sqrt{y})=0$.

Così se $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$ l'equazione $f(\sqrt{y})=0$ è

$$p_0y^{\frac{n}{2}}+p_1y^{\frac{n-1}{2}}+p_2y^{\frac{n-2}{2}}+\ldots+p_{n-1}y^{\frac{1}{2}}+p_n=0.$$

Trasponendo ed elevando a quadrato abbiamo

$$\left(p_0y^{\frac{n}{2}}+p_2y^{\frac{n-2}{2}}+p_4y^{\frac{n-4}{2}}+\ldots\right)^2=\left(p_1y^{\frac{n-1}{2}}+p_3y^{\frac{n-3}{2}}+\ldots\right)^2.$$

L'equazione sarà in una forma razionale quando i due membri sa-

ranno sviluppati, e portando tutt'i termini da una parte otteniamo

$$p_0^2 y^n + (2p_0p_2 - p_1^2) y^{n-1} + (2p_0p_4 + p_2^2 - 2p_1p_3) y^{n-2} + \ldots = 0.$$

60. Questi casi di trasformazione delle equazioni potrebbero essere accresciuti, ma abbiamo detto abbastanza per spiegare questa parte del soggetto. Conchiuderemo con tre esempi che rischiareranno l'uso di alcune delle relazioni stabilite nell' Art. 45.

(1) Se le radici dell'equazione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ sono a, b, c, formare l'equazione di cui le radici sono

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}.$$

Si dinoti l'equazione cercata con

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0.$$

Allora abbiamo, per l'Art. 45,

$$-P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

$$Q = \frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)},$$

$$-R = \frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)};$$

ed $$a+b+c = -p, \quad ab+bc+ca = q, \quad abc = -r.$$

Così possiamo ora procedere ad esprimere i valori di P, Q, ed R per mezzo di p, q, ed r. Per esempio

$$R = \frac{r}{(b+c)(c+a)(a+b)};$$

ora eseguendo la moltiplicazione troviamo

$$(b+c)(c+a)(a+b) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$$
$$= -pq + r;$$

quindi $$R = \frac{r}{r-pq}.$$

Similmente possiamo esprimere P e Q.

Ma possiamo evitare il fastidio di questo procedimento con un artificio algebrico. Abbiamo

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{a+b+c-a}=\frac{a}{-p-a}.$$

Così se $y=-\frac{x}{p+x}$, quando x prende il valore a il valore di y è $\frac{a}{b+c}$; e similmente quando x prende i valori b e c i valori di y sono rispettivamente $\frac{b}{c+a}$ e $\frac{c}{a+b}$.

Così l'equazione richiesta si otterrà elimando x tra l'equazione proposta ed $y=-\frac{x}{p+x}$.

Quindi $x=-\frac{py}{1+y}$; e sostituendo questo valore nell'equazione proposta otteniamo

$$-\frac{p^3y^3}{(1+y)^3}+\frac{p^3y^2}{(1+y)^2}-\frac{pqy}{1+y}+r=0,$$

o sia $$r(1+y)^3+p^3y^2(1+y)-pqy(1+y)^2-p^3y^3=0,$$

cioè $$(r-pq)y^3+(3r+p^3-2pq)y^2+(3r-pq)y+r=0.$$

Quindi con questo metodo arriviamo indirettamente ai valori di P, Q, ed R: vediamo che

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=-\frac{3r+p^3-2pq}{r-pq},$$

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=\frac{3r-pq}{r-pq},$$

$$\frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}=-\frac{r}{r-pq}.$$

L'ultimo risultato è stato già ottenuto con ricerca diretta.

(2) Trasformare l'equazione $x^3+qx+r=0$ in un'altra le radici della quale siano i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione proposta.

Dinotino a, b, c le radici dell'equazione proposta; allora per l'Art. 45,

$$a+b+c=0, \quad ab+bc+ca=q, \quad abc=-r;$$

onde
$$a^2+b^2+c^2=-2q.$$

Le radici dell'equazione trasformata debbono essere $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, ed $(a-c)^2$; ora

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2+b^2+c^2-2ab-c^2=a^2+b^2+c^2-\frac{2abc}{c}-c^2$$

$$=-2q+\frac{2r}{c}-c^2;$$

così se $y=-2q+\frac{2r}{x}-x^2$, quando x prende il valore c il valore di y è $(a-b)^2$; e similmente quando x prende i valori a e b, i valori di y sono rispettivamente $(b-c)^2$ e $(c-a)^2$. Così l'equazione trasformata si otterrà eliminando x tra l'equazione proposta ed $y=-2q+\frac{2r}{x}-x^2$.

Così
$$x^3+qx+r=0,$$

ed
$$x^3+(2q+y)\,x-2r=0;$$

onde
$$(q+y)\,x-3r=0.$$

Così $x=\frac{3r}{q+y}$; sostituendo questo valore nell'equazione proposta e riducendo, abbiamo finalmente

$$y^3+6qy^2+9q^2y+27r^2+4q^3=0.$$

Quindi se $27r^2+4q^3$ è positivo l'equazione trasformata ha una radice reale negativa per l'Art. 20; e quindi l'equazione proposta deve avere due radici immaginarie, poichè solamente una tale coppia di radici può produrre una radice *negativa* nell'equazione trasformata.

Se $27r^2+4q^3$ è zero l'equazione trasformata ha una radice eguale a zero, e quindi l'equazione proposta deve avere due radici eguali.

(3) Trasformare l'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$ in un'altra le radici della quale siano i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione proposta.

Si ponga $x = x' - \frac{p}{3}$; così l'equazione proposta diviene

$$\left(x' - \frac{p}{3}\right)^3 + p\left(x' - \frac{p}{3}\right)^2 + q\left(x' - \frac{p}{3}\right) + r = 0,$$

cioè,
$$x'^3 + q'x' + r' = 0,$$

in cui
$$q' = q - \frac{p^2}{3}, \qquad r' = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

Ciascuna radice dell'ultima equazione eccede la corrispondente radice dell'equazione proposta per $\frac{p}{3}$; e così i quadrati delle differenze delle radici dell'ultima equazione sono gli stessi che i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione proposta. Così per l'esempio precedente l'equazione richiesta è

$$y^3 + 6q'y^2 + 9q'^2y + 27r'^2 + 4q'^3 = 0;$$

cioè,

$$y^3 + 2(3q - p^2)y^2 + (3q - p^2)^2 y + \frac{(2p^3 - 9pq + 27r)^2 + 4(3q - p^2)^3}{27} = 0.$$

Quindi se a, b, c sono le radici di $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, vediamo che

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = -2(3q - p^2),$$

$$(a-b)^2(b-c)^2 + (b-c)^2(c-a)^2 + (c-a)^2(a-b)^2 = (3q - p^2)^2,$$

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -\frac{1}{27}\left\{(2p^3 - 9pq + 27r)^2 + 4(3q - p^2)^3\right\}.$$

V. REGOLA DEI SEGNI DI DESCARTES.

61. Negli Art. 21—24 abbiamo già dato esempi del legame che esiste tra i segni dei coefficienti in $f(x)$ e la natura delle radici dell'equazione $f(x) = 0$, ed ora passiamo ad investigare un teorema generale sul soggetto dopo alcune definizioni preliminari.

62. Quando ciascun termine di un gruppo di termini ha uno dei segni $+$ e $-$ innanzi di se, allora considerando i termini in ordine, si dice esservi una *permanenza* quando un segno è lo stesso del segno che immediatamente lo precede, e si dice di esservi una *varia-*

zione quando un segno è contrario al segno che immediatamente lo precede. Così nell'espressione $x^8-3x^7-4x^6+7x^5+3x^4+2x^3-x^2-x+1$, vi sono quattro permanenze e quattro variazioni; la prima permanenza si ha $a-4x^6$, la seconda $a+3x^4$, la terza $a+2x^3$, la quarta $a-x$; la prima variazione si ha $a-3x^7$, la seconda $a+7x^5$, la terza $a-x^2$, la quarta $a+1$.

È chiaro che in un'equazione *completa* il numero delle permanenze insieme col numero delle variazioni è eguale al numero che esprime il grado dell'equazione; si vegga l'Art. 51. E se in un'equazione completa poniamo $-x$ per x, le permanenze e le variazioni nell'equazione primitiva diventano rispettivamente variazioni e permanenze nella nuova equazione. In un'equazione $f(x)=0$ che non è completa, la somma dei numeri delle variazioni di $f(x)$ e di $f(-x)$ non può essere *maggiore* del grado dell'equazione; poichè se mancano dei termini in $f(x)$, benchè possa accadere che il numero delle variazioni in $f(x)$ o in $f(-x)$ sia così diminuito, esso non può essere aumentato.

Enuncieremo ora e dimostreremo un teorema il quale vien detto la *Regola dei Segni* di Descartes.

63. *In un'equazione completa o incompleta, il numero delle radici positive non può eccedere il numero delle variazioni nei segni dei coefficienti, ed in un'equazione completa il numero delle radici negative non può eccedere il numero delle permanenze nei segni dei coefficienti.*

Mostreremo da prima che se un polinomio è moltiplicato per un fattore $x-a$ vi sarà almeno una *variazione* di più nel prodotto che nel polinomio primitivo.

Si supponga per esempio che i segni dei termini nel polinomio primitivo siano $++---+-+--+$. Dobbiamo moltiplicare il polinomio per un binomio in cui i segni dei termini sono $+-$. Allora scrivendo solamente i *segni* che s'incontrano nel procedimento e nel risultato abbiamo

$$\begin{array}{l}
++---+-+--+ \\
+- \\
\hline
++---+-+--+ \\
\quad --++++-+-++- \\
\hline
+\pm-\mp\mp+-+-\mp+-
\end{array}$$

Un doppio segno è posto dove il segno di un termine nel prodotto

è ambiguo. Osservando il risultato si vedranno aver luogo le seguenti leggi.

(1) Ogni gruppo di permanenze nel polinomio primitivo ha un gruppo dello stesso numero di ambiguità corrispondente ad esso nel nuovo polinomio.

(2) Nel nuovo polinomio i segni prima e dopo di un'ambiguità o di un gruppo di ambiguità sono contrarii.

(3) Nel nuovo polinomio una variazione di segno è introdotta alla fine.

Ora nel nuovo polinomio si prenda il caso più sfavorevole e si supponga che tutte le ambiguità siano rimpiazzate da permanenze; per la seconda legge possiamo allora senza alterare il numero delle permanenze adottare il segno superiore per le ambiguità; e così i segni del polinomio primitivo saranno ripetuti nel nuovo polinomio, eccetto che per la terza legge vi è una variazione addizionale di segno introdotta alla fine del nuovo polinomio. Così nel caso più sfavorevole vi è una variazione di segno di più nel nuovo polinomio che nel polinomio primitivo.

Se dunque supponiamo già formato il prodotto di tutt'i fattori corrispondenti alle radici negative ed immaginarie di un'equazione, moltiplicando pel fattore corrispondente a ciascuna radice positiva introduciamo almeno *una variazione di segno*. Quindi nessuna equazione può avere più radici positive di quel che abbia variazioni di segno.

Per dimostrare la seconda parte della regola dei segni di Descartes supponiamo l'equazione *completa*, e si ponga $-y$ per x; allora le *permanenze* primitive di segno diventano *variazioni* di segno. E l'equazione trasformata non può avere più radici positive di quel che abbia variazioni; e così non vi possono essere più radici negative dell'equazione primitiva di quel che sia il numero delle permanenze di segno in quella equazione primitiva.

64. Sia l'equazione $f(x)=0$ completa o pur no le sue radici sono eguali in grandezza ma contrarie di segno alle radici di $f(-x)=0$, cioè, le radici negative di $f(x)=0$ sono le radici positive di $f(-x)=0$; e sia l'equazione completa o pur no il numero delle radici positive di $f(-x)=0$ non può eccedere il numero delle variazioni di segno in $f(-x)$. Così l'intera regola dei segni può essere enunciata nel seguente modo; un'equazione $f(x)=0$ non può avere più radici

positive di quel che siano le variazioni di segno in $f(x)$, e non può avere più radici negative di quel che siano le variazioni di segno in $f(-x)$.

65. Per esempio, si prenda l'equazione $x^4+3x^2+5x-7=0$. Qui vi è *una* variazione di segno, e quindi non vi può essere più di una radice positiva. E scrivendo $-x$ per x otteniamo l'equazione $x^4+3x^2-5x-7=0$; qui vi è *una* variazione di segno, e quindi non vi può essere più di una radice positiva, sicchè l'equazione primitiva non può avere più di una radice negativa. Così l'equazione primitiva non può avere più di due radici reali.

In questo esempio sappiamo per l'Art. 21 che vi *è* una radice positiva, e che vi *è* una radice negativa; ed abbiamo ora accertato che non ve ne può essere più di una di ciascuna sorta.

Ancora, si consideri l'equazione $x^3+qx+r=0$, in cui q ed r sono entrambi positivi. Qui non vi è alcuna variazione di segno, e quindi non vi è alcuna radice positiva; questo apparisce anche dall'Art. 24. Se scriviamo $-x$ per x, otteniamo un'equazione con *una* variazione di segno, sicchè l'equazione primitiva non può avere più di una radice negativa, e quindi l'equazione primitiva deve avere due radici immaginarie.

Ancora, si consideri l'equazione $x^3-qx+r=0$, in cui q ed r sono entrambi positivi. Qui vi sono *due* variazioni di segno, e quindi non vi possono essere più di due radici positive. Se scriviamo $-x$ per x, otteniamo un'equazione con *una* variazione di segno, sicchè l'equazione primitiva non può avere più di una radice negativa.

In questo esempio sappiamo per l'Art. 20 che vi *è* una radice negativa, ed abbiamo ora dimostrato che non ve ne può essere più di una; se le altre due radici siano quantità reali positive o immaginarie, non possiamo dedurlo dalla regola dei segni di Descartes. Ma segue dall'Art. 60 che l'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione proposta è $y^3-6qy^2+9q^2y+27r^2-4q^3=0$; e per la regola dei segni di Descartes, o per l'Art. 24, se $27r^2-4q^3$ è negativo, l'ultima equazione non ha alcuna radice negativa, e quindi l'equazione primitiva non ha radici immaginarie; ancora se $27r^2-4q^3$ è positivo, l'ultima equazione ha una radice negativa per l'Art. 20, e quindi l'equazione primitiva ha due radici immaginarie.

66. Lo studente deve osservare che i risultati dati nell'Art. 24, sono tutti d'accordo con la regola dei segni di Descartes, e possono

essere tutti dedotti da essa. Ancora la proposizione nell'Art. 22 è inclusa nella regola dei segni di Descartes; ed apprendiamo da questa regola che un'equazione come quella considerata nell'Art. 22 può avere solamente una radice positiva, senza ripetizione; si vegga l'Art. 35.

67. Si è fatto vedere nella dimostrazione della regola dei segni di Descartes, che moltiplicando un polinomio pel fattore che corrisponde ad una radice reale positiva, si introduce *al meno* una variazione di segno; si può osservare, che il numero delle variazioni di segno introdotte deve essere un numero *dispari*. Infatti si supponga in primo luogo che l'ultimo segno nel polinomio primitivo sia $+$; allora siccome il primo segno è $+$, il numero totale delle variazioni di segno nel polinomio primitivo deve essere un numero *pari* o zero; ed il segno dell'ultimo termine nel nuovo polinomio è $-$, sicchè il numero delle variazioni di segno nel nuovo polinomio è un numero *dispari*. Quindi un numero *dispari* di variazioni di segno deve essere stato introdotto. In secondo luogo si supponga che l'ultimo segno nel polinomio primitivo sia $-$, sicchè l'ultimo segno nel nuovo polinomio è $+$; allora vi deve essere un numero dispari di variazioni di segno nel polinomio primitivo, ed un numero pari di variazioni di segno nel nuovo polinomio. Quindi un numero *dispari* di variazioni di segno deve essere stato introdotto.

68. *Quando tutte le radici di un'equazione* $f(x)=0$ *sono reali, il numero delle radici positive è eguale al numero delle variazioni di segno in* $f(x)$, *ed il numero delle radici negative è eguale al numero delle variazioni di segno in* $f(-x)$.

Dinotino n il grado dell'equazione, m il numero delle radici positive, ed m' il numero delle radici negative, μ il numero delle variazioni di segno in $f(x)$, e μ' il numero delle variazioni di segno in $f(-x)$. Poichè tutte le radici dell'equazione sono reali $m+m'=n$. Inoltre m non può essere maggiore di μ, ed m' non può essere maggiore di μ', per l'Art. 63. Quindi $\mu+\mu'=n$, poichè la somma di μ e μ' non può eccedere n. Così $m+m'=\mu+\mu'$. Ed m non può essere maggiore di μ; nè può essere m minore di μ, poichè allora m' sarebbe maggiore di μ', il che è impossibile. Così $m=\mu$, ed $m'=\mu'$.

In questa proposizione supponiamo che $f(x)$ abbia un termine indipendente da x, sicchè l'equazione $f(x)=0$ non è soddisfatta da $x=0$. Una radice *zero* non può essere propriamente considerata come positiva o negativa.

Se vogliamo introdurre la considerazione delle radici zero possiamo procedere così: si supponga l'equazione avere m radici positive, m' radici negative, e la radice zero ripetuta r volte. Allora abbiamo $m+m'+r=n$, sicchè $m+m'=n-r$. E possiamo far vedere che $\mu+\mu'$ non può essere nè minore nè maggiore di $n-r$; sicchè $\mu+\mu'=n-r$. Quindi come prima $m=\mu$ ed $m'=\mu'$.

69. Supponiamo μ il numero delle variazioni di segno in $f(x)$, e μ' il numero delle variazioni di segno in $f(-x)$. Allora l'equazione $f(x)=0$ non può avere più di μ radici positive, e non può avere più di μ' radici negative, e quindi non può avere più di $\mu+\mu'$ radici reali. Quindi se n è maggiore di $\mu+\mu'$ l'equazione $f(x)=0$ deve avere almeno $n-\mu-\mu'$ radici immaginarie. Nei due Articoli seguenti mostreremo più definitamente quali deduzioni si possono trarre intorno al numero delle radici immaginarie di un'equazione quando quell'equazione non è completa.

70. *Se un gruppo costituito da un numero pari di termini è deficiente in un'equazione vi sono almeno altrettante radici immaginarie dell'equazione.*

Supponiamo che i $2r$ termini che si potrebbero trovare in $f(x)$ tra x^m ed x^{m-2r-1} siano deficienti; allora l'equazione $f(x)=0$ avrà al meno $2r$ radici immaginarie. Dinotino A e B i coefficienti di x^m e di x^{m-2r-1} rispettivamente in $f(x)$, e si suppongano introdotti i termini deficienti con i coefficienti $q_1, q_2, q_3, \ldots$; e si dinoti la nuova funzione con $F(x)$. Allora nell'espressione

$$Ax^m+q_1x^{m-1}+q_2x^{m-2}+\ldots+q_{2r}x^{m-2r}+Bx^{m-2r-1}$$

il numero delle variazioni di segno insieme col numero delle permanenze di segno è $2r+1$; in altre parole il numero delle variazioni di segno in questa espressione, insieme col numero delle variazioni di segno che essa presenterebbe se il segno di x fosse cambiato, è $2r+1$. Ma ora i termini ipotetici siano rimossi; allora se A e B sono di segni contrarii vi sarà una variazione di segno per $f(x)$, e nessuna variazione di segno per $f(-x)$; e se A e B sono dello stesso segno vi sarà una variazione di segno per $f(-x)$ e nessuna variazione di segno per $f(x)$. Quindi in tutti e due i casi la perdita di $2r$ termini assicura la perdita di $2r$ dalla somma dei numeri delle variazioni di segno in $F(x)$ ed in $F(-x)$.

E questo risultato vale per ogni gruppo deficiente costituito da un numero pari di termini. Così vi sono almeno tante radici imma-

ginarie dell' equazione $f(x)=0$ per quanto è la somma dei numeri dei termini in tali gruppi deficienti.

71. *Se un gruppo costituito da un numero dispari di termini è deficiente in un'equazione, l'equazione ha al meno quel numero accresciuto di uno di radici immaginarie se il gruppo deficiente è tra due termini dello stesso segno, e l'equazione ha al meno quel numero diminuito di uno di radici immaginarie se il gruppo deficiente è tra due termini di segni contrarii.*

Supponiamo che i $2r+1$ termini che si potrebbero trovare in $f(x)$ tra x^m ed x^{m-2r-2} siano deficienti. Dinotino A e B i coefficienti di x^m e di x^{m-2r-2} in $f(x)$ rispettivamente; allora se A e B sono dello stesso segno l'equazione $f(x)=0$ ha al meno $2r+2$ radici immaginarie; se A e B sono di segni contrarii l'equazione $f(x)=0$ ha al meno $2r$ radici immaginarie.

Si suppongano introdotti i termini deficienti con i coefficienti $q_1, q_2, q_3, \ldots$; e si dinoti la nuova funzione con $F(x)$. Allora nell' espressione

$$Ax^m + q_1x^{m-1} + q_2x^{m-2} + \ldots + q_{2r+1}x^{m-2r-1} + Bx^{m-2r-2}$$

il numero delle variazioni di segno insieme col numero delle permanenze di segno è $2r+2$; o in altre parole il numero delle variazioni di segno in questa espressione, insieme col numero delle variazioni di segno che essa presenterebbe se il segno di x fosse mutato, è $2r+2$. Ma quando i termini ipotetici sono rimossi non vi sarà alcuna variazione di segno sì per $f(x)$ che per $f(-x)$ se A e B hanno lo stesso segno, e vi sarà una variazione di segno per $f(x)$ ed una variazione di segno per $f(-x)$ se A e B hanno segni contrarii. Quindi la perdita di $2r+1$ termini da $F(x)$ assicura la perdita di $2r+2$ o di $2r$, dalla somma dei numeri delle variazioni di segno in $F(x)$ ed in $F(-x)$, secondo che il gruppo deficiente è tra due termini dello stesso segno, o di segni contrarii.

E questo risultato vale per ogni gruppo deficiente costituito da un numero dispari di termini; quindi vi saranno al meno tante radici immaginarie dell' equazione $f(x)=0$ per quanto è la somma fornita dalla considerazione dei gruppi deficienti.

72. Così come un esempio dell' Art. 71 vediamo che se un solo termine è deficiente ovunque in $f(x)$ tra due termini dello stesso segno, vi saranno al meno due radici immaginarie; se un solo ter-

mine è deficiente tra due termini di segni contrarii non possiamo dedurre da questo fatto alcuna conseguenza intorno al numero delle radici immaginarie.

Si osserverà che quando in conseguenza della deficienza di termini la somma dei numeri delle variazioni di segno in $f(x)$ ed in $f(-x)$ è minore del numero che esprime il grado dell'equazione $f(x)=0$, la differenza è sempre un numero pari. Questo apparisce dall'esame dei due casi possibili negli Art. 70 e 71. Cioè, con la notazione dell'Art. 69 il numero $n-\mu-\mu'$ è sempre un numero pari. Ciò poteva essere preveduto per l'Art. 41.

VI. SULLE RADICI EGUALI.

73. Alle volte è necessario o conveniente di conoscere se un'equazione proposta ha *radici eguali,* come vedremo nel corso dell'opera. Spiegheremo perciò ora come possiamo determinare se un'equazione ha radici eguali, ed in qual modo possiamo rimuovere fattori che corrispondono alle radici eguali quando esse vi sono, e così ridurre l'equazione ad una che ha solamente radici disuguali. Dobbiamo prima dimostrare una proprietà relativa alla *prima funzione derivata* di una funzione data.

74. *Sia* $f(x)$ *una funzione razionale intera di* x *ed* $f'(x)$ *la prima funzione derivata; allora sarà*

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\ldots+\frac{f(x)}{x-k},$$

in cui a, b, c, ... k, *sono le radici reali o immaginarie dell'equazione* $f(x)=0$.

Infatti sia p_0 il coefficiente della più alta potenza di x in $f(x)$, allora abbiamo identicamente per l'Art. 33,

$$f(x)=p_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k). \qquad (1)$$

Si ponga $y+z$ per x; così

$$f(y+z)=p_0(y+z-a)(y+z-b)(y+z-c)\ldots(y+z-k);$$

si sviluppi ciascun membro in una serie procedente secondo le potenze ascendenti di z; allora il primo membro diviene per l'Art. 12,

$$f(y)+f'(y)z+f''(y)\frac{z^2}{1\cdot 2}+\cdots$$

Così il coefficiente di z è $f'(y)$, e quindi $f'(y)$ deve essere eguale al coefficiente di z nel secondo membro, cioè, a

$$p_0(y-b)(y-c)\ldots(y-k)+p_0(y-a)(y-c)\ldots(y-k)+\ldots,$$

cioè, ad

$$\frac{f(y)}{y-a}+\frac{f(y)}{y-b}+\frac{f(y)}{y-c}+\ldots+\frac{f(y)}{y-k}.$$

E siccome è indifferente quale simbolo si adoperi per una variabile che può avere qualunque valore, possiamo mutare y in x; così abbiamo

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\ldots+\frac{f(x)}{x-k}.$$

Il risultato qui ottenuto è vero se tra le quantità $a, b, c, \ldots k$, ve ne fossero una o più eguali ad a, o eguali a b, ... e così di seguito. Supponiamo che in tutto a si trovi esattamente r volte, b esattamente s volte, c esattamente t volte; allora (1) può essere scritta

$$f(x)=p_0(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\ldots,$$

e (2) può essere scritta

$$f'(x)=\frac{rf(x)}{x-a}+\frac{sf(x)}{x-b}+\frac{tf(x)}{x-c}+\ldots$$

75. *L'equazione* $f(x)=0$ *ha o non ha radici eguali secondo che* $f(x)$ *ed* $f'(x)$ *hanno o non hanno una comune misura che contiene* x.

Si suppongano $a, b, c, \ldots k$ le radici reali o immaginarie dell'equazione $f(x)=0$, sicchè $f(x)=p_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$; allora

$$f'(x)=p_0(x-b)(x-c)\ldots(x-k)+p_0(x-a)(x-c)\ldots(x-k)+\ldots$$

Se $a, b, c, \ldots k$ sono tutte disuguali, nessuno dei fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... $x-k$ dividerà $f'(x)$, poichè $x-a$ per esempio divide ogni termine in $f'(x)$, *eccetto il primo;* e nessun prodotto di un numero qualunque di essi dividerà $f'(x)$. Così se $f(x)$ non ha fattori eguali, $f(x)$ ed $f'(x)$ non hanno alcuna misura comune. Quindi se $f(x)$ ed $f'(x)$ hanno una comune misura i fattori di $f(x)$ non possono essere tutti disuguali.

Si supponga ora che l'equazione $f(x)=0$ abbia radici eguali; supponiamo che a si trovi r volte, che b si trovi s volte, che c si trovi t volte, e così di seguito. Allora

$$f'(x)=p_0(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\ldots\left\{\frac{r}{x-a}+\frac{s}{x-b}+\frac{t}{x-c}+\ldots\right\}.$$

In questo caso il fattore $(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}(x-c)^{t-1}\ldots$ si trova in ogni termine di $f'(x)$. Così se $f(x)$ ha fattori eguali, $f(x)$ ed $f'(x)$ hanno una comune misura. Quindi se $f(x)$ ed $f'(x)$ non hanno alcuna comune misura, $f(x)$ non ha fattori eguali.

76. Per esempio, si consideri l'equazione

$$f(x)=x^4-11x^3+44x^2-76x+48=0.$$

Qui $$f'(x)=4x^3-33x^2+88x-76.$$

Si troverà che $f(x)$ ed $f'(x)$ hanno la comune misura $x-2$; ciò mostra che $(x-2)^2$ è un fattore di $f(x)$. Si troverà che

$$f(x)=(x-2)^2(x^2-7x+12)=(x-2)^2(x-3)(x-4);$$

così le radici dell'equazione $f(x)=0$ sono 2, 2, 3, 4.

Ancora, si consideri l'equazione

$$f(x)=2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0.$$

Qui si troverà che $f(x)$ ed $f'(x)$ hanno la comune misura $x-3$; ed $f(x)=(x-3)^2(2x^2+1)$. Così le radici dell'equazione $f(x)=0$ sono $3, 3, +\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)}, -\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

77. Nell'enunciato dell'Art. 75, si trovano in fine le parole «*che contiene x*». Con queste parole intendiamo indicare che non consideriamo il fattore p_0, benchè esso in un certo senso può essere considerato come una comune misura di $f(x)$ ed $f'(x)$.

Siccome facciamo quì per la prima volta un importante uso delle misure comuni delle espressioni sarà conveniente d'introdurre un'osservazione sul soggetto. Si è solito di considerare la teoria delle misure comuni e della massima comune misura nelle opere sull'Algebra; ma la teoria non è necessaria in un primo periodo dello studio matematico, e diviene più intelligibile dopo che si sono ottenuti i risultati esposti nell'Art. 33. Dinotino $f(x)$ e $\varphi(x)$ due fun-

zioni razionali intere di x; allora $f(x)$ e $\varphi(x)$ possono essere risolute in fattori, sicchè

$$f(x) = p_0 (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\ldots,$$
$$\varphi(x) = q_0 (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)\ldots;$$

e ciascuna delle funzioni può essere così risoluta solamente in un modo. Quindi la funzione di x del più alto grado che dividerà $f(x)$ e $\varphi(x)$ è il prodotto di tutt'i fattori comuni del primo grado in x; e questo possiamo chiamare la massima comune misura di $f(x)$ e $\varphi(x)$.

Qui non abbiamo tenuto conto di p_0 e q_0; ma possiamo se ci piace trovare la loro massima comune misura aritmetica se essi sono numeri, o pure se essi sono funzioni di un'altra quantità y, possiamo trovare la massima comune misura di queste funzioni di y.

78. Si supponga $f(x) = p_0 (x-a)^r (x-b)^s (x-c)^t \ldots$; allora abbiamo trovato nell'Art. 75 che $f(x)$ ed $f'(x)$ hanno la comune misura $(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}(x-c)^{t-1}\ldots$. Così la comune misura contiene tutt'i fattori eguali che si trovano in $f(x)$, ma l'esponente in ciascun caso è minore di un'unità del corrispondente esponente in $f(x)$. Se dividiamo $f(x)$ per la comune misura di $f(x)$ ed $f'(x)$, il quoziente contiene tutt'i fattori che si trovano in $f(x)$, ciascun fattore una sola volta. Così l'equazione ottenuta ponendo questo quoziente eguale a zero contiene *senza ripetizione* tutte le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

79. Vediamo che se il fattore $(x-a)^r$ si trova in $f(x)$ il fattore $(x-a)^{r-1}$ si trova in $f'(x)$; sicchè l'equazione $f'(x) = 0$ ha $r-1$ radici eguali ad a. Ora $f''(x)$ è la prima funzione derivata di $f'(x)$; così se $r-1$ è maggiore dell'unità $f'(x)$ ed $f''(x)$ avranno una comune misura, e l'equazione $f''(x) = 0$ avrà $r-2$ radici eguali ad a. Così in questo modo possiamo mostrare che se $(x-a)^r$ è un fattore di $f(x)$ allora le funzioni derivate $f'(x)$, $f''(x), \ldots f^{r-1}(x)$, svaniscono tutte quando $x = a$.

Questo può essere anche dimostrato nel modo seguente.

Sia $f(x) = (x-a)^r \varphi(x)$, in cui $\varphi(x)$ è una funzione razionale intera di x la quale si suppone non contenere il fattore $x-a$; si ponga $x = a + z$; così

$$z^r \varphi(a+z) = f(a+z)$$
$$= f(a) + f'(a) z + \ldots + f^r(a) \frac{z^r}{\lfloor r} + \ldots + f^n(a) \frac{z^n}{\lfloor n}.$$

Siccome il primo membro di questa identità è divisibile per z^r deve essere lo stesso pel secondo membro. Così dobbiamo avere

$$f(a)=0, \qquad f'(a)=0, \ldots\ldots f^{r-1}(a)=0.$$

E siccome il primo membro non è divisibile per una potenza di z superiore a z^r sarà lo stesso pel secondo membro, e quindi $f^r(a)$ non è zero. Così il numero dei termini nella serie $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ che svaniscono quando $x=a$, è lo stesso che l'esponente di $x-a$ in $f(x)$.

Per esempio, si supponga

$$f(x)=x^5+2x^4+3x^3+7x^2+8x+3;$$

qui si troverà che $f'''(x)$ è la prima della serie $f(x), f'(x), \ldots$ che non svanisce quando $x=-1$; così il fattore $(x+1)^3$ si trova in $f(x)$. Si troverà che $f(x)=(x+1)^3(x^2-x+3)$,

Per un altro esempio cercheremo le condizioni che debbono verificarsi affinchè l'equazione

$$x^4+qx^2+rx+s=0$$

abbia tre radici eguali.

Qui
$$f(x)=x^4+qx^2+rx+s,$$
$$f'(x)=4x^3+2qx+r,$$
$$f''(x)=12x^2+2q.$$

Quindi da $f''(x)=0$ otteniamo

$$x^2=-\frac{q}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Si sostituisca questo valore in $f(x)=0$ ed $f'(x)=0$: così

$$-\frac{5q^2}{36}+rx+s=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$x\left(-\frac{2q}{3}+2q\right)+r=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Da (3) otteniamo

$$x=-\frac{3r}{4q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

e sostituendo questo in (2) abbiamo

$$s - \frac{3r^2}{4q} - \frac{5q^2}{36} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

E da (1) e (4)
$$r^2 = -\frac{8q^3}{27} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Quindi (5) diviene
$$s = -\frac{q^2}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Così (6) e (7) esprimono le condizioni richieste.

Viceversa se (6) e (7) sono soddisfatte, si troverà che $f(x)$, $f'(x)$ ed $f''(x)$ svaniscono tutte quando $x = -\frac{3r}{4q}$.

80. Indicheremo brevemente un altro modo nel quale si può ricercare la condizione per le radici eguali. Se l'equazione $f(x) = 0$ ha più di una radice eguale ad a, allora ne segue che se si divide $f(x)$ per $x - a$ il quoziente svanirà quando $x = a$. Quindi prendendo la forma del quoziente data nell'Art. 7, dobbiamo avere

$$np_0 a^{n-1} + (n-1)p_1 a^{n-2} + \ldots + 2ap_{n-2} + p_{n-1} = 0;$$

cioè, $f'(x)$ svanisce quando $x = a$.

81. Apparisce quindi che volendo determinare le radici eguali di un'equazione $f(x) = 0$, possiamo incominciare dal trovare la massima comune misura di $f(x)$ ed $f'(x)$; indi eguagliamo a zero questa massima comune misura, ed abbiamo da risolvere un'equazione che ha per sue radici quelle radici dell'equazione $f(x) = 0$ che sono ripetute. Siccome questa massima comune misura può essere essa stessa un'espressione complessa, contenente fattori ripetuti, è utile di avere un procedimento sistematico col quale possano essere ottenute le radici col minore incomodo possibile. Questo ora andiamo a dare.

82. Si supponga $f(x) = 0$ essere un'equazione che ha radici eguali; e sia

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots X_m^m,$$

in cui il prodotto di tutt'i fattori che si trovano una sola volta in $f(x)$ è dinotato da X_1, il prodotto di tutt'i fattori che si trovano due volte è dinotato da X_2^2, il prodotto di tutt'i fattori che si trovano

tre volte è dinotato da X_3^3, e così di seguito. Una o più delle quantità X_1, X_2, X_3, ... saranno l'unità, se non vi è alcun fattore in $f(x)$ che sia ripetuto il numero corrispondente di volte.

Si formi ora la prima funzione derivata $f'(x)$ di $f(x)$, e poi si ottenga la massima comune misura di $f(x)$ ed $f'(x)$. Dinoteremo questa massima comune misura con $f_1(x)$, sicchè

$$f_1(x) = X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_m^{m-1}.$$

In seguito si ottenga la massima comune misura di $f_1(x)$ e della sua prima funzione derivata $f_1'(x)$, e si dinoti con $f_2(x)$, sicchè

$$f_2(x) = X_3 X_4^2 \ldots X_m^{m-2}.$$

Si proceda in questo modo e si formino successivamente

$$\begin{aligned} f_3(x) &= X_4 X_5^2 \ldots X_m^{m-3}, \\ f_4(x) &= \quad X_5 \ldots X_m^{m-4}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-1}(x) &= \qquad X_m, \\ f_m(x) &= \qquad 1. \end{aligned}$$

Ora si formi una nuova serie di funzioni dividendo ciascun termine della serie $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_m(x)$ sino ad $f_{m-1}(x)$ pel termine che immediatamente lo segue. Così otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{f_1(x)} &= X_1 X_2 \ldots X_m, = \varphi_1(x) \text{ poniamo,} \\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \quad X_2 \ldots X_m, = \varphi_2(x) \text{ poniamo,} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{f_{m-2}(x)}{f_{m-1}(x)} &= X_{m-1} X_m, = \varphi_{m-1}(x) \text{ poniamo,} \\ \frac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)} &= \qquad X_m, = \varphi_m(x) \text{ poniamo.} \end{aligned}$$

Allora finalmente

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = X_1, \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = X_2, \ldots \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi_m(x)} = X_{m-1}, \quad \varphi_m(x) = X_m.$$

Così i fattori X_1, X_2, ... X_m sono ora separati, e risolvendo le equazioni $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ... $X_m = 0$, otteniamo tutte le radici dell'equa-

zione proposta $f(x)=0$; ed ogni radice ricavata da $X_r=0$ si trova r volte nell'equazione $f(x)=0$.

83. Per un esempio del procedimento dell'Articolo precedente si supponga che

$$f(x)=x^8+x^7-8x^6-6x^5+21x^4+9x^3-22x^2-4x+8.$$

Allora ritenendo le notazioni dell'Articolo precedente troveremo che

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^4+x^3-3x^2-x+2,\\
f_2(x) &= x-1,\\
f_3(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= x^4-5x^2+4,\\
\varphi_2(x) &= x^3+2x^2-x-2,\\
\varphi_3(x) &= x-1,\\
X_1 &= x-2,\\
X_2 &= x^2+3x+2,\\
X_3 &= x-1.
\end{aligned}$$

Quindi
$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)(x^2+3x+2)^2(x-1)^3\\
&= (x-2)(x+1)^2(x+2)^2(x-1)^3.
\end{aligned}$$

Così le radici dell'equazione $f(x)=0$ sono $2, -1, -1, -2, -2, 1, 1, 1$.

84. Quando i coefficienti di un'equazione sono tutti quantità commensurabili le espressioni $X_1, X_2, \ldots$ dell'Art. 82 hanno similmente tutt'i loro coefficienti commensurabili. Quindi se una e solamente una delle radici di un'equazione, con quantità commensurabili per coefficienti, è ripetuta r volte, quella radice *deve essere una quantità commensurabile;* poichè essa deve essere determinata da un'equazione $X_r=0$ la quale non dà luogo a quantità incommensurabili.

Da ciò possiamo dedurre i risultati seguenti:

Se un'equazione del terzo grado con quantità commensurabili per coefficienti non ha radici commensurabili essa non ha radici eguali. Poichè se un'equazione del terzo grado ha radici eguali, vi deve essere o una radice ripetuta tre volte o pure una radice ripe-

tuta due volte ed un' altra radice che si trova una sola volta; ed in tutti e due i casi, come abbiamo veduto or ora, se i coefficienti sono quantità commensurabili, le radici sono anche tali.

Se un' equazione del quarto grado con quantità commensurabili per coefficienti non ha radici commensurabili essa non può avere nè una radice ripetuta quattro volte, nè una radice ripetuta tre volte ed un' altra radice che si trova una sola volta. Se dunque una tale equazione ha radici eguali essa deve avere due radici incommensurabili ciascuna ripetuta due volte. Così se $f(x) = 0$ è l' equazione $f(x)$ deve essere un quadrato perfetto.

Se un' equazione del quinto grado con quantità commensurabili per coefficienti non ha radici commensurabili essa non ha radici eguali. Poichè si troverà esaminando ogni caso che può aver luogo che se vi sono radici eguali vi dovranno essere una o più radici commensurabili. Si supponga, per esempio, che l' equazione abbia due radici ciascuna ripetuta due volte ed un'altra radice che si trova una sola volta; allora se i coefficienti sono quantità commensurabili la radice non ripetuta deve essere una quantità commensurabile.

VII. LIMITI DELLE RADICI DI UN' EQUAZIONE.

SEPARAZIONE DELLE RADICI.

85. In questo Capitolo investigheremo primieramente alcuni teoremi i quali mostreranno tra quali limiti debbono giacere *tutte* le radici reali di un' equazione proposta; ed in seguito considereremo con qualche estensione la possibilità di scoprire limiti tra i quali siano comprese separatamente le radici reali. Il vantaggio di un tale Capitolo nasce dal fatto che la risoluzione *algebrica* dell'equazione di un grado superiore al quarto non è stata ottenuta; e come vedremo in prosieguo, la risoluzione *numerica* delle equazioni è un procedimento sistematico fondato sulla supposizione di avere qualche conoscenza dei valori approssimati delle radici in particolare.

Si deve osservare che tutto questo Capitolo si riferisce alle radici *reali* delle equazioni, a meno che qualche cosa in contrario non sia specialmente stabilita.

86. Quando diciamo che una certa quantità è un *limite superiore* delle radici positive di un' equazione, intendiamo che nessuna radice positiva può essere maggiore di quella quantità.

87. *Il coefficiente negativo numericamente più grande accresciuto dell'unità è un limite superiore delle radici positive di un'equazione messa nella sua forma più semplice.*

Sia $f(x)=0$ l'equazione; si supponga dell'n^{mo} grado. Sia p il coefficiente negativo numericamente più grande che si trova in $f(x)$. Allora se si trova un tale valore per x che $f(x)$ sia positivo per quel valore di x e per tutt'i valori più grandi, quel valore è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$; ora se un valore positivo di x rende

$$x^n - p\,(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$$

positiva, esso *a fortiori* renderà $f(x)$ positiva. Cioè, $f(x)$ è positiva per un valore positivo di x se $x^n - p\dfrac{x^n-1}{x-1}$ è positiva, e quindi *a fortiori* se $x^n - 1 - p\dfrac{x^n-1}{x-1}$ è positiva, cioè se $(x^n-1)\left(1-\dfrac{p}{x-1}\right)$ è positiva; e l'ultima espressione è positiva se $x-1$ è maggiore di p. Così $f(x)$ è positiva se x è eguale a $p+1$ o maggiore di $p+1$; cioè, $p+1$ è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$.

88. Nell'equazione $f(x)=0$ si ponga $-y$ per x, e se n è un numero dispari si muti il segno di ogni termine sicchè il coefficiente di y^n sia $+1$. Sia q il coefficiente negativo numericamente più grande dell'equazione in questa forma; allora $q+1$ è un limite dei valori positivi di y, e quindi $-(q+1)$ è un limite dei valori negativi di x.

Quindi tutte le radici dell'equazione $f(x)=0$ debbono giacere tra $p+1$ e $-(q+1)$.

Quindi *a fortiori* se m è il valore numerico del più grande coefficiente in un'equazione senza riguardo al segno tutte le radici dell'equazione giacciono tra $m+1$ e $-(m+1)$.

89. *In un'equazione dell'* n^{mo} *grado nella sua forma più semplice se* p *è il valor numerico del più grande coefficiente negativo, ed* x^{n-r} *è la più alta potenza di* x *che ha un coefficiente negativo,* $1+\sqrt[r]{p}$ *è un limite superiore delle radici positive.*

Sia $f(x)=0$ l'equazione proposta; poichè tutt'i termini che precedono x^{n-r} hanno coefficienti positivi $f(x)$ sarà certamente positiva per un valore positivo di x se

$$x^n - p\,(x^{n-r} + x^{n-r-1} + \ldots + x^2 + x + 1)$$

è positiva, cioè, se $x^n - p\,\dfrac{x^{n-r+1}-1}{x-1}$ è positiva. Quindi, supponendo x maggiore dell'unità, $f(x)$ sarà positiva *a fortiori* se $x^n - p\,\dfrac{x^{n-r+1}}{x-1}$ è positiva, cioè se $x^n(x-1) - px^{n-r+1}$ è positiva, cioè se $x^{r-1}(x-1) - p$ è positiva, cioè *a fortiori* se $(x-1)^r$ è eguale o maggiore di p. Quindi se $x = 1 + \sqrt[r]{p}$ o ad un valore più grande, $f(x)$ è positiva, cioè $1 + \sqrt[r]{p}$ è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$.

90. *Se ciascun coefficiente negativo sia preso positivamente e diviso per la somma di tutt'i coefficienti positivi che lo precedono, la più grande delle frazioni così formate accresciuta dell'unità, è un limite superiore delle radici positive.*

Sia l'equazione $f(x)=0$, in cui $f(x)$ dinota

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} - p_3x^{n-3} + p_4x^{n-4} + \ldots - p_rx^{n-r} + \ldots + p_n.$$

Ora abbiamo

$$x^m = (x-1)\,(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) + 1;$$

siano trasformati per mezzo di questa formola tutt'i termini dell'equazione con coefficienti positivi, e gli altri rimangano inalterati. Così $f(x)$ diviene

$$\begin{aligned}
&p_0(x-1)x^{n-1} + p_0(x-1)x^{n-2} + p_0(x-1)x^{n-3} + \ldots + p_0(x-1) + p_0\\
&\qquad + p_1(x-1)x^{n-2} + p_1(x-1)x^{n-3} + \ldots + p_1(x-1) + p_1\\
&\qquad\qquad + p_2(x-1)x^{n-3} + \ldots + p_2(x-1) + p_2\\
&\qquad\qquad\qquad - p_3x^{n-3}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots
\end{aligned}$$

Consideriamo ora le successive colonne verticali di questa espressione. Dove non vi è alcun coefficiente negativo il valore della colonna è positivo se x è maggiore dell'unità. Per assicurare un va-

lore positivo delle colonne in cui si trova un coefficiente negativo dobbiamo avere

$$(p_0+p_1+p_2)(x-1) \text{ maggiore di } p_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{r-1})(x-1) \text{ maggiore di } p_r,$$

$$\cdots\cdots$$

Quindi x deve essere maggiore di $\dfrac{p_3}{p_0+p_1+p_2}+1, \ldots$ e maggiore di $\dfrac{p_r}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}}+1, \ldots$ Quindi se x si prende eguale alla più grande delle espressioni così ottenute, quel valore di x, o un valore più grande, renderà $f(x)$ positiva; cioè, la più grande delle espressioni è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$.

91. Rischiareremo ora le regole con due esempi. Primieramente, si prenda l'equazione

$$x^5+8x^4-14x^3-53x^2+56x-18=0.$$

Per l'Art. 87 abbiamo $53+1$, cioè 54, come un limite superiore delle radici positive.

Per l'Art. 89, poichè $n=5$ ed $r=2$, abbiamo $1+\sqrt{53}$ come un limite, sicchè 9 è un limite.

Per l'Art. 90 dobbiamo prendere la più grande delle espressioni seguenti; $\dfrac{14}{1+8}+1$; $\dfrac{53}{1+8}+1$; $\dfrac{18}{1+8+56}+1$, cioè, dobbiamo prendere $\dfrac{53}{9}+1$; sicchè 7 è un limite.

In secondo luogo, si prenda l'equazione

$$x^5-5x^4-13x^3+2x^2+x-70=0.$$

Qui gli Art. 87 ed 89 dànno $70+1$ come un limite; e l'Art. 90 dà $\dfrac{70}{4}+1$, sicchè 19 è un limite.

Così, in tutti e due questi esempi, l'Art. 90 ci dà il più piccolo limite superiore. È facile vedere che l'Art. 89 dà sempre un limite

più piccolo che l'Art. 87, eccetto quando $r=1$, ed allora i due limiti coincidono. L'Art. 89 è vantaggioso in generale quando si trovano più coefficienti positivi innanzi al primo coefficiente negativo, sicchè r è grande. L'Art. 90 dà sempre un limite minore di quello dell'Art. 87, eccetto quando il più grande coefficiente negativo è preceduto solamente da un coefficiente positivo, vale a dire quello del primo termine, ed allora i due limiti coincidono. L'Art. 90 è vantaggioso in generale quando si trovano grandi coefficienti positivi innanzi al primo grande coefficiente negativo.

92. Con artificii particolari possiamo frequentemente ottenere un limite superiore minore di quelli dati dalle regole generali.

Si consideri il primo esempio dell'Articolo precedente. Qui dobbiamo trovare un limite superiore delle radici positive di $f(x)=0$, in cui $f(x)$ può essere scritta così,

$$x^2(x^3-53)+8x^3\left(x-\frac{14}{8}\right)+56\left(x-\frac{9}{28}\right);$$

ora se x è eguale a 4, o ad un numero più grande, le espressioni nelle parentesi sono tutte positive, e così $f(x)$ è positiva. Così 4 è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$.

Ancora, si consideri il secondo esempio dell'Articolo precedente. Qui possiamo scrivere $f(x)$ così,

$$x^3(x^2-5x-13)+2x^2+x-70;$$

ora per mezzo dell'Art. 87 vediamo che $x^2-5x-13$ è positiva se $x=13+1$ o ad un numero più grande, ed evidentemente $2x^2+x-70$ è positiva quando $x=14$ o ad un numero più grande. Così 14 è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$.

93. Possiamo ora trovare facilmente un limite *inferiore* delle radici positive di un'equazione, cioè un numero che non è maggiore di una qualunque delle radici positive. In fatti si trasformi l'equazione proposta in una di cui le radici siano le reciproche delle radici dell'equazione proposta, ed allora il reciproco del limite superiore delle radici positive dell'equazione trasformata sarà un limite inferiore delle radici positive dell'equazione proposta. Così si supponga l'equazione proposta essere

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0;$$

si ponga $\frac{1}{y}$ per x, si moltiplichi per y^n e si divida per p_n, sicchè l'equazione trasformata è

$$y^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} y^{n-1} + \ldots + \frac{p_2}{p_n} y^2 + \frac{p_1}{p_n} y + \frac{1}{p_n} = 0.$$

Si trovi un limite superiore delle radici positive di questa equazione con uno degli Articoli precedenti, e si dinoti con L; allora $\frac{1}{L}$ è un limite inferiore delle radici positive dell'equazione proposta. Supponiamo che si adoperi l'Art. 87; dinoti $\frac{p_r}{p_n}$ quel coefficiente che è numericamente il più grande dei coefficienti negativi dell'equazione trasformata; allora $1 - \frac{p_r}{p_n}$ è un limite superiore delle radici positive dell'equazione trasformata, e quindi $\frac{p_n}{p_n - p_r}$ è un limite inferiore delle radici positive dell'equazione proposta. Qui p_r è in fatti numericamente il più grande tra quei coefficienti dell'equazione proposta che hanno il segno contrario al segno di p_n.

Per esempio, nella prima equazione dell'Art. 91 abbiamo $p_n = -18$ e $p_r = 56$; così $\frac{-18}{-18-56}$, cioè $\frac{18}{74}$, è un limite inferiore delle radici positive.

94. Spiegheremo ora un altro metodo per determinare un limite superiore delle radici positive di un'equazione; questo metodo è detto il *Metodo di Newton*.

Dinoti $f(x) = 0$ l'equazione che deve essere considerata; si ponga $h + y$ per x e si sviluppi $f(h+y)$ con l'Art. 12. Così l'equazione diviene

$$f(h) + yf'(h) + \frac{y^2}{2} f''(h) + \ldots + \frac{y^n}{\underline{|n}} f^n(h) = 0.$$

Ora si supponga h positivo e di un tale valore che $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, $\ldots f^n(h)$ siano tutte positive; allora nessun valore *positivo* di y può soddisfare la suddetta equazione. Ma $y = x - h$, e siccome y non può essere positivo, x non può essere maggiore di h; così h è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x) = 0$.

Possiamo osservare che se l'equazione proposta è nella sua forma più semplice $f^n(h)$ è necessariamente positiva, essendo eguale ad $\lfloor n$.

95. Per esempio, si prenda l'equazione

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 700x + 500 = 0.$$

Qui
$$f(h) = h^5 + h^4 - 4h^3 - 6h^2 - 700h + 500,$$
$$f'(h) = 5h^4 + 4h^3 - 12h^2 - 12h - 700,$$
$$\frac{1}{\lfloor 2} f''(h) = 10h^3 + 6h^2 - 12h - 6,$$
$$\frac{1}{\lfloor 3} f'''(h) = 10h^2 + 4h - 4,$$
$$\frac{1}{\lfloor 4} f''''(h) = 5h + 1.$$

È conveniente d'incominciare con l'ultima funzione di h e di risalire regolarmente. Ogni valore positivo di h rende $f''''(h)$ positiva; $h=1$ rende $f'''(h)$ posttiva; $h=2$ rende $f''(h)$ positiva; $h=4$ rende $f'(h)$ positiva; $h=5$ rende $f(h)$ positiva. Allora si troverà che $h=5$ rende tutte le funzioni di h positive; e quindi 5 è un limite superiore delle radici positive dell'equazione proposta.

Si deve osservare, che quando secondo il metodo qui esposto incominciamo con l'ultima funzione ed *aumentiamo* il valore di h convenevolmente a misura che risaliamo alle altre funzioni, non avremo mai bisogno di riesaminare il segno di quelle funzioni di h per le quali si è passato. Infatti supponiamo, per esempio, di esserci assicurati che un certo valore a di h renda positive tutte le funzioni di h sino ad $f''(h)$. Allora si ponga un valore più grande per h, supponiamo $a+b$; e poichè

$$f''(a+b) = f''(a) + bf'''(a) + \frac{b^2}{1 \cdot 2} f''''(a) + \dots$$

e tutt'i termini del secondo membro sono positivi per supposizione, $f''(a+b)$ è anche positiva. Quindi nell'esempio precedente, quando si trovò che $h=5$ rendeva $f(h)$ positiva, non era necessario di esaminare se questo valore di h rendeva le altre funzioni di h positive, poichè il metodo di procedimento assicurava questo risultato.

96. Per trovare i limiti delle radici *negative* di un'equazione $f(x)=0$ poniamo $-y$ per x, e poi troviamo i limiti delle radici po-

sitive dell'equazione trasformata in y; allora questi limiti, con i loro segni mutati, saranno i limiti delle radici negative dell'equazione proposta.

Si prenda, per esempio, l'equazione

$$x^5 - 7x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 4x + 48 = 0;$$

si ponga $-y$ per x ed otteniamo

$$y^5 + 7y^4 - 15y^3 - 3y^2 + 4y - 48 = 0.$$

Per l'Art. 90 abbiamo $\frac{48}{1+7+4} + 1$, cioè 5, come un limite superiore delle radici positive, e per l'Art. 93 abbiamo $\frac{48}{48+7}$ come un limite inferiore delle radici positive. Così le radici negative dell'equazione proposta debbono giacere tra -5 e $-\frac{48}{55}$.

97. Avendo così mostrato come si possono trovare dei limiti tra i quali debbono giacere *tutte* le radici positive di un'equazione, e dei limiti tra i quali debbono giacere tutte le radici negative di un'equazione, passiamo a dare alcuni teoremi rispetto alla situazione delle radici prese isolatamente o in gruppi. Si vedrà in appresso che la completa investigazione di questa parte del soggetto è contenuta nel *Teorema di Sturm*.

98. *Se sostituiamo successivamente per* x *in* f(x) *due quantità che comprendono tra loro un numero dispari di radici dell' equazione* f(x)=0, *otterremo risultati di segni contrarii; se sostituiamo successivamente due quantità che comprendono tra loro nessuna radice o un numero pari di radici otterremo risultati dello stesso segno.*

Supponiamo λ e μ due quantità di cui λ è la maggiore; siano $a, b, c \ldots k$, tutte le radici reali dell'equazione $f(x)=0$ comprese tra λ e μ; per l'Art. 43 abbiamo

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)\,\psi(x),$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione formata dal prodotto dei fattori quadratici che non possono mai cambiare il loro segno, e dei fattori reali che non possono cambiare il loro segno mentre x giace tra λ e μ.

Si sostituiscano successivamente λ e μ per x; così

$$f(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) \dots (\lambda - k)\psi(\lambda),$$

$$f(\mu) = (\mu - a)(\mu - b)(\mu - c) \dots (\mu - k)\psi(\mu).$$

Ora tutt'i fattori $\lambda - a$, $\lambda - b$, $\lambda - c, \dots \lambda - k$, sono positivi, e tutt'i fattori $\mu - a$, $\mu - b$, $\mu - c$, $\dots \mu - k$, sono negativi; e $\psi(\lambda)$ e $\psi(\mu)$ hanno lo stesso segno. Quindi $f(\lambda)$ ed $f(\mu)$ hanno lo *stesso* segno o segni *contrarii,* secondo che il numero delle radici $a, b, c, \dots k$, è *pari* o *dispari.*

99. Quindi viceversa se due quantità sostituite per x in $f(x)$ dànno risultati di segni *contrarii,* un numero *dispari* delle radici dell'equazione $f(x) = 0$ debbono giacere tra le due quantità; se esse dànno risultati dello *stesso* segno o nessuna radice o un numero pari di radici debbono giacere tra le due quantità.

Questo risultato comprende quello dell'Art. 19 come un caso particolare.

100. Si deve osservare che la dimostrazione dell'Art. 98 non richiede che le radici $a, b, c, \dots k$, siano tutte *disuguali;* solamente bisogna rammentarsi che una radice ripetuta m volte deve essere contata come m radici.

Vediamo che se $f(\lambda)$ ed $f(\mu)$ sono dello stesso segno, o nessuna radice, o pure un numero pari di radici dell'equazione $f(x) = 0$ giacciono tra λ e μ. Ora negli Articoli precedenti di questo Capitolo si è alle volte usato un argomento della forma seguente; il valore μ o un valore più grande di x rende $f(x)$ positiva, quindi μ è un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x) = 0$. Si deve osservare che con le parole *rende $f(x)$ positiva,* intendiamo rende $f(x)$ una *quantità positiva e non zero.* Per esempio, se $f(x) = (x-4)^2(x-1)$, allora se x è maggiore dell'unità $f(x)$ non può divenire negativa; ma non dobbiamo conchiudere che l'unità è un limite superiore delle radici positive, poichè 4 è una radice.

Se dunque conosciamo solamente che $f(x)$ non può divenire negativa per un valore qualunque di x maggiore di μ, non possiamo conchiudere che non vi è alcuna radice maggiore di μ; ma possiamo conchiudere che o *non* vi è alcuna radice, o pure vi sono una o più radici ciascuna ripetuta un numero *pari* di volte.

101. Investigheremo ora un importante teorema che fornisce delle relazioni tra le radici dell'equazione $f(x)=0$ e le radici dell'equazione $f'(x)=0$, in cui $f'(x)$ è la prima funzione derivata di $f(x)$. Il teorema è alle volte dinotato dal nome di *Rolle,* il quale fu il primo ad adoperarlo.

102. *Una radice reale dell' equazione* $f'(x)=0$ *giace tra due radici reali adiacenti qualunque dell' equazione* $f(x)=0$.

Le radici reali dell'equazione $f(x)=0$ disposte in ordine decrescente di grandezza algebrica siano dinotate con $a, b, c, \ldots k$. Sia $\varphi(x)$ il prodotto dei fattori quadratici corrispondenti alle radici immaginarie dell'equazione $f(x)=0$, sicchè $\varphi(x)$ non può cambiare il suo segno. Allora per l'Art. 43

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)\,\varphi(x).$$

In questa identità si ponga $y+z$ per x; così

$$f(y+z)=(y+z-a)(y+z-b)(y+z-c)\ldots(y+z-k)\,\varphi(y+z).$$

Si supponga ciascun membro di questa identità sviluppato in una serie procedente secondo le potenze ascendenti di z. Il coefficiente di z nel primo membro sarà $f'(y)$; si vegga l'Art. 12. Il coefficiente di z nel secondo membro sarà

$$\left\{(y-b)(y-c)\ldots(y-k)+(y-a)(y-c)\ldots(y-k)+\ldots\right\}\varphi(y)$$
$$+(y-a)(y-b)(y-c)\ldots(y-k)\,\varphi'(y).$$

Eguagliando questi coefficienti di z, e cambiando y in x nella identità risultante, abbiamo

$$f'(x)=\left\{(x-b)(x-c)\ldots(x-k)+(x-a)(x-c)\ldots(x-k)+\ldots\right\}\varphi(x)$$
$$+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)\,\varphi'(x).$$

Ora si pongano successivamente $a, b, c, \ldots k$, per x; l'ultimo termine nel secondo membro dell'identità svanisce in ogni caso, e quindi il segno di $f'(a)$ è lo stesso che il segno di $(a-b)(a-c)\ldots(a-k)$, il segno di $f'(b)$ è lo stesso che il segno di $(b-a)(b-c)\ldots(b-k)$, il segno di $f'(c)$ è lo stesso che il segno di $(c-a)(c-b)\ldots(c-k)$, e così di seguito; e questi segni sono alternativamente positivi e negativi, poichè la prima espressione non ha *alcun* fattore negativo.

la seconda espressione ha *un* fattore negativo, la terza espressione ha *due* fattori negativi, e così di seguito. Quindi per l'Art. 99 un numero dispari delle radici dell'equazione $f'(x)=0$ giacciono tra due radici adiacenti qualunque dell'equazione $f(x)=0$.

103. La dimostrazione dell'Articolo precedente suppone che le radici $a, b, c, \ldots k$, siano tutte disuguali. Supponiamo nonpertanto che la radice a sia ripetuta r volte, che la radice b sia ripetuta s volte, che la radice c sia ripetuta t volte, e così di seguito. Avremo

$$f(x)=(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\ldots\varphi(x),$$

$$f'(x)=\varphi(x)\left\{r(x-a)^{r-1}(x-b)^s(x-c)^t\ldots+s(x-a)^r(x-b)^{s-1}(x-c)^t\ldots+\ldots\right\}$$
$$+(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\ldots\varphi'(x).$$

Dinoti $f_1(x)$ la massima comune misura di $f(x)$ ed $f'(x)$, cioè, sia $f_1(x)=(x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1}(x-c)^{t-1}\ldots$ Allora

$$\frac{f'(x)}{f_1(x)}=\varphi(x)\left\{r(x-b)(x-c)\ldots+s(x-a)(x-c)\ldots+\ldots\right\}$$
$$+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\varphi'(x).$$

Si chiami questa espressione $F(x)$; allora come prima vediamo che l'equazione $F(x)=0$ ha un numero dispari di radici tra a e b, un numero dispari tra b e c, e così di seguito. E poichè abbiamo $f'(x)=f_1(x)F(x)$, sempre che $F(x)$ svanisce anche $f'(x)$ svanisce. Così un numero dispari delle radici dell'equazione $f'(x)=0$ giacciono tra due radici *disuguali* adiacenti qualunque dell'equazione $f(x)=0$.

Rispetto alle radici *eguali* dell'equazione $f(x)=0$, sappiamo che la radice a che è ripetuta r volte nell'equazione $f(x)=0$ è ripetuta $r-1$ volte nell'equazione $f'(x)=0$. Similmente la radice b che è ripetuta s volte nell'equazione $f(x)=0$ è ripetuta $s-1$ volte nell'equazione $f'(x)=0$; e così di seguito.

Sarà conveniente per noi di immaginare che le r radici eguali ad a dell'equazione $f(x)=0$ includano $r-1$ intervalli, in ciascuno dei quali si trova una radice a dell'equazione $f'(x)=0$; e similmente per le altre radici ripetute. Con questo concetto possiamo riguardare l'enunciato dell'Art. 102 come valevole generalmente, siano o pur no le radici dell'equazione $f(x)=0$ tutte disuguali.

104. Non più che una radice dell'equazione $f(x)=0$ può giacere tra due radici adiacenti qualunque dell' equazione $f'(x)=0$. Poichè se ve ne potesse esserero più di una vi sarebbero una o più radici dell' equazione $f'(x)=0$ comprese tra esse, e così le due radici dell' equazione $f'(x)$ che erano adiacenti per supposizione non sarebbero più adiacenti.

E similmente l'equazione $f(x)=0$ non può avere più di una radice maggiore della più grande radice dell' equazione $f'(x)=0$, o più di una radice minore della più piccola radice dell' equazione $f'(x)=0$.

Se l'equazione $f(x)=0$ ha tutte le sue radici reali, avverrà lo stesso per l'equazione $f'(x)=0$; infatti l'ultima equazione è di un grado minore di un'unità di quello della prima, ed una radice dell'ultima equazione esiste tra due radici adiacenti qualunque della prima equazione. E generalmente se l'equazione $f(x)=0$ ha m radici reali l'equazione $f'(x)=0$ ha certamente $m-1$ radici reali, e ne può avere di più.

105. Poichè $f''(x)$ è la prima funzione derivata di $f'(x)$, l'equazione $f''(x)=0$ ha un numero dispari di radici tra due radici adiacenti qualunque dell' equazione $f'(x)=0$. Così se l'equazione $f(x)=0$ ha m radici reali, l'equazione $f'(x)=0$ ha al meno $m-1$ radici reali, e l'equazione $f''(x)=0$ ha al meno $m-2$ radici reali. Procedendo in questo modo giungiamo al risultato che se l'equazione $f(x)=0$ ha m radici reali, l'equazione $f^r(x)=0$ ha al meno $m-r$ radici reali.

Quindi se l'equazione $f^r(x)=0$ ha μ radici immaginarie, l'equazione $f(x)=0$ ha al meno μ radici immaginarie. Infatti se l'equazione $f(x)=0$ avesse meno di μ radici immaginarie essa avrebbe più di $n-\mu$ radici reali, supponendo n il grado dell'equazione; così l'equazione $f^r(x)=0$ avrebbe più di $n-\mu-r$ radici reali, e siccome questa equazione è del grado $n-r$ essa non potrebbe avere tante radici immaginarie quante ne indica μ, il che è contrario alla supposizione.

Per esempio, sia $f(x)=x^n(1-x)^n$.

L'equazione $f(x)=0$ ha tutte le sue radici reali, cioè, n eguali a zero, ed n eguali all'unità. Quindi l'equazione $f^n(x)=0$ avrà tutte le sue n radici reali e tutte comprese tra 0 ed 1; questa equazione è

$$0=1-\frac{n}{1}\frac{n+1}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}x^2-\ldots$$

106. Dall' Art. 105 possiamo dedurre il seguente semplice carattere, che spesso indicherà l'esistenza di radici immaginarie in una equazione.

Siano p_{r-1}, p_r, *e* p_{r+1} *i coefficienti di tre termini consecutivi in* f(x), *allora se* p_r^2 *è minore di* $p_{r-1}\,p_{r+1}$ *vi dovrà essere una coppia di radici immaginarie nell'equazione* f(x) = 0.

Si prenda la $(n-r-1)^{ma}$ funzione derivata di $f(x)$ e si eguagli a zero; così

$$\frac{p_0 x^{r+1} \lfloor n}{\lfloor r+1} + \ldots + \frac{p_{r-1} x^2 \lfloor n-r+1}{1 \cdot 2} + p_r x \lfloor n-r + p_{r+1} \lfloor n-r-1 = 0.$$

Si ponga $\frac{1}{y}$ per x, si moltiplichi per y^{r+1}, e si divida per $\lfloor n-r-1$; così

$$y^{r+1} + \frac{(n-r)p_r}{p_{r+1}} y^r + \frac{(n-r+1)(n-r)}{1 \cdot 2} \frac{p_{r-1}}{p_{r+1}} y^{r-1} + \ldots = 0.$$

Se le radici di questa equazione sono tutte reali la somma dei loro quadrati è positiva; e quindi, per l'Art. 47,

$$\frac{(n-r)^2 p_r^2}{p^2_{r+1}} - \frac{(n-r+1)(n-r)p_{r-1}}{p_{r+1}}$$

è positiva. Quindi

$$p_r^2 \text{ è maggiore di } \frac{n-r+1}{n-r} p_{r-1} p_{r+1},$$

ed *a fortiori*

$$p_r^2 \text{ è maggiore di } p_{r-1}\, p_{r+1}.$$

Se dunque questa condizione non è soddisfatta vi deve essere una coppia di radici immaginarie nell'equazione derivata, e quindi anche nell'equazione proposta.

107. Se conosciamo tutte le radici reali dell'equazione $f'(x) = 0$ possiamo determinare quante radici reali ha l'equazione $f(x) = 0$. Infatti siano $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$, le radici dell'equazione $f'(x) = 0$ disposte in ordine decrescente di grandezza algebrica. Si sostituiscano per x in $f(x)$ successivamente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$, e si osservino i segni dei risultati. Allora *una* radice o *nessuna* radice dell'equazione

$f(x)=0$ cade tra due valori adiacenti qualunque sostituiti, secondo che i corrispondenti risultati hanno segni *contrarii* o lo *stesso* segno. Ciò segue dagli Art. 98 e 104.

L'equazione $f(x)=0$ ha una radice algebricamente maggiore di α, o nessuna, secondo che $f(\alpha)$ è negativa o positiva; ed essa ha una radice algebricamente minore di $\varkappa$ se l'equazione è di grado pari ed $f(\varkappa)$ è negativa, o pure se l'equazione è di grado dispari ed $f(\varkappa)$ è positiva, altrimenti no. Si veggano gli Art. 98 e 104.

Quindi il numero delle radici reali dell'equazione $f(x)=0$ sarà lo stesso che il numero delle *variazioni di segno* nella serie ottenuta sostituendo $+\infty, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, -\infty$, per x in $f(x)$ successivamente. Però se $f(x)$ *svanisce* quando si fanno alcune delle sostituzioni, ciò indica che l'equazione $f(x)=0$ ha radici *eguali*, ed il numero di queste può essere scoperto col Cap. VI.

108. Come un esempio cercheremo le condizioni affinchè l'equazione $x^3-qx+r=0$ abbia tutte le sue radici reali, supponendo q una quantità positiva. Qui $f'(x)=3x^2-q$, sicchè le radici dell'equazione $f'(x)=0$ sono $\pm\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)}$; sia $\alpha=+\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)}$ e $\beta=-\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)}$.

Allora
$$f(\alpha)=+\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-q\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+r=-2\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+r,$$
$$f(\beta)=-\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+q\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+r=2\left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+r.$$

Si supponga in primo luogo $\left(\frac{r}{2}\right)^2$ maggiore di $\left(\frac{q}{3}\right)^3$; allora se r è positivo $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ sono tutte e due positive, e l'equazione $f(x)=0$ ha solamente una radice reale, la quale è algebricamente minore di β; se r è negativo $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ sono tutte e due negative, e l'equazione $f(x)=0$ ha solamente una radice reale, la quale è maggiore di α.

Supponiamo ora $\left(\frac{r}{2}\right)^2$ minore di $\left(\frac{q}{3}\right)^3$; allora $f(\alpha)$ è negativa ed $f(\beta)$ è positiva, e l'equazione $f(x)=0$ ha tre radici reali, cioè una maggiore di α, una tra α e β, ed una algebricamente minore di β.

109. Un metodo di scoprire la situazione delle radici reali di un'equazione fu indicato da Waring, e riprodotto da Lagrange, il

quale metodo ora spiegheremo; esso è chiamato il *Metodo di Waring per separare le Radici.*

Supponiamo che le radici eguali di un'equazione, se essa ne ha alcune, siano state scoperte e siano stati rimossi i fattori corrispondenti, sicchè si abbia a trattare un'equazione che ha solamente radici disuguali. Rappresenti $f(x)=0$ quest'equazione. Si supponga k essere una quantità che è minore della differenza di due radici qualunque, e sia s un limite superiore delle radici positive. Si sostituiscano per x in $f(x)$ successivamente s, $s-k$, $s-2k$, $s-3k$, ... e così di seguito sino ad una quantità che è algebricamente minore della più piccola radice che l'equazione può avere; e si osservi la serie dei segni dei risultati. Allora quando si trova una *variazione* di segno vi è una radice tra i due corrispondenti valori sostituiti, e quando si ha una *permanenza* di segno nessuna radice esiste in quell'intervallo. Infatti poichè k è minore della differenza tra due qualunque delle radici siamo sicuri che più di una radice non può cadere in ciascun intervallo.

Dobbiamo quindi considerare in qual modo la quantità k possa essere determinata. Supponiamo che sia stata formata l'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione proposta, e che un limite inferiore delle radici positive di questa equazione sia stato trovato; si dinoti questo con δ. Allora $\sqrt{\delta}$ è un valore convenevole per k.

Nell'Art. 60 abbiamo già dato un esempio della formazione di un'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici di un'equazione proposta, ed in seguito considereremo la quistione generalmente. Si vedrà allora che a motivo della complicazione del risultato ottenuto, il metodo di Waring per separare le radici di un'equazione proposta è generalmente inutile in pratica per le equazioni di un grado superiore al terzo, benchè teoreticamente esso raggiunga lo scopo proposto.

110. Come un esempio del metodo di Waring si prenda l'equazione

$$x^3-3x^2-4x+13=0.$$

Per l'Art. 60 l'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione proposta è

$$y^3-42y^2+441y-49=0.$$

Si ponga $y=\frac{1}{z}$; così $49z^3-441z^2+42z-1=0$.

cioè,
$$49z^2(z-9)+42\left(z-\frac{1}{42}\right)=0;$$

così 9 è un limite superiore dei valori di z, e quindi $\frac{1}{9}$ è un limite inferiore dei valori di y. Quindi $\sqrt{\frac{1}{9}}$, cioè, $\frac{1}{3}$, è minore della differenza tra due radici qualunque dell'equazione proposta.

Ora $4+1$, cioè 5, è un limite superiore delle radici positive dell'equazione proposta, per l'Art. 87. $E-(1+\sqrt{4})$ è numericamente un limite superiore delle radici negative, per gli Art. 96 ed 89. Così tutte le radici dell'equazione proposta giacciono tra 5 e -3. Sostituendo successivamente per x, i valori $5, 5-\frac{1}{3}, 5-\frac{2}{3}, \ldots$ si troverà che una radice cade fra 3 e $2\frac{2}{3}$, una radice tra $2\frac{2}{3}$ e $2\frac{1}{3}$, ed una radice fra -2 e $-2\frac{1}{3}$.

111. Conchiuderemo questo Capitolo con una proposizione la quale può servire come un esempio di alcuni dei principii già stabiliti. Nell'equazione $f(x)=0$

in cui
$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+x-r,$$

se q è il valore numerico del coefficiente numericamente più grande, ed r è positivo e minore di $\frac{1}{2+4q}$ vi è una radice reale positiva minore di $2r$.

Quando x è zero $f(x)$ è negativa. Ora un valore positivo di x renderà $f(x)$ positiva, *a fortiori,* se esso rende

$$x-r-q(x^n+x^{n-1}+\ldots+x^3+x^2)$$

positiva, cioè, se essa rende $x-r-qx^2\dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}$ positiva.

Quindi *a fortiori* $f(x)$ è positiva se x è minore dell'unità ed $(1-x)(x-r)-qx^2$ è positiva. Ora si ponga $2r$ per x nell'ultima espressione ed essa diviene $r\{1-2r-4qr)$, e questa è positiva poichè per supposizione $r(2+4q)$ è minore dell'unità. Così $f(x)$ è positiva quando $x=2r$; ed $f(x)$ è negativa quando $x=0$; quindi una radice dell'equazione $f(x)=0$ giace tra 0 e $2r$.

Similmente se l'ultimo termine in $f(x)$ è r invece di $-r$ ed r è positivo e minore di $\frac{1}{2+4q}$ l'equazione $f(x)=0$ ha una radice tra 0 e $-2r$.

VIII. RADICI COMMENSURABILI.

112. Per *radice commensurabile* s'intende una radice che può essere espressa esattamente in una forma finita, intera o frazionaria; sicchè essa non contiene alcuna quantità irrazionale. Mostreremo ora che quando i coefficienti di un'equazione sono numeri razionali, interi, o frazionarii, le radici commensurabili dell'equazione facilmente possono essere trovate.

Abbiamo veduto nell'Art. 53 che se i coefficienti di un'equazione sono razionali ma non tutti interi, possiamo trasformare l'equazione in un'altra che ha tutt'i suoi coefficienti interi e per coefficiente del suo primo termine l'unità. Possiamo quindi limitarci ad equazioni dell'ultima forma; e dimostreremo primieramente che le equazioni di quella forma non possono avere radici razionali frazionarie.

113. *Se i coefficienti di un'equazione sono numeri interi, ed il coefficiente del primo termine è l'unità, l'equazione non può avere una radice razionale frazionaria.*

Sia l'equazione

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0,$$

e se è possibile si supponga che essa abbia una radice razionale frazionaria espressa nei suoi minimi termini da $\frac{a}{b}$. Si sostituisca questo valore per x, e si moltiplichi da per tutto per b^{n-1}; così

$$\frac{a^n}{b}+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\ldots+p_{n-2}a^2b^{n-3}+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1}=0,$$

e quindi

$$-\frac{a^n}{b}=p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\ldots+p_{n-2}a^2b^{n-3}+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1}.$$

L'ultimo risultato è impossibile poichè il secondo membro dell'equazione è un *intero*, ed il primo membro *non è un intero*. Quindi $\frac{a}{b}$ non può essere una radice dell'equazione proposta.

114. Così abbiamo solamente ad occuparci della ricerca delle radici commensurabili *intere*, e spiegheremo ora il metodo col quale esse possono essere trovate. Il metodo è talvolta chiamato il *Metodo dei divisori*, e talvolta il *Metodo di Newton*.

Sia l'equazione

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0,$$

e si supponga a una radice intera. Allora sostituendo e scrivendo i termini in ordine inverso abbiamo

$$p_n+p_{n-1}a+p_{n-2}a^2+\ldots+p_2a^{n-2}+p_1a^{n-1}+a^n=0,$$

e quindi dividendo per a

$$\frac{p_n}{a}+p_{n-1}+p_{n-2}a+\ldots+p_2a^{n-3}+p_1a^{n-2}+a^{n-1}=0.$$

Quindi $\frac{p_n}{a}$ deve essere un intero; dinotiamolo con q_1 e si divida di nuovo per a; così

$$\frac{q_1+p_{n-1}}{a}+p_{n-2}+\ldots+p_2a^{n-4}+p_1a^{n-3}+a^{n-2}=0.$$

Quindi $\frac{q_1+p_{n-1}}{a}$ deve essere un intero; dinotiamolo con q_2 e si divida di nuovo per a, e troveremo che $\frac{q_2+p_{n-2}}{a}$ deve essere un intero. Procedendo in questo modo dopo di aver diviso n volte per a arriveremo ad un risultato dinotato da $\frac{q_{n-1}+p_1}{a}+1=0$.

Quindi le seguenti condizioni sono *necessarie* affinchè l'intero a possa essere una radice dell'equazione $f(x)=0$.

L'ultimo termine dell'equazione deve essere divisibile per a. Si aggiunga al quoziente così ottenuto il coefficiente di x nell'equazione; la somma deve essere divisibile per a. Si aggiunga al quoziente così ottenuto il coefficiente di x^2 nell'equazione; la somma deve essere divisibile per a. Si proceda in questo modo sino a che siano state effettuate $n-1$ divisioni, e si aggiunga al quoziente il coefficiente di x^{n-1}; la somma deve essere divisibile per a ed il quoziente deve essere -1.

Se alcuna delle condizioni richieste non è soddisfatta l'intero a non è una radice.

115. Nell'Articolo precedente abbiamo trovato le condizioni che sono *necessarie* affinchè l'intero a possa essere una radice dell'equazione $f(x)=0$; è facile vedere che se l'ultima di queste condizioni è soddisfatta l'intero a è una radice. Infatti quell'ultima condizione può essere espressa così;

$$\frac{p_n}{a^n}+\frac{p_{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{p_{n-2}}{a^{n-2}}+\ldots+\frac{p_2}{a^2}+\frac{p_1}{a}=-1,$$

e se questo è vero vediamo moltiplicando per a^n che a è una radice di $f(x)=0$.

Adunque per trovare tutte le radici commensurabili di un'equazione dobbiamo solamente determinare tutt'i divisori dell'ultimo termine, ed esaminare se essi soddisfano alle condizioni dell'Art. 114. Il lavoro spesso sarà diminuito trovando prima i limiti positivi e negativi delle radici, poichè naturalmente non è necessario di considerare alcun intero che non cade tra quei limiti.

116. Per un esempio si prenda l'equazione

$$x^3-3x^2-8x-10=0.$$

Qui $1+10$ è un limite superiore delle radici positive, per l'Art. 87; e scrivendo $-y$ per x otteniamo l'equazione

$$y^3+3y\left(y-\frac{8}{3}\right)+10=0,$$

per la quale 3 è un limite superiore delle radici positive. Quindi tutte le radici dell'equazione proposta giacciono tra 11 e -3. I divisori di -10 che cadono tra questi limiti sono 10, 5, 2, 1, -1, -2; e procediamo ad esaminare se alcuni di questi numeri sieno radici.

+10	+ 5	+ 2	+ 1	− 1	− 2
− 1	− 2	− 5	−10	10	5
− 9	−10	−13	−18	2	−3
	− 2		−18	− 2	
	− 5		−21	− 5	
	− 1		−21	+ 5	

Nella prima linea sono scritti tutt'i divisori dell'ultimo termine che è necessario di esaminare, al di sotto di ciascun divisore sono posti i risultati che nascono eseguendo l'esame con quel divisore.

Così prendendo il divisore 10, dividiamo prima l'ultimo termine 10 per esso, e scriviamo il quoziente -1; quindi aggiungiamo questo al coefficiente di x che è -8, e scriviamo la somma -9; *questa non è divisibile* per 10, sicchè 10 non è una radice. Rispetto a 5 tutte le condizioni sono soddisfatte, sicchè 5 è una radice. Rispetto a $+2$ e -2 giungiamo ad un punto in cui la divisione esatta non è possibile, sicchè questi numeri non sono radici. Rispetto a $+1$ e -1 la condizione finale non è soddisfatta, sicchè questi numeri non sono radici.

Così la sola radice commensurabile è 5; e dinotando l'equazione con $f(x)=0$, conosciamo che $x-5$ è un fattore di $f(x)$. L'altro fattore si troverà essere x^2+2x+2.

Per un altro esempio si prenda l'equazione

$$x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0.$$

Si troverà che le radici commensurabili sono 2, -2, e -4.

117. Ordinariamente si omettono $+1$ e -1 dai divisori che debbono essere esaminati, essendo più semplice di vedere se questi valori sono radici col sostituirli per x nell'equazione data.

Se alcune potenze di x mancano nell'equazione proposta esse si debbono supporre introdotte con i coefficienti zero; si vegga l'Art. 51.

Quando abbiamo accertato col metodo qui esposto che alcuni numeri $a, b, c, \ldots$, sono le sole radici commensurabili di un'equazione $f(x)=0$, rimane ancora a determinare se alcuna di queste radici sia ripetuta. Possiamo per ciò dividere $f(x)$ pel prodotto $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ e dinotando il quoziente con $\varphi(x)$ possiamo applicare il metodo all'equazione $\varphi(x)=0$, e così determinare se alcune delle quantità $a, b, c, \ldots$ sono radici di questa equazione. Procedendo in questo modo determineremo le radici ripetute dell'equazione $f(x)=0$, e quante volte ciascuna radice è ripetuta.

O pure possiamo applicare le condizioni delle radici eguali trovate nel Cap. VI. all'equazione $f(x)=0$.

118. Supponiamo che in vece di prendere un'equazione, con *l'unità* per coefficiente del primo termine, come nell'Art. 114, si prenda un'equazione con un *intero qualunque* p_0 per coefficiente del primo termine. La sola differenza nelle condizioni risultanti si è che

l'ultimo quoziente deve essere $-p_0$ e non -1. Supponiamo per esempio

$$2x^3-12x^2+13x-15=0.$$

Qui $\frac{15}{2}+1$ è un limite superiore delle radici positive per l'Art. 87, e non vi è alcuna radice negativa per l'Art. 24, e vediamo con la sostituzione che 1 non è radice; così i soli divisori dell'ultimo termine da considerare sono 5 e 3. Il procedimento essendo disposto come sopra abbiamo

$$\begin{array}{rr} 5 & 3 \\ -3 & -5 \\ 10 & 8 \\ 2 & \\ -10 & \\ -2 & \end{array}$$

Così 5 è una radice, poichè tutte le condizioni sono soddisfatte, l'ultimo quoziente essendo -2; e 3 non è radice, poichè 8 non è divisibile per 3.

Bisogna rammentarsi che se il coefficiente del primo termine non è l'unità l'equazione può avere una radice commensurabile frazionaria; si vegga l'Art. 113.

119. Il numero dei divisori dell'ultimo termine che è necessario di esaminare alle volte può essere diminuito col seguente principio. Si supponga a una radice dell'equazione $f(x)=0$; per x si ponga $m+y$, allora $a-m$ è un valore di y che soddisfa all'equazione $f(m+y)=0$. Il termine indipendente da y in questa equazione è $f(m)$, e tutt'i coefficienti di y sono interi, se i coefficienti in $f(x)$ sono interi ed m è anche un intero; si vegga l'Art. 12. Così se a è un intero $a-m$ è un intero e deve perciò dividere $f(m)$ per l'Art. 114. Così ogni intero a che divide l'ultimo termine di $f(x)$ deve essere rigettato se $a-m$ non divide $f(m)$.

Qui m può essere un intero qualunque positivo o negativo; i valori $+1$ e -1 sono vantaggiosi per la facilità con la quale si può allora calcolare $f(m)$.

Si prenda per esempio la seconda equazione data nell'Art. 116; qui 4 divide l'ultimo termine, ma $4+1$ non divide $f(-1)$ che è -9; così 4 non può essere una radice dell'equazione proposta.

Ancora, si prenda l'esempio $x^3-20x^2+164x-400=0$. Questa equazione non ha alcuna radice negativa per l'Art. 24; e scriven-

dola nella forma $x^2(x-20)+164\left(x-\frac{100}{41}\right)$, vediamo che 20 è un limite superiore delle radici positive. I divisori positivi dell'ultimo termine che sono minori di 20 sono 2, 4, 5, 8, 10, e 16. Di questi 5, 8, e 10 non sono radici; poichè $f(1)=-255$, e questo non è divisibile per $5-1$, o per $8-1$, o per $10-1$. Così i soli divisori dell'ultimo termine che rimangono ad esaminarsi sono 2, 4, e 16; si troverà che 4 è una radice.

120. Come un esempio di una radice razionale frazionaria, si consideri l'equazione $4x^4-11x^2+7x-6=0$, cioè,

$$x^4-\frac{11}{4}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0.$$

Prima, si ponga $x=\frac{y}{2}$, per trasformare l'equazione in una con coefficienti interi; si vegga l'Art. 53. Così

$$y^4-11y^2+14y-24=0,$$

cioè,
$$y^4+0y^3-11y^2+14y-24=0.$$

Per gli Art. 89 e 96 tutte le radici di questa equazione debbono cadere tra $1+\sqrt{24}$ e $-(1+\sqrt{24})$; e vediamo con la sostituzione che $+1$ e -1 non sono radici. Così i soli divisori dell'ultimo termine da esaminarsi sono 4, 3, 2, -2, -3, -4. Inoltre $f(x)=-20$, e questo non è divisibile per $4-1$, o per $-2-1$; così i numeri 4 e -2 debbono essere rigettati. Il procedimento essendo disposto come sopra abbiamo

3	2	−3	−4
−8	−12	8	6
6	2	22	20
2	1		−5
−9	−10		−16
−3	−5		4
−3			4
−1			−1

Così 3 e -4 sono radici; e poichè $x=\frac{y}{2}$, abbiamo $\frac{3}{2}$ e -2 come radici dell'equazione primitiva.

IX. SULL' ABBASSAMENTO DELLE EQUAZIONI.

121. In questo Capitolo mostreremo come la risoluzione di un'equazione si può far dipendere dalla risoluzione di un'equazione di grado più basso, in alcuni casi in cui sussistono note relazioni tra le radici; questo procedimento è chiamato *l'abbassamento delle equazioni.*

122. *Quando due equazioni hanno una radice o più radici in comune, si cerca di determinare la radice o le radici.*

Supponiamo che l'equazioni $f(x)=0$ ed $F(x)=0$ abbiano una radice comune a; allora $f(x)$ ed $F(x)$ hanno il fattore comune $x-a$. Quindi la massima comune misura di $f(x)$ ed $F(x)$ deve avere $x-a$ come fattore. Similmente ogni fattore comune ad $f(x)$ ed $F(x)$ sarà un fattore della loro massima comune misura, e nessun altro fattore si troverà nella massima comune misura.

Quindi, se troviamo la massima comune misura di $f(x)$ ed $F(x)$, e si eguaglia a zero, le radici di questa equazione coincideranno con le radici richieste che sono comuni alle equazioni $f(x)=0$ ed $F(x)=0$.

Se un fattore è ripetuto in $f(x)$ ed $F(x)$ esso sarà anche ripetuto nella loro massima comune misura.

123. Supponiamo, per esempio, di avere le due equazioni

$$x^4+3x^3-5x^2-6x-8=0$$

ed

$$x^4+x^3-9x^2+10x-8=0.$$

La massima comune misura delle espressioni che formano i primi membri di queste equazioni è x^2+2x-8; e se essa si mette eguale a zero otteniamo $x=-4$, o $x=2$. Così 2 e -4 sono le radici comuni alle due equazioni.

124. Supponiamo che si sappia esistere tra a e b, due radici dell'equazione $f(x)=0$, la relazione $pa+qb=r$; si cerca di determinare queste radici.

Poichè a e b sono radici dell'equazione $f(x)=0$, abbiamo $f(a)=0$, ed $f(b)=0$; ma $b=\frac{r-pa}{q}$, quindi $f\left(\frac{r-pa}{q}\right)=0$. Così a è una radice comune delle equazioni $f(x)=0$ ed $f\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$. Quindi a può essere trovata con l'Articolo precedente. Così a è conosciuta e quindi b dalla relazione $pa+qb=r$. Quindi $f(x)$ si può dividere pel prodotto dei fattori $x-a$ ed $x-b$; e se il quoziente si eguaglia a zero otteniamo un'equazione per determinare le rimanenti radici dell'equazione $f(x)=0$.

125. Supponiamo, per esempio, di avere l'equazione

$$x^4-7x^3+11x^2-7x+10=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

e di conoscere che due delle sue radici a e b sono legate dalla relazione $b=2a+1$.

Si sostituisca $2x+1$ per x in (1); così

$$(2x+1)^4-7(2x+1)^3+11(2x+1)^2-7(2x+1)+10=0,$$

cioè,

$$16x^4-24x^3-16x^2-4x+8=0,$$

o

$$4x^4-6x^3-4x^2-x+2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

La massima comune misura dei primi membri di (1) e (2) si troverà essere $x-2$. Così $a=2$, e quindi $b=5$; cioè, 2 e 5 sono due delle radici dell'equazione proposta. Quindi si troverà che

$$x^4-7x^3+11x^2-7x+10=(x-2)(x-5)(x^2+1),$$

sicchè le altre radici sono $\pm\sqrt{(-1)}$.

126. Può accadere che un'altra coppia di radici α e β sia soggetta alla condizione $p\alpha+q\beta=r$. In questo caso le espressioni $f(x)$ ed $f\left(\frac{r-px}{q}\right)$ avranno per loro massima comune misura un'espressione del secondo grado in x la quale conterrà i fattori $x-a$ ed $x-\alpha$.

Se le radici a e b sono entrambe ripetute nell'equazione $f(x)=0$, il fattore $x-a$ sarà ripetuto nella massima comune misura di $f(x)$ ed $f\left(\frac{r-px}{q}\right)$.

127. Generalmente supponiamo che due radici a e b dell'equazione $f(x)=0$ siano legate dalla relazione $b=\varphi(a)$. Allora le equa-

zioni $f(x)=0$ ed $f\{\varphi(x)\}=0$ hanno una radice comune, cioè a, e possiamo determinare questa radice comune con l'Art. 122.

128. Vi è un caso in cui il metodo degli Art. 124 e 126 non ci aiuta nel risolvere un' equazione proposta. Supponiamo, per esempio, di avere un'equazione $f(x)=0$, e di conoscere che le radici di questa equazione si trovano a coppie, e che *ciascuna* coppia di radici a e b soddisfa la relazione $a+b=2r$. Allora secondo l'Art. 124 dovremmo procedere a cercare le radici comuni delle equazioni $f(x)=0$ ed $f(2r-x)=0$. Ma queste equazioni si troveranno coincidere completamente; poichè per supposizione $f(a)=0$, cioè, $f(2r-b)=0$, ed $f(b)=0$, cioè, $f(2r-a)=0$, sicchè le radici a e b sono comuni alle due equazioni. Similmente ogni altra coppia di radici è comune alle due equazioni, e così le due equazioni debbono coincidere.

129. Vi sono varii modi per *abbassare* l'equazione nel caso considerato nell'Articolo precedente; spiegheremo due di essi che forniscono esercizii sul soggetto di questo Capitolo.

I. Possiamo procedere così. Si ponga $a-b=2z$, sicchè abbiamo simultaneamente

$$f(a)=0, \quad a+b=2r, \quad a-b=2z.$$

Dalla seconda e terza di queste equazioni $a=z+r$. Si sostituisca nella prima equazione, sicchè $f(z+r)=0$. Da questa equazione si possono trovare i valori di z, e quindi i corrispondenti valori di a e b. È facile mostrare che l'equazione $f(r+z)=0$ contiene solamente potenze *pari* di z, e così se riguardiamo z^2 come la quantità incognita il grado di questa equazione sarà metà del grado dell'equazione proposta. Infatti siano a e b una coppia di radici dell'equazione proposta, α e β un'altra coppia, e così di seguito; allora

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-\alpha)(x-\beta)\ldots$$

$$\begin{aligned} f(z+r) &= (z+r-a)(z+r-b)(z+r-\alpha)(z+r-\beta)\ldots \\ &= \left(z+\frac{a+b}{2}-a\right)\left(z+\frac{a+b}{2}-b\right)\left(z+\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(z+\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)\ldots \\ &= \left\{z^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}\left\{z^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right\}\ldots; \end{aligned}$$

cioè, $f(r+z)$ contiene solamente potenze pari di z.

In effetti, siccome nessuna distinzione in teoria esiste tra le radici a e b, si poteva prevedere che un'equazione tale da avere $\frac{a-b}{2}$ per una radice avrebbe anche $\frac{b-a}{2}$ per un'altra radice; e tale è appunto il caso.

II. Possiamo anche procedere così. Si ponga $z=ab$. Allora

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab=x^2-2rx+z.$$

Quindi se z è determinato convenevolmente, $x^2-2rx+z$ sarà un fattore di $f(x)$. Si esegua il procedimento della divisione di $f(x)$ per $x^2-2rx+z$ finchè il resto prende la forma $Px+Q$, in cui P e Q sono funzioni di z, ma non contengono x. Quindi le condizioni necessarie e sufficienti per essere $x^2-2rx+z$ un fattore di $f(x)$ sono $P=0$ e $Q=0$. Si trovi con l'Art. 122 un valore di z che soddisfi tutte e due queste equazioni; quindi si trovino a e b da

$$a+b=2r \quad \text{e} \quad z=ab.$$

130. Supponiamo che si conosca esistere fra tre radici a, b, c dell'equazione $f(x)=0$, la relazione $pa+qb+rc=s$; si cerca di determinare queste radici.

Poichè a, b e c sono radici dell'equazione $f(x)=0$, abbiamo

$$f(a)=0, \quad f(b)=0, \quad f(c)=0. \text{ Così}$$

$$f(a)=0, \quad f(b)=0, \quad f\left(\frac{s-pa-qb}{r}\right)=0.$$

Si supponga eliminata b tra le due ultime equazioni; otteniamo così un'equazione che possiamo dinotare con $\varphi(a)=0$. Così le equazioni $f(x)=0$, e $\varphi(x)=0$ hanno una radice comune a, e questa può essere trovata con l'Art. 122.

131. Daremo qui alcuni pochi esempi diversi in relazione col soggetto di questo Capitolo.

(1) Si cerca di determinare le radici dell'equazione

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0,$$

che sono tutte in progressione aritmetica.

Si dinotino le radici con a; $a+b$, $a+2b$, ...

Per l'Art. 47,

$$-p_1=a+(a+b)+(a+2b)+\ldots+(a+\overline{n-1}b),$$

$$p_1^2-2p_2=a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\ldots(a+\overline{n-1}b)^2.$$

$$\text{Cioè,}\quad -p_1=na+\frac{n(n-1)}{2}b,$$

$$p_1^2-2p_2=na^2+n(n-1)ab+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}b^2;$$

per *l'Algebra*.

Innalzando a quadrato il primo risultato e sottraendolo da n volte il secondo otteniamo

$$(n-1)p_1^2-2np_2=\frac{n^2(n^2-1)b^2}{12};$$

così b è conosciuta, e quindi a può essere trovata.

(2) L'equazione $x^4+3x^3-12x^2-48x-64=0$ ha due radici che sono eguali in grandezza e di segni opposti; trovarle.

Qui l'equazione ottenuta cambiando il segno di x avrà una radice in comune con l'equazione proposta. Cioè, l'equazione proposta ha una radice in comune con l'equazione

$$x^4-3x^3-12x^2+48x-64=0.$$

Allora per l'Art. 122 possiamo procedere a trovare la massima comune misura dei primi membri di queste equazioni. O pure così; con la sottrazione,

$$6x^3-96x=0;$$

quindi o $x=0$, o pure ancora $x^2=16$.

La prima non dà una radice; l'ultima dà $x=\pm 4$: e $+4$ e -4 sono radici dell'equazione proposta.

(3) L'equazione $3x^4-19x^3+9x^2-19x+6=0$ ha due radici il prodotto delle quali è 2; trovarle.

Si supponga y dinotare una radice; allora $\frac{2}{y}$ è un'altra; quindi

$$3y^4-19y^3+9y^2-19y+6=0 \quad \ldots\ldots \quad (1);$$

e $$3\left(\frac{2}{y}\right)^4 - 19\left(\frac{2}{y}\right)^3 + 9\left(\frac{2}{y}\right)^2 - 19\left(\frac{2}{y}\right) + 6 = 0,$$

cioè, $$6y^4 - 38y^3 + 36y^2 - 152y + 48 = 0,$$

o sia $$3y^4 - 19y^3 + 18y^2 - 76y + 24 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

La massima comune misura dei primi membri di (1) e (2) è $3y^2 - 19y + 6$; e ponendo questa eguale a zero otteniamo $y = \frac{1}{3}$, o $y = 6$. Così $\frac{1}{3}$ e 6 sono le radici richieste.

X. EQUAZIONI RECIPROCHE.

132. È *reciproca* un'equazione la quale non è alterata quando la quantità incognita si muta nella sua reciproca. Quindi se a è radice di una tale equazione, la reciproca di a, cioè, $\frac{1}{a}$, è anche una radice. Vedremo che la risoluzione di un'equazione reciproca si può far dipendere dalla risoluzione di un'equazione di un grado non superiore alla metà del grado dell'equazione proposta. Determineremo prima le relazioni che debbono aver luogo tra i coefficienti di un'equazione affinchè essa sia un'equazione reciproca, e quindi mostreremo in qual modo l'equazione può essere *abbassata* e così resa di più facile soluzione.

133. *Trovare le condizioni affinchè un'equazione proposta sia un'equazione reciproca.*

Sia l'equazione

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-2} x^2 + p_{n-1} x + p_n = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Si muti x in $\frac{1}{x}$, indi si moltiplichi per x^n e si divida per p_n, e si riordinino i termini; così abbiamo

$$x^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} x^{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_n} x^{n-2} + \ldots + \frac{p_2}{p_n} x^2 + \frac{p_1}{p_n} x + \frac{1}{p_n} = 0 \; . \; . \; . \; (2).$$

Affinchè (2) coincida con (1), i coefficienti delle stesse potenze di x debbono essere coincidenti; così

$$p_1 = \frac{p_{n-1}}{p_n},\; p_2 = \frac{p_{n-2}}{p_n},\; \ldots\; p_{n-2} = \frac{p_2}{p_n},\; p_{n-1} = \frac{p_1}{p_n},\; p_n = \frac{1}{p_n};$$

l'ultima equazione dà $p_n^2=1$, onde $p_n=+1$, o -1, e ciò dà origine a due classi di equazioni reciproche.

I. Si supponga $p_n=1$; allora otteniamo

$$p_1=p_{n-1},\ p_2=p_{n-2},\ \cdots p_{n-2}=p_2,\ p_{n-1}=p_1.$$

Così un'equazione è un'equazione reciproca quando i coefficienti dei termini equidistanti dal primo e dall'ultimo sono eguali.

II. Si supponga $p_n=-1$; allora otteniamo

$$p_1=-p_{n-1},\ p_2=-p_{n-2},\ \cdots p_{n-2}=-p_2,\ p_{n-1}=-p_1.$$

In questo caso se l'equazione è di grado *pari*, abbiamo tra la suddetta serie di condizioni $p_m=-p_m$, in cui $m=\frac{1}{2}n$, e ciò è impossibile a meno che non sia $p_m=0$. Così un'equazione è un'equazione reciproca quando i coefficienti dei termini equidistanti dal primo e dall'ultimo sono eguali in grandezza e di segni contrarii; con la condizione che se l'equazione è di un grado pari il coefficiente del termine medio è zero.

134. Un'equazione reciproca della prima classe di un grado *dispari* ha una radice -1, come si vede immediatamente. Così se $f(x)=0$ dinota l'equazione, $f(x)$ è divisibile per $x+1$; si vegga l'Art. 6. Sia $\varphi(x)$ il quoziente, allora $\varphi(x)=0$ sarà un'equazione reciproca di un grado pari col suo ultimo termine positivo.

Un'equazione reciproca della seconda classe di un grado *dispari* ha una radice $+1$, come si vede immediatamente. Così se $f(x)=0$ dinota l'equazione, $f(x)$ è divisibile per $x-1$; si vegga l'Art. 6. Sia $\varphi(x)$ il quoziente, allora $\varphi(x)=0$ sarà un'equazione reciproca di un grado pari col suo ultimo termine positivo.

Un'equazione reciproca della seconda classe di un grado *pari* ha una radice $+1$, ed una radice -1, come si vede immediatamente. Così, se $f(x)=0$ dinota l'equazione, $f(x)$ è divisibile per x^2-1; si vegga l'Art. 36. Sia $\varphi(x)$ il quoziente, allora $\varphi(x)=0$ sarà un'equazione reciproca di un grado pari col suo ultimo termine positivo.

135. Ciò che si è stabilito nell'Articolo precedente intorno ai risultati di alcune divisioni probabilmente si ammetterà come evidente. Ma è facile darne dimostrazione formale. Si consideri l'ulti-

mo caso, quello di un'equazione reciproca della seconda classe di un grado pari. Supponiamo che $f(x)=0$ rappresenti l'equazione; allora sappiamo che $f(x)$ è tale che $f(x)=-x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$, e sappiamo che $f(x)$ è divisibile per x^2-1; vogliamo dimostrare che il quoziente è una funzione che ha i coefficienti dei termini equidistanti dal primo e dall'ultimo eguali.

Abbiamo $f(x)=-x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$;

quindi
$$\frac{f(x)}{x^2-1}=-\frac{x^n}{x^2-1}f\left(\frac{1}{x}\right)=x^{n-2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}.$$

E questo mostra la verità di quanto si è annunziato, poichè $\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}$ è ciò che otteniamo quando si muta x in $\frac{1}{x}$ in $-\frac{f(x)}{x^2-1}$.

136. Segue dall'Art. 134 che un'equazione reciproca è o di un grado pari col suo ultimo termine positivo, o può essere abbassata a questa forma. Possiamo quindi considerare questa come la forma tipo di un'equazione reciproca, e mostreremo ora che una tale equazione può essere abbassata ad una di un grado metà.

137. *Si cerca di abbassare un'equazione reciproca che è di un grado pari col suo ultimo termine positivo.*

Sia l'equazione $x^{2m}+p_1x^{2m-1}+p_2x^{2m-2}+\ldots+p_2x^2+p_1x+1=0$. Si divida per x^m e si riuniscano a coppie i termini che sono equidistanti dal primo e dall'ultimo; così

$$x^m+\frac{1}{x^m}+p_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+p_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\ldots=0.$$

Ora si ponga $x+\frac{1}{x}=y$; allora

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-y=y^3-3y,$$

. . . . . .

e generalmente,

$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right),$$

sicchè possiamo esprimere $x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}$ come una funzione razionale di y del grado $p+1$. Quindi con la sostituzione nell'equazione precedente otteniamo un'equazione in y del grado m. Quindi da ciascun valore di y deduciamo due valori corrispondenti di x dall'equazione $x^2-yx+1=0$.

138. La relazione generale nell'Articolo precedente può essere espressa così;

$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)y-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right).$$

Questo mostra che possiamo riguardare le quantità

$$x+\frac{1}{x},\ x^2+\frac{1}{x^2},\ x^3+\frac{1}{x^3},\ldots$$

come formanti una serie ricorrente in cui la *scala di relazione* è $1-y+1$; si veggano le *Aggiunte* Capitolo XI. Daremo in appresso nel Capitolo XXI. un'espressione generale per $x^p+\frac{1}{x^p}$ in termini di y.

139. Per un'esempio di un'equazione reciproca si prenda l'equazione

$$2x^6+x^5-13x^4+13x^2-x-2=0.$$

Qui $+1$ e -1 sono evidentemente radici; e possiamo quindi dividere il primo membro per x^2-1. Così otteniamo

$$2x^4+x^3-11x^2+x+2=0;$$

$$\text{quindi } x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{11}{2}=0.$$

$$\text{Si ponga } x+\frac{1}{x}=y;\ \text{così}$$

$$y^2-2+\frac{y}{2}-\frac{11}{2}=0,$$

$$\text{o } y^2 + \frac{y}{2} - \frac{15}{2} = 0;$$

$$\text{quindi } y = \frac{5}{2} \text{ o } -3.$$

$$\text{Quindi } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \text{ o } x + \frac{1}{x} = -3;$$

$$\text{onde } x = 2 \text{ o } \frac{1}{2} \text{ o } \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5}).$$

140. L'equazione seguente può essere trasformata in un'equazione reciproca:

$$x^{2m}+p_1x^{2m-1}+p_2x^{2m-2}+\ldots+p_mx^m+p_{m-1}cx^{m-1}+p_{m-2}c^2x^{m-2}$$
$$+\ldots+p_2c^{m-2}x^2+p_1c^{m-1}x+c^m=0.$$

Infatti si ponga $x=z\sqrt{c}$, e si divida per c^m; otteniamo così un'equazione reciproca della forma tipo.

XI. EQUAZIONI BINOMIE.

141. Un'equazione della forma $x^n-A=0$ in cui A è una quantità conosciuta si chiama un'*equazione binomia*.

Le radici di questa equazione sono tutte differenti poichè la prima funzione derivata di x^n-A è nx^{n-1}, e nessun valore di x annullerà simultaneamente x^n-A ed nx^{n-1}; si vegga l'Art. 75.

142. Se $x^n-A=0$ abbiamo $x=\sqrt[n]{A}$; cioè, x è eguale ad una radice n^{ma} di A. Ma l'equazione $x^n-A=0$ ha n radici per l'Art. 33, e queste radici sono tutte differenti per l'Art. 141. Quindi otteniamo il seguente importante risultato, *ogni quantità algebrica ha* n *radici* n^me^ *differenti*. Per quantità algebrica qui intendiamo o una quantità reale, o una quantità immaginaria della forma $p+q\sqrt{-1}$.

143. Dinoti a una delle radici n^{me} di una quantità qualunque A, sicchè $a^n=A$. Allora nell'equazione $x^n-A=0$ si ponga $x=ay$, sicchè $a^ny^n-A=0$; onde $y^n-1=0$. Quindi $y=\sqrt[n]{1}$, cioè, y è eguale ad una radice n^{ma} dell'unità. Ed $x=ay=a\sqrt[n]{1}$; ma $x=\sqrt[n]{A}$; quindi $\sqrt[n]{A}=a\sqrt[n]{1}$.

Così *tutte le radici* n^me^ *di una quantità algebrica qualunque si possono trovare moltiplicando una qualunque di esse successivamente per i valori delle radici* n^me^ *dell'unità.*

144. Supponiamo ora che A sia una quantità reale positiva, e che si abbiano a risolvere l'equazione $x^n - A = 0$ e l'equazione $x^n + A = 0$. Sia a il valore aritmetico della radice n^{ma} di A, il quale si può sempre ottenere, almeno approssimativamente, per mezzo del Teorema del Binomio; si veggano le *Aggiunte* Capitolo IV. Si ponga $x = ay$, allora le equazioni proposte diventano rispettivamente $y^n - 1 = 0$, ed $y^n + 1 = 0$. Queste si possono entrambe risolvere con l'aiuto della Trigonometria; si vegga la *Trigonometria*. Però considereremo queste equazioni senza usare le espressioni Trigonometriche; e benchè non possiamo risolverle generalmente per mezzo di espressioni algebriche, potremo dimostrare importanti risultati rispetto alle medesime.

145. *Se* α *è una radice dell' equazione* $x^n - 1 = 0$, *allora* α^m *è anche una radice, in cui* m *è un intero qualunque, positivo o negativo.*

Infatti $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} = (\alpha^n)^m = 1^m = 1$.

146. *Se* α *è una radice dell' equazione* $x^n + 1 = 0$, *allora* α^m *è anche una radice, in cui* m *è un intero qualunque dispari positivo o negativo.*

Infatti $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} = (\alpha^n)^m = (-1)^m = -1$, se m è dispari.

147. *Se* m *è primo con* n, *le equazioni* $x^m - 1 = 0$ ed $x^n - 1 = 0$ *non hanno alcuna radice comune eccetto l'unità.*

Siano p e q due interi che soddisfano alla relazione $pm - qn = 1$; tali interi si possono sempre trovare con l'Algebra; si vegga *l'Algebra*. E supponiamo che a sia una radice comune delle due equazioni. Allora $a^m = 1$, onde $a^{pm} = 1$; ed $a^n = 1$, onde $a^{qn} = 1$. Quindi, con la divisione, $a^{pm-qn} = 1$; cioè $a = 1$.

148. *Se* n *è un numero primo, ed* α *una radice dell' equazione* $x^n - 1 = 0$, *eccetto l'unità, allora tutte le radici dell' equazione saranno fornite dalla serie* $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^n$.

Infatti queste quantità sono tutte radici per l'Art. 145. Dobbiamo quindi solamente dimostrare che due qualunque di esse non sono eguali. Se è possibile, si supponga $\alpha^r = \alpha^s$; allora $\alpha^{r-s} = 1$; e così le equazioni $x^n - 1 = 0$ ed $x^{r-s} - 1 = 0$ hanno una radice comune che non è l'unità. Ma ciò è impossibile per l'Art. 147, poichè $r - s$ è minore di n e quindi primo con esso.

149. Se n non è un numero primo, ed α è una radice dell'equazione $x^n-1=0$, è vero per l'Art. 145 che ogni potenza di α è anche una radice; ma non è necessariamente vero che le successive potenze di α forniranno tutte le radici. Supponiamo per esempio che $n=pq$, e sia α una radice dell'equazione $x^p-1=0$; allora α è anche una radice dell'equazione $x^n-1=0$, e lo stesso è per ogni potenza di α. Ma non possiamo ottenere più di p valori differenti prendendo le potenze di α; infatti $\alpha^{p+1}=\alpha^p\times\alpha=\alpha$, $\alpha^{p+2}=\alpha^p\times\alpha^2=\alpha^2$; e così di seguito. Così le potenze di α non forniranno *tutte* le radici dell'equazione $x^n-1=0$.

Se n non è un numero primo è ancora vero che *alcune* delle radici dell'equazione $x^n-1=0$ hanno la proprietà di fornire tutte le radici con le loro successive potenze. Mostreremo ciò con le espressioni trigonometriche delle radici.

Infatti sia r un intero qualunque; allora

$$\cos\frac{2r\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{2r\pi}{n}$$

è una radice; dinotiamola con α. Si supponga r primo con n, allora le successive potenze di α forniranno tutte le radici.

In effetti siano s e t due interi, nessuno dei quali ecceda n; allora α^s ed α^t non saranno eguali. Poichè

$$\alpha^s=\cos\frac{2sr\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{2sr\pi}{n},$$

$$\alpha^t=\cos\frac{2tr\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{2tr\pi}{n};$$

ed affinchè queste siano eguali $\frac{2sr\pi}{n}$ e $\frac{2tr\pi}{n}$ debbono essere o eguali o differire per un multiplo di quattro angoli retti. Si vegga la *Trigonometria*. Così

$$\frac{(s-t)r}{n}\text{ deve essere un intero;}$$

ma questo è impossibile essendo r primo con n ed $s-t$ minore di n.

150. *La risoluzione dell'equazione* $x^n-1=0$ *in cui* n *è il prodotto di differenti numeri primi si può far dipendere dalla risoluzione di equazioni della stessa forma che hanno per esponenti di* x *i differenti fattori primi di* n.

Supponiamo, per esempio, che n sia il prodotto di tre fattori primi m, p, q. Sia α una radice dell'equazione $x^m-1=0$, sia β una radice dell'equazione $x^p-1=0$, sia γ una radice dell'equazione $x^q-1=0$; queste radici essendo supposte tutte differenti dall'unità. Allora le radici dell'equazione $x^n-1=0$ saranno i termini del prodotto

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})\,(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p-1})\,(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{q-1}).$$

Primieramente, ogni termine di questo prodotto è una radice. Infatti supponiamo che $\alpha^r\beta^s\gamma^t$ dinoti un tal termine; allora $(\alpha^r\beta^s\gamma^t)^n=1$, poichè $\alpha^{rn}=1$, $\beta^{sn}=1$, e $\gamma^{tn}=1$. In secondo luogo, due termini qualunque di questo prodotto non sono eguali. Infatti, se è possibile, si supponga $\alpha^r\beta^s\gamma^t=\alpha^\rho\beta^\sigma\gamma^\tau$; allora $\alpha^{r-\rho}=\beta^{\sigma-s}\gamma^{\tau-t}$. La quantità nel primo membro è una radice dell'equazione $x^m-1=0$, e la quantità nel secondo è una radice dell'equazione $x^{pq}-1=0$; ma poichè m è primo con pq è impossibile che queste equazioni abbiano una radice comune diversa dall'unità.

Similmente possiamo procedere quando n ha più di tre fattori primi.

151. Supponiamo ora che i fattori primi di n si trovino più di una volta in n; per esempio, sia $n=\mu\cdot\pi\cdot\varkappa$, in cui μ, π, $\varkappa$ sono rispettivamente potenze qualunque dei numeri primi m, p, e q. Allora sarà ancora vero che se otteniamo le μ radici dell'equazione $x^\mu-1=0$, le π radici dell'equazione $x^\pi-1=0$, e le $\varkappa$ radici dell'equazione $x^\varkappa-1=0$, e prendiamo ogni prodotto possibile di queste radici, una da ciascun sistema, otterremo tutte le radici dell'equazione $x^n-1=0$. Ma, per l'Art. 149, le radici di ciascun sistema non possono essere necessariamente rappresentate dalle potenze di una radice presa arbitrariamente.

Similmente possiamo procedere quando n contiene più di tre numeri primi differenti.

152. Si suole aggiungere una proposizione di più rispetto all'equazione $x^n-1=0$ quando n è una potenza di un numero primo; e noi la daremo qui benchè sia di poca pratica importanza. Si supponga, per esempio, che $n=m^3$ in cui m è un numero primo. Sia α una radice dell'equazione $x^m-1=0$, sia β una radice dell'equazione $x^m-\alpha=0$, e sia γ una radice dell'equazione $x^m-\beta=0$. Allora le radici dell'equazione $x^n-1=0$ saranno i termini del prodotto

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})\,(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{m-1})\,(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{m-1}).$$

Primieramente, ogni termine del prodotto è una radice. Infatti supponiamo che $\alpha^r \beta^s \gamma^t$ dinoti un tal termine; allora $(\alpha^r \beta^s \gamma^t)^n = \alpha^{rn} \beta^{sn} \gamma^{tn} = 1$. In secondo luogo, due termini qualunque di questo prodotto non sono eguali. Infatti, se è possibile, si supponga $\alpha^r \beta^s \gamma^t = \alpha^\rho \beta^\sigma \gamma^\tau$; così $\alpha^l = \alpha^\lambda$, in cui

$$l = r + \frac{s}{m} + \frac{t}{m^2} \quad \text{e} \quad \lambda = \rho + \frac{\sigma}{m} + \frac{\tau}{m^2}.$$

Quindi $\alpha^{l-\lambda} = 1$, onde $\alpha^\nu - 1 = 0$, in cui $\nu = m^2 (l - \lambda)$. Ma $m^2 (l - \lambda) = m^2 (r - \rho) + m (s - \sigma) + t - \tau$, e questo è primo con m, e quindi con m^3; e quindi le equazioni $x^n - 1 = 0$ ed $x^\nu - 1 = 0$ non possono avere una radice comune differente dall'unità.

153. L'articolo precedente è di poca importanza pratica, poichè le operazioni che esso contiene non possono essere generalmente effettuate. Supponiamo che si possa risolvere l'equazione $x^m - 1 = 0$, e così trovare α; allora tutte le quantità $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$, sono radici dell'equazione $x^n - 1 = 0$; sicchè otteniamo così m radici. Ma per trovare β dobbiamo risolvere l'equazione $x^m - \alpha = 0$, cioè, dobbiamo trovare $\sqrt[m]{\alpha}$ in cui $\alpha = \sqrt[m]{1}$; e non vi è alcun metodo algebrico per effettuare ciò in generale.

Così, per esempio, quando abbiamo risolute le equazioni $x^3 - 1 = 0$ ed $x^5 - 1 = 0$ possiamo *immediatamente* formare tutte le soluzioni dell'equazione $x^{15} - 1 = 0$ con l'Art. 150. Ma non possiamo praticamente risolvere le equazioni $x^9 - 1 = 0$ o $x^{25} - 1 = 0$ col metodo dell'Art. 152; possiamo solamente ottenere tre radici della prima equazione e cinque radici dell'ultima equazione.

154. Indicheremo ora i metodi con i quali possiamo praticamente risolvere le equazioni $x^n - 1 = 0$ ed $x^n + 1 = 0$, in cui n non è troppo grande.

Possiamo osservare intanto che se n è una potenza qualunque di 2 queste equazioni possono essere risolute col procedimento dato nell'Algebra per l'estrazione della radice quadrata da un irrazionale binomio, ripetuta tante volte quanto è necessario, si vegga l'Art. 28. Se $n = pm$, in cui $p = 2^r$, si prenda $x^p = y$, così le equazioni $x^n - 1 = 0$ ed $x^n + 1 = 0$ diventano rispettivamente $y^m - 1 = 0$ ed $y^m + 1 = 0$. Allora se y può essere trovato possiamo dedurre x col procedimento dell'estrazione della radice quadrata ripetuta r volte.

155. Nell'equazione $x^n-1=0$ supponiamo che n sia un numero dispari, e sia $n=2m+1$. L'equazione $x^{2m+1}-1=0$ ha solamente una radice reale, cioè $+1$; poichè essa non ha alcuna radice negativa, e se x si fa eguale ad ogni altra quantità diversa dall'unità x^{2m+1} non sarà eguale all'unità; così l'equazione ha solamente una radice reale. Si divida $x^{2m+1}-1$ per $x-1$; così riduciamo l'equazione da risolvere alla seguente,

$$x^{2m}+x^{2m-1}+x^{2m-2}+\ldots+x^2+x+1=0.$$

Questa è un'equazione *reciproca*, e la sua risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di un'equazione del grado m.

156. Nell'equazione $x^n-1=0$ supponiamo che n sia un numero pari, e sia $n=2m$. Le sole radici reali dell'equazione sono $+1$ e -1; e possiamo dividere $x^{2m}-1$ per il prodotto di $x-1$ ed $x+1$, cioè, per x^2-1. Così riduciamo l'equazione da risolvere alla seguente,

$$x^{2m-2}+x^{2m-4}+\ldots+x^2+1=0.$$

Questa è un'equazione *reciproca*, e la sua risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di un'equazione del grado $m-1$.

L'equazione $x^{2m}-1=0$ può essere anche trattata convenientemente scrivendola così, $(x^m-1)(x^m+1)=0$, e così decomponendola nelle equazioni $x^m-1=0$ ed $x^m+1=0$. O pure possiamo adottare il metodo dato nell'Art. 154.

157. Nell'equazione $x^n+1=0$, supponiamo che n sia un numero dispari, e sia $n=2m+1$. L'equazione $x^{2m+1}+1=0$ ha solamente una radice reale, cioè -1; e possiamo dividere $x^{2m}+1$ per $x+1$, e così ridurre l'equazione da risolvere alla seguente,

$$x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}-\ldots+x^2-x+1=0;$$

questa è un'equazione *reciproca*, e la sua risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di un'equazione del grado m.

Se n è un numero dispari nell'equazione $x^n+1=0$, e mutiamo x in $-x$, otteniamo $x^n-1=0$; così possiamo se ci piace risolvere l'ultima equazione, indi cambiare i segni delle radici, e così ottenere la risoluzione della prima equazione.

158. Nell'equazione $x^n+1=0$, supponiamo che n sia un numero pari; allora l'equazione non ha alcuna radice reale. L'equazione

è un'equazione *reciproca,* e la sua risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di un'equazione di grado metà. O pure l'equazione può essere trattata col metodo dato nell'Art. 151.

159. Così nei quattro Articoli precedenti abbiamo mostrato come la risoluzione delle equazioni proposte si può far dipendere dalle risoluzioni di altre equazioni che sono di gradi non maggiori delle metà dei gradi delle equazioni proposte. In ciascun caso togliamo i fattori che corrispondono alle radici reali indi si pone $x+\frac{1}{x}=z$, ed otteniamo un'equazione in z. Ora si può osservare che quest'equazione in z avrà tutte le sue radici reali. Infatti supponiamo che $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ dinoti uno dei valori immaginarii di x; allora il valore corrispondente di z è

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}+\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}, \text{ cioè, } \alpha+\beta\sqrt{-1}+\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2},$$

e questa è una quantità reale, cioè, 2α, purchè $\alpha^2+\beta^2=1$. Dimostreremo che $\alpha^2+\beta^2$ è $=1$.

Poichè $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ è una radice dell'equazione proposta $x^n\mp1=0$, per l'Art. 41, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ è anche una radice. Così

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n=\pm1, \text{ ed } (\alpha-\beta\sqrt{-1})^n=\pm1;$$

quindi con la moltiplicazione $(\alpha^2+\beta^2)^n=1$; onde $\alpha^2+\beta^2=\pm1$, e poichè $\alpha^2+\beta^2$ è necessariamente positiva essa deve essere eguale a $+1$.

160. Considereremo ora alcuni esempii delle equazioni

$$x^n+1=0 \text{ ed } x^n-1=0.$$

(1) $x^3-1=0$; questa dà $(x-1)(x^2+x+1)=0$.

Quindi le radici sono 1 e $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; questi valori sono quindi le tre radici cubiche di $+1$. Mutando i loro segni otterremo le tre radici cubiche di -1, o in altri termini le radici dell'equazione $x^3+1=0$.

(2) $x^4+1=0$. Si ponga $x+\frac{1}{x}=z$; otteniamo $z^2-2=0$.

Così $$z=\pm\sqrt{2}.$$

Quindi $$x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1);$$

e la risoluzione può essere completata trovando le radici di due equazioni quadratiche.

(3) $x^5-1=0$. Questa dà $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$.

Quindi dobbiamo risolvere $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$, cioè

$$z^2+z-1=0. \text{ Così } z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Quindi

$$x^5-1=(x-1)\left(x^2+x\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(x^2+x\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right);$$

e la risoluzione può essere completata trovando le radici di due equazioni quadratiche. Le radici con i loro segni mutati saranno le radici dell'equazione $x^5+1=0$.

161. Se intraprendiamo la risoluzione dell'equazione $x^7-1=0$, otteniamo un'equazione del *terzo* grado in z; e se intraprendiamo la risoluzione dell'equazione $x^9-1=0$ otteniamo un'equazione del *quarto* grado in z. Mostreremo nei due Capitoli seguenti il modo di risolvere le equazioni del terzo e del quarto grado; si troverà però che i metodi di risoluzione sono di poco pratico valore quando le equazioni da risolvere hanno tutte le loro radici reali, come è il caso che dobbiamo qui considerare, per l'Art. 159.

162. In un'equazione della forma $x^{2n}+px^n+q=0$, possiamo con la risoluzione di un'equazione quadratica trovare i valori di x^n, e quindi il metodo di questo Capitolo può essere applicato a trovare i valori di x.

Chiuderemo questo Capitolo con una proposizione intorno al numero dei valori del prodotto di due radicali.

163. Supponiamo A e B due quantità algebriche qualunque, ed m ed n interi positivi. Allora $\sqrt[m]{A}$ ha m valori differenti, e $\sqrt[n]{B}$ ha n valori differenti, per l'Art. 142. Quindi il prodotto di $\sqrt[m]{A}$ e $\sqrt[n]{B}$ non può avere *più* di mn valori differenti; e dimostreremo che esso non può avere tanti valori a meno che m ed n non siano primi tra loro. Faremo vedere ciò dimostrando la proposizione seguente; *il numero dei differenti valori del prodotto di* $\sqrt[m]{A}$ *e* $\sqrt[n]{B}$ *è eguale al minimo multiplo comune di* m *ed* n.

Sia a un valore di $\sqrt[m]{A}$; allora tutt'i valori di $\sqrt[m]{A}$ sono inclusi in $a\sqrt[m]{1}$. Sia b uno dei valori di $\sqrt[n]{B}$; allora tutt'i valori di $\sqrt[n]{B}$ sono inclusi in $b\sqrt[n]{1}$. Quindi tutt'i valori del prodotto sono inclusi in $ab\times\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{1}$; e quindi il numero dei valori differenti del prodotto è lo stesso che il numero dei valori differenti di $\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{1}$. Sia r il minimo multiplo comune di m ed n; allora $(\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{1})^r=1$. Così $\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{1}$ è eguale ad una radice r^{ma} dell'unità, e quindi non può avere *più* di r valori diversi.

Dobbiamo però dimostrare ancora che $\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{1}$ *ha realmente* r valori diversi. Sia p la massima comune misura di m ed n, e sia $\frac{m}{p}=\mu$; allora i μ valori di $\sqrt[\mu]{1}$ sono inclusi tra gli m valori di $\sqrt[m]{1}$; ed r valori di $\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{1}$ si otterranno prendendo i varii termini del prodotto dei μ valori di $\sqrt[\mu]{1}$ per gli n valori di $\sqrt[n]{1}$. E questi r valori saranno tutti differenti. Infatti siano α ed α' due dei μ valori, e β e β' due degli n valori; allora $\alpha\beta$ non può essere $=\alpha'\beta'$. Poichè se $\alpha\beta=\alpha'\beta'$ abbiamo $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta'}{\beta}$; il primo membro è una radice dell'equazione $x^\mu-1=0$, ed il secondo membro è una radice dell'equazione $x^n-1=0$; e queste equazioni non possono avere alcuna radice comune eccetto l'unità per l'Art. 147.

164. La parte essenziale dell'Articolo precedente è alle volte trattata così. Abbiamo $\sqrt[m]{1}\times\sqrt[n]{}=1^{\frac{m+n}{mn}}$ e se $\frac{m+n}{mn}$ si riduce ai suoi minimi termini, il numeratore sarà un'intero ed il denominatore sarà r; così $1^{\frac{m+n}{mn}}=1^{\frac{1}{r}}$ che ha r valori differenti. Questo metodo però non è soddisfacente, poichè la teoria ordinaria dei radicali in Algebra è solamente ivi dimostrata per i valori aritmetici dei radicali e così non fornisce la relazione $1^{\frac{1}{m}}\times1^{\frac{1}{n}}=1^{\frac{m+n}{mn}}$, nel senso in cui questa relazione è qui domandata.

XII. EQUAZIONI CUBICHE.

165. Non è necessario di dire cosa alcuna sulla risoluzione delle equazioni quadratiche poichè quel soggetto è considerato completamente nei trattati sull'Algebra. Ci proponiamo in questo Capitolo di dare la risoluzione delle equazioni del terzo grado che sono anche chiamate equazioni cubiche.

Apparisce dall'Art. 56, che ogni equazione proposta può sempre essere trasformata in un'altra equazione senza il secondo termine. Siccome le radici di un'equazione cubica senza il secondo termine hanno espressioni più semplici di quelle delle radici di un'equazione cubica completa, supporremo che l'equazione cubica da risolvere sia senza il secondo termine. Il procedimento che ora daremo è usualmente chiamato la *risoluzione di Cardano di un' equazione cubica.*

166. *Risolvere l'equazione* $x^3 + qx + r = 0$.

Si ponga $x = y + z$, sicchè y e z sono due quantità per ora ignote. Si sostituisca per x nell'equazione data; così

$$(y+z)^3 + q(y+z) + r = 0,$$

cioè,
$$y^3 + z^3 + (3yz + q)(y+z) + r = 0.$$

Ora noi abbiamo fatto una sola supposizione rispetto alle due quantità y e z, cioè che la loro somma sia il valore di una radice dell' equazione proposta. Possiamo perciò ad arbitrio fare un'altra supposizione; supponiamo allora che $3yz + q = 0$. Così abbiamo

$$y^3 + z^3 + r = 0.$$

Si sostituisca per z in termini di y; così

$$y^3 + \left(-\frac{q}{3y}\right)^3 + r = 0,$$

cioè
$$y^6 + ry^3 - \frac{q^3}{27} = 0.$$

Quindi $$y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)},$$

e $$z^3 = -r - y^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Inoltre $x = y + z$; si otterrà lo stesso risultato pel valore di x sia che si adotti il segno superiore o pure il segno inferiore nei valori di y^3 e z^3; per distinzione si supponga preso il segno superiore. Quindi

$$x = \left\{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Così l'espressione per x è la somma di due radici cubiche, e siccome ogni quantità ha tre radici cubiche, dobbiamo esaminare quali radici cubiche si debbono usare nel caso attuale. Sia

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}),$$

allora per l'Art. 160, le tre radici cubiche di 1 sono 1, α, ed α^2. Dinoti m una delle radici cubiche di $-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$, allora le altre radici cubiche sono $m\alpha$ ed $m\alpha^2$; dinoti n una delle radici cubiche di $-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$; allora le altre radici cubiche sono $n\alpha$ ed $n\alpha^2$. Se potessimo attribuire a ciascuna delle radici cubiche che si trovano nell'espressione di x uno qualunque dei suoi tre valori, otterremmo in tutto nove valori di x. Ma un'equazione cubica può avere solamente tre radici, sicchè siamo condotti a conchiudere che solamente tre valori saranno ammissibili per x. Ed in fatti il procedimento di risoluzione richiede che $yz = -\frac{q}{3}$, ed è questa la condizione che determina i valori ammissibili delle radici cubiche. Supponiamo che m ed n siano prese in modo da soddisfare la condizione $mn = -\frac{q}{3}$; così possiamo avere $y = m$ e $z = n$ come valori ammissibili. Quindi possiamo avere ancora $y = \alpha m$ e $z = \alpha^2 n$; e possiamo avere ancora $y = \alpha^2 m$ e $z = \alpha n$; poichè in questi due casi la relazione $yz = -\frac{q}{3}$ è soddisfatta. Nessun'altra coppia di valori

però è ammissibile; per esempio, se supponiamo $y=m$ e $z=\alpha m$, abbiamo $yz=-\frac{\alpha q}{3}$ e non $-\frac{q}{3}$, ed ogni altra coppia di valori diversa da quelle che abbiamo ammesse renderà $yz=-\frac{\alpha q}{3}$ o pure $=-\frac{\alpha^2 q}{3}$ invece di $-\frac{q}{3}$.

167. Per esempio, si supponga $x^3+6x-20=0$. Qui $q=6$ ed $r=-20$; così

$$x=(10+\sqrt{108})^{\frac{1}{3}}+(10-\sqrt{108})^{\frac{1}{3}}.$$

Con operazioni numeriche si può accertare che

$$(10+\sqrt{108})^{\frac{1}{3}}=2\cdot732\ldots,\text{ e }(10-\sqrt{108})^{\frac{1}{3}}=-\cdot732\ldots,$$

sicchè possiamo presumere che $x=2$ sia una radice, e questo si verificherà con la sostituzione. Invece di esprimere le altre due radici col metodo dell'Articolo precedente sarà preferibile di abbassare l'equazione al secondo grado. Poichè 2 è una radice dell'equazione proposta sappiamo che $x^3+6x-20$ è divisibile per $x-2$, e troviamo che

$$x^3+6x-20=(x-2)(x^2+2x+10);$$

quindi le altre due radici dell'equazione proposta possono essere trovate risolvendo l'equazione

$$x^2+2x+10=0;$$

così queste radici sono

$$-1\pm\sqrt{-9},\text{ cioè }-1\pm3\sqrt{-1}.$$

Nell'esempio precedente possiamo verificare *con la pruova* che

$$(10+\sqrt{108})^{\frac{1}{3}}=1+\sqrt{3},\text{ e }(10-\sqrt{108})^{\frac{1}{3}}=1-\sqrt{3},$$

e così trovare la radice 2 senza alcuna estrazione numerica di radici. Non vi è però alcun procedimento algebrico col quale si possa ottenere generalmente la radice cubica di un'espressione della forma $a+\sqrt{b}$ sotto forma finita; si vegga *l'Algebra*. Possiamo applicare il teorema del binomio a trovare il valore di $(a+\sqrt{b})^{\frac{1}{3}}$ in una serie infinita; in questo caso per ottenere una serie *convergente*, dobbia-

mo sviluppare secondo le potenze ascendenti di $\sqrt{b}$ o di a, secondo che $\sqrt{b}$ è minore o maggiore di a; si veggano le *Aggiunte*, Cap. IV.

168. Abbiamo veduto nell'Art. 166, che sebbene apparentemente si siano ottenuti nove valori per x solamente tre sono realmente ammissibili. Possiamo vedere una ragione della presenza dei nove valori. Infatti si pose la relazione $yz = -\frac{q}{3}$, ma questa fu trasformata in $y^3z^3 = -\frac{q^3}{27}$ nel procedimento; e l'ultima relazione non sarebbe alterata se q fosse mutato in $q\alpha$ o in $q\alpha^2$. Così, nel risolvere l'equazione $x^3 + qx + r = 0$, troviamo realmente nove soluzioni, tre appartenenti a questa equazione, tre all'equazione $x^3 + q\alpha x + r = 0$, e tre all'equazione $x^3 + q\alpha^2 + r = 0$.

169. Consideriamo ora più particolarmente la forma delle radici dell'equazione cubica proposta. Supporremo che q ed r dinotino quantità reali. Le espressioni di y^3 e z^3 possono essere o reali o immaginarie.

Supponiamo primieramente che queste espressioni siano reali. Possiamo allora supporre che m ed n dinotino rispettivamente i valori aritmetici delle radici cubiche di y^3 e z^3. L'equazione cubica proposta ha in questo caso una radice che è certamente reale, cioè $m+n$; le altre due radici sono $m\alpha + n\alpha^2$ ed $m\alpha^2 + n\alpha$. Sostituendo per α il suo valore queste radici diventano rispettivamente

$$-\frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3},$$

$$-\frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3},$$

e queste radici sono immaginarie a meno che non sia $m=n$. Quando $m=n$ l'equazione cubica ha due radici eguali ciascuna essendo eguale a $-m$ o $-n$. La condizione che è necessaria e sufficiente perchè sia $m=n$, cioè, $y^3=z^3$, si è che $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} = 0$.

Viceversa, se le radici dell'equazione cubica sono tutte reali e disuguali le espressioni di y^3 e z^3 debbono essere immaginarie.

Supponiamo in secondo luogo che le espressioni di y^3 e z^3 siano immaginarie; cioè, supponiamo che $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ sia una quantità negativa. Sappiamo per l'Art. 142 che y^3 e z^3 avranno ciascuna radici

cubiche di una certa forma. Possiamo perciò supporre che $m=\mu+\nu\sqrt{-1}$, e siccome z^3 differisce da y^3 solamente nel segno del radicale, possiamo prendere $n=\mu-\nu\sqrt{-1}$. In questo caso le radici dell'equazione cubica proposta sono tutte reali, cioè,

$$\mu+\nu\sqrt{-1}+\mu-\nu\sqrt{-1}, \text{ cioè } 2\mu;$$

$$(\mu+\nu\sqrt{-1})\,\alpha+(\mu-\nu\sqrt{-1})\,\alpha^2, \text{ cioè } -\mu-\nu\sqrt{3};$$

e $$(\mu+\nu\sqrt{-1})\,\alpha^2+(\mu-\nu\sqrt{-1})\,\alpha, \text{ cioè } -\mu+\nu\sqrt{3}.$$

170. Si vedrà ora che la risoluzione di Cardano di un'equazione cubica è di poco uso in pratica quando le radici dell'equazione proposta sono reali e disuguali. Infatti in questo caso le espressioni di y^3 e z^3 sono immaginarie; e benchè sappiamo che le radici cubiche di queste espressioni esistono, non vi è alcun metodo aritmetico per ottenerle, nè alcun metodo algebrico per ottenerle esattamente. In questo caso le radici si presentano in una forma che è algebricamente corretta, ma aritmeticamente di poco valore. Per esempio, si prenda l'equazione

$$x^3-15x-4=0.$$

Qui $r=-4$ e $q=-15$. Quindi otteniamo

$$x=(2+\sqrt{-121})^{\frac{1}{3}}+(2-\sqrt{-121})^{\frac{1}{3}};$$

cioè, $$x=(2+11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(2-11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

Ora qui non abbiamo alcun modo ovvio di estrarre le radici cubiche. Si può verificare con la pruova che

$$(2+11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=2+\sqrt{-1},$$

e $$(2-11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=2-\sqrt{-1}.$$

Così $$x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$$

Quindi 4 è una radice. Le altre radici poi possono essere trovate col metodo dell'Art. 169; o pure possiamo procedere così,

$$x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x+1).$$

Abbiamo quindi da risolvere l'equazione $x^2+4x+1=0$; le radici sono $-2\pm\sqrt{3}$.

Ancora, si consideri l'equazione $x^3-3\sqrt[3]{2}x-2=0$.

Qui $r=-2$ e $q=-3\sqrt[3]{2}$. Così

$$x=(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Si può verificare con la pruova che

$$(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1},$$

$$(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1}.$$

Così

$$x=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Le altre radici possono quindi essere trovate; esse sono

$$\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{e} \quad -\frac{2}{\sqrt[3]{2}}.$$

171. Il caso in cui le tre radici di un'equazione cubica sono reali e disuguali è alle volte chiamato il *caso irriducibile,* ed alle volte si dice che la formola di Cardano *è in difetto* in questo caso; queste espressioni sono usate per indicare il fatto che le radici ci si presentano in questo caso in una forma molto sconveniente per le applicazioni aritmetiche.

Noi possiamo però adoperare il teorema del binomio per approssimare la radice cubica di un'espressione della forma $p+q\sqrt{-1}$. Poichè se q è numericamente minore di p possiamo sviluppare $(p+q\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ in una serie *convergente* procedente secondo le potenze crescenti di $q\sqrt{-1}$; si veggano le *Aggiunte* Cap. IV. Possiamo ottenere così approssimativamente $(p+q\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ nella forma

$P+Q\sqrt{-1}$; ed allora $(p-q\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ avrà un valore approssimato $P-Q\sqrt{-1}$; e la somma delle due radici cubiche sarà $2P$. Ma se q è numericamente maggiore di p possiamo procedere così;

$$p+q\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\,(q-p\sqrt{-1});$$

quindi $$(p+q\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}(q-p\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Ora $-\sqrt{-1}$ è una radice cubica di $\sqrt{-1}$ come si trova con la pruova, sicchè abbiamo

$$(p+q\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-\sqrt{-1}\,(q-p\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

E possiamo sviluppare $(q-p\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ in una serie convergente procedente secondo le potenze crescenti di $p\sqrt{-1}$; e così possiamo trovare come sopra la somma delle radici cubiche di $p+q\sqrt{-1}$ e $p-q\sqrt{-1}$.

Il caso in cui $p=q$ è realmente contenuto nel secondo esempio dell'Articolo precedente.

Si può osservare che per mezzo del teorema di De Moivre, possiamo esprimere la radice cubica di ogni quantità $p+q\sqrt{-1}$ in una forma che contiene funzioni trigonometriche.

172. Apparisce dagli Articoli precedenti che l'equazione cubica $x^3+qx+r=0$ si può sempre risolvere col procedimento di Cardano senza alcuna difficoltà quando q è una quantità *positiva,* ed anche quando q è una quantità *negativa* purchè q^3 sia numericamente minore di $\frac{27r^2}{4}$; ed in questi casi due delle radici sono immaginarie. Se q^3 è una quantità negativa e numericamente maggiore di $\frac{27r^2}{4}$, la formola di Cardano non è conveniente, ed in questo caso tutte le radici sono reali.

Se q^3 è negativa e numericamente eguale a $\frac{27r^2}{4}$, sicchè $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}=0$, l'equazione cubica proposta ha due delle sue radici

eguali per l'Articolo 60. Abbiamo per l'Articolo 166 in questo caso $m = n = \sqrt[3]{-\frac{r}{2}}$; e le tre radici sono $2m$, $-m$, e $-m$.

In ogni caso quando una radice di un'equazione cubica è stata trovata, possiamo, se ci piace, abbassare l'equazione a secondo grado, e così trovare le altre due radici, in vece di trovare le altre due radici col procedimento degli Articoli precedenti.

173. Indicheremo brevemente i risultati che si ottengono nella risoluzione di un'equazione cubica *completa*. Sia l'equazione

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0;$$

si ponga $x = z - \frac{b}{a}$, allora otteniamo

$$z^3 + qz + r = 0,$$

in cui $$q = 3\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{a^2}, \qquad r = \frac{d}{a} - \frac{3bc}{a^2} + \frac{2b^3}{a^3}.$$

Quindi pel metodo di Cardano

$$z = \left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

La condizione che deve aver luogo se vi sono radici eguali è

$$\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} = 0;$$

cioè $$(2b^2 - 3abc + a^2d)^2 + 4(ac - b^2)^3 = 0.$$

Si troverà con comuni operazioni algebriche che questa può essere messa sotto la forma

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 0.$$

174. Alcune equazioni cubiche in cui i coefficienti hanno valori speciali possono essere risolute senza usare il metodo di Cardano. Per esempio, si supponga

$$x^3 + 3x = a^3 - a^{-3}.$$

Questa si può scrivere

$$x^3+3x=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right),$$

cioè,
$$x^3-\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left\{x-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}=0;$$

ed ora vediamo che una radice è data da $x=a-\frac{1}{a}$.

Ancora, supponiamo che si abbia l'equazione cubica completa

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

e che abbia luogo la relazione $3ac=b^2$ tra i coefficienti. L'equazione proposta si può scrivere

$$-x^3=ax^2+bx+c,$$

quindi
$$-3abx^3=3ba^2x^2+3b^2ax+b^3,$$

quindi $(a^3-3ab)\,x^3=a^3x^3+3ba^2x^2+3b^2ax+b^3=(ax+b)^3$,

quindi
$$x\sqrt[3]{a^3-3ab}=ax+b,$$

quindi
$$x=\frac{b}{\sqrt[3]{a^3-3ab}-a}.$$

175. Nella *Trigonometria* è dato un procedimento col quale possiamo ottenere le radici di un'equazione cubica nel *caso irriducibile*, con l'aiuto delle Tavole trigonometriche. Ciò vale poco in pratica, ma mostreremo come le Tavole trigonometriche possono anche essere usate per esempii che non appartengono al *caso irriducibile*.

Supponiamo $x^3+qx+r=0$; allora

$$x=\left(-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Se q è positivo, si ponga $\frac{q^3}{27}=\frac{r^2}{4}\tan^2\theta$; allora otteniamo

$$x=\left(-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\sec\theta\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{r}{2}-\frac{r}{2}\sec\theta\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\left(-\frac{r}{\cos\theta}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}.$$

Se q è negativo, e $4q^3$ numericamente minore di $27r^2$, si ponga $\frac{q^3}{27} = -\frac{r^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta$; allora otteniamo

$$x = \left(-\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\cos\theta\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\cos\theta\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-r)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}.$$

176. Un'equazione cubica importante s'incontra in varie ricerche matematiche, e può essere notata qui benchè non legata col soggetto speciale di questo Capitolo.

Ci proponiamo dimostrare che le radici dell'equazione $f(x) = 0$ sono tutte reali, in cui $f(x)$ dinota

$$(x-a)(x-b)(x-c) - a'^2(x-a) - b'^2(x-b) - c'^2(x-c) - 2a'b'c'.$$

L'equazione si può scrivere così,

$$(x-a)\left\{(x-b)(x-c) - a'^2\right\} - \left\{b'^2(x-b) + c'^2(x-c) + 2a'b'c'\right\} = 0.$$

Dinotino h e k le radici dell'equazione quadratica

$$(x-b)(x-c) - a'^2 = 0,$$

e supponiamo h non minore di k. Allora risolvendo l'equazione quadratica si vedrà che h è maggiore di b o c, e che k è minore di b o c. Si sostituiscano successivamente $+\infty$, h, k, $-\infty$ per x in $f(x)$; i risultati saranno rispettivamente

$$+\infty, \quad -\left\{b'\sqrt{(h-b)} + c'\sqrt{(h-c)}\right\}^2, \quad \left\{b'\sqrt{(b-k)} + c'\sqrt{(c-k)}\right\}^2, \quad -\infty.$$

Così l'equazione $f(x) = 0$ ha tre radici reali, una maggiore di h, una tra h e k, ed una minore di k.

177. Vi sono due casi che richiedono ulteriore esame non applicandosi ad essi questa dimostrazione, (1) quello in cui $h = k$, (2) quello in cui h o k è una radice dell'equazione cubica.

(1) Supponiamo $h = k$. Poichè le radici dell'equazione quadratica sono eguali otterremo la condizione $(b-c)^2 + 4a'^2 = 0$; quindi $b = c$ ed $a' = 0$. Quindi si troverà che c è una radice dell'equazione cubica;

e dividendo $f(x)$ per $x-c$ ed eguagliando il quoziente a zero otteniamo un'equazione quadratica che ha radici reali.

(2) Supponiamo che h o k sia una radice dell'equazione cubica; per esempio, supponiamo che sia radice h. Allora il procedimento dell'Art. 176 mostra che l'equazione cubica ha anche una radice reale minore di k; così essa ha due radici reali, e la terza radice deve perciò essere anche reale. Similmente se k è una radice dell'equazione cubica, essa ha una radice reale maggiore di h; e così la terza radice deve anche essere reale.

178. Possiamo ricercare la condizione che deve aver luogo affinchè h o k sia una radice dell'equazione cubica. Supponiamo che λ sia una radice dell'equazione quadratica ed anche dell'equazione cubica.

Poichè λ è una radice dell'equazione quadratica, abbiamo

$$(\lambda-b)(\lambda-c)-a'^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1);$$

e poichè λ si è supposto essere anche una radice dell'equazione cubica, otteniamo

$$b'^2(\lambda-b)+c'^2(\lambda-c)+2a'b'c'=0. \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Da (1) e (2) deduciamo

$$b'^2(\lambda-b)+c'^2(\lambda-c)+2b'c'\sqrt{(\lambda-b)(\lambda-c)}=0,$$

cioè,
$$\left\{b'\sqrt{(\lambda-b)}+c'\sqrt{(\lambda-c)}\right\}^2=0;$$

quindi
$$b'^2(\lambda-b)=c'^2(\lambda-c). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Da (2) e (3) otteniamo

$$\lambda-b=-\frac{a'c'}{b'}, \quad \lambda-c=-\frac{a'b'}{c'} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

e quindi
$$b-\frac{a'c'}{b'}=c-\frac{a'b'}{c'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Quindi la relazione (5) deve aver luogo tra i coefficienti dell'equazione cubica affinchè una delle radici dell'equazione quadratica sia anche una radice dell'equazione cubica.

Viceversa, se (5) è verificata possiamo dare a λ il solo valore determinato da (4), ed allora (1) e (2) saranno entrambe soddisfatte; e così l'equazione quadratica e l'equazione cubica avranno una radice comune.

Nell'ottenere (4) e (5) supponiamo che nè b' nè c' svanisca.

Supponiamo che b' svanisca; allora da (3) o svanisce c' o pure $\lambda = c$. Se $\lambda = c$ allora da (1) segue che a' deve svanire.

179. Cerchiamo ora le condizioni affinchè l'equazione cubica abbia radici eguali.

Se nè h nè k è una radice dell'equazione cubica, la dimostrazione nell'Art. 176 mostra che le radici dell'equazione cubica sono disuguali. Ma il procedimento dell'Art. 176 può essere condotto in modo da adoperare ciascuna delle equazioni quadratiche

$$(x-c)(x-a)-b'^2=0, \quad \text{o} \quad (x-a)(x-b)-c'^2=0,$$

invece dell'equazione quadratica

$$(x-b)(x-c)-a'^2=0.$$

Quindi l'equazione cubica non può avere radici eguali a meno che essa non abbia una radice in comune con ciascuna di queste equazioni quadratiche. Quindi dall'equazione (5) otteniamo come condizioni necessarie per l'esistenza delle radici eguali dell'equazione cubica le seguenti,

$$a-\frac{b'c'}{a'}=b-\frac{c'a'}{b'}=c-\frac{a'b'}{c'}.$$

Viceversa, se queste condizioni sono verificate l'equazione cubica ha radici eguali. Infatti dinotiamo queste quantità eguali con r, sicchè

$$a=r+\frac{b'c'}{a'}, \quad b=r+\frac{c'a'}{b'}, \quad c=r+\frac{a'b'}{c'};$$

si sostituisca per a, b, c nell'equazione cubica, ed essa diviene

$$(x-r)^3-(x-r)^2\left(\frac{b'c'}{a'}+\frac{c'a'}{b'}+\frac{a'b'}{c'}\right)=0;$$

sicchè la radice r si trova due volte, e l'altra radice è

$$r+\frac{b'c'}{a'}+\frac{c'a'}{b'}+\frac{a'b'}{c'}.$$

Ciò suppone che a', b', e c' siano tutti diversi da zero.

Supponiamo ora che una di queste quantità svanisca, per sempio a'. Allora dall'equazione quadratica

$$(x-b)(x-c)-a'^2=0$$

segue che x deve essere eguale a c o b. Supponiamo $x=c$; allora dalle altre equazioni quadratiche vediamo che

$$b'=0 \text{ e } (c-a)(c-b)-c'^2=0.$$

Se a', b' e c' svaniscono tutte allora affinchè vi siano radici eguali a, b, e c debbono essere eguali, e l'equazione cubica si riduce ad $(x-a)^3=0$.

XIII. EQUAZIONI BIQUADRATICHE.

180. Passeremo ora a spiegare alcuni metodi per la risoluzione delle equazioni del quarto grado, le quali sono anche chiamate equazioni biquadratiche. Supponiamo che l'equazione biquadratica da risolvere sia priva del suo secondo termine, per una ragione già data; si vegga l'Art. 165. La prima risoluzione che daremo è detta *Risoluzione di Descartes.*

181. *Risolvere l'equazione*

$$x^4+qx^2+rx+s=0.$$

Si ponga $$x^4+qx^2+rx+s=(x^2+ex+f)(x^2-ex+g);$$

dobbiamo allora mostrare che le quantità e, f, e g possono essere trovate. Si moltiplichino tra loro i fattori nel secondo membro, e si eguaglino i coefficienti delle diverse potenze di x a quelli nel primo membro; così

$$g+f-e^2=q, \qquad e(g-f)=r; \qquad gf=s;$$

cioè, $$g+f=q+e^2, \quad g-f=\frac{r}{e}, \quad gf=s.$$

Si trovino g ed f in termini di e dalle prime due di queste equazioni, e si sostituiscano nella terza; così

$$\left(q+e^2+\frac{r}{e}\right)\left(q+e^2-\frac{r}{e}\right)=4s.$$

Da questa equazione con la riduzione otteniamo

$$e^6+2qe^4+(q^2-4s)e^2-r^2=0.$$

Questa può essere considerata come un'equazione cubica per trovare e^2, ed avrà certamente una radice reale positiva per l'Art. 20. Quando e^2 è conosciuta possiamo trovare e, ed allora g ed f diventano note. Così l'espressione x^4+qx^2+rx+s è risoluta nel prodotto di due fattori quadratici reali, e possiamo ottenere le quattro radici dell'equazione biquadratica proposta risolvendo le due equazioni quadratiche

$$x^2+ex+f=0, \quad x^2-ex+g=0.$$

182. Si sarà osservato che in uno dei due supposti fattori quadratici si è messo il termine ex, e nell'altro fattore quadratico il termine $-ex$; la ragione per ciò si è che non vi è alcun termine con x^3 nell'espressione che vogliamo risolvere in fattori quadratici. Ora e è eguale alla somma delle due radici della seconda equazione quadratica data in fine dell'Articolo precedente, sicchè e è eguale alla somma di due delle radici dell'equazione biquadratica proposta. Ora tra le *quattro* radici di un'equazione biquadratica *due* radici possono essere scelte in $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$ modi, cioè, in 6 modi; e così vediamo la ragione perchè l'equazione in e debba essere del *sesto* grado. Ma siccome la somma delle quattro radici dell'equazione biquadratica è zero per l'Art. 45, la somma di due qualunque delle radici è eguale in grandezza ed opposta in segno alla somma delle due radici rimanenti; e così vediamo la ragione perchè l'equazione in e contenga solamente potenze *pari* di e, sicchè il valore di e^2 può essere trovato con la risoluzione di un'equazione cubica.

Si può osservare che quando abbiamo trovato e^2 possiamo dare l'uno o l'altro segno al valore di e, che si ottiene estraendo la radice quadrata; poichè cambiando il segno di e mutiamo semplicemente tra loro i valori di f e g, e questo non ha alcuna influenza sui risultati che si ottengono risolvendo l'equazione biquadratica.

183. Supponiamo, per esempio, che $x^4-10x^2-20x-16=0$. Qui $q=-10$, $r=-20$, $s=-16$. L'equazione cubica in e^2 diviene $e^6-20e^4+164e^2-400=0$, ed una radice di questa è $e^2=4$; si vegga l'Art. 119. Così $e=2$; allora $f=2$, e $g=-8$; quindi

$$x^4-10x^2-20x-16=(x^2+2x+2)(x^2-2x-8).$$

Le quattro radici dell'equazione biquadratica proposta si troveranno essere 4, -2, $-1+\sqrt{-1}$, e $-1-\sqrt{-1}$.

184. Così apparisce che la risoluzione di un'equazione biquadratica può essere effettuata se possiamo ottenere una radice di una certa equazione cubica ausiliaria. Diviene perciò un punto importante l'accertare quando questa equazione cubica cade nel *caso irriducibile;* si vegga l'Art. 171. Ciò dà occasione alla proposizione seguente. *L'equazione cubica ausiliaria non cadrà nel caso irriducibile quando l'equazione biquadratica ha due radici reali e due radici immaginarie.*

Infatti supponiamo che le radici immaginarie dell'equazione biquadratica siano dinotate da $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ed $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; allora poichè la somma delle quattro radici è zero, le due radici reali saranno delle forme $-\alpha+\gamma$ e $-\alpha-\gamma$. Prendendo la somma di ciascuna coppia di queste radici otteniamo le espressioni $\pm 2\alpha$, $\pm(\gamma+\beta\sqrt{-1})$, e $\pm(\gamma-\beta\sqrt{-1})$. Così i tre valori di e^2 saranno $(2\alpha)^2$, $(\gamma+\beta\sqrt{-1})^2$, e $(\gamma-\beta\sqrt{-1})^2$; se γ non è zero due di questi valori di e^2 sono immaginarii, e se γ è zero i valori di e^2 sono tutti reali, ma due di essi sono eguali; così l'equazione cubica in e^2 non cadrà nel caso irriducibile.

185. Se le radici dell'equazione biquadratica sono tutte reali le radici dell'equazione cubica ausiliaria saranno tutte reali. Se le radici dell'equazione biquadratica sono tutte immaginarie esse saranno delle forme $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ e $-\alpha\pm\gamma\sqrt{-1}$. Prendendo la somma di ciascuna coppia di queste radici otteniamo le espressioni $\pm 2\alpha$, $\pm(\beta+\gamma)\sqrt{-1}$, e $\pm(\beta-\gamma)\sqrt{-1}$; quindi i valori di e^2 sono $4\alpha^2$, $-(\beta+\gamma)^2$, e $-(\beta-\gamma)^2$, e così sono tutti reali.

Quindi se l'equazione biquadratica ha le sue radici tutte reali o tutte immaginarie, l'equazione cubica ausiliaria cadrà *in generale* nel caso irriducibile; diciamo *in generale,* poichè può accadere che l'equazione cubica abbia due delle sue radici eguali, ed allora essa non cade nel caso irriducibile.

186. Nei due Articoli precedenti abbiamo mostrato quali saranno le forme delle radici dell'equazione cubica ausiliaria corrispondenti alle varie forme delle radici dell'equazione biquadratica proposta. Stabiliremo ora viceversa quali saranno le forme delle radici dell'equazione biquadratica proposta corrispondenti alle varie forme delle radici dell'equazione cubica ausiliaria. Poichè l'ultimo termine

dell'equazione cubica è negativo, vi deve essere *una* radice positiva; e siccome il prodotto delle radici è positivo, per l'Art. 45, i soli casi che possono accadere sono, (1) tutte le radici positive, (2) una radice positiva e due radici negative, (3) una radice positiva e due radici immaginarie. I seguenti risultati seguono dagli Art. 184 e 185.

(1) Se l'equazione cubica ha tutte le sue radici positive, le radici dell'equazione biquadratica sono tutte reali.

(2) Se l'equazione cubica ha una radice positiva e due radici negative, l'equazione biquadratica ha due radici reali e due radici immaginarie, o pure quattro radici immaginarie.

(3) Se l'equazione cubica ha una radice positiva e due radici immaginarie, l'equazione biquadratica ha due radici reali e due radici immaginarie.

187. Le quattro radici dell'equazione biquadratica si possono esprimere molto semplicemente per mezzo delle tre radici dell'equazione cubica ausiliaria. Dinotino α^2, β^2, γ^2 i tre valori di e^2 ottenuti dall'equazione cubica

$$e^6+2qe^4+(q^2-4s)e^2-r^2=0.$$

Allora per l'Art. 45 abbiamo $r^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$, e $-2q=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Così possiamo porre $r=\alpha\beta\gamma$, e prendere α come un valore di e; quindi

$$x^2+ex+f=x^2+\alpha x+\frac{1}{2}\left(q+\alpha^2-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$=x^2+\alpha x+\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma).$$

Risolvendo l'equazione $x^2+ex+f=0$ otterremo quindi

$$x=\frac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma), \quad \text{o} \quad x=\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$$

Similmente, ponendo $x^2-ex+g=0$ otterremo

$$x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma), \quad \text{o} \quad x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).$$

Così le quattro radici dell'equazione biquadratica sono

$$\frac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma), \quad \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma), \quad \frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma), \quad \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).$$

Affinchè l'equazione biquadratica abbia radici eguali l'equazione cubica ausiliaria deve avere radici eguali. Infatti supponiamo, per esempio, che

$$\frac{1}{2}(-\alpha-\beta-\gamma)=\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma),$$

allora

$$\beta+\gamma=0,$$

quindi

$$\beta^2=\gamma^2;$$

ed un simile risultato si otterrà in ogni altro caso.

Quindi possiamo esprimere la condizione che deve aver luogo affinchè l'equazione biquadratica proposta abbia radici eguali; poichè per l'Art. 173 la condizione affinchè l'equazione cubica ausiliaria abbia radici eguali è

$$(27r^2-72qs+2q^3)^2=4(q^2+12s)^3.$$

Si vedrà, per l'Art. 79, che le condizioni che debbono aver luogo affinchè l'equazione biquadratica proposta abbia tre radici eguali possono essere espresse così:

$$27r^2-72qs+2q^3=0, \quad \text{e} \quad q^2+12s=0.$$

Sarà utile di notare le forme di queste condizioni per un'equazione biquadratica completa.

Sia l'equazione

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0;$$

si ponga $x=z-\frac{b}{a}$, allora otteniamo

$$z^4+qz^2+rz+s=0,$$

in cui

$$q=\frac{6c}{a}-\frac{6b^2}{a^2},$$

$$r=\frac{4d}{a}-\frac{12bc}{a^2}+\frac{8b^3}{a^3},$$

$$s=\frac{e}{a}-\frac{4bd}{a^2}+\frac{6b^2c}{a^3}-\frac{3b^4}{a^4}.$$

Quindi troveremo che

$$q^2+12s=\frac{12}{a^2}(ea-4bd+3c^2),$$

e
$$27r^2-72qs+2q^3=\frac{16\times 27}{a^3}(ad^2+eb^2+c^3-ace-2bcd).$$

Così la condizione per le radici eguali è

$$(ea-4bd+3c^2)^3=27(ad^2+eb^2+c^3-ace-2bcd)^2;$$

e le condizioni per tre radici eguali sono

$$ea-4bd+3c^2=0,$$

e
$$ad^2+eb^2+c^3-ace-2bcd=0.$$

188. Un' altro modo di risolvere un' equazione biquadratica è stato dato sotto forme poco diverse da varii matematici; e così esso è alle volte chiamato il metodo di *Ferrari*, alle volte il metodo di *Waring*, ed alle volte il metodo di *Simpson*. Andremo ora a spiegarlo.

Sia l' equazione biquadratica

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0;$$

si aggiunga ai due membri ax^2+bx+c, e poi siano a, b, c determinate in modo da rendere ciascun membro un quadrato perfetto. Abbiamo allora

$$x^4+px^3+(q+a)x^2+(r+b)x+s+c=ax^2+bx+c.$$

Il secondo membro sarà un quadrato perfetto se $b^2=4ac$. Si supponga il primo membro essere eguale ad

$$\left(x^2+\frac{px}{2}+m\right)^2;$$

paragonando i coefficienti otteniamo

$$2m+\frac{p^2}{4}=q+a,\quad pm=r+b,\quad m^2=s+c.$$

Queste tre relazioni esprimono a, b, c in termini di m; sostituendo i valori di a, b, e c nell' equazione $b^2=4ac$ otteniamo

$$(pm-r)^2=4\left(2m+\frac{p^2}{4}-q\right)(m^2-s).$$

Da questa equazione cubica deve essere trovato m, e quindi a, b, e c. E poichè abbiamo ora

$$\left(x^2+\frac{px}{2}+m\right)^2=ax^2+bx+c=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a},$$

otteniamo
$$x^2+\frac{px}{2}+m=\pm\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}.$$

Così abbiamo da risolvere due equazioni quadratiche, cioè,

$$x^2+\frac{px}{2}+m+\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}=0, \text{ ed } x^2+\frac{px}{2}+m-\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}=0.$$

189. Si può mostrare che l'equazione cubica ausiliaria che questo metodo richiede a risolvere cadrà in generale nel caso irriducibile, a meno che l'equazione biquadratica proposta non abbia due radici reali e due radici immaginarie. Infatti dinotino α, β, γ, δ, le quattro radici dell'equazione biquadratica proposta; allora considerando le due equazioni quadratiche ottenute nell'Art. 188, ne segue che $m+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ deve essere eguale al prodotto di due delle quattro quantità α, β, γ, δ, ed $m-\frac{b}{2\sqrt{a}}$ deve essere eguale al prodotto delle due rimanenti. Supponiamo quindi

$$m+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\alpha\beta, \text{ ed } m-\frac{b}{2\sqrt{a}}=\gamma\delta;$$

così
$$m=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta).$$

Quindi conchiudiamo per simmetria che gli altri due valori di m saranno $\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\delta)$ ed $\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma)$.

È chiaro che se α, β, γ, δ, sono tutte reali, questi tre valori di m sono tutti reali; e si può mostrare che avverrà lo stesso se α, β, γ, δ sono tutte immaginarie. Però se due delle quattro quantità sono reali e due immaginarie, si troverà che due dei valori di m sono immaginarii ed uno è reale, o pure essi sono tutti reali e due tra loro eguali.

190. Daremo ora il *metodo di Eulero* per risolvere un'equazione biquadratica. Supponiamo che l'equazione sia

$$x^4+px^2+rx+s=0.$$

Si ponga $x = y + z + u$; così

$$x^2 = y^2 + z^2 + u^2 + 2(yz + zu + uy),$$

cioè,

$$x^2 - y^2 - z^2 - u^2 = 2(yz + zu + uy).$$

Si elevino a quadrato i due membri; così

$$x^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + u^2) + (y^2 + z^2 + u^2)^2 = 4(yz + zu + uy)^2$$
$$= 4(y^2z^2 + z^2u^2 + u^2y^2) + 8yzu(y + z + u).$$

Si ponga x per $y + z + u$, e si trasponga; così

$$x^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + u^2) - 8xyzu + (y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2u^2 + u^2y^2) = 0.$$

Affinchè questa equazione coincida con l'equazione biquadratica proposta, dobbiamo avere

$$q = -2(y^2 + z^2 + u^2), \quad r = -8yzu,$$
$$s = (y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2u^2 + u^2y^2).$$

Così

$$y^2 + z^2 + u^2 = -\frac{q}{2};$$

$$y^2z^2 + z^2u^2 + u^2y^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{4} - s\right) = \frac{q^2 - 4s}{16};$$

$$y^2z^2u^2 = \frac{r^2}{64}.$$

Quindi segue dall'Art. 45, che y^2, z^2, ed u^2 sono i valori di t forniti dall'equazione cubica seguente,

$$t^3 + \frac{q}{2}t^2 + \frac{q^2 - 4s}{16}t - \frac{r^2}{64} = 0.$$

Siano dinotate le radici di questa equazione con t_1, t_2, e t_3; allora

$$y = \pm\sqrt{t_1}, \quad z = \pm\sqrt{t_2}, \quad u = \pm\sqrt{t_3}.$$

Se sostituiamo questi valori nell'espressione per x, cioè, $y+z+u$, otteniamo *otto* risultati differenti a motivo dell'ambiguità nei segni. Ma questi risultati non sono tutti ammissibili; poichè dobbiamo avere $yzu = -\frac{r}{8}$, sicchè il segno del prodotto di y, z, ed u, deve essere contrario al segno di r.

Se supponiamo r *positivo*, abbiamo i seguenti valori ammissibili di x,

$$-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\,,\quad -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\,,\quad \sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\,,\quad \sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}.$$

Se supponiamo r *negativo*, abbiamo i seguenti valori ammissibili di x,

$$\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\,,\quad \sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\,,\quad -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\,,\quad -\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}.$$

191. La ragione perchè *otto* valori di x si presentano nell' Articolo precedente si è che la relazione $yzu=-\frac{r}{8}$ è stata elevata a quadrato ed adoperata nel procedimento nella forma $y^2z^2u^2=\frac{r^2}{64}$; poichè siccome la relazione nell'ultima forma non si muta cambiando il segno di r, il procedimento realmente dà le radici tanto dell'equazione biquadratica $x^4+qx^2-rx+s=0$, quanto quelle dell'equazione biquadratica $x^4+qx^2+rx+s=0$.

L'equazione cubica ausiliaria dell'Art. 181 si troverà coincidere con quella dell'Art. 190 supponendo $e^2=4t$; così le osservazioni fatte negli Art. 184 – 186, intorno al legame tra le radici dell'equazione cubica ausiliaria e dell' equazione biquadratica, e le circostanze nelle quali l'equazione cubica cade nel caso irriducibile, si applicano al metodo di soluzione di Eulero siccome a quello di Descartes.

192. Può accadere che forme speciali di equazioni biquadratiche ammettano risoluzione più semplice di quella dell' equazione generale. Il seguente è un esempio. L'equazione biquadratica

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

può essere risoluta come un'equazione quadratica se $p^3-4pq+8r=0$. Infatti l'equazione $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ si può scrivere

$$x^2\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)x\left(x+\frac{r}{q-\frac{p^2}{4}}\right)+s=0\,;$$

e questa può essere risoluta come un'equazione quadratica, se si ha $\frac{r}{q-\frac{p^2}{4}}=\frac{p}{2}$, cioè, se $p^3-4pq+8r=0$.

XIV. TEOREMA DI STURM.

193. Nei Capitoli precedenti di quest' opera abbiamo dimostrato diversi teoremi intorno alle radici delle equazioni, ed abbiamo dato la risoluzione algebrica delle equazioni del terzo e del quarto grado. Andiamo ora ad entrare in un'altra parte del soggetto, vale a dire, nei metodi per trovare approssimativamente i valori numerici delle radici delle equazioni; il presente Capitolo dà principio a questa parte del soggetto dimostrando il teorema di Sturm, l' oggetto del quale si è di determinare la situazione ed il numero delle radici reali di un'equazione. Enuncieremo e dimostreremo il teorema nel prossimo Articolo; faremo quindi alcune riflessioni in relazione col teorema, e finalmente lo applicheremo ad alcuni esempi.

194. *Teorema di Sturm.* Sia $f(x)=0$ un' equazione liberata dalle radici eguali, e sia $f_1(x)$ la prima funzione derivata di $f(x)$; si esegua l'operazione per trovare la massima comune misura di $f(x)$ ed $f_1(x)$ con questa modifica, di mutare il segno ad ogni resto prima di adoperarlo come un divisore, e si continui l'operazione sino a che si ottenga il resto indipendente da x, ed al quale si muti anche il segno.

Sia $f_2(x)$, $f_3(x)$,...$f_m(x)$, la serie dei resti modificati così ottenuta. Sia α una quantità qualunque, e β un' altra quantità algebricamente maggiore, allora il numero delle radici reali dell' equazione $f(x)=0$ tra α e β è l'eccesso del numero delle variazioni di segno nella serie $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,...$f_m(x)$, quando $x=\alpha$, sul numero delle variazioni di segno quando $x=\beta$.

Chiameremo la serie *totale* $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,...$f_m(x)$, *le funzioni di Sturm*, e chiameremo la serie $f_1(x)$, $f_2(x)$,...$f_m(x)$, le *funzioni ausiliarie*, sicchè le funzioni ausiliarie consistono delle funzioni di Sturm omettendo $f(x)$.

Dinotino q_1, q_2,...q_{m-1}, i successivi quozienti che si ottengono nell'eseguire le operazioni indicate; allora abbiamo le relazioni seguenti,

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1 f_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) &= q_2 f_2(x) - f_3(x), \\ f_2(x) &= q_3 f_3(x) - f_4(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-2}(x) &= q_{m-1} f_{m-1}(x) - f_m(x). \end{aligned}$$

Da queste relazioni possiamo trarre tre conseguenze.

(1) L'ultima delle funzioni $f_m(x)$ non è zero; poichè per supposizione essa è indipendente da x e se fosse zero $f(x)$ ed $f_1(x)$ avrebbero una comune misura, ma allora l'equazione $f(x)=0$ avrebbe radici eguali per l'Art. 75, e ciò è contrario all'ipotesi.

(2) Due funzioni ausiliarie consecutive non possono svanire simultaneamente; poichè se ciò avesse luogo tutte le funzioni ausiliarie seguenti svanirebbero inclusa $f_m(x)$; e ciò è impossibile per (1).

(3) Quando una qualunque delle funzioni ausiliarie svanisce le due funzioni adiacenti hanno segni contrarii. Si supponga per esempio $f_3(x)=0$; allora dalla terza delle relazioni del sistema precedente abbiamo $f_2(x)=-f_4(x)$.

Ora nessuna alterazione può accadere nel segno di una qualunque delle funzioni di Sturm se non quando x passa per un valore che fa svanire quella funzione; e dimostreremo ora che quando x passa per un valore che annulla $f(x)$ una variazione di segno è perduta dalle funzioni di Sturm, e che nessuna variazione di segno è perduta o guadagnata in conseguenza del passaggio di x per un valore che annulla una delle funzioni ausiliarie.

I. Supponiamo c una radice dell'equazione $f(x)=0$, sicchè $f(c)=0$.

Sia h una quantità positiva. Ora $f(c-h)$ può essere sviluppata secondo le potenze di h per l'Art. 10, e si può prendere h così piccola che il segno dell'intera serie sia lo stesso che il segno del primo termine che non svanisce, per l'Art. 14; cioè, il segno di $f(c-h)$ sarà lo stesso che il segno di $-hf_1(c)$ poichè $f(c)=0$. Il segno di $f_1(c-h)$ sarà lo stesso che il segno di $f_1(c)$ quando h si prende sufficientemente piccolo. Così se $x=c-h$ ed h si prende sufficientemente piccolo, $f(x)$ ed $f_1(x)$ *hanno segni contrarii.*

Similmente, si può dimostrare che se $x=c+h$ ed h si prende sufficientemente piccolo, $f(x)$ ed $f_1(x)$ hanno lo *stesso segno.*

Così allorchè x cresce passando per una radice dell'equazione $f(x)=0$, le funzioni di Sturm *perdono una variazione di segno.*

II. Dinoti ora c un valore di x che annulla una delle funzioni ausiliarie, per esempio, $f_r(x)$, sicchè $f_r(c)=0$. Allora $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+1}(c)$ hanno *segni contrarii,* e così immediatamente prima di $x=c$ ed anche immediatamente dopo di $x=c$, i tre termini $f_{r-1}(x)$, $f_r(x)$,

$f_{r+1}(x)$ presenteranno una permanenza di segno ed una variazione di segno; poichè se $f_{r-1}(x)$ ed $f_r(x)$ hanno lo stesso segno, $f_r(x)$ ed $f_{r+1}(x)$ hanno segni contrarii, e *viceversa*. Così le funzioni di Sturm nè perdono nè guadagnano una variazione di segno quando x passa per un valore che annulla una delle funzioni ausiliarie.

Nessun valore di x può annullare simultaneamente due funzioni *consecutive*. Se svaniscono simultaneamente due o più che non sono consecutive, allora, se $f(x)$ è una di esse, segue da I. che si perde una variazione di segno quando x crescendo passa per quel valore, e se $f(x)$ non è una di esse segue da II. che non si perde alcuna variazione di segno.

Così abbiamo dimostrato che al crescere di x, le funzioni di Sturm non perdono mai una variazione di segno se non quando x passa per una radice dell'equazione $f(x)=0$, e non guadagnano mai una variazione di segno. Quindi il numero delle variazioni di segno perdute quando x cresce da un valore α ad un valore più grande β, è eguale al numero delle radici dell'equazione $f(x)=0$ che cadono tra α e β.

195. Abbiamo mostrato che non vi è alcuna alterazione nel *numero* delle variazioni di segno nelle funzioni di Sturm in conseguenza del passaggio di x per un valore che annulla una delle funzioni ausiliarie; ma possono aver luogo alterazioni, ed in generale hanno luogo, rispetto all'ordine nel quale i segni + e − sono distribuiti nella serie delle funzioni. Supponiamo, per esempio, che a e b siano due radici dell'equazione $f(x)=0$ e che a sia minore di b; allora $f(x)$ ed $f_1(x)$ hanno segni contrarii *immediatamente prima* di $x=a$ ed hanno lo stesso segno *immediatamente dopo* di $x=a$. Ora *immediatamente prima di* $x=b$ i segni di $f(x)$ ed $f_1(x)$ sono contrarii di nuovo. Infatti l'equazione $f_1(x)=0$ ha una radice tra $x=a$ ed $x=b$, e così $f_1(x)$ deve passare dal positivo al negativo o *viceversa* tra $x=a$ ed $x=b$. Questo passaggio di $f_1(x)$ dal positivo al negativo o *viceversa* tra a e b, non può alterare il numero totale delle variazioni di segno nella serie delle funzioni di Sturm, come abbiamo dimostrato, ma modifica la distribuzione dei segni + e − nella serie, e così dopo che si è perduta una variazione al crescere di x passando per a, si rende possibile la perdita di un'altra variazione al crescere di x passando per b.

Il presente Articolo non aggiunge nulla alla dimostrazione del teorema di Sturm; esso ha semplicemente lo scopo di assistere lo studente nella difficoltà che spesso si trova a comprendere come si perdano le variazioni di segno.

196. Nel contare il numero delle variazioni di segno nella serie delle funzioni di Sturm, può accadere che il valore di x che si considera annulli una delle funzioni ausiliarie. Allora è indifferente l'attribuire il segno positivo o il segno negativo alla funzione evanescente, poichè i segni delle funzioni che la precedono e la seguono sono necessariamente contrarii.

197. Per trovare il numero totale delle radici reali di un'equazione $f(x) = 0$, possiamo porre prima $-\infty$ per x e poi $+\infty$ per x nelle funzioni di Sturm; l'eccesso del numero delle variazioni di segno nel primo caso sul numero delle variazioni di segno nel secondo caso è il numero totale delle radici reali. Quando x si fa eguale a $+\infty$ o a $-\infty$ il segno di ognuna delle funzioni sarà lo stesso che il segno della più alta potenza di x in quella funzione.

198. Dinoti n il grado di $f(x)$; allora il numero delle funzioni ausiliarie $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... sarà in generale anche n; poichè ciascun resto è generalmente di un grado inferiore di un'unità rispetto al grado del resto precedente. Supporremo che il numero delle funzioni ausiliarie sia lo stesso che il grado di $f(x)$, e supporremo che la più alta potenza di x in $f(x)$ abbia un coefficiente positivo.

(1) Se i primi termini in tutte le funzioni ausiliarie hanno coefficienti positivi tutte le radici dell'equazione $f(x) = 0$ sono reali. Infatti tutte le funzioni di Sturm allora saranno positive quando $x = +\infty$, e saranno alternativamente positive e negative quando $x = -\infty$; così si perdono n variazioni di segno passando x da $-\infty$ a $+\infty$.

(2) Se i coefficienti dei primi termini non sono tutti positivi, vi sarà una coppia di radici immaginarie per ogni variazione di segno nella serie formata da questi coefficienti. Infatti supponiamo che in questa serie di coefficienti vi siano m variazioni di segno ed $n-m$ permanenze di segno. Allora quando $x = +\infty$ vi sono m variazioni di segno ed $n-m$ permanenze di segno nelle funzioni di Sturm. Ora si muti x da $+\infty$ a $-\infty$; allora le variazioni di segno sono rimpiazzate da permanenze di segno, e le permanenze di segno da variazioni di segno, sicchè per $x = -\infty$ vi sono $n-m$ variazioni di segno. L'eccesso del numero delle variazioni di segno quando $x = -\infty$ sul numero quando $x = +\infty$ è quindi $n-2m$; così vi sono $n-2m$ radici reali dell'equazione $f(x) = 0$, e quindi $2m$ radici immaginarie.

Quindi affinchè un'equazione abbia tutte le sue radici reali, è necessario e sufficiente che i coefficienti dei primi termini in tutte le funzioni ausiliarie siano dello stesso segno.

199. Supponiamo che tra le funzioni ausiliarie se ne trovi una, come $f_r(x)$, che non possa mutare di segno; allora possiamo trascurare tutte le funzioni che la seguono, e contare solamente il numero delle variazioni di segno nella serie $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_r(x)$. Poichè nella dimostrazione originale del teorema di Sturm la proprietà essenziale dell'ultima funzione ausiliaria si è che essa *non debba svanire*, e siccome $f_r(x)$ non può svanire, la dimostrazione reggerà per la serie $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_r(x)$.

Questa osservazione è importante nella pratica, poichè la formazione delle funzioni di Sturm è considerevolmente laboriosa negli esempii di equazioni di gradi elevati, e così è utile di avere una regola la quale alcune volte ci risparmia la necessità di formare l'intera serie delle funzioni.

200. Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una funzione che non ha alcun fattore comune con $f(x)$, e supponiamo che $\varphi(x)$ ed $f_1(x)$ prendano lo stesso segno quando si sostituisce in esse per x una radice qualunque dell'equazione $f(x)=0$. Allora possiamo adoperare $\varphi(x)$ invece di $f_1(x)$ e dedurre le rimanenti funzioni ausiliarie da $f(x)$ e $\varphi(x)$ invece che da $f(x)$ ed $f_1(x)$. Poichè ricorrendo alla dimostrazione del teorema di Sturm si vedrà che con questa nuova serie di funzioni le due proprietà fondamentali sono ancora vere, cioè, che non si perde alcuna variazione di segno per l'annullarsi di una funzione ausiliaria, e che si perde una variazione di segno quando $f(x)$ svanisce.

201. Finora abbiamo supposto che l'equazione da trattare col metodo di Sturm sia liberata dalle radici eguali; mostreremo ora che questa limitazione non è necessaria, e che il teorema darà sempre il numero delle radici *distinte* tra limiti assegnati, senza tener conto della *ripetizione* di alcune radici.

Supponiamo per esempio che la radice a si trovi p volte e la radice b si trovi q volte nell'equazione $f(x)=0$.

Sia $$f(x)=(x-a)^p(x-b)^q(x-c)(x-d)\ldots$$

allora $$f_1(x)=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}\Big\{p(x-b)(x-c)(x-d)\ldots + q(x-a)(x-c)(x-d)\ldots + \ldots\Big\}$$

Così $(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$ è la massima comune misura di $f(x)$ ed

$f_1(x)$, e questa espressione dividerà tutte le funzioni ausiliarie $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_m(x)$ che si formano come nell'Art. 194.

Sia ora $\psi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$

e

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & p(x-b)(x-c)(x-d)\ldots \\ & + q(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ & + (x-a)(x-b)(x-d)\ldots \\ & + \ldots\end{aligned}$$

Allora $\varphi(x)$ non è la prima funzione derivata di $\psi(x)$, la quale sarebbe ciò che diviene $\varphi(x)$ se $p=1$ e $q=1$; ma $\varphi(x)$ ha lo stesso segno della prima funzione derivata di $\psi(x)$, quando facciamo $x=a$, o b, o c, ... Quindi, per l'Art. 200, possiamo determinare la situazione delle radici reali dell'equazione $\psi(x)=0$ prendendo $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ come le prime due delle funzioni di Sturm e deducendo da esse le rimanenti.

Ma la serie delle funzioni di Sturm formate da $f(x)$ ed $f_1(x)$ differisce solamente dalla serie formata da $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ pel fattore addizionale $(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$ in ogni termine della serie. Così quando si attribuisce un valore qualunque ad x, i segni dei termini della prima serie saranno tutti gli stessi di quelli della seconda, o pure tutti contrarii; e così il numero delle variazioni di segno sarà lo stesso.

Quindi esaminando la serie delle funzioni di Sturm formate da $f(x)$ ed $f_1(x)$ possiamo accertare quante radici dell'equazione $\psi(x)=0$ giacciono tra limiti assegnati, cioè, quante radici *distinte e separate* dell'equazione $f(x)=0$ giacciono tra quei limiti.

Così non abbiamo bisogno di applicare la pruova per le radici eguali prima di adoperare il metodo di Sturm; in fatti, calcolando le funzioni di Sturm ci accorgeremo delle radici eguali se esse esistono dal fatto che l'ultimo resto sarà zero.

202. Possiamo osservare che nell'operazione con la quale si trovano tutte le funzioni ausiliarie dopo della prima, possiamo sempre moltiplicare o dividere i divisori o i dividendi per numeri qualunque *positivi* a piacere, come nell'operazione per trovare la massima comune misura; poichè così le funzioni ausiliarie risultano solamente moltiplicate o divise per numeri positivi, sicchè i loro segni restano inalterati.

Possiamo col teorema di Sturm determinare il numero delle radici reali di un'equazione proposta. Quindi, sostituendo interi successivi per x nella serie delle funzioni di Sturm, possiamo determinare tra quali interi consecutivi giacciono le radici; o se si trova che più di una radice giace tra due interi assegnati, possiamo sostituire per x successivamente delle frazioni comprese tra quegl'interi, sino a determinare finalmente gl'intervalli tra i quali giacciono le radici isolatamente.

203. Prenderemo ora alcuni esempi.

Si supponga $$f(x)=x^3-3x^2-4x+13=0.$$

Qui
$$f_1(x)=3x^2-6x-4,$$
$$f_2(x)=2x-5,$$
$$f_3(x)=+1.$$

Le radici dell'equazione sono tutte reali per l'Art. 198. La seguente è la serie dei segni corrispondenti ai valori indicati di x.

	$f(x)$,	$f_1(x)$,	$f_2(x)$;	$f_3(x)$
0	+	−	−	+
1	+	−	−	+
2	+	−	−	+
3	+	+	+	+

Qui vi sono due variazioni di segno quando $x=2$, e non ve n'è alcuna quando $x=3$; così vi sono due radici positive tra 2 e 3, e nessun'altra radice positiva.

Si troverà che quando $x=-3$, la successione dei segni è $-+-+$, e quando $x=-2$ essa è $++-+$, sicchè si perde una variazione di segno passando da -3 a -2, e quindi la radice negativa cade tra -2 e -3. Per separare le due radici comprese fra 2 e 3 dovremo sostituire per x uno o più numeri compresi fra 2 e 3. Supponiamo, per esempio, che si ponga $x=2\frac{1}{2}$; allora la successione dei segni è $--0+$, e così abbiamo solamente una variazione di segno, sia che si consideri lo 0 col segno $+$ o col $-$. Così si perde una variazione di segno passando da 2 a $2\frac{1}{2}$, e quindi una radice giace tra 2 e $2\frac{1}{2}$; quindi l'altra radice cade tra $2\frac{1}{2}$ e 3.

Ancora, supponiamo $f(x)=x^4-6x^3+5x^2+14x-4=0$.

Qui $f_1(x)=2x^3-9x^2+5x+7$, omettendo un fattore 2,

$f_2(x)=17x^2-57x-5$,

$f_3(x)=152x-457$,

$f_4(x)=+$.

In questo esempio si troverà che il calcolo di $f_4(x)$ è alquanto complicato; pel nostro scopo però è sufficiente conoscere il *segno*, e così quando ci assicuriamo che il risultato è *positivo* non è necessario calcolarlo esattamente, ma porre semplicemente $f_4(x)=+$.

Le radici dell'equazione sono tutte reali per l'Art. 198.

La seguente è la serie dei segni corrispondenti ai valori indicati di x.

	$f(x)$,	$f_1(x)$,	$f_2(x)$,	$f_3(x)$,	$f_4(x)$
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
1	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
2	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
3	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Qui si perde una variazione di segno tra -2 e -1, una tra 0 ed 1, e due si perdono fra 3 e 4.

Se poniamo $3\frac{1}{2}$ per x la successione dei segni è $-0++$, e così vi è solamente una variazione di segno, sicchè una radice dell'equazione cade fra 3 e $3\frac{1}{2}$; quindi un'altra radice cade fra $3\frac{1}{2}$ e 4.

Ancora, supponiamo $f(x)=2x^4-13x^2+10x-49=0$.

Qui $f_1(x)=4x^3-13x+5$, omettendo un fattore 2,

$f_2(x)=13x^2-15x+98$.

È facile vedere che le radici dell'equazione $f_2(x)=0$ sono immaginarie, cioè, $f_2(x)$ non può svanire per alcun valore reale di x; quindi per l'Art. 199 non abbiamo bisogno in questo esempio di ottenere altre funzioni di Sturm. Quando $x=-\infty$ la successione dei segni è $+-+$, e quando $x=+\infty$ la successione dei segni è $+++$, così l'equazione ha due radici reali e due radici immaginarie. Una delle radici reali è positiva e l'altra negativa per l'Art. 21.

XV. TEOREMA DI FOURIER.

204. Il teorema di Sturm costituisce la soluzione completa di un problema che ha richiamata l'attenzione di molti tra i più eminenti matematici durante i due ultimi secoli; questo teorema fu pubblicato nel volume delle *Mémoires présentés...par des Savants Étrangers,* Paris, 1835.

Tra coloro che tentarono la soluzione del problema prima di Sturm due meritano speciale notizia, Budan e Fourier; i metodi di questi due matematici partono da un teorema che gli scrittori inglesi sogliono chiamare *teorema di Fourier*, e che gli scrittori francesi connettono sì col nome di Budan come con quello di Fourier. L'opera di Fourier sulle equazioni fu pubblicata nel 1831 dopo la morte dell'autore; Budan pubblicò un'opera sul soggetto nel 1807. Si conosce però che Fourier avea esposto il teorema in un corso di lezioni date prima della pubblicazione dell'opera di Budan. Enuncieremo ora e dimostreremo il teorema.

205. *Teorema di Fourier.* Sia $f(x)$ una funzione algebrica dell'n^{mo} grado; siano $f_1(x)$, $f_2(x)$,...$f_n(x)$ le funzioni derivate successive di $f(x)$. Sia α una quantità qualunque e β un'altra che è algebricamente maggiore; allora il numero delle radici reali dell'equazione $f(x)=0$ tra α e β, non può essere maggiore dell'eccesso del numero delle variazioni di segno nella serie $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$, quando $x=\alpha$, sul numero delle variazioni di segno quando $x=\beta$.

Chiameremo l'intera serie $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,...$f_n(x)$, *le funzioni di Fourier.*

Nessun'alterazione può aver luogo nel segno di una qualunque delle funzioni di Fourier se non quando x passa per un valore che annulla la funzione. Avremo ora quattro casi a considerare.

I. Supponiamo quando $x=c$ che $f(x)$ svanisca e che $f_1(x)$ non svanisca. Si ponga $c-h$ per x in cui h è una quantità positiva; allora h si può prendere così piccola che il segno di $f(c-h)$ sia lo stesso di quello di $-hf_1(c)$, ed il segno di $f_1(c-h)$ lo stesso di quello di $f_1(c)$; si vegga l'Art. 14. Così se $x=c-h$ ed h è presa sufficientemente piccola, $f(x)$ ed $f_1(x)$ hanno *segni contrarii.*

Similmente si può dimostrare che se $x=c+h$ ed h è presa sufficientemente piccola, $f(x)$ ed $f_1(x)$ hanno lo *stesso segno*.

Così quando x cresce passando per un valore c, che è una radice non ripetuta dell'equazione $f(x)=0$, le funzioni di Fourier *perdono una variazione di segno*.

II. Supponiamo quando $x=c$ che $f(x)$ svanisca e che svaniscano anche le funzioni derivate $f_1(x)$, $f_2(x)$,... sino ad $f_{r-1}(x)$, mentre $f_r(x)$ non svanisce. Si ponga $c-h$ per x in cui h è una quantità positiva; allora h si può prendere così piccola che i segni della serie di termini

$$f(c-h),\ f_1(c-h),\ f_2(c-h),\ \ldots f_{r-1}(c-h),\ f_r(c-h)$$

siano rispettivamente gli stessi che i segni della serie di termini

$$(-h)^r f_r(c),\ (-h)^{r-1} f_r(c),\ (-h)^{r-2} f_r(c), \ldots -hf_r(c),\ f_r(c)\,;$$

si veggano gli Art. 10 e 14. Così se $x=c-h$ ed h è presa sufficientemente piccola, le prime $r+1$ funzioni di Fourier presentano r variazioni di segno.

Similmente si può dimostrare che se $x=c+h$ ed h è presa sufficientemente piccola, le prime $r+1$ funzioni di Fourier non presentano alcuna variazione di segno.

Così quando x cresce passando per un valore c che è una radice dell'equazione $f(x)=0$ ripetuta r volte, le funzioni di Fourier *perdono* r *variazioni di segno*.

III. Supponiamo quando $x=c$ che *una* delle funzioni derivate svanisca, ma nessuna delle due funzioni adiacenti; così svanisca $f_r(x)$ quando $x=c$ ma non svanisca $f_{r-1}(x)$ nè $f_{r+1}(x)$. Allora se h è presa sufficientemente piccola, quando $x=c-h$ i segni dei tre termini $f_{r-1}(x)$, $f_r(x)$, $f_{r+1}(x)$, sono rispettivamente gli stessi che i segni di $f_{r-1}(c)$, $-hf_{r+1}(c)$, $f_{r+1}(c)$, e quando $x=c+h$ i segni sono gli stessi che i segni di $f_{r-1}(c)$, $hf_{r+1}(c)$, $f_{r+1}(c)$. Così se $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+1}(c)$ hanno lo *stesso* segno, le funzioni di Fourier perdono due variazioni di segno quando x cresce passando per c, e se $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+1}(c)$ hanno segni *contrarii* le funzioni di Fourier non guadagnano nè perdono alcuna variazione di segno.

IV. Supponiamo quando $x=c$ che più funzioni derivate successive svaniscano; per esempio, supponiamo quando $x=c$ che le m funzioni $f_r(x)$, $f_{r+1}(x)$,... $f_{r+m-1}(x)$ svaniscano, e che $f_{r-1}(x)$ ed $f_{r+m}(x)$ non svaniscano. Procedendo come sopra, e supponendo presa h suf-

ficientemente piccola e positiva, otterremo i risultati seguenti rispetto agli $m+2$ termini, $f_{r-1}(x)$, $f_r(x)$,...$f_{r+m-1}(x)$, $f_{r+m}(x)$.

(1) Sia m pari. Se $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+m}(c)$ hanno lo *stesso* segno, i termini presentano m variazioni di segno quando $x=c-h$, e nessuna variazione di segno quando $x=c+h$. Se $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+m}(c)$ hanno segni *contrarii*, i termini presentano $m+1$ variazioni di segno quando $x=c-h$, ed una variazione di segno quando $x=c+h$. Così in entrambi i casi le funzioni di Fourier perdono m variazioni di segno quando x cresce passando per c.

(2) Sia m dispari. Se $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+m}(c)$ hanno lo *stesso* segno i termini presentano $m+1$ variazioni di segno quando $x=c-h$, e nessuna variazione di segno quando $x=c+h$. Così le funzioni di Fourier perdono $m+1$ variazioni di segno quando x cresce passando per c. Se $f_{r-1}(c)$ ed $f_{r+m}(c)$ hanno segni *contrarii*, i termini presentano m variazioni di segno quando $x=c-h$, ed una variazione di segno quando $x=c+h$. Così le funzioni di Fourier perdono $m-1$ variazioni di segno quando x cresce passando per c.

Così nell'insieme le funzioni di Fourier giammai guadagnano una variazione di segno, ma solo perdono una variazione di segno quando x cresce passando per una radice dell'equazione $f(x)=0$; e così il teorema è dimostrato.

206. Si sarà osservato che la dimostrazione dell'Art. 205 ci dà qualche cosa di più dell'enunciato al quale per semplicità ci siamo limitati. Infatti apparisce che quando si ha un'alterazione nel numero delle variazioni di segno delle funzioni di Fourier, eccetto nel caso quando la variabile crescendo passa per una radice dell'equazione data, si perde un numero *pari* di variazioni di segni. Così in complesso abbiamo il seguente risultato se sostituiamo successivamente un numero α ed un numero maggiore β nelle funzioni di Fourier.

(1) Supponiamo che le funzioni di Fourier non perdano alcuna variazione di segno; allora nessuna radice dell'equazione data cade tra α e β.

(2) Supponiamo che le funzioni di Fourier perdano un numero *dispari* di variazioni di segno; allora siamo certi che un numero dispari di radici cade tra α e β, ma non possiamo dire quale numero dispari, eccetto quando si perde solamente *una* variazione di segno, ed allora siamo certi di *una* radice.

(3) Supponiamo che le funzioni di Fourier perdano un numero *pari* di variazioni di segno; allora possiamo solamente conchiudere che o non vi è alcuna radice o pure vi è un numero pari di radici tra α e β.

207. Il vantaggio del teorema di Fourier si è che esso può essere facilmente applicato, poichè le funzioni derivate successive di una data funzione si possono formare immediatamente. Lo svantaggio del teorema si è che esso può richiedere un numero quasi illimitato di tentativi. Poichè se due radici sono presso a poco eguali, si richiederebbe una suddivisione molto minuta dell'intervallo nel quale si congettura che esse cadano, per distinguerle da due radici immaginarie. Sarebbe necessario di applicare la pruova per le radici eguali prima d'incominciare il procedimento di Fourier, giacchè altrimenti un numero pari di radici ripetute potrebbe rimaner nascosto.

208. Budan e Fourier diedero tutti e due dei metodi per esaminare più minutamente un intervallo dubbioso a fine di scoprire se radici dell'equazione proposta fossero o no comprese in quell'intervallo. Ma non è necessario di spiegare questi metodi poichè il teorema di Sturm raggiunge lo scopo proposto con semplicità e certezza.

209. Si può dimostrare che la *regola dei segni* di Descartes è inclusa nel teorema di Fourier.

Supponiamo che $f(x)=0$ sia un'equazione *completa*.

Se poniamo $x=0$ nelle funzioni di Fourier i segni sono gli stessi che i segni nell'espressione $f(x)$ presi da dritta a sinistra; e se poniamo $x=\infty$ nelle funzioni di Fourier i segni sono tutti positivi. Quindi, pel teorema di Fourier, l'equazione $f(x)=0$ non può avere più radici positive delle variazioni di segno in $f(x)$.

Se l'equazione proposta non è completa, possiamo supporre i termini mancanti suppliti con coefficienti zero, e si possono assegnare a questi coefficienti dei segni tali che le funzioni di Fourier abbiano lo stesso numero di variazioni di segno quando questi termini sono contati che quando sono omessi.

La parte della *regola dei segni* che si riferisce alle radici negative si può dedurre da quella parte di essa che si riferisce alle radici positive; si vegga l'Art. 63.

210. Il teorema di Fourier include anche la regola data da Newton per trovare un limite superiore delle radici positive di un'equazione; si vegga l'Art. 94. Poichè se $f(x)=0$ è l'equazione, il metodo di Newton ci dirige a trovare h in modo che quando $x=h$ le funzioni di Fourier siano tutte positive; ed allora pel teorema di Fourier nessuna radice dell'equazione proposta esiste tra $x=h$ ed $x=+\infty$.

XVI. METODO DI APPROSSIMAZIONE DI LAGRANGE.

211. Abbiamo già mostrato come si possono trovare le radici commensurabili di un'equazione; considereremo ora il modo nel quale si possono calcolare i valori numerici approssimati delle radici reali incommensurabili.

Col teorema di Sturm possiamo sempre determinare quante radici sono comprese in un dato intervallo, e possiamo poi dividere quell'intervallo in intervalli minori nei quali le radici cadano separatamente. Supponiamo adunque di conoscere che un'equazione abbia una radice e solamente una tra due date quantità α e β, e si voglia approssimare il valore di questa radice. Se sostituiamo per x in $f(x)$ una quantità γ intermedia tra α e β, conosceremo dal segno di $f(\gamma)$ se la radice cade tra α e γ o tra γ e β. Supponiamo che essa cada tra α e γ; allora possiamo sostituire per x una quantità δ che giace tra α e γ, e conosceremo dal segno di $f(\delta)$ se la radice cade tra α e δ o tra δ e γ. Questo procedimento può essere continuato quanto si vuole, e ci possiamo approssimare tanto quanto ci piace al valore numerico della radice; poichè con ciascuna operazione possiamo così dividere per metà l'intervallo nel quale la radice deve cadere.

L'operazione qui descritta sarebbe però molto laboriosa e sono stati proposti dei metodi per raggiungere il risultato richiesto, calcolando meno. Esporremo in primo luogo il metodo di Lagrange.

212. Sia $f(x)=0$ un'equazione la quale si sappia avere una radice, e solamente una, tra due interi positivi consecutivi a ed $a+1$. Si ponga $x=a+\frac{1}{y}$, e si sostituisca questo valore di x nell'equazione proposta; così $f\left(a+\frac{1}{y}\right)=0$. Se liberiamo quest'equazione dalle frazioni, otteniamo un'equazione in y dello stesso grado dell'equazione primitiva in x; si dinoti tale equazione con $\varphi(y)=0$. Quest'equazione in y ha solamente una radice positiva, poichè l'equa-

zione primitiva in x ha solamente una radice tra a ed $a+1$. Possiamo allora determinare gl'interi consecutivi tra i quali deve cadere il valore di y, sostituendo in $\varphi(y)$ successivamente i valori 1, 2, 3, ... finchè si ottengono due risultati consecutivi che sono di segni contrarii. Supponiamo trovato così che y cade tra b e $b+1$. Si ponga $y=b+\frac{1}{z}$, e si sostituisca; così $\varphi\left(b+\frac{1}{z}\right)=0$. Quindi, come prima, otteniamo un'equazione in cui la quantità ignota ha solamente una radice positiva, e possiamo determinare gl'interi consecutivi tra i quali deve cadere il valore di z; siano questi c e $c+1$. Allora si ponga $z=c+\frac{1}{u}$; e così di seguito.

Così otterremo il valore richiesto di x con un grado qualunque di approssimazione sotto la forma di una frazione continua, cioè,

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots}}$$

213. Supponiamo ora che l'equazione $f(x)=0$ abbia più di una radice tra gl'interi a ed $a+1$. Col teorema di Sturm, o con qualche altro metodo per separare le radici, possiamo determinare per qual numero si debbano moltiplicare le radici dell'equazione che giacciono tra gli stessi due numeri consecutivi affinchè i prodotti giacciano tra interi consecutivi diversi. Si trasformi l'equazione in un'altra le radici della quale siano quelle dell'equazione proposta moltiplicate pel numero così determinato; ed allora il metodo dell'Articolo precedente può essere applicato all'equazione trasformata.

O pure possiamo adottare il metodo dell'Articolo precedente senza effettuare questa trasformazione. In questo caso l'equazione in y avrà più di una radice positiva e dobbiamo cercare il massimo intero in ciascuna radice, e quindi procedere al calcolo separato dei diversi valori risultanti di z. Può accadere che l'equazione in y abbia più radici tra alcuni interi consecutivi; allora l'equazione in z può essere adoperata per separarle, e si può continuare il calcolo di ciascuna radice; e così di seguito.

214. Dall'equazione data $f(x)=0$ deduciamo $f\left(a+\frac{1}{y}\right)=0$, cioè, supponendo $f(x)$ del grado n,

$$f(a)+\frac{1}{y}f'(a)+\frac{1}{y^2}\frac{f''(a)}{2}+\frac{1}{y^3}\frac{f'''(a)}{\lfloor 3}+\dots+\frac{1}{y^n}\frac{f^n(a)}{\lfloor n}=0;$$

si moltiplichi per y^n ed otteniamo

$$y^n f(a) + y^{n-1} f'(a) + y^{n-2} \frac{f''(a)}{2} + \ldots + \frac{f^n(a)}{\lfloor n} = 0.$$

Così per formare l'equazione in y dobbiamo calcolare i valori numerici $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ...; questi calcoli si possono eseguire nel modo spiegato nell'Art. 5; ma, come abbiamo detto nell'Art. 11, il miglior metodo sarà spiegato in appresso nel Capitolo sul metodo di Horner. Una simile osservazione vale per formare l'equazione in z.

Riferendoci agli Art. 54 e 58, vediamo che il metodo di approssimazione di Lagrange può essere dichiarato così. Si supponga una radice di una data equazione giacere tra a ed $a+1$, si diminuiscano le radici dell'equazione di a, e si prenda l'equazione reciproca. Si trovi una radice dell'ultima equazione la quale sia compresa tra gl'interi b e $b+1$, si diminuiscano le radici di b, e si prenda l'equazione reciproca. Si trovi una radice dell'ultima equazione la quale sia compresa tra c e $c+1$, si diminuiscano le radici di c, e si prenda l'equazione reciproca. Si proceda in questo modo. Allora la frazione continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}$$

è una radice dell'equazione primitiva.

215. Esempio $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Per l'Art. 108, quest'equazione ha solamente una radice reale, e per l'Art. 20, questa radice deve essere una quantità positiva; si troverà per tentativi che essa cade tra 2 e 3.

Si ponga $x = 2 + \frac{1}{y}$; allora

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1,$$

$$f'(2) = \quad 3 \cdot 2^2 - 2 \quad = 10,$$

$$\tfrac{1}{2} f''(2) = \quad 3 \cdot 2 \quad = 6,$$

e l'equazione in y è $-y^3 + 10y^2 + 6y + 1 = 0$, cioè,

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0, \text{ dicasi } \varphi(y) = 0.$$

Qui $y=10$ rende $\varphi(y)$ negativa, ed $y=11$ rende $\varphi(y)$ positiva; quindi il valore richiesto di y deve cadere tra 10 ed 11. Si ponga $y=10+\frac{1}{z}$; allora

$$\begin{aligned}\varphi(10) &= 10^3-10\cdot 10^2-6\cdot 10-1 &&= -61,\\ \varphi'(10) &= \quad 3\cdot 10^2-20\cdot 10-6 &&= 94,\\ \tfrac{1}{2}\varphi''(10) &= \quad 3\cdot 10-10 &&= 20,\end{aligned}$$

e l'equazione in z è $-61z^3+94z^2+20z+1=0$, cioè,

$$61z^3-94z^2-20z-1=0, \text{ dicasi } \psi(z)=0.$$

Qui $z=2$ rende $\psi(z)$ positiva, sicchè il valore cercato di z deve cadere tra 1 e 2. Si ponga $z=1+\frac{1}{u}$; allora

$$\begin{aligned}\psi(1) &= 61\cdot 1^3-94\cdot 1^2-20\cdot 1-1 &&= -54,\\ \psi'(1) &= \quad 183\cdot 1^2-188\cdot 1-20 &&= -25,\\ \tfrac{1}{2}\psi''(1) &= \quad 183\cdot 1-94 &&= 89,\end{aligned}$$

e l'equazione in u è $-54u^3-25u^2+89u+1=0$, cioè,

$$54u^3+25u^2-89u-1=0.$$

Questa equazione mostra che il valore di u deve cadere tra 1 e 2; e possiamo procedere come sopra.

Quindi
$$x=2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}$$

Le frazioni convergenti corrispondenti a questa frazione continua sono $\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \ldots\ldots$ Si veggano le *Aggiunte*, Cap. VIII. La differenza tra $\frac{44}{21}$ ed il valore della radice è minore di $\frac{1}{21\,(21+11)}$, cioè, minore di $\frac{1}{672}$.

Per un altro esempio si prenda l'equazione $x^3-7x+7=0$. Per l'Art. 108 quest'equazione ha tutte le sue radici reali; e col teore-

ma di Sturm si può mostrare che una radice cade tra 1 ed $1\frac{1}{2}$, e che un' altra radice cade tra $1\frac{1}{2}$ e 2. Quindi se poniamo $x=\frac{x'}{2}$ e formiamo l'equazione in x' questa equazione avrà una radice tra 2 e 3, ed una radice fra 3 e 4. L'equazione in x' è $\left(\frac{x'}{2}\right)^3-7\frac{x'}{2}+7=0$, cioè, $x'^3-28x'+56=0$.

La radice che cade fra 2 e 3 si troverà essere

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}$$

La radice che cade fra 3 e 4 si troverà essere

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}$$

Le radici dell'equazione primitiva si otterranno prendendo la metà di ciascuno di questi valori.

O pure possiamo applicare il metodo di Lagrange all'equazione primitiva senza alcuna trasformazione preliminare. Si ponga $x=1+\frac{1}{y}$; così $\left(1+\frac{1}{y}\right)^3-7\left(1+\frac{1}{y}\right)+7=0$. Questa darà $y^3-4y^2+3y+1=0$, dicasi $\varphi(y)=0$. Qui $\varphi(1)$ è positiva, $\varphi(2)$ è negativa, e $\varphi(3)$ è positiva; così un valore di y cade fra 1 e 2, e l'altro fra 2 e 3. Allora possiamo porre $y=1+\frac{1}{z}$ per continuare l'approssimazione della prima radice, ed $y=2+\frac{1}{z}$ per continuare l'approssimazione della seconda radice.

L'equazione $x^3-7x+7=0$ ha una radice negativa; possiamo trovarla mutando x in $-x$ e calcolando la radice positiva dell'equazione risultante, cioè dell'equazione

$$(-x)^3-7(-x)+7=0.$$

O pure poichè la somma delle tre radici dell'equazione $x^3-7x+7=0$ è zero, quando due delle radici sono calcolate approssimativamente la terza si può immediatamente trovare approssimativamente.

216. Se nel seguire il metodo di Lagrange giungiamo ad un'equazione che ha per una radice un intero, otteniamo come una radice dell'equazione primitiva una frazione continua finita, cioè, otteniamo una radice frazionaria *commensurabile*. Ciò naturalmente non può accadere se abbiamo prima determinato tutte le radici commensurabili sì intere che frazionarie di un'equazione proposta, e tolto i corrispondenti fattori con la divisione.

217. Può accadere che seguendo il metodo di Lagrange giungiamo ad un'equazione che è identica con una di quelle che la precedono; in questo caso i quozienti della frazione continua ricorrono, sicchè la frazione continua è una frazione continua periodica ed il suo valore si può trovare risolvendo un'equazione quadratica; si veggano le *Aggiunte*, Cap. IX. Le radici di quest'equazione quadratica conterranno un radicale quadratico, e *tutte e due* le radici saranno radici dell'equazione proposta per l'Art. 44.

218. Daremo qui il procedimento generale che è stato dichiarato con esempio nell'Art. 215 nel secondo modo di trattare l'equazione $x^3-7x+7=0$. L'oggetto in vista, si è di applicare il metodo di approssimazione di Lagrange quando un'equazione proposta ha più di una radice fra interi consecutivi. Sia $f(x)=0$ l'equazione proposta; si formino le *funzioni ausiliarie* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... relative al teorema di Sturm, fermandosi quando se ne ottiene una che è positiva per tutt'i valori di x; si vegga l'Art. 199. Supponiamo che più radici dell'equazione proposta cadano tra gl'interi consecutivi a ed $a+1$. Si ponga $a+\frac{1}{y}$ per x nelle funzioni $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., ed i risultati si dinotino rispettivamente con $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$, ... Se nell'ultima serie di funzioni sostituiamo successivamente due numeri qualunque, come b e $b+1$, la differenza dei numeri delle variazioni di segno nei due casi ci darà il numero delle radici dell'equazione $F(y)=0$ che cadono tra b e $b+1$. Poichè i risultati che otteniamo sostituendo b e $b+1$ in $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$,..., sono gli stessi di quelli che si otterrebbero sostituendo rispettivamente $a+\frac{1}{b}$ ed $a+\frac{1}{b+1}$ nella serie $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...; e quindi la differenza dei numeri delle variazioni di segno deve essere eguale al numero delle radici dell'equazione $f(x)=0$ che cadono tra $a+\frac{1}{b}$ ed $a+\frac{1}{b+1}$, cioè, al numero delle radici dell'equazione $F(y)=0$ che cadono tra b e $b+1$.

Se quindi troviamo che più valori di y cadono tra gl'interi consecutivi b e $b+1$, sostituiamo $b+\frac{1}{z}$ per y nella serie $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$,...; allora, dando successivamente a z due valori interi consecutivi e sostituendoli possiamo determinare se più valori di z cadono tra due interi consecutivi.

Procediamo in questo modo finchè otteniamo un'equazione che ha solamente una radice tra interi consecutivi; e dopo ciò non abbiamo più bisogno di considerare le funzioni di Sturm ma continuare il calcolo per questa particolare radice col metodo dell'Art. 212.

Così siamo al caso di separare le radici e possiamo calcolarle senza alcuna omissione.

Siccome non si cerca di conoscere i *valori*, ma solamente i *segni* di $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$,..., possiamo in tutt' i casi moltiplicare queste funzioni per tali potenze di y da liberarle da frazioni; poichè y si suppone una quantità positiva, e quindi ogni potenza di y è positiva. Così, per esempio, invece di $F(y)$, cioè, invece di $f\left(a+\frac{1}{y}\right)$, possiamo adoperare

$$y^n f(a) + y^{n-1} f'(a) + \frac{y^{n-2}}{2} f''(a) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n} f^n(a),$$

supponendo che $f(x)$ sia di grado n.

XVII. METODO DI APPROSSIMAZIONE DI NEWTON CON LE AGGIUNTE DI FOURIER.

219. Spiegheremo ora il metodo di Newton per approssimare il valore numerico di una radice di un'equazione.

Sia $f(x)=0$ un'equazione che ha una radice tra certi limiti α e β la differenza dei quali è una piccola frazione; sia c una quantità tra α e β che si prende come una prima approssimazione della radice richiesta, e dinoti $c+h$ il valore esatto della radice, sicchè h è una piccola frazione che deve essere determinata. Così $f(c+h)=0$, cioè, per l'Art. 10,

$$f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(c) + \frac{h^3}{\lfloor 3} f'''(c) + \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n} f^n(c) = 0.$$

Ora poichè h si suppone essere una piccola frazione h^2, h^3,... saran-

no piccole in paragone di h; se trascuriamo i quadrati e le potenze superiori di h nell'equazione precedente otteniamo $f(c)+hf'(c)=0$; così

$$h=-\frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Supponendo allora che così otteniamo un'approssimazione del valore di h, abbiamo $c-\frac{f(c)}{f'(c)}$ come una nuova approssimazione della radice dell'equazione proposta. Si dinoti questa nuova approssimazione con c_1, ed allora procedendo come sopra otteniamo $c_1-\frac{f(c_1)}{f'(c_1)}$ come una nuova approssimazione; e così di seguito.

Esamineremo ora più da vicino le condizioni che debbono aver luogo affinchè questo metodo possa essere applicato con sicurezza. È chiaro naturalmente che un tale esame è necessario, poichè il procedimento non è applicabile generalmente; infatti se $f'(c)$ è piccola in paragone di $f(c)$ il supposto valore approssimato di h non è una piccola frazione come dovrebbe essere.

220. Come un esempio del metodo di Newton prenderemo l'equazione stessa che fu scelta da Newton, cioè, $x^3-2x-5=0$, dicasi $f(x)=0$. Qui $x=2$ rende $f(x)$ negativa, ed $x=3$ rende $f(x)$ positiva, sicchè una radice dell'equazione $f(x)=0$ cade fra 2 e 3. Ancora, $x=2\frac{1}{2}$ rende $f(x)$ positiva, sicchè la radice cade tra 2 e $2\frac{1}{2}$; anche $x=2\cdot2$ rende $f(x)$ positiva; così la radice non può differire da $2\cdot1$ per più di $\cdot1$. Supponiamo quindi $c=2\cdot1$; allora

$$c_1=c-\frac{f(c)}{f'(c)}=c-\frac{c^3-2c-5}{3c^2-2}=2\cdot1-\frac{\cdot061}{11\cdot23}=2\cdot1-\cdot0054$$

presso a poco; così $c_1=2\cdot0946$ presso a poco.

Quindi per una nuova approssimazione abbiamo

$$c_1-\frac{f(c_1)}{f'(c_1)}=c_1-\cdot00001852 \text{ presso a poco } =2\cdot09455148 \text{ presso a poco.}$$

221. Questo procedimento è molto semplice in teoria e non difficile in pratica; ma non è di sicuro successo a meno che non si prendano alcune precauzioni che andiamo ora a spiegare. Infatti supponiamo che c sia un valore approssimato della radice, e che $c_1=c-\frac{f(c)}{f'(c)}$, non siamo sicuri senza ulteriore investigazione che c_1 sia più di c vicino al vero valore della radice. Nell'esempio pre-

cedente noi prima accertammo che vi era una radice fra 2 e 2·2; allora prendemmo 2·1 come una prima approssimazione e deducemmo 2·0946 come una nuova approssimazione. Ma non siamo sicuri per ora che 2·0946 sia più vicino alla radice di 2·2; se però poniamo 2·1 per x troviamo che $f(x)$ è positiva, e così la radice richiesta deve cadere fra 2 e 2·1, ed ora sappiamo che 2·0946 è più vicino di 2·2 a questa radice. Ma neanche ora conosciamo se 2·0946 sia più vicino alla radice di 2·1. Se poniamo 2·0946 in $f(x)$ troviamo che $f(x)$ è positiva, e ciò mostra che la radice cade fra 2·0946 e 2; così 2·0946 è più vicino alla radice di 2·1.

222. Fourier ha dato una regola con la quale siamo esenti dal fastidio di tali esami ripetuti come abbiamo mostrato nell'Articolo precedente; questa regola garentisce il successo del metodo di Newton quando sono soddisfatte alcune condizioni. Il supplemento di Fourier al metodo di Newton dipende da una proprietà della prima funzione derivata di una data funzione, che ora dimostreremo.

223. Siano a e b due quantità qualunque, vi è una certa quantità λ intermedia tra a e b, tale che

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\lambda).$$

Infatti dinoti $F(x)$ $f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}\left\{f(b)-f(a)\right\}$; allora $F(x)$ svanisce quando $x=a$ ed anche quando $x=b$. Quindi per l'Art. 102 l'equazione $F'(x)=0$ deve avere una radice fra a e b. Ed $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; quindi una certa quantità λ intermedia tra a e b deve esistere, tale che $f'(\lambda)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$; onde

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\lambda).$$

224. Supponiamo che b sia maggiore di a; allora $f(b)$ è algebricamente maggiore o minore di $f(a)$ secondo che $f'(\lambda)$ è positiva o negativa. Se $f'(x)$ è positiva tra $x=a$ ed $x=b$, allora $f'(\lambda)$ è necessariamente positiva, e se $f'(x)$ è negativa tra $x=a$ ed $x=b$, allora $f'(\lambda)$ è necessariamente negativa.

Quindi abbiamo il seguente risultato; se $f'(x)$ è costantemente positiva in un intervallo qualunque, $f(x)$ cresce con x in quell'intervallo, e se $f'(x)$ è costantemente negativa, $f(x)$ decresce al crescere di x in quell'intervallo. Col crescere o decrescere di $f(x)$ intendiamo crescere o decrescere *algebrico*. Possiamo però stabilire il nostro risultato così; se $f'(x)$ ritiene lo stesso segno in un dato

intervallo, allora al crescere di x in quell'intervallo $f(x)$ *cresce numericamente* quando ha lo stesso segno di $f'(x)$, e *decresce numericamente* quando ha il segno contrario.

225. Enuncieremo e dimostreremo ora la regola di Fourier. Sia $f(x)=0$ un'equazione che ha una radice e solamente una tra α e β; e supponiamo che l'equazione $f'(x)=0$ non abbia alcuna radice tra α e β, ed anche che l'equazione $f''(x)$ non abbia alcuna radice tra α e β; allora il metodo di approssimazione di Newton riuscirà certamente se s'incomincia e si continua da quel limite pel quale $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno lo stesso segno.

Segue dalle nostre supposizioni che $f(x)$ cambia segno una volta e solamente una volta tra α e β, e che $f'(x)$ ed $f''(x)$ non cambiano segno tra α e β. Supporremo che $\beta-\alpha$ sia positiva.

(1) Supponiamo che $f(x)$ ed $f''(x)$ abbiano lo stesso segno quando $x=\alpha$. Si prenda α per prima approssimazione; allora la seconda approssimazione di Newton è $\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$. Dinoti $\alpha+h$ il vero valore della radice; allora $f(\alpha+h)=0$. Ora per l'Art. 223, noi abbiamo $f(\alpha+h)-f(\alpha)=hf'(\lambda)$, in cui λ cade tra α ed $\alpha+h$; così $h=-\frac{f(\alpha)}{f'(\lambda)}$, ed il vero valore della radice è $\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\lambda)}$. Dobbiamo quindi dimostrare che $\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ è più di α vicina al vero valore della radice. Poichè h è una quantità necessariamente positiva, $f(\alpha)$ ed $f'(\lambda)$ sono di segni contrarii, ed $f(\alpha)$ è dello stesso segno di $f''(\alpha)$, e quindi $f'(\lambda)$ ed $f''(\alpha)$ sono di segni contrarii. Quindi $f'(x)$ decresce numericamente al crescere di x tra α e β, per l'Art. 224, sicchè $f'(\lambda)$ è numericamente minore di $f'(\alpha)$; quindi $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ è una quantità positiva che è numericamente minore della quantità positiva $-\frac{f(\alpha)}{f'(\lambda)}$. Ciò mostra che la seconda approssimazione di Newton è più vicina al vero valore della radice in paragone della prima approssimazione.

Sia $\alpha_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$; allora $f(\alpha_1)$ ed $f''(\alpha_1)$ hanno lo stesso segno, e l'approssimazione può essere continuata da α_1.

(2) Supponiamo che $f(x)$ ed $f''(x)$ abbiano lo stesso segno quando $x=\beta$. Si prenda β per prima approssimazione, allora la seconda ap-

prossimazione di Newton è $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$. Dinoti $\beta + h$ il vero valore della radice; allora $f(\beta + h) = 0$. Ora, per l'Art. 223, noi abbiamo $f(\beta+h) - f(\beta) = hf'(\lambda)$, in cui λ cade tra β e $\beta+h$; così $h = -\frac{f(\beta)}{f'(\lambda)}$. Dobbiamo quindi dimostrare che $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ sia più di β vicina al vero valore della radice. Poichè h è necessariamente una quantità negativa, $f(\beta)$ ed $f'(\lambda)$ sono dello stesso segno, ed $f(\beta)$ è dello stesso segno di $f''(\beta)$, e quindi $f'(\lambda)$ ed $f''(\beta)$ sono dello stesso segno. Quindi $f'(x)$ cresce numericamente al crescere di x tra α e β, per l'Art. 224, sicchè $f'(\lambda)$ è numericamente minore di $f'(\beta)$. Quindi $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ è una quantità positiva che è numericamente minore della quantità positiva $\frac{f(\beta)}{f'(\lambda)}$. Ciò mostra che la seconda approssimazione di Newton è più vicina al vero valore della radice in paragone della prima approssimazione.

Sia $\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$; allora $f(\beta_1)$ ed $f''(\beta_1)$ hanno lo stesso segno, e l'approssimazione può essere continuata da β_1.

226. L'Articolo precedente mostra che le condizioni date da Fourier sono *sufficienti* per assicurare la riuscita del metodo di approssimazione di Newton. Quando queste condizioni sono soddisfatte, e l'approssimazione è incominciata e continuata da quel limite pel quale $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno lo stesso segno, otteniamo una successione di valori, i quali continuamente si avvicinano al vero valore della radice crescendo o diminuendo, secondo che il limite dal quale partiamo è minore o maggiore del vero valore della radice. Dimostreremo ora brevemente che le condizioni di Fourier sono *necessarie*.

Se partiamo con un supposto valore c, la seconda approssimazione di Newton lo corregge aggiungendo $-\frac{f(c)}{f'(c)}$, mentre il vero valore della radice si otterrebbe aggiungendo $-\frac{f(c)}{f'(\lambda)}$. Quindi la permanenza di segno di $f'(x)$ è necessaria per essere sicuri che $f'(c)$ ed $f'(\lambda)$ abbiano lo stesso segno; se queste quantità non hanno lo stesso segno la correzione di Newton non ha il segno conveniente, e la seconda approssimazione di Newton è più lontana dal vero valore della radice in paragone della prima approssimazione.

La permanenza di segno di $f''(x)$ è necessaria per assicurare che $f'(\lambda)$ sia numericamente minore di $f'(c)$. Se ciò non ha luogo la correzione di Newton è numericamente maggiore della vera correzione, e così, supponendo che la correzione abbia il segno conveniente, il vero valore della radice cade *tra* la prima e la seconda approssimazione di Newton. In questo caso la seconda approssimazione di Newton *può* essere più vicina al vero valore della radice in paragone della prima approssimazione, ma non è così necessariamente.

227. Nell'esempio dell'Art. 220, si può dimostrare che l'equazione $f(x)=0$ ha solamente una radice fra 2 e $2\cdot1$, e che le equazioni $f'(x)=0$ ed $f''(x)=0$ non hanno radici tra questi limiti; inoltre $f(x)$ ed $f''(x)$ sono entrambe positive quando $x=2\cdot1$. Quindi l'approssimazione Newtoniana riuscirà certamente se essa s'incomincia e si continua dal limite $2\cdot1$.

Per un altro esempio si prenda l'equazione $x^3-7x+7=0$, dicasi $f(x)=0$. Si può mostrare con la pruova che l'equazione ha una radice tra $1\cdot3$ ed $1\cdot4$; le equazioni $f'(x)=0$ ed $f''(x)=0$, non hanno radici tra questi limiti; inoltre $f(x)$ ed $f''(x)$ sono entrambe positive quando $x=1\cdot3$. Quindi l'approssimazione Newtoniana riuscirà certamente se essa s'incomincia e si continua dal limite $1\cdot3$.

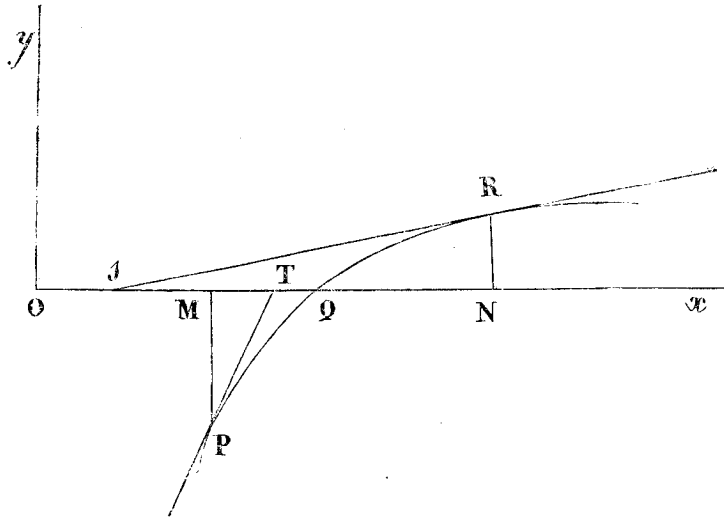
228. Mostreremo ora in qual modo si può valutare la rapidità dell'approssimazione. Supponiamo che c sia il valore approssimato della radice che si è ottenuto in un punto qualunque del procedimento; allora il vero valore della radice è $c-\frac{f(c)}{f'(\lambda)}$, sicchè il valore numerico dell'errore in questo punto è $\frac{f(c)}{f'(\lambda)}$, che indicheremo con r. Il valore approssimato seguente sarà $c-\frac{f(c)}{f'(c)}$, ed ora il valore numerico dell'errore è $\frac{f(c)}{f'(\lambda)}-\frac{f(c)}{f'(c)}$, cioè, $r\,\frac{f'(c)-f'(\lambda)}{f'(c)}$. E per l'Art. 223, abbiamo $f'(c)-f'(\lambda)=(c-\lambda)f''(\mu)$, in cui μ cade tra c e λ; così l'errore è $\frac{r(c-\lambda)f''(\mu)}{f'(c)}$. Ora λ cade tra c ed il vero valore della radice, sicchè $c-\lambda$ è minore di r; quindi l'errore è minore di $\frac{r^2f''(\mu)}{f'(c)}$. Il massimo valore che può prendere $f''(x)$ tra i limiti considerati si divida per il minimo valore che può prendere $f'(x)$, e si dinoti il quoziente con q; allora l'errore è *a fortiori* minore di qr^2.

Per esempio, nell'Art. 220, la radice cade tra 2 e 2·1. Così per trovare q dividiamo il valore di $6x$ quando $x=2\cdot1$ pel valore di $3x^2-2$ quando $x=2$; quindi $q=1\cdot26$; e siccome q è presso a poco l'unità, il numero dei posti decimali esatti nell'approssimazione sarà prossimamente raddoppiato ad ogni passo.

229. Lo studente che conosce gli elementi dell'applicazione del Calcolo Differenziale alla teoria delle curve, troverà facile di illustrare geometricamente la regola di Fourier per guidare l'approssimazione di Newton.

Supponiamo che PQR sia una parte della curva determinata dall'equazione $y=f(x)$. Allora possiamo supporre di conoscere OM ed ON, e di cercare il valore di OQ; cioè, cerchiamo di conoscere il punto in cui la curva taglia l'asse.

Al punto P è chiaro che $f(x)$ è negativa se Oy è la direzione positiva dell'asse delle y; ed $f''(x)$ è anche negativa in P, poichè la curva in P è convessa verso l'asse delle x. Si tiri la tangente PT; sia $OM=\alpha$, allora $MT=-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, come si sa dal Calcolo Differenziale; sicchè, partendo da M l'approssimazione Newtoniana procede verso T. E siccome T cade tra M e Q è chiaro che il metodo riesce in questo caso, e che l'approssimazione può essere continuata da T.



Nel punto R abbiamo $f(x)$ positiva ed $f''(x)$ negativa. Si tiri la

tangente RS; allora, partendo da N l'approssimazione Newtoniana procede verso S, ed S ed N sono in parti *opposte* di Q. Di più non vi è sicurezza che QS sia minore di QN, e non vi è sicurezza che l'approssimazione possa essere continuata da S. Così l'approssimazione non si può incominciare con sicurezza da N.

Lo studente può illustrare facilmente con figure la condizione che $f'(x)$ ed $f''(x)$ debbano ritenere il segno inalterato tra i limiti che si considerano.

Se però, in un esempio, sappiamo che NS è minore di NM possiamo partire da N, poichè il punto S cadrà allora tra Q ed M, e l'approssimazione può essere continuata da S.

Sia $ON = \beta$; allora possiamo partire da N se $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ è minore di $\beta - \alpha$

Messenger of Mathematics, Vol. III. pag. 40.

XVIII. METODO DI HORNER.

230. Spiegheremo ora il metodo per approssimare il valore numerico di una radice di un'equazione che fu inventato dal fu Sig.r Horner.

Per l'istoria di questa parte del soggetto rimandiamo ad una memoria del Prof. De Morgan nel *Companion to the Almanac* pel 1839.

Sia $f(x) = 0$ un'equazione qualunque; allora $f(a+x) = 0$ è un'equazione le radici della quale sono minori di a di quelle della prima equazione. L'equazione $f(a+x)=0$ diviene quando si sviluppa,

$$f(a) + xf'(a) + x^2\frac{f''(a)}{1 \cdot 2} + x^3\frac{f'''(a)}{\lfloor 3} + \ldots + x^n\frac{f^n(a)}{\lfloor n} = 0.$$

Ora la parte essenziale del metodo di Horner consiste in un procedimento col quale i coefficienti dell'ultima equazione si possono sistematicamente ed economicamente calcolare; abbiamo già osservato che un tale procedimento sarà utile; si veggano gli Art. 11 e 214.

231. Si supponga, per esempio, che

$$f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F;$$

allora
$$f(a) = Aa^5 + Ba^4 + Ca^3 + Da^2 + Ea + F,$$
$$f'(a) = 5Aa^4 + 4Ba^3 + 3Ca^2 + 2Da + E,$$
$$\frac{1}{2} f''(a) = 10Aa^3 + 6Ba^2 + 3Ca + D,$$
$$\frac{1}{\lfloor 3} f'''(a) = 10Aa^2 + 4Ba + C,$$
$$\frac{1}{\lfloor 4} f''''(a) = 5Aa + B,$$
$$\frac{1}{\lfloor 5} f'''''(a) = A.$$

(1) Possiamo calcolare $f(a)$ nel modo spiegato nell'Art. 5, così;

$$\begin{aligned}
A &= A,\\
Aa + B &= P \text{ diciamo},\\
Pa + C = Aa^2 + Ba + C &= Q \text{ diciamo},\\
Qa + D = Aa^3 + Ba^2 + Ca + D &= R \text{ diciamo},\\
Ra + E = Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E &= S \text{ diciamo},\\
Sa + F = Aa^5 + Ba^4 + Ca^3 + Da^2 + Ea + F &= f(a).
\end{aligned}$$

Qui ciascuna linea si ottiene moltiplicando la linea precedente per a, ed aggiungendo successivamente i termini B, C, D, E, F.

(2) Possiamo ora calcolare $f'(a)$ nello stesso modo come si è calcolato $f(a)$, adoperando A, P, Q, R, S nello stesso modo come sono state adoperate A, B, C, D, E;

$$\begin{aligned}
A &= A,\\
Aa + P &= 2Aa + B = T \text{ diciamo},\\
Ta + Q &= 3Aa^2 + 2Ba + C = U \text{ diciamo},\\
Ua + R &= 4Aa^3 + 3Ba^2 + 2Ca + D = V \text{ diciamo},\\
Va + S &= 5Aa^4 + 4Ba^3 + 3Ca^2 + 2Da + E = f'(a).
\end{aligned}$$

(3) Possiamo ora calcolare $\frac{1}{2} f''(a)$ nello stesso modo come sono state calcolate $f(a)$ ed $f'(a)$, adoperando A, T, U, V;

$$\begin{aligned}
A &= A,\\
Aa + T &= 3Aa + B = W \text{ diciamo},\\
Wa + U &= 6Aa^2 + 3Ba + C = X \text{ diciamo},\\
Xa + V &= 10Aa^3 + 6Ba^2 + 3Ca + D = \tfrac{1}{2} f''(a),
\end{aligned}$$

(4) Possiamo ora calcolare $\frac{1}{\lfloor 3} f'''(a)$ nello stesso modo, adoperando A, W, X;

$$A = A,$$
$$Aa + W = 4Aa + B = Y \text{ diciamo,}$$
$$Ya + X = 10Aa^2 + 4Ba + C = \frac{1}{\lfloor 3} f'''(a).$$

(5) Possiamo ora calcolare $\frac{1}{\lfloor 4} f''''(a)$ nello stesso modo, adoperando A ed Y;

$$A = A,$$
$$Aa + Y = 5Aa + B = \frac{1}{\lfloor 4} f''''(a).$$

(6) Finalmente, $$A = \frac{1}{\lfloor 5} f'''''(a).$$

Il procedimento precedente può essere disposto convenientemente così;

A	B	C	D	E	F
	Aa	Pa	Qa	Ra	Sa
	P	Q	R	S	$f(a)$
	Aa	Ta	Ua	Va	
	T	U	V	$f'(b)$	
	Aa	Wa	Xa		
	W	X	$\frac{1}{2} f''(a)$		
	Aa	Ya			
	Y	$\frac{1}{\lfloor 3} f'''(a)$			
	Aa				
	$\frac{1}{\lfloor 4} f''''(a)$				

La quantità sotto ogni linea orizzontale si ottiene aggiungendo le due quantità immediatamente sopra la linea.

Abbiamo così mostrato il procedimento di Horner per formare i coefficienti dell'equazione $f(a+x)=0$ quando l'equazione è del *quinto* grado; dimostreremo in seguito che questo procedimento è

applicabile qualunque sia il grado dell'equazione. Daremo una illustrazione numerica del procedimento e quindi spiegheremo l'uso del procedimento nell'approssimare la radice di un'equazione.

Per un'illustrazione numerica si supponga $a=2$ ed

$$f(x)=3x^5-x^3+4x^2+5x-8.$$

3	0	−1	+4	+5	−8
	6	12	22	52	114
	6	11	26	57	106
	6	24	70	192	
	12	35	96	249	
	6	36	142		
	18	71	238		
	6	48			
	24	119			
	6				
	30				

Così $f(2+x)=3x^5+30x^4+119x^3+238x^2+249x+106$.

232. Supponiamo, per esempio, di avere un'equazione con una radice compresa fra 300 e 400; si formi una seconda equazione le radici della quale siano minori di quelle della prima equazione di 300, sicchè la seconda equazione ha una radice compresa tra 0 e 300. Per tentativi si trovi il massimo multiplo di 10 che è contenuto in questa radice; supponiamo che esso sia 70; si formi una terza equazione le radici della quale siano minori di quelle della seconda equazione di 70, sicchè la terza equazione ha una radice fra 0 e 10. Per tentativi si trovi il massimo intero che è contenuto in questa radice; supponiamo che esso sia 2; si formi una quarta equazione le radici della quale siano minori di quelle della terza equazione di 2, sicchè la quarta equazione ha una radice compresa fra 0 ed 1. Per tentativi si trovi il massimo numero di decimi che è contenuto in questa radice; supponiamo che esso sia 8 decimi; si formi una quinta equazione le radici della quale siano minori di quelle della quarta equazione di ·8, sicchè la quinta equazione ha una radice compresa fra 0 ed ·1. Per tentativi si trovi il massimo numero di centesimi che è contenuto in questa radice; supponiamo che esso sia 7 centesimi.

Ora supponiamo che ·07 sia esattamente una radice della quinta equazione; ne segue che 372·87 è esattamente una radice della prima equazione.

Supponiamo in secondo luogo che ·07 non sia esattamente una radice della quinta equazione; allora ne segue che esiste un'equazione le radici della quale sono minori di quelle della prima equazione di 372·87, e che ha una radice compresa fra 0 ed ·01. Così la prima equazione ha una radice che è compresa fra 372·87 e 372·88.

Così vediamo come con una serie di operazioni del genere di quelle date nell'Art. 231, o giungiamo all'esatto valore della radice di un'equazione, o pure possiamo approssimarci ad esso tanto quanto ci piace.

233. Nell'Articolo precedente abbiamo stabilito che alcuni numeri debbono trovarsi per *tentativi;* mostreremo ora che possiamo facilmente regolarci in questi tentativi. Sia $f(x)=0$ l'equazione proposta, e supponiamo che con una o più operazioni si sia dedotta l'equazione che ha le sue radici minori di quelle dell'equazione proposta di c, cioè, supponiamo di aver formato l'equazione $f(c+x)=0$, e supponiamo che quest'ultima equazione abbia una piccola radice. Allora c è un valore approssimato di una radice dell'equazione primitiva; quindi pel Capitolo precedente $c-\frac{f(c)}{f'(c)}$ sarà in generale una più vicina approssimazione a quella radice. Così $-\frac{f(c)}{f'(c)}$ è un valore approssimato del numero di cui abbiamo bisogno per continuare l'operazione.

234. Esempio. Sia $f(x)=2x^3-473x^2-234x-711$. Si troverà per tentativi che $f(200)$ è negativa e $f(300)$ è positiva, sicchè l'equazione $f(x)=0$ ha una radice fra 200 e 300. Procediamo a diminuire le radici di 200.

2	− 473	− 234	− 711	(200
	400	− 14600	− 2966800	
	− 73	− 14834	− 2967511	
	400	65400		
	327	50566		
	400			
	727			

Quindi l'equazione che ha le sue radici minori di quelle di $f(x)=0$ di 200 è $2x^3+727x^2+50566x-2967511=0$; sicchè $f(200)=-2967511$ ed $f'(200)=50566$.

Quindi $-\frac{f(200)}{f'(200)}$ è più di 50. Procediamo allora a diminuire le radici dell'equazione ora data di 50.

2	727	50566	-2967511 (50
	100	41350	4595800
	827	91916	1628289

Troviamo così che 50 è un numero troppo grande, poichè abbiamo $f(250)=1628289$ quantità *positiva*, mentre $f(200)$ è *negativa;* sicchè la radice che andiamo cercando è minore di 250. Infatti, guidandoci nel modo spiegato nell'Art. 233 siamo esposti a scegliere per tentativo un numero *troppo grande*, specialmente nel principio dell'operazione; un simile errore si commette alle volte nel procedimento ordinario dell'estrazione della radice quadrata di un numero.

Tentiamo adunque 40.

2	727	50566	-2967511 (40
	80	32280	3313840
	807	82846	346329

Così 40 è anche troppo grande, poichè $f(240)$ è positiva.

Tentiamo quindi 30.

2	727	50566	-2967511 (30
	60	23610	2225280
	787	74176	-742231
	60	25410	
	847	99586	
	60		
	907		

Così $f(230)=-742231$ quantità *negativa,* sicchè 30 è il giusto numero.

Quindi l'equazione che ha le sue radici minori di quelle di $f(x)=0$ di 230 è $2x^3+907x^2+99586x-742231=0$.

Qui $f'(230)=99586$ sicchè $-\frac{f(230)}{f'(230)}=7$ approssimativamente.

Procediamo allora a diminuire le radici dell'equazione ora data di 7.

2	907	99586	— 742231	(7
	14	6447	742231	
	921	106033	0	

Ciò mostra che $f(237)=0$; sicchè 237 è una radice dell'equazione primitiva.

L'intera operazione è usualmente esibita così;

2	— 473	— 234	— 711	(237
	400	— 14600	— 2966800	
	— 73	— 14834	— 2967511*	
	400	65400	2225280	
	327	50566*	— 742231†	
	400	23610	742231	
	727*	74176		
	60	25410		
	787	99586†		
	60	6447		
	847	106033		
	60			
	907†			
	14			
	921			

Qui il segno * indica dove termina la prima parte dell'operazione, ed il segno † indica dove termina la seconda parte dell'operazione.

235. Prenderemo ora un esempio di un'equazione che non ha alcuna radice commensurabile. Sia $f(x)=x^3-3x^2-2x+5$. Si troverà per tentativo che $f(3)$ è negativa ed $f(4)$ è positiva, sicchè l'equazione $f(x)=0$ ha una radice fra 3 e 4. Ciò che segue sarà l'operazione per approssimare questa radice sino a tre cifre decimali.

1	-3	-2	5 (3·128
	3	0	-6
	0	-2	-1^*
	3	9	·761
	3	7*	$-$ ·239†
	3	·61	·167128
	6*	7·61	$-$ ·071872**
	·1	·62	.068273152
	6·1	8·23†	$-$ ·003598848
	·1	·1264	
	6·2	8·3564	
	·1	·1268	
	6·3†	8·4832**	
	·02	·050944	
	6·32	8·534144	
	·02	·051008	
	6.34	8·585152	
	·02		
	6·36**		
	·008		
	6·368		
	·008		
	6·376		
	·008		
	6·384		

Qui per trovare la seconda cifra della radice abbiamo $-\frac{-1}{7}$, sicchè ·1 è il più prossimo numero che si deve tentare; per trovare la terza cifra della radice abbiamo $-\frac{-\cdot 239}{8\cdot 23}$, sicchè ·02 è il più prossimo numero che si deve tentare; per trovare la quarta cifra della radice abbiamo $-\frac{-\cdot 071872}{8\cdot 4832}$, sicchè ·008 è il più prossimo numero che si deve tentare. In tutti questi casi il numero suggerito si trova essere corretto.

236. Come un altro esempio prendiamo l'equazione data nell'Articolo precedente, ed approssimiamo la radice che essa ha fra 1 e 2. L'operazione è usualmente esibita così;

1	— 3	— 2
	1	— 2
	— 2	— 4
	1	— 1
	— 1	— 500*
	1	4
	00*	— 496
	2	8
	2	— 4880000 †
	2	601
	4	— 4879399
	2	602
	600 †	— 487879700 **
	1	36216
	601	— 487843484
	1	36252
	602	— 487807232
	1	
	6030 **	
	6	
	6036	
	6	
	6042	
	6	
	6048	

5 (1·2016
— 4
1000*
— 992
8000000 †
— 4879399
3120601000 **
— 2927060904
193540096

La differenza tra questa disposizione e quella nell'Art. 235 nasce dal fatto che si è solito in pratica di omettere *i punti decimali,* appunto come essi si omettono nel procedimento per estrarre le radici quadrate dei numeri con approssimazione. La seguente regola rispetto alla parte decimale della radice sarà sufficiente. Quando tutte le cifre intere della radice sono state trovate e deve incominciare a comparire la parte decimale della radice, si aggiunga uno zero a dritta della prima colonna in cui si opera, due zeri a dritta della seconda colonna, tre zeri a dritta della terza colonna, e così di seguito se vi sono più di tre colonne; indi si proceda completamente nell'operazione come se la nuova cifra della radice fosse un numero intero. Indi si aggiungano zeri come prima.

Si sarà osservato che dopo il 2 nella radice la cifra seguente considerata come un intero sarebbe data approssimativamente da $-\frac{8000}{-48800}$, e questa è minore dell'unità; così si pone uno zero

nella radice ed aggiungiamo un altro zero alla prima colonna in cui si opera, due di più alla seconda colonna, e tre di più alla terza, e procediamo come prima. Gli zeri serviranno a distinguere i diversi passi dell'operazione, sicchè i segni $\overset{*}{\dagger}\overset{*}{*}$ possono essere omessi.

È chiaro che in tutti gli esempi precedenti la prima colonna poteva essere abbreviata eseguendo a memoria le facili operazioni che debbono farsi, e scrivendo solamente i risultati, ma abbiamo stimato di esibire il tutto per essere più chiaro allo studente.

237. Dopo che un certo numero di cifre della radice è stato trovato correttamente, un numero addizionale si può ottenere con un'operazione abbreviata. Daremo un esempio di ciò calcolando la radice positiva dell'equazione $x^3 + 3x^2 - 2x - 5 = 0$. Eseguiremo prima l'operazione per disteso sino a che siano state determinate cinque cifre decimali della radice.

1	3	− 2	− 5 (1·33005
	1	4	2
	4	2	− 3000
	1	5	2667
	5	700	− 333000
	1	189	332337
	60	889	− 663000000000
	3	198	564352475125
	63	108700	− 98647524875
	3	2079	
	66	110779	
	3	2088	
	690	112867000000	
	3	3495025	
	693	112870495025	
	3	3495050	
	696	112873990075	
	3		
	699000		
	5		
	699005		
	5		
	699010		
	5		
	699015		

La regola per abbreviare l'operazione è la seguente; si cancellino ad ogni passo una cifra dalla dritta della penultima colonna, due cifre dalla dritta dell'antipenultima colonna, e così di seguito.

Riprenderemo ora l'esempio considerato ed applicheremo questo procedimento abbreviato.

1 699015	112873990075	— 98647524875	(1·33005873
	55921	90299639432	
	11287454929	— 8347885443*	
	55921	7901261018	
	11287510850*	— 446624425†	
	489	338625624	
	1128751574	— 107998801	
	489		
	1128752063†		
	2		
	112875208		
	2		
	112875210		

Al punto in cui terminava l'operazione per disteso si suggerisce 8 per la cifra seguente; allora trascuriamo 5 in fine della penultima colonna, e 15 in fine dell'antipenultima colonna. Il primo passo nel proseguire l'operazione si è di moltiplicare 6990 per 8, e porre il prodotto nella colonna seguente; il prodotto si considera essere 55921, poichè immaginiamo 69901 moltiplicato per 8 e cancellata l'ultima cifra, e così 55921 è più vicino di 55920 al vero valore. Quindi aggiungiamo 55921 ad 11287399007; prendiamo 9 per la cifra al posto delle unità nella somma avuto riguardo al 5 che si trascura. Il segno * indica dove termina il primo stadio dell'operazione abbreviata. Ora si cancelli lo 0 in fine della seconda colonna e 90 in fine della prima colonna, sicchè la prima colonna è ridotta a 69. La cifra seguente della radice è 7, e questo stadio dell'operazione termina dove si è messo il segno †. Si cancelli 3 in fine della seconda colonna e 69 in fine della prima colonna. La prima colonna così sparisce, ma esercita ancora una leggiera influenza poichè la cifra seguente nella radice è 3, e quando 69 si moltiplica per 3 e si trascurano due cifre rimane un 2.

Sono rimaste ora solamente due colonne; il resto dell'operazione coincide col procedimento ordinario della *divisione abbreviata*, ed esso darà altre otto cifre di più nella radice.

11287521,0	−107998801	(1·3300587395679825
	101587689	
1128752,1	−6411112	
	5643761	
112875,2	−767351	
	677251	
11287,5	−90100	
	79013	
1128,7	−11087	
	10158	
112,8	−929	
	902	
11,2	−27	
	22	
1,1	−5	

Possiamo essere sicuri dell'approssimazione presso a poco sino all'ultima cifra. Poichè se l'intera operazione fosse eseguita per disteso, l'ultima colonna presenterebbe un maggior numero di cifre a dritta di quelle qui esibite, ma quelle che sono qui esibite riterrebbero i loro posti senza alterazione eccetto forse il cambiamento in alcune linee dell'ultima cifra per un'altra differente da essa per l'unità.

238. La radice trovata nell'Articolo precedente è il valore numerico della radice *negativa* dell'equazione $x^3-3x^2-2x+5=0$. Quindi la somma delle radici trovate negli Art. 235 e 236 dovrebbe superare la radice trovata nell'Art. 237 di 3; poichè la somma delle tre radici dell'equazione con i loro proprii segni è 3. Ciò si troverà valere approssimativamente; e lo studente si può esercitare a calcolare i valori approssimati delle due radici positive con maggior numero di cifre decimali di quello che abbiamo dato, per verificare più esattamente il legame tra la somma di quelle due radici e la radice calcolata nell'Art. 237.

239. Varii suggerimenti sono stati indicati allo scopo di diminuire il lavoro nell'uso del metodo di Horner. Rispetto a tali suggerimenti possiamo citare le osservazioni seguenti che si riferiscono ad uno di essi. « Ma considerando che il procedimento è tale che nessuno lo eseguirà molto spesso, dubitiamo se si debba raccomandare questa abbreviazione. Tutte queste semplificazioni tendono a far perdere di vista al calcolatore l'uniformità del metodo

che si manifesta nell'insieme; ed abbiamo sempre trovato che esse contribuiscono piuttosto a far dimenticare il metodo che ad abbreviarlo » *Penny Cyclopædia,* articolo *Involution.*

240. Nell'Art. 231 si disse che avremmo dimostrato come il metodo di Horner per formare l'equazione $f(a+x)=0$ è generalmente vero. Considereremo ora questo punto.

Sia $$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

si ponga $y+a$ per x, e supponiamo che $f(x)$ diventi allora

$$q_0y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\ldots+q_{n-1}y+q_n;$$

dobbiamo dimostrare che $q_n, q_{n-1}, \ldots q_1, q_0$ si trovano correttamente col procedimento di Horner. È chiaro che $q_0=p_0$. Poichè $y=x-a$ le espressioni seguenti sono identicamente eguali,

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

e $$q_0(x-a)^n+q_1(x-a)^{n-1}+q_2(x-a)^{n-2}+\ldots+q_{n-1}(x-a)+q_n.$$

Quindi q_n è il *resto* che si troverebbe dividendo $f(x)$ per $x-a$; inoltre il quoziente che nasce da questa divisione deve essere identicamente eguale a

$$q_0(x-a)^{n-1}+q_1(x-a)^{n-2}+q_2(x-a)^{n-3}+\ldots+q_{n-1}.$$

Quindi ancora q_{n-1} è il *resto* che si troverebbe dividendo l'ultima espressione per $x-a$; inoltre il quoziente che nasce da questa divisione deve essere identicamente eguale a

$$q_0(x-a)^{n-2}+q_1(x-a)^{n-3}+q_2(x-a)^{n-4}+\ldots+q_{n-2}.$$

Quindi ancora q_{n-2} è il *resto* che si troverebbe dividendo l'ultima espressione per $x-a$; inoltre il quoziente che nasce da questa divisione deve essere identicamente eguale a

$$q_0(x-a)^{n-3}+q_1(x-a)^{n-4}+q_2(x-a)^{n-5}+\ldots+q_{n-3};$$

e così di seguito.

Così $q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, \ldots$ sono i successivi resti che s'incontrano nel dividere, prima $f(x)$ per $x-a$, quindi il quoziente per $x-a$, quindi il nuovo quoziente per $x-a$; e così di seguito. E vediamo per gli Art. 5, 7, e 9 che il procedimento di Horner determina questi resti successivi.

241. Abbiamo così discusso sufficientemente il soggetto dei valori approssimati delle radici *reali* delle equazioni. Non si conosce ancora alcun metodo facile in pratica per calcolare le radici *immaginarie* delle equazioni; ma teoreticamente questo si può far dipendere da quello che è stato già dato. Infatti supponiamo che $a+b\sqrt{-1}$ sia una radice immaginaria di un' equazione $f(x)=0$; allora poichè la parte reale e la parte immaginaria di $f(a+b\sqrt{-1})$ debbono svanire separatamente, otteniamo due risultati, che possiamo dinotare con $P=0$ e $Q=0$, come nell'Art. 41. Qui P e Q saranno funzioni di a e b, e se eliminiamo a e b dalle equazioni $P=0$ e $Q=0$, otteniamo una sola equazione con una sola quantità ignota; e cerchiamo i *valori reali* di questa quantità ignota. Quindi possiamo determinare le radici immaginarie di una data equazione se possiamo formare una certa altra equazione e determinare le sue radici reali. Mostreremo in seguito in qual modo formare l'equazione che risulta dall'eliminare una fra due quantità ignote da due date equazioni.

Spiegheremo nel Capitolo XXI un altro metodo che è stato usato per calcolare le radici immaginarie delle equazioni. Lo studente può anche consultare il saggio del D.r Rutherford sulla *Complete Solution of Numerical Equations.*

XIX. FUNZIONI SIMMETRICHE DELLE RADICI.

242. Una funzione di due o più quantità si dice essere una funzione *simmetrica* di quelle quantità se la funzione non è alterata quando si scambiano tra loro due qualunque delle quantità.

Così, per esempio, $a^2+b^2+c^2$ è una funzione simmetrica delle tre quantità a, b, c; tale ancora è $ab+bc+ca$; poichè ciascuna di queste funzioni non è alterata quando scambiamo tra loro a e b, o a e c, o b e c.

243. *I coefficienti di un' equazione sono funzioni simmetriche delle radici dell' equazione.*

Infatti per l'Art. 45, se l'equazione è $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots=0$, abbiamo

$-p_1=$ alla somma delle radici,

$p_2=$ alla somma dei prodotti delle radici prese a due la volta, e così di seguito; ed è manifesto che le funzioni delle radici che qui si hanno sono funzioni simmetriche.

L'oggetto di questo Capitolo si è di mostrare che ogni funzione simmetrica razionale delle radici di un'equazione può essere espressa per mezzo dei coefficienti di quell'equazione. Incominceremo col dimostrare il teorema di Newton per le somme delle potenze delle radici di un'equazione.

244. Dinoti $f(x)\ x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$, e dinotino $a, b, c, d, \ldots$ le radici dell'equazione $f(x) = 0$.

Sia
$$S_1 = a + b + c + d + \ldots$$
$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots,$$
$$S_3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \ldots,$$

e così di seguito; così S_1 è la somma delle radici, S_2 è la somma dei quadrati delle radici, S_3 è la somma dei cubi delle radici, ed in generale S_m è la somma delle potenze m^{me} delle radici.

Per l'Art. 74 abbiamo

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \ldots$$

Le divisioni indicate nel secondo membro di questa identità possono essere eseguite esattamente per l'Art. 7; ed abbiamo

$$\frac{f(x)}{x-a} = x^{n-1} + (a + p_1)\, x^{n-2} + (a^2 + p_1 a + p_2)\, x^{n-3} + \ldots$$
$$+ (a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + \ldots + p_m)\, x^{n-m-1} + \ldots;$$

e simili espressioni si hanno per $\frac{f(x)}{x-b}, \frac{f(x)}{x-c}, \ldots$

Addizionando quindi otteniamo

$$f'(x) = nx^{n-1} + (S_1 + np_1)\, x^{n-2} + (S_2 + p_1 S_1 + np_2)\, x^{n-3} + \ldots$$
$$+ (S_m + p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} + \ldots + np_m)\, x^{n-m-1} + \ldots$$

Inoltre $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)\, p_1 x^{n-2} + (n-2)\, p_2 x^{n-3} + \ldots$
$$+ (n-m)\, p_m x^{n-m-1} + \ldots,$$

Si eguaglino i coefficienti delle stesse potenze di x nell'identità; così

$$S_1 + np_1 = (n-1)p_1 \quad \text{o} \quad S_1 + p_1 = 0,$$

$$S_2 + p_1 S_1 + np_2 = (n-2)p_2 \quad \text{o} \quad S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0,$$

e generalmente

$$S_m + p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} + \ldots + np_m = (n-m)p_m,$$

o

$$S_m + p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} + \ldots + p_{m-1} S_1 + np_m = 0.$$

In questo risultato generale m si suppone essere minore di n.

Per mezzo del risultato generale possiamo esprimere la somma delle m^{me} potenze delle radici per mezzo dei coefficienti e delle somme delle potenze inferiori delle radici; e così con operazioni ripetute possiamo esprimere la somma delle potenze m^{me} delle radici per mezzo dei coefficienti solamente.

Supponiamo in secondo luogo che m non sia limitato ad essere minore di n. Si moltiplichi la data equazione $f(x) = 0$ per x^{m-n}; così $x^{m-n} f(x) = 0$, cioè,

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_n x^{m-n} = 0.$$

Si sostituiscano per x successivamente $a, b, c, \ldots$ e si aggiungano i risultati; così

$$S_m + p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} + \ldots + p_n S_{m-n} = 0.$$

Con questo teorema possiamo esprimere la somma delle potenze m^{me} delle radici di un'equazione per mezzo dei coefficienti e delle somme delle potenze inferiori delle radici quando m non è minore di n; e così con operazioni ripetute possiamo esprimere la somma delle potenze m^{me} delle radici per mezzo dei coefficienti.

Il metodo seguente è molto conveniente in pratica. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \ldots;$$

quindi
$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} + \dots$$
$$= \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} + \dots$$
$$= n + \frac{S_1}{x} + \frac{S_2}{x^2} + \frac{S_3}{x^3} + \dots$$

Così, se attualmente dividiamo $xf'(x)$ per $f(x)$, i coefficienti dei termini in ordine saranno n, S_1, S_2, ...

245. Per trovare la somma delle potenze *negative* delle radici dell'equazione $f(x)=0$, possiamo porre $\frac{1}{y}$ per x e trovare la somma delle potenze *positive* corrispondenti delle radici dell'equazione trasformata in y.

O pure possiamo fare successivamente m eguale ad $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... nel risultato dell'Articolo precedente; e così ottenere successivamente S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, ...

246. Il problema generale di trovare il valore di una funzione simmetrica razionale qualunque di certe quantità si può ridurre al problema di trovare il valore di alcune funzioni semplici, come ora mostreremo.

Una funzione simmetrica razionale qualunque che non è intera sarà il quoziente di una funzione simmetrica razionale intera per un'altra; sicchè è necessario di considerare solamente le funzioni intere. Una funzione simmetrica razionale intera qualunque che non è omogenea sarà la somma di due o più funzioni simmetriche razionali intere che sono omogenee; sicchè è necessario considerare solamente le funzioni omogenee. Una funzione omogenea può consistere di diverse parti in cui benchè la *somma* degli esponenti rimanga la stessa, gli esponenti stessi siano diversi; in tal caso la funzione omogenea è la somma di due o più funzioni omogenee dello stesso grado in cui gli esponenti sono gli stessi per tutti i termini.

Segue da ciò che basta considerare solamente tali funzioni simmetriche razionali che siano intere ed omogenee, ed in cui gli esponenti siano gli stessi per tutti i termini.

247. Dinotino a, b, c, d, ... le radici di una data equazione.

Per l'Art. 244 possiamo esprimere per mezzo dei coefficienti il valore di

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \ldots$$

Questa funzione si può dire essere del *primo ordine*, poichè ciascun termine contiene solamente *una* delle radici.

Una funzione si può dire essere del *secondo ordine* quando ciascun termine contiene *due* delle radici, come

$$a^m b^p + a^m c^p + b^m c^p + \ldots$$

Qui bisogna formare ogni permutazione delle radici prese due per volta, e porre l'esponente m sulla prima radice e p sulla seconda. Dinoteremo questa funzione con $\Sigma a^m b^p$, essendo essa la somma di tutt'i termini che si possono formare come $a^m b^p$.

Una funzione si può dire essere del *terzo ordine* quando ogni termine contiene *tre* delle radici, come

$$a^m b^p c^q + a^m c^p d^q + a^m b^p d^q + \ldots$$

Qui bisogna formare ogni permutazione delle radici prese tre per volta, e porre l'esponente m sulla prima radice, p sulla seconda, e q sulla terza. Dinoteremo questa funzione con $\Sigma a^m b^p c^q$, essendo essa la somma di tutti i termini che si possono formare come $a^m b^p c^q$.

Similmente possiamo avere funzioni del quarto ordine e di ordini superiori, e possiamo usare una simile notazione per rappresentarle.

Poichè abbiamo mostrato in qual modo esprimere le funzioni dinotate da S_m per mezzo dei coefficienti di un'equazione sarà sufficiente di mostrare come una qualunque delle funzioni che dobbiamo considerare può essere espressa per mezzo di funzioni come S_m.

248. *Trovare il valore della funzione simmetrica del secondo ordine* $\Sigma a^m b^p$.

Abbiamo
$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots,$$
$$S_p = a^p + b^p + c^p + \ldots.$$

Con la moltiplicazione otteniamo

$$S_m S_p = a^{m+p} + b^{m+p} + c^{m+p} + \ldots$$
$$+ a^m b^p + a^m c^p + b^m a^p + \ldots;$$

cioè, $$S_m S_p = S_{m+p} + \Sigma a^m b^p,$$

e quindi $$\Sigma a^m b^p = S_m S_p - S_{m+p}.$$

Ciò suppone che m e p siano disuguali. Se supponiamo p eguale ad m i termini in $\Sigma a^m b^p$ diventano eguali a due a due, sicchè questa somma può essere espressa così, $2\Sigma(ab)^m$; e quindi

$$2\Sigma(ab)^m = S^2{}_m - S_{2m}.$$

249. *Trovare il valore della funzione simmetrica del terzo ordine* $\Sigma a^m b^p c^q$.

Abbiamo $$\Sigma a^m b^p = a^m b^p + b^m c^p + a^m c^p + \ldots,$$
$$S_q = a^q + b^q + c^q + \ldots$$

Con la moltiplicazione otteniamo

$$S_q \Sigma a^m b^p = a^{m+q} b^p + b^{m+q} c^p + c^{m+q} a^p + \ldots$$
$$+ a^m b^{p+q} + b^m c^{p+q} + c^m a^{p+q} + \ldots$$
$$+ a^m b^p c^q + \ldots$$

I termini nel secondo membro formano tre gruppi, che nella nostra notazione sono dinotati da $\Sigma a^{m+q} b^p$, $\Sigma a^{p+q} b^m$, $\Sigma a^m b^p c^q$; così

$$S_q \Sigma a^m b^p = \Sigma a^{m+q} b^p + \Sigma a^{p+q} b^m + \Sigma a^m b^p c^q.$$

Si sostituiscano per $\Sigma a^m b^p$, $\Sigma a^{m+q} b^p$, e $\Sigma a^{p+q} b^m$ i loro valori per l'Art. 248, ed otteniamo

$$\Sigma a^m b^p c^q = S_m S_p S_q - S_{m+p} S_q - S_{m+q} S_p - S_{p+q} S_m + 2S_{m+p+q}.$$

Abbiamo supposto m, p, q tutti disuguali. Supponiamo, però, che $m = p$; allora, come nell'Art. 248, abbiamo

$$2\Sigma(ab)^m c^q = S^2{}_m S_q - S_{2m} S_q - 2S_{m+q} S_m + 2S_{2m+q}.$$

Se $m = p = q$ la somma $\Sigma a^m b^p c^q$ si riduce a $2 \cdot 3\Sigma(abc)^m$; così

$$6\Sigma(abc)^m = S^3{}_m - 3S_{2m} S_m + 2S_{3m}.$$

Il metodo di questo Articolo e del precedente può essere continuato indefinitamente, e così una funzione di un ordine qualunque come $\Sigma a^m b^p$ e $\Sigma a^m b^p c^q$ può essere espressa per mezzo dei coefficienti. Quindi per l'Art. 246, l'oggetto proposto nel presente Capitolo può essere raggiunto.

250. Abbiamo mostrato come la funzione dinotata da S_m può essere espressa per mezzo dei coefficienti; e così naturalmente si può esprimere nello stesso modo la somma di un numero qualunque di funzioni come S_m. Il metodo seguente, però, sarà generalmente più vantaggioso in tal caso. Se $\varphi(x)$ dinota una funzione razionale intera di x, si cerca di esprimere per mezzo dei coefficienti la somma $\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\ldots$

Abbiamo
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\ldots;$$

quindi
$$\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{x-b}+\frac{\varphi(x)}{x-c}+\ldots$$
$$=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}+\frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b}+\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}+\ldots$$
$$+\frac{\varphi(a)}{x-a}+\frac{\varphi(b)}{x-b}+\frac{\varphi(c)}{x-c}+\ldots$$

In questa identità le parti intere e le parti frazionarie saranno eguali separatamente; inoltre espressioni tali come $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$ sono intere per l'Art. 7. Si divida $\varphi(x)f'(x)$ per $f(x)$, l'operazione essendo spinta finchè il resto sia una funzione intera di x di grado inferiore ad $f(x)$; sia R questo resto. Allora considerando le parti frazionarie dell'identità abbiamo

$$\frac{R}{f(x)}=\frac{\varphi(a)}{x-a}+\frac{\varphi(b)}{x-b}+\frac{\varphi(c)}{x-c}+\ldots$$

Si moltiplichi; allora

$$R=x^{n-1}\left\{\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\ldots\right\}$$
$$+\text{ termini contenenti potenze di } x \text{ inferiori ad } x^{n-1}.$$

Così $\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\ldots$ è eguale al coefficiente di x^{n-1} in R.

251. Come un esempio delle formole di questo Capitolo supponiamo che si vogliano trovare le somme delle potenze delle radici dell'equazione

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0.$$

$$S_1 = -p_1 = 1,$$

$$S_2 = -p_1 S_1 - 2p_2 = 1 + 14 = 15,$$

$$S_3 = -p_1 S_2 - p_2 S_1 - 3p_3 = 15 + 7 - 3 = 19,$$

$$S_4 = -p_1 S_3 - p_2 S_2 - p_3 S_1 - 4p_4 = 19 + 105 - 1 - 24 = 99,$$

$$S_5 = -p_1 S_4 - p_2 S_3 - p_3 S_2 - p_4 S_1 = 99 + 133 - 15 - 6 = 211,$$

$$S_6 = -p_1 S_5 - p_2 S_4 - p_3 S_3 - p_4 S_2 = 211 + 693 - 19 - 90 = 795,$$

e così di seguito.

Si ponga $\frac{1}{y}$ per x nell'equazione data; allora

$$y^4 + \frac{1}{6} y^3 - \frac{7}{6} y^2 - \frac{1}{6} y + \frac{1}{6} = 0.$$

Così per le somme delle potenze negative delle radici dell'equazione primitiva abbiamo

$$S_{-1} = -\frac{1}{6},$$

$$S_{-2} = -\frac{1}{6} S_{-1} - 2\left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{14}{6} + \frac{1}{36} = \frac{85}{36},$$

e così di seguito.

Questi risultati possono essere verificati facilmente, essendosi formata l'equazione primitiva in modo da avere per sue radici $-2, -1, -1, 3$.

Ancora, supponiamo che si vogliano i valori di S_1, S_2, S_3 ed S_4 nell'equazione biquadratica

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

$S_1 + p = 0$, onde $S_1 = -p$,

$S_2 + pS_1 + 2q = 0$, onde $S_2 = p^2 - 2q$,

$S_3 + pS_2 + qS_1 + 3r = 0$, onde $S_3 = -p(p^2 - 2q) + pq - 3r$
$= -p^3 + 3pq - 3r$,

$S_4 + pS_3 + qS_2 + rS_1 + 4s = 0$,

onde $S_4 = -p(-p^3 + 3pq - 3r) - q(p^2 - 2q) + rp - 4s$
$= p^4 - 4p^2q + 4rp + 2q^2 - 4s.$

Come un altro esempio, dinotino α, β, γ, δ le quattro radici dell'equazione biquadratica $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$;

$$\text{sia } A=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta),\ B=\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\delta),\ C=\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma);$$

e si voglia trovare il valore delle seguenti funzioni simmetriche delle radici dell'equazione biquadratica,

(1) $A+B+C$,

(2) $AB+BC+CA$,

(3) ABC.

$$(1)\quad A+B+C=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)=\frac{q}{2},$$

$$(2)\quad AB+BC+CA=\frac{1}{4}(\alpha^2\beta\gamma+\alpha^2\gamma\delta+\ldots)=\frac{1}{4}\Sigma\alpha^2\beta\gamma$$

$$=\frac{1}{8}(S_1{}^2S_2-S_2{}^2-2S_1S_3+2S_4);\text{ pel metodo dell'Art. 249.}$$

Allora possono sostituirsi i valori di S_1, S_2, S_3 ed S_4 che sono stati già trovati, ed il valore di $\frac{1}{4}\Sigma\alpha^2\beta\gamma$ sarà conosciuto. O pure possiamo procedere così,

$$\Sigma\alpha^2\beta\gamma=\Sigma\frac{\alpha^2\beta\gamma\delta}{\delta}=\alpha\beta\gamma\delta\Sigma\frac{\alpha}{\delta}.$$

$$\text{Ed } \alpha\beta\gamma\delta=s,\ \text{e } \Sigma\frac{\alpha}{\delta}=\frac{pr}{s}-4,\ \text{per l'Art. 48;}$$

$$\text{quindi } AB+BC+CA=\frac{1}{4}(pr-4s).$$

$$(3)\quad ABC=\frac{1}{8}(\alpha^3\beta\gamma\delta+\ldots+\alpha^2\beta^2\gamma^2+\ldots)=\frac{1}{8}\Sigma\alpha^3\beta\gamma\delta+\frac{1}{8}\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

I valori di queste due funzioni simmetriche si possono trovare direttamente con i metodi di questo Capitolo; o pure possiamo abbreviare questi metodi così,

$$\Sigma\alpha^3\beta\gamma\delta=\alpha\beta\gamma\delta\Sigma\alpha^2=s(p^2-2q),$$

$$\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2\Sigma\frac{1}{\alpha^2}=s^2\left(\frac{r^2}{s^2}-\frac{2q}{s}\right),$$

poichè per trovare $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$ dobbiamo solamente ottenere la somma dei quadrati delle radici dell'equazione in y che si forma scrivendo $\frac{1}{y}$ per x.

$$\text{Così } ABC = \frac{1}{8}(r^2 + p^2 s - 4qs).$$

I valori delle funzioni di A, B, C che sono stati trovati possono essere verificati; poichè A, B, C, per l'Art. 189, sono le radici dell'equazione cubica in m nell'Art. 188.

XX. APPLICAZIONI DELLE FUNZIONI SIMMETRICHE.

252. Nel presente Capitolo daremo due applicazioni della teoria delle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione; la prima applicazione consisterà nel formare l'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici di una data equazione, e la seconda applicazione dimostrerà un teorema importante sull'eliminazione.

253. *Formare l'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici di una data equazione.*

Supponiamo che l'equazione data sia dell'n^{mo} grado, e si dinotino le sue radici con a, b, c.... Allora le radici dell'equazione richiesta saranno $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, ... $(b-c)^2$, ...; il numero di queste è lo stesso del numero delle combinazioni di n cose prese due per volta, cioè, $\frac{1}{2}n(n-1)$; e questo numero dinoterà quindi il grado dell'equazione richiesta. Si ponga m per $\frac{1}{2}n(n-1)$, e supponiamo che l'equazione richiesta sia dinotata da

$$x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \ldots + q_m = 0.$$

Inoltre dinoti s_r la somma delle potenze delle radici r^{me} di questa equazione. Dobbiamo determinare solamente $s_1, s_2, \ldots s_m$, ed allora i coefficienti dell'equazione richiesta si troveranno successivamente con le formole dell'Art. 244, cioè, $s_1 + q_1 = 0$, $s_2 + q_1 s_1 + 2q_2 = 0$, e così di seguito.

Sia $$\varphi(x)=(x-a)^{2r}+(x-b)^{2r}+(x-c)^{2r}+\dots,$$

allora $$2s_r=\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\dots$$

Ora dinotino $S_1, S_2, S_3, \dots$ le somme delle potenze delle radici dell'equazione data; così

$$\varphi(x)=nx^{2r}-2rS_1x^{2r-1}+\frac{2r(2r-1)}{1\cdot 2}S_2x^{2r-2}-\dots+nS_{2r}.$$

Si pongano per x successivamente $a, b, c, \dots$ e si addizioni; così

$$2s_r=nS_{2r}-2rS_1S_{2r-1}+\frac{2r(2r-1)}{1\cdot 2}S_2S_{2r-2}-\dots+nS_{2r}.$$

I termini nel secondo membro che sono ad eguali distanze dal primo e dall'ultimo termine sono eguali; quindi riordinando e dividendo per 2 otteniamo

$$s_r=nS_{2r}-2rS_1S_{2r-1}+\frac{2r(2r-1)}{1\cdot 2}S_2S_{2r-2}-\dots$$
$$\dots+\frac{1}{2}(-1)^r\frac{2r(2r-1)\dots(r+1)}{\lfloor r}S_r^2.$$

Ora $S_1, S_2, \dots$ possono essere espresse per mezzo dei coefficienti dell'equazione data; così si può trovare s_r, e quindi finalmente si troveranno i coefficienti dell'equazione richiesta.

254. L'ultimo termine dell'equazione richiesta, cioè quello dinotato da q_m nell'Articolo precedente, si può calcolare in altro modo. Si dinoti l'equazione data con $f(x)=0$, sicchè

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots$$

Allora $$f'(x)=(x-b)(x-c)\dots+(x-a)(x-c)\dots+\dots;$$

così $$f'(a)=(a-b)(a-c)\dots,$$
$$f'(b)=(b-a)(b-c)\dots$$

Quindi $q_m=f'(a)f'(b)f'(c)\dots$

Ora siano $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ le radici dell'equazione $f'(x)=0$; allora

$$f'(x)=n(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots;$$

quindi $$f'(a)f'(b)f'(c)\dots$$
$$=n^n(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\dots(b-\alpha)(b-\beta)\dots(c-\alpha)\dots$$

Ma
$$(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha)\ldots=(-1)^n f(\alpha)\ldots,$$
$$(a-\beta)(b-\beta)(c-\beta)\ldots=(-1)^n f(\beta)\ldots,$$
e così di seguito;

così
$$f'(a)f'(b)f'(c)\ldots=n^n(-1)^{n(n-1)}f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\ldots$$
$$=n^n f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\ldots,$$
poichè $(-1)^{n(n-1)}=1$.

Ora $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)\ldots$ è una funzione *simmetrica* delle radici dell'equazione derivata $f'(x)=0$, e può per conseguenza essere calcolata.

255. Nell'Art. 109 abbiamo spiegato un uso che si può fare dell'equazione che ha per radici i quadrati delle differenze delle radici di un'equazione proposta; vale a dire, possiamo determinare così la situazione delle radici reali dell'equazione proposta. Ma il teorema di Sturm raggiunge ora questo scopo più prontamente. Nondimeno l'equazione che ha per sue radici i quadrati delle differenze delle radici di un'equazione proposta darà alle volte, col solo guardarla, informazione rispetto al numero delle radici *immaginarie* dell'equazione proposta; poichè è chiaro che se questa nuova equazione può avere radici *negative* l'equazione proposta deve avere radici *immaginarie;* e se la nuova equazione non ha radici negative l'equazione proposta non ha radici immaginarie. Inoltre se la nuova equazione ha radici immaginarie l'equazione proposta deve avere radici immaginarie; però se la nuova equazione non ha radici immaginarie non ne seguirà che l'equazione proposta non abbia di tali radici. Per esempio, l'equazione proposta potrebbe essere un'equazione biquadratica con le radici $\pm\lambda\sqrt{-1}$ e $\pm\mu\sqrt{-1}$; in questo caso la nuova equazione avrebbe solamente radici reali negative.

Sarà conveniente di dare il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici nelle equazioni algebriche del secondo, terzo, e quarto grado.

(1) $$ax^2+2bx+c=0.$$

Il prodotto è $$\frac{4(b^2-ac)}{a^2}.$$

(2) $$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Per l'Art. 60 il prodotto è
$$-\frac{1}{27}\left\{(2p^3-9pq+27r)^2+4(3q-p^2)^3\right\}.$$

Se l'equazione è

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

questo diviene

$$-\frac{27}{a^6}\left\{(2b^3 - 3abc + a^2d)^2 + 4(ac - b^2)^3\right\}.$$

o più simmetricamente

$$-\frac{27}{a^4}\left\{(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)\right\}.$$

(3) $$x^4 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Per l'Art. 187 il prodotto è

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2(\beta^2 - \gamma^2)^2(\gamma^2 - \alpha^2)^2,$$

in cui α^2, β^2, γ^2 sono le radici di una certa cubica.

Quindi il prodotto è

$$-\frac{1}{27}\left\{(27r^2 - 72qs + 2q^3)^2 - 4(q^2 + 12s)^3\right\}.$$

Se l'equazione è

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

questo diviene per l'Art. 187,

$$\frac{256}{a^6}\left\{(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd)^2\right\}.$$

256. Mostreremo ora come eliminare da due equazioni contenenti due quantità incognite una delle quantità incognite, per mezzo della teoria delle funzioni simmetriche.

Siano le equazioni

$$p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

e $$q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \ldots + q_n = 0.$$

I coefficienti $p_0, p_1, p_2, \ldots, q_0, q_1, q_2, \ldots$ si suppongono funzioni razionali intere di una quantità y, ed x si deve eliminare.

Supponiamo che dalla prima di queste equazioni si possano trovare i valori di x espressi in y; siano questi valori dinotati da $a, b, c, \ldots$ Sostituendoli nella seconda equazione, otteniamo m equazioni per determinare y, cioè

$$q_0a^n + q_1a^{n-1} + q_2a^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$
$$q_0b^n + q_1b^{n-1} + q_2b^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$
$$q_0c^n + q_1c^{n-1} + q_2c^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

sicchè tutt'i valori ammissibili di y sono contenuti tra le radici di queste equazioni. E viceversa ogni radice di una di queste equazioni è un valore ammissibile di y. Infatti supponiamo, per esempio, che la prima di queste equazioni abbia una radice β, e supponiamo che quando si pone β per y in a il valore sia α; allora $x=\alpha$, $y=\beta$ soddisfaranno alle due equazioni primitive. Poichè questi valori evidentemente soddisfano la seconda equazione; e la prima equazione è soddisfatta da $x=a$, *qualunque sia* y, ed è perciò soddisfatta quando prendiamo $x=a$ e diamo ad y in a il valore β. Segue da ciò che moltiplicando insieme i primi membri delle precedenti equazioni in y ed eguagliando il prodotto a zero otteniamo l'equazione finale in y. Ora questo prodotto non si altera scambiando tra loro due qualunque delle quantità $a, b, c, \ldots$, sicchè il prodotto è una *funzione simmetrica* di queste quantità, ed il suo valore si può esprimere perciò con i coefficienti $p_0, p_1, p_2, \ldots$ della prima equazione. Così otterremo finalmente un'equazione razionale intera in y, e questa equazione ha per sue radici tutt'i valori ammissibili di y e non altri.

257. Per un esempio particolare, supponiamo che la prima equazione sia una cubica in x, e la seconda una quadratica in x, sicchè dobbiamo eliminare x dalle equazioni

$$p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0, \quad \text{e} \quad q_0x^2 + q_1x + q_2 = 0,$$

in cui i coefficienti si suppongono funzioni di y. Qui con la notazione dell'Articolo precedente abbiamo

$$(q_0a^2+q_1a+q_2)(q_0b^2+q_1b+q_2)(q_0c^2+q_1c+q_2)=0, \text{ cioè,}$$
$$q_2^3+q_1^3abc+q_0^3a^2b^2c^2+q_0^2q_2\Sigma a^2b^2+q_0^2q_1\Sigma a^2b^2c+q_1^2q_2\Sigma ab$$
$$+q_1q_2^2\Sigma a+q_0q_2^2\Sigma a^2+q_0q_1^2\Sigma a^2bc+q_0q_1q_2\Sigma a^2b=0.$$

$$\text{Inoltre } abc = -\frac{p_3}{p_0}, \qquad a^2b^2c^2 = \frac{p_3^2}{p_0^2},$$

$$\Sigma a^2b^2 = a^2b^2c^2\Sigma\frac{1}{a^2} = \frac{p_3^2}{p_0^2}\left(\frac{p_2^2}{p_3^2} - \frac{2p_1}{p_3}\right),$$

$$\Sigma a^2b^2c = abc\Sigma ab = -\frac{p_3}{p_0}\Sigma ab = -\frac{p_2p_3}{p_0^2},$$

$$\Sigma a = -\frac{p_1}{p_0}, \quad \Sigma a^2 = \frac{p_1^2}{p_0^2} - \frac{2p_2}{p_0},$$

$$\Sigma a^2bc = abc\Sigma a = \frac{p_1p_3}{p_0^2},$$

$$\Sigma a^2b = abc\Sigma\frac{a}{b} = -\frac{p_3}{p_0}\left(\frac{p_1p_2}{p_0p_3} - 3\right), \text{ per l'Art. 48.}$$

E sostituendo questi valori otterremo l'equazione che risulta dall'eliminazione di x.

258. *Se eliminiamo una quantità ignota tra due equazioni dei gradi* m *ed* n *rispettivamente, il grado dell'equazione risultante non eccederà* mn.

Siano le equazioni

$$p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots\ldots + p_m = 0,$$
$$q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \ldots\ldots + q_n = 0;$$

i coefficienti in queste equazioni si suppongono essere funzioni di y. Inoltre si suppone ora che la somma degli esponenti di x e di y nello stesso termine non sia mai maggiore di m nella prima equazione, e nè mai maggiore di n nella seconda equazione; sicchè p_ρ e q_ρ possono essere del grado ρ in y, ma non di grado superiore. Ora supponiamo che x sia eliminata col metodo dell'Art. 257; il primo membro dell'equazione finale in y consiste allora di una serie di termini, ciascuno dei quali è il prodotto di m fattori, ed è della forma $q_ra^{n-r}\times q_sb^{n-s}\times q_tc^{n-t}\times\ldots$ E siccome sappiamo che la somma dei termini forma una funzione *simmetrica* di $a, b, c, \ldots$, l'aggregato dei termini con gli esponenti ora indicati sarà

$$q_rq_sq_t\ldots\Sigma a^{n-r}b^{n-s}c^{n-t}\ldots$$

Ora il grado di $q_rq_sq_t\ldots$ non è maggiore di $r+s+t+\ldots$, sicchè

dobbiamo solamente dimostrare che il grado di $\Sigma a^{n-r}b^{n-s}c^{n-t}\ldots$ non è maggiore di $n-r+n-s+n-t+\ldots$, ed allora ne seguirà che il grado del prodotto non è maggiore di mn. Il risultato richiesto segue da due osservazioni. (1) Dalle formole dell'Art. 244 si può dimostrare che S_ρ non contiene potenze di y superiori ad y^ρ. (2) Dal procedimento degli Art. 248 e 249, ne seguirà che il valore di $\Sigma a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots$ conterrà potenze e prodotti di S_1, S_2, S_3, $\ldots S_{\lambda+\mu+\nu+\cdots}$; ed in ciascun termine la somma delle lettere inferiori congiunte al simbolo S è $\lambda+\mu+\nu+\ldots$

Quindi conchiudiamo che nell'equazione finale in y non si troverà alcuna potenza di y superiore ad y^{mn}.

259. L'Articolo precedente dà il limite che il grado dell'equazione finale in y non può sorpassare; esso però in casi particolari può cadere al di sotto di questo limite.

Il teorema può essere esteso e si ottiene il seguente risultato generale; se tra un numero qualunque di equazioni contenenti lo stesso numero di quantità ignote si eliminano tutte queste quantità eccetto una, il grado dell'equazione finale non può eccedere il prodotto dei gradi delle equazioni primitive. Si vegga Serret *Cours d'Algèbre Supérieure*.

XXI. SOMME DELLE POTENZE DELLE RADICI.

260. Col metodo di Newton, spiegato nell'Art. 244, si possono trovare *successivamente* le somme delle potenze delle radici di un'equazione; spiegheremo ora un metodo col quale si può ottenere *indipendentemente* la somma per una data potenza intera qualunque delle radici di un'equazione.

Dinotino a, b, c, ... le radici di un'equazione $f(x)=0$, sicchè abbiamo $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$; e supponiamo l'equazione dell'n^{mo} grado. Allora

$$\frac{f(x)}{x^n}=\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)\left(1-\frac{c}{x}\right)\ldots$$

Si prenda il logaritmo di ambo i membri, e quindi si sviluppino i logaritmi del secondo membro; così

$$\log\frac{f(x)}{x^n} = -\frac{1}{x}(a+b+c+\ldots)$$

$$-\frac{1}{2x^2}(a^2+b^2+c^2+\ldots)$$

$$-\frac{1}{3x^3}(a^3+b^3+c^3+\ldots)$$

$$-\ldots\ldots$$

Così nel secondo membro il coefficiente di $\frac{1}{x^m}$ è $-\frac{S_m}{m}$; quindi abbiamo $\frac{S_m}{m}$ = al coefficiente di $\frac{1}{x^m}$ nello sviluppo di $-\log\frac{f(x)}{x^n}$ secondo le potenze decrescenti di x.

Ciò suppone m positiva; se si vuole la somma per una potenza intera qualunque negativa possiamo cambiare x in $\frac{1}{y}$ e trovare la somma per la corrispondente potenza positiva delle radici dell'equazione in y.

261. Per esempio, trovare la somma delle potenze m^{me} delle radici dell'equazione $x^2-px+q=0$.

Qui $$\frac{f(x)}{x^2} = 1-\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right);$$

$$-\log\frac{f(x)}{x^2} = -\log\left\{1-\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{m}\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)^m+\ldots$$

Il coefficiente completo di $\frac{1}{x^m}$ si può ottenere con la scelta dai varii termini del valore di $-\log\frac{f(x)}{x^2}$ nei quali si può trovare questa potenza di x; questi termini scritti in ordine inverso sono

$$\frac{1}{m}\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)^m+\frac{1}{m-1}\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)^{m-1}+\frac{1}{m-2}\left(\frac{p}{x}-\frac{q}{x^2}\right)^{m-2}+\ldots$$

Il coefficiente di $\frac{1}{x^m}$ è quindi

$$\frac{1}{m}p^m - \frac{1}{m-1}\frac{m-1}{1}p^{m-2}q + \frac{1}{m-2}\frac{(m-2)(m-3)}{1\cdot 2}p^{m-4}q^2 - \dots$$

Così $S_m = p^m - mp^{m-2}q + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}p^{m-4}q^2 - \dots$

$$\dots + (-1)^r \frac{m(m-r-1)\dots\dots(m-2r+1)}{\underline{|r}}p^{m-2r}q^r + \dots$$

Supponiamo $q=1$, allora l'equazione quadratica è un'equazione reciproca, e le sue radici sono della forma a ed $\frac{1}{a}$; si vegga l'Art. 133. Così abbiamo $a+\frac{1}{a}=p$, ed inoltre

$$a^m + \frac{1}{a^m} = p^m - mp^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}p^{m-4} - \dots$$

$$+ (-1)^r \frac{m(m-r-1)\dots(m-2r+1)}{\underline{|r}}p^{m-2r} + \dots$$

Abbiamo così ottenuto un'espressione generale per $a^m + \frac{1}{a^m}$ in termini delle potenze di $a+\frac{1}{a}$; si vegga l'Art. 138.

262. Ancora, si voglia trovare la somma delle m^{me} potenze delle radici dell'equazione $x^n - 1 = 0$.

Qui $$\frac{f(x)}{x^n} = 1 - \frac{1}{x^n},$$

$$-\log\frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{2x^{2n}} + \frac{1}{3x^{3n}} + \frac{1}{4x^{4n}} + \dots$$

Qui il coefficiente di $\frac{1}{x^m}$ è zero a meno che m non sia un multiplo di n, ed allora il coefficiente è $\frac{n}{m}$; sicchè $S_m=0$ a meno che m non sia un multiplo di n, ed allora $S_m=n$.

Questo risultato è spesso utile, e daremo tre applicazioni di esso nei tre Articoli seguenti.

263. Mostreremo in qual modo trovare la somma di termini scelti da una data serie.

Supponiamo $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ *all'infinito,* e si voglia trovare la somma della serie

$$a_m x^m + a_{m+n} x^{m+n} + a_{m+2n} x^{m+2n} + \ldots\ldots \textit{all'infinito.}$$

Dinotino α, β, $\gamma, \ldots$ le radici n^{me} dell'unità, cioè, le n radici dell'equazione $x^n - 1 = 0$. Si moltiplichino i due membri della data identità per α^{n-m}, indi si muti x in αx; così

$$\alpha^{n-m}\varphi(\alpha x) = a_0 \alpha^{n-m} + a_1 \alpha^{n-m+1} x + a_2 \alpha^{n-m+2} x^2 + \ldots$$

Similmente

$$\beta^{n-m}\varphi(\beta x) = a_0 \beta^{n-m} + a_1 \beta^{n-m+1} x + a_2 \beta^{n-m+2} x^2 + \ldots,$$

$$\gamma^{n-m}\varphi(\gamma x) = a_0 \gamma^{n-m} + a_1 \gamma^{n-m+1} x + a_2 \gamma^{n-m+2} x^2 + \ldots,$$

e così di seguito.

Si aggiungano insieme le n identità che si possono così formare; allora nel secondo membro avremo n volte la serie richiesta, per l'Art. 262; così

$$a_m x^m + a_{m+n} x^{m+n} + a_{m+2n} x^{m+2n} + \ldots$$
$$= \frac{1}{n}\left\{\alpha^{n-m}\varphi(\alpha x) + \beta^{n-m}\varphi(\beta x) + \gamma^{n-m}\varphi(\gamma x) + \ldots\right\}.$$

Come un esempio troveremo la somma di

$$x + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \frac{x^7}{\lfloor 7} + \ldots \textit{all'infinito.}$$

Qui $\qquad m = 1, \quad n = 3, \quad \varphi(x) = e^x.$

Così la somma richiesta

$$= \frac{1}{3}\left\{\alpha^2\varphi(\alpha x) + \beta^2\varphi(\beta x) + \gamma^2\varphi(\gamma x)\right\}.$$

Ora $\quad \alpha = 1, \quad \beta = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \gamma = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$

Quindi $$\varphi(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{-3}}{2}}$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\varphi(\gamma x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

E finalmente la somma richiesta è

$$\frac{1}{3}\,e^{x} - \frac{1}{3}\,e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

264. Ancora, per mezzo dell'Art. 262 possiamo dimostrare il teorema seguente; l'espressione $(x+y)^n - x^n - y^n$ è divisibile per x^2+xy+y^2 se n è un intero dispari positivo non divisibile per 3, ed è divisibile per $(x^2+xy+y^2)^2$ se n è un intero positivo della forma $6m+1$.

Siano 1, α, β, le tre radici cubiche dell'unità, cioè, le tre radici dell'equazione $x^3-1=0$. Allora il prodotto di queste radici è 1, cioè, $\alpha\beta=1$, per l'Art. 45; ed $1+\alpha^m+\beta^m=0$, purchè m non sia un multiplo di 3, per l'Art. 262.

Così $$x^2+xy+y^2 = (x-\alpha y)(x-\beta y).$$

Quindi $(x+y)^n - x^n - y^n$ è divisibile per x^2+xy+y^2 purchè essa svanisca quando $x=\alpha y$, e quando $x=\beta y$; ed è divisibile per $(x^2+xy+y^2)^2$, purchè la sua funzione derivata *anche* svanisca quando $x=\alpha y$, e quando $x=\beta y$: questa funzione derivata, per l'Art. 11, è

$$n(x+y)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Quando $x=\alpha y$ abbiamo

$$(x+y)^n - x^n - y^n = y^n\left\{(1+\alpha)^n - \alpha^n - 1\right\} = y^n\left\{(-\beta)^n - \alpha^n - 1\right\},$$

e questa svanisce quando n è un intero dispari non divisibile per 3.

Inoltre, quando $x=\alpha y$,

$$n(x+y)^{n-1} - nx^{n-1} = ny^{n-1}\left\{(1+\alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}\right\} = ny^{n-1}\left\{(-\beta)^{n-1} - \alpha^{n-1}\right\};$$

questa svanisce se $n-1$ è un intero pari ed un multiplo di 3, poichè $\alpha^3=1$, e $\beta^3=1$. E se $n-1$ è un intero pari ed un multiplo di 3, ne segue che n è un intero dispari e non divisibile per 3, sicchè $(x+y)^n-x^n-y^n$ anche svanisce.

Gli stessi risultati si otterrebbero ponendo βy per x.

Comptes Rendus..... Vol. IX. pag. 360.

265. Come ultima applicazione dell'Art. 262 dimostreremo il teorema seguente.

Dinoti S la somma della serie

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{\lfloor 3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{\lfloor 4}+\ldots$$
$$+(-1)^{r-1}\frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{\lfloor r}+\ldots$$

Allora $S=\frac{3}{n}$ se n è un intero dispari positivo divisibile per 3,

$S=0$ se n è un intero dispari positivo non divisibile per 3,

$S=-\frac{1}{n}$ se n è un intero pari positivo divisibile per 3,

$S=\frac{2}{n}$ se n è un intero pari positivo non divisibile per 3.

Nell'Art. 261 si ponga xy per q ed $x+y$ per p, sicchè $S_n=x^n+y^n$; così, se n è un intero positivo,

$$(x+y)^n-x^n-y^n=nxy(x+y)\left\{(x+y)^{n-3}-\frac{n-3}{2}xy(x+y)^{n-5}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-4)(n-5)}{\lfloor 3}(xy)^2(x+y)^{n-7}-\ldots\right\}\ldots(1).$$

Dinotino 1, α, β le tre radici cubiche dell'unità; si ponga $x=\alpha y$, allora il secondo membro di (1) diviene

$$n\alpha(1+\alpha)y^n\left\{(1+\alpha)^{n-3}-\frac{n-3}{2}\alpha(1+\alpha)^{n-5}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-4)(n-5)}{\lfloor 3}\alpha^2(1+\alpha)^{n-7}-\ldots\right\}.$$

Ma $\alpha\beta=1$, e quindi $\beta^2=\alpha\beta^3=\alpha$; inoltre $\alpha+\beta+1=0$, sicchè

$-\beta=\alpha+1$; così $\alpha=(\alpha+1)^2$. Quindi il secondo membro di (1) si riduce ad

$$n(1+\alpha)^n y^n\left\{1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}-\ldots\right\},$$

cioè $$n(-\beta)^n y^n S.$$

Inoltre quando $x=\alpha y$ il primo membro di (1) diviene

$$y^n\left\{(1+\alpha)^n-\alpha^n-1\right\}, \text{ cioè, } y^n\left\{(-\beta)^n-\alpha^n-1\right\}.$$

Quindi $$(-\beta)^n-\alpha^n-1=n(-\beta)^n S \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Se n è un intero dispari divisibile per 3, il primo membro di (2) è eguale a -3 per l'Art. 262; e quindi $-3=-n\beta^n S=-nS$; onde $S=\frac{3}{n}$.

Se n è un intero dispari non divisibile per 3, il primo membro di (2) è zero per l'Art. 262; e quindi $S=0$.

Se n è un intero pari divisibile per 3, il primo membro di (2) è -1, ed il secondo membro è nS; quindi $S=-\frac{1}{n}$.

Se n è un intero pari non divisibile per 3, il primo membro di (2) è $\beta^n-\alpha^n-1$, cioè $2\beta^n$, poichè $\alpha^n+\beta^n+1=0$; così $2\beta^n=n\beta^n S$, e quindi $S=\frac{2}{n}$.

Si deve osservare che la serie dinotata da S consiste di un numero *finito* di termini; infatti se $n=2m$ o $2m+1$ vi sono m termini nella serie.

Crelle *Mathematical Journal*, Vol. xx. p. 321.

Questo Articolo serve ad illustrare il presente soggetto: ma osserviamo che il risultato si può ottenere più semplicemente con altro metodo.

È conosciuto, per la *Trigonometria Piana,* che

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n-n(2\cos\theta)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\cos\theta)^{n-4}-$$

$$\ldots+(-1)^r\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{\underline{|r}}(2\cos\theta)^{n-2r}+\ldots$$

Si ponga $\theta = \frac{\pi}{3}$; quindi, trasponendo e dividendo per n, otteniamo

$$S = \frac{1}{n}\left(1 - 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

266. Come un altro esempio del teorema dell'Art. 260 mostreremo in qual modo esprimere $x^n + y^n + (-x-y)^n$ per mezzo di $x^2 + xy + y^2$, e di $xy(x+y)$.

Sia $$a = x^2 + xy + y^2, \quad b = xy(x+y),$$

e si ponga z per $-x-y$.

Allora $$x + y + z = 0,$$

$$xy + yz + zx = xy - (x+y)^2 = -a,$$

$$xyz = -b;$$

così x, y, e z sono le radici dell'equazione cubica

$$t^3 - at + b = 0;$$

e quindi $\frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n)$ è eguale al coefficiente di $\frac{1}{t^n}$ nello sviluppo di $-\log\left(1 - \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t^3}\right)$.

Ora $$-\log\left(1 - \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t^3}\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(a - \frac{b}{t}\right) + \frac{1}{2t^4}\left(a - \frac{b}{t}\right)^2 + \frac{1}{3t^6}\left(a - \frac{b}{t}\right)^3 + \dots$$

Possiamo quindi sviluppare $\left(a - \frac{b}{t}\right)^2$, $\left(a - \frac{b}{t}\right)^3$, ... e formare il coefficiente di una potenza assegnata di $\frac{1}{t}$.

Se n è un numero pari otteniamo così una formola per

$$(x+y)^n + x^n + y^n;$$

e se n è un numero dispari per

$$(x+y)^n - x^n - y^n.$$

I seguenti sono casi speciali:

$$(x+y)^7-x^7-y^7=7a^2b=7\,(x^2+xy+y^2)^2\,xy\,(x+y),$$

$$(x+y)^8+x^8+y^8=2a^4+8ab^2$$
$$=2(x^2+xy+y^2)\{(x^2+xy+y^2)^8+4x^2y^2(x+y)^2\}.$$

Le formole generali si possono ottenere facilmente ponendo $2m$ e $2m+1$ per n. Così si troverà che

$$\frac{(x+y)^{2m}+x^{2m}+y^{2m}}{2m}=\frac{a^m}{m}+\frac{m-2}{1\cdot 2}a^{m-3}b^2+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{\lfloor 4}a^{m-6}b^4$$
$$+\ldots+\frac{(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-3r+1)}{\lfloor 2r}a^{m-3r}b^{2r}+\ldots;$$

e che

$$\frac{(x+y)^{2m+1}-x^{2m+1}-y^{2m+1}}{2m+1}=a^{m-1}b+\frac{(m-2)(m-3)}{\lfloor 3}a^{m-4}b^3+\ldots$$
$$+\frac{(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-3r)}{\lfloor 2r+1}a^{m-3r-1}b^{2r+1}+\ldots$$

267. Si è proposto di far uso dei valori delle somme delle potenze delle radici di un'equazione per approssimare una radice dell'equazione; daremo un cenno di questo metodo tratto dal *Treatise on the Theory of Algebraical Equations* di Murphy.

Dinotino a, b, c, ... le radici di un'equazione; si suppongano esse tutte reali ed a sia numericamente la più grande. Abbiamo

$$\frac{S_{m+1}}{S_m}=\frac{a^{m+1}+b^{m+1}+c^{m+1}+\ldots}{a^m+b^m+c^m+\ldots}$$
$$=a\,\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}+\left(\frac{c}{a}\right)^{m+1}+\ldots}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{m}+\left(\frac{c}{a}\right)^{m}+\ldots}$$

Così se si prende m sufficientemente grande il secondo membro si può rendere tanto vicino quanto ci piace ad a, cioè, al valore della radice numericamente più grande.

268. Possiamo ora esaminare sino a qual punto il risultato dell'Articolo precedente è modificato dalla presenza di radici immaginarie. Sia $\beta+\gamma\sqrt{-1}$ e $\beta-\gamma\sqrt{-1}$ una coppia di radici immaginarie

coniugate; la loro somma è 2β ed il loro prodotto è $\beta^2+\gamma^2$, che è il quadrato del loro *modulo*.

Ora $$\beta \pm \gamma\sqrt{-1} = \mu\left(\frac{\beta}{\mu} \pm \frac{\gamma}{\mu}\sqrt{-1}\right).$$

Si ponga $$\frac{\beta}{\mu} = \cos\theta, \text{ e } \frac{\gamma}{\mu} = \operatorname{sen}\theta,$$

sicchè $$\tan\theta = \frac{\gamma}{\beta} \text{ e } \mu^2 = \beta^2+\gamma^2;$$

così μ è il modulo. Quindi le radici coniugate si possono porre nella forma $\mu(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta)$; e pel teorema di De Moivre la somma delle m^{me} potenze delle due radici è $2\mu^m \cos m\theta$.

Così se il valore numerico della più grande radice reale è maggiore del più grande modulo delle radici immaginarie, $\frac{S_{m+1}}{S_m}$ tenderà ad un limite quando m cresce indefinitamente, cioè, alla radice numericamente più grande; ma se vi è un modulo delle radici immaginarie maggiore della radice numericamente più grande, non vi sarà alcun valore limite di $\frac{S_{m+1}}{S_m}$.

Esempio, $x^3-2x-5=0$. Qui la serie S_1, S_2, S_3,..... è 0, 4, 15, 8, 50, 91, 140, 432, 735, 1564, 3630, 6803, 15080, 31756, 64175, 138912, 287130, 598699,..... Dividendo ciascun termine pel precedente, osserviamo una tendenza ad un limite un poco più grande di 2, sicchè possiamo conchiudere che vi è una radice reale un poco più grande di 2. L'esempio però non è molto favorevole per il metodo; infatti poichè il prodotto di tutte le radici è 5, e la radice reale è piuttosto maggiore di 2, il prodotto delle altre due radici è presso a poco $2\cdot5$. Queste due radici sono immaginarie per l'Art. 172, e siccome il loro modulo è la radice quadrata del loro prodotto, il modulo è più grande di $1\cdot5$; così il modulo non è molto piccolo in paragone della radice reale, e così l'espressione $\frac{S_{m+1}}{S_m}$ si avvicina lentamente verso il suo limite.

269. In alcuni casi possiamo ottenere il prodotto delle due radici numericamente più grandi, con un metodo simile a quello nell'Art. 267.

Infatti
$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots,$$
$$S_{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1} + \ldots,$$
$$S_{m+2} = a^{m+2} + b^{m+2} + c^{m+2} + \ldots.$$

Quindi
$$S_m S_{m+2} - S^2_{m+1} = a^m b^m (a-b)^2 + a^m c^m (a-c)^2 + b^m c^m (b-c)^2 + \ldots$$

Dinoteremo questo con u_m, sicchè
$$u_m = a^m b^m (a-b)^2 \left\{ 1 + \frac{c^m}{b^m}\left(\frac{a-c}{a-b}\right)^2 + \frac{c^m}{a^m}\left(\frac{b-c}{a-b}\right)^2 + \ldots \right\}.$$

Quindi procedendo come negli Art. 267 e 268 possiamo ottenere i risultati seguenti.

(1) Se tutte le radici sono reali $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ si può rendere tanto vicino quanto ci piace al prodotto delle due radici numericamente più grandi crescendo m sufficientemente.

(2) Se vi sono radici reali numericamente più grandi del modulo di una radice immaginaria qualunque, vi è un valore limite di $\frac{u_{m+1}}{u_m}$, cioè il prodotto delle due più grandi fra queste radici.

(3) Se vi è un modulo di radici immaginarie maggiore della radice quadrata del prodotto delle due radici reali numericamente più grandi, vi è un valore limite di $\frac{u_{m+1}}{u_m}$, cioè, il quadrato di quel modulo, o sia il prodotto delle corrispondenti radici immaginarie.

(4) Così il solo caso in cui $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ può mancare di avere un limite si è quando vi è una radice reale, e solamente una, numericamente maggiore del più grande modulo delle radici immaginarie. In questo caso quella radice reale si può trovare con l'Art. 267.

270. Possiamo anche ottenere in alcuni casi la somma di due radici di un'equazione con un simile metodo.

Dai valori di S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, ed S_{m+3}, otterremo
$$S_m S_{m+3} - S_{m+1} S_{m+2} = a^m b^m (a+b)(a-b)^2 + a^m c^m (a+c)(a-c)^2 + b^m c^m (b+c)(b-c)^2 + \ldots;$$

dinoteremo questo con v_m. Allora u_m avendo il significato assegnato nell'Articolo precedente, troveremo che vi è un limite di $\frac{v_m}{u_m}$ nei casi indicati nell'Articolo precedente, e che questo limite è la

somma delle radici numericamente più grandi, o la somma delle due radici immaginarie col più grande modulo.

271. Così nei casi (1), (2), e (3) dell'Art. 269 possiamo ottenere il prodotto di due radici con l'Art. 269 e la loro somma con l'Art. 270; e nei casi (1) e (2) possiamo ottenere la somma di due radici con l'Art. 270 e la più grande di esse con l'Art. 267.

272. Esempio, $x^4+x^3+4x^2-4x+1=0$.

Qui otteniamo i seguenti valori:

per $S_1, S_2, \ldots -1, -7, 23, -3, -116, 227, 202, -1571, \ldots$;

per $u_1, u_2, \ldots -72, -508, -2677, -14137, -74961, -397421, \ldots$;

per $v_1, v_2, \ldots 164, 881, 4873, 25726, 136382, \ldots$

Qui non si ottiene alcun limite definito dividendo ciascun termine nella serie $S_1, S_2, \ldots$ per quello che lo precede; siamo quindi sicuri dell'esistenza di radici immaginarie. Dividendo ciascun termine della serie $u_1, u_2, \ldots$ per quello che lo precede, otteniamo quozienti che indicano $5\cdot301\ldots$ come il valore del prodotto di due radici. Dividendo ciascun termine della serie $v_1, v_2, \ldots$ pel termine corrispondente della serie $u_1, u_2, \ldots$ otteniamo quozienti che indicano $-1\cdot819\ldots$ come la somma di queste due radici. Da questi valori possiamo ottenere valori approssimati di due radici immaginarie.

Poichè la somma di tutte e quattro le radici dell'equazione è -1, ed il loro prodotto è 1, la somma delle due rimanenti radici è $\cdot819\ldots$ ed il loro prodotto $\frac{1}{5\cdot301\ldots}$; queste due radici quindi sono anche immaginarie.

Così troveremo in questo esempio che il modulo della prima coppia di radici immaginarie è circa cinque volte il modulo dell'altra coppia. Quindi con la notazione dell'Art. 270 troveremo che prendendo $u_m=a^m b^m (a-b)^2$ e trascurando gli altri termini, l'errore è circa $\frac{1}{5^m}$ dell'intera quantità; e quindi possiamo giudicare dell'accuratezza del nostro risultato. Per esempio; abbiamo dato sopra i valori di u_m sino ad u_5 ed u_6 sicchè possiamo dire di aver trovato il prodotto delle radici con un errore di circa solamente $\left(\frac{1}{5^5}\right)^{\text{ma}}$ parte del tutto.

XXII. ELIMINAZIONE.

273. Supponiamo che si abbiano a risolvere due equazioni simultanee contenenti due quantità ignote; vi sono alcuni casi in cui la risoluzione si può effettuare prontamente. Supponiamo che x ed y dinotino le quantità ignote; allora se una delle equazioni contiene x^m e nessun'altra potenza di x, possiamo trovare immediatamente da questa equazione x^m espresso in y e sostituirlo nell'altra equazione; otterremo così un'equazione con la sola y, e le radici di questa equazione si possono trovare esattamente o per approssimazione con i metodi già spiegati.

Ancora supponiamo che le equazioni siano rappresentate da $A=0$, e $B=0$, e che A e B si possano decomporre prontamente in fattori; supponiamo per esempio che $A=UU'U''$ e $B=VV'$. Allora tutte le soluzioni delle equazioni proposte si ottengono risolvendo le equazioni simultanee $U=0$ e $V=0$, $U=0$ e $V'=0$, $U'=0$ e $V=0$, $U'=0$ e $V'=0$, $U''=0$ e $V=0$, $U''=0$ e $V'=0$. Così la risoluzione delle equazioni proposte si fa dipendere dalla risoluzione di altre equazioni di gradi inferiori.

Può accadere che uno dei fattori di A sia identico con uno dei fattori di B; per esempio, supponiamo che U e V siano identici. Allora tutti i valori di x ed y che soddisfano l'equazione $U=0$ soddisferanno le equazioni simultanee $A=0$ e $B=0$. Così se U contiene sì x che y, possiamo assegnare qualunque valore ci piace ad una delle quantità ignote e determinare il valore corrispondente dell'altra, ed ottenere così tante soluzioni quante ci piace. Se U contiene solamente una delle quantità ignote possiamo soddisfare le equazioni $A=0$ e $B=0$, dando a quella quantità ignota un valore dedotto dall'equazione $U=0$, e qualunque valore ci piace all'altra quantità ignota.

274. Abbiamo già mostrato come per mezzo della teoria delle funzioni simmetriche possiamo eliminare una delle quantità ignote da due equazioni, e così ottenere un'equazione finale che contiene solamente l'altra quantità ignota. Ci accingiamo ora a spiegare un altro metodo per eseguire l'eliminazione, il quale è fondato sul procedimento per trovare la massima comune misura di due espressioni algebriche.

275. Le due equazioni simultanee siano dinotate da $f_1(x, y)=0$ ed $f_2(x, y)=0$. Supponiamo che $x=\alpha$ ed $y=\beta$ siano valori che ve-

rifichino queste equazioni; allora l'equazioni $f_1(x,\beta)=0$ ed $f_2(x,\beta)=0$ sono soddisfatte dal valore $x=\alpha$. Quindi $f_1(x,\beta)$ ed $f_2(x,\beta)$ debbono avere una comune misura; questa comune misura deve essere tale che quando si eguaglia a zero essa fornisca il valore α, ed anche ogni altro valore dal quale in unione con $y=\beta$ le equazioni proposte siano soddisfatte.

Supponiamo quindi che si ordinino $f_1(x,y)$ ed $f_2(x,y)$ secondo le potenze discendenti di x, e si proceda nel modo ordinario a trovare la loro massima comune misura, spingendo l'operazione finchè si giunga ad un resto che è una funzione della sola y, che diciamo $\varphi(y)$. Allora nessun valore di y sarà ammissibile se non rende $\varphi(y)=0$; poichè a meno che $\varphi(y)$ non svanisca $f_1(x,y)$ ed $f_2(x,y)$ non hanno alcuna misura comune e quindi non svaniscono simultaneamente. Però non è vero reciprocamente che ogni valore di y che annulla $\varphi(y)$ sia necessariamente ammissibile. Poichè può accadere che nel procedimento i coefficienti di alcune delle potenze di x siano frazioni che contengono y *nei loro denominatori;* ed un valore di y che soddisfa l'equazione $\varphi(y)=0$ può annullare alcuni di questi denominatori, e così introdurre quantità infinite o indeterminate. Supponiamo, per esempio, di avere

$$f_1(x,y)=qf_2(x,y)+\varphi(y).$$

Allora se q è un'espressione intera non sarà resa infinita da alcun valore finito di y, ed ogni valore di y che annulla $\varphi(y)$, combinato col corrispondente valore di x dedotto dall'equazione $f_2(x,y)=0$, annullerà $f_1(x,y)$. Ma se q è una frazione, contenente y nel suo denominatore, q può diventare infinita quando $\varphi(y)$ svanisce, ed $f_1(x,y)$ non svanirà necessariamente quando $\varphi(y)=0$ ed $f_2(x,y)=0$. La stessa eccezione può aver luogo quando conduciamo il procedimento nel modo ordinario, ed introduciamo fattori che non sono funzioni di x per evitare coefficienti frazionari. Supponiamo, per esempio, che si moltiplichi $f_1(x,y)$ per una quantità c per evitare i coefficienti frazionari i quali sono funzioni di y; e supponiamo di avere ora

$$cf_1(x,y)=qf_2(x,y)+\varphi(y).$$

Se troviamo y dall'equazione $\varphi(y)=0$, e quindi x dall'equazione $f_2(x,y)=0$, i valori così ottenuti debbono necessariamente annullare $cf_1(x,y)$; ma non segue da ciò che $f_1(x,y)$ svanisca, poichè può stare che il valore preso per y annulli c.

Quindi si richiede una regola che faccia discernere le soluzioni ammissibili, ed a questa regola ora passiamo. Supporremo che nel

trovare la massima comune misura siano state prese le solite precauzioni per evitare coefficienti frazionari. Possiamo supporre che nelle equazioni che dinoteremo con $A=0$ e $B=0$, nè A nè B contenga alcun fattore funzione della *sola* y; poichè un tal fattore si può considerare separatamente e si possono trovare tutte le soluzioni che dipendono da esso. Il metodo che andiamo a spiegare è dovuto ai Sig.ri Labatie e Sarrus; lo esporremo come nell'*Algebra* dei Sig.ri Mayer e Choquet.

276. Le due equazioni simultanee siano dinotate da $A=0$ e $B=0$; supporremo che nè A nè B abbia un fattore funzione della sola y, e che B non sia di un grado superiore in x in paragone di A. Dinoti c il fattore pel quale deve essere moltiplicata A affinchè essa sia divisibile per B; dinoti q il quoziente ed rR il resto, in cui r è una funzione della sola y. Dinoti c_1 il fattore pel quale deve essere moltiplicata B affinchè essa sia divisibile per R; sia q_1 il quoziente ed r_1R_1 il resto, in cui r_1 è una funzione della sola y. Si proceda in questo modo, e supponiamo, per esempio, che alla quarta divisione si abbia un resto che non contiene x, e che dinotiamo con r_3. Così avremo le seguenti identità:

$$\left.\begin{aligned} c\,A &= q\,B + r\,R\,, \\ c_1B &= q_1R + r_1R_1, \\ c_2R &= q_2R_1 + r_2R_2, \\ c_3R_1 &= q_3R_2 + r_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sia d la massima comune misura di c ed r, d_1 la massima comune misura di $\frac{cc_1}{d}$ ed r_1, d_2 la massima comune misura di $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ ed r_2, d_3 la massima comune misura di $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}$ ed r_3. Dimostreremo ora che le soluzioni delle equazioni $A=0$ e $B=0$ si otterranno risolvendo i seguenti sistemi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{d} &= 0 \quad \text{e} \quad B=0, \\ \frac{r_1}{d_1} &= 0 \quad \text{ed} \quad R=0, \\ \frac{r_2}{d_2} &= 0 \quad \text{ed} \quad R_1=0, \\ \frac{r_3}{d_3} &= 0 \quad \text{ed} \quad R_2=0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

cioè, dimostreremo in primo luogo che tutte le soluzioni ottenute

da (2) soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$, ed in secondo luogo che tutti i valori di x ed y che soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$ sono inclusi tra le soluzioni ottenute dal sistema (2).

Si dividano i due membri della prima identità (1) per d; così

$$\frac{c}{d}A = \frac{q}{d}B + \frac{r}{d}R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ora, per ipotesi, $\frac{c}{d}$ ed $\frac{r}{d}$ sono funzioni intere di y; così $\frac{qB}{d}$ è anche una funzione intera; ma per ipotesi B non ha alcun fattore che sia funzione della sola y, e quindi d deve dividere q.

L'identità (3) mostra che i valori di x ed y che soddisfano le equazioni $\frac{r}{d}=0$ e $B=0$ annullano $\frac{c}{d}A$; ma $\frac{c}{d}$ ed $\frac{r}{d}$ per ipotesi non hanno alcun fattore comune, e quindi questi valori annullano A. Quindi tutte le soluzioni delle equazioni $\frac{r}{d}=0$ e $B=0$ soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$.

Ancora, si moltiplichino i due membri dell'identità (3) per c_1, e si sostituisca per c_1B il suo equivalente ottenuto dalla seconda delle identità (1); così

$$\frac{cc_1}{d}A = \frac{c_1r + qq_1}{d}R + \frac{q}{d}r_1R_1.$$

L'espressione $\frac{c_1r+qq_1}{d}$ è intera, poichè r e q sono divisibili per d; inoltre questa espressione è divisibile per d_1, poichè d_1 divide $\frac{cc_1}{d}$ ed r_1 e non divide R. Si divida per d_1; allora, per brevità, ponendo M per $\frac{q}{d}$ ed M_1 per $\frac{c_1r+qq_1}{dd_1}$, abbiamo

$$\frac{cc_1}{dd_1}A = M_1R + \frac{r_1}{d_1}MR_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Si moltiplichino i due membri della seconda delle identità (1) per $\frac{c}{d}$; così

$$\frac{cc_1}{d}B = \frac{cq_1}{d}R + \frac{c}{d}r_1R_1.$$

Poichè d_1 dividerà $\frac{cc_1}{d}$ ed r_1, esso dividerà $\frac{cq_1}{d}R$; ma R non è divisibile per d_1 e quindi $\frac{cq_1}{d}$ deve essere divisibile. Si divida per d_1; allora per brevità, ponendo N per $\frac{c}{d}$ ed N_1 per $\frac{cq_1}{dd_1}$, abbiamo

$$\frac{cc_1}{dd_1}B = N_1R + \frac{r_1}{d_1}NR_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Le identità (4) e (5) mostrano che tutti valori di x ed y che annullano $\frac{r_1}{d_1}$ ed R annullano $\frac{cc_1}{dd_1}A$ e $\frac{cc_1}{dd_1}B$; ma $\frac{cc_1}{dd_1}$ ed $\frac{r_1}{d_1}$ non hanno alcun fattore comune, e quindi tutte le soluzioni delle equazioni $\frac{r_1}{d_1}=0$ ed $R=0$ soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$.

Ancora, si moltiplichino i due membri dell'identità (4) per c_2, e si sostituisca per c_2R il suo equivalente dalla terza delle identità (1); così

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1}A = \left(q_2M_1 + \frac{c_2r_1}{d_1}M\right)R_1 + r_2M_1R_2.$$

Per ipotesi d_2 divide il primo membro di questa identità, e divide anche r_2; esso deve dividere perciò $\left(q_2M_1 + \frac{c_2r_1}{d_1}M\right)R_1$, ma R_1 non è divisibile per d_2; quindi $q_2M_1 + \frac{c_2r_1}{d_1}M$ è divisibile per d_2. Si dinoti il quoziente con M_2; così

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}A = M_2R_1 + \frac{r_2}{d_2}M_1R_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Si moltiplichino i due membri dell'identità (5) per c_2, e si sostituisca per c_2R il suo equivalente dalla terza delle identità (1); così

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1}B = \left(q_2N_1 + \frac{c_2r_1}{d_1}N\right)R_1 + r_2N_1R_2.$$

Possiamo dimostrare come sopra che il coefficiente di R_1 è divisibile per d_2, e dinotando il quoziente con N_2 abbiamo

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}B = N_2R_1 + \frac{r_2}{d_2}N_1R_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Le identità (6) e (7) mostrano che tutt'i valori di x ed y che annullano $\frac{r_2}{d_2}$ ed R_1, annullano i primi membri di queste identità; ma $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}$ ed $\frac{r_2}{d_2}$ non hanno alcun fattore comune, e quindi tutte le soluzioni delle equazioni $\frac{r_2}{d_2}=0$ ed $R_1=0$ soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$.

Nello stesso modo come sopra se moltiplichiamo i due membri delle identità (6) e (7) per c_3, e sostituiamo per c_3R_1 il suo equivalente dalla quarta delle identità (1), otteniamo

$$\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}A=M_3R_2+\frac{r_3}{d_3}M_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

$$\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}B=N_3R_2+\frac{r_3}{d_3}N_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

in cui M_3 ed N_3 sono funzioni intere di x ed y. Le identità (8) e (9) mostrano che tutte le soluzioni delle equazioni $\frac{r_3}{d_3}=0$ ed $R_2=0$ soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$.

Abbiamo così dimostrato la prima parte della proposizione, cioè, che tutte le soluzioni ottenute dal sistema delle equazioni (2) soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$; dobbiamo ora mostrare che tutt'i valori di x ed y che soddisfano le equazioni $A=0$ e $B=0$ sono inclusi tra le soluzioni ottenute dal sistema (2).

L'identità (3) può essere scritta

$$NA-MB=\frac{r}{d}R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

Si moltiplichi (4) per R e (5) per A e si sottragga; così

$$(M_1B-N_1A)R+(MB-NA)\frac{r_1}{d_1}R_1=0,$$

e quindi per (10)

$$(M_1B-N_1A)R-\frac{rr_1}{dd_1}RR_1=0,$$

e quindi

$$M_1B-N_1A=\frac{rr_1}{dd_1}R_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Si moltiplichi (6) per B e (7) per A e si sottragga; così

$$(M_2B - N_2A)R_1 + (M_1B - N_1A)\frac{r_2}{d_2}R_2 = 0,$$

e quindi per (11)

$$(M_2B - N_2A)R_1 + \frac{rr_1r_2}{dd_1d_2}R_1R_2 = 0,$$

e quindi

$$M_2B - N_2A = -\frac{rr_1r_2}{dd_1d_2}R_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Similmente da (8) e (9) deduciamo

$$M_3B - N_3A = \frac{rr_1r_2r_3}{dd_1d_2d_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

L'identità (13) mostra che tutt'i valori di x ed y che annullano A e B annullano $\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}\frac{r_3}{d_3}$; sicchè uno dei fattori $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1}$, $\frac{r_2}{d_2}$, ed $\frac{r_3}{d_3}$ deve svanire. Quindi le equazioni

$$\frac{r}{d} = 0, \frac{r_1}{d_1} = 0, \frac{r_2}{d_2} = 0, \text{ ed } \frac{r_3}{d_3} = 0,$$

somministrano tutt'i valori ammissibili di y.

Supponiamo quindi che $x = \alpha$ ed $y = \beta$ siano valori che soddisfino le equazioni $A = 0$ e $B = 0$.

Supponiamo in primo luogo che β sia una radice dell'equazione $\frac{r}{d} = 0$; allora è manifesto che i valori $x = \alpha$ ed $y = \beta$ soddisfano le equazioni $\frac{r}{d} = 0$ e $B = 0$.

In seguito supponiamo che β non sia una radice dell'equazione $\frac{r}{d} = 0$, ma sia una radice dell'equazione $\frac{r_1}{d_1} = 0$; poichè $\frac{r}{d}$ non svanisce quando $y = \beta$, segue da (10) che i valori $x = \alpha$ ed $y = \beta$ annullano R, e così essi soddisfano le equazioni $\frac{r_1}{d_1} = 0$ ed $R = 0$.

In seguito supponiamo che β non sia una radice dell'equazione $\frac{r}{d} = 0$, nè dell'equazione $\frac{r_1}{d_1} = 0$, ma sia una radice dell'equazione $\frac{r_2}{d_2} = 0$; poichè $\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}$ non svanisce quando $y = \beta$, segue da (11) che

i valori $x=\alpha$ ed $y=\beta$ annullano R_1, e così essi soddisfano le equazioni $\frac{r_2}{d_2}=0$ ed $R_1=0$.

In seguito supponiamo che β non sia una radice di alcuna delle equazioni $\frac{r}{d}=0$, $\frac{r_1}{d_1}=0$, $\frac{r_2}{d_2}=0$, ma sia una radice dell'equazione $\frac{r_3}{d_3}=0$; poichè $\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}$ non svanisce quando $y=\beta$, segue da (12) che i valori $x=\alpha$ ed $y=\beta$ annullano R_2, e così essi soddisfano le equazioni $\frac{r_3}{d_3}=0$, ed $R_2=0$.

Questo dimostra la seconda parte della proposizione.

L'equazione $\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}\frac{r_3}{d_2}=0$ che dà tutt'i valori ammissibili di y si può chiamare *l'equazione finale* in y.

277. Esempi.

(1) $$x^3+3yx^2+(3y^2-y+1)x+y^3-y^2+2y=0,$$
$$x^2+2yx+y^2-y=0.$$

Qui abbiamo $x+2y$ per primo resto, sicchè $r=1$, ed y^2-y per secondo resto, che è indipendente da x. Le sole soluzioni sono quelle fornite da $\frac{r_1}{d_1}=0$ ed $R=0$, cioè, da $y^2-y=0$ ed $x+2y=0$.

(2) $$x^3+2yx^2+2y(y-2)x+y^2-4=0,$$
$$x^2+2yx+2y^2-5y+2=0.$$

Il primo resto è qui $(y-2)(x+y+2)$; sicchè $r=y-2$ ed $R=x+y+2$; il secondo resto è y^2-5y+6, che è indipendente da x. Le soluzioni sono quelle fornite da $\frac{r}{d}=0$ e $R=0$, cioè, da $y-2=0$ ed $x^2+2yx+2y^2-5y+2=0$; e quelle fornite da $\frac{r_1}{d_1}=0$, ed $R=0$, cioè, da $y^2-5y+6=0$ ed $x+y+2=0$.

L'equazione finale in y è $(y-2)(y^2-5y+6)=0$.

(3) $$x^3+3yx^2-3x^2+3y^2x-6yx-x+y^3-3y^2-y+3=0,$$
$$x^3-3yx^2+3x^2+3y^2x-6yx-x-y^3+3y^2+y-3=0.$$

Il primo resto è $2(y-1)(3x^2+y^2-2y-3)$; il secondo resto è $8(y^2-2y)x$; ed il terzo è y^2-2y-3. Le soluzioni sono quelle fornite da

$$y-1=0, \text{ ed } x^3-3yx^2+3x^2+3y^2x-6yx-x-y^3+3y^2+y-3=0,$$

da $$y^2-2y=0, \text{ e } 3x^2+y^2-2y-3=0,$$

e da $$y^2-2y-3=0, \text{ ed } x=0.$$

L'equazione finale in y è $(y-1)(y^2-2y)(y^2-2y-3)=0$.

$$(4) \qquad (y-2)x^2-2x+5y-2=0,$$

$$yx^2-5x+4y=0,$$

Qui moltiplichiamo il primo membro della prima espressione per y per rendere possibile la divisione senza introdurre coefficienti frazionarii. Così $c=y$. Il primo resto è $(3y-10)x+y^2+6y$. Per continuare la divisione moltiplichiamo ora $yx^2-5x+4y$ per $3y-10$, ed eseguiamo la seguente operazione:

$$\begin{array}{l|l} (3y-10)x+y^2+6y & (3y-10)\,yx^2-(3y-10)\,5x+(3y-10)\,4y \quad yx \\ & \underline{(3y-10)\,yx^2+(y^2+6y)\,yx} \\ & -(y^3+6y^2+15y-50)\,x+12y^2-40y \end{array}$$

Quì o possiamo riguardare i termini nell'ultima linea come costituenti il secondo resto, o pure possiamo continuare l'operazione della divisione non essendo il resto rispetto al divisore di un grado inferiore in x; se adottiamo l'ultimo partito dobbiamo di nuovo moltiplicare per $3y-10$, il che darà origine allo stesso resto come se avessimo da principio moltiplicato per $(3y-10)^2$. Così continuiamo l'operazione come segue:

$$\begin{array}{l|l} -(y^3+6y^2+15y-50)(3y-10)x+(12y^2-40y)(3y-10) & -(y^3+6y^2+15y-50) \\ \underline{-(y^3+6y^2+15y-50)(3y-10)x-(y^3+6y^2+15y-50)(y^2+6y)} & \\ y^5+12y^4+87y^3-200y^2+100y & \end{array}$$

Abbiamo qui un resto indipendente da x, che è il valore di r_1; e d_1 qui è $=y$; sicchè le soluzioni sono quelle fornite da

$$y^4+12y^3+87y^2-200y+100=0, \text{ e } (3y-10)x+y^2+6y=0.$$

278. Le seguenti osservazioni si possono fare sul procedimento dell'Art. 276.

I. Possiamo sempre prendere c in modo che c ed r non abbiano alcun fattore comune. Infatti se d è la massima comune misura di c ed r la divisione di $\frac{c}{d}A$ per B si può effettuare senza introdurre coefficienti frazionarii, come apparisce dall'identità (3); così c non è il fattore più semplice che si può adoperare come moltiplicatore di A prima di dividere per B. Quindi scegliendo il fattore più semplice possiamo fare $d=1$.

Similmente possiamo prendere $c_1, c_2, \ldots$, tali che c_1 ed r_1 non avranno alcun fattore comune, e che c_2 ed r_2 non avranno alcun fattore comune, e così di seguito.

Quindi nell'insieme possiamo prendere $c, c_1, c_2, c_3, \ldots$ così che $d=1$, che d_1 sia la massima comune misura di c ed r_1, che d_2 sia la massima comune misura di $\frac{cc_1}{d_1}$ ed r_2, che d_3 sia la massima comune misura di $\frac{cc_1c_2}{d_1d_2}$ ed r_3, e così di seguito.

II. Supponiamo che il resto indipendente da x che è stato dinotato da r_3 sia zero; allora R_2 è una comune misura di A e B. Quindi le soluzioni delle equazioni $A=0$ e $B=0$ consistono, (1) di un numero infinito di valori di x ed y che si possono dedurre dalla sola equazione $R_2=0$, (2) dal numero finito di valori di x ed y che si possono ottenere risolvendo le equazioni $\frac{A}{R_2}=0$ e $\frac{B}{R_2}=0$. Ma poichè $r_3=0$ segue dalle identità (1) dell'Art. 276 che R_2 divide R ed R_1. Si dividano le identità (3), (4), (5), (6), (7), (10), (11), (12) dell'Art. 276 per R_2; otteniamo così nuove identità nelle quali A, B, R, R_1 ed R_2 sono rimpiazzate da $\frac{A}{R_2}$, $\frac{B}{R_2}$, $\frac{R}{R_2}$, $\frac{R_1}{R_2}$ ed $\frac{R_2}{R_2}$. Per mezzo di queste identità possiamo dimostrare, come nell'Art. 276, che tutte le soluzioni delle equazioni $\frac{A}{R_2}=0$ e $\frac{B}{R_2}=0$ si otterranno risolvendo i seguenti sistemi;

$$\frac{r}{d}=0 \text{ ed } \frac{B}{R_2}=0,$$

$$\frac{r_1}{d_1}=0 \text{ ed } \frac{R}{R_2}=0,$$

$$\frac{r_2}{d_2}=0 \text{ ed } \frac{R_1}{R_2}=0.$$

Per esempio, supponiamo

$$x^3 + yx^2 - (y^2 + 1)\,x + y - y^3 = 0,$$

ed
$$x^3 - yx^2 - (y^2 + 6y + 9)\,x + y^3 + 6y^2 + 9y = 0.$$

Qui la prima divisione dà $2\left\{yx^2+(3y+4)x-(y^3+3y^2+4y)\right\}$ per resto, sicchè possiamo prendere

$$R = yx^2 + (3y + 4)\,x - (y^3 + 3y^2 + 4y).$$

Per eseguire la seconda divisione si moltiplichi il dividendo per y, e dopo la prima divisione parziale si moltiplichi di nuovo per y per continuare la divisione. Allora otteniamo $8(y^2+3y+2)\,(x-y)$ per il resto r_1R_1. Si divida R per $x-y$ ed il quoziente è $yx+y^2+3y+4$, e non vi è alcun resto.

Così le soluzioni delle equazioni proposte consistono, (1) di un numero infinito di valori di x ed y che si possono dedurre dalla sola equazione $x-y=0$, (2) dal numero finito di valori di x ed y che si possono ottenere risolvendo le equazioni

$$y^2+3y+2=0 \quad \text{ed} \quad yx+y^2+3y+4=0$$

III. La dimostrazione nell' Art. 276 suppone implicitamente che i valori di x ed y siano *finiti;* però è possibile di avere soluzioni infinite di un' equazione. Supponiamo per esempio che $(y-1)x^2-2x+y^2=0$; allora finchè y non è eguale all'unità i due valori di x forniti da questa equazione quadratica sono finiti. Se y si avvicina indefinitamente all' unità un valore di x cresce indefinitamente. Così quando $y=1$ possiamo dire che x ha un valore infinito.

Non abbiamo incluso tali valori infiniti di x ed y nelle nostre investigazioni nell'Art. 276; questi si possono scoprire con facilità indipendentemente. Se, per esempio, vogliamo accertare se un valore infinito di x è ammissibile, possiamo porre $\frac{1}{x'}$ per x, indi liberare da frazioni, e supporre $x'=0$; abbiamo ora *due* equazioni in y, e se esse hanno una radice comune o più radici comuni, questa radice o queste radici combinate con un valore infinito di x si può dire che soddisfino le equazioni proposte.

XXIII. SVILUPPO DI UNA FUNZIONE IN SERIE.

279. Supponiamo di avere un'equazione tra due quantità ignote x ed y. Se potessimo risolvere l'equazione in modo da ottenere i valori di y espressi in x, potremmo sviluppare ciascun valore di y in una serie procedente secondo le potenze di x. Andiamo ora a spiegare un metodo per effettuare questi sviluppi dei valori di y in serie, senza di avere prima ottenuto i valori di y in termini finiti.

Il metodo nella sua forma completa è dovuto a Lagrange; esso fu suggerito da un procedimento dato da Newton che si chiama il *Parallelogrammo di Newton*. Per l'istoria del metodo, e per la completa informazione su di esso, lo studente può consultare le Memorie del Professore De Morgan nel primo volume del *Quarterly Journal of Mathematics* e nel nono volume delle *Cambridge Philosophical Transactions;* da queste memorie è stata tratta la breve esposizione del metodo che qui daremo. Una relazione del *Parallelogrammo di Newton* si troverà ancora nella traduzione dell'opera di Newton sulle *Linee del terzo Ordine* di C. R. M. Talbot, pubblicata nel 1861.

280. Sia dinotata l'equazione da

$$Ay^{\alpha}+By^{\beta}\ldots+Ky^{\varkappa}+\ldots+Sy^{\sigma}=0,$$

in cui A, B, ... K, ... S, sono tutte funzioni di x. Supponiamo disposti α, β, ... $\varkappa$, ... σ in ordine decrescente di grandezza algebrica; e durante la investigazione le parole come *maggiore* e *minore*, *massimo* e *minimo*, debbono avere il loro significato algebrico.

Sia A del grado a, cioè, si supponga x^a la massima potenza di x che si trova in A; sia B del grado b,.....,K del grado k,.....,S del grado s. Il nostro oggetto richiede ora la soluzione del problema dato nell'Articolo seguente.

281. Si cerca di determinare tutti i modi in cui si può prendere t affinchè due o più dei termini della serie seguente siano eguali e maggiori di ciascuno dei rimanenti:

$$a+\alpha t,\ b+\beta t,\ \ldots\ldots\ k+\varkappa t,\ \ldots\ldots\ s+\sigma t.$$

Incominciamo dal supporre che t sia $+\infty$; il primo termine è allora maggiore di ciascuno degli altri. A misura che t diminuisce

ciascun termine decresce, ma ciascun termine diminuisce più lentamente di ciascuno dei termini che lo precedono. Abbia t quel valore pel quale $a+\alpha t$ *per il primo* diviene eguale ad uno o più dei termini seguenti. Questo si trova prendendo il massimo valore di t che si può ottenere dalle equazioni

$$a+\alpha t=b+\beta t,\ \ a+\alpha t=c+\gamma t,\ \ldots\ a+\alpha t=k+\varkappa t,\ \ldots\ a+\alpha t=s+\sigma t,$$

cioè, il massimo valore di t deve essere trovato dal gruppo

$$\frac{b-a}{\alpha-\beta},\ \frac{c-a}{\alpha-\gamma},\ldots\ldots\ \frac{k-a}{\alpha-\varkappa},\ldots\ldots\ \frac{s-a}{\alpha-\sigma}.$$

Sia $\frac{k-a}{\alpha-\varkappa}$ il massimo di questi valori, se uno è maggiore di ciascuno degli altri; o pure se più sono eguali e maggiori di ciascuno dei rimanenti, sia $\frac{k-a}{\alpha-\varkappa}$ l'ultimo di essi; dinotiamo $\frac{k-a}{\alpha-\varkappa}$ con τ.

Continui t a diminuire dal valore τ finchè $k+\varkappa t$ *per il primo* diventa eguale ad uno o più degli analoghi termini seguenti. Questo valore di t si trova, come sopra, prendendo il massimo valore di t che si può ottenere dalle equazioni

$$k+\varkappa t=l+\lambda t,\ \ k+\varkappa t=m+\mu t,\ \ldots\ldots\ k+\varkappa t=s+\sigma t,$$

cioè, il massimo valore deve essere preso dal gruppo

$$\frac{l-k}{\varkappa-\lambda},\ \frac{m-k}{\varkappa-\mu},\ldots\ldots\ \frac{s-k}{\varkappa-\sigma}.$$

Sia scelto il più grande tra questi, se uno è maggiore di ciascuno degli altri; o pure se più sono eguali e maggiori di ciascuno dei rimanenti sia scelto l'ultimo di essi; dinoti τ' il valore del termine scelto, che supporremo essere $\frac{n-k}{\varkappa-\nu}$.

Continui t a diminuire dal valore τ'; e si proceda come sopra per trovare un altro valore τ'' dalle equazioni

$$n+\nu t=p+\varpi t,\ \ldots\ldots\ n+\nu t=s+\sigma t.$$

Questo procedimento deve essere continuato finchè si adoperi il termine $s+\sigma t$ nell'ottenere un valore di t.

Così vediamo come si possono trovare tutt'i valori convenevoli di t.

282. Supponiamo ora che $A=x^a(a_1+A_1)$, in cui a_1 è indipendente da x, ed A_1 svanisce quando x è infinito; similmente sia $B=x^b(b_1+B_1)$; e così di seguito. Si ponga $y=x^l(u+U)$, in cui u è indipendente da x, ed U svanisce quando x è infinito. Si sostituiscano questi valori nell'equazione proposta tra x ed y; così

$$x^{a+\alpha l}(a_1+A_1)(u+U)^\alpha+x^{b+\beta l}(b_1+B_1)(u+U)^\beta+\ldots$$
$$\ldots+x^{k+\chi l}(k_1+K_1)(u+U)^\chi+\ldots+x^{s+\sigma' l}(s_1+S_1)(u+U)^\sigma=0.$$

Poichè questo deve valere per tutt'i valori di x deve valere quando x è infinito; e ciò non avrà luogo se la più alta potenza di x si trova in un termine solamente. In altri termini, la somma dei coefficienti della più alta potenza di x deve svanire. A questo punto la ricerca dell'Articolo precedente trova la sua applicazione.

Per supposizione τ è il massimo valore ammissibile di l, ed otteniamo per la parte dell'espressione, nel primo membro dell'equazione precedente, che contiene la più alta potenza di x,

$$x^{a+\alpha\tau}\left\{(a_1+A_1)(u+U)^\alpha+\ldots+(k_1+K_1)(u+U)^\chi\right\}.$$

Quando x è infinito il coefficiente di $x^{a+\alpha\tau}$ deve svanire; questo dà la seguente equazione per trovare u,

$$a_1u^\alpha+\ldots\ldots+k_1u^\chi=0.$$

Da questa equazione si debbono ottenere i valori di u, ed a ciascun valore di u corrisponde un valore di y in cui il termine con la più alta potenza di x è ux^τ.

Similmente considerando il valore τ' giungiamo alla seguente equazione per determinare u,

$$k_1u^\chi+\ldots\ldots+n_1u^\nu=0.$$

Da questa equazione si debbono trovare i valori di u, ed a ciascun valore di u corrisponde un valore di y in cui il termine con la più alta potenza di x è $ux^{\tau'}$.

Procedendo in questo modo, otterremo la più alta potenza di x in ciascun valore di y.

In seguito si adoperi una delle coppie di valori corrispondenti di l ed u che sono stati determinati; si ponga $y=x^l(u+U)$, e si sostituisca questo valore di y nell'equazione primitiva tra x ed y.

Otteniamo così un'equazione tra x ed U e quantità note. Allora applichiamo il metodo per determinare la più alta potenza di x nel valore di U, e così otteniamo i *secondi* termini negli sviluppi dei diversi valori di y in serie procedenti secondo le potenze decrescenti di x. E questo procedimento può essere continuato a piacere.

283. Non vi è nulla nel metodo precedente che obblighi gli esponenti dati $\alpha, \beta, \ldots \sigma$, $a, b, \ldots s$, ad essere *interi;* essi però saranno tali quando applichiamo il metodo a determinare i *primi* termini nel caso di equazioni della natura di quelle considerate nel presente Trattato.

Applicheremo ora il metodo ad un esempio.

Supponiamo che si abbia l'equazione

$$y^4(x^2-3x)+y^2(x^3+2x^2)-y(4x^3+3)+3x^6=0.$$

Il gruppo di termini $\frac{b-a}{\alpha-\beta}, \frac{c-a}{\alpha-\gamma}, \ldots$ è, in questo caso, $\frac{3-2}{4-2}$, $\frac{5-2}{4-1}$, $\frac{6-2}{4-0}$. Il secondo e il terzo di questi sono eguali ad 1, che è maggiore di $\frac{1}{2}$, che è il valore del primo termine. Così $\tau=1$. Quindi poniamo $y=x(u+U)$, e sostituiamo nell'equazione proposta. La più alta potenza di x è allora x^6, ed il termine che la contiene è

$$x^6\left\{(u+U)^4-4(u+U)+3\right\}.$$

Il coefficiente deve svanire quando x è infinito; ciò dà

$$u^4-4u+3=0.$$

È chiaro che $u=1$ è una soluzione, e siccome la funzione derivata $4u^3-4$ svanisce ancora quando $u=1$, la radice 1 è ripetuta. Si divida u^4-4u+3 per $(u-1)^2$; il quoziente è u^2+2u+3. Così gli altri valori di u sono forniti dall'equazione $u^2+2u+3=0$, ed essi sono $-1\pm\sqrt{-2}$. Concludiamo quindi che l'equazione proposta fornirà solamente due valori reali di y in termini di x, e che x è il primo termine in ciascuno di questi valori quando essi sono sviluppati in serie secondo le potenze decrescenti di x.

Possiamo ora porre $x(1+U)$ per y nell'equazione proposta, e procedere a trovare i valori di U; riprenderemo fra breve questo esempio.

284. Le seguenti deduzioni si possono trarre dagli Art. 281 e 282.

(1) Se $a+\alpha$, $b+\beta, \ldots, k+\varkappa, \ldots, s+\sigma$ sono tutte eguali, le quantità $\tau, \tau', \tau'', \ldots$ sono tutte eguali all'unità.

(2) Se delle quantità $a+\alpha$, $b+\beta, \ldots, k+\varkappa, \ldots, s+\sigma$, due o più sono eguali e maggiori di tutte le rimanenti, allora l'unità si trova tra $\tau, \tau', \tau'', \ldots$ Infatti è chiaro che $t=1$ è un valore convenevole nell'investigazione dell'Art. 281, poichè questo valore rende eguali due o più dei termini ivi dati, e maggiori di tutt'i rimanenti.

Queste due deduzioni contengono la teoria degli asintoti rettilinei delle curve algebriche.

Nel rimanente di questo Articolo supponiamo che $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ siano tutti interi, e che σ sia zero.

(3) La prima equazione per u nell'Art. 282 avrà $\alpha-\varkappa$ radici, la seconda avrà $\varkappa-\nu$ radici, e così di seguito; così in tutto otteniamo α valori pel primo termine di y, come deve essere, poichè l'equazione proposta è del grado α in y.

(4) Supponiamo che i gradi di tutte le funzioni di x da K ad N inclusivamente siano eguali e maggiori di ognuno degli altri. Allora tra i valori di y ve ne saranno $\alpha-\varkappa$ che incominciano con una potenza positiva di x, e $\varkappa-\nu$ che incominciano con la potenza zero di x, e ν che incominciano con una potenza negativa di x. Poichè i $\varkappa-\nu$ valori di y che incominciano con la potenza zero di x nascono dal fatto che per ipotesi il valore $t=0$ rende tutt'i termini seguenti eguali e maggiori di ognuno di quelli che li seguono, $k+\varkappa t$, $l+\lambda t$, $\ldots n+\nu t$. Gli $\alpha-\varkappa$ valori di y che incominciano con una potenza positiva di x nascono da valori positivi di t, ed i corrispondenti valori di u ottenuti relativamente agli esponenti $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$. I ν valori di y che incominciano con una potenza negativa di x nascono da valori negativi di t, ed i corrispondenti valori di u ottenuti relativamente agli esponenti $\nu, \ldots \sigma$, in cui $\sigma=0$.

(5) Se $A, B, \ldots S$, sono tutti dello stesso grado eccetto M, ed M è di un grado maggiore dei rimanenti, vi sono $\alpha-\mu$ valori di y in cui la più alta potenza di x ha l'esponente positivo $\dfrac{m-a}{\alpha-\mu}$, e μ valori di y in cui la più alta potenza di x ha l'esponente negativo $-\dfrac{m-a}{\mu}$.

285. Deve farsi un'osservazione riguardo all'equazione in U che si ottiene quando si cercano i secondi termini nei valori di y; si

vegga l'Art. 282. Supponiamo che si prenda $y = x^t(u + U)$, in cui u e t sono conosciuti, e si sostituisca questo valore di y nell'equazione proposta. Otteniamo così un'equazione in U dello stesso grado dell'equazione primitiva in y. Però in generale solamente alcuni dei valori di U saranno ammissibili. Infatti, per supposizione, U svanisce quando x è infinito, e così dobbiamo rigettare ogni valore di U che incomincia con una potenza positiva di x o con la potenza zero di x. Questi valori rigettati di U debbono appartenere agli altri valori di y che pel momento non ci riguardano, poichè per supposizione noi cerchiamo solamente quel valore particolare di y che incomincia con ux^t, o quei valori particolari che incominciano così se ve ne sono più di uno, in cui u e t hanno valori conosciuti.

286. Riprendiamo ora l'esempio nell'Art. 283. Dobbiamo sostituire $x(u + U)$ per y, e fare $u = 1$. Otterremo così il risultato seguente dopo di aver diviso per x,

$$U^4(x^5\ldots) + U^3(4x^5\ldots) + U^2(6x^5\ldots) - U(10x^4\ldots) - 2x^4 = 0.$$

Qui nei coefficienti delle potenze di U abbiamo espresso solamente le più alte potenze di x. Si formino le frazioni secondo l'Art. 282; così otteniamo

$$\frac{5-5}{4-3},\quad \frac{5-5}{4-2},\quad \frac{4-5}{4-1},\quad \frac{4-5}{4-0}.$$

Qui i primi due termini sono zero, e sono algebricamente maggiori degli altri; ma un valore zero deve essere rigettato come si è spiegato nell'Articolo precedente. Procediamo perciò nel modo dell'Art. 281, supponendo che $\tau = 0$, e che si debba trovare τ'. Così formiamo le frazioni

$$\frac{4-5}{2-1},\quad \frac{4-5}{2-0}.$$

Di queste la seconda, che è $-\frac{1}{2}$, è algebricamente la maggiore. Conformemente poniamo $U = ux^{-\frac{1}{2}}$ e per trovare u otteniamo l'equazione $6u^2 - 2 = 0$, sicchè $u = \frac{1}{\pm\sqrt{3}}$. Così il primo termine di U è $\frac{1}{\sqrt{3x}}$ o $-\frac{1}{\sqrt{3x}}$. Quindi sino al punto ove siamo giunti, abbiamo

$$y = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3x}} + \ldots\right) \text{ o } y = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3x}} + \ldots\right).$$

287. La natura dei valori di U si può vedere esaminando la formazione dell'equazione generale in U. Poniamo prima $x^t u$ per y ed indi mutiamo u in $u+U$. Quando poniamo $x^t u$ per y il primo membro dell'equazione proposta prenderà la forma

$$\chi_1(u)\, x^{n_1} + \chi_2(u)\, x^{n_2} + \chi_3(u)\, x^{n_3} + \ldots,$$

in cui $n_1, n_2, n_3, \ldots$ si suppongono in ordine decrescente di grandezza. Si dinoti quest'espressione con $\varphi(u)$; allora l'equazione in U sarà $\varphi(u+U)=0$. Supporremo gli esponenti di y nell'equazione proposta interi positivi. L'equazione in U si può scrivere

$$\varphi_\alpha U^\alpha + \varphi_{\alpha-1} U^{\alpha-1} + \varphi_{\alpha-2} U^{\alpha-2} + \ldots + \varphi_1 U + \varphi = 0,$$

in cui φ_α sta per $\frac{1}{\lfloor\alpha}\varphi^\alpha(u)$, ed analogamente per $\varphi_{\alpha-1}, \varphi_{\alpha-2}, \ldots$ Ora se nessun valore particolare fosse assegnato ad u, i coefficienti delle diverse potenze di U nell'equazione precedente sarebbero funzioni di x, tutte dello stesso grado, cioè n_1. Così per l'Art. 284 i valori di U incomincerebbero tutti con la potenza zero di x. Ma se u è tale che $\chi_1(u)=0$, la funzione φ è di un grado inferiore in x in paragone della funzione φ_1; quindi uno dei valori di U incomincia con una potenza negativa di x, cioè, con $x^{-(n_1-n_2)}$. E questo è il valore di U di cui andiamo in cerca, poichè $\chi_1(u)=0$ è l'equazione dalla quale si deve trovare u secondo il nostro procedimento. Se però l'equazione $\chi_1(u)=0$ ha radici *eguali*, otteniamo più di un valore convenevole di U. Supponiamo, per esempio, che la radice particolare che abbiamo scelta si trovi *quattro* volte; allora φ_4 sarà del grado n_1 in x, mentre $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1, \varphi$, saranno solamente del grado n_2. Quindi, per l'Art. 284, vi saranno quattro valori convenevoli, ciascuno che incomincia con x elevato alla potenza negativa $-\frac{1}{4}(n_1-n_2)$.

Abbiamo qui supposto che $\chi_2(u)$ e le sue funzioni derivate non svaniscano per il valore di u che si considera.

288. In ciò che abbiamo finora detto abbiamo investigato valori di y che procedono secondo le potenze *decrescenti* di x. Così se illustriamo i nostri risultati con la geometria, e supponiamo tracciate le curve corrispondenti ai valori di y espressi in x, il primo termine della serie che abbiamo trovata per un valore di y esibirà la natura della curva ad una grande distanza dall'origine.

Ma il metodo si può anche applicare a trovare i valori di y che procedono secondo le potenze *crescenti* di x, sicchè il primo termine

in un valore di y esibirà la natura della curva nelle vicinanze dell'origine, quando la curva passa per l'origine.

Per applicare il metodo a trovare i valori di y che procedono secondo le potenze *crescenti* di x dobbiamo fare semplicemente le mutazioni seguenti. Dobbiamo supporre α, β, ,.. σ disposti in ordine *ascendente* di grandezza algebrica; ed A_1 deve svanire quando svanisce x e non quando x è infinito, sicchè x^a deve essere *la più bassa* potenza di x in A e non, come prima, la potenza *più alta*; un simile cambiamento di significato si deve fare in B_1 e b, e nelle rimanenti quantità analoghe.

Allora quando t è $+\infty$ le seguenti quantità sono in ordine *ascendente* di grandezza, $a+\alpha t$, $b+\beta t$, ... $k+\varkappa t$, ... $s+\sigma t$.

Come sopra, il massimo valore di t si deve trovare dalle equazioni

$$a+\alpha t=b+\beta t,\ \ a+\alpha t=c+\gamma t,\ \ldots\ a+\alpha t=k+\varkappa t,\ \ldots\ a+\alpha t=s+\sigma t.$$

XXIV. TEOREMI DIVERSI.

289. Nel presente Capitolo riuniremo varii teoremi importanti, i quali forniranno esempi di molti dei principii stabiliti nelle pagine precedenti.

Dimostrare che l'equazione seguente non ha radici immaginarie,

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\ldots+\frac{K^2}{x-k}-\lambda=0.$$

Se è possibile supponiamo che $p+q\sqrt{-1}$ sia una radice; allora $p-q\sqrt{-1}$ è anche una radice. Si sostituiscano successivamente questi valori per x e si sottragga un risultato dall'altro; così

$$q\left\{\frac{A^2}{(p-a)^2+q^2}+\frac{B^2}{(p-b)^2+q^2}+\frac{C^2}{(p-c)^2+q^2}+\ldots+\frac{K^2}{(p-k)^2+q^2}\right\}=0,$$

e questo è impossibile a meno che non sia $q=0$.

O pure possiamo dimostrare il teorema così. Si dinoti il primo membro dell'equazione proposta con $\varphi(x)$, e si suppongano a, b, c, ... k, in ordine crescente di grandezza algebrica. Quando x è poco più grande di a il primo termine di $\varphi(x)$ è molto grande e po-

sitivo, e prendendo x sufficientemente vicino ad a possiamo assicurare un valore *positivo* per $\varphi(x)$. Quando x è un poco minore di b il secondo termine di $\varphi(x)$ è molto grande e negativo; e prendendo x sufficientemente vicino a b possiamo assicurare un valore *negativo* per $\varphi(x)$. Così $\varphi(x)$ cambia segno per qualche valore di x tra a e b. Similmente, $\varphi(x)$ cambia segno per qualche valore di x tra b e c; e così di seguito. In questo modo possiamo mostrare che le radici dell'equazione $\varphi(x)=0$ sono tutte reali e disuguali.

La forma in cui è presentata l'equazione $\varphi(x)=0$, ci abilita a riconoscere più facilmente la proprietà che dobbiamo dimostrare. Ma il nostro risultato non sarà mutato se liberiamo l'equazione da frazioni, in modo da ridurla alla forma normale; cioè, nel fatto, se invece di $\varphi(x)=0$ consideriamo l'equazione

$$\varphi(x)(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)=0.$$

290. Trovare i valori delle n quantità $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dalle n equazioni seguenti,

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=0,$$

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=0,$$

$$a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+\ldots+a_n^2x_n=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1^{n-2}x_1+a_2^{n-2}x_2+a_3^{n-2}x_3+\ldots+a_n^{n-2}x_n=0,$$

$$a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+a_3^{n-1}x_3+\ldots+a_n^{n-1}x_n=b.$$

Si moltiplichino queste equazioni rispettivamente per $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_2, c_1, 1$, in cui $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_2, c_1$, sono per ora indeterminate, e si aggiungano i risultati. Si prendano $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_2, c_1$, tali che i coefficienti di $x_2, x_3, \ldots x_n$, svaniscano; allora

$$x_1(a_1^{n-1}+c_1a_1^{n-2}+c_2a_1^{n-3}+\ldots+c_{n-2}a_1+c_{n-1})=b.$$

Dalla supposizione rispetto a $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_2, c_1$, ne segue che $a_2, a_3, \ldots a_n$ sono le radici dell'equazione

$$z^{n-1}+c_1z^{n-2}+c_2z^{n-3}+\ldots+c_{n-2}z+c_{n-1}=0.$$

Quindi il primo membro di questa equazione è identicamente eguale a

$$(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n).$$

Onde sostituendo a_1 per z l'equazione che determina x_1 si può mettere nella forma

$$x_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)=b.$$

Così x_1 è conosciuto; ed i valori di $x_2, x_3, \ldots x_n$, si possono dedurre per simmetria.

291. Si cercano i valori delle n quantità $x, y, z, \ldots$ dalle n equazioni seguenti,

$$\frac{x}{k_1-a}+\frac{y}{k_1-b}+\frac{z}{k_1-c}+\ldots=1,$$

$$\frac{x}{k_2-a}+\frac{y}{k_2-b}+\frac{z}{k_2-c}+\ldots=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x}{k_n-a}+\frac{y}{k_n-b}+\frac{z}{k_n-c}+\ldots=1.$$

Possiamo riguardare le n quantità $k_1, k_2, \ldots k_n$ come le radici della sola equazione

$$\frac{x}{k-a}+\frac{y}{k-b}+\frac{z}{k-c}+\ldots=1,$$

che è dell'n^{mo} grado rispetto a k. Si ponga $k=a-t$; ne seguirà che $a-k_1$, $a-k_2$, $a-k_3, \ldots$ sono le radici della seguente equazione in t,

$$1+\frac{x}{t}+\frac{y}{t+b-a}+\frac{z}{t+c-a}+\ldots=0.$$

Si moltiplichi pel prodotto dei denominatori in modo da porre questa equazione nella forma ordinaria; così

$$t^n+A_1t^{n-1}+A_2t^{n-2}+\ldots+A_n=0,$$

in cui il termine indipendente da t, cioè A_n, è $x(b-a)(c-a)\ldots$,

Quindi, per l'Art. 45,

$$(a-k_1)(a-k_2)(a-k_3)\ldots=(-1)^n x(b-a)(c-a)\ldots,$$

cioè,
$$x=-\frac{(a-k_1)(a-k_2)(a-k_3)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots}$$

Da questa espressione si possono dedurre i valori di $y, z, \ldots$ con cangiamenti simmetrici nelle lettere $a, b, c, \ldots$

Grunert's *Archiv der Mathematik und Physik*, Vol. XXIII p. 235.

292. Dimostrare che la somma dei prodotti delle n quantità $c, c^2, c^3, \ldots c^n$, prese m alla volta è

$$\frac{(c^n-1)(c^{n-1}-1)\ldots(c^{n-m+1}-1)}{(c-1)(c^2-1)\ldots(c^m-1)}\, c^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Si ponga

$$(x+c)(x+c^2)\ldots(x+c^n)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n\ldots\ldots(1).$$

Allora per l'Art. 45 dobbiamo trovare il valore di p_m. In (1) si muti x in $\frac{x}{c}$ e si moltiplichi per c^n; così

$$(x+c^2)(x+c^3)\ldots(x+c^{n+1})=x^n+p_1cx^{n-1}+\ldots+p_{n-1}c^{n-1}x+p_nc^n\ldots(2).$$

Da (1) e (2) otteniamo

$$(x+c^{n+1})(x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n)$$
$$=(x+c)(x^n+p_1cx^{n-1}+\ldots+p_{n-1}c^{n-1}x+p_nc^n).$$

Si eguaglino i coefficienti di x^{n-m+1} nei due membri di questa identità; così

$$p_m+c^{n+1}p_{m-1}=p_mc^m+p_{m-1}c^m;$$

onde

$$p_m=p_{m-1}\frac{c^m(c^{n-m+1}-1)}{c^m-1}\quad\ldots\ldots(3).$$

E $p_1=c+c^2+\ldots+c^n=\frac{c(c^n-1)}{c-1}$; allora per mezzo di (3) possiamo determinare successivamente $p_2, p_3, p_4, \ldots$; e così arriveremo al richiesto valore di p_m.

293. Siano n quantità $a, b, c, \ldots$; dinoti s_n la loro somma, s_{n-1} la somma di $n-1$ tra esse, e così di seguito; e dinoti S

$$(s_n)^r-\Sigma(s_{n-1})^r+\Sigma(s_{n-2})^r-\ldots+(-1)^{n-1}\Sigma(s_1)^r.$$

Qui $\Sigma(s_m)^r$ dinota la somma di termini tali come $(s_m)^r$ formati col prendere tutte le possibili scelte di m quantità tra le n quantità $a, b, c, \ldots$ Allora dimostreremo che $S=0$ se r è minore di n, e che S è divisibile per $abc\ldots$ se r è eguale ad n o maggiore di n; ed in particolare che

$$S=\lfloor n\, abc\ldots, \text{ quando } r=n,$$

$$\text{ed } S=\frac{\lfloor n+1}{2}(a+b+c+\ldots)abc\ldots, \text{ quando } r=n+1.$$

Possiamo dividere S in due parti, una parte in cui a si trovi in ogni termine ed un'altra parte in cui a non si trovi affatto. Possiamo scrivere la prima parte così,

$$(s_n)^r - \Sigma_1(s_{n-1})^r + \Sigma_1(s_{n-2})^r - \ldots + (-1)^{n-1}a^r,$$

e la seconda parte così,

$$-\Sigma_2(s_{n-1})^r + \Sigma_2(s_{n-2})^r - \ldots + (-1)^{n-1}\Sigma_2(s_1)^r,$$

in cui Σ_1 indica alcuni dei termini inclusi primitivamente nel Σ, e Σ_2 indica i rimanenti. Ora si supponga $a = 0$, allora S svanisce; infatti abbiamo in questo caso

$$(s_n)^r - \Sigma_2(s_{n-1})^r = 0,$$
$$\Sigma_1(s_{n-1})^r - \Sigma_2(s_{n-2})^r = 0,$$
$$\Sigma_1(s_{n-2})^r - \Sigma_2(s_{n-3})^r = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Similmente, possiamo dimostrare che S svanisce quando $b = 0$, e quando $c = 0$, e così di seguito. Così conchiudiamo che S è in generale divisibile per ciascuna delle quantità $a, b, c, \ldots$ e quindi pel loro prodotto. Ma il prodotto sarà di n dimensioni, e quindi se S ha meno di n dimensioni essa dovrà essere identicamente zero. E siccome S è di r dimensioni ne segue che S svanisce quando r è minore di n, ed è divisibile per $abc\ldots$ quando r non è minore di n.

Quando $r = n$ abbiamo perciò $S = \lambda abc\ldots$, in cui λ è una quantità *numerica* che si deve determinare. Per determinare λ supponiamo che $a, b, c, \ldots$ siano tutte eguali all'unità; allora S diviene

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-2)^n - \ldots,$$

cioè $\lfloor n$, per l'*Algebra*. Si veggano le *Aggiunte*, Cap. VI.

In seguito, si supponga $r = n + 1$. Allora S è divisibile per $abc\ldots$; e siccome S è di $n + 1$ dimensioni, essa deve avere un fattore che è di una dimensione e simmetrico rispetto ad $a, b, c\ldots$; questo fattore deve essere perciò $a + b + c + \ldots$.

Quindi $S = \mu abc\ldots(a + b + c + \ldots)$, in cui μ è una quantità numerica che si deve determinare. Per determinare μ supponiamo che $a, b, c, \ldots$ siano tutte eguali all'unità; allora S diviene

$$n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-2)^{n+1} - \ldots,$$

e questa deve eguagliare μn. Quindi, per l'*Algebra*, abbiamo $\mu = \frac{\lfloor n+1}{2}$.

294. Dinoti $[c]_r$ l'espressione $c(c-1)(c-2)\ldots(c-r+1)$, qualunque sia c; allora sarà

$$[a+b]_n=[a]_n+n[a]_{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}[a]_{n-2}[b]_2+\ldots+[b]_n.$$

Infatti supponiamo che a sia un intero positivo; allora sappiamo che questo teorema è vero per *ogni* valore intero positivo di b, poichè esso segue dall'eguagliare i coefficienti di x in $(1+x)^{a+b}$ ed in $(1+x)^a\times(1+x)^b$. Quindi siccome questo è vero per più di n valori di b esso è identicamente vero per l'Art. 39; cioè, quando a è un intero positivo il teorema è vero per *tutt'* i valori di b. Allora poichè esso è vero per *ogni* valore intero positivo di a, esso è vero per più di n valori di a, e quindi per l'Art. 39 esso è vero per *tutt'* i valori di a.

Così possiamo dimostrare il teorema proposto, ammettendo il Teorema del Binomio per un esponente intero positivo ed anche il Teorema dell'Art. 39. Il teorema è alle volte chiamato dal nome di Vandermonde. Il teorema è richiesto nella dimostrazione di Eulero del Teorema del Binomio per un esponente qualunque, e come ben si conosce, vi è stabilito fondandosi sul principio della *permanenza delle forme equivalenti*.

295. Sia $\varphi(x)=0$ un'equazione che ha una radice a, sicchè possiamo supporre $\varphi(x)=(x-a)\,\psi(x)$; allora

$$\frac{\varphi(x)}{x}=\left(1-\frac{a}{x}\right)\psi(x),$$

$$\log\frac{\varphi(x)}{x}=\log\left(1-\frac{a}{x}\right)+\log\psi(x)$$

$$=-\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}+\ldots\right)+\log\psi(x),$$

Supponiamo che $\log\frac{\varphi(x)}{x}$ si possa sviluppare in una serie che contiene potenze positive e negative di x, e che $\log\psi(x)$ si possa sviluppare in una serie che contiene solamente potenze positive di x; allora ammettendo l'identità dei due membri dell'equazione otteniamo questo risultato,

$$-a=\text{al coefficiente di }\frac{1}{x}\text{ nello sviluppo di }\log\frac{\varphi(x)}{x}.$$

296. Il teorema dell'Articolo precedente è dato da Murphy nella sua *Theory of Equations* ed illustrato con esempii; si veggano le sue pagine 77—82. La dimostrazione del teorema è imperfetta, poichè le serie infinite possono essere divergenti; ma il teorema è di qualche importanza. Esso era stato notato prima che Murphy vi richiamasse l'attenzione; si vegga il *Differential and Integral Calculus*, di De Morgan, pagine 328 e 644, ed anche il *Philosophical Magazine* per Giugno 1848, pagina 421; secondo l'ultima opera il teorema fu dato da Lagrange nel 1768.

Sembra che il procedimento fornisca *la più piccola* radice dell'equazione alla quale è applicato; e si può assegnare qualche ragione di ciò.

Infatti supponiamo che le radici dell'equazione $\varphi(x)=0$ siano $a, b, c, \ldots$ in ordine crescente di grandezza. Allora

$$\varphi(x) = A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots,$$

in cui A è una costante.

Così $$\frac{\varphi(x)}{x} = B\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\ldots\ldots,$$

in cui B è una costante.

Poichè a è la più piccola radice dell'equazione $\varphi(x)=0$, se x cade tra a e b gli sviluppi di

$$\log\left(1-\frac{a}{x}\right),\quad \log\left(1-\frac{x}{b}\right),\quad \log\left(1-\frac{x}{c}\right),\ldots\ldots$$

daranno tutti serie *convergenti*; e quindi vediamo che $\log\frac{\varphi(x)}{x}$ si può sviluppare nella forma richiesta in un modo che è aritmeticamente intelligibile e vero. Allora siccome x può avere *ogni* valore tra a e b possiamo, per una naturale estensione della teoria dei coefficienti indeterminati, eguagliare il coefficiente di $\frac{1}{x}$ nello sviluppo di $\log\frac{\varphi(x)}{x}$ a $-a$.

Nello stesso modo come il coefficiente di $\frac{1}{x}$ nello sviluppo di $\log\frac{\varphi(x)}{x}$ si è veduto essere $-a$, vediamo che il coefficiente di $\frac{1}{x^n}$ è $-\frac{a^n}{n}$; così possiamo determinare il valore di ogni potenza intera assegnata della minima radice dell'equazione $\varphi(x)=0$.

297. Per esempio, si cerchi una radice dell'equazione

$$x^n + cx - b = 0.$$

$$\text{Qui } \frac{\varphi(x)}{x} = c - \frac{b}{x} + x^{n-1},$$

$$\log \frac{\varphi(x)}{x} = \log c + \log\left(1 - \frac{b}{cx} + \frac{x^{n+1}}{c}\right)$$

$$= \log c - z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \dots,$$

$$\text{in cui } z = \frac{b}{cx} - \frac{x^{n-1}}{c} = \frac{b}{cx}\left(1 - \frac{x^n}{b}\right).$$

Dobbiamo ora scegliere i termini che contengono $\frac{1}{x}$; otterremo un tale termine da z, da z^{n+1}, da z^{2n+1}, e così di seguito. Quindi troveremo per la radice la serie

$$\frac{b}{c} - \frac{b^n}{c^{n+1}} + \frac{2n}{2} \frac{b^{2n-1}}{c^{2n+1}} - \frac{3n(3n-1)}{2 \cdot 3} \frac{b^{3n-2}}{c^{3n+1}} + \dots$$

298. Sia $\varphi(x) = 0$ un'equazione di cui $a_1, a_2, \dots a_m$, sono radici, sicchè possiamo supporre

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \psi(x);$$

$$\text{allora } \frac{\varphi(x)}{x^m} = \left(1 - \frac{a_1}{x}\right)\left(1 - \frac{a_2}{x}\right) \dots \left(1 - \frac{a_m}{x}\right) \psi(x).$$

Si prendano i logaritmi dei due membri; allora, come nell'Art. 295, conchiudiamo che $-(a_1 + a_2 + \dots + a_m)$ è eguale al coefficiente di $\frac{1}{x}$ nello sviluppo di $\log \frac{\varphi(x)}{x^m}$. Si vegga la *Theory of Equations* di Murphy, pagine 82 ed 83.

Come nell'Art. 296 possiamo conchiudere che il procedimento darà la somma delle m radici *più piccole*.

299. Daremo ora alcuni teoremi intorno alla decomposizione di una frazione razionale in altre frazioni, le quali rispetto alla frazione originaria si dicono *frazioni parziali*.

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una funzione di x dell'n^{mo} grado; siano le radici dell'equazione $\varphi(x)=0$ tutte disuguali e siano dinotate con $a, b, c, \ldots k$. Sia $\psi(x)$ una funzione di x che è dell'$(n-1)^{mo}$ grado o di un grado inferiore. Allora la relazione seguente sarà identicamente vera,

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots\ldots + \frac{K}{x-k},$$

purchè dei valori costanti convenienti siano assegnati ad $A, B, C, \ldots K$.

Infatti affinchè questa relazione sia identicamente vera è necessario e sufficiente che sia identicamente vera la seguente

$$\psi(x) = A\frac{\varphi(x)}{x-a} + B\frac{\varphi(x)}{x-b} + C\frac{\varphi(x)}{x-c} + \ldots\ldots + K\frac{\varphi(x)}{x-k}.$$

I membri di questa equazione non sono di un grado superiore a quello espresso da $n-1$, quindi la relazione sarà identicamente vera se si possono trovare n valori di x per i quali essa è vera; si vegga l'Art. 39. E scegliendo convenientemente $A, B, C, \ldots K$ la relazione si può rendere vera per gli n valori $a, b, c, \ldots k$, di x. Infatti si supponga $x=a$, allora tutt'i termini del secondo membro svaniscono, eccetto quello che contiene A; ed otteniamo

$$\psi(a) = A\left\{\frac{\varphi(x)}{x-a}\right\}_{x=a},$$

cioè, per l'Art. 74,

$$\psi(a) = A\varphi'(a).$$

Questo determina A; e simili valori si troveranno per $B, C, \ldots K$.

300. Supponiamo in seguito che $\psi(x)$ non sia di un grado inferiore a quello di $\varphi(x)$. Con la divisione ordinaria possiamo ottenere

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = F(x) + \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

in cui $F(x)$ ed $f(x)$ sono funzioni intere di x, ed $f(x)$ è di un grado inferiore a quello di $\varphi(x)$. Possiamo allora decomporre $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in frazioni parziali nel modo mostrato nell'Articolo precedente.

Poichè abbiamo

$$\psi(x) = \varphi(x)F(x) + f(x);$$

ne segue che $\psi(x)$ ed $f(x)$ *hanno lo stesso valore* quando $\varphi(x)$ svanisce. Quindi le *frazioni parziali* corrispondenti a $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, determinate col metodo dell'Art. 299, si possono trovare senza dividere prima $\psi(x)$ per $\varphi(x)$; però non dobbiamo omettere la parte $F(x)$ se vogliamo ottenere il valore completo di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$.

301. Varie identità algebriche si possono stabilire per mezzo dei principii dei due Articoli precedenti.

Per esempio, se n è un intero positivo qualunque

$$\frac{\lfloor n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{n}{1}\frac{1}{x+2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{x+3} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{x+n+1}.$$

Infatti possiamo supporre che il primo membro sia messo sotto la forma

$$\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3} + \ldots\ldots + \frac{A_{n+1}}{x+n+1};$$

e quindi possiamo determinare $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$: ciò si effettua moltiplicando i due membri per

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1),$$

e poi sostituendo successivamente per x i valori $-1, -2, \ldots$.

Ancora, se n è un intero positivo qualunque

$$\frac{1}{x+1} - \frac{n}{(x+1)(x+2)} + \frac{n(n-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \ldots + \frac{(-1)^n \lfloor n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} = \frac{1}{x+n+1}.$$

Infatti possiamo supporre che il primo membro sia messo sotto la forma

$$\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3} + \ldots\ldots + \frac{A_{n+1}}{x+n+1};$$

si moltiplichino i due membri per $(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)$ e poi si sostituiscano successivamente per x i valori $-1, -2, \ldots$ Così otterremo

$$A_1=(1-1)^n=0,$$

$$A_2=n(1-1)^{n-1}=0,$$

$$A_3=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(1-1)^{n-2}=0,$$

e procedendo così troviamo che $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono tutti zero, e che $A_{n+1}=1$.

Ancora, se m è un intero positivo qualunque

$$(1-y)^m\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{m}{(x+1)(x+2)}\frac{y}{1-y}\right.$$

$$+\frac{m(m-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\left(\frac{y}{1-y}\right)^2+\ldots$$

$$\left.+\frac{\lfloor m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m+1)}\left(\frac{y}{1-y}\right)^m\right\}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{my}{x+2}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{y^2}{x+3}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^m y^m}{x+m+1}.$$

Questo si può dimostrare nel modo già mostrato supponendo che il primo membro sia messo sotto la forma

$$\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{x+3}+\ldots\ldots+\frac{A_{m+1}}{x+m+1}:$$

allora deduciamo

$$A_1=(1-y+y)^m=1,$$

$$A_2=-my(1-y+y)^{m-1}=-my,$$

e così di seguito.

O pure possiamo stabilire questo risultato per mezzo del secondo esempio. Infatti se sviluppiamo il primo membro secondo le potenze di y, e paragoniamo i coefficienti di y^n nei due membri, li troviamo eguali pel secondo esempio.

302. Negli Articoli 299 e 300 abbiamo dato separatamente la decomposizione di una frazione razionale quando il suo denomi-

natore non ha *fattori ripetuti,* a motivo della semplicità del risultato; essa è però solamente un caso particolare della ricerca generale alla quale ora passiamo.

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una funzione di x che contiene fattori ripetuti; per esempio, sia

$$\varphi(x)=p_0(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\ldots(x-k),$$

e sia $\psi(x)$ un'altra funzione qualunque di x. Allora l'espressione $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ si può risolvere nelle seguenti parti.

(1) Ogni fattore $a-k$ che non è ripetuto darà origine ad un solo termine $\frac{K}{x-k}$.

(2) Il fattore $(x-a)^r$ darà origine alla serie di termini

$$\frac{A}{(x-a)^r}+\frac{A_1}{(x-a)^{r-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{r-2}}+\ldots\ldots+\frac{A_{r-1}}{x-a}.$$

Una simile serie di termini nascerà da ciascuno degli altri fattori ripetuti.

(3) Vi sarà ancora un'espressione intera se $\psi(x)$ non è di un grado inferiore a quello di $\varphi(x)$.

Infatti supponiamo $\varphi(x)=(x-a)^r\chi(x)$; allora abbiamo identicamente, qualunque sia A,

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-a)^r}+\frac{\psi(x)-A\chi(x)}{\varphi(x)}.$$

Ora sia A determinato dall'equazione $\psi(a)-A\chi(a)=0$; allora $\psi(x)-A\chi(x)$ svanisce quando $x=a$, ed è perciò divisibile per $x-a$. Quindi con questo valore di A possiamo porre

$$\psi(x)-A\chi(x)=(x-a)\psi_1(x),$$

e quindi

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-a)^r}+\frac{\psi_1(x)}{(x-a)^{r-1}\chi(x)}.$$

Nello stesso modo possiamo decomporre l'ultima frazione ed ottenere

$$\frac{\psi_1(x)}{(x-a)^{r-1}\chi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{r-1}} + \frac{\psi_2(x)}{(x-a)^{r-2}\chi(x)}.$$

Procedendo in questo modo si stabilisce il risultato richiesto.

303. È facile mostrare secondo il modo dell'Art. 37 che vi è una sola maniera di decomporre $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ in una funzione intera, ed in una serie di frazioni parziali ciascuna delle quali contiene solamente un distinto fattore nel suo denominatore. Quindi conchiudiamo che il *risultato* ottenuto deve essere lo stesso qualunque sia l'ordine nel quale le operazioni sono condotte, cioè, qualunque sia il fattore che per il primo si considera.

Praticamente il miglior modo per determinare i numeratori delle frazioni parziali sarà spesso il seguente. Si ponga $x = a + h$; così

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-a)^r\chi(x)} = \frac{\psi(a+h)}{h^r\chi(a+h)};$$

ora si sviluppi con qualche metodo algebrico $\frac{\psi(a+h)}{\chi(a+h)}$ secondo le potenze di h, e secondo la notazione già usata il risultato deve essere

$$\frac{\psi(a+h)}{\chi(a+h)} = A + A_1h + A_2h^2 + A_3h^3 + \ldots\ldots$$

Cioè, A_m deve essere il coefficiente di h^m nello sviluppo di $\frac{\psi(a+h)}{\chi(a+h)}$ secondo le potenze ascendenti di h.

Similmente si possono determinare i numeratori delle altre frazioni parziali.

304. Negli Articoli seguenti daremo alcuni teoremi relativi ai limiti delle radici di un'equazione; essi furono comunicati allo scrittore dal Professore De Morgan, in una lettera datata Feb. 6, 1858.

305. Il teorema seguente relativo ai limiti delle radici di un'equazione si troverà includere due di quelli che sono dati nel Cap. VII, ed aggiungere qualche cosa ad essi.

Sia $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$; allora procediamo ad investigare un limite superiore delle radici positive dell'equazione $f(x)=0$.

Sia a eguale al coefficiente del primo termine, o a qualche cosa minore; sia b eguale al più piccolo dei coefficienti positivi che seguono immediatamente, e precedono qualche coefficiente negativo. o a qualche cosa minore; sia c eguale al valore numerico del coefficiente negativo numericamente più grande, o a qualche cosa maggiore. Supponiamo che x^{n-k-1} sia il primo termine con un coefficiente negativo. Allora $f(x)$ è certamente positiva quando l'espressione seguente è positiva,

$$ax^n+b(x^{n-1}+\ldots+x^{n-k})-c(x^{n-k-1}+\ldots+x+1),$$

cioè, quando l'espressione seguente è positiva,

$$ax^n+b\frac{x^n-x^{n-k}}{x-1}-c\frac{x^{n-k}-1}{x-1};$$

cioè, supponendo x maggiore dell'unità, quando

$$\left\{a(x-1)+b\right\}x^n-(b+c)x^{n-k}+c$$

è positiva, cioè, *a fortiori*, quando

$$\left\{a(x-1)+b\right\}x^k-(b+c)$$

è zero o positiva.

(1) Si prenda $b=0$, e sia c il coefficiente negativo numericamente più grande; allora $f(x)$ è positiva se $a(x-1)-c$ è zero o positiva, cioè, se $x=1+\frac{c}{a}$ o a qualche cosa maggiore. Si vegga l'Art. 87.

(2) Si prenda $b=0$, e sia c il coefficiente negativo numericamente più grande; allora $f(x)$ è positiva se $a(x-1)x^k-c$ è zero o positiva, e quindi *a fortiori* se $a(x-1)^{k+1}-c$ è tale; cioè se $a=1+\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{k+1}}$ o a qualche cosa maggiore. Si vegga l'Art. 89.

(3) Si ponga zero per a; allora $f(x)$ è positiva se $bx^k-(b+c)$ è zero o positiva, cioè, se $x=\left(1+\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{k}}$ o a qualche cosa maggiore.

Questo è un nuovo limite, il quale può essere minore di quello in (2) quando b si può prendere maggiore di p_0.

(4) Se a non è maggiore di b abbiamo $f(x)$ positiva se

$$\left\{a(x-1)+a\right\}x^k-(a+c)$$

è zero o positiva, cioè, se $x=\left(1+\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{k+1}}$ o a qualche cosa maggiore. Questo fornisce un limite minore di quello in (3) sempre che b non si può prendere grande quanto p_0.

(5) Supponiamo che b non sia minore di c; allora da (3) otteniamo $2^{\frac{1}{k}}$ come un limite superiore.

(6) Supponiamo che a non sia minore di c; allora da (2) otteniamo $1+2^{\frac{1}{k+1}}$ come un limite superiore.

(7) Supponiamo che nè a nè b sia minore di c; allora da (4) otteniamo $2^{\frac{1}{k+1}}$ come un limite superiore.

306. Daremo un altro teorema su i limiti delle radici delle equazioni. Esso è fondato sul modo di calcolare il valore di un'espressione della forma $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ per un valore assegnato ad x, che abbiamo spiegato nell'Art. 5. Se θ dinota quel valore assegnato il calcolo determina successivamente

$$a\theta,\ a\theta+b,\ (a\theta+b)\theta,\ (a\theta+b)\theta+c,\ \ldots\ldots$$

Sia $f(x)=0$ l'equazione. Si ordini $f(x)$ in gruppi, ciascun gruppo essendo formato di tutt'i termini positivi che vanno insieme seguiti da tutt'i termini negativi che vanno insieme prima dei termini positivi seguenti. Così, scrivendo solamente i segni, se si suppone di avere la successione,

$$++----+-++-----+--+,$$

allora i termini saranno ordinati in gruppi così,

$$(++----),\ (+-),\ (++-----),\ (+--),\ +.$$

Il primo gruppo racchiuda le potenze di x da x^n ad x^{n-k} l'una e l'altra inclusivamente. Si supponga rimosso il fattore x^{n-k} con la divisione. Si prenda per tentativo θ come un valore di x, e si calcoli il valore quando $x=\theta$ del quoziente dopo la divisione per x^{n-k}. Se il risultato è positivo si dinoti con A_1, e si ponga A_1x^{n-k} al principio del gruppo seguente. Supponiamo che questo gruppo si estenda sino al termine che contiene x^{n-l}. Dopo che A_1x^{n-k} è stato messo innanzi al secondo gruppo si divida per x^{n-l}, e si trovi il valore del quoziente quando $x=\theta$. Se il risultato è positivo si dinoti con A_2 e si ponga A_2x^{n-l} al principio del gruppo seguente; e così di seguito. Se tutt'i risultati sono positivi sino all'ultimo, θ è un limite superiore delle radici positive. Il numero θ da tentare può essere scelto con una delle regole più facili, rammentandosi chè non è probabile si debba richiedere un numero molto più grande del limite superiore trovato col considerare solamente il primo gruppo.

Per esempio, si prenda un'equazione del 18° grado. Scriveremo solamente i coefficienti, in gruppi,

$$(7+4+3-80-100)+(20-100)+(3+2+1-40-1000-1000)$$
$$+(70-8000-2000)+(1000-400-4000).$$

Qui dal considerare solamente il primo gruppo vediamo che 2 è troppo piccolo; tenteremo 3. Procediamo a calcolare il valore quando $x=3$ di

$$7x^4+4x^3+3x^2-80x-100$$

7	4	3	−80	−100
7	25	78	154	362

Così $A_1=362$.

Procediamo a calcolare il valore quando $x=3$ di

$$362x^2+20x-100$$

362	20	−100
362	1106	3218

Così $A_2=3218$.

Dobbiamo in seguito calcolare il valore quando $x=3$ di

$$3218x^6+3x^5+2x^4+x^3-40x^2-1000x-4000$$

È però sufficientemente ovvio ora che otterremo risultati positivi

da dinotarsi con A_3, A_4, ed A_5; sicchè 3 è un limite superiore delle radici positive.

In questo esempio la regola dell'Art. 90 darebbe $1+\frac{8000}{110}$, che è più di 70; e la regola dell'Art. 89 darebbe $1+\sqrt[3]{\frac{8000}{7}}$, che è più di 11.

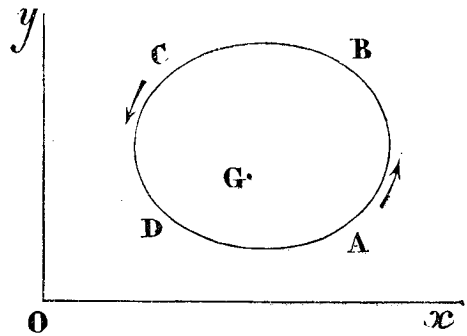
Ciò che segue è una breve dichiarazione del teorema. Si divida l'intera espressione in successive porzioni positive ed intere, $A_p-B_q+C_r-D_s\ldots$; $p, q, r, s, \ldots$ rappresentando gli ultimi esponenti di x in ciascuna porzione. Si divida A_p-B_q per x^q, e si determini un valore di x, che diciamo λ, il quale renda il quoziente positivo; sia l questo quoziente. Si divida $lx^q+C_r-D_s$ per x^s, e si determini un valore di x, che diciamo μ, il quale è forse non maggiore di λ ma non deve essere minore di λ, che renda il quoziente positivo; sia m questo quoziente. Si continui il procedimento con $mx^s+E_t-F_u$, e così di seguito sino alla fine. L'ultimo valore di x adoperato è maggiore di ogni radice dell'equazione; ed il primo valore di x, cioè λ, è molto spesso anche l'ultimo.

XXV. TEOREMA DI CAUCHY.

307. Dedicheremo questo Capitolo alla dimostrazione di un notevole teorema dato da Cauchy, l'oggetto del quale si è di accertare quante radici reali o immaginarie cadano tra limiti assegnati; in fatti il teorema si propone di effettuare rispetto alle radici in generale ciò che il teorema di Sturm effettua rispetto alle radici *reali*.

308. Presi ad arbitrio due assi rettangolari, siano x, y le coordinate di un punto qualunque. Sia $\varphi(z)$ una funzione razionale di z; allora $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ può essere espressa nella forma $p+q\sqrt{-1}$. Un punto le coordinate del quale sono tali che p e q svaniscano simultaneamente, si dirà un *punto radice*. Si descriva un contorno qualunque $ABCD$; allora il numero dei punti radici che cadono nell'interno di questo contorno sarà dato dalla regola seguente. Si muova un punto lungo questo contorno nella direzione positiva, e si noti quante volte $\frac{p}{q}$ passa pel valore 0 e cambia il suo segno; supposto che il cambiamento avvenga k volte dal $+$ al $-$, ed l volte dal $-$

al $+$; allora il numero dei punti radici che cadono nell'interno del contorno è $\frac{1}{2}(k-l)$.



Si deve osservare che il contorno è supposto preso in modo che nessun punto radice cada *su* di esso; inoltre se una radice immaginaria dell'equazione $\varphi(z)=0$ è ripetuta due, o tre, o più volte, consideriamo di avere due, o tre, o più punti radici, benchè questi punti coincidano. Pel movimento nella direzione *positiva* intendiamo che un raggio vettore condotto da un punto fisso nell'interno del contorno al punto mobile descriva un angolo positivo eguale a quattro angoli retti, mentre il punto mobile percorre il contorno.

Il teorema si dimostra considerando il caso di un contorno infinitesimo, e poi il caso di un contorno finito.

309. Si prenda un punto qualunque G, che non è un punto radice, nell'interno del contorno, e si descriva un contorno infinitesimo che racchiuda G. Supponiamo che il punto mobile percorra nella direzione positiva questo contorno infinitesimo; abbiamo allora quattro casi a considerare.

(1) Supponiamo che nè p nè q svanisca nell'interno o sul contorno. Qui $\frac{p}{q}$ non cambia affatto segno durante il circuito; sicchè la regola asserisce che non vi è alcun punto radice nell'interno del contorno, e questo è vero poichè p e q non svaniscono.

(2) Supponiamo che q non svanisca nell'interno o sul contorno, ma che p svanisca. In questo caso $\frac{p}{q}$ può cambiare segno quando il punto mobile passa per una posizione nella quale p svanisce. Ma

alla fine del circuito p ha ripreso il suo segno primitivo, e così vi deve essere stato lo stesso numero di cambiamenti dal $+$ al $-$ come dal $-$ al $+$. Quindi k ed l sono eguali, e la regola asserisce che non vi è alcun punto radice nell'interno del contorno, e questo è vero poichè q non svanisce.

(3) Supponiamo che p non svanisca nell'interno o sul contorno, ma che q svanisca. In questo caso $\frac{p}{q}$ non svanisce mai, sicchè la regola asserisce che non vi è alcun punto radice nell'interno del contorno, e questo è vero poichè p non svanisce.

(4) Supponiamo che p e q svaniscano entrambe nell'interno o sul contorno. Se esse non svaniscono simultaneamente possiamo dividere lo spazio limitato dal contorno in altri spazii, per alcuni dei quali svanisca solamente p, e per altri svanisca solamente q; così otteniamo due o più contorni invece di uno, e questi cadono nei casi (2) e (3). Dobbiamo allora considerare solamente il caso in cui p e q svaniscono simultaneamente, sicchè vi è un punto radice nell'interno o sul contorno. E possiamo supporre il contorno così piccolo che vi sia solamente un distinto punto radice *nell'interno* di esso, e nessuno *su* di esso.

Siano a, b le coordinate di questo punto radice; e si ponga $x = a + r\cos\theta$, ed $y = b + r\,\mathrm{sen}\,\theta$; così

$$x + y\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1} + r(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta);$$

$$= a + b\sqrt{-1} + v, \text{ poniamo.}$$

Supponiamo ora che l'equazione $\varphi(z) = 0$ abbia la radice $a + b\sqrt{-1}$ ripetuta m volte; allora $\varphi(a + b\sqrt{-1} + v)$ prende la forma $cv^m + c_1 v^{m+1} + c_2 v^{m+2} + \ldots$, in cui c, c_1, c_2,... sono espressioni immaginarie della forma normale; sicchè possiamo supporre

$$c = h(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha),\quad c_1 = h_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha_1),\ldots$$

Quindi, pel teorema di De Moivre otterremo

$$\frac{p}{q} = \frac{h\cos(m\theta+\alpha) + h_1 r\cos\{(m+1)\theta+\alpha_1\} + h_2 r^2\cos\{(m+2)\theta+\alpha_2\} + \ldots}{h\,\mathrm{sen}(m\theta+\alpha) + h_1 r\,\mathrm{sen}\{(m+1)\theta+\alpha_1\} + h_2 r^2\,\mathrm{sen}\{(m+2)\theta+\alpha_2\} + \ldots}$$

Possiamo supporre r così piccolo che il numero dei cambiamenti di segno non dipenderà da r; cioè, possiamo procedere come se $\frac{p}{q} = \cot(m\theta + \alpha)$. E quando $m\theta$ *cresce* da un multiplo di π al multiplo seguente di π, vi è sempre un passaggio per zero accompagnato da un cambiamento di segno dal $+$ al $-$. Così abbiamo $k = 2m$, ed $l = 0$; sicchè $\frac{1}{2}(k-l) = m$, secondo la regola.

310. Il teorema è così dimostrato per un contorno infinitesimo; e considereremo ora il contorno finito $ABCD$. Sia diviso il contorno in un numero infinitamente grande di contorni infinitesimi, questi contorni essendo presi in modo che nessun punto radice cada *sopra* alcuno di essi. Allora il numero dei punti radici nell'interno di $ABCD$ si può trovare facendo che un punto descriva tutti questi contorni infinitesimi, ed aggiungendo insieme i numeri forniti dalla regola, che possiamo dinotare con $\frac{1}{2}\Sigma(k-l)$. Ma lo stesso risultato si otterrà se omettiamo tutte le linee interne di divisione, e riteniamo solamente il contorno $ABCD$. Infatti ciascun punto su di una linea interna di divisione appartiene a *due* contorni, ed è quindi percorsa dal punto descrivente due volte ed in direzioni *contrarie*; sicchè, se in un caso vi è un cambiamento in $\frac{p}{q}$ dal $+$ al $-$, vi è un cambiamento nell'altro caso dal $-$ al $+$, e nell'insieme il numero $\frac{1}{2}\Sigma(k-l)$ è inalterato. Quindi le linee interne di divisione possono essere omesse, ed il punto mobile può essere costretto a descrivere il contorno $ABCD$ solamente.

Così il teorema è dimostrato.

311. Possiamo ora dedurre immediatamente il teorema che un'equazione dell'n^{mo} grado deve avere n radici. Supponiamo che il contorno $ABCD$ sia un circolo con l'origine come centro e con un raggio infinitamente *grande*. Il valore di $\frac{p}{q}$ dipenderà ora solamente dal termine che contiene la più alta potenza di z in $\varphi(z)$; e se supponiamo che quel termine sia $h(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha)z^n$, avremo $\frac{p}{q} = \cot(n\theta + \alpha)$. Così otterremo $k = 2n$, ed $l = 0$; sicchè $\frac{1}{2}(k-l) = n$.

312. Abbiamo tracciata la figura nell'Art. 308 in modo che se da un punto qualunque nell'interno del contorno si tiri un raggio vettore in una direzione esso incontri il contorno solamente in un punto. Non è necessario però che la figura sia soggetta a questa restrizione; essa può essere tale che un raggio vettore condotto in una direzione incontri il contorno un numero *dispari* qualunque di volte. Quindi quando un punto si muove lungo il contorno il raggio vettore condotto al punto mobile da un'origine fissa nell'interno del contorno non girerà sempre nella stessa direzione: Per direzione positiva del movimento del punto descrivente dobbiamo intendere quella per la quale, benchè l'angolo descritto dal raggio vettore possa non essere *sempre* crescente, pure nell'insieme si guadagni l'angolo *positivo* 2π nel circuito.

La dimostrazione non sarà alterata ammettendo il genere di figura qui esaminato; poichè i contorni *infinitesimi* si possono ancora supporre, se ci piace, ovali che hanno solamente un raggio vettore condotto in una definita direzione da un'origine fissa. O pure se non adottiamo questa restrizione dobbiamo osservare che in fine dell'Art. 309, siccome ora θ non cresce sempre, vi debbono essere più valori di θ per i quali $\frac{p}{q}$ svanisce, di quelli che si considerarono; ma se avviene così, vi saranno esattamente tanti cambiamenti di più dal $+$ al $-$ quanti dal $-$ al $+$.

313. Abbiamo supposto da per tutto che non vi siano dei punti radici sul contorno considerato. Se ve ne fossero, non si fa alcun cambiamento nelle nostre investigazioni eccetto in fine dell'Art. 309; e qui invece di avere l'intervallo 2π per θ abbiamo solamente π, sicchè si trova m invece di $2m$ come il numero dei cambiamenti di segno.

314. Il teorema di Cauchy è dato nella *Penny Cyclopædia,* Articolo *Theory of Equations,* nella *Trigonometry and Double Algebra* del Sig. De Morgan, e nella Memoria del Sig. De Morgan citata nell'Art. 32: da queste sorgenti è stata ricavata la presente esposizione di quel teorema.

XXVI. REGOLA DI NEWTON E TEOREMA DI SYLVESTER.

315. Newton enunciò una regola relativa al numero delle radici positive, negative, ed immaginarie di un'equazione, la quale rimase senza dimostrazione sino alle recenti ricerche del Professor Sylvester, il quale ha stabilito un notevole teorema generale che include la regola di Newton come un caso particolare. Le sorgenti originali d'informazione sul soggetto sono le *Philosophical Transactions* pel 1864, le pubblicazioni della *London Mathematical Society*. No. II, ed il *Philosophical Magazine*, per Marzo 1866; da queste sorgenti è stata ricavata l'esposizione che ora daremo.

316. Incominciamo con l'enunciare la regola di Newton.

Sia $f(x)=0$ un'equazione algebrica dell'n^{mo} grado; e supponiamo

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_2x^{n-2}+\ldots+na_{n-1}x+a_n;$$

allora $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ si possono chiamare gli *elementi semplici* di $f(x)$.

Si formi una nuova serie di quantità $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ nel seguente modo:

$$A_0=a_0^2, \quad A_1=a_1^2-a_0a_2, \quad A_2=a_2^2-a_1a_3, \ldots\ldots$$
$$\ldots A_{n-1}=a^2_{n-1}-a_{n-2}a_n, \quad A_n=a_n^2;$$

allora $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ si possono chiamare gli *elementi quadratici* di $f(x)$.

Chiameremo a_r, a_{r+1} una *successione di elementi semplici*, ed A_r, A_{r+1} una *successione di elementi quadratici*; e chiameremo

$$a_r, \quad a_{r+1},$$
$$A_r, \quad A_{r+1},$$

una *coppia associata di successioni*.

Ora una successione può presentare o una permanenza o una variazione di segno; e ciò si dirà brevemente una permanenza o una variazione. Così in una coppia associata di successioni avremo uno dei quattro casi; due permanenze, o due variazioni, o una permanenza superiore con una variazione inferiore, o una variazione su-

periore con una permanenza inferiore: queste si possono chiamare rispettivamente una doppia permanenza, una doppia variazione, una permanenza-variazione ed una variazione-permanenza.

Ciò che segue è equivalente alla regola completa di Newton:

Si scriva l'intera serie degli elementi quadratici di $f(x)$ sotto l'intera serie degli elementi semplici nel loro ordine naturale; allora:

Il numero delle doppie permanenze nelle serie associate è un limite superiore del numero delle radici negative dell'equazione $f(x)=0$.

Il numero delle variazioni-permanenze è un limite superiore del numero delle radici positive.

Da ciascuna di queste due proposizioni segue l'altra cambiando il segno di x in $f(x)$.

Segue da queste due proposizioni che il numero totale delle radici reali non può eccedere il numero delle permanenze nella serie degli elementi quadratici; e, quindi il numero delle radici immaginarie non può essere minore del numero delle variazioni nella serie degli elementi quadratici.

Si deve notare che gli scrittori i quali hanno citato la regola di Newton sembra di essersi sempre limitati a quella parte che si riferisce al numero delle radici immaginarie.

317. Dichiareremo la regola di Newton con alcuni esempi.

Supponiamo $$2x^4-13x^2+10x-49=0.$$

Qui le serie degli elementi semplici e quadratici sono

$$2,\quad 0,\quad -\frac{13}{6},\quad \frac{10}{4},\quad -49,$$

$$4,\ \frac{13}{3},\quad \frac{169}{36},\ -\frac{1199}{12},\quad 2401.$$

Così sia che si supponga positivo o pur negativo lo zero che forma il secondo degli elementi semplici, troviamo che vi è una doppia permanenza, ed una variazione-permanenza; così non vi può essere più di una radice positiva, e non vi può essere più di una radice negativa: vi sono quindi certamente due radici immaginarie.

Questi risultati sono d'accordo con quelli nell'Art. 203. In questo esempio la regola di Descartes indicherebbe che non vi possono essere più di *tre* radici positive; sicchè la regola di Newton ci dà più completa informazione che quella di Descartes.

In seguito supponiamo $x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1=0$.

Scriveremo la serie degli elementi semplici, ed i segni degli elementi quadratici:

$$1,\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{15},\ -\frac{1}{20},\ \frac{1}{15},\ -\frac{1}{6},\ 1,$$

$$+,\ +,\ +,\ +,\ -,\ -,\ +,$$

Qui vi sono due doppie permanenze, e due variazioni permanenze; sicchè per la regola di Newton non vi possono essere più di due radici positive, e non vi possono essere più di due radici negative.

La regola di Descartes indicherebbe che non vi possono essere più di *quattro* radici positive.

In questo esempio si può mostrare col teorema di Sturm che tutte le radici sono immaginarie; o pure possiamo ottenere lo stesso risultato così: È chiaro che non vi può essere alcuna radice positiva maggiore dell'unità; e l'equazione si può scrivere nelle forme

$$x^6+(1-x)(1+x^2-x^4)=0,\quad x^3(x+1)^2(x-1)+x^2-x+1=0,$$

le quali mostrano rispettivamente che non vi è alcuna radice positiva minore dell'unità, ed alcuna radice negativa.

Scriveremo la serie degli elementi semplici, ed i segni degli elementi quadratici:

$$1,\ -2,\ 4,\ 0,\ \frac{41}{5},\ \frac{4567}{6},\ -89042,$$

$$+,\ 0,\ +,\ -,\ +,\ +,\ +.$$

Vi è una doppia permanenza sia che supponiamo positivo o pur negativo lo zero nella serie superiore, ed una variazione-permanenza se supponiamo negativo lo zero nella serie inferiore; sicchè per la regola di Newton non vi può essere più di una radice positiva, e non vi può essere più di una radice negativa.

La regola di Descartes indicherebbe che non vi possono essere più di *tre* radici positive.

In questo esempio conosciamo per l'Art. 21 che vi è certamente una radice positiva ed una radice negativa; si troverà per tentativi che la prima cade tra 1 e 10, e la seconda tra -1 e -10.

318. Gli esempi precedenti mostrano che la regola di Newton si può spesso applicare con facilità. È chiaro che essa ci dice sempre tanto quanto la regola di Descartes, e spesso ci dice di più. Poichè rispetto alle radici positive, per esempio, la regola di Descartes prende il numero delle variazioni nella serie degli elementi semplici, mentre quella di Newton rigetta quelle variazioni che sono accompagnate da una permanenza nella serie degli elementi quadratici.

319. Questo che segue è il teorema del Professor Sylvester.

Sia $f(x+\lambda)$ ordinata secondo le potenze di x; si formi la serie degli elementi semplici e la serie degli elementi quadratici, ed il numero delle doppie permanenze si chiami il numero delle doppie permanenze dovute a λ, e si dinoti con $\varpi(\lambda)$. Similmente il numero delle doppie permanenze per $f(x+\mu)$ si chiami il numero delle doppie permanenze dovute a μ, e si dinoti con $\varpi(\mu)$. Si supponga μ maggiore di λ; allora $\varpi(\mu)-\varpi(\lambda)$ è o eguale al numero delle radici dell'equazione $f(x)=0$ tra λ e μ, o sorpassa quel numero per qualche intero pari.

320. Prima di dimostrare questo teorema mostreremo che esso include la regola di Newton.

Si ponga 0 per μ e $-\alpha$ per λ. Abbiamo $\varpi(-\alpha)=0$; poichè quando λ è $-\alpha$, gli elementi semplici di $f(x+\lambda)$ sono alternativamente positivi e negativi, sicchè non vi possono essere doppie permanenze.

Così $\varpi(0)=\varpi(0)-\varpi(-\alpha)$.

Quindi, pel teorema qui sopra, $\varpi(0)$ è o eguale al numero delle radici dell'equazione $f(x)=0$ tra $-\alpha$ e 0, o sorpassa quel numero per qualche intero pari. Ciò stabilisce la prima parte della regola di Newton, da cui seguono le altre parti.

321. Gli elementi semplici di $f(x+\lambda)$ sono

$$\frac{f^n(\lambda)}{\lfloor n}, \quad \frac{1}{n}\frac{f^{n-1}(\lambda)}{\lfloor n-1}, \quad \frac{1\cdot 2}{n(n-1)}\frac{f^{n-2}(\lambda)}{\lfloor n-2}, \ \ldots\ldots \frac{1}{n}f'(\lambda), f(\lambda).$$

Non si farà alcun cambiamento nel segno se moltiplichiamo ogni elemento per $\underline{|n}$; così la serie diviene

$$f^n(\lambda),\ f^{n-1}(\lambda),\ 1\cdot 2f^{n-2}(\lambda),\ \underline{|3}f^{n-3}(\lambda),\ldots\ldots\underline{|n-1}f'(\lambda),\ \underline{|n}f(\lambda).$$

Similmente omettendo il quadrato di $\underline{|r-1}$ dall'r^{mo} elemento quadratico otteniamo la serie

$$G_n(\lambda),\ G_{n-1}(\lambda),\ G_{n-2}(\lambda),\ \ldots\ldots\ G_1(\lambda),\ G(\lambda),$$

in cui $\quad G_r(\lambda)$ sta per $\{f^r(\lambda)\}^2-\gamma_r f^{r-1}(\lambda)f^{r+1}(\lambda)$,

$$\gamma_r \text{ dinotando } \frac{n-r+1}{n-r}.$$

Dobbiamo allora determinare le leggi del cambiamento nel numero delle doppie permanenze nelle serie associate

$$f^n(t),\ f^{n-1}(t),\ f^{n-2}(t),\ \ldots\ldots\ f^1(t),\ f(t),$$

$$G_n(t),\ G_{n-1}(t),\ G_{n-2}(t),\ \ldots\ldots\ G_1(t),\ G(t),$$

al crescere di t.

Nessun cambiamento può aver luogo se non quando t passa per un valore che annulla uno o più termini in una o in tutte e due le serie di elementi.

322. Sarà necessario d'investigare il valore della funzione derivata di un elemento quadratico; dinoti $G_m(t)$ l'elemento quadratico, e $G'_m(t)$ la sua funzione derivata.

Per ottenere $G'_m(t)$ dobbiamo supporre che si sviluppi $G_m(t+h)$ secondo le potenze di h, e si prenda il coefficiente di h.

$$\begin{aligned} G_m(t+h) &= \{f^m(t+h)\}^2-\gamma_m f^{m-1}(t+h)f^{m+1}(t+h) \\ &= \{f^m(t)+hf^{m+1}(t)+\ldots\}^2 \\ &\quad -\gamma_m\{f^{m-1}(t)+hf^m(t)+\ldots\}\{f^{m+1}(t)+hf^{m+2}(t)+\ldots\}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di h è

$$(2-\gamma_m)f^m(t)f^{m+1}(t)-\gamma_m f^{m+2}(t).$$

Ora è facile vedere che

$$2-\gamma_m=\frac{1}{\gamma_{m+1}};$$

così
$$G'_m(t) = \frac{1}{\gamma_{m+1}} f^m(t) f^{m+1}(t) - \gamma_m f^{m-1}(t) f^{m+2}(t)$$
$$= \frac{1}{\gamma_{m+1}} f^m(t) f^{m+1}(t) - \frac{\{f^m(t)\}^2}{f^{m+1}(t)} f^{m+2}(t) + \frac{f^{m+2}(t)}{f^{m+1}(t)} G_m(t)$$
$$= \frac{f^m(t)}{\gamma_{m+1} f^{m+1}(t)} G_{m+1}(t) + \frac{f^{m+2}(t)}{f^{m+1}(t)} G_m(t).$$

323. Supponiamo che un solo termine nella serie degli elementi semplici intermedio tra il primo e l'ultimo svanisca quando $t = c$, supponiamo $f^r(c) = 0$.

Sia h una quantità indefinitamente piccola; questo sarà il significato di h durante l'investigazione: allora $f^r(c+h)$ ha il segno di $hf^{r+1}(c)$. Così i termini associati

$$f^{r+1}(c+h),\ f^r(c+h),\ f^{r-1}(c+h),$$
$$G_{r+1}(c+h),\ G_r(c+h),\ G_{r-1}(c+h),$$

hanno gli stessi segni di

$$f^{r+1}(c),\ hf^{r+1}(c),\ f^{r-1}(c),$$
$$\left\{f^{r+1}(c)\right\}^2,\ -f^{r+1}(c) f^{r-1}(c),\ \left\{f^{r-1}(c)\right\}^2.$$

Se $f^{r+1}(c)$ ed $f^{r-1}(c)$ hanno lo stesso segno, i termini qui considerati non hanno alcuna doppia permanenza. Se $f^{r+1}(c)$ ed $f^{r-1}(c)$ hanno segni contrarii, vi è una doppia permanenza sia che si supponga h negativa o pur positiva.

Così non si fa alcun cambiamento nel numero delle doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

324. Supponiamo che un solo termine nella serie degli elementi quadratici intermedio tra il primo e l'ultimo svanisca quando $t = c$, supponiamo $G_r(c) = 0$.

Poichè $G_r(c) = 0$ ne segue che $f^{r-1}(c)$ ed $f^{r+1}(c)$ hanno lo stesso segno. Così i termini associati

$$f^{r+1}(c+h),\ f^r(c+h),\ f^{r-1}(c+h),$$
$$G_{r+1}(c+h),\ G_r(c+h),\ G_{r-1}(c+h),$$

hanno gli stessi segni di

$$f^{r+1}(c), \quad f^r(c), \; f^{r-1}(c),$$

$$G_{r+1}(c), \; hG'_r(c), \; G_{r-1}(c),$$

e per l'Art. 322 il segno di $G_r'(c)$ è lo stesso che quello di

$$\frac{f^r(c)}{f^{r+1}(c)} \cdot G_{r+1}(c).$$

Se $f^{r+1}(c)$ ed $f^r(c)$ hanno segni contrarii, i termini qui considerati non hanno alcuna doppia permanenza.

Se $f^{r+1}(c)$ ed $f^r(c)$ hanno lo stesso segno, e $G_{r+1}(c)$ e $G_{r-1}(c)$ hanno segni contrarii, vi è una doppia permanenza sia che si supponga h negativa o positiva.

Se $f^{r+1}(c)$ ha lo stesso segno di $f^r(c)$, e $G_{r+1}(c)$ lo stesso segno di $G_{r-1}(c)$, non vi è alcuna doppia permanenza quando h è negativa, e ve ne sono due quando h è positiva: così in questo caso si guadagnano due doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

325. Supponiamo che più termini consecutivi nella serie degli elementi semplici svaniscano quando $t=c$, supponiamo

$$f^{r+s-1}(c)=0, \; f^{r+s-2}(c)=0, \; \ldots f^r(c)=0.$$

Così supponiamo che svaniscano s termini consecutivi, e siccome $f^n(c)$ è una costante che non può svanire, $r+s$ non può essere maggiore di n: supponiamo che r non sia zero.

Dobbiamo considerare i cambiamenti nei segni di

$$f^{r+s}(t), \; f^{r+s-1}(t), \; f^{r+s-2}(t), \ldots f^r(t), \; f^{r-1}(t),$$

$$G_{r+s}(t), \; G_{r+s-1}(t), \; G_{r+s-2}(t), \ldots G_r(t), \; G_{r-1}(t),$$

prodotti quando t cresce passando pel valore c. Poniamo $\varphi(c)$ in luogo di $f^{r+s}(c)$; allora quando $t=c+h$, i segni degli elementi semplici qui considerati sono gli stessi che i segni di

$$\varphi(c), \; h\varphi(c), \; h^2\varphi(c), \ldots h^s\varphi(c), \; f^{r-1}(c).$$

Procediamo ad investigare i segni degli elementi quadratici:

$$G_{r+s}(c) = \left\{ f^{r+s}(c) \right\}^2, \text{ che è positivo,}$$

$$G_{r-1}(c) = \left\{ f^{r-1}(c) \right\}^2, \text{ che è positivo,}$$

$$G_r(c+h) = \left\{ f^r(c+h) \right\}^2 - \gamma_r f^{r-1}(c+h) f^{r+1}(c+h):$$

si sviluppi secondo le potenze di h e si prenda il termine che contiene la più piccola potenza di h: così otteniamo

$$-\gamma_r f^{r-1}(c)\, \varphi(c) \frac{h^{s-1}}{\underline{|s-1}},$$

sicchè il segno è lo stesso che quello di

$$-f^{r-1}(c)\, \varphi(c)\, h^{s-1}.$$

Mostreremo ora che gli altri elementi quadratici che dobbiamo considerare sono positivi. Infatti

$$G_m(c+h) = \left\{ f^m(c+h) \right\}^2 - \gamma_m f^{m-1}(c+h) f^{m+1}(c+h);$$

si ponga μ invece di $r+s-m$; allora sviluppando e formando il termine che contiene la più piccola potenza di h otteniamo

$$\left\{ \frac{\varphi(c) h^{\mu}}{\underline{|\mu}} \right\}^2 - \gamma_m \varphi(c) \frac{h^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} \varphi(c) \frac{h^{\mu-1}}{\underline{|\mu-1}};$$

il segno di questo è lo stesso che il segno di

$$\frac{\mu+1}{\mu} - \gamma_m,$$

cioè il segno di

$$\frac{r+s-m+1}{r+s-m} - \frac{n-m+1}{n-m};$$

cioè il segno di

$$\frac{1}{r+s-m} - \frac{1}{n-m}:$$

Ora $r+s$ non è maggiore di n sicchè il segno non è mai negativo; il caso in cui $r+s=n$ richiederà ulteriore esame.

In questo caso

$$f^r(c)=0,\ f^{r+1}(c)=0, \dots f^{n-1}(c)=0;$$

e siccome $f^r(t)$ è di $n-r$ dimensioni in t ne segue che tutte le radici di $f^r(t)=0$ sono eguali a c. Così $f^r(t)$ è della forma $C(t-c)^{n-r}$ in cui C è una costante.

Allora
$$f^{r+1}(t)=C(n-r)(t-c)^{n-r-1}$$
$$f^{r+2}(t)=C(n-r)(n-r-1)(t-c)^{n-r-2};$$

e così si troverà che $G_{r+1}(t)$ è identicamente zero. E similmente si troverà che $G_{r+2}(t)$, $G_{r+3}(t) \dots G_{n-1}(t)$ sono tutti identicamente zero.

Adotteremo la convenzione che questi elementi quadratici che sono identicamente zero si supporranno avere il segno *positivo;* e così il caso in cui $r+s=n$ condurrà agli stessi risultati come quello in cui $r+s$ è minore di n.

Così finalmente i segni dei termini delle serie associate che dobbiamo considerare sono gli stessi che i segni di

$$\varphi(c),\ h\varphi(c),\ h^2\varphi(c), \dots\dots\dots\dots\dots h^s\varphi(c),\ f^{r-1}(c),$$
$$+,\quad +,\quad +\dots\dots+,\ -h^{s-1}\varphi(c)f^{r-1}(c),\ +.$$

Possiamo ora accertare il numero delle doppie permanenze; i risultati seguenti si otterranno facilmente:

Supponiamo s pari, e $\varphi(c)$ ed $f^{r-1}(c)$ dello stesso segno; quando h è negativa vi è una doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono $s-1$: così si guadagnano $s-2$ doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

Supponiamo s pari, e $\varphi(c)$ ed $f^{r-1}(c)$ di segni contrarii ;quando h è negativa non vi è alcuna doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono s: così se ne guadagnano s.

Supponiamo s dispari, e $\varphi(c)$ ed $f^{r-1}(c)$ dello stesso segno; quando h è negativa non vi è alcuna doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono $s-1$: così se ne guadagnano $s-1$.

Supponiamo s dispari, e $\varphi(c)$ ed $f^{r-1}(c)$ di segni contrarii; quando h è negativa vi è una doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono s: così se ne guadagnano $s-1$.

Quindi si guadagna un numero *pari* di doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

326. Supponiamo che più termini consecutivi nella serie degli elementi quadratici svaniscano quando $t=c$, supponiamo

$$G_{r+s-1}(c)=0,\quad G_{r+s-2}(c)=0,\ldots\ldots G_r(c)=0.$$

Così supponiamo che svaniscano s termini consecutivi, e siccome $G_n(c)$ è una costante che non può svanire, $r+s$ non può essere maggiore di n: supponiamo che r non sia zero.

In conseguenza dell'annullarsi degli s elementi quadratici consecutivi, abbiamo le seguenti condizioni tra gli elementi semplici compresi tra $f_{r+s}(c)$ ed $f_{r-1}(c)$, l'uno e l'altro inclusivamente:

$$f_{r+s}(c),\ f_{r+s-2}(c),\ f_{r+s-4}(c),\ldots \text{ sono tutti dello stesso segno;}$$

$$f_{r+s-1}(c),\ f_{r+s-3}(c),\ f_{r+s-5}(c),\ldots \text{ sono tutti dello stesso segno.}$$

Se i termini nel secondo gruppo hanno il segno contrario a quello dei termini del primo gruppo non vi è alcuna doppia permanenza quando $t=c+h$, sia che si supponga h positiva o negativa.

Dobbiamo quindi considerare solamente il caso in cui i termini nei due gruppi hanno tutti lo stesso segno.

Siano $G_{m+1}(t)$ e $G_m(t)$ due elementi quadratici consecutivi qualunque compresi tra $G_{r+s}(t)$ e $G_r(t)$, l'uno e l'altro inclusivamente: allora $G_{m+1}(c+h)$ e $G_m(c+h)$ avranno segni contrarii quando h è negativa, e lo stesso segno quando h è positiva.

Infatti per l'Art. 322,

$$G'_m(t)=\frac{f^m(t)}{\gamma_{m+1}f^{m+1}(t)}\,G_{m+1}(t)+\frac{f^{m+2}(t)}{f^{m+1}(t)}\,G_m(t).$$

Si ponga $c+h$ per t, e si sviluppi secondo le potenze di h.

Supponiamo che in $G_m(c+h)$ il termine che contiene la più piccola potenza di h sia $\frac{R}{\lfloor\underline{\rho}}h^\rho$, sicchè R è il valore del ρ^{mo} coefficiente differenziale di $G_m(c)$ rispetto a c. Allora il termine che contiene la più piccola potenza di h in $G'_m(c+h)$ sarà $\frac{R}{\lfloor\underline{\rho-1}}h^{\rho-1}$. Quindi

dall'equazione precedente il termine che contiene la più piccola potenza di h in $G_{m+1}(c+h)$ sarà

$$\frac{\gamma_{m+1} f^{m+1}(c)}{f^{m}(c)\underline{|\rho-1}} Rh^{\rho-1}.$$

Quindi finalmente $G_m(c+h)$ ha il segno di Rh^{ρ} e $G_{m+1}(c+h)$ ha il segno di $Rh^{\rho-1}$; sicchè $G_{m+1}(c+h)$ e $G_m(c+h)$ hanno segni contrarii quando h è negativa, ed hanno lo stesso segno quando h è positiva.

Così gli elementi semplici che dobbiamo considerare hanno tutti lo stesso segno; e gli elementi quadratici compresi tra $G_{r+s}(c+h)$ e $G_r(c+h)$, l'uno e l'altro inclusivamente, hanno segni alternati quando h è negativa ed hanno lo stesso segno quando h è positiva.

Possiamo ora determinare il numero delle doppie permanenze; i risultati seguenti si otterranno facilmente:

Supponiamo s pari, e $G_{r+s}(c)$ e $G_{r-1}(c)$ dello stesso segno; quando h è negativa vi è una doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono $s+1$: così si guadagnano s doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

Supponiamo s pari, e $G_{r+s}(c)$ e $G_{r-1}(c)$ di segni contrarii; quando h è negativa non vi è alcuna doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono s: così se ne guadagnano s.

Supponiamo s dispari, e $G_{r+s}(c)$ e $G_{r-1}(c)$ dello stesso segno; quando h è negativa non vi è alcuna doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono $s+1$: così se ne guadagnano $s+1$.

Supponiamo s dispari, e $G_{r+s}(c)$ e $G_{r-1}(c)$ di segni contrarii: quando h è negativa vi è una doppia permanenza, e quando h è positiva ve ne sono s: così se ne guadagnano $s-1$.

Quindi si guadagna un numero *pari* di doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

327. Consideriamo ora ciò che avviene quando svanisce un termine estremo.

$f^{n}(t)$ e $G_n(t)$ sono costanti, e non possono mai svanire; e $G(t)$ è essenzialmente positivo.

Supponiamo però che $f^{s-1}(c)=0$, $f^{s-2}(c)=0, \ldots f(c)=0$, sicchè c è una radice dell'equazione $f(x)=0$ ripetuta s volte. Allora, come nell'Art. 325, gli ultimi $s+1$ termini delle serie associate avranno quando $t=c+h$ gli stessi segni di

$$f^s(c), \quad hf^s(c), \quad h^2 f^s(c), \ldots\ldots\ldots\ldots h^{s-1} f^s(c), \quad h^s f_1^s(c),$$

$$+, \quad 2-\gamma_{s-1}, \quad \frac{3}{2}-\gamma_{s-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{s}{s-1}-\gamma_1, \quad +.$$

Qui quando h è negativa non vi sono doppie permanenze, e quando h è positiva ve ne sono s: così si guadagnano s doppie permanenze quando t cresce passando pel valore c.

328. Ciò completa la dimostrazione del teorema. Il risultato generale si è che il numero delle doppie permanenze appartenenti alle serie associate cresce di almeno tante unità quante sono le radici reali, eguali o disuguali, che sono sorpassate quando t cresce da un valore particolare ad un altro; e l'eccesso, se vi è, di tal numero sul numero delle radici reali sarà un numero pari.

Così, con la notazione dell'Art. 319, sappiamo che il numero delle radici reali tra λ e μ non può eccedere $\varpi(\mu)-\varpi(\lambda)$. Se *conosciamo* che alcune delle doppie permanenze guadagnate provengono dall'annullarsi di alcuni degli elementi eccetto $f(t)$ possiamo naturalmente fare una corrispondente riduzione nel numero estremo delle radici reali. Così per esempio, supponiamo che s doppie permanenze si siano guadagnate nel modo considerato nell'Art. 325, allora il numero delle radici reali tra λ e μ non è maggiore di $\varpi(\mu)-\varpi(\lambda)-s$.

329. Si può dare una certa estensione al teorema attribuendo un altro valore a γ_r. La principale proprietà di γ_r che si richiede nella precedente investigazione è quella usata nell'Art. 322, cioè,

$$\frac{1}{\gamma_{r+1}} = 2-\gamma_r.$$

Possiamo quindi esaminare quale forma di γ_r soddisferà a questa equazione. Risolveremo l'equazione, benchè il procedimento richiederà dallo studente una conoscenza degli elementi del Calcolo delle Differenze finite.

Si ponga
$$\gamma_r = \frac{u_r}{u_{r+1}};$$
così
$$2 - \frac{u_r}{u_{r+1}} = \frac{u_{r+2}}{u_{r+1}};$$
quindi
$$u_{r+2} - 2u_{r+1} + u_r = 0.$$

La soluzione di questa equazione è
$$u_r = A + B(r-1),$$
in cui A e B sono costanti.

Quindi
$$\gamma_r = \frac{A + B(r-1)}{A + Br}$$
$$= \frac{C + r - 1}{C + r},$$
in cui C sta per $\frac{A}{B}$.

Lo studente che non ha cognizione del Calcolo delle Differenze finite può verificare facilmente che questo valore di γ_r soddisfa alla relazione
$$\frac{1}{\gamma_{r+1}} = 2 - \gamma_r.$$

Dobbiamo anche soddisfare alla condizione che γ_r sia positivo, ed anche alla condizione supposta nell'Art. 325, che $\frac{\mu+1}{\mu} - \gamma_m$ sia positivo; queste condizioni saranno soddisfatte se C è una quantità positiva qualunque, ed anche se C è negativa purchè non cada tra 0 e $-n$.

330. Il Professor Sylvester osserva che il suo teorema serba la stessa relazione alla regola di Newton di quella che il teorema di Fourier serba alla regola di Descartes. Il teorema di Fourier può essere enunciato così:

Si formino gli elementi semplici corrispondenti a $f(x+\lambda)$ ed a $f(x+\mu)$. Dinotino $p(\lambda)$ e $p(\mu)$ i numeri corrispondenti di permanenze di segno; e si supponga μ maggiore di λ. Allora $p(\mu) - p(\lambda)$ è o eguale al numero delle radici dell'equazione $f(x) = 0$ tra λ e μ, o sorpassa quel numero di qualche intero pari.

331. Abbiamo dato nell'Art. 106 una semplice proposizione che somiglia ad un caso speciale della regola di Newton; ed è facile di estendere la proposizione in modo da convertire la somiglianza in una coincidenza. In fatti si prenda l'equazione ivi ottenuta,

$$y^{r+1}+\frac{(n-r)p_r}{p_{r+1}}y^r+\frac{(n-r+1)(n-r)}{1\cdot 2}\frac{p_{r-1}}{p_{r+1}}y^{r-1}+\ldots=0;$$

questa equazione ha almeno tante radici immaginarie quante ne ha una qualunque delle sue equazioni derivate. Si prenda la $(r-1)^{\text{ma}}$ equazione derivata, che è

$$\frac{(r+1)r}{1\cdot 2}y^2+\frac{r(n-r)p_r}{p_{r+1}}y+\frac{(n-r+1)(n-r)}{1\cdot 2}\frac{p_{r-1}}{p_{r+1}}=0.$$

Questa equazione ha radici immaginarie se

$$(n-r)rp_r^2-(n-r+1)(r+1)p_{r-1}p_{r+1}$$

è negativa; e quindi in questo caso l'equazione primitiva

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0$$

ha radici immaginarie.

Si troverà che la condizione precedente equivale ad essere uno degli *elementi quadratici* negativo; e siccome il primo e l'ultimo elemento quadratico sono positivi, vi debbono essere almeno due variazioni negli elementi quadratici e quindi almeno due radici immaginarie. Si vegga l'Art. 316.

Questo caso speciale della regola di Newton, e solamente questo, era stato stabilito prima delle ricerche del Professor Sylvester.

332. Se consideriamo la bellezza intrinseca del teorema che è stato ora esposto, l'interesse che appartiene alla regola associata col grande nome di Newton, ed il lungo intervallo di anni durante il quale la ragione e l'estensione di quella regola rimasero nascoste ai matematici, tra i quali sono esplicitamente inclusi Maclaurin, Waring, ed Eulero, dobbiamo riguardare le ricerche del Professor Sylvester come tra le più importanti contribuzioni fatte nei tempi moderni alla Teoria delle Equazioni, da porsi a buon dritto in linea con quelle di Fourier, Sturm e Cauchy.

XXVII. SPARIZIONE DEI TERMINI DA UN'EQUAZIONE.

333. Abbiamo già mostrato nell'Art. 56 in qual modo trasformare un'equazione in un'altra che manchi di un termine assegnato. Considereremo ora questo soggetto più generalmente, e mostreremo come si possa far sparire teoreticamente un numero qualunque di termini. Il metodo di trasformazione che spiegheremo è chiamato dal nome del suo inventore Tschirnhausen.

334. Supponiamo che si abbia l'equazione

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si ponga

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

in cui m è un intero minore di n, ed $a_0, a_1, \ldots a_m$ sono costanti per ora indeterminate. Ci proponiamo di eliminare x, e così formare un'equazione in termini di y. Siccome vi sono tanti valori di y quanti di x l'equazione in y sarà del grado n.

L'eliminazione si può effettuare così: si elevi l'equazione (2) alle potenze dinotate da 2, 3, ... n; e per mezzo di (1) si abbassino gli esponenti di x, sicchè nessuno di essi eccederà $n-1$, nel modo seguente,

$$x^n = -p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots\ldots - p_{n-1} x - p_n,$$

$$x^{n+1} = -p_1 x^n - p_2 x^{n-1} - \ldots\ldots - p_{n-1} x^2 - p_n x;$$

si sostituisca per x^n il suo valore dalla linea precedente, ed abbiamo x^{n+1} espresso in termini di x^{n-1} e delle potenze inferiori di x; indi si moltiplichi per x e si sostituisca come sopra, ed abbiamo x^{n+2} espresso similmente; e così di seguito. Così otterremo risultati della seguente forma:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}, \\ y^3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_{n-1} x^{n-1}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3);$$

Qui $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ sono funzioni intere omogenee del *secondo* grado delle quantità indeterminate $a_0, a_1, \ldots a_m$; ancora $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$

sono funzioni intere omogenee del *terzo* grado di $a_0, a_1, \dots a_m$; e così di seguito.

Dinotino $s_1, s_2, s_3, \dots$ le somme delle prime, seconde, terze, ... potenze delle radici di (1); e dinotino $S_1, S_2, S_3, \dots$ le somme delle prime, seconde, terze, ... potenze delle radici dell'equazione richiesta in y. Allora da (2) e (3) abbiamo

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= na_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_{m-1}s_{m-1} + a_ms_m, \\ S_2 &= nb_0 + b_1s_1 + b_2s_2 + \dots + b_{n-1}s_{n-1}, \\ S_3 &= nc_0 + c_1s_1 + c_2s_2 + \dots + c_{n-1}s_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n &= nk_0 + k_1s_1 + k_2s_2 + \dots + k_{n-1}s_{n-1}. \end{aligned}\right\} \dots (4).$$

Così, siccome le somme delle potenze delle radici dell'equazione in y sono conosciute possiamo costruire l'equazione; si vegga l'Art. 244.

O pure possiamo procedere così: dalle equazioni (3) possiamo ottenere i valori di $x, x^2, \dots x^{n-1}$ in termini delle potenze di y; quindi sostituendo in (2) abbiamo l'equazione richiesta in y. Questo metodo ha il vantaggio di dare x come una funzione razionale di y, e così il valore di ciascuna radice di (1) sarà conosciuta non appena l'equazione in y è risoluta.

335. Possiamo ora prendere le quantità sinora indeterminate $a_0, a_1, \dots a_m$ in modo da far sparire alcuni termini dall'equazione in y. Per esempio, supponiamo che si vogliano far sparire i coefficienti degli m termini che succedono al primo; sarà sufficiente di porre

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \dots\dots S_m = 0.$$

Ma dalle equazioni (4) vediamo che S_1 è del primo grado rispetto ad $a_0, a_1, \dots a_m$, che S_2 è del secondo grado, S_3 del terzo grado, e così di seguito. Quindi per l'Art. 259 la determinazione di queste quantità $a_0, a_1, \dots a_m$, di cui una si può prendere arbitrariamente, dipenderà dalla risoluzione di un'equazione del grado $\underline{|m-1}$.

336. Faremo un'applicazione del metodo precedente che è di speciale interesse in relazione alle equazioni del quinto grado: si richiederà una proposizione preliminare che ora daremo.

337. *Una funzione intera omogenea del secondo grado di* n *variabili si può esprimere come la somma dei quadrati di* ν *funzioni lineari, il numero* ν *non essendo maggiore di* n.

Sia V una funzione intera omogenea del secondo grado delle n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Se $n=1$, la funzione contiene solamente una variabile, sicchè essa è della forma βx_1^2, cioè, $(x_1\sqrt{\beta})^2$.

Supponiamo che n sia maggiore di 1, e che V contenga il quadrato di una delle variabili, per esempio x_1^2; allora ordinando secondo le potenze di x otteniamo

$$V=\beta x_1^2+2Qx_1+R,$$

in cui β è una costante, Q è una funzione lineare delle $n-1$ variabili, $x_2, x_3, \ldots x_n$, ed R è una funzione intera omogenea del secondo grado di queste $n-1$ variabili.

Si ponga $$X_1=x_1+\frac{Q}{\beta}, \quad V_1=R-\frac{Q^2}{\beta};$$

così $$V=(X_1\sqrt{\beta})^2+V_1,$$

e V_1 è una funzione intera omogenea del secondo grado al più di $n-1$ variabili.

In seguito supponiamo che V non contenga il quadrato di alcuna delle variabili; allora, ordinando V rispetto alle due variabili x_1 ed x_2, abbiamo

$$V=\beta x_1x_2+Qx_1+Rx_2+S$$

$$=\beta\left(x_1+\frac{R}{\beta}\right)\left(x_2+\frac{Q}{\beta}\right)+S-\frac{QR}{\beta},$$

Si ponga $$X_1=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2+\frac{Q+R}{\beta}\right),$$

$$X_2=\frac{1}{2}\left(x_1-x_2-\frac{Q-R}{\beta}\right),$$

$$V_2=S-\frac{QR}{\beta};$$

così $$V=\beta(X_1^2-X_2^2)+V_2=(X_1\sqrt{\beta})^2+(X_2\sqrt{-\beta})^2+V_2.$$

Qui X_1 ed X_2 sono funzioni lineari che possono contenere le n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$; e V_2 è una funzione intera omogenea del secondo grado che contiene al più $n-2$ variabili.

Così nel primo caso la funzione V che contiene n variabili è fatta la somma di un certo quadrato e di V_1, in cui V_1 contiene al più solamente $n-1$ variabili; e nel secondo caso V è fatta la somma di due quadrati e di V_2, in cui V_2 contiene al più solamente $n-2$ variabili. Quindi continuando il procedimento su V_1 o V_2 esprimeremo finalmente V come la somma di non più che n quadrati.

338. Sia un'equazione

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0.$$

Si ponga $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

Dinotiamo l'equazione in y ottenuta eliminando x con

$$y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_n = 0.$$

Ora dall'Art. 334 seguirà che $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots$ sono rispettivamente del primo, secondo, terzo, ... grado rispetto alle quantità a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Supponiamo allora che si vogliano far sparire i termini secondo, terzo, e quarto dall'equazione in y. Poniamo

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

La prima di queste equazioni è del primo grado. Supponiamo che si ottenga da essa a_0 in termini di a_1, a_2, a_3, a_4, e si sostituisca nella seconda e nella terza equazione; ed allora si dinotino queste equazioni con

$$q_2' = 0, \quad q_3' = 0.$$

Qui q_2' è una funzione intera omogenea del secondo grado rispetto ad a_1, a_2, a_3, a_4; e q_3' è una funzione intera omogenea del terzo grado.

Per l'Art. 337 l'equazione $q_2' = 0$ si può mettere nella forma

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0.$$

in cui f, g, h, e k sono funzioni lineari. Questa equazione sarà soddisfatta ponendo

$$f = g\sqrt{-1} \qquad h = k\sqrt{-1};$$

queste due equazioni sono lineari. Supponiamo che si ricavino da esse i valori di a_1 ed a_2 in termini di a_3 ed a_4 e si sostituiscano nell'equazione $q_3' = 0$; ed allora si dinoti questa equazione con

$$q_3'' = 0.$$

Qui q_3'' è una funzione intera omogenea del terzo grado rispetto ad a_3 ed a_4. Una di queste quantità si può prendere arbitrariamente e l'altra si può allora trovare con la risoluzione di un'equazione cubica.

Se vogliamo far sparire i termini secondo, terzo, e quinto dall'equazione in y il procedimento sarà simile ma l'equazione finale sarà del quarto grado.

339. Se con la trasformazione di Tschirnhausen combiniamo quella di cambiare la quantità ignota nella sua reciproca possiamo con l'aiuto di una sola equazione del terzo o del quarto grado far sparire da un'equazione i tre termini che precedono l'ultimo, o pure i due termini che precedono l'ultimo, insieme col quinto contando dall'ultimo.

340. Così vediamo che l'equazione generale del quinto grado si può sempre ridurre ad una delle seguenti forme:

$$x^5+px+q=0,\quad x^5+px^2+q=0,\quad x^5+px^3+q=0,\quad x^5+px^4+q=0.$$

341. Gli Articoli precedenti di questo Capitolo sono stati ricavati dal *Cours d'Algèbre Supérieure* di Serret.

La riduzione dell'equazione del quinto grado alla forma dell'Articolo precedente fu data dal Sig. Jerrard; apparisce da uno scritto del Sig. Harley nel *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. VI, che il risultato era stato previamente ottenuto da E. S. Bring, un matematico Svedese.

Il Sig. Jerrard considerava che la risoluzione algebrica delle equazioni del quinto grado potesse effettuarsi; il metodo da lui proposto formò il soggetto di una ricerca del Sig. W. R. Hamilton nei *Reports of the British Association*, Vol. VI. La maggior parte dei matematici ammette che Abel abbia dimostrato l'impossibilità della risoluzione algebrica delle equazioni di un grado superiore al quar-

to. Un sunto della esposizione data dal Sig. W. R. Hamilton dell'argomentazione di Abel si troverà nel *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. v.

Una dimostrazione più semplice dovuta a Wantzel si troverà nel *Cours d'Algèbre Supérieure* di Serret.

Un *Essay on the Resolution of Algebraical Equations* del fu Giudice Hargreave è stato pubblicato recentemente; i risultati a cui vi si giunge sono sino ad un certo punto diversi da quelli di Abel e del Sig. W. R. Hamilton.

ESEMPII.

I.

1. Trovare il quoziente ed il resto quando

$$x^5 + 7x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 10x - 14$$

si divide per $x - 4$.

2. Sviluppare $(a + bx)^n$ secondo le potenze di x, ed indi ottenere la *prima funzione derivata* di $(a + bx)^n$.

3. Mostrare che l'equazione $x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$, ha una radice e solamente una tra 1 e 2.

II.

1. Trovare una radice dell'equazione $x^4 = +\sqrt{-1}$.

2. Trovare una radice dell' equazione $x^6 = -\sqrt{-1}$.

III.

1. Formare l'equazione di cui le radici sono $1, 1, 1, -1, -2$.

2. Formare l'equazione di cui le radici sono $1 \pm \sqrt{-2}$ e $2 \pm \sqrt{-3}$.

3. Formare l'equazione dell'ottavo grado di cui una delle radici è $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{-1}$.

4. Risolvere le sei seguenti equazioni in ciascuna delle quali *una* radice è data:

(1) $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$; $1 - 2\sqrt{-1}$.

(2) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$; $\sqrt{-1}$.

(3) $x^4 + x^3 - 25x^2 + 41x + 66 = 0$; $3 + \sqrt{-2}$.

(4) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$; $\sqrt{2}$.

(5) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 6x + 2 = 0$; $2 + \sqrt{3}$.

(6) $x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 21x^2 - 9x - 54 = 0$; $\sqrt{2} + \sqrt{-1}$.

5. Risolvere l'equazione $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$, una radice essendo $\sqrt{3}$, ed un'altra $1-2\sqrt{-1}$.

6. L'equazione $x^3-4x^2+x+c=0$ ha una radice $=3$; trovare c e le altre radici.

7. Trovare la somma dei valori reciproci delle radici, la somma dei quadrati delle radici, e la somma dei quadrati dei valori reciproci delle radici di $x^6-6x^5+10x^3+60x^2-x-1=0$.

8. L'equazione $x^4-21x^3+166x^2-546x+580=0$, ha radici della forma α, β, $\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{-1}$; risolvere l'equazione.

9. Trovare la somma dei cubi delle radici di una data equazione.

10. Formare l'equazione le radici della quale α, β, γ, δ, sono

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}\right), \text{ ed } \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\pm\sqrt{-2\sqrt{3}}\right);$$

e quindi mostrare che $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\gamma}+\ldots=0$.

11. Se $a, b, c, \ldots$ sono le radici di un'equazione, trovare il valore di

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\ldots+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\ldots$$

12. Ammettendo che il medio aritmetico di un numero qualunque di quantità positive è maggiore del loro medio geometrico, mostrare che se $p_1{}^2-2p_2$ è minore di $np_n^{\frac{2}{n}}$, l'equazione ha radici impossibili.

13. Se a, b, c, ... sono le radici di un'equazione nella sua forma più semplice, mostrare che

$$(1-p_2+p_4-\ldots)^2+(p_1-p_3+p_5-\ldots)^2=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ldots$$

14. Se a, b, c, ... sono le radici di un'equazione nella sua forma più semplice, mostrare che

$$p_2{}^2-2p_1p_3+2p_4=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+\ldots$$

IV.

1. Trasformare ciascuna delle tre equazioni seguenti in un'altra le radici della quale siano formate aggiungendo alle radici dell'equazione primitiva il numero assegnato:

(1) $x^5-3x^4-x^2+4=0$; 1. (2) $x^6+x+1=0$; 3.

(3) $x^5+4x^3-x^2+11=0$; -3.

2. Trasformare ciascuna delle quattro equazioni seguenti in un'altra che manchi del secondo termine:

(1) $x^3-3x^2+4x-4=0$. (2) $x^3-6x^2+12x+19=0$.

(3) $x^4-8x^3+5=0$. (4) $x^5+5x^4+3x^3+x^2+x-1=0$.

3. Trasformare ciascuna delle quattro equazioni seguenti in due altre ciascuna che manchi del terzo termine:

(1) $x^3+5x^2+8x-1=0$. (2) $x^3-6x^2+9x-10=0$.

(3) $x^4-8x^3+18x^2-15x+14=0$. (4) $x^4-18x^3-60x^2+x-2=0$.

4. Trasformare l'equazione $x^3+2x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{9}=0$ in un'altra con i coefficienti interi, e con l'unità per coefficiente del primo termine.

5. Far sparire il secondo termine e risolvere l'equazione

$$x^3-18x^2+157x-510=0.$$

6. Trasformare ciascuna delle due equazioni seguenti in un'altra di cui le radici siano i quadrati delle differenze delle sue radici; e discutere la natura delle radici:

(1) $x^3+7x-1=0$. (2) $x^3-6x+6=0$.

7. Trasformare $x^4-12x^2+12x-3=0$ in un'equazione di cui le radici siano le reciproche di quelle della data equazione; e poi diminuire di un'unità le radici dell'equazione trasformata.

8. Mostrare che l'equazione $x^4+x^2-8x-15=0$ ha due radici reali di segni contrarii, e che essa non può avere altre radici reali; e che esse cadono tra -2 e 3.

9. Le radici dell'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$ siano dinotate con a, b, c; trasformare l'equazione in altre che abbiano le radici assegnate nei seguenti casi:

(1) a^2, b^2, c^2. (2) $b+c$, $c+a$, $a+b$.

(3) $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ (4) $\frac{a}{bc}$, $\frac{b}{ca}$, $\frac{c}{ab}$.

(5) b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2. (6) $\sqrt{(ka)}$, $\sqrt{(kb)}$, $\sqrt{(kc)}$.

(7) $\frac{1}{2}(b+c-a)$, $\frac{1}{2}(c+a-b)$, $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

(8) $b+c+ka$, $c+a+kb$, $a+b+kc$.

(9) $\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$.

(10) $bc+\frac{1}{a}$, $ca+\frac{1}{b}$, $ab+\frac{1}{c}$. (11) b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2.

(12) $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. (13) $\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}$, $\frac{c^2+a^2}{c^2a^2}$, $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

(14) $b-c$, $c-b$, $c-a$, $a-c$, $a-b$, $b-a$.

10. Le radici dell'equazione $x^3+qx+r=0$ siano dinotate con a, b, c; trasformare l'equazione in altre che abbiano le radici assegnate nei seguenti casi:

(1) $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2$, $\left(\frac{b}{c-a}\right)^2$, $\left(\frac{c}{a-b}\right)^2$.

(2) $ba+ac$, $cb+ba$, $ac+cb$.

11. Se a, b, c dinotano le radici di $x^3-6x^2+11x-6=0$, formare l'equazione di cui le radici sono

$$\frac{1}{b^2+c^2},\quad \frac{1}{c^2+a^2},\quad \frac{1}{a^2+b^2}.$$

12. Se a, b, c dinotano le radici di $x^3-2x^2+2=0$, formare l'equazione di cui le radici sono

$$\frac{b^3+c^3}{a^3},\quad \frac{c^3+a^3}{b^3},\quad \frac{a^3+b^3}{c^3}.$$

13. Mostrare che il terzo termine dell'equazione

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

non si può far sparire se p^2 è minore di $3q$.

14. Mostrare che il secondo ed il quarto termine dell'equazione

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0$$

si può far sparire con la stessa trasformazione se $8p_3=p_1(4p_2-p_1^2)$.

15. Risolvere le due equazioni seguenti:

(1) $x^4+4x^3+7x^2+6x-10=0$. (2) $x^4+4x^3+3x^2-2x-6=0$.

16. Mostrare che nell'equazione $x^3+4x^2+6x+3=0$ non si possono far sparire il secondo ed il terzo termine con la stessa trasformazione, ma che ciò diviene possibile moltiplicando l'equazione per x.

17. Mostrare che è possibile di far sparire il secondo ed il terzo termine di un'equazione dell'n^{mo} grado se

$n\times$(per la somma dei quadrati delle radici)=al quadrato della somma delle radici.

V.

1. Mostrare che l'equazione $x^5-4x^2+3=0$ ha almeno due radici immaginarie.

2. Mostrare che l'equazione $x^7-2x^4+x^3-1=0$ ha almeno quattro radici immaginarie.

3. Cosa può conchiudersi rispetto alle radici delle due equazioni seguenti:

(1) $x^{10}-5x^6+x^2-x-1=0$. (2) $x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0$.

VI.

1. Risolvere le venti equazioni seguenti, ciascuna delle quali ha radici eguali:

(1) $x^3-7x^2+16x-12=0$. (2) $x^3-3x^2-9x+27=0$.

(3) $x^3-x^2-8x+12=0$. (4) $x^3-5x^2-8x+48=0$.

(5) $x^3-x-\frac{2}{3\sqrt{3}}=0$. (6) $x^3-x+\frac{2}{3\sqrt{3}}=0$.

(7) $x^3+8x^2+20x+16=0$. (8) $x^4-\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}=0$.

(9) $x^4-11x^2+18x-8=0$.

(10) $x^4-2x^3-x^2-4x+12=0$.

(11) $x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$.

(12) $x^4-4x^3-6x^2+36x-27=0$.

(13) $x^4+13x^3+33x^2+31x+10=0$.

(14) $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$.

(15) $x^4+16x^3+79x^2+126x+98=0$.

(16) $8x^4+4x^3-18x^2+11x-2=0$.

(17) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$.

(18) $x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6=0$.

(19) $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$.

(20) $x^6-3x^5+6x^3-3x^2-3x+2=0$.

2. Trovare la condizione affinchè $x^n-px^2+r=0$ abbia radici eguali.

3. Mostrare che $x^4+qx^2+s=0$ non può avere tre radici eguali.

4. Se $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0$ hà due radici eguali ad a, mostrare che $p_1x^{n-1}+2p_2x^{n-2}+\ldots+np_n=0$ ha una radice eguale ad a.

5. Se $x^5+qx^3+rx^2+t=0$ ha due radici eguali, dimostrare che una di esse sarà una radice dell'equazione quadratica

$$x^2-\frac{2q^2}{5r}x+\frac{5t}{3r}-\frac{4q}{15}=0.$$

VII.

1. Trovare i limiti delle radici positive e negative di

$$x^6-5x^5+x^4+12x^3-12x^2+1=0.$$

2. Scrivere $x^4-8x^3+12x^2+16x-39=0$ in modo da mostrare che 6 è un limite superiore delle radici positive.

3. Mostrare che le radici reali delle equazioni seguenti cadono tra i limiti rispettivamente assegnati:

(1) $x^4-x^3+4x^2-3x+1=0$; $\frac{1}{4}$ ed 1.

(2) $x^4+x^3-10x^2-x+15=0$; -4 e 3.

(3) $x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0$; -5 e 4.

(4) $(x^3-26)(x^2+5x+1)+60x=0$; -5 e 3.

(5) $(x^2-4x-2)^2-43=0$; -2 e 6.

(6) $x^5+x^4+x^2-25x-36=0$; -5 e 5.

4. Trovare col metodo di Newton i limiti delle radici delle equazioni seguenti:

(1) $x^4-x^3-5x^2+8x-9=0$. (2) $x^4-5x^2+6x-1=0$.

(3) $x^4-x^3+4x^2+x-4=0$. (4) $x^4-5x^3+11x^2-20=0$.

(5) $x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0$.

5. Dimostrare che $x^5+5x^4-20x^2-19x-2=0$ ha una radice tra 2 e 3, ma nessuna maggiore di 3, ed una radice fra -5 e -4, ma nessuna minore di -5.

6. Applicare il metodo dell'Art. 102 a trovare il numero e la situazione delle radici reali delle equazioni seguenti:

(1) $x^3-12x+17=0$. (2) $x^4-32x+20=0$.

(3) $x^3-3x+3=0$. (4) $4x^3+9x^2-12x+2=0$.

(5) $x^7-a^5x^2+c^7=0$. (6) $x^{2n}-px^2+r=0$.

7. Mostrare che l'equazione $3x^4+8x^3-6x^2-24x+r=0$ avrà quattro radici reali se r è minore di -8 e maggiore di -13, e due radici reali se r è maggiore di -8 e minore di 19, e nessuna radice reale se r è maggiore di 19.

VIII.

1. Ottenere le radici commensurabili delle equazioni seguenti:

(1) $x^3-106x-420=0$. (2) $x^3-9x^2+22x-24=0$.

(3) $x^3-2x^2-25x+50=0$. (4) $2x^3-3x^2+2x-3=0$.

(5) $3x^3-2x^2-6x+4=0$. (6) $3x^3-26x^2+34x-12=0$.

(7) $x^4-2x^3+8x-16=0$. (8) $x^4-x^3-13x^2+16x-48=0$.

(9) $x^4-x^3-x^2+19x-42=0$. (10) $x^4+8x^3-7x^2-49x+56=0$.

(11) $x^5-3x^4-9x^3+21x^2-10x+24=0$.

(12) $x^6-7x^5+11x^4-7x^3+14x^2-28x+40=0$.

2. I coefficienti dell'equazione $f(x)=0$ siano tutti interi; mostrare che se $f(0)$ ed $f(1)$ sono entrambi numeri dispari l'equazione non può avere radici intere.

IX.

1. Risolvere le equazioni seguenti ciascuna delle quali ha due radici della forma a, $-a$.

(1) $x^4-2x^3-2x^2+8x-8=0$. (2) $x^4+3x^3-7x^2-27x-18=0$.

(3) $x^4+3x^3+2x^2+9x-3=0$. (4) $x^4+x^3-11x^2-9x+18=0$.

2. Risolvere le equazioni seguenti in ciascuna delle quali le radici sono in Progressione aritmetica.

(1) $x^3-6x^2+11x-6=0$. (2) $x^3-9x^2+23x-15=0$.

(3) $x^4-8x^3+14x^2+8x-15=0$. (4) $x^4+4x^3-4x^2-16x=0$.

3. Risolvere le equazioni seguenti nelle quali sono date alcune condizioni relative alle radici.

(1) $3x^3-2x^2-27x+18=0$; prodotto di due radici è 2.

(2) $x^4-3x^2-6x-2=0$; prodotto di due radici è -1.

(3) $x^4-4x^3+5x^2-16x+4=0$; prodotto di due radici è 1.

(4) $2x^4-5x^3+11x^2-11x+6=0$; prodotto di due radici è 1.

(5) $x^4-45x^2-40x+84=0$; differenza di due radici è 3.

(6) $x^5-7x^4+15x^3-15x^2+14x-8=0$; una radice doppia di un'altra.

4. Risolvere le equazioni seguenti in cui le radici sono delle forme rispettivamente assegnate.

(1) $x^3-10x^2+27x-18=0$; a, $3a$, $6a$.

(2) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$; $a+1$, $a-1$, $b+1$, $b-1$.

(3) $6x^4-43x^3+107x^2-108x+36=0$; a, b, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$.

(4) $x^5+8x^4+5x^3-50x^2-36x+72=0$; a, $2a$, b, $2b$, $a+b$.

(5) $x^6-4x^5+10x^4-16x^3+44x^2-16x+56=0$; $a\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{b}$, $\pm\sqrt{c}$.

(6) $x^6-12x^4-2x^3+37x^2+10x-10=0$; $1\pm\sqrt{a}$, $b\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{c}$.

5. Risolvere le equazioni seguenti, ciascuna coppia avendo una radice di comune.

(1) $x^3-3x^2-16x-12=0$; $x^3-7x^2+5x+13=0$.

(2) $x^3-3x^2+11x-9=0$; $x^3-5x^2+11x-7=0$.

6. Risolvere $x^3-7x^2+36=0$, ed $x^3-3x^2-10x+24=0$, la prima delle quali ha una radice eguale a tre volte una delle radici della seconda.

7. Risolvere le equazioni seguenti che hanno due radici di comune.

$$x^4-2x^3-7x^2+26x-20=0;\ x^4+4x^3-2x^2-12x+8=0.$$

8. Trovare in termini di m ed a le radici dell'equazione

$$x^4+pax^3+(m^2+m)a^2x^2+qa^3x+a^4=0,$$

che sono in progressione geometrica; e determinare p e q in termini di m ed a.

X.

1. Risolvere le equazioni reciproche seguenti.

(1) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$. (2) $x^4+4x^3-5x^2+4x+1=0$.

(3) $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0$. (4) $x^4+4x^3-10x^2+4x+1=0$.

(5) $x^5-2x^4-19x^3-19x^2-2x+1=0$. (6) $x^5-4x^4+x^3+x^2-4x+1=0$.

(7) $6x^5-11x^4-33x^3+33x^2+11x-6=0$.

(8) $2x^6-5x^5+4x^4-4x^2+5x-2=0$.

(9) $8x^6-16x^4-25x^3-16x^2+8=0$. (10) $1+x^3=a(1+x)^3$.

2. Ottenere radici delle equazioni seguenti, ed abbassare le equazioni.

(1) $x^7-2x^5+x^4+x^3-2x^2+1=0$.

(2) $x^7+2x^6-8x^5-7x^4-7x^3-8x^2+2x+1=0$.

(3) $x^8+2x^7+3x^6+2x^5-2x^3-3x^2-2x-1=0$. (4) $x^{10}-1=0$,

3. Esibire le radici di $x^4+px^2+1=0$ nella forma

$$a,\ b,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b}.$$

4. Se a, b, c, ... dinotano le radici dell'equazione ricorrente

$$x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots+qx^2+px+1=0,$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\ldots+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\ldots+\frac{c^2}{a^2}+\ldots=(p^2-2q)^2-n.$$

5. Nell'equazione ricorrente $x^{2n}-px^{2n-1}+\ldots=0$, se i termini sono alternativamente positivi e negativi e p non è maggiore di $2n$, le radici non possono essere tutte reali.

XI.

1. Risolvere le equazioni seguenti.

(1) $x^6-1=0$. (2) $x^8-1=0$. (3) $x^8+1=0$.

2. Mostrare che i fattori di $a^3+b^3+c^3-3abc$ sono della forma $a+bi+ci^2$, in cui $i^3-1=0$.

3. Mostrare che i fattori di

$$a^2(a^2-4bd-c^2)-b^2(b^2-4ac-d^2)+c^2(c^2-4bd-a^2)-d^2(d^2-4ac-b^2),$$

sono della forma $a+bk+ck^2+dk^3$, in cui $k^4-1=0$.

XII.

1. Risolvere le equazioni seguenti.

(1) $x^3-3x-2=0$. (2) $x^3-9x-28=0$.

(3) $x^3-x+6=0$. (4) $x^3+3x=\frac{3}{2}$.

(5) $3x^3-6x^2-2=0$. (6) $x^3-15x^2-33x+847=0$.

(7) $x^3+6ax^2=36a^3$. (8) $x^3-3(a^2+b^2)x=2a(a^2-3b^2)$.

2. Determinare la relazione fra q ed r necessaria affinchè l'equazione $x^3+qx+r=0$ si possa mettere sotto la forma

$$x^4=(x^2+ax+b)^2;$$

e quindi risolvere l'equazione $8x^3-36x+27=0$.

3. Se le radici dell'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$ sono in Progressione geometrica, $rp^3=q^3$. Quindi risolvere l'equazione

$$x^3-x^2+2x-8=0.$$

4. Se le radici dell'equazione $x^3+qx+r=0$ si diminuiscono di h, mostrare che l'equazione trasformata avrà le sue radici in Progressione geometrica se h è tale che $27rh^3-9q^2h^2-q^3=0$.

5. Se le radici dell'equazione $x^3+3px^2+3qx+r=0$ sono in Progressione armonica, $2q^3=r(3pq-r)$.

6. Se le radici dell'equazione $x^3+3px^2+3qx+r=0$ sono in Progressione armonica, l'equazione $rx^2+2q^2x+qr=0$ contiene la massima e la minima di esse.

7. Le radici impossibili di $x^3+qx+r=0$ essendo poste sotto la forma $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, mostrare che $\beta^2=3\alpha^2+q$.

8. Se r, $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha-\sqrt{\beta}$, sono le tre radici dell'equazione $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$, di cui r è reale, e se $x^3+m_1x^2+m_2x=0$ è l'equazione che risulta dalla diminuzione di tutte le radici di r, mostrare che $\alpha=-\frac{m_1}{2}+r$ e $\beta=-\frac{1}{4}(m_2+3p_2-p_1^2)$.

9. Ridurre l'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$ alla forma $y^3-3y+m=0$, ponendo $x=ay+b$; e risolvere questa equazione ponendo $y=z+\frac{1}{z}$. Quindi mostrare che se l'equazione primitiva ha radici uguali,

$$4(p^2-3q)^3=(2p^3-9pq+27r)^2.$$

10. Se le radici dell'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$ sono in progressione armonica, sarà lo stesso per le radici dell'equazione

$$(pq-r)y^3-(p^3-2pq+3r)y^2+(pq-3r)y-r=0.$$

XIII.

1. Risolvere le equazioni seguenti.

(1) $x^4+4x^3+3x^2-44x-84=0$. (2) $x^4-6x^2-8x-3=0$.

(3) $x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0$.

(4) $x^4-2ax^3+(a^2-2b^2)x^2+2ab^2x-a^2b^2=0$. (Art. 192).

2. Se $r^2-p^2s=0$ l'equazione $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ si può risolvere come un'equazione quadratica.

3. Se s e p sono positivi e $27p^4$ è minore di $256s$ le radici dell'equazione $x^4+px^3+s=0$ sono tutte immaginarie.

4. Supponendo che l'equazione $x^4+qx^2+rx+s=0$ abbia radici della forma $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, mostrare che i valori di α e β si possono trovare dalle equazioni,

$$64\alpha^6+32q\alpha^4+(4q^2-16s)\alpha^2-r^2=0,\ \beta^2=\alpha^2+\frac{q}{2}+\frac{r}{4\alpha}.$$

XIV.

1. Applicare il Teorema di Sturm a determinare la situazione delle radici reali delle equazioni seguenti in cui sono assegnati i valori di alcune delle funzioni di Sturm.

(1) $x^4-4x^3-3x+23=0$; $f_3(x)=-491x+1371$, $f_4(x)=-$.

(2) $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$; $f_2(x)=5x^2-10x-7$, $f_3(x)=x-1$, $f_4(x)=+$.

(3) $x^4+x^3+x-1=0$; $f_2(x)=3x^2-12x+17$, Art. 199,

(4) $x^5-2x^4+x^3-8x+6=0$; $f_3(x)=16x^2-23x+9$.

(5) $x^5+5x^4-20x^2-19x-2=0$; $f_2(x)=20x^3+60x^2+36x-9$,

$f_3(x)=96x^2+187x+67$, $f_4(x)=43651x+54571$, $f_5(x)=+$.

2. Applicare il Teorema di Sturm a mostrare che ciascuna delle equazioni seguenti ha solamente una radice reale; e determinare la sua situazione.

(1) $x^3+6x^2+10x-1=0$. $x^3-6x^2+8x+40=0$.

3. Determinare la situazione delle radici positive dell'equazione $x^6-2x^3+3x^2-5x-1=0$, essendo data

$$f_2(x)=6x(x-1)^2+19x+6.$$

4. Applicare il Teorema di Sturm alle equazioni seguenti.

(1) $x^3+x^2-2x-1=0$. (2) $x^3-4x^2-4x+20=0$.

(3) $x^4+2x^2-4x+10=0$. (4) $x^n-x+1=0$.

XV.

1. Mostrare che l'equazione

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0,$$

ha tutte le sue radici reali tra -10 e 10, che essa ha una radice reale tra -10 e -1, una tra -1 e 0, nessuna radice tra 0 ed 1, ed una almeno tra 1 e 10.

2. Applicare il Teorema di Fourier all'equazione

$$x^4+3x^3+7x^2+10x+1=0.$$

XVI.

1. Approssimare col metodo di Lagrange la radice positiva dell'equazione $3x^2-4x-1=0$.

2. Approssimare col metodo di Lagrange la radice dell'equazione $x^4+x^3-2x^2-3x-3=0$, che cade fra 1 e 2.

XVII.

1. Applicare il metodo di Newton a calcolare la radice che è situata tra i limiti assegnati nelle equazioni seguenti.

(1) $x^3-4x-12=0$; radice tra 2 e 3.

(2) $x^3-4x^2-7x+24=0$; radice tra 2 e 3.

(3) $x^3-24x+44=0$; radice tra $3{\cdot}2$ e $3{\cdot}3$.

(4) $x^3-15x-5=0$; radice tra 4 e $4{\cdot}1$.

(5) $x^4-8x^3+12x^2+8x-4=0$; radice tra 0 ed 1.

2. Applicare il metodo di Newton a calcolare una radice delle equazioni seguenti.

(1) $x^3+3x-5=0$. (2) $x^3-3x^2-3x+20=0$

XVIII.

1. Applicare il metodo di Horner a calcolare la radice che è situata tra i limiti assegnati nelle equazioni seguenti.

(1) $x^3+10x^2+6x-120=0$; radice fra 2 e 3.

(2) $x^4-2x^3+21x-23=0$; radice fra 1 e 2.

(3) $x^4-5x^3+3x^2+35x-70=0$; radice fra 2 e 3.

2. Risolvere l'equazione $x^3-17=0$ col metodo di Horner.

3. Calcolare le radici reali delle equazioni seguenti col metodo di Horner.

(1) $x^3+x-3=0$. (2) $x^3+2x-20=0$.

(3) $3x^3+5x-40=0$. (4) $x^3+10x^2+8x-120=0$.

XIX.

1. Trovare il valore delle funzioni simmetriche seguenti delle radici a, b, c dell'equazione $x^3+px^2+qx+r=0$.

(1) $(a+b+ab)(b+c+bc)(c+a+ca)$.

(2) $(a+b-2c)(b+c-2a)(a+c-2b)$.

(3) $\Sigma(a+b)^2(a+c)$. (4) $\Sigma(a+b-2c)(b+c-2a)$.

(5) $\Sigma\dfrac{ab}{a+b}$. (6) $\Sigma\dfrac{a^2}{bc}\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2\left(1+\dfrac{c}{a}\right)^2$.

(7) $(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$.

2. Se a, b, c, d sono le radici dell'equazione

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

trovare il valore di $\Sigma(a+b)(c+d)$.

3. Nell'equazione $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$, supponendo che le radici siano a, b, $c,\ldots l$ trovare

(1) Σa^2b. (2) $\Sigma(a+b)(a+c)\ldots(a+l)$.

(3) $\Sigma\frac{(a+b)^2}{ab}$. (4) $\Sigma\frac{a^2}{b}$.

4. Formare l'equazione di cui le radici siano i quadrati delle somme di tre radici qualunque dell'equazione $x^4+px^3+rx+s=0$. Ancora formare l'equazione di cui le radici siano le somme dei quadrati di tre radici qualunque della stessa equazione.

5. Se $S_1, S_2, S_3,\ldots$ sono le somme delle prime, seconde, terze,... potenze delle radici dell'equazione $f(x)=0$, dell'n^{mo} grado, mostrare che

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=n+\frac{S_1}{x}+\frac{S_2}{x^2}+\frac{S_3}{x^3}+\ldots\ldots$$

6. Se l'equazione $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\ldots+p_n=0$ si trasforma in un'altra di cui le radici siano le somme di due radici qualunque dell'equazione primitiva, trovare i primi tre coefficienti dell'equazione trasformata.

XX.

1. Trasformare le equazioni seguenti in altre di cui le radici siano i quadrati delle differenze delle loro radici.

(1) $x^3-4x+2=0$. (2) $x^4+4x+3=0$. (3) $x^4+1=0$.

2. Eliminare x dalle equazioni

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a'x^2+b'x+c'=0.$$

XXI.

1. Trovare la somma delle potenze assegnate delle radici delle equazioni seguenti:

(1) $x^4-x^3-19x^2+49x-30=0$; i cubi.

(2) $x^5-3x^3-5x+1=0$; le quarte potenze.

(3) $x^5-2x^4-22x^3-28x^2+72x+144=0$; i cubi.

(4) $x^4+2x+1=0$; gl'inversi dei quadrati.

(5) $x^3-x-1=0$; le seste potenze.

2. Se $a, b, c, \ldots$ sono le radici di $x^n-1=0$, trovare $\Sigma a^m b^p$.

3. Se la somma delle r^{me} potenze delle radici dell'equazione $x^n+x+1=0$ sia espressa da S_r, e la somma delle r^{me} potenze dei loro valori reciproci da Σ_r, dimostrare che

$$S_{n-1}-S_n=1, \text{ e } \Sigma_{n-1}-\Sigma_n=n-2(-1)^n.$$

4. Nell'equazione $x^n-x^2+1=0$, trovare Σa^{n-3}, Σa^{n-2}, e Σa^n; supponendo n maggiore di 3.

5. Trovare le somme delle r^{me} e $(2n)^{me}$ potenze delle radici dell'equazione $x^{2r}-px^r+q=0$, supponendo n maggiore di r.

XXII.

1. Risolvere le equazioni

$$\left.\begin{array}{l}(y-1)x^2+yx+y^2-2y=0\\(y-1)x+y=0\end{array}\right\}.$$

2. Risolvere le equazioni

$$\left.\begin{array}{l}(y-1)x^3+y(y+1)x^2+(3y^2+y-2)x+2y=0\\(y-1)x^2+y(y+1)x+3y^2-1=0\end{array}\right\}.$$

3. Mostrare che le equazioni seguenti non hanno alcuna soluzione:

$$\left.\begin{array}{l}yx^3-(y^3-3y-1)x+y=0\\x^2-y^2+3=0\end{array}\right\}.$$

XXIII.

1. Trovare il primo termine di ciascun valore di y quando si sviluppa secondo le potenze discendenti di x dall'equazione

$$y^4x-y^3x^2+3yx^3-y^2x+4y-2x=0.$$

2. Trovare il primo termine di ciascun valore di y quando si sviluppa secondo le potenze ascendenti di x dall'equazione

$$x^{12}+x^{14}+x^{11}y-x^8y^2+2x^7y^3-x^4y^4+y^6-3xy^9+x^{14}y^{13}=0.$$

ESEMPII DIVERSI.

1. Se vi sono n quantità $a, b, c, \ldots$, e se n funzioni di esse si prendono della forma

$$\frac{(x-b)(x-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots},$$

mostrare che la somma di queste funzioni è l'unità.

2. Far sparire il termine che contiene il cubo della quantità ignota dall'equazione

$$x^6+5x^4+200x^3-11x+6=0.$$

3. Mostrare in qual modo trasformare un'equazione che ha variazioni e permanenze di segni (1) in una che ha solamente permanenze di segno, (2) in una che ha solamente variazioni di segno.

4. Se p e q sono positivi, l'equazione $x^{2n}-px^{2r}+q=0$ ha quattro radici reali diverse o nessuna secondo che $\left(\frac{rp}{n}\right)^n$ è maggiore o minore di $\left(\frac{rq}{n-r}\right)^{n-r}$; ed essa ha due coppie di radici eguali se $\left(\frac{rp}{n}\right)^n=\left(\frac{rq}{n-r}\right)^{n-r}$.

5. Se $-p_{n-q}x^{n-q}$, $-p_{n-r}x^{n-r}$, $-p_{n-s}x^{n-s}$, ... sono i termini negativi di un'equazione dell'n^{mo} grado, allora la più grande radice dell'equazione sarà minore della somma delle due più grandi fra le quantità $(p_{n-q})^{\frac{1}{q}}$, $(p_{n-r})^{\frac{1}{r}}$, $(p_{n-s})^{\frac{1}{s}}$, ...

6. Se k è l'ultimo termine di un'equazione dell'n^{mo} grado di cui le radici sono in progressione geometrica, mostrare che $k^{\frac{1}{n}}$ è una radice, se n è dispari. Mostrare che, in simil modo, si può trovare una radice di un'equazione di un grado dispari di cui le radici siano in progressione o aritmetica o armonica.

7. Trovare la massima comune misura di x^3-x^2-3x-1 ed $x^5-6x^4+7x^3+7x^2-6x-3$.

Risolvere l'equazione $x^5-6x^4+7x^3+7x^2-6x-3=0$.

8. Diminuire di h le radici dell'equazione

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0;$$

dare un valore tale ad h che le radici dell'equazione trasformata siano della forma a, $\frac{m}{a}$, b, $\frac{m}{b}$, e mostrare come si possa risolvere questa equazione. Es. $x^4 - 2x^2 + 16x + 1 = 0$.

9. Mostrare col procedimento per estrarre la radice quadrata da un'espressione algebrica che l'equazione $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ si può ridurre immediatamente ad equazioni quadratiche se $p^2s - 4qs + r^2 = 0$, o pure se $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

10. Dimostrare che l'equazione $x^4 + \frac{3}{2}qx^2 + rx + s = 0$ non può avere tutte le sue radici reali se $q^3 + r^2$ è positivo.

11. Se $f(x)$ è una funzione razionale intera di x, o $f(x) = 0$ o $f'(x) = 0$ ha certamente una radice reale.

12. Mostrare in qual modo trovare il valore della funzione semisimmetrica $a^2b + b^2c + c^2a$ delle radici di un'equazione cubica.

13. Dinotino a, b, c, ... k le radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$, che è dell'n^{mo} grado e nella sua forma più semplice, e si suppongano queste radici tutte disuguali: mostrare che l'espressione

$$\frac{a^r}{\varphi'(a)} + \frac{b^r}{\varphi'(b)} + \frac{c^r}{\varphi'(c)} + \dots + \frac{k^r}{\varphi'(k)}$$

è eguale all'unità se $r = n - 1$, ed è zero se r è zero o un intero positivo qualunque minore di $n - 1$.

Mostrare ancora, che se $r = -1$ l'espressione $= \frac{(-1)^{n-1}}{abc \dots k}$.

14. Se $\varphi(x) = x^n - 1$, ed a, b, c, ... sono le radici di $\varphi(x) = 0$, mostrare che

$$\frac{nx^{n-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \dots$$

15. Mostrare che la parte intera di $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{5})^{2n-1}$ è divisibile per 2^n.

RISPOSTE.

I. 1. $x^4+11x^3+47x^2+205x+830$; resto 3306.

II. 1. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

III. 7. -1; 36; 121. 8. $\alpha=5$; $\beta=2$.
9. $-p_1^3+3p_1p_2-3p_3$. 10. $x^4-2x^3-2x+1=0$; indi si vegga l'Art. 48.
11. $(p_1^2-2p_2)\frac{p^2_{n-1}-2p_np_{n-2}}{p_n^2}-n$. 13. Nell'identità dell'Art. 45 si sostituiscano successivamente $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$ per x.

IV. 5. Le radici sono 6, $6\pm7\sqrt{-1}$. 7. $y^4-2y^2+\frac{2}{3}=0$.
8. Si veggano gli Art. 22 e 50. 15. Si applichi l'Esempio 14.

VI. 1. (15)—7 è una radice. (16) $\frac{1}{2}$ è una radice. (17) La radice 1 si trova tre volte. (18) La radice -1 si trova tre volte. (19) 2 e 3 sono radici. (20) Le radici 1 e -1 sono ripetute.

3. Supponiamo che la radice ripetuta sia dinotata da a, e l'altra da b; allora il primo membro dell'equazione proposta deve essere identico con $(x-a)^3(x-b)$; quindi possiamo eguagliare i coefficienti.

VII. 7. Le radici di $f'(x)=0$ sono -2, -1, 1; si usi l'Art. 102.

VIII. 1. (4) $\frac{3}{2}$. (6) $\frac{2}{3}$.

IX. 2. (3) -1, 1, 3, 5. (4) -4, -2, 0, 2.

3. (1) 3, $\frac{2}{3}$ (2) $1\pm\sqrt{2}$. (3) $2\pm\sqrt{3}$. (4) $\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{-7})$.
(5) -2, 1. (6) 1, 2.

4. (1) $a=1$. (2) $a=3$, $b=2$. (3) $a=2$, $b=3$.

(4) $a=1$, $b=-3$. (5) $a=1$, $b=-3$, $c=-2$.

(6) $a=3$, $b=-1$, $c=5$.

5. (1) -1, (2) 1. 6. Le radici sono 6 e 2.

7. Le radici comuni sono date da $x^2+2x-4=0$.

8. Si dinotino le radici con $\frac{\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta, \alpha\beta^3$; si eguagli il loro prodotto ad a^4, e la somma dei prodotti di ciascuna coppia ad $(m^2+m)a^2$. Si può dimostrare che p deve essere eguale a q.

XII. 1. (1) 2. (2) 4. (3) -2 (4) $2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$.

(5) $\frac{1}{3}\left(2^{\frac{1}{3}}+2+2^{\frac{5}{3}}\right)$. (6) La radice 11 si trova due volte,

(7) $\dfrac{6a}{2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}}$. (8) $2a$.

XIII. 1. (1) 3, -2. (2) La radice -1 è ripetuta.

(3) Si diminuiscano le radici di 3, ed allora l'equazione biquadratica può essere risoluta.

XIV. 1. (1) Una radice fra 2 e 3, un'altra fra 3 e 4, e due radici impossibili. (2) Due radici fra 0 e -1, e due fra 2 e 3.

XIX. 1. (1) $(r-q)^2+p(r-q)+r$. (2) $2p^3-9pq+27r$.

(3) $-2p^3+pq-3r$. (4) $9q-3p^2$. (5) $\dfrac{q^2+rp}{r-pq}$.

(6) $\dfrac{q^3}{r^2}-\dfrac{(q-p^2)p}{r}+3$. (7) $\frac{4}{3}(3q-p^2)(3pr-q^2)-\frac{1}{3}(pq-9r)^2$.

2. $2q$. 3. (1) $3p_3-p_1p_2$. (2) Se dinotiamo l'equazione con $f(x)=0$, l'espressione proposta che segue il simbolo Σ diviene $\dfrac{f(-a)}{2a(-1)^n}$. Quindi la somma richiesta è

$$\frac{1}{2}\left\{S_{n-1}-p_1S_{n-2}+p_2S_{n-3}-\ldots+(-1)^n p_n S_{-1}\right\}.$$

(3) $\frac{p_1 p_{n-1}}{p_n}+n^2-2n.$ (4) $p_1-\frac{(p_1^2-2p_2)p_{n-1}}{p_n}.$

6. Sia l'equazione trasformata

$$x^m+q_1x^{m-1}+q_2x^{m-2}+q_3x^{m-3}+\ldots=0;$$

allora $m=\frac{n(n-1)}{2}$. Possiamo trovare le somme delle potenze delle radici dell'equazione trasformata, e quindi i coefficienti con l'Art. 244. Otterremo

$$q_1=(n-1)p_1;\ q_2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}p_1^2+(n-2)p_2;$$

$$q_3=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 3}p_1^3+(n-2)^2p_1p_2+(n-4)p_3.$$

XXII. 1. Le soluzioni sono date da

$$y^2-2y=0 \text{ ed } (y-1)x+y=0.$$

2. Le soluzioni sono date da

$$y^2-1=0 \text{ ed } (y-1)x+2y=0.$$

XXIII. 1. $y=x+\ldots;\ y=\pm\sqrt{3x}+\ldots;\ y=\frac{2}{3x^2}+\ldots$

2. Sei valori della forma $y=x^2(n+U)$, in cui u deve essere determinato da $1-u^2-u^4+u^6=0$; tre valori della forma $y=x^{-\frac{1}{3}}(u+U)$, in cui u deve essere determinato da $1-3u^3=0$; e quattro valori della forma $y=x^{-\frac{13}{4}}(u+U)$, in cui u deve essere determinato da $3-u^4=0$.

ESEMPII DIVERSI.

1. Si chiami la somma $\varphi(x)$; indi si dimostri che $\varphi(x)-1$ è identicamente zero con l'Art. 39.

2. $y^6-12y^5+65y^4-840y^2+2037y-1428=0.$

15. Si formi un'equazione quadratica con le radici $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{5}$; indi si adoperi l'Art. 261.

AGGIUNTE

AGGIUNTE.

I. INTRODUZIONE AI DETERMINANTI.

1. Ci proponiamo di dare qualche notizia della teoria dei determinanti, un ramo delle Matematiche di origine comparativamente recente, ma già di grande e rapidamente crescente importanza. In questo Capitolo considereremo alcuni esempii particolari ed illustrazioni che abiliteranno lo studente a formarsi un concetto della natura e delle proprietà dei determinanti; nel Capitolo seguente dimostreremo i principali teoremi generali del soggetto, e nel terzo Capitolo daremo alcune applicazioni alla teoria delle equazioni.

Si considerino le equazioni simultanee

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2;$$

da queste equazioni otteniamo

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Il denominatore comune $a_1b_2 - a_2b_1$ si chiama il *determinante* delle quattro quantità a_1, b_1, a_2, b_2, e si dinota col seguente simbolo,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

I numeratori dei valori di x ed y sono anche determinanti; e possiamo esibire i valori di x ed y così,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

2. I determinanti qui considerati si dicono tutti essere del *secondo ordine,* poichè essi consistono di termini ciascuno dei quali è il prodotto di *due* quantità. Le quantità a_1, b_1, a_2, b_2, che si trovano

nel determinante $a_1b_2 - a_2b_1$ si chiamano i *costituenti* del determinante; i prodotti a_1b_2 ed a_2b_1 si chiamano gli *elementi* di quel determinante. Così un determinante del secondo ordine consiste di due elementi che contengono quattro costituenti. Nel simbolo adoperato per dinotare questo determinante i costituenti sono disposti in un quadrato formante due *linee* o due *colonne*.

3. Indicheremo ora alcune proprietà dei determinanti del secondo ordine.

Poichè abbiamo

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix}$$

ne segue che il determinante non si altera cambiando le linee in colonne.

4. Le seguenti identità si possono verificare facilmente

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1, & a_1 \\ b_2, & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2, & a_2 \\ b_1, & a_1 \end{vmatrix}$$

Così nel determinante, se le due linee o le due colonne si scambiano tra loro, il segno del determinante si altera, ma non il suo valore; se tutti e due questi scambii hanno luogo, il determinante è inalterato.

5. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} pa_1, & b_1 \\ pa_2, & b_2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} pa_1, & pb_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

Così se ciascun costituente in una linea o in una colonna si moltiplica per una data quantità, il determinante si moltiplica per quella quantità.

6. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1, & a_1 \\ a_2, & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Così se due linee o due colonne sono identiche, il determinante svanisce.

7. Si può dimostrare sviluppando i determinanti che

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1', & b_1+b_1' \\ a_2+a_2', & b_2+b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1', & b_1 \\ a_2', & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1' \\ a_2, & b_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1', & b_1' \\ a_2', & b_2' \end{vmatrix}$$

Così il determinante, di cui ciascun costituente è la somma di due termini, è equivalente ai quattro determinanti che si possono formare prendendo invece di ciascuna colonna una delle sue colonne parziali. Come un caso particolare supponiamo $a_1'=b_1$ ed $a_2'=b_2$; allora il secondo dei quattro determinanti precedenti svanisce per l'Art. 6, ed abbiamo

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1, & b_1+b_1' \\ a_2+b_2, & b_2+b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1' \\ a_2, & b_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1, & b_1' \\ b_2, & b_2' \end{vmatrix}$$

8. Per l'Art. 7 abbiamo

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_1\alpha_2 \\ a_2\alpha_1, & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1, & b_1\beta_2 \\ b_2\beta_1, & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1, & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1, & a_1\alpha_2 \\ b_2\beta_1, & a_2\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\alpha_2 \begin{vmatrix} a_1, & a_1 \\ a_2, & a_2 \end{vmatrix} + \beta_1\beta_2 \begin{vmatrix} b_1, & b_1 \\ b_2, & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_1\beta_2 \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} + \beta_1\alpha_2 \begin{vmatrix} b_1, & a_1 \\ b_2, & a_2 \end{vmatrix} .$$

per l'Art. 5. Per l'Art. 6 i primi due dei quattro determinanti ora scritti svaniscono. Per l'Art. 4

$$\begin{vmatrix} b_1, & a_1 \\ b_2, & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

Così rimane

$$(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

Quindi

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

Così il prodotto di due determinanti del secondo ordine è un determinante del secondo ordine.

Come un caso particolare, supponiamo che i costituenti α_1, β_1, α_2, β_2 siano rispettivamente eguali ai costituenti a_1, b_1, a_2, b_2; allora troviamo che il quadrato del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

è eguale al determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2, & a_1a_2+b_1b_2 \\ a_1a_2+b_1b_2, & a_2^2+b_2^2 \end{vmatrix}$$

9. Passeremo ora ai determinanti del *terzo* ordine. Consideriamo le equazioni simultanee

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \quad a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \quad a_3x+b_3y+c_3z=d_3;$$

da queste equazioni otteniamo

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)},$$

e simili espressioni per i valori di y e z.

Il denominatore del valore di x si chiama un determinante del terzo ordine, che contiene i nove costituenti a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3; il determinante consiste di sei elementi, ciascun elemento essendo il prodotto di tre costituenti. Questo determinante si dinota col simbolo seguente,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Poichè il valore di questo determinante è

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1),$$

possiamo esprimerlo per mezzo di determinanti del secondo ordine, così

$$a_1\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3, & c_3 \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

Il numeratore del valore di x è anche un determinante del terzo ordine; dobbiamo solamente cambiare a_1, a_2, a_3 in d_1, d_2, d_3 ri-

spettivamente nelle espressioni simboliche già date per il denominatore, ed otteniamo espressioni simboliche per il numeratore.

Vedremo ora che i determinanti del terzo ordine hanno le stesse proprietà come i determinanti del secondo ordine.

10. Supponiamo $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, ed $a_3 = 0$; allora abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1, & b_1, & c_1 \\ 0, & b_2, & c_2 \\ 0, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Così il determinante del terzo ordine si riduce in questo caso ad un determinante del secondo ordine. I valori di b_1 e c_1 non hanno alcuna influenza sul valore di questo determinante, e possiamo se ci piace supporli zero.

Quindi vediamo che avendo una relazione tra determinanti del terzo ordine possiamo dedurre la relazione corrispondente per i determinanti del secondo ordine supponendo che alcuni costituenti svaniscano.

11. Si può mostrare sviluppando i determinanti che

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3, & c_3 \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2, & c_3 \\ a_2, & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

cioè,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

Così il determinante non si altera cambiando le linee in colonne.

12. Le identità seguenti si possono verificare facilmente, esprimendo i determinanti del terzo ordine per mezzo di determinanti del secondo ordine e sviluppando:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1, & a_1, & c_1 \\ b_2, & a_2, & c_2 \\ b_3, & a_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & a_1 \\ b_2, & c_2, & a_2 \\ b_3, & c_3, & a_3 \end{vmatrix}$$

Così se due colonne si scambiano tra loro il segno del determinante si altera ma non il suo valore, e quindi se questa operazione si effettua due volte il determinante non è alterato. Quindi, per l'Art. 11, se due linee si scambiano tra loro il segno del determinante si altera ma non il suo valore, e quindi se questa operazione si esegue due volte il determinante non è alterato.

Quindi segue ancora che se si scambiano tra loro due colonne ed anche due linee il determinante non è alterato; sicchè

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2, & a_2, & c_2 \\ b_1, & a_1, & c_1 \\ b_3, & a_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

13. Come nell'Art. 5 possiamo dimostrare che se ogni costituente in una linea o in una colonna si moltiplica per una data quantità il determinante è moltiplicato per quella quantità.

14. È facile mostrare che

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & b_1 \\ a_2, & b_2, & b_2 \\ a_3, & b_3, & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ed} \quad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Così se due linee o due colonne sono identiche il determinante svanisce.

15. È facile vedere che il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1'+a_1'', & b_1, & c_1 \\ a_2+a_2'+a_2'', & b_2, & c_2 \\ a_3+a_3'+a_3'', & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

è equivalente alla somma dei tre determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1', & b_1, & c_1 \\ a_2', & b_2, & c_2 \\ a_3', & b_3, & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1'', & b_1, & c_1 \\ a_2'', & b_2, & c_2 \\ a_3'', & b_3, & c_3 \end{vmatrix};$$

ed un simile risultato si otterrebbe se ciascun costituente nella prima colonna consistesse della somma di quattro termini, o della

somma di cinque termini, e così di seguito. Ancora, se ciascuno dei costituenti b_1, b_2, b_3 si rimpiazza con tre termini, ciascuno dei tre determinanti precedenti diviene equivalente alla somma di tre determinanti; e così di seguito. In questo modo si può vedere che il determinante seguente è equivalente alla somma di 27 determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1'+a_1'', & b_1+b_1'+b_1'', & c_1+c_1'+c_1'' \\ a_2+a_2'+a_2'', & b_2+b_2'+b_2'', & c_2+c_2'+c_2'' \\ a_3+a_3'+a_3'', & b_3+b_3'+b_3'', & c_3+c_3'+c_3'' \end{vmatrix}$$

I 27 determinanti si debbono formare prendendo invece di ciascuna colonna una delle colonne parziali; così per esempio tre di questi determinanti saranno i tre che sono dati qui sopra.

16. Come un caso particolare dell'Art. 15 prenderemo il determinante seguente:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Si troverà che dei 27 determinanti di cui questo si può considerare la somma, tutti eccetto 6 svaniscono per gli Art. 13 e 14. Per esempio, abbiamo per uno dei 27 determinanti,

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_1\alpha_2, & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1, & a_2\alpha_2, & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1, & a_3\alpha_2, & b_3\beta_3 \end{vmatrix} \quad \text{cioè,} \quad \alpha_1\alpha_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1, & a_1, & b_1 \\ a_2, & a_2, & b_2 \\ a_3, & a_3, & b_3 \end{vmatrix}$$

per l'Art. 13; e questo determinante svanisce per l'Art. 14. Uno dei sei determinanti che rimangono è

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & b_1\beta_2, & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1, & b_2\beta_2, & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1, & b_3\beta_2, & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{cioè,} \quad \alpha_1\beta_2\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Un altro dei sei determinanti che rimangono è

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & c_1\gamma_2, & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1, & c_2\gamma_2, & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1, & c_3\gamma_2, & b_3\beta_3 \end{vmatrix} \quad \text{cioè,} \quad \alpha_1\gamma_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1, & c_1, & b_1 \\ a_2, & c_2, & b_2 \\ a_3, & c_3, & b_3 \end{vmatrix}$$

$$-\alpha_1\gamma_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{per l'Art. 12.}$$

cioè,

Il risultato si è che i sei determinanti che rimangono costituiscono

$$\left\{\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\right\} \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

cioè,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Quindi vediamo che il prodotto di due determinanti del terzo ordine si può esibire come un determinante del terzo ordine. Se supponiamo a_1, b_1, ... rispettivamente eguali ad α_1, β_1, ... otteniamo un determinante del terzo ordine che è equivalente al quadrato di un determinante del terzo ordine.

17. Abbiamo ora dato sufficienti esempi della natura e delle proprietà dei determinanti da abilitare lo studente a formarsi una idea del soggetto. Avremmo potuto limitarci ai determinanti del terzo ordine, poichè per l'Art. 10 le proprietà dei determinanti del secondo ordine si possono dedurre immediatamente dalle proprietà corrispondenti dei determinanti del terzo ordine, ma il metodo che abbiamo adottato recherà giovamento al principiante. Nel Capitolo seguente daremo dimostrazioni generali applicabili a determinanti di ordine qualunque.

Si osserverà che noi c'introduciamo al soggetto dei determinanti considerando le forme ottenute nel risolvere alcune equazioni simultanee. Lo studente così può vedere ad un tempo che le espressioni chiamate determinanti si presentano naturalmente nelle matematiche. Nondimeno è più conveniente nel trattare la teoria generale di dare una definizione indipendente di un determinante, e questo faremo nel Capitolo seguente. Si preparerà lo studente per quella definizione se consideriamo qui il determinante del terzo ordine sotto questo nuovo punto di vista.

18. Il valore del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1,$$

Il primo elemento qui è $a_1b_2c_3$, il quale è il prodotto dei costituenti situati diagonalmente nel simbolo di quadrato che dinota il determinante. Gli altri elementi si possono dedurre tutti dal primo elemento in un modo che ora spiegheremo. Gl'indici 1, 2, 3 si debbono apporre alle lettere a, b, c in tutti i modi diversi secondo i quali quegl'indici si possono permutare; e si deve porre innanzi ad ogni elemento il segno $+$ o $-$ secondo che esso si può dedurre dal primo elemento con un numero pari o con un numero dispari di cambiamenti scambievoli fra due indici. Così il secondo elemento dato sopra è $a_1b_3c_2$; questo si può dedurre dal primo elemento scambiando tra loro gl'indici 2 e 3, e così secondo la regola deve essere preceduto dal segno $-$. Il terzo elemento è $a_2b_3c_1$; questo si può dedurre dal secondo elemento scambiando tra loro gl'indici 2 ed 1, e quindi esso può dedursi dal primo elemento con due scambii di due indici, e così secondo la regola deve essere preceduta dal segno $+$. Similmente si possono determinare i rimanenti elementi con i loro convenevoli segni.

19. Gli esempi seguenti sono casi particolari di determinanti del terzo ordine, che lo studente può verificare:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh.$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3.$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1, & a_1+a_2, & a_1a_2 \\ 1, & b_1+b_2, & b_1b_2 \\ 1, & c_1+c_2, & c_1c_2 \end{vmatrix} = (a_1-b_2)(b_1-c_2)(c_1-a_2) + (a_2-b_1)(b_2-c_1)(c_2-a_1).$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} 1, & \gamma, & -\beta \\ -\gamma, & 1, & \alpha \\ \beta, & -\alpha, & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

II. PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI.

20. Si abbiano n simboli $a_1, a_2, \ldots a_n$; allora uno di questi simboli si dirà *superiore* ad un altro quando esso ha un indice maggiore, sicchè per esempio a_3 è superiore ad a_2 o a_1, a_4 è superiore ad a_3 o a_2 o a_1, e così di seguito.

Supponiamo ora che si siano formate le permutazioni di questi simboli; allora sempre che in una permutazione un simbolo superiore precede uno inferiore si dice esservi un' *inversione*. Così, per esempio, nella permutazione $a_2\, a_4\, a_3\, a_1$ vi sono quattro inversioni, cioè $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$ ed $a_3 a_1$.

21. Le permutazioni dei simboli $a_1, a_2, \ldots a_n$ si possono dividere in due classi, quelle in cui vi è un numero *pari* d' inversioni e quelle in cui ve n' è un numero *dispari*.

22. *Quando in una permutazione qualunque due simboli si scambiano i loro posti mentre gli altri restano invariati il numero delle inversioni si accresce o si diminuisce di un numero dispari.*

Dinotino g e k due simboli dei quali sia k il superiore. Dinoti A il gruppo dei simboli prima di g e k, dinoti B il gruppo tra g e k, e dinoti C il gruppo dopo di g e k; sicchè le permutazioni che dobbiamo paragonare si possono dinotare con $AgBkC$ ed $AkBgC$. Allora la differenza tra i numeri delle inversioni dipende dai simboli che costituiscono i gruppi gBk e kBg. Sia costituito B da β simboli e supponiamo che β_1 di essi siano superiori a g e β_2 di essi superiori a k. Allora nel gruppo gBk, oltre le inversioni nello stesso B, vi sono $\beta - \beta_1 + \beta_2$ inversioni; infatti g è superiore a $\beta - \beta_1$ dei simboli in B, e vi sono β_2 simboli in B superiori a k. Nel gruppo kBg, oltre le inversioni nello stesso B, vi sono $\beta - \beta_2 + \beta_1 + 1$ inversioni; infatti k è superiore a $\beta - \beta_2$ simboli in B, e vi sono β_1 simboli in B superiori a g, e k è superiore a g. Quindi la differenza tra i numeri delle inversioni è

$$\beta - \beta_2 + \beta_1 + 1 - (\beta - \beta_1 + \beta_2),$$

cioè, $2(\beta_1 - \beta_2) + 1$; così questa differenza è un numero *dispari*.

23. Con scambii ripetuti di due simboli tutte le permutazioni di un gruppo di n simboli presi tutti insieme si possono dedurre da

una data permutazione. In questo modo di dedurre le permutazioni otterremo, per l'Art. 22, alternativamente permutazioni con un numero pari d'inversioni e permutazioni con un numero dispari di inversioni. Il numero totale delle permutazioni di un gruppo di simboli presi tutti insieme è un numero *pari*; segue da ciò che vi sono tante permutazioni con un numero *pari* d'inversioni quante ve ne sono con un numero *dispari* d'inversioni.

24. Si abbiano n^2 quantità disposte in forma di un quadrato, così

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \cdots\cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \cdots\cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Qui per ogni quantità $a_{r,k}$ il primo indice, r, indica la linea, ed il secondo indice, k, indica la colonna in cui si trova la quantità $a_{r,k}$.

Il simbolo precedente è adoperato per dinotare il *determinante* delle n^2 quantità che si trovano in esso; queste quantità si chiamano *costituenti* del determinante. Il valore del determinante si trova prendendo l'aggregato di un certo numero di *elementi*, ciascun elemento essendo il prodotto di n costituenti. Il primo elemento è il prodotto dei costituenti $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, ... $a_{n,n}$, che giacciono nella diagonale condotta dal vertice superiore a sinistra del quadrato al vertice opposto; chiameremo questa diagonale *la* diagonale del quadrato, poichè avremo solamente occasione di riferirci a questa diagonale. Tutti gli altri elementi si debbono dedurre dal primo elemento $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \cdots a_{n,n}$ per mezzo di permutazioni dei secondi indici, i primi indici rimanendo invariati. Il segno + o — si deve prefiggere a ciascun elemento del determinante secondo che esso è o pur no della stessa classe del primo elemento, la classe essendo determinata dal numero d'inversioni nelle permutazioni dei secondi indici; si vegga l'Art. 21.

25. Il determinante precedente si dice essere dell'n^{mo} ordine poichè ogni elemento è il prodotto di n costituenti. Il numero di elementi è lo stesso che il numero delle permutazioni di n cose prese tutte insieme, cioè $\underline{|n}$; una metà di questi elementi saranno preceduti dal segno +, e l'altra metà dal segno —. Si vedrà dal modo di formazione degli elementi, che ciascun elemento contiene uno e solamente un costituente da ciascuna linea o da ciascuna colonna nel simbolo che dinota il determinante.

26. Invece del simbolo precedente pel determinante, esso è alle volte dinotato da $\Sigma \pm a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \ldots a_{n,n}$; cioè, è scritto il primo elemento e si pone il simbolo $\Sigma \pm$ innanzi di esso per indicare l'aggregato degli elementi che si possono dedurre dal primo elemento per mezzo di convenevoli permutazioni e dell'adattamento dei segni $+$ e $-$. I costituenti del determinante si possono dinotare in varii modi; così alle volte si adopera (i,k) in vece di $a_{i,k}$, ed in questo caso dobbiamo rammentarci che (i,k) e (k,i) in generale dinotano quantità differenti. Negli esempi di determinanti di ordini non alti, possiamo trovare conveniente di evitare i doppii indici, e di adoperare la stessa lettera per tutt' i costituenti in una colonna distinguendo i costituenti con singoli indici; questa notazione fu adottata nel Capitolo precedente.

27. Gli altri elementi di un determinante si deducono dal primo elemento per mezzo di permutazioni dei secondi indici mentre i primi indici restano inalterati; questi elementi però si possono dedurre in un modo diverso, cioè, per mezzo di permutazioni dei primi indici mentre i secondi indici restano inalterati. Infatti supponiamo che $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ rappresenti una certa permutazione degli n numeri $1, 2, 3, \ldots n$; allora $a_{1,\alpha}\, a_{2,\beta}\, a_{3,\gamma} \ldots a_{n,\nu}$ è un elemento del determinante che nasce dal primo elemento cambiando i secondi indici $1,2,3,\ldots n$, in $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\nu$, rispettivamente. Questo elemento si può però dedurre anche dal primo elemento $a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$ se i secondi indici si lasciano invariati ed i primi indici si cambiano convenevolmente, cioè, α in 1, β in 2, γ in $3, \ldots \nu$ in n. In questi due modi di deduzione vi è lo stesso numero di scambii fra due indici, e quindi si ottiene lo stesso segno da prefiggere all'elemento per la regola nell'Art. 24.

28. *Il valore di un determinante non si altera se le successive linee si mutano nelle successive colonne;* cioè,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots\ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots\ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots\ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{2,1}, & \ldots\ldots\ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & \ldots\ldots\ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \ldots\ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Poichè è chiaro dall'Art. 25, che gli elementi in questi determinanti sono di egual *valore*; ed essi hanno gli stessi *segni*, come apparisce dall'Art. 27.

29. *Se due linee o due colonne si scambiano tra loro, il segno del determinante è mutato.*

Infatti dinoti R il dato determinante, ed R' quello che nasce dallo scambio. Allora gli elementi in R ed R' sono gli stessi in quanto a valore, e dobbiamo esaminare solamente i loro segni. Il primo elemento in R' si può dedurre dal primo elemento in R scambiando tra loro due dei secondi indici, e così questi elementi hanno segni contrarii nei due determinanti. Allora un elemento in R' che nasce dal primo elemento in R' per mezzo di m scambii fra i secondi indici sarà deducibile dal primo elemento in R per mezzo di $m+1$ scambii, e quindi si troverà in R ed R' con segni contrarii.

30. *Se due linee o due colonne sono identiche, il determinante svanisce.*

Infatti scambiando tra loro due linee o due colonne, un determinante si muta da R a $-R$ per l'Art. 29. Ma se due linee o due colonne sono identiche, lo scambio di queste linee o colonne non può avere alcuna influenza sul determinante, sicchè $R=-R$; e quindi $R=0$.

31. *Quando tutt'i costituenti eccetto uno di una linea o di una colonna svaniscono, il determinante si riduce al prodotto di quel costituente e di un determinante dell'ordine prossimamente inferiore.*

Consideriamo, per esempio, il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ 0, & 0, & c_4, & 0 \end{vmatrix}$$

Con tre successivi scambii di singole linee possiamo condurre la *linea* che contiene c_4 ad essere la linea più alta; e con due successivi scambii di singole colonne possiamo condurre la *colonna* che contiene c_4 ad essere la prima colonna. Così, per l'Art. 29,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ 0, & 0, & c_4, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times \begin{vmatrix} c_4, & 0, & 0, & 0 \\ c_1, & a_1, & b_1, & d_1 \\ c_2, & a_2, & b_2, & d_2 \\ c_3, & a_3, & b_3, & d_3 \end{vmatrix}$$

Il primo elemento del determinante nel secondo membro è $c_4 a_1 b_2 d_3$; e gli altri elementi si debbono dedurre da questo per

mezzo di permutazioni degl'indici. Ma c_4 è il solo costituente con l'indice 4 che non è zero, e così c_4 sarà un fattore di ogni elemento che non svanisce, e l'altro fattore sarà deducibile da $a_1\, b_2\, d_3$ per mezzo di permutazioni degl'indici 1, 2, 3. Così il determinante primitivo si riduce a

$$(-1)^3 c_4 \times \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \end{vmatrix}$$

Questo modo di dimostrazione si applica, qualunque sia l'ordine del determinante proposto.

Il segno negativo che nasce in questo esempio da $(-1)^3$ si può togliere se ci piace scambiando tra loro due linee o due colonne nel determinante del terzo ordine.

32. La linea più alta di un determinante del n^{mo} ordine si può condurre ad essere la più bassa per mezzo di $n-1$ scambii successivi di linee successive; e similmente, la prima colonna si può condurre ad essere l'ultima per mezzo di $n-1$ scambii successivi di colonne successive. Ciascuno di questi si chiama uno scambio *ciclico*, ed è alle volte conveniente di effettuare uno scambio proposto qualunque di linee o colonne per mezzo di una serie di scambii ciclici, a motivo della maggiore simmetria nella disposizione delle linee e colonne. Nell'esempio precedente possiamo condurre c_4 al posto che gli vogliamo fare occupare eseguendo tre successivi scambii ciclici di linee e due successivi scambii ciclici di colonne. Così otteniamo pel determinante primitivo successivamente le forme seguenti:

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ 0, & 0, & c_4, & 0, \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \end{vmatrix}, \quad (-1)^6 \begin{vmatrix} a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ 0, & 0, & c_4, & 0 \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \end{vmatrix}, \quad (-1)^9 \begin{vmatrix} 0, & 0, & c_4, & 0 \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{12} \begin{vmatrix} 0, & c_4, & 0, & 0 \\ b_1, & c_1, & d_1, & a_1 \\ b_2, & c_2, & d_2, & a_2 \\ b_3, & c_3, & d_3, & a_3 \end{vmatrix}, \quad (-1)^{15} \begin{vmatrix} c_4, & 0, & 0, & 0 \\ c_1, & d_1, & a_1, & b_1 \\ c_2, & d_2, & a_2, & b_2 \\ c_3, & d_3, & a_3, & b_3 \end{vmatrix}, \quad (-1)^{15} c_4 \begin{vmatrix} d_1, & a_1, & b_1 \\ d_2, & a_2, & b_2 \\ d_3, & a_3, & b_3 \end{vmatrix}$$

33. *Un determinante si può sempre esprimere nella forma di un determinante di ordine superiore qualunque.*

Per esempio, per l'Art. 32,

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \beta, & a_1, & b_1, & c_1 \\ \gamma, & a_2, & b_2, & c_2 \\ \delta, & a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \mu, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ \nu, & \beta, & a_1, & b_1, & c_1 \\ \rho, & \gamma, & a_2, & b_2, & c_2 \\ \sigma, & \delta, & a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

in cui β, γ, δ, μ, ν, ρ, σ, sono quantità qualunque. Similmente, possiamo portare innanzi questo procedimento a piacere.

34. Dinotino i e k due indici qualunque del gruppo $1, 2, \ldots n$; dinoti R il determinante $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$; e dinoti $A_{i,k}$ il coefficiente di $a_{i,k}$ in R. Allora ciascuna di queste espressioni

$$a_{i,1}A_{k,1} + a_{i,2}A_{k,2} + \ldots + a_{i,n}A_{k,n},$$

ed

$$a_{1,i}A_{1,k} + a_{2,i}A_{2,k} + \ldots + a_{n,i}A_{n,k},$$

è eguale ad R o a 0, secondo che i e k sono eguali o disuguali.

Infatti ogni elemento di R contiene come fattore uno dei costituenti $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, $a_{i,3}$, $\ldots$ $a_{i,n}$, che formano la linea i^{ma}. E poichè $A_{i,k}$ dinota il coefficiente di $a_{i,k}$ in R, abbiamo

$$R = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \ldots + a_{i,n}A_{i,n}.$$

Similmente, abbiamo

$$R = a_{1,i}A_{1,i} + a_{2,i}A_{2,i} + \ldots + a_{n,i}A_{n,i}.$$

Nella prima di queste espressioni per R, si ponga $a_{i,1} = a_{k,1}$, $a_{i,2} = a_{k,2}$, ... e così di seguito; così otteniamo il valore di un determinante con due linee identiche, il quale è zero per l'Art. 30.

Similmente, nella seconda delle espressioni per R si ponga $a_{1,i} = a_{1,k}$, $a_{2,i} = a_{2,k}$, ... e così di seguito; così otteniamo il valore di un determinante con due colonne identiche, il quale è zero per l'Art. 30.

35. *Se ogni costituente in una linea o in una colonna si moltiplica per una data quantità, il determinante è moltiplicato per quella quantità.*

Infatti $R = a_{i,1} A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2} + \ldots + a_{i,n} A_{i,n}$; e se ogni termine nella i^{ma} linea si moltiplica per p dobbiamo porre $pa_{i,1}$ per $a_{i,1}$ $pa_{i,2}$ per $a_{i,2}$, e così di seguito; così otteniamo p volte il primo risultato per il nuovo determinante.

Similmente, possiamo dimostrare il teorema nel caso in cui tutt'i costituenti di una colonna si moltiplicano per una data quantità.

36. *Se ciascuno dei costituenti in una linea o in una colonna è la somma di* m *termini, il determinante si può considerare come la somma di* m *determinanti.*

Supponiamo, per esempio, che ciascun costituente dell'i^{ma} linea sia la somma di m termini; e supponiamo che

$$\begin{aligned} a_{i,1} &= p_1 + q_1 + r_1 + \ldots \\ a_{i,2} &= p_2 + q_2 + r_2 + \ldots \\ a_{i,3} &= p_3 + q_3 + r_3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Allora
$$\begin{aligned} R = a_{i,1} A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2} + \ldots\ldots\ldots + a_{i,n} A_{i,n} \\ = p_1 A_{i,1} + p_2 A_{i,2} + \ldots\ldots\ldots + p_n A_{i,n} \\ + q_1 A_{i,1} + q_2 A_{i,2} + \ldots\ldots\ldots + q_n A_{i,n} \\ + r_1 A_{i,1} + r_2 A_{i,2} + \ldots\ldots\ldots + r_n A_{i,n} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Così R si può considerare come la somma di m determinanti che hanno per loro i^{me} linee rispettivamente

$$\begin{aligned} &p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_n, \\ &q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots q_n, \\ &r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots r_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

37. Mostreremo ora come il coefficiente di $a_{i,k}$ in un determinante si può esibire esso stesso come un determinante. Per otte-

nere quegli elementi di un determinante che contengono un certo costituente $a_{i,k}$, ed essi solamente, possiamo supporre tutt'i costituenti nell'i^{ma} linea essere zero, eccetto $a_{i,k}$; allora ponendo 1 per $a_{i,k}$ otterremo il richiesto coefficiente.

Così,

$$A_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots a_{1,k-1}, & a_{1,k}, & a_{1,k+1} & \dots a_{1,n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{i-1,1}, & \dots a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k}, & a_{i-1,k+1}, & \dots a_{i-1,n} \\ 0, & \dots 0, & 1, & 0, & \dots 0 \\ a_{i+1,1}, & \dots a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k}, & a_{i+1,k+1}, & \dots a_{i+1,n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{n,1}, & \dots a_{n,k-1} & a_{n,k}, & a_{n,k+1}, & \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Così $A_{i,k}$ è qui esibito come un determinante dell'n^{mo} ordine. Possiamo, senza alterare il valore di $A_{i,k}$ porre 0 per ciascun costituente nella k^{ma} colonna eccetto quello che è 1.

Per l'Art. 31, o l'Art. 32, possiamo esibire $A_{i,k}$ come un determinante dell'$(n-1)^{mo}$ ordine. Così, adottando il metodo dell'Art. 32, facciamo $i-1$ scambii ciclici nelle linee e $k-1$ scambii ciclici nelle colonne. Quindi

$$A_{i,k} = \varepsilon \times \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1}, & \dots a_{i+1,n}, & a_{i+1,1}, & \dots a_{i+1,k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n,k+1}, & \dots a_{n,n}, & a_{n,1}, & \dots a_{n,k-1} \\ a_{1,k+1}, & \dots a_{1,n}, & a_{1,1}, & \dots a_{1,k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{i-1,k+1}, & \dots a_{i-1,n}, & a_{i-1,1}, & \dots a_{i-1,k-1} \end{vmatrix}$$

in cui $\varepsilon = (-1)^{(i-1+k-1)(n-1)} = (-1)^{(i+k)(n-1)}$.

38. Per mezzo degli Art. 34 e 37 possiamo esprimere ogni determinante dell'n^{mo} ordine come l'aggregato di n termini, ciascuno dei quali è il prodotto di un costituente e di un determinante dell'$(n-1)^{mo}$ ordine; i determinanti dell'$(n-1)^{mo}$ ordine si possono essi stessi trattare similmente; ed il procedimento si può continuare a piacere. Per esempio,

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, d_1 \\ a_2, b_2, c_2, d_2 \\ a_3, b_3, c_3, d_3 \\ a_4, b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2, c_2, d_2 \\ b_3, c_3, d_3 \\ b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} c_2, d_2, a_2 \\ c_3, d_3, a_3 \\ c_4, d_4, a_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2, a_2, b_2 \\ d_3, a_3, b_3 \\ d_4, a_4, b_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \left\{ b_2 \begin{vmatrix} c_3, d_3 \\ c_4, d_4 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} d_3, b_3 \\ d_4, b_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} b_3, c_3 \\ b_4, c_4 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- b_1 \left\{ c_2 \begin{vmatrix} d_3, a_3 \\ d_4, a_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_3, c_3 \\ a_4, c_4 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} c_3, d_3, \\ c_4, d_4 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ c_1 \left\{ d_2 \begin{vmatrix} a_3, b_3 \\ a_4, b_4 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3, d_3 \\ b_4, d_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} d_3, a_3 \\ d_4, a_4 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- d_1 \left\{ a_2 \begin{vmatrix} b_3, c_3 \\ b_4, c_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3, a_3 \\ c_4, a_4 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3, b_3 \\ a_4, b_4 \end{vmatrix} \right\}$$

39. Passiamo ora ad una parte importante del soggetto, quella che si riferisce alla moltiplicazione dei determinanti.

Siano dati due gruppi di simboli, cioè,

$$\begin{matrix} a_{1,1}, \ldots\ldots\ldots a_{1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots\ldots\ldots a_{n,p}, \end{matrix}$$

e

$$\begin{matrix} b_{1,1}, \ldots\ldots\ldots b_{1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1}, \ldots\ldots\ldots b_{n,p}. \end{matrix}$$

Con questi si formi un terzo gruppo di simboli,

$$\begin{matrix} c_{1,1}, \ldots\ldots\ldots c_{1,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n,1}, \ldots\ldots\ldots c_{n,n}, \end{matrix}$$

questi simboli essendo determinati dalla relazione generale

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \ldots\ldots + a_{i,p} b_{k,p}.$$

Dinoti R il determinante $\Sigma \pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n}$. Dimostreremo ora i risultati seguenti:

(1) Si supponga p minore di n; allora $R = 0$.

(2) Si supponga $p = n$; allora R è eguale al prodotto dei due determinanti che consistono dei due dati gruppi di simboli nell'ordine che essi occupano.

(3) Si supponga p maggiore di n; allora R è eguale alla somma di un gruppo di prodotti di coppie di determinanti, ciascuna coppia di determinanti essendo formata col prendere n colonne qualunque dal primo dato gruppo di simboli per un determinante, e le n colonne corrispondenti dall'altro dato gruppo di simboli per l'altro determinante.

Il primo elemento di R è $c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n}$, ed il valore di questo è

$$(\Sigma a_{1,r} b_{1,r})(\Sigma a_{2,s} b_{2,s})(\Sigma a_{3,t} b_{3,t}) \ldots,$$

in cui nel primo fattore Σ dinota una somma rispetto ad r, nel secondo fattore Σ dinota una somma rispetto ad s, nel terzo fattore Σ dinota una somma rispetto a t, e così di seguito; e tutte queste somme si estendono da 1 a p, l'uno e l'altro inclusivamente. Così il prodotto si può ottenere prendendo la somma dei valori dell'espressione

$$a_{1,r} a_{2,s} a_{3,t} \ldots b_{1,r} b_{2,s} b_{3,t} \ldots$$

in cui $r, s, t, \ldots$ prendono tutt'i valori interi da 1 a p.

Possiamo dinotare questa somma con

$$\Sigma_{r,s,t,\ldots} (a_{1,r} a_{2,s} a_{3,t} \ldots b_{1,r} b_{2,s} b_{3,t} \ldots).$$

Gli altri elementi di R si deducono dal primo elemento per mezzo di permutazioni dei secondi indici ed apponendo il segno convenevole. Ora dal valore generale di $c_{i,k}$ ne segue che cambiando i secondi indici del simbolo c, non si fa alcun cambiamento negl'indici del simbolo a, ma si mutano i primi indici del simbolo b, ed essi solamente.

Quindi otteniamo un risultato che possiamo dinotare così,

$$R = \Sigma_{r,s,t,\ldots} (a_{1,r} a_{2,s} a_{3,t} \ldots \Sigma \pm b_{1,r} b_{2,s} b_{3,t} \ldots):$$

Qui $\Sigma \pm b_{1,r} b_{2,s} b_{3,t} \ldots$ costituisce un determinante dell'n^{mo} ordine, il quale si forma dal secondo dato gruppo di simboli prendendo alcune colonne, ed il Σ si riferisce a cambiamenti dei primi indici; si vegga l'Art. 27. Dinoteremo questo determinante con Q.

Ora, in primo luogo, supponiamo p minore di n. Gl'indici $r, s, t, \ldots$ sono n in numero, e nessuno di essi può eccedere p; segue da ciò che vi dovranno essere sempre due o più di essi che hanno lo stesso valore. Così Q svanisce sempre, per l'Art. 30; e quindi R svanisce.

In secondo luogo, supponiamo $p=n$. Allora il sistema di indici $rst\ldots$ può essere una permutazione degli n simboli $1, 2, \ldots n$; ed essi non possono essere altro senza fare che Q svanisca. E prendendo successivamente diverse permutazioni il segno di Q cambierà, ma non il suo valore, per l'Art. 29. Così il valore di R si riduce al prodotto del determinante formato col secondo dato gruppo di simboli, per la somma di tutti gli elementi dinotati da $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ in cui Σ si riferisce a cambiamenti dei secondi indici. Quindi quando $p=n$,

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{1,1}, & \ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1}, & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

Finalmente, supponiamo p maggiore di n. Allora il sistema di indici $rst\ldots$ può essere una combinazione qualunque di n numeri che si può formare dai p numeri $1, 2, \ldots p$; ed il numero di tali combinazioni è $\dfrac{\lfloor p}{\lfloor n \lfloor p-n}$. Dinoti P ciò che diviene Q cambiando b in a. Quindi, come nel secondo caso, otterremo PQ per un termine in R, che nasce dalla scelta di una definita combinazione tra le $\dfrac{\lfloor p}{\lfloor n \lfloor p-n}$ combinazioni possibili. Quindi quando p è maggiore di n abbiamo $R = \Sigma PQ$, in cui Σ si riferisce alla somma di $\dfrac{\lfloor p}{\lfloor n \lfloor p-n}$ termini provenienti da tutte le possibili combinazioni.

40. Dal secondo caso dell'Articolo precedente vediamo che il prodotto di due determinanti dell'ordine n si può esibire come un determinante dello stesso ordine. Similmente, il prodotto di tre de-

terminanti dell'ordine n si può esibire come un determinante dell'ordine n; poichè possiamo prima esibire il prodotto di due di essi come un nuovo determinante dell'ordine n, e poi il prodotto di questo nuovo determinante pel terzo dei determinanti primitivi si può esibire come un determinante dell'ordine n. Così vediamo che il prodotto di un numero qualunque di determinanti che sono tutti dello stesso ordine si può esibire come un nuovo determinante di quell'ordine.

Quindi generalmente il prodotto di un numero qualunque di determinanti di ordini qualunque si può esibire come un determinante dello stesso ordine di quello del determinante dell'ordine più alto tra i fattori. Poichè per l'Art. 33, tutti gli altri determinanti si possono rendere dello stesso ordine di quello che è dell'ordine più alto; ed allora il prodotto di questi determinanti dello stesso ordine si può esibire come un determinante di quell'ordine.

41. Supponiamo che si voglia formare il prodotto dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}, \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} b_{1,1}, \dots b_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n,1}, \dots b_{n,n} \end{vmatrix}$$

Per l'Art. 28 possiamo cambiare le successive linee in successive colonne nell'uno o nell'altro di questi determinanti o in tutti e due. Così, se dinotiamo il prodotto con

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, \dots c_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{n,1}, \dots c_{n,n} \end{vmatrix}$$

possiamo formare i nuovi costituenti in quattro modi, poichè possiamo adottare da per tutto una qualunque delle seguenti leggi,

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \dots + a_{i,n}\, b_{k,n},$$

o pure $c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \dots + a_{i,n}\, b_{n,k},$

o pure $c_{i,k} = a_{1,i}\, b_{k,1} + a_{2,i}\, b_{k,2} + \dots + a_{n,i}\, b_{k,n},$

o pure $c_{i,k} = a_{1,i}\, b_{1,k} + a_{2,i}\, b_{2,k} + \dots + a_{n,i}\, b_{n,k},$

42. Dinoti $A_{i,k}$ il coefficiente di $a_{i,k}$ in un determinante R. Il sistema di simboli

$$\begin{matrix} A_{1,1}, A_{1,2}, \dots A_{1,n} \\ A_{2,1}, A_{2,2}, \dots A_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n,1}, A_{n,2}, \dots A_{n,n} \end{matrix}$$

si chiama il *reciproco* del sistema di simboli

$$\begin{matrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \dots a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \dots a_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \dots a_{n,n}. \end{matrix}$$

43. *Il determinante di un sistema che è il reciproco di un sistema proposto di* n^2 *simboli è la* $(n-1)^{ma}$ *potenza del determinante del sistema proposto.*

Se moltiplichiamo i determinanti

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, \dots A_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n,1}, \dots A_{n,n} \end{vmatrix}$$

ed $\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots a_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}, \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$

otteniamo per prodotto

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, \dots c_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{n,1}, \dots c_{n,n} \end{vmatrix}$$

in cui $c_{i,k} = A_{i,1}a_{k,1} + A_{i,2}a_{k,2} + \dots + A_{i,n}a_{k,n}$. Quindi per l'Art. 34 i costituenti dell'ultimo determinante hanno il valore R o 0 secondo che i e k sono eguali o disuguali. Così questo determinante si riduce al suo primo elemento $c_{1,1}c_{2,2}\dots c_{n,n}$, cioè, ad R^n. Quindi

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, \dots A_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n,1}, \dots A_{n,n} \end{vmatrix} R = R^n$$

onde

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, \dots A_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n,1}, \dots A_{n,n} \end{vmatrix} = R^{n-1}$$

44. Supponiamo che si abbia un determinante dell'n^{mo} ordine, e nel simbolo di quadrato che lo dinota supponiamo che si distruggano m colonne ed m linee; i simboli rimanenti si possono supporre allora ravvicinati tra loro in modo da formare un nuovo simbolo di quadrato che è un determinante dell'ordine $n-m$. Questo determinante si chiama un determinante *parziale* o un determinante *minore*, rispetto al determinante primitivo. I simboli comuni alle m linee e colonne formeranno un simbolo di quadrato che è un determinante dell'ordine m. Questo è anche un determinante parziale o determinante minore. I due determinanti parziali o minori si dicono essere *complementari* fra loro.

45. Dinoti R un determinante dell'ordine n. Un determinante parziale del sistema reciproco dell'ordine m è numericamente eguale al prodotto di R^{m-1} pel complementare del determinante parziale corrispondente del sistema primitivo.

Dinoti $f, g, \dots r, s, \dots$ una permutazione degli n numeri $1, 2, \dots n$; e dinoti $i, k, \dots u, v, \dots$ un'altra permutazione. E supponiamo che $f, g, \dots$ ed $i, k, \dots$ siano gruppi ciascuno di m numeri, mentre $r, s, \dots$ ed $u, v, \dots$ siano gruppi ciascuno di $n-m$ numeri. Così

$$\begin{vmatrix} A_{f,i}, A_{f,k}, \dots \\ A_{g,i}, A_{g,k}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

è un determinante parziale del sistema reciproco dell'ordine m; lo dinoteremo con S.

Ora

$$\begin{vmatrix} a_{f,i}, a_{f,k}, \dots a_{f,u}, a_{f,v}, \dots \\ a_{g,i}, a_{g,k}, \dots a_{g,u}, a_{g,v}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r,i}, a_{r,k}, \dots a_{r,u}, a_{r,v}, \dots \\ a_{s,i}, a_{s,k}, \dots a_{s,u}, a_{s,v}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = \varepsilon R$$

in cui ε è $+1$ o -1 secondo che le permutazioni $f, g, \ldots r, s, \ldots$ ed $i, k, \ldots u, v, \ldots$ appartengono alla stessa classe o a classi diverse.

Proponiamoci ora di ottenere il prodotto di questi due determinanti. Il determinante S si può elevare all'ordine n inserendo costituenti addizionali; si vegga l'Art. 33. Così possiamo porre per S il determinante seguente,

$$\begin{vmatrix} A_{f,i}, & A_{f,k}, & \ldots & A_{f,u}, & A_{f,v}, & \ldots \\ A_{g,i}, & A_{g,k}, & \ldots & A_{g,u}, & A_{g,v} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{r,i}, & B_{r,k}, & \ldots & B_{r,u}, & B_{r,v} & \ldots \\ B_{s,i}, & B_{s,k}, & \ldots & B_{s,u}, & B_{s,v}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

in cui i costituenti dinotati dalla lettera B con indici si suppongono tutti zero, eccetto quelli che stanno *nella* diagonale, i quali si suppongono tutti eguali all'unità.

Ora si formi il prodotto di S ed εR, il quale sarà un nuovo determinante dell'ordine n. I costituenti di questo nuovo determinante siano dinotati dalla lettera c con due indici, il primo dei quali indica come al solito la linea ed il secondo la colonna. Per l'Art. 41 vi sono quattro modi secondo i quali possiamo determinare i costituenti nel prodotto di S ed εR; sceglieremo il primo di essi, secondo il quale $c_{p,q}$ si ottiene moltiplicando rispettivamente i costituenti nella p^{ma} linea di S per quelli nella q^{ma} linea di εR. Così

$$c_{1,1} = A_{f,i}a_{f,i} + A_{f,k}a_{f,k} + \ldots + A_{f,u}a_{f,u} + A_{f,v}a_{f,v} + \ldots$$

$$c_{1,2} = A_{f,i}a_{g,i} + A_{f,k}a_{g,k} + \ldots + A_{f,u}a_{g,u} + A_{f,v}a_{g,v} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quindi per l'Art. 34, abbiamo $c_{1,1}\, c_{2,2}, \ldots c_{m,m}$ tutti eguali ad R, mentre tutti gli altri costituenti nelle prime m linee del determinante che è il prodotto di S ed εR sono zero.

Per il primo termine nella $(m+1)^{\text{ma}}$ linea, abbiamo

$$c_{m+1,1} = B_{r,i}a_{f,i} + B_{r,k}a_{f,k} + \ldots + B_{r,u}a_{f,u} + B_{r,v}a_{f,v} + \ldots = a_{f,u},$$

poichè tutt'i simboli dinotati da B con gl'indici che qui si trovano

sono zero eccetto $B_{r,u}$, il quale è l'unità. Pel secondo termine nella $(m+1)^{ma}$ linea abbiamo similmente

$$c_{m+1,2}=a_{g,u}.$$

Procedendo in questo modo, troviamo che la $(m+1)^{ma}$ linea nel prodotto di S ed εR è la stessa che la $(m+1)_{ma}$ colonna in εR.

Similmente, la $(m+2)^{ma}$ linea nel prodotto è la stessa che la $(m+2)^{ma}$ colonna in εR.

Il determinante quindi che è equivalente ad $S\varepsilon R$ si riduce per l'Art. 31 al prodotto di R^m pel determinante seguente del $(n-m)^{mo}$ ordine,

$$\begin{vmatrix} a_{r,u}, & a_{r,v}, & \cdots \\ a_{s,u}, & a_{s,v}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Così $S=\varepsilon R^{2m-1}\begin{vmatrix} a_{r,u}, & a_{r,v}, & \cdots \\ a_{s,u}, & a_{s,v}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

46. Gli esempi seguenti possono essere verificati dallo studente. Negli esempi (4), (5), e (6), abbiamo determinanti di cui i costituenti sono essi stessi determinanti.

(1) $$\begin{vmatrix} 0, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & 0, & \gamma_1, & \beta_1 \\ \beta, & \gamma_1, & 0, & \alpha_1 \\ \gamma, & \beta_1, & \alpha_1, & 0 \end{vmatrix}=\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\beta_1^2+\gamma^2\gamma_1^2-2\alpha\alpha_1\beta\beta_1-2\alpha\alpha_1\gamma\gamma_1-2\beta\beta_1\gamma\gamma_1$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & 0, & \gamma_1, & \beta_1 \\ -\beta, & -\gamma_1 & 0, & \alpha_1 \\ -\gamma, & -\beta_1, & -\alpha_1, & 0 \end{vmatrix}=(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2$$

(3) $$\begin{vmatrix} \theta, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & \theta, & \gamma_1, & \beta_1 \\ -\beta, & -\gamma_1, & \theta, & \alpha_1 \\ -\gamma, & -\beta_1, & -\alpha_1, & \theta \end{vmatrix}=\begin{aligned}&\theta^4+\theta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\\&+(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2\end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c, & g \\ g, & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g, & a \\ f, & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} g, & a \\ f, & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a, & h \\ h, & b \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}$$

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} g, & a \\ f, & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f, & c \\ h, & g \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a, & h \\ h, & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} h, & b \\ g, & f \end{vmatrix} \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}$$

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b, & f \\ f, & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f, & c \\ h, & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} h, & b \\ g, & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} f, & c \\ h, & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c, & g \\ g, & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g, & a \\ f, & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} h, & b \\ g, & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g, & a \\ f, & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a, & h \\ h, & b \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \text{al quadrato di} \begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}$$

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c, & d \\ c_1, & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b, & c \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d, & a \\ d_1, & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c, & a \\ c_1, & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b, & d \\ b_1, & d_1 \end{vmatrix} = 0.$$

III. APPLICAZIONI DEI DETERMINANTI.

47. Supponiamo che si debbano trovare i valori di n quantità ignote $x_1, x_2, \ldots x_n$ dalle seguenti n equazioni semplici,

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n = u_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n = u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,n}x_n = u_n.$$

Dinoti R il determinante $\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$; e dinoti $A_{i,k}$ il coefficiente di $a_{i,k}$ in R. Allora i valori delle quantità ignote saranno dati dalla formola

$$Rx_k = u_1 A_{1,k} + u_2 A_{2,k} + \ldots + u_n A_{n,k}$$

in cui k può avere ogni valore tra 1 ed n l'uno e l'altro inclusivamente.

Infatti si moltiplichino le equazioni date rispettivamente per $A_{1,k}, A_{2,k}, \dots A_{n,k}$; e si sommino i risultati. Il coefficiente di x_k è allora

$$a_{1,k}A_{1,k}+a_{2,k}A_{2,k}+\dots+a_{n,k}A_{n,k},$$

il quale è eguale ad R per l'Art. 34. Il coefficiente di x_i è

$$a_{1,i}A_{1,k}+a_{2,i}A_{2,k}+\dots+a_{n,i}A_{n,k},$$

il quale è zero per l'Articolo 34.

Possiamo scrivere la formola che dà x_k così,

$$Rx_k = S,$$

in cui S è anche un determinante, cioè il determinante che si ottiene da R togliendo la k^{ma} colonna di R e sostituendo per essa la colonna formata da $u_1, u_2, \dots u_n$.

48. Supponiamo che il determinante R svanisca; allora i valori delle quantità ignote diventano infiniti. Ciò indica che le equazioni date sono incompatibili.

49. Supponiamo che $u_1, u_2, \dots u_n$ svaniscano, e che svanisca anche R. Il metodo dell'Art. 47 dà per le quantità ignote la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. In questo caso possiamo prendere $n-1$ delle date equazioni, e queste saranno sufficienti a determinare i rapporti di $n-1$ delle quantità ignote alla rimanente quantità ignota.

Questi rapporti però si possono assegnare immediatamente. Poichè avremo

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots = A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3} : \dots,$$

in cui i è ogni intero non maggiore di n.

Infatti essendo $R=0$, abbiamo dall'Art. 34, per tutt'i valori interi di i e k tra 1 ed n,

$$a_{k,1}A_{i,1} + a_{k,2}A_{i,2} + a_{k,3}A_{i,3} + \dots = 0;$$

e così quando $x_1, x_2, x_3 \dots$ si prendono nei rapporti indicati qui sopra, abbiamo

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \dots = 0.$$

Prendendo $n-1$ delle date equazioni, e supponendo $u_1, u_2, \ldots u_n$ tutti zero, otterremo in generale un *solo definito* valore per il rapporto di ciascuna di $n-1$ delle quantità ignote alla rimanente quantità ignota. Segue da ciò che quando $R=0$ i rapporti

$$A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3} : \ldots$$

sono indipendenti da i.

50. Se $u_1, u_2, \ldots u_n$ svaniscono tutti ed R non svanisce il sistema di equazioni nell'Art. 47 non può essere soddisfatto altrimenti, se non supponendo $x_1, x_2, \ldots x_n$ tutti zero. La condizione $R=0$ è così necessaria affinchè le quantità ignote abbiano valori diversi da zero.

51. Per esempio, affinchè le equazioni

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

ammettano soluzioni diverse da zero dobbiamo avere

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Se questa condizione è soddisfatta le equazioni possono essere soddisfatte da

$$x : y : z :: \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2, & a_2 \\ c_3, & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\text{o } x : y : z :: \begin{vmatrix} b_3, & c_3 \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_3, & a_3 \\ c_1, & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3, & b_3 \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix},$$

$$\text{o } x : y : z :: \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Queste tre forme di soluzione coincidono per l'Art. 49.

52. Dalle equazioni date nell'Art. 47 abbiamo dedotto

$$u_1A_{1,1}+u_2A_{2,1}+u_3A_{3,1}+\ldots+u_nA_{n,1}=Rx_1,$$
$$u_1A_{1,2}+u_2A_{2,2}+u_3A_{3,2}+\ldots+u_nA_{n,2}=Rx_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_1A_{1,n}+u_2A_{2,n}+u_3A_{3,n}+\ldots+u_nA_{n,n}=Rx_n.$$

Dinoti ρ il determinante $\Sigma\pm A_{1,1}A_{2,2}\ldots A_{n,n}$; e dinoti $\alpha_{i,k}$ il coefficiente di $A_{i,k}$ in ρ. Possiamo dalle equazioni precedenti trovare i valori di $u_1, u_2, \ldots u_n$; e procedendo come nell'Art. 47 otterremo il risultato generale

$$\rho u_k=R\left\{x_1\alpha_{k,1}+x_2\alpha_{k,2}+\ldots+x_n\alpha_{k,n}\right\}.$$

Paragonando questo risultato con l'equazione data nell'Art. 47,

$$a_{k,1}x_1+a_{k,2}x_2+\ldots+a_{k,n}x_n=u_k,$$

abbiamo, poichè i valori di u_k debbono essere identici,

$$\frac{R\alpha_{k,i}}{\rho}=a_{k,i}.$$

Ma $\rho=R^{n-1}$ per l'Art. 43; così

$$\alpha_{k,i}=R^{n-2}a_{k,i}$$

53. Passiamo ora ad applicare i determinanti ad un altro problema, quello di formare il prodotto di tutte le differenze fra quantità date.

Siano n quantità dinotate da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Dinoti P il prodotto delle differenze ottenute sottraendo ciascuna di queste n quantità da tutte quelle che la seguono, sicchè

$$P=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$$

Allora P si può esibire come un determinante dell'ordine n. Infatti si consideri il determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_n, & \alpha_n^2, & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Questo determinante è una funzione razionale intera delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; ed esso svanisce quando due qualunque di queste quantità sono eguali, per l'Art. 30. Esso è quindi divisibile pel prodotto che abbiamo dinotato con P. Inoltre il determinante ed il prodotto P sono entrambi del grado $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ nelle potenze e nei prodotti di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; quindi il quoziente quando il determinante si divide per P è qualche *numero*. E questo numero deve essere l'unità, come vediamo paragonando il primo elemento del determinante col prodotto dei primi termini dei fattori binomii da cui P è composto.

54. Il determinante dell'n^{mo} ordine consiste di $\underline{|n}$ termini. Il prodotto P prima delle riduzioni conterrebbe un numero molto più grande di termini, cioè, $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Così il determinante è una forma vantaggiosa pel prodotto a motivo del risparmio nei termini.

55. Abbiamo

$$P^2 = \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_n, & \alpha_n^2, & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_n, & \alpha_n^2, & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ora il prodotto di questi determinanti si può esibire come un solo determinante; adottando l'ultimo dei quattro metodi dati nell'Art. 41, abbiamo

$$P^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

in cui $s_r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \ldots + \alpha_n^r$.

56. Supponiamo per esempio che $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ siano le radici di un'equazione dell'n^{mo} grado; allora P^2 è il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici. Così il prodotto dei quadrati delle differenze di tutte le radici di un'equazione si può esibire come un determinante, i costituenti del quale sono conosciuti in termini

dei coefficienti dell'equazione data, poichè s_r si può esprimere in termini dei coefficienti.

57. Supponiamo che si debbano trovare i valori delle n quantità ignote $x_1, x_2, \ldots x_n$ dalle equazioni

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=1,$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+\ldots+x_n\alpha_n=t,$$

$$x_1\alpha_1^2+x_2\alpha_2^2+x_3\alpha_3^2+\ldots+x_n\alpha_n^2=t^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1\alpha_1^{n-1}+x_2\alpha_2^{n-1}+x_3\alpha_3^{n-1}+\ldots+x_n\alpha_n^{n-1}=t^{n-1}.$$

I valori delle quantità ignote saranno determinati dalla formola

$$x_i=\frac{(\alpha_1-t)(\alpha_2-t)\ldots(\alpha_{i-1}-t)(\alpha_{i+1}-t)\ldots(\alpha_n-t)}{(\alpha_1-\alpha_i)(\alpha_2-\alpha_i)\ldots(\alpha_{i-1}-\alpha_i)(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\ldots(\alpha_n-\alpha_i)}.$$

Infatti per l'Art. 47

$$Rx_i=S,$$

in cui $R=\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2, & \alpha_3^2, & \ldots \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \alpha_3^{n-1}, & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$

ed $S=\begin{vmatrix} 1, & \ldots 1, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ \alpha_1, & \ldots \alpha_{i-1}, & t, & \alpha_{i+1}, & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2, & \ldots \alpha^2_{i-1}, & t^2, & \alpha^2_{i+1}, & \ldots \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1}, & \ldots \alpha_{i-1}^{n-1}, & t^{n-1}, & \alpha_{i+1}^{n-1}, & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Ora la i^{ma} colonna in R sia situata la prima, e la i^{ma} colonna in S sia situata la prima; si vegga l'Art. 32. Indi i due determinanti si mutino in prodotti di differenze per l'Art. 53; e cancellando i fattori comuni nel numeratore e nel denominatore otteniamo il valore di x_i nella forma assegnata qui sopra.

58. Il metodo dei determinanti si può anche adoperare per ottenere l'equazione risultante quando alcune quantità si eliminano da date equazioni. Supponiamo che si debba eliminare x dalle equazioni $f(x)=0$ e $\varphi(x)=0$, in cui

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,$$

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2.$$

Possiamo procedere così,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+0,$$

$$xf(x)=0+a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4,$$

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+0+0,$$

$$x\varphi(x)=0+b_0x+b_1x^2+b_2x^3+0,$$

$$x^2\varphi(x)=0+0+b_0x^2+b_1x^3+b_2x^4.$$

$$\text{Sia } R=\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & 0 \\ 0\ , & a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ b_0, & b_1, & b_2, & 0\ , & 0 \\ 0\ , & b_0, & b_1, & b_2, & 0 \\ 0\ , & 0\ , & b_0, & b_1, & b_2 \end{vmatrix};$$

allora poichè per supposizione $f(x)=0$ e $\varphi(x)=0$, e quindi anche $xf(x)$, $x\varphi(x)$, ed $x^2\varphi(x)$ sono tutte zero, ne segue per l'Art. 50 che $R=0$ è la relazione necessaria che deve aver luogo tra i coefficienti di $f(x)$ e $\varphi(x)$.

59. Abbiamo dato un esempio particolare nell'Articolo precedente, poichè così la ricerca generale alla quale ora passiamo è resa più intelligibile. Siano

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m=0,$$

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n=0;$$

e supponiamo che si debba eliminare x fra queste equazioni. Abbiamo

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m,$$
$$xf(x)= \quad a_0x+a_1x^2+\ldots+a_{m-1}x^m+a_mx^{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{n-1}f(x)= \quad a_0x^{n-1}+a_1x^n+\ldots$$
$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n,$$
$$x\varphi(x)= \quad b_0x+b_1x^2+\ldots+b_{n-1}x^n+b_nx^{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{m-1}\varphi(x)= \quad b_0x^{m-1}+b_1x^m+\ldots$$

Dinoti R il determinante dell'ordine $m+n$ che ha per sue prime n linee

$$\begin{array}{lllllll} a_0, & a_1, & a_2, \ldots & a_m, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ 0\ , & a_0, & a_1, \ldots & a_{m-1}, & a_m, & 0, & 0, \ldots \\ 0\ , & 0\ , & a_0, \ldots & a_{m-2}, & a_{m-1}, & a_m, & 0, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array},$$

e per sue ultime m linee

$$\begin{array}{lllllll} b_0, & b_1, & b_2, \ldots & b_n, & 0, & 0\ , & 0, \ldots \\ 0\ , & b_0, & b_1, \ldots & b_{n-1}, & b_n, & 0\ , & 0, \ldots \\ 0\ , & 0\ , & b_0, \ldots & b_{n-2}, & b_{n-1}, & b_n, & 0, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array};$$

allora $R=0$ è la relazione necessaria tra i coefficienti affinchè $f(x)$ e $\varphi(x)$ possano simultaneamente svanire.

La relazione $R=0$ è stata chiamata la *risultante* o l'*eliminante* delle equazioni proposte $f(x)=0$ e $\varphi(x)=0$.

60. I termini del quoziente ottenuto col dividere un'espressione algebrica per un'altra si possono esibire come determinanti.

Sia $\quad \varphi(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_rx^{m-r}+\ldots,$

$$\psi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_rx^{n-r}+\ldots;$$

ed il quoziente di $\varphi(x)$ diviso per $\psi(x)$ sia dinotato da

$$q_0x^{m-n}+q_1x^{m-n-1}+\ldots+q_rx^{m-n-r}+\ldots$$

Allora sarà

$$q_r = \frac{1}{b_0^{r+1}} \begin{vmatrix} b_0, & 0, & 0, & 0, \ldots\ldots & a_0 \\ b_1, & b_0, & 0, & 0, \ldots\ldots & a_1 \\ b_2, & b_1, & b_0, & 0, \ldots\ldots & a_2 \\ b_3, & b_2, & b_1, & b_0, \ldots\ldots & a_3 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ b_r, & b_{r-1}, & b_{r-2}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_r \end{vmatrix}$$

Questo si può mostrare col fatto essere vero quando $r=0$, o 1, o 2; e può essere dimostrato generalmente per induzione. Supporremo, per esempio, che q_0, q_1, q_2, q_3 e q_4 si ammetta di essere stati convenevolmente trovati con questa legge, e vogliamo dimostrare che q_5 lo sia del pari.

Moltiplicando $\psi(x)$ pel quoziente ed eguagliando a $\varphi(x)$ troviamo

$$a_5 = q_0 b_5 + q_1 b_4 + q_2 b_3 + q_3 b_2 + q_4 b_1 + q_5 b_0 \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

e dobbiamo mostrare che il valore così ottenuto per q_5 coincide con quello trovato dal determinante. Dinoti R il determinante, allora

$$Rb_0 = \frac{1}{b_0^5} \begin{vmatrix} b_0, & 0, & 0, & 0, & 0, & a_0 \\ b_1, & b_0, & 0, & 0, & 0, & a_1 \\ b_2, & b_1, & b_0, & 0, & 0, & a_2 \\ b_3, & b_2, & b_1, & b_0, & 0, & a_3 \\ b_4, & b_3, & b_2, & b_1, & b_0, & a_4 \\ b_5, & b_4, & b_3, & b_2, & b_1, & a_5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_0^5} \left\{ -S_5 b_5 + S_4 b_4 - S_3 b_3 + S_2 b_2 - S_1 b_1 + S_0 a_5 \right\},$$

in cui S_5, S_4, S_3, S_2, S_1, S_0, sono determinanti che nascono da R togliendo l'ultima linea sempre ed una colonna successivamente. Così

$$S_5 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & a_0 \\ b_0, & 0, & 0, & 0, & a_1 \\ b_1, & b_0, & 0, & 0, & a_2 \\ b_2, & b_1, & b_0, & 0, & a_3 \\ b_3, & b_2, & b_1, & b_0, & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ a_1, & b_0, & 0, & 0, & 0 \\ a_2, & b_1, & b_0, & 0, & 0 \\ a_3, & b_2, & b_1, & b_0, & 0 \\ a_4, & b_3, & b_2, & b_1, & b_0 \end{vmatrix}$$

per l'Art. 29. Allora con l'uso ripetuto dell'Art. 31, otteniamo $a_0 b_0^4$ come il valore del determinante; così

$$\frac{S_5}{b_0^5} = \frac{a_0}{b_0} = q_0.$$

Ancora

$$S_4 = \begin{vmatrix} b_0, & 0, & 0, & 0, & a_0 \\ b_1, & 0, & 0, & 0, & a_1 \\ b_2, & b_0, & 0, & 0, & a_2 \\ b_3, & b_1, & b_0, & 0, & a_3 \\ b_4, & b_2, & b_1, & b_0, & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_0, & a_0, & 0, & 0, & 0 \\ b_1, & a_1, & 0, & 0, & 0 \\ b_2, & a_2, & b_0, & 0, & 0 \\ b_3, & a_3, & b_1, & b_0, & 0 \\ b_4, & a_4, & b_2, & b_1, & b_0 \end{vmatrix}$$

per l'Art. 29. Ora si può dimostrare come nell'Art. 31 che

$$\begin{vmatrix} b_0, & a_0, & 0, & 0, & 0 \\ b_1, & a_1, & 0, & 0, & 0 \\ b_2, & a_2, & b_0, & 0, & 0 \\ b_3, & a_3, & b_1, & b_0, & 0 \\ b_4, & a_4, & b_2, & b_1, & b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0, a_0 \\ b_1, a_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_0, & 0, & 0 \\ b_1, & b_0, & 0 \\ b_2, & b_1, & b_0 \end{vmatrix}$$

Così $S_4 = - \begin{vmatrix} b_0, a_0 \\ b_1, a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0, & 0, & 0 \\ b_1, & b_0, & 0 \\ b_2, & b_1, & b_0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_0, a_0 \\ b_1, a_1 \end{vmatrix} b_0^3 = - q_1 b_0^5;$

quindi
$$\frac{S_4}{b_0^5} = - q_1.$$

Ancora, $S_3 = \begin{vmatrix} b_0, & 0, & 0, & 0, & a_0 \\ b_1, & b_0, & 0, & 0, & a_1 \\ b_2, & b_1, & 0, & 0, & a_2 \\ b_3, & b_2, & b_0, & 0, & a_3 \\ b_4, & b_3, & b_1, & b_0, & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0, & 0, & a_0 \\ b_1, & b_0, & a_1 \\ b_2, & b_1, & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0, 0 \\ b_1, b_0 \end{vmatrix}$

$$= q_2 b_0^5;$$

quindi
$$\frac{S_3}{b_0^5} = q_2.$$

Similmente
$$\frac{S_2}{b_0^5} = -q_3,$$
$$\frac{S_1}{b_0^5} = q_4,$$
ed
$$\frac{S_0}{b_0^5} = 1;$$
così
$$Rb_0 = -q_0b_5 - q_1b_4 - q_2b_3 - q_3b_2 - q_4b_1 + a_5 \ldots\ldots (2);$$
quindi vediamo che R trovato da (2) coincide in valore con q_5 trovato da (1); il che dovea dimostrarsi. Il metodo che abbiamo adoperato rispetto a q_5 è generale, e così q_r ha il valore sopra assegnato.

61. Daremo ora alcune applicazioni della teoria dei determinanti relative ad un caso della trasformazione delle funzioni per mezzo di sostituzioni lineari.

Si abbia una funzione qualunque delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n$; e siano queste variabili espresse in termini di n nuove variabili indipendenti $y_1, y_2, \ldots, y_n$ per mezzo delle seguenti n equazioni lineari:
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ x_2 = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1);$$
allora sostituendo i valori di $x_1, x_2, \ldots x_n$, la funzione assegnata diviene una funzione di $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Supponiamo ora che s'imponga la condizione che
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \ldots\ldots (2);$$
allora avranno luogo alcune relazioni tra i coefficienti delle equazioni lineari (1); queste relazioni andiamo ora a dimostrare.

I. Per ogni valore di i e k tra 1 ed n inclusivamente
$$\left.\begin{array}{l} a^2_{1,i} + a^2_{2,i} + \ldots\ldots + a^2_{n,i} = 1 \\ \text{ed} \quad a_{1,i}a_{1,k} + a_{2,i}a_{2,k} + \ldots\ldots + a_{n,i}a_{n,k} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (3).$$

Infatti si sostituiscano i valori di $x_1, x_2, \dots x_n$ da (1) nell'identità (2); ed allora paragonando i coefficienti dei termini simili otteniamo (3).

II. Da (1) possiamo esprimere $y_1, y_2, \dots y_n$ in termini di $x_1, x_2, \dots x_n$: mostreremo che per ogni valore di i tra 1 ed n inclusivamente

$$y_i = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + \dots\dots + a_{n,i}x_n \dots\dots\dots\dots (4).$$

Per stabilire ciò sarà sufficiente di verificare l'enunciato: si sostituiscano i valori di $x_1, x_2, \dots x_n$ da (1) in (4); allora per mezzo di (3) si troverà che il secondo membro di (4) si riduce ad y_i.

III. Nello stesso modo come ottenemmo (3) sostituendo da (1) in (2) possiamo ottenere, sostituendo da (4) in (2), i seguenti risultati per ogni valore di i e k tra 1 ed n entrambi inclusivamente:

$$\left.\begin{aligned} a^2_{i,1} + a^2_{i,2} + \dots + a^2_{i,n} &= 1, \\ a_{i,1}a_{k,1} + a_{i,2}a_{k,2} + \dots + a_{i,n}a_{k,n} &= 0. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (5).$$

IV. Il quadrato del seguente determinante è eguale all'unità:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Si dinoti il determinante proposto con R: allora R^2, per l'Art. 39, è eguale al determinante

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

in cui $$c_{i,k} = a_{i,1}a_{k,1} + a_{i,2}a_{k,2} + \dots + a_{i,n}a_{k,n}.$$

Così, da (5), abbiamo $c_{i,k}=0$ quando i non è eguale a k, e $c_{i,i}=1$. Così l'ultimo determinante si riduce al suo primo elemento, cioè, all'unità: quindi $R^2=1$.

V. Abbia $A_{i,k}$ lo stesso significato come nell'Art. 47: allora otteniamo da (1)

$$y_i = \frac{1}{R}\left\{A_{1,i}x_1 + A_{2,i}x_2 + \ldots + A_{n,i}x_n\right\}.$$

Quindi, paragonando questo risultato con (4), abbiamo

$$a_{k,i} = \frac{A_{k,i}}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

VI. I determinanti parziali seguenti che si possono formare con i costituenti di R sono numericamente eguali:

$$\begin{vmatrix} a_{m+1,m+1}, & a_{m+1,m+2}, & \ldots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1}, & a_{m+2,m+2}, & \ldots & a_{m+2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,m+1}, & a_{n,m+2}, & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ed

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots & a_{m,m} \end{vmatrix}$$

Si dinoti il primo determinante con P, ed il secondo con Q; allora per l'Art. 45,

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots & A_{1,m} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots & A_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m,1}, & A_{m,2}, & \ldots & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

è numericamente eguale ad $R^{m-1}P$.

E per l'Art. 35 e l'equazione (6),

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots & A_{1,m} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots & A_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m,1}, & A_{m,2}, & \ldots & A_{m,m} \end{vmatrix} = R^m Q.$$

Quindi, poichè $R^2 = 1$, vediamo che P e Q sono numericamente eguali.

62. Finiremo con alcuni esempi.

(1) Mostrare che $\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ c, & a, & b \\ b, & c, & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

Mostrare che $a + b + c$ deve essere un fattore di questo determinante.

(2) Mostrare che

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ d, & a, & b, & c \\ c, & d, & a, & b \\ b, & c, & d, & a \end{vmatrix} = a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 \\ - 4a^2bd + 4b^2ac - 4c^2bd + 4d^2ac.$$

Mostrare che $a + b + c + d$ deve essere un fattore di questo determinante.

(3) Si abbia un determinante dell'ordine $n + 1$ in cui tutt'i costituenti siano eguali all'unità eccetto quelli che formano la serie diagonale, e questi siano $1, 1 + a_1, 1 + a_2, \ldots 1 + a_n$: il valore di questo determinante è $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Infatti se una qualunque delle quantità $a_1, a_2, \ldots a_n$ svanisce il determinante svanisce, poichè esso allora ha due linee identiche; così il determinante è divisibile per $a_1 a_2 \ldots a_n$. Ed il quoziente di questa divisione deve essere l'unità, come vediamo considerando il primo elemento del determinante.

(4) Si abbia un determinante dell'ordine n in cui tutt'i costituenti siano l'unità eccetto quelli che formano la serie diagonale, e questi siano $1 + a_1, 1 + a_2, \ldots 1 + a_n$: il valore di questo determinante è

$$a_1 a_2 \ldots a_n \left\{ 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right\}.$$

Infatti se una qualunque delle quantità $a_1, a_2, \ldots a_n$ svanisce il determinante si riduce ad un caso dell'esempio precedente; ed il termine $a_1 a_2 \ldots a_n$ si trova considerando il primo elemento del determinante. *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. I. pag. 364.

IV. TEOREMA DEL BINOMIO CON L'ESPONENTE QUALUNQUE.

63. È noto che quando n è un intero positivo

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

Andiamo a dimostrare che questa relazione regge quando n ha un valore qualunque positivo o negativo, intero o frazionario, cioè, dimostreremo il Teorema del Binomio per un esponente *qualunque*. Faremo alcune osservazioni sulla dimostrazione dopo di averla data nella forma ordinaria.

64. Supponiamo che m ed n siano *interi positivi;* allora abbiamo

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}x^3 + \ldots\ldots(1),$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \ldots\ldots(2).$$

Ma $$(1+x)^m \times (1+x)^n = (1+x)^{m+n};$$

quindi il prodotto delle serie che formano i secondi membri di (1) e (2) deve essere $=(1+x)^{m+n}$; cioè,

$$1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \ldots\ldots$$

$$= \left\{1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}x^3 + \ldots\ldots\right\}$$

$$\times \left\{1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \ldots\ldots\right\}\ldots\ldots(3).$$

L'equazione (3) è stata dimostrata nella supposizione che m ed n siano interi positivi: ma il prodotto delle due serie che si trovano nel secondo membro di (3) deve essere della *stessa forma* qualunque siano m ed n; conchiudiamo quindi che (3) deve essere vera

qualunque siano m ed n. Adopreremo ora una notazione che ci abiliterà ad esprimere (3) brevemente. Dinoti $f(m)$ la serie

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}x^3+\ldots\ldots$$

qualunque sia m; allora $f(n)$ dinoterà ciò che diviene la serie quando si pone n per m; ed $f(m+n)$ dinoterà ciò che diviene la serie quando si pone $m+n$ per m. E quando m è un intero positivo qualunque $f(m)=(1+x)^m$; inoltre $f(0)=1$. Così (3) si può scrivere

$$f(m+n)=f(m)\times f(n)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Similmente,

$$f(m+n+p)=f(m+n)\times f(p)=f(m)\times f(n)\times f(p).$$

Procedendo in questo modo possiamo mostrare che

$$f(m+n+p+q+\ldots)=f(m)\times f(n)\times f(p)\times f(q)\times\ldots\ldots (5).$$

Ora sia $m=n=p=q=\ldots=\frac{s}{r}$, in cui s ed r sono interi positivi, e supponiamo che il numero dei termini sia r; allora (5) diviene

$$f(s)=\left\{f\left(\frac{s}{r}\right)\right\}^r;$$

quindi

$$\left\{f(s)\right\}^{\frac{1}{r}}=f\left(\frac{s}{r}\right).$$

Ma poichè s è un intero positivo $f(s)=(1+x)^s$, e quindi

$$\left\{f(s)\right\}^{\frac{1}{r}}=(1+x)^{\frac{s}{r}};$$

adunque

$$(1+x)^{\frac{s}{r}}=f\left(\frac{s}{r}\right)=1+\frac{s}{r}x+\frac{\frac{s}{r}\left(\frac{s}{r}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

Ciò dimostra il Teorema del Binomio quando l'esponente è una *quantità positiva qualunque*.

Ancora, in (4) si ponga $-n$ per m; così

$$f(-n)\times f(n)=f(0)=1;$$

quindi

$$\frac{1}{f(n)}=f(-n).$$

Ma se n è una quantità positiva qualunque, $f(n)=(1+x)^n$;

quindi $$\frac{1}{(1+x)^n}=f(-n);$$

cioè, $$(1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

Ciò dimostra il Teorema del Binomio quando l'esponente è una quantità *negativa* qualunque.

65. La dimostrazione del Teorema del Binomio per un esponente qualunque contenuta nell'Articolo precedente fu data la prima volta da Eulero; benchè difficile e non del tutto soddisfacente, essa è un importante esercizio per lo studente. Faremo ora alcune osservazioni su di essa.

Il primo punto che dobbiamo notare si è il modo di dimostrare che $f(m+n)=f(m)\times f(n)$. Lo studente dovrebbe per esercizio scrivere tre o quattro termini della serie per $f(m)$, ed anche della serie per $f(n)$, e moltiplicarli insieme; se il prodotto si ordina secondo le potenze di x, si troverà che fin dove esso è stato completamente formato, coinciderà con la serie per $f(m+n)$. Ma dal conoscere ciò che rappresentano $f(m)$ ed $f(n)$ quando m ed n sono interi positivi, deduciamo senza il fastidio dell'attuale moltiplicazione, che la legge espressa da $f(m+n)=f(m)\times f(n)$ deve aver luogo. Il modo di stabilire questa legge nel caso semplice in cui m ed n sono interi e positivi è un valevole ed importante artificio algebrico.

Ma il modo con cui deduciamo che $f(m+n)=f(m)\times f(n)$, *qualunque siano* m *ed* n, è ancora più importante. Il principio è semplicemente questo: la *forma* di un prodotto algebrico qualunque è la stessa sia che i fattori rappresentino numeri interi o frazioni, numeri positivi o negativi; così, per esempio,

$$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc,$$

è vero qualunque siano a, b, e c. Quindi conchiudiamo che $f(m)\times f(n)$ avrà la stessa *forma* in tutt'i casi, siano m ed n interi positivi o no.

Lo studente può anche notare la dimostrazione di questo risultato data nella *Teoria delle Equazioni*, Capitolo XXIV.

66. Il punto più difficile però da considerare si è il significato del segno = nell'asserzione

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Supponiamo, per esempio, che $n = -1$, allora l'equazione suddetta diviene

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora sappiamo che la somma di r termini della serie $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ è $\frac{1-(-x)^r}{1+x}$; quindi quando x è numericamente *minore* dell'unità, prendendo abbastanza termini della serie, possiamo ottenere un risultato che differisce *tanto poco quanto ci piace* da $\frac{1}{1+x}$, e così possiamo in questo caso intendere l'asserzione in (2). Ma quando x è numericamente *maggiore* dell'unità, non vi è alcuna tale approssimazione numerica al valore di $\frac{1}{1+x}$ ottenuta prendendo un gran numero di termini della serie $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$.

Vedremo nel Capitolo sulla Convergenza delle Serie, che quando x è numericamente minore dell'unità, possiamo formarci un concetto definito della serie nel secondo membro di (1) qualunque sia n. In questo caso non vi è alcuna difficoltà nell'asserzione

$$f(m+n) = f(m) \times f(n);$$

ciascuna delle tre serie che essa contiene è aritmeticamente intelligibile. Ma quando x è numericamente maggiore dell'unità, non possiamo dare un significato aritmetico alla serie o all'asserzione; tutto ciò che possiamo dire si è, che se formiamo il prodotto dei primi r termini di $f(m)$ e dei primi r termini di $f(n)$, i primi r termini del risultato coincideranno con i primi r termini di $f(m+n)$; ma ciò non ci giustificherà nello scrivere $f(m+n) = f(m) \times f(n)$. Il caso in cui x è numericamente eguale all'unità richiederebbe un esame speciale che sarebbe qui fuori luogo.

Nell'insieme possiamo conchiudere che il Teorema del Binomio per lo sviluppo di $(1+x)^n$ dà un risultato che è aritmeticamente intelligibile e vero quando x è numericamente minore dell'unità; in qual senso il risultato sia vero quando x è numericamente

maggiore dell'unità non è stato ancora spiegato in un modo elementare. Il soggetto dello sviluppo delle espressioni però è propriamente una parte del Calcolo Differenziale, al quale lo studente può riferirsi per una più completa considerazione delle difficoltà.

67. *Trovare il termine numericamente più grande nello sviluppo di* $(1+x)^n$.

Consideriamo x come positivo.

I. Si supponga n un intero positivo.

Il termine $(r+1)^{\text{mo}}$ si può formare moltiplicando il termine r^{mo} per $\frac{n-r+1}{r}x$, cioè, per $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$; e questo moltiplicatore diminuisce al crescere di r. Si ponga

$$\left(\frac{n+1}{p}-1\right)x=1, \quad \text{onde} \quad p=\frac{(n+1)x}{x+1}.$$

Se p è un intero, due termini dello sviluppo sono eguali, cioè, il p^{mo} ed il $(p+1)^{\text{mo}}$, e questi sono maggiori di ogni altro termine. Se p non è un intero, supponiamo q la parte intera di p, allora il $(q+1)^{\text{mo}}$ termine è il più grande.

II. Si supponga n positivo ma non intero.

Come sopra, il termine $(r+1)^{\text{mo}}$ si può formare moltiplicando il termine r^{mo} per $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$.

Allora se x è maggiore dell'unità, non vi è alcun termine massimo; poichè il moltiplicatore precedente si può, col crescere r, rendere tanto vicino a $-x$ quanto ci piace; cioè, ciascun termine a partire da un certo termine fisso in avanti si può rendere tanto prossimamente quanto ci piace *numericamente* x volte il termine precedente, e così i termini crescono senza limite.

Ma se x non è maggiore dell'unità *vi sarà* un termine massimo; infatti se $p=\frac{(n+1)x}{x+1}$, allora finchè r è minore di p il moltiplicatore è maggiore dell'unità, ed i termini vanno crescendo; ma quando r è maggiore di p il moltiplicatore è minore dell'unità, e finchè esso continua ad essere positivo esso diminuisce al crescere di r; e quando il moltiplicatore diviene negativo esso è ancora numeri-

camente minore dell'unità; sicchè ciascun termine dopo che r ha sorpassato il valore p è numericamente minore del termine precedente. Quindi, come nel primo caso, se p è un intero, il termine p^{mo} è eguale al termine $(p+1)^{mo}$, e questi sono maggiori di ogni altro termine; se p non è un intero, si supponga q la parte intera di p, allora il termine $(q+1)^{mo}$ è il più grande.

III. Si supponga n negativo.

Sia $m=-n$, sicchè m è positivo. Il valore numerico dell'$(r+1)^{mo}$ termine si può ottenere moltiplicando quello dell'r^{mo} termine per $\left(\frac{m+r-1}{r}\right)x$, cioè, per $\left(\frac{m-1}{r}+1\right)x$.

Se x è maggiore dell'unità possiamo mostrare, come nel secondo caso, che non vi è alcun termine massimo.

Se x è minore dell'unità, si ponga

$$\left(\frac{m-1}{p}+1\right)x=1, \quad \text{onde} \quad p=\frac{(m-1)x}{1-x}.$$

Se p è un intero positivo, il p^{mo} termine è eguale al $(p+1)^{mo}$ termine, e questi sono maggiori di ogni altro termine. Se p è positivo ma non un intero, supponiamo q la parte intera di p, allora il $(q+1)^{mo}$ termine è il più grande. Se p è negativo, allora m è minore dell'unità; in questo caso ciascun termine è minore del precedente, ed il primo termine, cioè, l'unità, è il più grande.

Se x è eguale all'unità, allora quando m è maggiore dell'unità i termini crescono continuamente e non vi è termine massimo, quando m è eguale all'unità i termini sono tutti eguali, e quando m è minore dell'unità i termini decrescono continuamente sicchè il primo è il più grande.

Abbiamo supposto da per tutto che x sia positivo; se x è negativo, si ponga $y=-x$, sicchè y è positivo; allora si trovi il termine numericamente più grande di $(1+y)^n$, e questo sarà anche il termine numericamente più grande di $(1+x)^n$.

68. Il primo termine dello sviluppo di $(1+x)^n$ è l'unità; ogni altro termine è conosciuto poichè l'$(r+1)^{mo}$ termine è

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

Questa espressione si chiama il *termine generale*, poichè ponendo 1, 2, 3, ... successivamente per r, essa ci dà successivamente

il 2°, 3°, 4°, ... termine; cioè, possiamo ottenere da esso *ogni* termine dopo il primo. L'espressione del termine generale si può modificare in casi particolari, ed alle volte semplificare, come si vedrà negli esempi seguenti:

$(1+x)^{-m}$. Qui $n=-m$; il termine generale diviene

$$\frac{(-m)(-m-1)\ldots(-m-r+1)}{\underline{|r}}x^r,$$

il quale si può scrivere

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+r-1)}{\underline{|r}}(-1)^r x^r.$$

$(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Qui $n=\frac{1}{2}$; il numeratore del coefficiente di x^r è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-r+1\right);$$

se r non è minore di 2, questo si può scrivere

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2r-3)}{2^r}(-1)^{r-1};$$

quindi nello sviluppo di $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, il primo termine è 1, il secondo è $\frac{1}{2}x$, ed *ogni termine seguente* si può trovare ponendo per l'$(r+1)^{\text{mo}}$ termine

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2r-3)}{2^r\underline{|r}}(-1)^{r-1}x^r.$$

$(1+x)^{-2}$. Questo è un caso particolare di $(1+x)^{-m}$. Il coefficiente di x^r è

$$\frac{2\cdot3\cdot4\ldots(2+r-1)}{\underline{|r}}(-1)^r, \text{ cioè, } (r+1)(-1)^r.$$

$(1-x)^{-2}$. Per l'esempio precedente l'$(r+1)^{\text{mo}}$ termine è

$$(r+1)(-1)^r(-x)^r, \text{ cioè, } (r+1)x^r.$$

$(1+x)^{-3}$. Questo è un caso particolare di $(1+x)^{-m}$. Il coefficiente di x^r è

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\ldots(3+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r, \text{ cioè, } \frac{(r+1)(r+2)}{2}(-1)^r.$$

$(1-x)^{-3}$. Per l'esempio precedente l'$(r+1)^{\text{mo}}$ termine è

$$\frac{(r+1)(r+2)}{2}(-1)^r(-x)^r, \text{ cioè, } \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r.$$

Se x ed n sono positivi si troverà che nello sviluppo di $(1+x)^{-n}$ i termini sono alternativamente positivi e negativi; e nello sviluppo di $(1-x)^{-n}$ i termini sono tutti positivi. Se x ed n sono positivi, ed n non è un intero, si troverà che nello sviluppo di $(1+x)^n$ i termini incominciano con essere positivi, ed eventualmente diventano alternativamente positivi e negativi; e nello sviluppo di $(1-x)^n$ i termini incominciano con essere alternativamente positivi e negativi, ed eventualmente diventano tutti dello stesso segno.

69. *Trovare il numero dei prodotti omogenei di* r *dimensioni che si possono formare con* n *lettere* a, b, c, ... *e le loro potenze.*

Con la divisione ordinaria, o pure col Teorema del Binomio,

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1-bx}=1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1-cx}=1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\ldots$$

.....

Così

$$\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\ldots=\left\{1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots\right\}$$

$$\times\left\{1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\ldots\right\}\times\left\{1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\ldots\right\}\ldots$$

$$=1+S_1x+S_2x^2+S_3x^3+\ldots \text{ supponiamo.}$$

Qui
$$S_1 = a + b + c + \dots,$$
$$S_2 = a^2 + ab + b^2 + ac + \dots,$$
$$S_3 = a^3 + a^2b + abc + b^3 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

cioè, S_1 è eguale alla somma delle quantità $a, b, c, \dots$; S_2 è eguale alla somma di tutt'i prodotti, ciascuno di due dimensioni, che si possono formare con $a, b, c, \dots$ e le loro potenze; S_3 è eguale alla somma di tutt'i prodotti, ciascuno di tre dimensioni, che si possono formare; e così di seguito. Per trovare il *numero* dei prodotti in ciascuno di questi gruppi di prodotti, poniamo $a, b, c, \dots$ ciascuno $= 1$; così

$$\frac{1}{1-ax} \cdot \frac{1}{1-bx} \cdot \frac{1}{1-cx} \dots, \text{ diviene } \frac{1}{(1-x)^n} \text{ o } (1-x)^{-n}.$$

Quindi in questo caso S_r è il coefficiente di x^r nello sviluppo di $(1-x)^{-n}$; cioè,

$$= \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{\lfloor r}.$$

Questo è dunque il numero dei prodotti omogenei di r dimensioni che si possono formare con $a, b, c, \dots$ e le loro potenze.

70. *Trovare il numero dei termini nello sviluppo di un polinomio qualunque, l'esponente essendo un intero positivo.*

Il numero dei termini nello sviluppo di $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r)^n$ è lo stesso che il numero dei prodotti omogenei di n dimensioni che si possono formare con $a_1, a_2, a_3 \dots a_r$, e le loro potenze. Quindi, per l'Articolo precedente, esso è

$$\frac{r(r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}{\lfloor n}.$$

71. Il Teorema del Binomio si può applicare ad estrarre le radici dei numeri per approssimazione. Sia N un numero di cui si cerca la radice n^{ma}, e supponiamo $N = a^n + b$; allora

$$N^{\frac{1}{n}} = (a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a\left(1 + \frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} = a(1+x)^{\frac{1}{n}},$$

in cui $x = \frac{b}{a^n}$. Se ora x è una piccola frazione, i termini nello svi-

luppo di $(1+x)^{\frac{1}{n}}$ diminuiscono rapidamente, e possiamo ottenere un valore approssimato di $(1+x)^{\frac{1}{n}}$, e quindi di $N^{\frac{1}{n}}$, ritenendo solamente pochi di questi termini. Sarà perciò conveniente di prendere a in modo che a^n differisca tanto poco quanto è possibile da N, e così b sia tanto piccolo quanto è possibile. Alle volte sarà meglio di supporre $N=a^n-b$.

72. Chiuderemo questo Capitolo con sei esempi che illustreranno l'uso del Teorema del Binomio.

(1) Il rapporto $(a+x)^n : a^n$ è presso a poco eguale al rapporto $a+nx : a$ quando nx è piccolo in paragone di a. Questo valore sia x positivo o negativo, e per valori di n interi o frazionarii, positivi o negativi.

(2) Sviluppare $\dfrac{a+bx}{p+qx}$ in una serie secondo le potenze crescenti di x.

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{a+bx}{p\left(1+\dfrac{qx}{p}\right)}=\frac{1}{p}(a+bx)\left(1+\frac{qx}{p}\right)^{-1};$$

si sviluppi $\left(1+\dfrac{qx}{p}\right)^{-1}$ col Teorema del Binomio; così abbiamo

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{1}{p}(a+bx)\left(1-\frac{qx}{p}+\frac{q^2x^2}{p^2}-\frac{q^3x^3}{p^3}+\ldots\right)$$
$$=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right)-\frac{qx^2}{p^2}\left(b-\frac{aq}{p}\right)+\ldots$$

O pure possiamo procedere così,

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{a+\dfrac{aqx}{p}}{p+qx}+\frac{\left(b-\dfrac{aq}{p}\right)x}{p+qx}=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right)\left(1+\frac{qx}{p}\right)^{-1}$$
$$=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right)\left(1-\frac{qx}{p}+\frac{q^2x^2}{p^2}-\frac{q^3x^3}{p^3}+\ldots\right);$$

e così otteniamo lo stesso risultato come sopra.

Questo esempio s'incontra frequentemente nelle matematiche, specialmente nei casi in cui x è così piccolo che si possano trascu-

rare il suo quadrato e le potenze superiori; abbiamo allora *approssimativamente*

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right).$$

(3) Si vogliano i valori approssimati delle radici dell'equazione quadratica $ax^2+bx+c=0$, quando ac è molto piccolo in paragone di b^2.

Le radici sono $\dfrac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$.

E pel Teorema del Binomio, $\sqrt{(b^2-4ac)}=b\left(1-\dfrac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$=b\left\{1-\frac{1}{2}\frac{4ac}{b^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2-\ldots\ldots\right\}.$$

Così per la radice col segno superiore abbiamo

$$-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\ldots$$

e per la radice col segno inferiore abbiamo

$$-\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2a^2c^3}{b^5}+\ldots$$

Se a è molto piccolo, mentre b e c non sono piccoli, la prima radice non differisce molto da $-\dfrac{c}{b}$, e l'altra radice è numericamente molto grande.

Merita di essere notato che il valore approssimato della radice nel primo caso coincide con quello che otterremo nel modo seguente. Si scriva l'equazione così,

$$bx+c=-ax^2.$$

Per un risultato approssimato si trascuri il termine ax^2 come piccolo; così otteniamo $x=-\dfrac{c}{b}$. Indi si sostituisca questo valore approssimato di x nel termine ax^2; così otteniamo

$$bx+c=-\frac{ac^2}{b^2},$$

cioè,

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}.$$

Ancora, si sostituisca questo nuovo valore approssimato di x nel termine ax^2, e si conservino i termini che contengono a ed a^2; così otteniamo

$$bx + c = -\frac{ac^2}{b^2} - \frac{2a^2c^3}{b^4}$$

cioè,

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5},$$

e così di seguito.

(4) Dimostrare che se n è un intero positivo qualunque la parte *intera* di $(2+\sqrt{3})^n$ è un numero *dispari*.

Il significato di questa proposizione si vedrà facilmente prendendo alcuni casi semplici; così $2+\sqrt{3}$ cade fra 3 e 4 in valore, sicchè la parte intera di essa è il numero *dispari* 3; $(2+\sqrt{3})^2$ si troverà che cade fra 13 e 14 in valore, sicchè la parte intera di essa è il numero *dispari* 13.

Supponiamo che I dinoti la parte *intera* di $(2+\sqrt{3})^n$, ed $I+F$ il suo completo valore, sicchè F è una frazione propria. Abbiamo pel Teorema del Binomio

$$I + F = 2^n + n2^{n-1}3^{\frac{1}{2}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^{n-2}3^{\frac{2}{2}} + \ldots + 3^{\frac{n}{2}} \ldots\ldots (1).$$

Ora $2-\sqrt{3}$ è una frazione propria, quindi è anche tale $(2-\sqrt{3})^n$; dinotiamola con F'; allora

$$F' = 2^n - n2^{n-1}3^{\frac{1}{2}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^{n-2}3^{\frac{2}{2}} - \ldots + (-1)^n 3^{\frac{n}{2}} \ldots\ldots (2).$$

Si addizionino ora (1) e (2); i termini *irrazionali* nel secondo membro spariscono, ed abbiamo

$$I + F + F' = 2\left\{2^n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^{n-2}3^{\frac{2}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}2^{n-4}3^{\frac{4}{2}} + \ldots\right\}$$

$$= \text{ad un intero } \textit{pari}.$$

Ma F ed F' sono frazioni proprie: dobbiamo quindi avere

$$F + F' = 1, \text{ ed } I = \text{ad un intero } \textit{dispari}.$$

Un simile risultato vale per $(a+\sqrt{b})^n$ se a è l'intero prossimamente maggiore di $\sqrt{b}$, sicchè $a-\sqrt{b}$ sia una frazione propria.

(5) Trovare la somma dei coefficienti dei primi $r+1$ termini dello sviluppo di $(1-x)^{-n}$. Abbiamo

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\ldots$$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

Quindi $(1-x)^{-(n+1)}$ è eguale al prodotto delle due serie. Ora se moltiplichiamo insieme le serie, vediamo che *il coefficiente di* x^r nel prodotto è

$$1+n+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{\lfloor r},$$

possiamo naturalmente *assumere* allora che questo deve essere eguale al coefficiente di x^r nello sviluppo di $(1-x)^{-(n+1)}$; cioè, ad

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{\lfloor r};$$

così la somma richiesta è effettuata.

(6) Il Teorema del Binomio si può applicare nel modo ora mostrato a stabilire numerose identità algebriche; daremo ancora un esempio.

Sia $$\varphi(m,r)=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{\lfloor r};$$

si cerca di mostrare che

$$\varphi(n,0)\,\varphi(n,r)-\varphi(n,1)\,\varphi(n-1,r-1)+\varphi(n,2)\,\varphi(n-2,r-2)$$
$$-\varphi(n,3)\,\varphi(n-3,r-3)+\ldots=0.$$

L'espressione qui data è lo sviluppo di

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}(1-1)^r,$$

il quale evidentemente deve essere zero.

ESEMPII DEL TEOREMA DEL BINOMIO.

Sviluppare ciascuna delle dodici espressioni seguenti sino al quarto termine:

1. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. 2. $(1+x)^{\frac{1}{4}}$. 3. $(1+x)^{\frac{2}{3}}$.

4. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. 5. $(1+x)^{-\frac{1}{4}}$. 6. $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$.

7. $(1-x)^{\frac{1}{5}}$. 8. $(1-2x)^{\frac{3}{4}}$. 9. $\sqrt{(a^2-x^2)}$;

10. $(3a-2x)^{\frac{2}{3}}$. 11. $(a^2-bx)^{-\frac{2}{5}}$. 12. $(1+5x)^{\frac{17}{5}}$.

Trovare l'$(r+1)^{\text{mo}}$ termine nello sviluppo delle otto espressioni seguenti:

13. $(1-x)^{-4}$. 14. $(1-x)^{-3}$. 15. $(1-x)^{\frac{1}{n}}$.

16. $(1-px)^{\frac{1}{p}}$. 17. $\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)}}$. 18. $(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}$.

19. $(1-2x)^{-\frac{7}{2}}$ 20. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(1-x)}}$.

Calcolare approssimativamente le quattro radici seguenti:

21. $\sqrt{(24)}$. 22. $\sqrt[3]{(999)}$. 23. $\sqrt[5]{(31)}$. 24. $\sqrt[5]{(99000)}$,

25. Se x è piccolo in paragone dell'unità, mostrare che

$$\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt[3]{\{(1-x)^2\}}}{1+x+\sqrt{(1-x)}}=1-\frac{5x}{6} \text{ prossimamente.}$$

26. Mostrare che il numero delle combinazioni di n cose quando si prendono ad una, tre, cinque, per volta eccede il numero quando si prendono a due, quattro, sei, ... per volta di un'unità.

27. Mostrare che il numero dei prodotti omogenei di n cose di n dimensioni è

$$\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n \, \lfloor n-1}.$$

Trovare il massimo termine nei quattro sviluppi seguenti:

28. $(1+x)^n$ quando $x=\frac{2}{3}$ ed $n=4$.

29. $(1+x)^{-n}$ quando $x=\frac{1}{5}$ ed $n=12$.

30. $(1+x)^{-n}$ quando $x=\frac{5}{7}$ ed $n=3$.

31. $(1-x)^{-n}$ quando $x=\frac{7}{12}$ ed $n=\frac{8}{3}$.

32. Trovare il massimo termine nello sviluppo di $\left(n-\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$, quando n è un intero positivo.

33. Trovare il numero dei termini nello sviluppo di

$$(a+b+c+d)^{10}.$$

34. Trovare il primo termine con un coefficiente negativo nello sviluppo di $\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{\frac{11}{3}}$.

35. Se p è maggiore di n, il coefficiente di x^p nello sviluppo di

$$\frac{x^n}{(1-x)^{2n}} \text{ è } \frac{p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\ldots\ldots\{p^2-(n-1)^2\}}{\underline{|2n-1}}.$$

36. Il coefficiente di x^{2n} nello sviluppo di $\frac{(1-2x)^3}{(1-3x^2)^4}$ è

$$3^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)(5n+3)}{2}.$$

37. Trovare il coefficiente di x^n nello sviluppo di $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^4}$.

38. Sviluppare $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ secondo le potenze crescenti di x. Scrivere il coefficiente di x^{2r} e di x^{2r+1}.

39. Mostrare che l'n^{mo} coefficiente nello sviluppo di $(1-x)^{-n}$ è sempre il doppio dell'$(n-1)^{\text{mo}}$.

40. Mostrare che se t_r dinota il termine medio nello sviluppo di $(1+x)^{2r}$, allora $t_0+t_1+t_2+\ldots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$.

41. Scrivere la somma di

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots \textit{ all'infinito}.$$

42. Trovare la somma dei quadrati dei coefficienti nello sviluppo di $(1+x)^n$, quando n è un intero positivo.

43. Se $p_r=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2r}$, dimostrare che

$$p_{2n+1}+p_1p_{2n}+p_2p_{2n-1}+\cdots+p_{n-1}p_{n+2}+p_np_{n+1}=\frac{1}{2}.$$

44. Mostrare che se m ed n sono interi positivi il coefficiente di x^m nello sviluppo di $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$ è eguale al coefficiente di x^n nello sviluppo di $\dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

45. Trovare il coefficiente di x^r nello sviluppo di

$$(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \textit{ all' infinito})^n.$$

V. TEOREMA DEL POLINOMIO.

73. Ci proponiamo di trovare un'espressione pel *termine generale* nello sviluppo di $(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^n$. Il numero dei termini nella serie a_0, a_1, a_2, ... può essere qualunque, ed n può essere positivo o negativo, intero o frazionario.

Si ponga b_1 per $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, allora dobbiamo sviluppare $(a_0+b_1)^n$; il termine generale dello sviluppo è

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor\underline{\mu}}a_0^{\,n-\mu}b_1^{\,\mu},$$

μ essendo un intero positivo. Si ponga b_2 per $a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, allora $b_1^{\,\mu}=(a_1x+b_2)^\mu$; poichè μ è un *intero positivo* il termine generale dello sviluppo di $(a_1x+b_2)^\mu$ si può dinotare con

$$\frac{\lfloor\underline{\mu}}{\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{\mu-q}}(a_1x)^{\mu-q}b_2^{\,q},\ \text{o pure con}\ \frac{\lfloor\underline{\mu}}{\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{\mu-q}}(a_1x)^{q}b_2^{\,\mu-q};$$

adotteremo la seconda forma come più conveniente pel nostro scopo.

Combinando questo col primo risultato, vediamo che il termine generale dello sviluppo proposto si può scrivere

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor q \lfloor \mu-q}\, a_0^{n-\mu}(a_1x)^q b_2^{\mu-q}.$$

Ancora, si ponga b_3 per $a_3x^3+a_4x^4+\ldots$, allora $b_2^{\mu-q}=(a_2x^2+b_3)^{\mu-q}$, ed il termine generale dello sviluppo di questo sarà

$$\frac{\lfloor \mu-q}{\lfloor r \lfloor \mu-q-r}\,(a_2x^2)^r b_3^{\mu-q-r}.$$

Quindi il termine generale dello sviluppo proposto si può scrivere

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor \mu-q-r}\, a_0^{n-\mu}(a_1x)^q(a_2x^2)^r b_3^{\mu-q-r}+\ldots$$

Procedendo in questo modo otterremo pel termine generale richiesto

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t}\, a_0^{n-\mu}a_1^q a_2^r a_3^s a_4^t \ldots x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

in cui $$q+r+s+t\ldots=\mu.$$

Se supponiamo $n-\mu=p$, possiamo scrivere il termine generale nella forma

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t\ldots}\, a_0^p a_1^q a_2^r a_3^s a_4^t \ldots x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

in cui $$p+q+r+s+t+\ldots=n.$$

Così lo sviluppo del polinomio proposto consiste di una serie di termini di cui quello ora dato si può prendere come il tipo generale.

Si deve osservare che $q, r, s, t, \ldots$ sono sempre *interi positivi*, ma p non è un intero positivo a meno che n non sia un intero positivo. Quando p è un intero positivo, possiamo, moltiplicando il numeratore ed il denominatore per $\lfloor p$, scrivere il fattore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t\ldots}$$

nella forma più simmetrica

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t\ldots}.$$

Nell'espressione precedente pel termine generale possiamo riguardare il moltiplicatore di $x^{q+2r+3s+4t+\cdots}$ come il *coefficiente* del termine. Alle volte però la parola *coefficiente* si applica al fattore $\frac{n(n-1)\ldots(p+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t \ldots}$; questo è ordinariamente il significato della parola nei casi in cui x si è messo eguale all'unità, come negli Esempii 25...32 in fine di questo Capitolo.

74. Supponiamo che si voglia il coefficiente di una potenza assegnata di x nello sviluppo di $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^n$, per esempio, quello di x^m. Abbiamo allora

$$q + 2r + 3s + 4t + \ldots = m,$$

$$p + q + r + s + t + \ldots = n.$$

Dobbiamo trovare per tentativi tutt'i valori interi positivi di q, r, s, t, ... che soddisfano la prima di queste equazioni; allora dalla seconda equazione si può trovare p. Il coefficiente richiesto è allora la somma dei valori corrispondenti dell'espressione

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t \ldots} a_0^p a_1^q a_2^r a_3^s a_4^t \ldots$$

Quando n è un intero positivo, allora p deve essere anche tale, e possiamo usare la forma più simmetrica

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t \ldots} a_0^p a_1^q a_2^r a_3^s a_4^t \ldots$$

75. Per esempio, trovare il coefficiente di x^7 nello sviluppo di $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^4$.

Qui
$$q + 2r + 3s = 7,$$
$$p + q + r + s = 4.$$

S'incominci col più grande valore ammissibile di s; questo è $s=2$, col quale abbiamo $r=0$, $q=1$, $p=1$. In seguito si tenti $s=1$; con questo possiamo avere $r=2$, $q=0$, $p=1$; ancora possiamo avere $r=1$, $q=2$, $p=0$. In seguito si tenti $s=0$; con questo possiamo avere $r=3$, $q=1$, $p=0$. Queste sono tutte le soluzioni; esse sono riunite nella tavola annessa.

p	q	r	s
1	1	0	2
1	0	2	1
0	2	1	1
0	1	3	0

Inoltre $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$. Così il coefficiente richiesto è

$$\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} 2^1 . 4^2 + \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} 3^2 . 4^1 + \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} 2^2 . 3^1 . 4^1 + \frac{\lfloor 4}{\lfloor 3} 2^1 . 3^3;$$

cioè, $384 + 432 + 576 + 216$; cioè, 1608.

Ancora; trovare il coefficiente di x^3 nello sviluppo di

$$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)^{\frac{1}{2}}.$$

Qui $$q + 2r + 3s + \ldots = 3,$$

$$p + q + r + s + \ldots = \frac{1}{2}.$$

p	q	r	s
$-\frac{1}{2}$	0	0	1
$-\frac{3}{2}$	1	1	0
$-\frac{5}{2}$	3	0	0

Tutte le soluzioni sono riunite nella tavola annessa, ed il coefficiente richiesto è

$$\left(\frac{1}{2}\right) 4^1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) 2^1 . 3^1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\lfloor 3} 2^3;$$

cioè, $$2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}; \text{ cioè, } 1.$$

In questo caso, poichè

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = (1 - x)^{-2},$$

l'espressione proposta è $\{(1-x)^{-2}\}^{\frac{1}{2}}$, cioè, $(1-x)^{-1}$. Ed

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots;$$

così vediamo che il coefficiente di x^3 deve essere 1; e lo studente si può esercitare applicando il teorema del polinomio a trovare i coefficienti di altre potenze di x: per esempio, il coefficiente di x^4 si troverà essere

$$\frac{5}{2} - 2 - \frac{9}{8} + \frac{9}{4} - \frac{5}{8}, \text{ cioè } 1.$$

76. La forma del coefficiente nel Teorema del Polinomio nel caso in cui l'esponente è un *intero positivo* potrebbe ottenersi in altro modo. Supponiamo, per esempio, che si debba sviluppare $(\alpha+\beta+\gamma)^{10}$.

Quando si effettua la moltiplicazione ogni termine nel risultato è un prodotto formato col prendere una lettera da ciascuno dei 10 fattori trinomii. Così se vogliamo il termine che contiene $\alpha^2\beta^3\gamma^5$ dobbiamo prendere α da *due* qualunque dei 10 fattori trinomii, β da *tre* qualunque dei rimanenti 8 fattori trinomii, e γ dai 5 rimanenti fattori trinomii. Il numero dei modi in cui questo si può fare è $\frac{\lfloor 10}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 5}$: così il termine richiesto è $\frac{\lfloor 10}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 5}\alpha^2\beta^3\gamma^5$.

Segue da ciò che se dobbiamo sviluppare $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{10}$ il termine che contiene $\alpha^2\beta^3\gamma^5$ è

$$\frac{\lfloor 10}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 5}\alpha^2(\beta x)^3(\gamma x^2)^5, \quad \text{cioè} \quad \frac{\lfloor 10}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 5}\alpha^2\beta^3\gamma^5 x^{3+10}.$$

Similmente si potrebbe trattare ogni altro caso. Così potremmo dare la ricerca del Teorema del Polinomio nel seguente modo:

S'incominci con lo stabilire nel modo or ora indicato la forma del coefficiente nel caso in cui l'esponente è un intero *positivo*. Indi supponiamo che si debba trovare il termine generale nello sviluppo di $(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^n$, quando n non è un intero positivo. Si ponga b per $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$; allora dobbiamo sviluppare $(a_0+b)^n$; il termine generale di questo sviluppo è

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor \mu}a_0^{\,n-\mu}b^\mu;$$

e siccome μ è un *intero positivo* il termine generale nello sviluppo di $(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^\mu$ è

$$\frac{\lfloor \mu}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t \ldots}a_1^{\,q}a_2^{\,r}a_3^{\,s}a_4^{\,t}\ldots x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

Quindi il termine generale richiesto è

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor q \lfloor r \lfloor s \lfloor t \ldots}a_0^{\,n-\mu}a_1^{\,q}a_2^{\,r}a_3^{\,s}a_4^{\,t}\ldots x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

ESEMPII DEL TEOREMA DEL POLINOMIO.

Trovare i coefficienti delle potenze indicate di x negli sviluppi nei 24 Esempii seguenti:

1. x^4 in $(1+x+x^2)^3$.
2. x^5 in $(1-x+x^2)^4$.

3. x^8 in $(1-2x+3x^2-4x^3)^4$.

4. x^{14} in $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^5$.

5. x^6 in $(2-3x-4x^2)^5$.

6. x^8 in $(1-x+2x^2)^{12}$.

7. x^4 in $(2-5x-7x^2)^5$.

8. x^8 in $(1-2x^2+4x^4)^{-2}$.

9. x^4 in $(1+x+x^2)^{-5}$.

10. x^5 in $(1+2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

11. x^8 in $\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)^{-2}$.

12. x^4 in $(1+2x-4x^2-2x^3)^{-\frac{1}{2}}$.

13. x^6 in $(1-2x+x^4)^{\frac{1}{4}}$.

14. x^4 in $(1+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{7}{2}})^5$.

15. x^4 in $(1+x+x^2)^n$.

16. x^4 in $(1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\ldots)^7$.

17. x^m in $(1+x+x^2+\ldots)^2$.

18. x^8 in $(1+2x+3x^2)^n$.

19. x^4 in $(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)^{-\frac{1}{2}}$.

20. x^{12} in $(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)^5$.

21. x^5 in $(a_0+a_1x+a_2x^2)^n$.

22. x^8 in $(1-x^2+x^3-x^5)^4$.

23. x^2 in $(1+ax+bx^2)^{-\frac{1}{2}}$.

24. x^3 in $(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^m$.

25. Trovare il coefficiente di abc^3 in $(a+b+c)^5$.

26. Trovare il coefficiente di $a^2b^3c^2$ in $(a-b-c)^7$.

27. Trovare il coefficiente di $a^2b^4c^3$ in $(a+b+c+d)^9$.

28. Trovare il coefficiente di $ab^2c^3d^4$ in $(a-b+c-d)^{10}$.

29. Scrivere tutt'i termini che contengono potenze di b e c sino alla terza potenza inclusivamente nello sviluppo di $(a+b+c)^n$.

30. Scrivere tutt'i termini che contengono d^{n-3} nello sviluppo di $(a+b+c+d)^n$.

31. Trovare il massimo coefficiente nello sviluppo di

$$(a+b+c)^{10}.$$

32. Trovare il massimo coefficiente nello sviluppo di

$$(a+b+c+d)^{14}.$$

33. Mostrare che il massimo coefficiente nello sviluppo di

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n \text{ è } \frac{\lfloor n}{\{\lfloor q\}^m (q+1)^r},$$

in cui q è il quoziente, ed r il resto quando n si divide per m.

34. Mostrare che nello sviluppo di $(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^2$ il coefficiente di x^{2p+1} è $2(a_0a_{2p+1}+a_1a_{2p}+a_2a_{2p-1}+\ldots+a_pa_{p+1})$.

35. Sviluppare $(1-2bx+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ sino ad x^4.

36. Sviluppare $(a+bx+cx^2)^{-1}$ sino ad x^4.

37. Sviluppare $(1-x-x^2-x^3)^n$ sino ad x^3.

38. Nello sviluppo di $(1+x+x^2+\ldots+x^r)^n$, in cui n è un intero positivo mostrare che

(1) i coefficienti dei termini equidistanti dal primo e dall'ultimo sono eguali;

(2) il coefficiente del termine medio, o dei due termini medii, secondo che nr è pari o dispari, è maggiore di ogni altro coefficiente;

(3) i coefficienti crescono continuamente dal primo sino al massimo.

39. Se $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono i coefficienti in ordine dello sviluppo di $(1+x+x^2+\ldots+x^r)^n$, dimostrare che

(1) $a_0+a_1+a_2\ldots+a_{nr}=(r+1)^n$;

(2) $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+nra_{nr}=\frac{1}{2}nr(r+1)^n$.

40. Se $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono i coefficienti in ordine dello sviluppo di $(1+x+x^2)^n$, dimostrare che

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\ldots+(-1)^{n-1}a^2_{n-1}+\frac{1}{2}(-1)^n a_n^2=\frac{1}{2}a_n.$$

VI. SERIE ESPONENZIALE E LOGARITMICA.

77. *Sviluppare* a^x *in una serie di potenze crescenti di* x; *cioè sviluppare un numero in una serie di potenze crescenti del suo logaritmo secondo una data base.*

$a^x = \{1+(a-1)\}^x$; e sviluppando col Teorema del Binomio abbiamo

$$\left\{1+(a-1)\right\}^x = 1 + x(a-1) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(a-1)^4 + \ldots$$

$$= 1 + x\left\{a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\ldots\right\}$$

+ termini che contengono x^2, x^3, etc.

Questo mostra che a^x *si può* sviluppare in una serie che incomincia con 1 e procede secondo le potenze crescenti di x; possiamo quindi supporre che

$$a^x = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

in cui c_1, c_2, c_3, ... sono quantità che non dipendono da x, e che perciò restano inalterate comunque si muti x; inoltre

$$c_1 = a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\ldots$$

mentre c_2, c_3, ... sono per ora incognite; passiamo a trovare i loro valori. Cambiando x in $x+y$ abbiamo

$$a^{x+y} = 1 + c_1(x+y) + c_2(x+y)^2 + c_3(x+y)^3 + \ldots;$$

ma $\quad a^{x+y} = a^xa^y = a^y\left\{1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots\right\}.$

Poichè le due espressioni per a^{x+y} sono identicamente eguali, possiamo *assumere* che i coefficienti di x nelle due espressioni siano eguali, così

$$c_1 + 2c_2y + 3c_3y^2 + 4c_4y^3 + \ldots = c_1a^y$$
$$= c_1\left\{1 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \ldots\right\}.$$

In questa identità possiamo *assumere* che i coefficienti delle potenze corrispondenti di y siano eguali; così

$$2c_2 = c_1^2; \quad \text{quindi } c_2 = \frac{c_1^2}{2};$$

$$3c_3 = c_1c_2; \quad \text{quindi } c_3 = \frac{c_1c_2}{3} = \frac{c_1^3}{1\cdot 2\cdot 3};$$

$$4c_4 = c_1c_3; \quad \text{quindi } c_4 = \frac{c_1c_3}{4} = \frac{c_1^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};$$

.....

Così $$a^x = 1 + c_1x + \frac{c_1^2x^2}{\lfloor 2} + \frac{c_1^3x^3}{\lfloor 3} + \frac{c_1^4x^4}{\lfloor 4} + \ldots$$

Poichè questo risultato è vero per tutt'i valori di x, si prenda x tale che $c_1x = 1$, allora $x = \frac{1}{c_1}$, ed

$$a^{\frac{1}{c_1}} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \ldots;$$

questa serie è indicata comunemente con e; così $a^{\frac{1}{c_1}} = e$, onde $a = e^{c_1}$ e $c_1 = \log_e a$; quindi

$$a^x = 1 + (\log_e a)\,x + \frac{(\log_e a)^2x^2}{\lfloor 2} + \frac{(\log_e a)^3x^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

Questo risultato si chiama il *Teorema Esponenziale*.

Si ponga e per a, allora $\log_e a$ diviene $\log_e e$, cioè, l'unità; così

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots$$

Questo risultato molto importante è vero per *tutt'i* valori di x; e lo studente dovrebbe rendersi tanto familiare con esso da essere abile ad applicarlo a casi speciali. Per esempio, si supponga $x=-1$; così

$$e^{-1} \text{ o sia } \frac{1}{e} = \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} - \frac{1}{5} + \dots$$

O pure possiamo porre ogni altro simbolo per x; così ponendo nz per x abbiamo

$$e^{nz} = 1 + nz + \frac{n^2z^2}{\underline{|2}} + \frac{n^3z^3}{\underline{|3}} + \frac{n^4z^4}{\underline{|4}} + \dots$$

Nell'Art. 86 faremo un'osservazione sopra una parte della ricerca precedente, e ritorneremo in appresso su ciò che si è *assunto* due volte nel corso del presente Articolo.

78. Col calcolo effettivo possiamo trovare approssimativamente il valore numerico della serie che è stata dinotata con e; esso è 2·718281828.

79. *Sviluppare* $\log_e(1+x)$ *in una serie di potenze crescenti di* x.

Abbiamo veduto nell'Art. 77, che $c_1 = \log_e a$; cioè, per lo stesso Articolo, $\log_e a = a - 1 - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \dots$

Si ponga $1+x$ per a; quindi

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Questa serie si può applicare a calcolare $\log_e(1+x)$ se x è una frazione propria; ma a meno che x non sia molto piccolo, i termini diminuiscono così lentamente che dovremo ritenere un gran numero di essi; se x è maggiore dell'unità, la serie è del tutto non conveniente. Dedurremo perciò alcune formole più convenevoli.

80. Abbiamo $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$

quindi $\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$

con la sottrazione otteniamo il valore di $\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$, cioè, di $\log_e \frac{1+x}{1-x}$;

quindi $$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right\}.$$

In questa serie si scriva $\frac{m-n}{m+n}$ per x, e quindi $\frac{m}{n}$ per $\frac{1+x}{1-x}$;

così $$\log\frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\dots\right\}\dots\dots\dots (1).$$

Si ponga $n=1$, allora

$$\log_e m = 2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\dots\right\}\dots\dots\dots (2).$$

Ancora, in (1) si ponga $m=n+1$, così otteniamo il valore di

$$\log_e \frac{n+1}{n}\text{; quindi } \log_e(n+1)-\log_e n$$
$$= 2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right\}\dots\dots (3).$$

81. La serie (2) dell'Articolo precedente ci abilita a trovare $\log_e 2$; si ponga $m=2$, allora calcolando troveremo

$$\log_e 2 = \cdot 69314718\dots$$

Dalla serie (3) possiamo calcolare il logaritmo di ciascuno di due numeri consecutivi quando conosciamo quello dell'altro. Si ponga $n=2$, e facendo uso del noto valore di $\log_e 2$, otterremo

$$\log_e 3 = 1\cdot 09861229\dots$$

Si ponga $n=9$ in (3); allora $\log_e n = \log_e 9 = \log_e 3^2 = 2\log_e 3$ ed è perciò conosciuto; quindi troveremo

$$\log_e 10 = 2\cdot 30258509\dots$$

82. I logaritmi di base e si chiamano logaritmi *Neperiani*, da Napier l'inventore dei logaritmi; essi si chiamano anche logaritmi *naturali*, essendo quelli che prima si presentano nella ricerca di un

metodo per calcolare i logaritmi. La base 10 è la sola base usata nelle applicazioni pratiche dei logaritmi, ma i logaritmi di base Neperiana s'incontrano frequentemente nelle ricerche teoretiche.

83. Il logaritmo di un numero di base 10 si può trovare, come è noto, moltiplicando il logaritmo Neperiano per $\frac{1}{\log_e 10}$, cioè, per $\frac{1}{2{\cdot}30258509}$ o pure per ·43429448; questo moltiplicatore si chiama il *modulo* del sistema ordinario.

La base Neperiana, il modulo del sistema ordinario, ed i logaritmi Neperiani di 2, 3, e 5 sono stati tutti calcolati sino a 200 cifre decimali. Si veggano gli *Abstracts of the Papers communicated to the Royal Society*, Vol. VI. pag. 397.

Le serie nell'Art. 80 si possono modificare in modo da dare logaritmi ordinarii; per esempio, si prenda la serie (3), si moltiplichi da per tutto pel modulo che dinoteremo con μ; così

$$\mu \log_e(n+1) - \mu \log_e n = 2\mu\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right\};$$

cioè,

$$\log_{10}(n+1) - \log_{10} n = 2\mu\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right\}.$$

84. Per l'Art. 77 abbiamo

$$(e^x - 1)^n = \left(x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \dots\right)^n,$$

$$= x^n + \text{termini che contengono potenze superiori di } x \quad (1).$$

Inoltre, pel Teorema del Binomio,

$$(e^x - 1)^n = e^{nx} - n e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} e^{(n-2)x} - \dots\dots\dots \quad (2).$$

Si sviluppi ciascuno dei termini e^{nx}, $e^{(n-1)x}$ ... ; così il coefficiente di x^n in (2) sarà

$$\frac{n^r}{\underline{|r}} - n\frac{(n-1)^r}{\underline{|r}} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\,\frac{(n-2)^r}{\underline{|r}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\,\frac{(n-3)^r}{\underline{|r}} + \dots$$

Quindi da (1), per lo stesso principio come nell'Art. 77, vediamo che

$$n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^r - \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}(n-3)^r + \dots$$

è $=\underline{|n}$ se $r=n$, ed è $=0$ se r è minore di n.

È facile vedere che il termine nel secondo membro di (1) che contiene x^{n+1} è $\frac{n}{2}x^{n+1}$. Così otteniamo, per lo stesso principio come sopra,

$$n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^{n+1} - \dots = \frac{1}{2}n\underline{|n+1}.$$

85. Daremo un altro metodo per giungere al teorema esponenziale. Pel Teorema del Binomio

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx\frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{\underline{|2}}\frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\frac{1}{n^3}$$
$$+ \frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\underline{|4}}\frac{1}{n^4} + \dots$$

cioè,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}$$
$$+ \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\left(x-\frac{3}{n}\right)}{\underline{|4}} + \dots$$

Si ponga $x=1$, allora $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\underline{|4}} + \dots$$

Ma $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x;$$

$$\text{quindi } 1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\ldots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\ldots\right\}^x.$$

Ora questo essendo vero comunque grande sia n, sarà vero quando n diviene infinito; allora $\frac{1}{n}$ svanisce ed otteniamo

$$1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\ldots=\left\{1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots\right\}^x;$$

$$\text{cioè, } = e^x.$$

Abbiamo così ottenuto lo sviluppo di e^x secondo le potenze di x; per trovare lo sviluppo di a^x supponiamo $a=e^c$ sicchè $c=\log_e a$, così

$$a^x=e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{c^4x^4}{\lfloor 4}+\ldots$$

86. Lo studente noterà che nell'Articolo precedente abbiamo adoperato il Teorema del Binomio per sviluppare una potenza di $1+\frac{1}{n}$, e se $\frac{1}{n}$ è *minore* dell'unità, siamo certi che lo sviluppo dà un risultato *aritmeticamente* vero (Art. 66). Nella dimostrazione del teorema esponenziale data nel primo Articolo di questo Capitolo, se $a-1$ è maggiore dell'unità, lo sviluppo col Teorema del Binomio col quale la dimostrazione incomincia non sarà aritmeticamente intelligibile; e per conseguenza la dimostrazione si può considerare solamente esatta purchè a sia minore di 2. Con questa restrizione la dimostrazione è esatta, ed x può avere un valore qualunque. Per completare quella dimostrazione dobbiamo mostrare che il teorema è vero per ogni valore di a; e siccome e è maggiore di 2 non dobbiamo cambiare a in e sino a che non abbiamo tolta questa restrizione relativa al valore di a. Questa restrizione si può togliere facilmente; poichè nel teorema

$$a^x=1+(\log_e a)x+\frac{(\log_e a)^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e a)^3x^3}{\lfloor 3}+\ldots$$

si ponga $a=A^y$, e prendendo y abbastanza piccolo si può rendere

A tanto grande quanto ci piace, mentre a è minore di 2. Allora $\log_e a = y \log_e A$; così

$$A^{yx} = 1 + (\log_e A)\, yx + \frac{(\log_e A)^2 y^2 x^2}{\lfloor 2} + \frac{(\log_e A)^3 y^3 x^3}{\lfloor 3} + \ldots;$$

quindi, ponendo z per yx,

$$A^z = 1 + (\log_e A)\, z + \frac{(\log_e A)^2 z^2}{\lfloor 2} + \frac{(\log_e A)^3 z^3}{\lfloor 3} + \ldots;$$

così il teorema esponenziale è dimostrato generalmente.

87. Abbiamo trovato nell'Art. 85, che quando n cresce senza limite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ diviene ultimamente e^x; nello stesso modo possiamo mostrare che quando n cresce senza limite $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nx}$ diviene ultimamente e^{rx}.

ESEMPII DELLA SERIE LOGARITMICA.

1. Dimostrare che $\log_e(x+1) = 2\log_e x - \log_e(x-1)$

$$-2\left\{\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Dato $\log_{10} 3 = \cdot 47712$ ed $\dfrac{1}{\log_e 10} = \cdot 43429$, applicare la serie precedente a calcolare $\log_{10} 11$.

2. Mostrare che $\log_e(x+2h) = 2\log_e(x+h) - \log_e x$

$$-\left\{\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{h^4}{(x+h)^4} + \frac{1}{3}\,\frac{h^6}{(x+h)^6} + \ldots\right\}.$$

3. Se a, b, c sono tre numeri consecutivi,

$$\log_e c = 2\log_e b - \log_e a$$
$$-2\left\{\frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \frac{1}{5(2ac+1)^5} + \ldots\right\}.$$

4. Se λ e μ sono le radici di $ax^2+bx+c=0$, mostrare che

$$\log_e(a-bx+cx^2)=\log_e a+(\lambda+\mu)x-\frac{\lambda^2+\mu^2}{2}x^2+\dots$$

5. $$\operatorname{Log}_e\{1+1+x+(1+x)^2\}=3\log_e(1+x)-\log_e x$$
$$-\left\{\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^6}+\frac{1}{3(1+x)^9}+\dots\right\}.$$

6. $$\operatorname{Log}_e(x+1)=\frac{4x}{2x+1}\log_e x-\frac{2x-1}{2x+1}\log_e(x-1)$$
$$-\frac{2}{2x+1}\left\{\frac{1}{2\cdot3\cdot x^3}+\frac{2}{3\cdot5\cdot x^6}+\frac{3}{4\cdot7\cdot x^7}+\dots\right\}.$$

7. $$\operatorname{Log}_e\left\{(1+x)^{\frac{1+x}{2}}(1-x)^{\frac{1-x}{2}}\right\}=\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^6}{5\cdot6}+\dots$$

8. Trovare il logaritmo Neperiano di $\frac{501}{499}$. Sino a quante cifre decimali il nostro risultato è corretto?

9. Assumendo le serie per $\log_e(1+x)$ ed e^x, mostrare che

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)$$

prossimamente quando n è grande; e trovare il termine seguente della serie che incomincia con l'espressione nel secondo membro.

10. Trovare il coefficiente di x^n nello sviluppo di

$$\frac{a+bx+cx^2}{e^x}.$$

11. Mostrare che $\log_e 4=1+\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\dots$

12. Mostrare che $n^{n+2}-n(n-1)^{n+2}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-2)^{n+2}-\dots$

$$=\left(\frac{n}{6}+\frac{n(n-1)}{8}\right)\lfloor n+2.$$

VII. CONVERGENZA E DIVERGENZA DELLE SERIE.

88. L'espressione $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$ in cui i termini successivi sono formati con una legge regolare, ed il numero dei termini è illimitato, si chiama una *serie infinita*.

89. Una serie infinita si dice essere *convergente* quando la somma dei primi n termini non può numericamente eccedere una certa quantità finita comunque grande sia n.

90. Una serie infinita si dice *divergente* quando la somma dei primi n termini si può rendere numericamente maggiore di ogni quantità finita, prendendo n grande abbastanza.

91. Supponiamo che addizionando sempre più termini di una serie infinita ci approssimiamo continuamente ad un certo risultato, sicchè la somma di un numero sufficientemente grande di termini differisca da quel risultato per meno di una quantità assegnata qualunque, allora quel risultato si chiama la *somma della serie infinita*.

Per esempio, si consideri la serie infinita

$$1 + x + x^2 + \ldots,$$

e supponiamo x una quantità positiva.

Sappiamo che

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Quindi se x è minore di 1, comunque grande sia n, la somma dei primi n termini della serie è minore di $\frac{1}{1-x}$; la serie è quindi *convergente*. E, siccome prendendo n abbastanza grande la somma dei primi n termini si può far differire da $\frac{1}{1-x}$ per meno di ogni quantità assegnata, $\frac{1}{1-x}$ è la *somma* della serie infinita.

Se $x = 1$, la serie è *divergente;* poichè la somma dei primi n termini è n, e prendendo un sufficiente numero di termini questa si può rendere maggiore di ogni quantità finita.

Se x è maggiore di 1, la serie è divergente; poichè la somma dei primi n termini è $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, la quale si può rendere maggiore di ogni quantità finita prendendo n grande abbastanza.

92. *Una serie infinita in cui tutt'i termini sono dello stesso segno è divergente se ogni termine è maggiore di una certa quantità finita assegnata, comunque piccola.*

Infatti se ciascun termine è maggiore della quantità c, la somma dei primi n termini è maggiore di nc, e questa si può rendere maggiore di ogni quantità finita prendendo n grande abbastanza.

93. *Una serie infinita di termini, i segni dei quali sono alternativamente positivi e negativi, è convergente se ciascun termine è numericamente minore del termine precedente.*

Sia la serie $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$; questa si può scrivere

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots;$$

ed ancora così,

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \ldots$$

Dal primo modo di scrivere la serie vediamo che la somma di un numero qualunque di termini è una quantità positiva, e dal secondo modo di scrivere la serie vediamo che la somma di un numero qualunque di termini è minore di u_1; quindi la serie è *convergente*.

È necessario di mostrare in questo caso che la somma di un numero qualunque di termini è *positiva;* poichè se conosciamo solamente che la somma è minore di u_1, non siamo certi che essa non sia una quantità negativa di grandezza illimitata.

Si deve notare una importante distinzione rispetto alla serie qui considerata. Se i termini $u_1, u_2, u_3 \ldots$ *diminuiscono senza limite* la somma di n termini e la somma di $n+1$ termini differiranno per una quantità indefinitamente piccola quando n si prende grande abbastanza. Ma se i termini $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *non diminuiscono senza limite* la somma di n termini e la somma di $n+1$ termini differiranno sempre per una quantità finita. La serie continuata all'infinito avrà una somma, secondo la definizione dell'Art. 91, nel primo caso, ma non nel secondo. In tutti e due i casi la serie è convergente secondo la nostra definizione. Ma alcuni scrittori preferi-

scono un'altra definizione della convergenza; cioè, essi considerano una serie convergente solamente quando la somma di un numero indefinitamente grande di termini si può far differire da un valore fisso per meno di ogni quantità assegnata: e secondo questa definizione la serie è convergente nel primo caso, ma non nel secondo.

94. *Una serie infinita è convergente se da un termine fisso qualunque in avanti il rapporto di ciascun termine al termine precedente è numericamente minore di una certa quantità la quale è essa stessa minore dell' unità.*

Sia la serie incominciando dal termine fisso

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

e dinoti S la somma dei primi n di questi termini. Allora

$$\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= u_1 \left\{ 1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2}\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_4}{u_3}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_2}{u_1} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Ora da principio siano tutt' i termini positivi, e supponiamo

$$\frac{u_2}{u_1} \text{ minore di } k, \quad \frac{u_3}{u_2} \text{ minore di } k, \quad \frac{u_4}{u_3} \text{ minore di } k, \dots$$

Allora S è minore di $u_1 \{ 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1} \}$; cioè, minore di $u_1 \dfrac{1-k^n}{1-k}$. Quindi se k è minore dell'unità, S è minore di $\dfrac{u_1}{1-k}$; così la somma di tanti termini quanti vogliamo incominciando da u_1 è minore di una certa quantità finita, e quindi la serie incominciando con u_1 è convergente.

In secondo luogo, supponiamo i termini non tutti positivi; allora se essi sono tutti negativi, il valore numerico della somma di un numero qualunque di essi è lo stesso come se essi fossero tutti positivi; se alcuni termini sono positivi ed altri negativi, la somma è numericamente minore di quella se i termini fossero tutti positivi. Quindi la serie infinita è anche convergente.

Poichè la serie infinita incominciando con u_1 è convergente, la serie infinita che incomincia con un termine fisso qualunque prima di u_1 sarà anche convergente; poichè così avremo solamente da aggiungere un numero *finito* di termini *finiti* alla serie che incomincia con u_1.

95. *Una serie infinita è divergente se da un termine fisso qualunque in avanti il rapporto di ciascun termine al termine precedente è maggiore dell'unità, o eguale all'unità, ed i termini sono tutti dello stesso segno.*

Sia la serie incominciando dal termine fisso

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

e dinoti S la somma dei primi n di questi termini. Allora

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$
$$= u_1 \left\{ 1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2}\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_4}{u_3}\frac{u_3}{u_2}\frac{u_2}{u_1} + \dots \right\}.$$

Ora, da principio supponiamo

$$\frac{u_2}{u_1} \text{ maggiore di } 1, \ \frac{u_3}{u_2} \text{ maggiore di } 1, \ \frac{u_4}{u_3} \text{ maggiore di } 1, \dots$$

Allora S è numericamente maggiore di $u_1\{1+1+\dots+1\}$, cioè, numericamente maggiore di nu_1. Quindi S si può rendere numericamente maggiore di ogni quantità finita prendendo n grande abbastanza, e quindi la serie incominciando da u_1 è divergente.

In seguito, supponiamo che il rapporto di ciascun termine al precedente sia l'unità; allora $S = nu_1$, e questa si può rendere maggiore di ogni quantità finita prendendo n grande abbastanza.

E se incominciamo con un termine fisso qualunque prima di u_1 la serie evidentemente sarà anche divergente.

96. Le regole negli Articoli precedenti determineranno in molti casi se una serie infinita sia convergente o divergente. Vi è un caso degno di essere notato in cui esse *non si applicano*, cioè, quando il rapporto di ciascun termine al precedente è minore dell'unità, ma si avvicina continuamente all'unità, sicchè non possiamo fissare una quantità finita k minore dell'unità, e sempre maggiore di quel rapporto. In tal caso, come si vedrà dall'esempio nell'Articolo seguente, la serie *può* essere convergente o divergente.

97. Consideriamo la serie infinita

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

Qui il rapporto dell'n^{mo} termine all'$(n-1)^{mo}$ termine è $\left(\frac{n-1}{n}\right)^p$; se p è positivo, questo è minore dell'unità, ma si avvicina continuamente all'unità al crescere di n. Questo caso adunque non rientra in alcuna delle regole già date; dimostreremo però che la serie è convergente se p è maggiore dell'unità, e divergente se p è l'unità, o minore dell'unità.

I. Supponiamo p maggiore dell'unità.

Il primo termine della serie è 1, i due termini seguenti sono presi insieme minori $\frac{2}{2^p}$; i quattro termini seguenti sono presi insieme minori di $\frac{4}{4^p}$, gli otto termini seguenti sono presi insieme minori di $\frac{8}{8^p}$, e così di seguito. Quindi l'intera serie è minore di

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \ldots$$

cioè, minore di

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

in cui $x = \frac{2}{2^p}$. Poichè p è maggiore dell'unità, x è minore dell'unità; quindi la serie è convergente.

II. Supponiamo p eguale all'unità.

La serie è ora $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

Il primo termine è 1, il secondo termine è $\frac{1}{2}$, i due termini seguenti sono presi insieme maggiori di $\frac{2}{4}$ o $\frac{1}{2}$, i quattro termini seguenti sono presi insieme maggiori di $\frac{4}{8}$ o $\frac{1}{2}$, e così di seguito. Quindi prendendo un numero sufficiente di termini possiamo ottenere una somma maggiore di ogni multiplo finito di $\frac{1}{2}$; la serie è quindi divergente.

III. Supponiamo p minore dell'unità, o pure negativo.

Ciascun termine è ora maggiore del termine corrispondente in II; la serie è quindi *a fortiori* divergente.

98. Daremo ora un teorema generale che si può dimostrare nel modo mostrato nell'Articolo precedente. Se $\varphi(x)$ è positiva per tutt'i valori interi positivi di x, e diminuisce continuamente al crescere di x, ed m è un intero positivo qualunque, allora le due serie infinite

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(5)+\ldots$$

e

$$\varphi(1)+m\varphi(m)+m^2\varphi(m^2)+m^3\varphi(m^3)+\ldots$$

sono tutte e due convergenti o tutte e due divergenti.

Consideriamo tutt'i termini della prima serie compresi tra $\varphi(m^k)$ e $\varphi(m^{k+1})$, includendo l'ultimo ed escludendo il primo, k essendo un intero positivo qualunque; il numero di questi termini è $m^{k+1}-m^k$, e la loro somma è quindi maggiore di $m^k(m-1)\varphi(m^{k+1})$. Così tutta la prima serie incominciando col termine $\varphi(m^k+1)$ sarà maggiore di $\frac{m-1}{m}$ volte la seconda serie incominciando col termine $m^{k+1}\varphi(m^{k+1})$. Così se la seconda serie è divergente, è ancor tale la prima.

Inoltre, è chiaro che termini scelti dalla prima serie sono minori di $m^k(m-1)\varphi(m^k)$. Così tutta la prima serie incominciando col termine $\varphi(m^k+1)$ sarà minore di $m-1$ volte la seconda serie incominciando con $m^k\varphi(m^k)$. Così se la seconda serie è convergente, è ancor tale la prima.

Come un esempio dell'uso di questo teorema possiamo prendere il seguente: *la serie di cui il termine generale è* $\frac{1}{n(\log n)^p}$ *è convergente se* p *è maggiore dell'unità, e divergente se* p *è eguale all'unità o minore dell'unità.* Pel teorema la serie proposta è convergente o divergente secondo che la serie di cui il determinante generale è $\frac{m^n}{m^n(\log m^n)^p}$ è convergente o divergente; l'ultimo termine generale è $\frac{1}{(\log m)^p n^p}$, sicchè esso serba un *rapporto costante* al termine generale $\frac{1}{n^p}$ per tutt'i valori di n. Quindi il risultato richiesto segue dall'Art. 97.

99. *La serie ottenuta sviluppando* $(1+x)^n$ *col Teorema del Binomio è convergente se* x *è numericamente minore dell'unità.*

Infatti il rapporto dell'$(r+1)^{mo}$ termine all'r^{mo} è $\frac{n-r+1}{r}x$. Se n è negativo e numericamente maggiore dell'unità il fattore $\frac{n-r+1}{r}$ è numericamente maggiore dell'unità; ma esso si avvicina continuamente all'unità, e si può far differire dall'unità per meno di ogni quantità assegnata prendendo r grande abbastanza. Quindi se x è numericamente minore dell'unità il prodotto $\frac{n-r+1}{r}x$, quando r è grande abbastanza, sarà numericamente minore di una quantità che è essa stessa numericamente minore dell'unità. Quindi la serie è convergente. (Art. 94).

Se n è positivo il fattore $\frac{n-r+1}{r}$ è numericamente minore dell'unità quando r è maggiore di n; se n è negativo e numericamente minore dell'unità questo fattore è sempre nnmericamente minore dell'unità; se $n=-1$ questo fattore è numericamente eguale all'unità: così nel primo caso quando r è maggiore di n, e negli altri due casi sempre, se x è numericamente minore dell'unità il prodotto $\frac{n-r+1}{r}x$ è numericamente minore di una quantità che è essa stessa numericamente minore dell'unità. Quindi la serie è convergente (Art. 94).

100. *La serie ottenuta sviluppando* $\log(1+x)$ *secondo le potenze di* x *è convergente se* x *è numericamente minore dell'unità.*

Infatti il rapporto dell'$(r+1)^{mo}$ termine all'r^{mo} è $-\frac{rx}{r+1}$. Quindi se x è minore dell'unità, questo rapporto è sempre numericamente minore di una quantità che è essa stessa numericamente minore dell'unità. Quindi la serie è convergente. (Art. 94.)

101. *La serie ottenuta sviluppando* a^x *secondo le potenze di* x *è sempre convergente.*

Infatti il rapporto dell'$(r+1)^{mo}$ termine all'r^{mo} è $\frac{x\log_e a}{r}$. Qualunque sia il valore di x, possiamo prendere r così grande da rendere questo rapporto minore dell'unità, ed il rapporto diminuirà al crescere di r. Quindi la serie è sempre convergente (Art. 94).

ESEMPII DI CONVERGENZA E DIVERGENZA DELLE SERIE.

Esaminare se le dieci serie seguenti siano convergenti o divergenti:

1. $\dfrac{1}{x(x+a)} + \dfrac{1}{(x+2a)(x+3a)} + \dfrac{1}{(x+4a)(x+5a)} + \dots$

2. $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5x^2}{5} + \dfrac{7x^3}{10} + \dfrac{9x^4}{17} + \dots + \dfrac{2n+1}{n^2+1}x^n + \dots$

3. $\dfrac{m+p}{a} + \dfrac{m+2p}{a^2} + \dfrac{m+3p}{a^3} + \dots$

4. $(a+1)^2 + (a+2)^2 x + (a+3)^2 x^2 + \dots$

5. $1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \dots$

6. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{4}} + \dots$

7. $\dfrac{x}{1+x^3} + \dfrac{x^2}{1+x^4} + \dfrac{x^3}{1+x^5} + \dots$

8. $\dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{7^p} + \dots$

9. $1^n + 2^n x + 3^n x^2 + \dots$

10. $\dfrac{x}{(a+b)^p} + \dfrac{x^2}{(a+2b)^p} + \dfrac{x^3}{(a+3b)^p} + \dots$

11. Supponiamo che nella serie $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ ciascun termine sia minore del precedente; allora mostrare che questa serie e la serie $u_0 + 2u_1 + 2^2 u_3 + 2^3 u_7 + 2^4 u_{15} + \dots$ sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

12. Mostrare che la serie $1 + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2}{3^n} + \dfrac{3}{4^n} + \dots$ è convergente se n è maggiore di 2, e divergente se n è minore di 2 o eguale a 2.

VIII. FRAZIONI CONTINUE.

102. Ogni espressione della forma $a \pm \cfrac{b}{c \pm \cfrac{d}{e \pm \text{etc.}}}$ si chiama *una frazione continua.*

Limiteremo la nostra attenzione alle frazioni continue della forma $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}$, in cui $a, b, c, \ldots$ sono tutti interi positivi.

Per brevità la frazione continua si scrive talvolta così: $a + \frac{1}{b+}\,\frac{1}{c+\text{etc.}}$

Quando il numero dei termini $a, b, c, \ldots$ è *finito*, la frazione continua si dice essere *terminata;* una tale frazione continua si può ridurre ad una frazione ordinaria effettuando le operazioni indicate.

103. *Convertire una data frazione in frazione continua.*

Sia $\frac{m}{n}$ la frazione data; si divida m per n, sia a il quoziente e p il resto; così $\frac{m}{n} = a + \frac{p}{n} = a + \cfrac{1}{\cfrac{n}{p}}$. In seguito si divida n per p, sia b il quoziente e q il resto; così $\frac{n}{p} = b + \frac{q}{p} = b + \cfrac{1}{\cfrac{p}{q}}$. Similmente, $\frac{p}{q} = c + \frac{r}{q} = c + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r}}$, e così di seguito.

Così
$$\frac{m}{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}$$

Se m è minore di n, il primo quoziente a è zero.

Vediamo quindi che per convertire una frazione data in frazione continua, dobbiamo procedere come per trovare la massima comune misura del numeratore e del denominatore; e dobbiamo perciò

giungere finalmente ad un punto in cui il resto è zero e l'operazione finisce: quindi ogni frazione si può convertire in una frazione continua *terminata*.

104. Le frazioni formate prendendo uno, due, tre, ... dei quozienti della frazione continua $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+\text{etc.}}$ si chiamano *frazioni convergenti* o *convergenti*. Così la prima convergente è a; la seconda convergente è formata da $a+\frac{1}{b}$, essa è perciò $\frac{ab+1}{b}$; la terza convergente è formata da $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$, cioè, da $a+\frac{c}{bc+1}$, essa è perciò $\frac{abc+a+c}{bc+1}$; e così di seguito.

105. *Le convergenti prese in ordine sono alternativamente minori e maggiori della frazione continua.*

La prima convergente a è troppo piccola poichè la parte $\frac{1}{b+\text{etc.}}$ è omessa; $a+\frac{1}{b}$ è troppo grande poichè il denominatore b è troppo piccolo; $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$ è troppo piccola poichè $b+\frac{1}{c}$ è troppo grande; e così di seguito.

106. *Dimostrare la legge di formazione delle successive convergenti.*

Le prime tre convergenti sono $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$, $\frac{abc+a+c}{bc+1}$: il numeratore della terza è $c(ab+1)+a$, cioè, esso si può formare moltiplicando il numeratore della seconda pel terzo quoziente, ed aggiungendo il numeratore della prima; il denominatore della terza convergente si può formare in simil modo moltiplicando il denominatore della seconda pel terzo quoziente, ed aggiungendo il denominatore della prima. Mostreremo ora per induzione che una tale legge vale generalmente.

Siano $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, tre convergenti consecutive; m, m', m'', i corrispondenti quozienti; e supponiamo che

$$p''=m''p'+p,\quad q''=m''q'+q.$$

Sia m''' il quoziente seguente; allora la convergente seguente differisce da $\frac{p''}{q''}$ solamente nel prendere in considerazione il quoziente addizionale m''', sicchè dobbiamo scrivere $m''+\frac{1}{m'''}$ invece di m''; così la convergente seguente

$$=\frac{\left(m''+\frac{1}{m'''}\right)p'+p}{\left(m''+\frac{1}{m'''}\right)q'+q}=\frac{m'''(m''p'+p)+p'}{m'''(m''q'+q)+q'}=\frac{m'''p''+p'}{m'''q''+q'}.$$

Quindi se supponiamo

$$p'''=m'''p''+p' \quad \text{e} \quad q'''=m'''q''+q',$$

la convergente seguente a $\frac{p''}{q''}$ sarà eguale a $\frac{p'''}{q'''}$, così la convergente $\frac{p'''}{q'''}$ si può formare con la stessa legge che fu supposta valere per $\frac{p''}{q''}$; ma la legge è stata *dimostrata* essere applicabile per la terza convergente, e quindi essa è applicabile per ogni convergente seguente.

Abbiamo mostrato così che le convergenti successive si *possono* formare secondo una certa legge; sin ora non abbiamo dimostrato che quando esse sono così formate ogni convergente è nei suoi minimi termini, ma ciò si dimostrerà nell'Art. 108.

107. *La differenza fra due convergenti consecutive qualunque è una frazione di cui il numeratore è l'unità, ed il denominatore è il prodotto dei denominatori delle convergenti.*

Questo è chiaro rispetto alla prima ed alla seconda convergente, poichè $\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{1}{b}$.

Supponiamo che la legge valga per due convergenti consecutive $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$; cioè, supponiamo $p'q-pq'=\pm 1$, sicchè

$$\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}=\pm\frac{1}{qq'};$$

allora, $p''q'-p'q''=(m''p'+p)q'-p'(m''q'+q)=p'q-qp'=\mp 1$,

sicchè
$$\frac{p''}{q''}-\frac{p'}{q'}=\mp\frac{1}{q''q'};$$
così la legge vale per la convergente seguente. Quindi essa è vera generalmente.

108. *Tutte le convergenti sono nei loro minimi termini.*

Infatti se il numeratore ed il denominatore di $\frac{p}{q}$ avessero una comune misura essa dividerebbe $p'q-pq'$ o sia l'unità, il che è impossibile.

109. *Ogni convergente è più vicina alla frazione continua di ciascuna delle convergenti precedenti.*

Dimostreremo ciò facendo vedere che ogni convergente è più vicina alla frazione continua della convergente precedente.

Siano $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ convergenti consecutive della frazione continua x; allora $\frac{p''}{q''}=\frac{m''p'+p}{m''q'+q}$. Ora x differisce da $\frac{p''}{q''}$ solamente nel prendere invece di m'' il *quoziente completo* $m''+\frac{1}{m'''+\text{etc.}}$; questo sarà una certa quantità maggiore dell'unità, che dinoteremo con μ; così
$$x=\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q};$$
quindi
$$\frac{p}{q}-x=\frac{p}{q}-\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q}=\frac{\mu(pq'-p'q)}{q(\mu q'+q)}=\frac{\pm\mu}{q(\mu q'+q)},$$
$$x-\frac{p'}{q'}=\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q}-\frac{p'}{q'}=\frac{pq'-p'q}{q'(\mu q'+q)}=\frac{\pm 1}{q'(\mu q'+q)}.$$

Ora 1 è minore di μ e q' è maggiore di q; quindi per tutte e due le ragioni la differenza tra x e $\frac{p'}{q'}$ è minore della differenza tra x e $\frac{p}{q}$; cioè, $\frac{p'}{q'}$ è più vicina ad x di $\frac{p}{q}$.

110. *Determinare i limiti dell'errore commesso prendendo una convergente qualunque per la frazione continua.*

Per l'Articolo precedente la differenza tra x e $\frac{p}{q}$ è $\frac{\mu}{q(\mu q' + q)}$, o sia $\frac{1}{q\left(q' + \frac{q}{\mu}\right)}$; questa è minore di $\frac{1}{qq'}$ e maggiore di $\frac{1}{q(q'+q)}$. Poichè q' è maggiore di q, l'errore *a fortiori* è minore di $\frac{1}{q^2}$ e maggiore di $\frac{1}{2q'^2}$; questi limiti sono più semplici di quelli dati prima, benchè naturalmente non così prossimi.

111. Affinchè l'errore commesso sia minore di una data quantità $\frac{1}{k}$, dobbiamo perciò formare solamente le convergenti consecutive sino a che si giunga ad una $\frac{p}{q}$, tale che q^2 non sia minore di k.

112. *Ogni convergente è più vicina alla frazione continua di ogni altra frazione che abbia un denominatore minore di quello della convergente.*

Sia $\frac{p'}{q'}$ la convergente, ed $\frac{r}{s}$ una frazione, tale che s sia minore di q'. Sia x la frazione continua, e $\frac{p}{q}$ la convergente che precede immediatamente $\frac{p'}{q'}$. Allora $\frac{p}{q}$, x, $\frac{p'}{q'}$ sono in ordine di grandezza crescente o decrescente per l'Art. 105. Ora $\frac{r}{s}$ non può cadere *tra* $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$; infatti allora la differenza tra $\frac{r}{s}$ e $\frac{p}{q}$ sarebbe minore della differenza tra $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$, cioè, minore di $\frac{1}{qq'}$, e quindi la differenza tra ps e qr sarebbe minore di $\frac{s}{q'}$, cioè, un intero minore di una frazione propria, il che è impossibile. Così o $\frac{p}{q}$, x, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{r}{s}$, o pure $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$, x, $\frac{p'}{q'}$ debbono essere in ordine di grandezza. Nel primo caso $\frac{r}{s}$ differisce più da x di $\frac{p}{q}$, e quindi *a fortiori* più di $\frac{p'}{q'}$.

113. Supponiamo $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ due convergenti consecutive di una frazione continua x, allora $\frac{pp'}{qq'}$ è maggiore o minore di x^2 secondo che

$\frac{p}{q}$ è maggiore o minore di $\frac{p'}{q'}$. Infatti, come nell'Art. 109, abbiamo $x=\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q}$; quindi

$$\frac{p}{qx}-\frac{xq'}{p'}=\frac{p(\mu q'+q)}{q(\mu p'+p)}-\frac{q'(\mu p'+p)}{p'(\mu q'+q)}.$$

Si riducano le frazioni nel secondo membro allo stesso denominatore; allora il numeratore è $pp'(\mu q'+q)^2-qq'(\mu p'+p)^2$, cioè, $\mu^2(pp'q'^2-qq'p'^2)+pp'q^2-qq'p^2$, cioè, $(\mu^2p'q'-pq)(pq'-p'q)$.

Il fattore $\mu^2p'q'-pq$ è necessariamente positivo; il fattore $pq'-p'q$ è positivo o negativo, secondo che $\frac{p}{q}$ è maggiore o minore di $\frac{p'}{q'}$; quindi $\frac{p}{qx}$ è maggiore o minore di $\frac{xq'}{p'}$, cioè, $\frac{pp'}{qq'}$ è maggiore o minore di x^2, secondo che $\frac{p}{q}$ è maggiore o minore di $\frac{p'}{q'}$.

ESEMPII DI FRAZIONI CONTINUE.

Convertire le quattro frazioni seguenti in frazioni continue:

1. $\frac{1380}{1051}$. 2. $\frac{445}{612}$. 3. $\frac{19763}{44126}$. 4. $\frac{743}{611}$.

5. Trovare tre frazioni convergenti a 3·1416.

6. Trovare una serie di frazioni convergenti al rapporto di 5 ore 48 minuti 51 secondi a 24 ore.

7. Se $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ sono tre convergenti consecutive, mostrare che $(p_3-p_1)q_2=(q_3-q_1)p_2$.

8. Dimostrare che i numeratori di due convergenti consecutive qualunque non hanno alcuna comune misura maggiore dell'unità; e similmente per i denominatori.

9. Se $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ sono convergenti successive di una frazione continua maggiore dell'unità, mostrare che $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$.

10. Mostrare che la differenza tra la prima convergente e la n^{ma} convergente è numericamente eguale ad

$$\frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \frac{1}{q_3 q_4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}.$$

11. Mostrare che $\left(\frac{p_{n+2}}{p_n} - 1\right)\left(1 - \frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right) = \left(\frac{q_{n+2}}{q_n} - 1\right)\left(1 - \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right)$

12. Se μ_n è l'n^{mo} quoziente in una frazione continua maggiore dell'unità, mostrare che $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^{n-1} \mu_n$.

13. Se $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$ sono convergenti successive della frazione continua $\frac{\beta_1}{\alpha_1 +} \frac{\beta_2}{\alpha_2 +} \frac{\beta_3}{\alpha_3 +} \ldots$ mostrare che

$$p_n = \alpha_n p_{n-1} + \beta_n p_{n-2}, \quad q_n = \alpha_n q_{n-1} + \beta_n q_{n-2};$$

e quindi che

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n.$$

14. Se $\frac{p_n}{q_n}$ dinota l'n^{ma} convergente della frazione $\frac{P}{Q}$, ed R_n dinota l'n^{mo} resto che s'incontra nel procedimento per convertire la frazione $\frac{P}{Q}$ in frazione continua, mostrare che

$$P = p_n R_{n-1} + p_{n-1} R_n, \quad Q = q_n R_{n-1} + q_{n-1} R_n.$$

15. Mostrare che la differenza tra $\frac{P}{Q}$ e $\frac{p_n}{q_n}$ è $\frac{R_n}{Q q_n}$.

16. Nel convertire una frazione ridotta a minimi termini in una frazione continua, mostrare che due resti consecutivi qualunque non hanno alcuna comune misura maggiore dell'unità.

IX. RIDUZIONE DI UN RADICALE QUADRATICO IN UNA FRAZIONE CONTINUA.

114. Un radicale quadratico non si può ridurre ad una frazione continua *terminata*, poichè il radicale sarebbe allora eguale ad una frazione razionale, cioè, sarebbe commensurabile; vedremo, però, che un radicale quadratico si può ridurre ad una frazione continua

che non è terminata: daremo prima un esempio, e poi la teoria generale. Si prenda la radice quadrata di 6;

$$\sqrt{(6)} = 2 + \sqrt{(6)} - 2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{(6)}+2} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{(6)}+2}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{(6)}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{(6)}-2}{2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{(6)}+2} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{(6)}+2}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{(6)}+2}{1} = 4 + \frac{\sqrt{(6)}-2}{1} = 4 + \frac{2}{\sqrt{(6)}+2} = 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{(6)}+2}{2}},$$

le operazioni ora ritornano ad essere le stesse; così abbiamo

$$\sqrt{(6)} = 2 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+\text{etc.}}$$

Nel procedimento precedente l'espressione che si trova al principio di ciascuna linea è separata in due parti, la prima parte essendo il *più grande intero* contenuto nell'espressione, e la seconda parte il resto; così il più grande intero in $\sqrt{(6)}$ è 2, quindi scriviamo

$$\sqrt{(6)} = 2 + \{\sqrt{(6)} - 2\};$$

ancora, il più grande intero in $\frac{\sqrt{(6)}+2}{2}$ è 2, quindi scriviamo

$$\frac{\sqrt{(6)}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{(6)}-2}{2},$$

e così di seguito; si fa poi che il resto abbia il suo numeratore razionale, e si esprime come una frazione con l'unità per numeratore; allora incominciamo un'altra linea del procedimento.

Possiamo notare nell'esempio che i quozienti incominciano a ricorrere appena giungiamo ad un quoziente che è doppio del primo. Vedremo fra breve che accade sempre così.

115. Sia N un intero qualunque che non è un quadrato esatto; sia a il più grande intero contenuto in $\sqrt{N}$; si scriva $\sqrt{N}$ nella forma $\frac{\sqrt{(N)}+0}{1}$ per simmetria, e si proceda così:

$$\frac{\sqrt{(N)}+0}{1}=a+\frac{\sqrt{(N)}-a}{1}=a+\frac{r}{\sqrt{(N)}+a},\ \text{se } r=N-a^2;$$

$$\frac{\sqrt{(N)}+a}{r}=b+\frac{\sqrt{(N)}+a-rb}{r}=b+\frac{r'}{\sqrt{(N)}+a'},$$

$$\text{se } a'=rb-a,\ \text{ed } r'=\frac{N-a'^2}{r};$$

$$\frac{\sqrt{(N)}+a'}{r'}=b'+\frac{\sqrt{(N)}+a'-r'b'}{r'}=b'+\frac{r''}{\sqrt{(N)}+a''},$$

$$\text{se } a''=r'b'-a',\ \text{ed } r''=\frac{N-a'^2}{r'};$$

$$\frac{\sqrt{(N)}+a''}{r''}=b''+\frac{\sqrt{(N)}+a''-r''b''}{r''}=\text{etc.}$$

In questo procedimento supponiamo che b, b', b''... siano, come a, i *più grandi* interi contenuti nelle espressioni da cui essi rispettivamente traggono origine; segue da ciò che $r, r', r'', r''',\ldots$ sono tutti positivi. Infatti a^2 è minore di N, quindi r è positivo, e b è il più grande intero in $\frac{\sqrt{(N)}+a}{r}$, sicchè b è naturalmente minore di $\frac{\sqrt{(N)}+a}{r}$; quindi a'^2 è minore di N, e così r' è positivo; e così di seguito. Abbiamo notato questo fatto, poichè segue evidentemente dal procedimento; esso è, però, incluso nella proposizione dell'Articolo seguente.

116. Nelle espressioni che si trovano al principio delle linee nell'Art. 115, abbiamo le seguenti serie di quantità:

$$0\ ,\ a\ ,\ a'\ ,\ a''\ ,\ a'''\ ,\ \text{etc.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1),$$

$$1\ ,\ r\ ,\ r'\ ,\ r''\ ,\ r'''\ ,\ \text{etc.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

e la serie corrispondente di quozienti è

$$a\ ,\ b\ ,\ b'\ ,\ b''\ ,\ b'''\ ,\ \text{etc.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Mostreremo ora che i termini in (1) e (2) sono tutti interi positivi; quelli in (3) si conosce che sono tali.

Siano α, α', α'' tre termini consecutivi di (1); ρ, ρ', ρ'' i termini corrispondenti di (2); β, β', β'' quelli di (3). Le convergenti corrispondenti di $\sqrt{(N)}$ siano $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ sicchè $\frac{p''}{q''}=\frac{\beta''p'+p}{\beta''q'+q}$; queste

convergenti si possono formare tutte nel modo solito, poichè tutt' i termini in (3) sono interi positivi.

Poichè il quoziente completo corrispondente a β'' è $\frac{\sqrt{(N)}+\alpha''}{\rho''}$, abbiamo, per l'Art. 109,

$$\sqrt{(N)} = \frac{\frac{\sqrt{(N)}+\alpha''}{\rho''}p'+p}{\frac{\sqrt{(N)}+\alpha''}{\rho''}q'+q} = \frac{\{\sqrt{(N)}+\alpha''\}p'+\rho''p}{\{\sqrt{(N)}+\alpha''\}q'+\rho''q}.$$

Si moltiplichi, e poi si eguaglino le parti razionali e le parti irrazionali; così

$$\alpha''p'+\rho''p = Nq', \qquad \alpha''q'+\rho''q = p';$$

quindi

$$\alpha''(pq'-p'q) = pp'-qq'N,$$

$$\rho''(pq'-p'q) = q'^2N-p'^2.$$

Ora $pq'-p'q=\pm 1$, quindi α'' e ρ'' sono interi. E si è dimostrato nell'Art. 113 che $pq'-p'q$, $pp'-qq'N$, e $q'^2N-p'^2$ hanno lo *stesso* segno; quindi α'' e ρ'' sono interi *positivi*.

Questa investigazione si può applicare *ad ogni* coppia corrispondente di quantità in (1) e (2) eccetto alle prime due coppie; essa non si può applicare a queste perchè si suppone che *due* convergenti $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ precedano la convergente $\frac{p''}{q''}$. Ma le prime due coppie di quantità in (1) e (2), cioè 0 ed 1, ed a ed r, si conoscono essere interi positivi. Così *tutte* le quantità in (1) e (2) sono interi positivi.

117. Il più grande termine in (1) è a. Infatti pel modo di formazione della serie, $\rho\rho'=N-\alpha'^2$; poichè ρ e ρ' sono positivi, α'^2 è minore di N, e quindi α' non è maggiore di a.

118. Nessun termine in (2) e (3) può essere maggiore di $2a$. Infatti pel modo di formazione delle serie, $\alpha'+\alpha''=\rho'\beta'$; e poichè nè α' nè α'' può essere maggiore di a, nè ρ' nè β' può essere maggiore di $2a$.

119. Se $\rho''=1$, allora $\alpha''=a$.

Infatti, per l'Art. 116, $\alpha''+\rho''\frac{q}{q'}=\frac{p'}{q'}$, quindi se $\rho''=1$ si ha

α'' + una frazione $=\frac{p'}{q'}$. Ora $\frac{p'}{q'}$ è una maggiore approssimazione a $\sqrt{N}$ in paragone di a, ed a è minore di $\sqrt{N}$; quindi $\frac{p'}{q'}$ è maggiore di a; onde $\alpha''=a$.

120. Se ogni termine in (1), escluso il primo, si sottrae da a, il resto è minore del termine corrispondente in (2).

Infatti, per l'Art. 116, $\alpha''q'+\rho''q=p'$; quindi $\frac{q}{q'}=\frac{1}{\rho''}\left(\frac{p'}{q'}-\alpha''\right)$; quindi $\frac{p'}{q'}-\alpha''$ è minore di ρ''; quindi *a fortiori*, $a-\alpha''$ è minore di ρ''.

Questa dimostrazione si applicherà solamente *al terzo* o ad ogni termine seguente, poichè nell'Art. 116 si è supposto che due termini α, α' precedano α''. Il teorema, però, regge pel secondo termine, come si vede immediatamente, poichè $a-a$, o zero, è minore di r.

121. Si è mostrato negli Art. 117 e 118 che i valori dei termini in (1) e (2) non possono eccedere a e $2a$ rispettivamente; quindi gli stessi valori debbono ritornare nelle due serie simultaneamente, e non vi possono essere *più* di $2a^2$ termini in ciascuna serie prima che ciò abbia luogo.

122. Sia la serie (1) dinotata da

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ a_{m-1}\,,\ a_m\,,\ a_{m+1}\,,\ \ldots\ a_{n-1}\,,\ a_n\,,\ a_{n+1}\,,\ \ldots$$

e sia una simile notazione usata per (2) e (3). Abbiamo dimostrato che una ricorrenza deve aver luogo, supponiamo allora che i termini dall'm^{mo} sino all'$(n-1)^{mo}$ inclusivamente ricorrano, sicchè

$$a_n=a_m\,,\ a_{n+1}=a_{m+1}\,,\ a_{n+2}=a_{m+2}\,,\ \ldots$$

$$b_n=b_m\,,\ b_{n+1}=b_{m+1}\,,\ b_{n+2}=b_{m+2}\,,\ \ldots$$

$$r_n=r_m\,,\ r_{n+1}=r_{m+1}\,,\ r_{n+2}=r_{m+2}\,,\ \ldots$$

Mostreremo che

$$a_{n-1}=a_{m-1}\,,\ b_{n-1}=b_{m-1}\,,\ r_{n-1}=r_{m-1}.$$

Abbiamo $r_{m-1}r_m=N-a_m^2$, $r_{n-1}r_n=N-a_n^2$,

ma $r_n=r_m$, ed $a_n=a_m$; quindi $r_{n-1}=r_{m-1}$.

Ancora, $a_{m-1}+a_m=r_{m-1}b_{m-1}$, $a_{n-1}+a_n=r_{n-1}b_{n-1}$;

quindi $a_{n-1}-a_{m-1}=(b_{n-1}-b_{m-1})r_{m-1}$;

quindi $\dfrac{a_{n-1}-a_{m-1}}{r_{m-1}}=b_{n-1}-b_{m-1}=$ a zero o ad un intero.

Ma, per l'Art. 120, $a-a_{m-1}$ è minore di r_{m-1}, ed $a-a_{n-1}$ è minore di r_{n-1}, sicchè $a-a_{n-1}$ è minore di r_{m-1}; quindi $a_{n-1}-a_{m-1}$ è minore di r_{m-1}; quindi $\dfrac{a_{n-1}-a_{m-1}}{r_{m-1}}$ è minore di 1.

Paragonando questo col risultato precedente, vediamo che $\dfrac{a_{n-1}-a_{m-1}}{r_{m-1}}$ deve essere zero; quindi $a_{n-1}=a_{m-1}$, e $b_{n-1}=b_{m-1}$.

Adunque, conoscendo che l'm^{mo} termine ricorre, possiamo conchiudere che anche l'$(m-1)^{mo}$ termine ricorre. Questa dimostrazione vale finchè m non è minore di 3; poichè essa dipende dal teorema stabilito nell'Art. 120. Quindi i termini ricorrono incominciando col quoziente completo $\dfrac{\sqrt{(N)}+a}{r}$.

123. L'ultimo quoziente sarà sempre $2a$.

Infatti sia l'ultimo quoziente completo $\dfrac{\sqrt{(N)}+a_n}{r_n}$, allora il seguente è $\dfrac{\sqrt{(N)}+a}{r}$; quindi $a_n+a=r_nb_n$, $r_nr=N-a^2$; ma $r=N-a^2$; quindi $r_n=1$; quindi, per l'Art. 119, $a_n=a$; quindi $b_n=2a$.

124. *Ogni frazione continua periodica è eguale ad una delle radici di un'equazione quadratica con coefficienti razionali.*

Sia $$x=a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{\dots}\,\frac{1}{h+}\,\frac{1}{k+}\,\frac{1}{y},$$

in cui $$y=r+\frac{1}{s+}\,\frac{1}{\dots}\,\frac{1}{u+}\,\frac{1}{v+}\,\frac{1}{y},$$

sicchè $a, b, \dots h, k$ sono i quozienti che non ricorrono, ed $r, s, \dots u, v$ sono quelli che ricorrono perpetuamente.

Sia $\dfrac{p'}{q'}$ la convergente formata dai quozienti $a, b, \dots$ sino a k inclusivamente; e sia $\dfrac{p}{q}$ la convergente che precede immediatamente

$\frac{p'}{q'}$; allora, come nell'Art. 109,

$$x = \frac{p'y + p}{q'y + q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Sia $\frac{P'}{Q'}$ la convergente formata dai quozienti $r, s, \ldots$ sino a v inclusivamente; e sia $\frac{P}{Q}$ la convergente che precede immediatamente $\frac{P'}{Q'}$; allora

$$y = \frac{P'y + P}{Q'y + Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Da (1) e (2) eliminando y otteniamo un'equazione quadratica in x con coefficienti razionali. Per ottenere x dobbiamo risolvere questa equazione: o pure possiamo prendere il valore positivo di y trovato da (2), cioè, da $Q'y^2 + (Q - P')y - P = 0$, e sostituirlo in (1).

125. Si può notare il teorema seguente sulle frazioni continue.

Sia $\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\ldots\frac{1}{m+}\frac{1}{m'+}\frac{1}{m''}$ lo sviluppo di una frazione propria $\frac{p}{Q}$; e sia la corrispondente serie di convergenti

$$\frac{1}{b}, \frac{c}{cb+1}, \ldots \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{P}{Q}:$$

allora lo sviluppo di $\frac{q''}{Q}$ sarà

$$\frac{1}{m''+}\frac{1}{m'+}\frac{1}{m+}\ldots\frac{1}{c+}\frac{1}{b};$$

cioè, si troveranno gli stessi quozienti ma in ordine inverso.

Infatti $Q = m''q'' + q'$, quindi $\frac{q''}{Q} = \frac{1}{m'' + \frac{q'}{q''}}$;

$$q'' = m'q' + q, \text{ quindi } \frac{q}{q''} = \frac{1}{m' + \frac{q}{q'}};$$

e così di seguito.

Quindi $\frac{q''}{Q} = \frac{1}{m''+}\frac{1}{m'+}\frac{1}{m+}\ldots\frac{1}{c+}\frac{1}{b}$.

126. Il teorema precedente fornirà un'aggiunta ai risultati ottenuti in questo Capitolo.

Siano $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ due convergenti successive di $\sqrt{N}$, tali che $\frac{p'}{q'}$ sia l'ultima convergente formata prima che i quozienti ricorrono; quindi per gli Art. 116 e 123, $p' = aq' + q$.

Ora lo sviluppo di $\frac{p' - aq'}{q'}$, cioè di $\frac{p'}{q'} - a$, sarà con la notazione dell'Art. 122

$$\frac{1}{b_2+}\,\frac{1}{b_3+}\,\frac{1}{b_4+}\,\cdots\cdots\,\frac{1}{b_{n-3}+}\,\frac{1}{b_{n-2}+}\,\frac{1}{b_{n-1}};$$

e l'ultima convergente sarà $\frac{p - aq}{q}$. Ma abbiamo or ora veduto che $q = p' - aq'$. Quindi per l'Art. 125

$$b_{n-1} = b_2,\quad b_{n-2} = b_3,\quad b_{n-3} = b_4,\ \ldots$$

127. Vi è anche una ricorrenza degli stessi termini in ordine inverso rispetto alla seconda ed alla terza serie degli Art. 116 e 122, simile a quella che è stata ora dimostrata rispetto alla prima serie.

Abbiamo generalmente

$$r_{m-1} r_m = N - a_m^2 \ (1), \quad a_{m-1} + a_m = r_{m-1}\, b_{m-1} \ (2).$$

Si pongano in (1) per m successivamente i valori 2 ed n; così

$$r_1 r_2 = N - a_2^2, \quad r_{n-1} r_n = N - a_n^2;$$

sappiamo che $a_2 = a_n$ poichè ciascuno $= a$, e che $r_1 = r_n$ poichè ciascuno $= 1$: quindi $r_2 = r_{n-1}$.

Si pongano in (2) per m successivamente i valori 3 ed n; così

$$a_2 + a_3 = r_2\, b_2, \quad a_{n-1} + a_n = r_{n-1}\, b_{n-1};$$

sappiamo che $a_2 = a_n$, che $r_2 = r_{n-1}$, e che $b_2 = b_{n-1}$: quindi $a_3 = a_{n-1}$.

Ancora, si pongano in (1) per m successivamente i valori 3 ed $n-1$: da ciò otteniamo $r_3 = r_{n-2}$. Si pongano in (2) per m successivamente i valori 4 ed $n-1$: da ciò otteniamo $a_4 = a_{n-2}$. E così di seguito.

128. Il teorema seguente relativo alle frazioni continue fu comunicato al presente scrittore da M.r Rickard di Birmingham. Il teorema fornirà convergenti elevate della radice quadrata di un numero con poca fatica.

Sia N un intero positivo che non è un quadrato esatto, e si suppongano formate le convergenti di $\sqrt{N}$ nel solito modo; sia c il numero dei quozienti ricorrenti in un completo ciclo, o pure un multiplo qualunque di quel numero; sia $\frac{p_c}{q_c}$ la c^{ma} convergente e $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$ la $(2c)^{ma}$ convergente; allora sarà

$$\frac{p_{2c}}{q_{2c}} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_c}{q_c} + \frac{Nq_c}{p_c}\right).$$

Sia a il più grande intero in $\sqrt{N}$, ed i quozienti ottenuti convertendo $\sqrt{N}$ in una frazione continua nel solito modo siano dinotati con

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_c,\ b_{c+1},\ b_{c+2},\ \ldots\ b_{2c},\ \ldots$$

Allora dagli Art. 122, 123 abbiamo

$$b_2 = b_{c+2},\ b_3 = b_{c+3},\ b_4 = b_{c+4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

inoltre

$$b_1 = a,\ b_{c+1} = 2a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Siano $\frac{p_{c-1}}{q_{c-1}}$ e $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ le convergenti immediatamente precedente e seguente di $\frac{p_c}{q_c}$; allora $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}} = \frac{b_{c+1}p_c + p_{c-1}}{b_{c+1}q_c + q_{c-1}}$.

Ora $\sqrt{N}$ differisce da $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ in questo; invece di usare il quoziente b_{c+1} dobbiamo usare il corrispondente *quoziente completo,* che è $a + \sqrt{N}$, per l'Art. 123.

Quindi
$$\sqrt{N} = \frac{(a+\sqrt{N})p_c + p_{c-1}}{(a+\sqrt{N})q_c + q_{c-1}};$$

si moltiplichi, e si eguaglino le parti razionali e le parti irrazionali; così

$$ap_c + p_{c-1} = Nq_c,\quad aq_c + q_{c-1} = p_c \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ancora, $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$ differisce da $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ in questo; invece di usare il quoziente b_{c+1} dobbiamo usare la frazione continua $b_{c+1}+\frac{1}{b_{c+2}+}\cdots\frac{1}{b_{2c}}$; e questa frazione continua per (1) e (2) è eguale ad $a+b_1+\frac{1}{b_2+}\cdots\frac{1}{b_c}$, cioè, essa è eguale ad $a+\frac{p_c}{q_c}$.

Quindi

$$\frac{p_{2c}}{q_{2c}}=\frac{\left(a+\frac{p_c}{q_c}\right)p_c+p_{c-1}}{\left(a+\frac{p_c}{q_c}\right)q_c+q_{c-1}}=\frac{ap_c+p_{c-1}+\frac{p_c^2}{q_c}}{aq_c+q_{c-1}+p_c}$$

$$=\frac{Nq_c+\frac{p_c^2}{q_c}}{2p_c}, \text{ per (3)}, =\frac{1}{2}\left(\frac{p_c}{q_c}+\frac{Nq_c}{p_c}\right).$$

Possiamo dare un'interessante illustrazione geometrica del teorema. Se N dinota l'area di un rettangolo e si prende $\frac{p_c}{q_c}$ per uno dei lati, l'altro lato è $\frac{Nq_c}{p_c}$. Così $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$ è eguale alla semisomma dei lati di questo rettangolo. Dinotino h e k i lati di un rettangolo; allora se $\frac{1}{2}(h+k)$ dinota un lato di un altro rettangolo della stessa area l'altro lato sarà $\frac{2hk}{h+k}$; la differenza di questi due lati sarà $\frac{(h-k)^2}{2(h+k)}$, la quale è *minore* di $h-k$. Ora nel cercare $\sqrt{N}$ noi nel fatto desideriamo il lato di un quadrato di cui l'area è N; ed il presente teorema si può considerare come dando una serie di rettangoli, in cui un lato di ciascun rettangolo è la semisomma dei lati del rettangolo precedente; sicchè ciascun rettangolo è più prossimamente equilatero in paragone del rettangolo precedente: ed i rettangoli tendono alla forma di un quadrato. Questa illustrazione è stata suggerita da uno scritto intitolato *The Rectangular Theorem* di Henry Brook.

Supponiamo per un esempio che $N=a^2+1$; allora i quozienti sono a, $2a$, $2a$, $2a$, ...; cioè, il ciclo dei quozienti ricorrenti si ri-

duce al solo quoziente $2a$. In questo caso quindi c può essere un numero intero qualunque.

Supponiamo per un altro esempio che $N = a^2 - 1$; allora i quozienti sono $a-1$, 1, $2(a-1)$, 1, $2(a-1)$, ...; così il ciclo dei quozienti ricorrenti consiste dei due quozienti 1 e $2(a-1)$. Così nel teorema precedente c può essere un numero intero pari qualunque. In questo caso però il teorema sarà anche vero se c è un numero dispari qualunque, come ora mostreremo.

Supponiamo c un numero intero dispari qualunque. Poichè il $(c+1)^{mo}$ quoziente è l'unità abbiamo

$$p_{c+1} = p_c + p_{c-1}, \quad q_{c+1} = q_c + q_{c-1} \cdots\cdots\cdots (4).$$

E, nello stesso modo come si dimostrarono le equazioni (3), abbiamo

$$(a-1)p_{c+1} + p_c = Nq_{c+1}, \quad (a-1)\,q_{c+1} + q_c = p_{c+1} \cdots (5).$$

Ora $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$ differisce da $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ in questo; in vece di usare il quoziente l'unità dobbiamo usare la frazione continua $1 + \frac{1}{2(a-1)+} \cdots\cdots \frac{1}{1}$; e questa frazione continua è eguale ad $\dfrac{1}{\dfrac{p_{c+1}}{q_{c+1}} - (a-1)}$, cioè, a $\frac{q_{c+1}}{q_c}$ per la seconda delle equazioni (5).

$$\text{Così } \frac{p_{2c}}{q_{2c}} = \frac{p_c \dfrac{q_{c+1}}{q_c} + p_{c-1}}{q_{c+1} + q_{c-1}} = \frac{p_c \dfrac{q_{c+1}}{q_c} + p_{c+1} - p_c}{2q_{c+1} - q_c}, \text{ per (4).}$$

Dalle equazioni (5) poichè $N = a^2 - 1$, si può dedurre che

$$p_{c+1} = \frac{(a-1)\,p_c + Nq_c}{2(a-1)}, \quad q_{c+1} = \frac{(a-1)\,q_c + p_c}{2(a-1)}.$$

Si sostituiscano questi valori nell'ultima espressione per $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$ ed otteniamo $\dfrac{p_{2c}}{q_{2c}} = \dfrac{Nq_c + \dfrac{p^2_c}{q_c}}{2p_c}$.

ESEMPII DI FRAZIONI CONTINUE DA RADICALI QUADRATICI.

Esprimere come frazioni continue i quattordici radicali seguenti, e trovare per ciascuno le prime quattro convergenti:

1. $\sqrt{8}$. 2. $\sqrt{(10)}$. 3. $\sqrt{(14)}$. 4. $\sqrt{(17)}$.

5. $\sqrt{(19)}$. 6. $\sqrt{(26)}$. 7. $\sqrt{(27)}$. 8. $\sqrt{(46)}$.

9. $\sqrt{(53)}$. 10. $\sqrt{(101)}$. 11. $\sqrt{(a^2+1)}$.

12. $\sqrt{(a^2-1)}$. 13. $\sqrt{(a^2+a)}$. 14. $\sqrt{(a^2-a)}$.

15. Trovare l'8ª convergente di $\sqrt{(13)}$.

16. Trovare l'8ª convergente di $\sqrt{(31)}$.

17. Mostrare che la 9ª convergente di $\sqrt{(33)}$ darà il vero valore sino almeno a sei cifre decimali.

18. Trovare i limiti dell'errore quando $\frac{211}{44}$ si prende per $\sqrt{(23)}$.

19. Mostrare che $\frac{916}{191}$ differisce da $\sqrt{(23)}$ per una quantità minore di $\frac{1}{(191)^2}$ e maggiore di $\frac{1}{2(240)^2}$.

20. Trovare limiti dell'errore quando $\frac{1151}{240}$ si prende per $\sqrt{(23)}$.

21. Trovare limiti dell'errore quando l'8ª convergente si prende per $\sqrt{(31)}$.

22. Mostrare che $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\cdots=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)}$.

23. Mostrare che

$$\left(a+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\cdots\right)\left(\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\cdots\right)=\frac{a}{b}.$$

24. Mostrare che

$$2a+\frac{1}{a+}\frac{1}{4a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{4a+}\cdots=2\sqrt{(1+a^2)};$$

mostrare che la seconda convergente differisce dal vero valore per una quantità minore di $1:a(4a^2+1)$; e quindi facendo $a=7$, mostrare che $\frac{99}{70}$ differisce da $\sqrt{2}$ per una quantità minore di $\frac{1}{13790}$.

25. Mostrare che la 3ª convergente a $\sqrt{(a^2+a+1)}$ è $\frac{1}{2}(2a+1)$.

26. Trovare convergenti di $\frac{\sqrt{3}}{4}$; mostrare che $\frac{13}{30}$ eccede il vero valore per una quantità minore di $\frac{1}{2940}$.

27. Trovare la 6ª convergente di $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}$.

28. Trovare la 6ª convergente della radice positiva di

$$2x^2-3x-6=0.$$

29. Trovare la 6ª convergente di ciascuna radice di

$$x^2-5x+3=0.$$

30. Trovare la 7ª convergente della più grande radice di

$$2x^2-7x+4=0.$$

31. Trovare la 5ª convergente di $\frac{1}{\sqrt{(45)}}$.

32. Trovare il valore di $1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$

33. Trovare il valore di $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots$

34. Trovare il valore di $1+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\cdots$

35. Trovare il valore di $\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots$

36. Trovare il valore di $2+\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\cdots$

X. FRAZIONI PARZIALI E COEFFICIENTI INDETERMINATI.

129. Una frazione algebrica si può alle volte scomporre nella somma di due o più frazioni più semplici; per esempio,

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}.$$

La teoria generale della scomposizione di una frazione in frazioni più semplici, chiamate *frazioni parziali,* è data nei trattati sulla Teoria delle Equazioni e sul Calcolo Integrale. Considereremo qui un caso semplice.

130. Sia $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$ una frazione, il denominatore della quale è composto di tre fattori diversi del primo grado rispetto ad x, ed il numeratore è di un grado non superiore al secondo rispetto ad x; questa frazione si può decomporre in tre frazioni semplici, che hanno per loro denominatori rispettivamente i fattori del denominatore della frazione proposta, e per loro numeratori alcune quantità indipendenti da x. Per dimostrare ciò, supponiamo

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma},$$

in cui A, B, C sono per ora indeterminate; dobbiamo allora mostrare che possono trovarsi tali valori costanti per A, B e C, da rendere l'equazione precedente un'*identità,* cioè, vera qualunque sia il valore di x. Si moltiplichi per $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$; allora tutto ciò che si richiede si è che la seguente sia un'*identità,*

$$ax^2+bx+c=A(x-\beta)(x-\gamma)+B(x-\alpha)(x-\gamma)+C(x-\alpha)(x-\beta);$$

ciò avrà luogo se ordiniamo i termini nel secondo membro secondo le potenze di x, ed eguagliamo il coefficiente di ciascuna potenza al coefficiente corrispondente nel primo membro; otterremo così tre equazioni semplici per determinare A, B e C.

131. Il metodo dell'Articolo precedente si può applicare ad ogni frazione, il denominatore della quale è il prodotto di fattori semplici *diversi* ed il numeratore di grado inferiore al denominatore

L'Articolo precedente però non è del tutto soddisfacente, poichè non mostriamo che le equazioni finali che si ottengono sono *indipendenti* e *di accordo tra loro*. Ma siccome dovremo solamente applicare il metodo ad esempii semplici, in cui i risultati si possono facilmente verificare, non c'intratterremo maggiormente sull'argomento, ma rimandiamo lo studente alla *Teoria dell' Equazioni* ed al *Calcolo Integrale*.

132. Supponiamo che si debba sviluppare $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ in una serie procedente secondo le potenze ascendenti di x; vi sono varii metodi che si possono adottare. Possiamo procedere con l'ordinaria divisione algebrica, scrivendo il divisore nell'ordine $2-3x+x^2$ ed il dividendo nell'ordine $-3+2x$. O pure possiamo sviluppare $\frac{1}{x^2-3x+2}$ scrivendolo nella forma $(x^2-3x+2)^{-1}$, e trovando i coefficienti delle potenze successive di x col teorema del polinomio; dobbiamo quindi moltiplicare il risultato per $2x-3$. È però più conveniente di decomporre la frazione in frazioni parziali e poi di sviluppare ciascuna di esse. Così

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x};$$

$$-\frac{1}{1-x}=-(1-x)^{-1}=-\left\{1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots\right\},$$

$$-\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}\ldots\right\}.$$

Quindi la serie richiesta per $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ ha per suo termine generale $-\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$.

133. Senza sviluppare attualmente un'espressione come la precedente possiamo mostrare che i coefficienti successivi saranno legati da una certa relazione; prima di dimostrare ciò sarà necessario di stabilire una proprietà generale delle serie.

134. Se la serie $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ è sempre eguale a zero qualunque sia il valore di x, ciascuno dei coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 ... deve essere separatamente eguale a zero. Infatti poichè la serie deve essere zero *qualunque sia il valore di* x, possiamo porre

$x=0$; così la serie si riduce ad a_0, che deve perciò esso stesso essere zero. Quindi togliendo questo termine abbiamo $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ sempre zero; si divida per x, allora $a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots$ è sempre zero. Quindi, come sopra, conchiudiamo che $a_1=0$. Procedendo in questo modo, il teorema è stabilito.

Se le serie $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

ed $$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

sono sempre eguali qualunque sia il valore di x, allora

$$a_0-A_0+(a_1-A_1)x+(a_2-A_2)x^2+\ldots$$

è sempre zero qualunque sia il valore di x; quindi conchiudiamo che

$$a_0-A_0=0,\ a_1-A_1=0,\ a_2-A_2=0,\ \ldots;$$

cioè, i coefficienti delle potenze simili di x nelle due serie sono eguali.

Il teorema qui dato è talvolta indicato come il *Principio dei coefficienti indeterminati*; noi assumemmo la sua verità negli Art. 72, 77, ed 84.

135. La dimostrazione dell'Articolo precedente è quella che ordinariamente si dà nelle opere elementari sull'Algebra; vi è però in essa una difficoltà che richiede esame.

Ci limitiamo al teorema che se la serie $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ è sempre eguale a zero, ciascun coefficiente deve essere eguale a zero; il teorema nell'ultima parte dell'Articolo segue da questo.

Quando diciamo che la serie è *sempre* eguale a zero intendiamo che essa è eguale a zero per tutti quei valori di x che rendono la serie *convergente*; poichè naturalmente una serie divergente non si può dire che svanisce.

Nella dimostrazione noi mostriamo che $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots$ è sempre zero; cioè xS_1 è sempre zero, in cui S_1 fa le veci di $a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots$ Quindi se x non è zero S_1 deve essere zero; ma se x è zero xS_1 svanisce qualunque valore finito abbia S_1: così in fatti non dobbiamo assumere che S_1 è zero quando x è zero, e così il risultato $a_1=0$ non è rigorosamente dimostrato. Questa è la difficoltà che dobbiamo esaminare.

Abbiamo $S_1 = a + xS_2$ in cui S_2 sta per $a_2 + a_3x + a_4x^2 + \ldots$; e benchè non siamo giustificati nel dire che S_1 è zero quando x è zero, nondimeno possiamo dire che S_1 è zero comunque piccolo sia x. Poichè la serie primitiva si suppone convergente S_2 è anche una serie convergente, e perciò essa non crescerà al di là di un certo valore fisso quando x si fa piccolo abbastanza; e quindi facendo x sufficientemente piccolo xS_2 si può rendere tanto piccola quanto ci piace: quindi a_1 deve essere zero, poichè se a_1 non fosse zero non potremmo avere S_1 zero comunque piccolo fosse x.

Così il risultato $a_1 = 0$ segue rigorosamente se S_2 è convergente quando x si fa tanto piccolo quanto ci piace. In simil modo il risultato $a_2 = 0$ segue rigorosamente se S_3 è convergente quando x si fa tanto piccolo quanto si piace, in cui S_3 sta per $a_3 + a_4x + a_5x^2 + \ldots$ E così di seguito.

Poichè la serie primitiva si suppone essere convergente le serie $S_2, S_3, \ldots$ sono convergenti, quando x si fa tanto piccolo quanto ci piace; e così il teorema dell'Articolo precedente è vero.

136. Supponiamo che la serie $u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots$ rappresenti lo sviluppo di $\dfrac{a+bx}{1-px-qx^2}$; allora

$$a + bx = (1 - px - qx^2)(u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots).$$

Se n è maggiore di 1, il coefficiente di x^n nel secondo membro è $u_n - pu_{n-1} - qu_{n-2}$; quindi poichè non vi è alcuna potenza di x superiore alla prima nel primo membro, dobbiamo avere per l'Art. 134, per ogni valore di n maggiore di 1,

$$u_n - pu_{n-1} - qu_{n-2} = 0.$$

E paragonando i primi ed i secondi termini nei due membri, abbiamo

$$u_0 = a, \quad u_1 - pu_0 = b;$$

le due ultime equazioni determinano u_0 ed u_1, ed allora l'equazione precedente determinerà $u_2, u_3, u_4, \ldots$ facendo successivamente $n = 2, 3, 4, \ldots$

ESEMPII DI FRAZIONI PARZIALI E DI COEFFICIENTI INDETERMINATI.

Sviluppare ciascuna delle sette seguenti espressioni secondo le potenze ascendenti di x, e dare il termine generale:

1. $\dfrac{1}{3-2x}$. 2. $\dfrac{5-10x}{2-x-3x^2}$. 3. $\dfrac{3x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

4. $\dfrac{x}{(1-x)(1-px)}$. 5. $\dfrac{1}{1-2x+x^2}$. 6. $\dfrac{5+6x}{(1-3x)^2}$. 7. $\dfrac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$.

Sviluppare ciascuna delle cinque seguenti espressioni secondo le potenze ascendenti di x sino al quinto termine, e scrivere la relazione che lega i coefficienti dei termini consecutivi:

8. $\dfrac{1}{1-x+x^2}$. 9. $\dfrac{1}{1-2x+3x^2}$. 10. $\dfrac{1-x^2}{2-2x-x^2}$.

11. $\dfrac{1}{a^2+ax+x^2}$. 12. $\dfrac{1}{1-px+px^2-x^3}$.

13. Sommare le serie seguenti di n termini separando ciascun termine in frazioni parziali:

$$\frac{x}{(1+x)(1+ax)}+\frac{ax}{(1+ax)(1+a^2x)}+\frac{a^2x}{(1+a^2x)(1+a^3x)}+\dots$$

14. Sommare in simil modo le serie seguenti di n termini:

$$\frac{x(1-ax)}{(1+x)(1+ax)(1+a^2x)}+\frac{ax(1-a^2x)}{(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)}+\dots$$

15. Determinare a, b, c, d, e, in modo che l'n^{mo} termine nello sviluppo di $\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}{(1-x)^5}$ sia n^4x^{n-1}.

16. Mostrare come decomporre $\dfrac{x^p}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots}$ in frazioni parziali, supponendo che n sia il numero dei fattori nel denominatore, e che p sia un intero minore di n.

Se p è minore di n, mostrare che

$$\frac{a^{p-1}}{(a-b)(a-c)\dots}+\frac{b^{p-1}}{(b-a)(b-c)\dots}+\frac{c^{p-1}}{(c-a)(c-b)\dots}+\dots=0.$$

XI. SERIE RICORRENTI.

137. Una serie si chiama una *serie ricorrente*, quando a partire da un certo termine in poi ciascun termine è eguale alla somma di un numero fisso dei termini precedenti moltiplicati rispettivamente per alcune *costanti*. Per *costanti* intendiamo qui quantità che restano invariate qualunque termine della serie si consideri.

138. Una progressione geometrica è un esempio semplice di una serie ricorrente; poichè nella serie $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots$ ciascun termine dopo del primo è r volte il termine precedente. Se u_{n-1} ed u_n dinotano rispettivamente l'$(n-1)^{\text{mo}}$ termine e l'n^{mo} termine, allora $u_n-ru_{n-1}=0$; la somma dei coefficienti di u_n e di u_{n-1} con i loro proprii segni, cioè, $1-r$, si chiama la *scala di relazione*.

Ancora, nella serie $2+4x+14x^2+46x^3+152x^4+\ldots$ la legge che lega i termini consecutivi è $u_n-3xu_{n-1}-x^2u_{n-2}=0$; questa legge vale per valori di n maggiori di 1, sicchè ogni termine dopo del secondo si può ottenere dai due termini immediatamente precedenti. La *scala di relazione* è $1-3x-x^2$.

139. *Trovare la somma di* n *termini di una serie ricorrente.*

Sia la serie $u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots$, e sia la scala di relazione $1-px-qx^2$, sicchè per ogni valore di n maggiore dell'unità $u_n-pu_{n-1}-qu_{n-2}=0$. Dinotiamo i primi n termini della serie con S, allora

$$S=u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots+u_{n-1}x^{n-1},$$

$$pxS=\quad u_0px+u_1px^2+u_2px^3+\ldots+u_{n-2}px^{n-1}+u_{n-1}px^n,$$

$$qx^2S=\quad u_0qx^2+u_1qx^3+\ldots+u_{n-3}qx^{n-1}+u_{n-2}qx^n+u_{n-1}qx^{n+1};$$

quindi

$$S-pxS-qx^2S=u_0+u_1x-u_0px-u_{n-1}px^n-u_{n-2}qx^n-u_{n-1}qx^{n+1},$$

poichè tutti gli altri termini nel secondo membro spariscono in virtù della relazione che ha luogo fra tre termini consecutivi qualunque della data serie; quindi

$$S=\frac{u_0+x(u_1-pu_0)-x^n\{pu_{n-1}+qu_{n-2}+qxu_{n-1}\}}{1-px-qx^2}.$$

Se il termine $x^n\{pu_{n-1}+qu_{n-2}+qxu_{n-1}\}$ decresce senza limite al crescere di n senza limite, possiamo dire che la somma di un numero infinito di termini della serie ricorrente è

$$\frac{u_0+x(u_1-pu_0)}{1-px-qx^2}.$$

È chiaro, che se questa espressione si sviluppa in una serie secondo le potenze di x, riavremo la data serie ricorrente. (Si vegga l'Art. 136).

140. Se la serie ricorrente è $u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$, e la scala di relazione $1-p-q$, dobbiamo solamente fare $x=1$ nei risultati dell'Articolo precedente, per trovare la somma di n termini, o di un numero infinito di termini.

141. Quando $1-px-qx^2$ si può decomporre in due fattori *reali* del primo grado in x, l'espressione $\dfrac{u_0+x(u_1-pu_0)}{1-px-qx^2}$ si può decomporre in frazioni parziali, ciascuna avendo per suo denominatore un'espressione che contiene solamente la prima potenza di x: si vegga l'Art. 130. In questo caso, siccome ciascuna frazione parziale si può sviluppare in una progressione geometrica, possiamo ottenere un'espressione per il termine generale della serie ricorrente. Abbiamo così ancora un altro metodo per ottenere la somma di n termini, poichè la somma di n termini di ciascuna delle progressioni geometriche è conosciuta.

ESEMPII DI SERIE RICORRENTI.

Trovare le espressioni dalle quali le tre serie seguenti si possono derivare; risolvere le espressioni in frazioni parziali, e dare il termine generale di ciascuna serie:

1. $4+9x+24x^2+54x^3+\ldots$
2. $1+11x+89x^2+659x^3+\ldots$
3. $1+3x+11x^2+43x^3+\ldots$
4. Trovare come deve essere piccolo x affinchè la serie nell'esempio 3 sia convergente.
5. Trovare il termine generale della serie $3+11+32+84+\ldots$

6. Sommare la serie seguente di n termini

$$1+5+17+53+161+485+\ldots$$

7. Trovare il termine generale della serie $10+14+10+6+\ldots$ e la somma all'infinito.

8. Trovare l'espressione da cui la serie seguente si può derivare, ed ottenere il termine generale

$$2-x+2x^2-5x^3+10x^4-17x^5+\ldots$$

XII. SOMMA DELLE SERIE.

142. Daremo qui alcuni esempi diversi di somma delle serie.

143. Trovare la somma della serie $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

Supponiamo

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\ldots,$$

in cui A, B, C, D, $E\ldots$ sono costanti per ora indeterminate. Si muti n in $n+1$; così

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=A+B(n+1)$$
$$+C(n+1)^2+D(n+1)^3+E(n+1)^4+\ldots$$

Con la sottrazione,

$$n^2+2n+1=B+C(2n+1)+D(3n^2+3n+1)$$
$$+E(4n^3+6n^2+4n+1)+\ldots$$

Si eguaglino i coefficienti delle rispettive potenze di n; così $E=0$, ed ogni altro termine dopo di E sarà $=0$;

$$3D=1;\quad 3D+2C=2;\quad D+C+B=1;$$

quindi $$D=\frac{1}{3},\qquad C=\frac{1}{2},\qquad B=\frac{1}{6}.$$

Così $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=A+\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}.$$

Per determinare A osserviamo che siccome questa equazione deve valere per tutt'i valori interi positivi di n, possiamo porre $n=1$; così $A=0$. Quindi la somma richiesta è

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Lo stesso metodo si può applicare per trovare la somma dei cubi dei primi n numeri naturali, o pure la somma delle loro quarte potenze, e così di seguito. Si vegga anche l'Art. 154.

144. Supponiamo che l'n^{mo} termine di una serie sia

$$\{an+b\}\{a(n+1)+b\}\{a(n+2)+b\}\ldots\{a(n+m-1)+b\},$$

in cui m è un intero positivo fisso, ed a e b sono costanti conosciute; allora la somma dei primi n termini di questa serie sarà

$$\frac{\{an+b\}\{a(n+1)+b\}\ldots\{a(n+m-1)+b\}\{a(n+m)+b\}}{(m+1)a}+C,$$

in cui C è una costante.

Dinoti u_n l'n^{mo} termine della serie proposta, S_n la somma di n termini; allora dobbiamo dimostrare che

$$S_n=\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}+C.$$

Supponiamo che la formola sia vera per un valore assegnato di n; si aggiunga l'$(n+1)^{mo}$ termine della serie ai due membri; allora

$$S_n+u_{n+1}=\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}+u_{n+1}+C;$$

cioè, $$S_{n+1}=\frac{a(n+m+1)+b}{(m+1)a}u_{n+1}+C=\frac{a(n+1)+b}{(m+1)a}u_{n+2}+C;$$

così la stessa formola valerà per la somma di $n+1$ termini, che si suppose valere per la somma di n termini. Quindi se la formola è vera per un certo numero di termini essa è vera pel numero prossimamente maggiore; e così di seguito. Ma la formola *sarà* vera quando $n=1$ se prendiamo C in modo che

$$S_1=\frac{a+b}{(m+1)a}u_2+C,\quad \text{cioè,}\quad u_1=\frac{a+b}{(m+1)a}u_2+C;$$

così C è determinata e la verità del teorema è stabilita.

Poichè $$u_2=\frac{a(m+1)+b}{a+b}u_1,\ \text{abbiamo}$$

$$C=u_1-\frac{a(m+1)+b}{a(m+1)}u_1=-\frac{bu_1}{a(m+1)}.$$

Quindi $$S_n = \frac{an+b}{(m+1)\,a}\,u_{n+1} - \frac{bu_1}{(m+1)\,a}.$$

Così la somma dei primi n termini della serie proposta si ottiene sottraendo la quantità costante $\frac{bu_1}{(m+1)\,a}$ da una certa espressione che dipende da n. Questa espressione è $\frac{an+b}{(m+1)\,a}u_{n+1}$; possiamo anche porre questa espressione nella forma equivalente $\frac{a(n+m)+b}{(m+1)a}\,u_n$, e per aiutare la memoria possiamo osservare che essa si può formare *introducendo un fattore addizionale in fine di* u_n, *e dividendo pel prodotto del numero dei fattori così accresciuto e del coefficiente di* n.

145. Possiamo ottenere il risultato dell'Articolo precedente in un altro modo. Come sopra, dinoti u_n

$$\{an+b\}\,\{a(n+1)+b\}\,\{a(n+2)+b\}\ldots\{a(n+m-1)+b\},$$

e dinoti S_n la somma dei primi n termini della serie di cui u_n è l'n^{mo} termine.

Abbiamo

$$u_{n+1} = \frac{a\,(n+m)+b}{an+b}\,u_n = u_n + \frac{am\,u_n}{an+b};$$

sia $an+b=p$; così

$$p\,(u_{n+1}-u_n) = am\,u_n$$

si muti n in $n-1$, così

$$\{\,p-a\,\}\,(u_n-u_{n-1}) = am\,u_{n-1};$$

similmente,

$$\{\,p-2a\,\}\,(u_{n-1}-u_{n-2}) = am\,u_{n-2},$$

$$\{\,p-3a\,\}\,(u_{n-2}-u_{n-3}) = am\,u_{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\{\,p-(n-1)\,a\,\}\,(u_2-u_1) = am\,u_1.$$

Quindi, con l'addizione,

$$p(u_{n+1}-u_1)-a\{u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_2-(n-1)u_1\}=amS_n;$$

quindi $$p\,(u_{n+1}-u_1)+nau_1 = amS_n + aS_n;$$

quindi $$S_n = \frac{an+b}{(m+1)\,a}\,u_{n+1} - \frac{bu_1}{(m+1)\,a}.$$

146. Supponiamo che l'n^{mo} termine di una serie sia $\frac{1}{u_n}$, in cui u_n è lo stesso che nell'Articolo precedente; allora la somma dei primi n termini di questa serie sarà $-\frac{an+b}{(m-1)au_n}+C$.

Supponiamo, come sopra, $S_n=-\frac{an+b}{(m-1)au_n}+C$,

si aggiunga $\frac{1}{u_{n+1}}$ ai due membri, allora

$$S_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{an+b}{(m-1)au_n}+C$$
$$=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{a(m+n)+b}{(m-1)au_{n+1}}+C=-\frac{a(n+1)+b}{(m-1)au_{n+1}}+C.$$

Quindi, come sopra, la verità del teorema è stabilita, purchè C sia tale che $\frac{1}{u_1}=-\frac{a+b}{(m-1)au_1}+C$. Così $C=\frac{am+b}{(m-1)au_1}$, ed

$$S_n=\frac{am+b}{(m-1)au_1}-\frac{an+b}{(m-1)au_n}.$$

Questo risultato si può anche ottenere nel modo dell'Art. 145.

147. Si può avere una serie la quale non è direttamente inclusa nella forma generale dell'Articolo precedente, ma si può decomporre in due o più che sono tali. Per esempio, si cerchi la somma di n termini della serie

$$\frac{3}{1\cdot2\cdot4\cdot5}+\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\frac{5}{3\cdot4\cdot6\cdot7}+\dots$$

Qui l'n^{mo} termine

$$=\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)}=\frac{(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Ora $(n+2)^2=n(n+1)+3n+4$; così l'n^{mo} termine

$$=\frac{n(n+1)+3n+4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$+\frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Se ciascun termine della serie proposta si decompone in questo modo otteniamo tre serie, ciascuna delle quali può essere sommata col metodo dell'Articolo precedente; così si può sommare la serie proposta. Nel caso attuale la somma richiesta è

$$\frac{1}{24}-\frac{1}{2(n+3)(n+4)}+\frac{1}{24}-\frac{3}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$+\frac{1}{24}-\frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

148. *Numeri Poligonali.* L'espressione $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$ è la somma di n termini di una progressione aritmetica, di cui il primo termine è l'unità e la differenza comune è b. Se facciamo $b=0,1,2,3,\ldots$ otteniamo espressioni che si chiamano i termini generali del 2^0, 3^0, 4^0, ... ordine dei *numeri poligonali* rispettivamente. Il *primo* ordine è quello in cui ciascun termine è l'unità. Così abbiamo

1^0 ordine, n^{mo} termine 1; serie 1, 1, 1, ...
2^0 ordine, n^{mo} termine n; serie 1, 2, 3, 4, 5, ...
3^0 ordine, n^{mo} termine $\frac{1}{2}n(n+1)$; serie 1, 3, 6, 10, ...
4^0 ordine, n^{mo} termine n^2; serie 1, 4, 9, 16, ...
5^0 ordine, n^{mo} termine $\frac{1}{2}n(3n-1)$; serie 1, 5, 12, 22, ...

e così di seguito.

I numeri nella 2^a, 3^a, 4^a, 5^a,... serie sono stati chiamati rispettivamente *lineari, triangolari, quadrati, pentagonali*, ...

149. L'n^{mo} termine dell'r^{mo} ordine dei numeri poligonali è

$$n+\frac{1}{2}(n-1)(r-2);$$

la somma di n termini di questa serie è, per l'Art. 144,

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{r-2}{2}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

o

$$\frac{1}{6}n(n+1)\left\{(r-2)(n-1)+3\right\},$$

Quindi per i numeri triangolari $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, per i numeri quadrati $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, e così di seguito.

150. *Trovare il numero delle palle da cannone in un mucchio piramidale.*

(1) Supponiamo la base della piramide un triangolo equilatero, e vi siano n palle in un lato della base; allora il numero delle palle nell'infimo strato è $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1$, cioè, il numero *triangolare* $\frac{1}{2}n(n+1)$; il numero nello strato seguente si troverà cambiando n in $n-1$; e così di seguito. Quindi, per l'Art. 149, il numero di tutte le palle è $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

(2) Supponiamo la base della piramide un quadrato; vi siano n palle in un lato della base; allora il numero delle palle nell'infimo strato è n^2, nello strato seguente $(n-1)^2$, e così di seguito. Il numero di tutte le palle è $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Similmente possiamo procedere per ogni altra forma di piramide.

Possiamo vedere da questa proposizione una ragione dei termini *numero triangolare, numero quadrato, ...*

Se il mucchio di palle da cannone è *incompleto,* dobbiamo trovare prima il numero nel mucchio supposto completo, indi il numero nel mucchio minore che è deficiente, e la differenza sarà il numero nel mucchio incompleto.

151. Una questione analoga a quella nell'Art. 150 si ha quando dobbiamo sommare le palle in un mucchio di cui la base è *rettangolare,* ma non quadrata. In questo caso il mucchio terminerà in una semplice fila alla cima; supponiamo p il numero delle palle in questa fila; allora l'n^{mo} strato a contare dalla cima ha $p+n-1$ palle nella sua lunghezza ed n nella sua larghezza, e quindi contiene $n(p+n-1)$ palle. Quindi il numero delle palle in n strati è

$$\frac{n(n+1)}{2}p+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{6}n(n+1)(3p+2n-2).$$

Se m è il numero nella lunghezza dell'infima fila, $m=p+n-1$, e la somma si può scrivere $\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)$; come n è il numero nella larghezza dell'infima fila, la somma è espressa così in termini dei numeri nella lunghezza e nella larghezza della base.

152. *Numeri Figurati.* Le serie seguenti formano quelli che si chiamano i differenti ordini dei *numeri figurati*:

1° ordine, 1, 1, 1, 1, 1, ...

2° ordine, 1, 2, 3, 4, 5, ...

3° ordine, 1, 3, 6, 10, 15, ...

.....

la legge generale si è, che l'n^{mo} termine di ogni ordine è la somma di n termini dell'ordine precedente. Così l'n^{mo} termine del secondo ordine è n, del terzo ordine è $\frac{n(n+1)}{2}$, del quarto ordine è $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, e generalmente l'$n^{mo}$ termine dell'r^{mo} ordine è $\frac{n(n+1)\ldots(n+r-2)}{\underline{|r-1}}$. Questo possiamo dimostrarlo con l'induzione. Infatti, assumendo questa espressione per l'n^{mo} termine dell'r^{mo} ordine, possiamo trovare la somma dei primi n termini dell'r^{mo} ordine con la formola dell'Art. 144. Dobbiamo solamente porre 1 per a, 0 per b, ed $r-1$ per m, Quindi otteniamo per la somma

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}};$$

e quindi, per la definizione, questa è l'espressione dell'n^{mo} termine dell'$(r+1)^{mo}$ ordine.

153. Abbiamo già mostrato che il Teorema del Binomio si può alle volte applicare alla ricerca della somma di una serie (si vegga l'Art. 72); diamo un altro esempio. Trovare la somma della serie

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + \ldots + P_{n-1}Q_{n-1},$$

in cui $\quad Q_r = r(r+1)(r+2)\ldots(r+q-1),$

e $\quad P_r = (n-r)(n-r+1)(n-r+2)\ldots(n-r+p-1).$

Possiamo vedere che

$Q_r = \underline{|q} \times$ per il coefficiente di x^{r-1} nella serie per $(1-x)^{-(q+1)}$,

e $P_r = \underline{|p} \times$ per il coefficiente di x^{n-r-1} nella serie per $(1-x)^{-(p+1)}$.

Quindi abbiamo sino ai termini non superiori ad x^{n-2},

$$(1-x)^{-(q+1)}=\frac{1}{\lfloor q}\left\{Q_1+Q_2x+Q_3x^2+Q_4x^3+\ldots\right\},$$

$$(1-x)^{-(p+1)}=\frac{1}{\lfloor p}\left\{P_{n-1}+P_{n-2}x+P_{n-3}x^2+P_{n-4}x^3+\ldots\right\}.$$

Quindi la serie che dobbiamo sommare è eguale al prodotto di $\lfloor p \lfloor q$ pel coefficiente di x^{n-2} nello sviluppo del prodotto di $(1-x)^{-(q+1)}$ per $(1-x)^{-(p+1)}$; cioè, la serie è eguale al prodotto di $\lfloor p \lfloor q$ pel coefficiente di x^{n-2} nello sviluppo di $(1-x)^{-(p+q+2)}$. Quindi la serie è eguale a

$$\frac{\lfloor p \lfloor q}{\lfloor p+q+1}\times\frac{\lfloor n-1+p+q}{\lfloor n-2}.$$

154. Col metodo dell'Art. 143 possiamo investigare un'espressione per la somma $1^r+2^r+3^r+\ldots n^r$, in cui r è un intero positivo qualunque. Dinotiamo questa somma con S; allora si può mostrare, (esaminando i casi speciali di $r=2$ ed $r=3$) che S si può porre nella forma di una serie di potenze discendenti di n, incominciando da n^{r+1}, e non si deve far altro che determinare correttamente i coefficienti delle varie potenze di n. Supponiamo che

$$S=Cn^{r+1}+A_0n^r+\frac{r}{2}A_1n^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2\cdot 3}A_2n^{r-2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3\cdot 4}A_3n^{r-3}+\ldots$$

È conveniente di rappresentare i coefficienti nel modo qui esibito; così in vece di una sola lettera per il coefficiente di n^{r-1} adoperiamo il simbolo $\frac{r}{2}A_1$, e così di seguito. Procederemo ora a determinare i valori di A_0, A_1, A_2, ... ; e si troverà che queste quantità sono indipendenti sì da r che da n.

Nella supposta identità si muti n in $n+1$; così

$$S+(n+1)^r=C(n+1)^{r+1}+A_0(n+1)^r+\frac{r}{2}A_0(n+1)^{r-1}$$
$$+\frac{r(r-1)}{2\cdot 3}A_2(n+1)^{r-2}+\ldots$$

Quindi, con la sottrazione,

$$(n+1)^r = C\left\{(n+1)^{r+1} - n^{r+1}\right\} + A_0\left\{(n+1)^r - n^r\right\}$$
$$+ \frac{r}{2} A_1 \left\{(n+1)^{r-1} - n^{r-1}\right\} + \frac{r(r-1)}{2\cdot 3} A_2 \left\{(n+1)^{r-2} - n^{r-2}\right\} + \ldots$$

Si sviluppino tutte le espressioni $(n+1)^{r+1}$, $(n+1)^r$, $(n+1)^{r-1}$, ... col Teorema del Binomio; indi si eguaglino i coefficienti delle diverse potenze di n. Così, eguagliando i coefficienti di n^r, abbiamo $1 = C(r+1)$, indi, eguagliando i coefficienti di n^{r-1}, abbiamo $r = \frac{C(r+1)^r}{2} + A_0 r$; così $C = \frac{1}{r+1}$, $A_0 = \frac{1}{2}$.

Si eguaglino i coefficienti di n^{r-p}, ponendo per C ed A_0 i loro valori; così otterremo generalmente

$$\frac{1}{\lfloor p} = \frac{1}{\lfloor p+1} + \frac{1}{2\lfloor p} + \frac{A_1}{\lfloor 2 \lfloor p-1} + \frac{A_2}{\lfloor 2 \lfloor p-2} + \frac{A_3}{\lfloor 4 \lfloor p-3}$$
$$+ \frac{A_4}{\lfloor 5 \lfloor p-4} + \ldots\ldots\ldots,$$

in cui le serie nel secondo membro si estendono sino al termine che contiene A_{p-1} inclusivamente; e ponendo per p successivamente i valori 2, 3, 4, ... determiniamo successivamente A_1, A_2, A_3, ... ; e vediamo che queste quantità sono indipendenti da n ed r.

Otterremo $A_1 = \frac{1}{6}$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\frac{1}{30}$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{1}{42}$, ...

È notevole che tutt'i coefficienti con indici *pari* A_2, A_4, A_6, ... sono nulli; questo si può dimostrare come segue:

Nella supposta identità primitiva si muti n in $n-1$, e si sottragga; così

$$n^r = C\left\{n^{r+1} - (n-1)^{r+1}\right\} + A_0\left\{n^r - (n-1)^r\right\} + \frac{r}{2} A_1 \left\{n^{r-1} - (n-1)^{r-1}\right\}$$
$$+ \frac{r(r-1)}{2\cdot 3} A_2 \left\{n^{r-2} - (n-1)^{r-2}\right\} + \ldots$$

Si eguaglino i coefficienti di n^{r-p}, ponendo per C ed A_0 i loro valori; così

$$0=\frac{1}{\underline{|p+1}}-\frac{1}{2\underline{|p}}+\frac{A_1}{\underline{|2}\,\underline{|p-1}}-\frac{A_2}{\underline{|3}\,\underline{|p-2}}+\frac{A_3}{\underline{|4}\,\underline{|p-3}}-\frac{A_4}{\underline{|5}\,\underline{|p-4}}+\ldots$$

Il risultato ottenuto prima si può esprimere così,

$$0=\frac{1}{\underline{|p+1}}-\frac{1}{2\underline{|p}}+\frac{A_1}{\underline{|2}\,\underline{|p-1}}+\frac{A_2}{\underline{|3}\,\underline{|p-2}}+\frac{A_3}{\underline{|4}\,\underline{|p-3}}+\frac{A_4}{\underline{|5}\,\underline{|p-4}}+\ldots$$

Quindi, sottraendo e ponendo per p successivamente i valori $3, 5, 7, \ldots$ mostriamo successivamente che zero è il valore di A_2, A_4, $A_6, \ldots$

ESEMPII DI SOMMA DELLE SERIE.

1. Mostrare che la somma dei primi n termini della serie di cui l'n^{mo} termine è $n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$ si ottiene ponendo un fattore di più in fine di questa espressione, e dividendo pel numero dei fattori così aumentato.

2. Dare la formola per sommare la serie di cui l'n^{mo} termine è il *reciproco* di $n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$.

Sommare le cinque serie seguenti sino ad n termini, ed anche sino all'infinito:

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$

4. $\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1}{8\cdot 10\cdot 12}+\ldots$

5. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots$

6. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$

7. $\frac{4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{10}{4\cdot5\cdot6}+\frac{13}{5\cdot6\cdot7}+\dots$

8. Sommare sino ad n termini $1+3+6+10+\dots$

9. Se n è pari, mostrare che

$$n+2(n-1)+3(n-2)+\dots+\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{12}.$$

10. Sommare sino ad n termini $a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\dots$

11. Sommare sino ad n termini $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\dots$

12. Se i termini dello sviluppo di $(a+b)^n$ si moltiplicano rispettivamente per nr, $(n-1)r^2$, $(n-2)r^3$, ... , n essendo un intero positivo, trovare la somma della serie risultante.

13. Sviluppare $\frac{x}{(1-x)^2-cx}$ in una serie secondo le potenze ascendenti di x, e mostrare che il coefficiente di x^n è

$$n\left\{1+\frac{n^2-1}{\lfloor 3}c+\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{\lfloor 5}c^2+\frac{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{\lfloor 7}c^3+\dots\right\}.$$

14. Trovare il coefficiente di $x^m y^n$ nello sviluppo di

$$\frac{x(1-ax)}{(1-x)(1-ax-by)}.$$

15. Mostrare che $1+\frac{2n}{3}+\frac{2n(2n+2)}{3\cdot6}+\frac{2n(2n+2)(2n+4)}{3\cdot6\cdot9}+\dots$

$$=2^n\left\{1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3\cdot6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3\cdot6\cdot9}+\dots\right\}.$$

16. Se p_r dinota il coefficiente di x^r nello sviluppo di $(1+x)^n$, in cui n è un intero positivo, mostrare che

$$\frac{p_1}{p_0}+\frac{2p_2}{p_1}+\frac{3p_3}{p_2}+\dots+\frac{np_n}{p_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{1\cdot2};$$

$$(p_0+p_1)(p_1+p_2)\dots(p_{n-1}+p_n)=\frac{p_1p_2\dots p_n(n+1)^n}{\lfloor n};$$

$$p_1-\frac{p_2}{2}+\frac{p_3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}p_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}.$$

17. Mostrare sviluppando l'identità $\left(\frac{1}{1-x}-1\right)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n}$ che

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{\underline{|p}} - \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)\ldots(n+p-2)}{\underline{|p}}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n-2)\ldots(n+p-3)}{\underline{|p}}-\ldots$$

è zero quando n e p sono interi positivi ed n è maggiore di p.

18. Se delle palle sono ammucchiate sopra una base triangolare, ciascun lato della quale contiene 9 palle, trovare il numero totale contenuto nel mucchio.

19. Trovare il numero delle palle contenute in 5 strati di un mucchio triangolare incompleto, il numero in un lato della base essendo 15.

20. Il numero delle palle contenute in un mucchio troncato di cui la cima e la base sono rettangolari, è

$$\frac{p}{6}\left\{2p^2+3(m+n-1)p+6mn-3m-3n+1\right\},$$

in cui m ed n rappresentano il numero di palle nei due lati della cima, e p il numero di palle in ciascuno degli spigoli obbliqui.

21. Mostrare che $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

22. Mostrare che

$$(1+xv)(1+x^2v)(1+x^3v)\ldots(1+x^pv)$$
$$=1+\frac{1-x^p}{1-x}xv+\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)}x^3v^2$$
$$+\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})(1-x^{p-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}x^6v^3+\ldots$$

23. Nello sviluppo di $(1+x)(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots$ il numero dei fattori essendo infinito e c minore dell'unità, il coefficiente di x^r è

$$\frac{c^{\frac{1}{2}r(r-1)}}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)\ldots(1-c^r)}$$

24. Se A_r è il coefficiente di x^r nello sviluppo di

$$(1+x)^2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^3}\right)^2 \ldots \textit{all'infinito},$$

dimostrare che $A_r = \frac{2^2}{2^r-1}(A_{r-1}+A_{r-2})$, e che $A_4 = \frac{1072}{315}$.

25. Se n è un multiplo qualunque di 3, mostrare che

$$1-(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\lfloor 3}+\ldots=(-1)^n.$$

XIII. INEGUAGLIANZE.

155. Spesso è utile di conoscere quale sia la più grande di due date espressioni; le proposizioni relative a tali questioni sono ordinariamente riunite sotto il titolo *Ineguaglianze*.

Diciamo che a è *maggiore* di b quando $a-b$ è una quantità *positiva*.

156. *Un'ineguaglianza reggerà ancora dopo che una stessa quantità si aggiunge a ciascun membro o si toglie da ciascun membro.*

Infatti si supponga $a>b$, quindi $a-b$ è positiva, quindi $a\pm c-(b\pm c)$ è positiva, quindi $a\pm c>b\pm c$.

Si deduce da ciò che un termine si può togliere da uno dei membri di un'eguaglianza e porlo nell'altro *col suo segno mutato*.

157. *Se si cambiano i segni di tutt'i termini di un'ineguaglianza il segno d'ineguaglianza deve essere rivoltato.*

Infatti cambiare tutt'i segni equivale a passare ciascun termine del primo membro nel secondo, e ciascun termine del secondo membro nel primo.

158. *Un'ineguaglianza reggerà ancora dopo che ciascun membro si moltiplica o si divide per la stessa quantità positiva.*

Infatti si supponga $a>b$, quindi $a-b$ è positiva, quindi se m è positiva $m(a-b)$ è positiva, quindi $ma>mb$; e similmente $\frac{1}{m}(a-b)$ è positiva, ed $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

Similmente possiamo mostrare che se ciascun membro di un'ineguaglianza si moltiplica o si divide per la stessa quantità *negativa*, il segno d'ineguaglianza deve essere rivoltato.

159. Se $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$, ... allora

$$a + a' + a'' + \ldots > b + b' + b'' + \ldots$$

Infatti per supposizione, $a - b$, $a' - b'$, $a'' - b''$, ... sono tutte positive; quindi $a - b + a' - b' + a'' - b'' + \ldots$ è positiva; quindi

$$a + a' + a'' + \ldots > b + b' + b'' + \ldots$$

160. Se $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$, ... e tutte le quantità sono positive, allora è chiaro che $aa'a'' \ldots > bb'b'' \ldots$

161. Se $a > b$, ed a e b sono positive, allora $a^n > b^n$, in cui n è una quantità *positiva* qualunque.

Questo segue dall'Articolo precedente se n è un *intero*. Se n è frazionario supponiamolo $= \frac{p}{q}$; sia $a^p = h$ e $b^p = k$; allora h è $> k$, e dobbiamo dimostrare che $h^{\frac{1}{q}} > k^{\frac{1}{q}}$; questo si può dimostrare indirettamente; poichè se $h^{\frac{1}{q}} = k^{\frac{1}{q}}$, allora $h = k$; e se $h^{\frac{1}{q}} < k^{\frac{1}{q}}$, allora $h < k$; tutti e due questi risultati sono falsi; quindi dobbiamo avere $h^{\frac{1}{q}} > k^{\frac{1}{q}}$.

Se n è una quantità *negativa*, sia $n = -m$, sicchè m è positiva; allora $\frac{1}{a^m} < \frac{1}{b^m}$; cioè, $a^n < b^n$.

162. Siano le frazioni $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$ di cui i denominatori sono tutti dello stesso segno, allora la frazione

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}$$

giace in grandezza tra la più piccola e la più grande delle frazioni

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}.$$

Infatti supponiamo che $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$ siano in ordine *crescente* di grandezza, e supponiamo tutt'i denominatori *positivi*; allora

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1}, \text{ quindi } a_1 = b_1 \times \frac{a_1}{b_1};$$

$$\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1}, \text{ quindi } a_2 > b_2 \times \frac{a_1}{b_1};$$

$$\frac{a_3}{b_3} > \frac{a_1}{b_1}, \text{ quindi } a_3 > b_3 \times \frac{a_1}{b_1};$$

e così di seguito;

quindi, con l'addizione,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) \frac{a_1}{b_1};$$

onde
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} > \frac{a_1}{b_1}.$$

Similmente possiamo dimostrare che

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

Nello stesso modo si può stabilire il teorema quando tutt'i denominatori si suppongono *negativi*.

Se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$, allora ciascuna di queste frazioni è *eguale* alla frazione di cui il numeratore è la somma dei numeratori ed il denominatore è la somma dei denominatori.

163. Poichè $(x-y)^2$ o $x^2 - 2xy + y^2$ è una quantità positiva o zero, secondo che x ed y sono disuguali o eguali, abbiamo

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) > xy,$$

l'ineguaglianza diventando un'eguaglianza quando $x = y$. Quindi

$$\frac{1}{2}(a + b) > \sqrt{(ab)};$$

cioè, la media aritmetica di due quantità è maggiore della media geometrica, l'ineguaglianza diventando un'eguaglianza quando le due quantità sono eguali.

164. Siano n quantità positive, $a, b, c, \ldots k$; allora

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{n}\right)^n > abc\ldots k,$$

a meno che le n quantità non siano tutte eguali, ed allora l'ineguaglianza diviene un'eguaglianza.

Infatti $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2;$

quindi $$abcd < \left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\right)^2;$$

ed $$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2} < \left\{\frac{\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)}{2}\right\}^2;$$

quindi $$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$$

Procedendo in questo modo possiamo mostrare che se p è una qualunque potenza intera positiva di 2,

$$abcd\ldots(p \text{ fattori}) < \left(\frac{a+b+c+d+\ldots}{p}\right)^p.$$

Ora sia $p = n + r$, e sia $\frac{a+b+c+d+\ldots(n \text{ termini})}{n} = t$, e supponiamo che ciascuna delle rimanenti r quantità dalle p quantità sia eguale a t; abbiamo allora

$$abcd\ldots(n \text{ fattori}) \times t^r < \left(\frac{nt+rt}{n+r}\right)^{n+r}; \text{ cioè, } < t^{n+r};$$

quindi $abcd\ldots(n \text{ fattori}) < t^n$; cioè, $< \left(\frac{a+b+c+d+\ldots}{n}\right)^n.$

Così il teorema è dimostrato qualunque sia il numero delle quantità $a, b, c, d \ldots$ L'ineguaglianza diviene un'eguaglianza quando tutte le n quantità sono eguali.

Possiamo anche scrivere il teorema così,

$$\frac{a+b+c+d+\ldots}{n} > (abcd\ldots)^{\frac{1}{n}};$$

estendendo il significato dei termini *media aritmetica* e *media geo*

metrica, possiamo enunciare il teorema così: *la media aritmetica di un numero qualunque di quantità positive è maggiore della media geometrica.*

165. La dimostrazione seguente del teorema dato nell'Articolo precedente si troverà un esercizio istruttivo.

Si dinoti $(abcd \ldots k)^{\frac{1}{n}}$ con P, ed $\dfrac{a+b+c+d+\ldots+k}{n}$ con Q.

Supponiamo a e b rispettivamente la più grande e la più piccola delle n quantità $a, b, c, d, \ldots k$; sia $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, e sia $P_1 = (a_1 b_1 cd \ldots k)^{\frac{1}{n}}$; allora poichè $a_1 b_1 > ab$, abbiamo $P_1 > P$. In seguito se i fattori in P_1 non sono tutti eguali, si tolgano il più grande ed il più piccolo tra essi, e si pongano in loro vece due nuovi fattori, ciascuno eguale alla semisomma di quelli che si sono tolti; dinoti P_2 la nuova media geometrica; allora $P_2 > P_1$. Se procediamo in questo modo, otteniamo una serie $P, P_1, P_2, P_3, \ldots P_r$, ciascun termine della quale è maggiore del termine precedente; e prendendo r abbastanza grande, possiamo avere i fattori che si trovano in P_r tanto prossimamente eguali quanto ci piace; così quando r è abbastanza grande, possiamo considerare $P_r = Q$; quindi P è minore di Q.

166. Paragoneremo ora le quantità

$$\frac{a^m + b^m}{2} \quad \text{ed} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

Supponiamo a e b positivi, ed a non minore di b.

$$a^m + b^m = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)^m + \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)^m$$

$$= 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^m + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{\lfloor 4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + \ldots\right\}.$$

Poichè $\dfrac{a-b}{2}$ è minore di $\dfrac{a+b}{2}$, la serie è *convergente* (Art. 99), sicchè abbiamo un risultato che è aritmeticamente intelligibile e

vero. Quindi se m è *negativo* o pure un *intero positivo* qualunque, ne segue che $\frac{a^m+b^m}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m$. Se m è *positivo e minore dell'unità*, $\frac{a^m+b^m}{2} < \left(\frac{a+b}{2}\right)^m$. Rimane a considerare il caso in cui m è *positivo e maggiore dell' unità, ma non un intero*. Supponiamo $m=\frac{p}{q}$, in cui p è $> q$, e siano $\alpha = a^{\frac{1}{q}}$, $\beta = b^{\frac{1}{q}}$, $A=\alpha^p$, $B=\beta^p$. Allora $\frac{a^{\frac{p}{q}}+b^{\frac{p}{q}}}{2}$ è $>$ o $< \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{p}{q}}$, secondo che $\frac{\alpha^p+\beta^p}{2}$ è $>$ o $< \left(\frac{\alpha^q+\beta^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}}$; cioè, secondo che $\left(\frac{\alpha^p+\beta^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}}$ è $>$ o $< \frac{\alpha^q+\beta^q}{2}$; cioè, secondo che $\left(\frac{A+B}{2}\right)^{\frac{q}{p}}$ è $>$ o $< \frac{A^{\frac{q}{p}}+B^{\frac{q}{p}}}{2}$. Conosciamo per quello che è stato già dimostrato, che l'espressione nel primo membro è la più grande, poichè $\frac{q}{p}$ è positivo è minore dell'unità; quindi $\frac{a^m+b^m}{2}$ è $> \left(\frac{a+b}{2}\right)^m$ quando m è positivo e maggiore dell' unità.

167. Siano n quantità positive $a, b, c, \ldots k$; allora

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\ldots+k^m}{n} > \left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{n}\right)^m$$

quando m è negativo, o pure positivo e maggiore dell'unità; ma ha luogo il contrario quando m è positivo e minore dell' unità. L' ineguaglianza diviene un'eguaglianza quando tutte le n quantità sono eguali.

Questo si può dimostrare con un metodo simile a quello adoperato nell'Art. 164. Supporremo m negativo, o pure positivo e maggiore dell' unità. Allora $a^m+b^m > 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$, $c^m+d^m > 2\left(\frac{c+d}{2}\right)^m$;

quindi $$a^m + b^m + c^m + d^m > 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^m + \left(\frac{c+d}{2}\right)^m\right\}$$

$$> 2 \cdot 2\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^m;$$

quindi $$\frac{a^m + b^m + c^m + d^m}{4} > \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^m.$$

Procedendo in questo modo possiamo stabilire il teorema nel caso in cui il numero delle quantità è p, se p è una qualunque potenza intera positiva di 2. Sia ora $p = n + r$, e siano le ultime r delle p quantità tutte eguali, e ciascuna eguale a t, in cui

$$t = \frac{a + b + c + \ldots \text{ (} n \text{ termini)}}{n};$$

quindi $$\frac{a^m + b^m + c^m + \ldots}{n+r} > \left(\frac{a+b+c+\ldots}{n+r}\right)^m,$$

quindi $$a^m + b^m + c^m + \ldots + rt^m > (n+r)\left(\frac{nt+rt}{n+r}\right)^m,$$

cioè, $$> (n+r)\, t^m;$$

quindi $$a^m + b^m + c^m + \ldots > nt^m;$$

ciò che dovea dimostrarsi.

In simil modo possiamo stabilire il resto del teorema, cioè, che quando m è positivo e minore dell'unità ha luogo il contrario.

Il teorema di questo Articolo si può anche stabilire con un metodo simile a quello adoperato nell'Art. 165.

168. Se x e β sono quantità positive, ed x e βx minori dell'unità, $(1+x)^\beta$ è minore di $\dfrac{1}{1-\beta x}$.

Dobbiamo infatti mostrare che $(1+x)^{-\beta}$ è maggiore di $(1-\beta x)$. Ora, pel Teorema del Binomio,

$$(1+x)^{-\beta} = 1 - \beta x + \frac{\beta(\beta+1)}{\underline{|2}}x^2 - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\underline{|3}}x^3 + \ldots;$$

ciascun termine di questa serie è maggiore del termine seguente,

poichè $\frac{\beta+n}{n+1}x$ è minore dell'unità, essendo x e βx ciascuno minore dell'unità. Quindi, come nell'Art. 93, la serie è maggiore di $1-\beta x$.

169. Sia γ una quantità positiva maggiore di β; allora $1+\gamma x$ è maggiore di $\frac{1}{1-\beta x}$ purchè sia $(1+\gamma x)(1-\beta x)$ maggiore di 1: cioè purchè $(\gamma-\beta)x$ sia maggiore di $\beta\gamma x^2$, cioè purchè $\gamma-\beta$ sia maggiore di $\beta\gamma x$. Quindi abbiamo il seguente risultato: se x, β, e γ sono positivi, e γ è maggiore di β, allora prendendo x abbastanza piccolo possiamo rendere $(1+x)^\beta$ minore di $1+\gamma x$; questo vale comunque piccolo sia l'eccesso di γ sopra β.

170. Se x è positivo $\log(1+x)$ è minore di x.

Infatti supponiamo $y=\log(1+x)$, allora $1+x=e^y$; e, per l'Art. 77,

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\ldots, \text{ che è maggiore di } y+1.$$

Come un esempio si pongano per x successivamente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}$, abbiamo $\log\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$, $\log\frac{4}{3}<\frac{1}{3}\ldots\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$. Quindi, addizionando $\log\frac{n+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

171. Se x è positivo e minore dell'unità $\log(1+x)$ è maggiore di $x-\frac{x^2}{2}$.

Infatti $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$; quindi, come nell'Art. 93, vediamo che $\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ è una quantità finita positiva.

172. Se x è positivo e minore dell'unità $\log\frac{1}{1-x}$ è maggiore di x.

Infatti $\log\frac{1}{1-x}=-\log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$; quindi $\log\frac{1}{1-x}-x$ è una quantità finita positiva.

173. I tre esempii seguenti illustreranno il soggetto delle ineguaglianze, e forniranno risultati di qualche interesse.

I. Se $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$ e $v_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$,

allora quando n è infinito u_n è zero, v_n è infinito ed $u_n v_n$ è finito.

Abbiamo $$u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

quindi $$u_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Onde, con la moltiplicazione, $u_n^2 < \frac{1}{2n+1}$.

Quindi, crescendo n possiamo rendere u_n minore di ogni quantità assegnata.

Similmente, $$v_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

quindi $$v_n > \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{2n+2}{2n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Onde, con la moltiplicazione, $v_n^2 > \frac{2n+2}{2}$, cioè, $> n+1$.

Quindi, crescendo n possiamo rendere v_n maggiore di ogni quantità assegnata.

Finalmente, da (1) e (4) vediamo che

$$u_n v_n > \frac{1}{2} \frac{2n+2}{2n+1}, \text{ cioè, } > \frac{n+1}{2n+1}, \text{ e quindi, } a\ fortiori, > \frac{1}{2};$$

e da (2) e (3) vediamo che $u_n v_n < 1$.

Quindi $u_n v_n$ giace tra $\frac{1}{2}$ ed 1, ed è perciò finito.

II. Se m, n, a sono in ordine decrescente di grandezza, allora

$$\left(\frac{m+a}{m-a}\right)^m \text{ è } < \left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n.$$

Infatti si prendano i logaritmi dei due membri; così dobbiamo paragonare

$$m \log \frac{1+\frac{a}{m}}{1-\frac{a}{m}} \text{ con } n \log \frac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}};$$

o sia $2a\left\{1+\frac{1}{3}\frac{a^2}{m^2}+\frac{1}{5}\frac{a^4}{m^4}+\ldots\right\}$ con $2a\left\{1+\frac{1}{3}\frac{a^2}{n^2}+\frac{1}{5}\frac{a^4}{n^4}+\ldots\right\}$,

e la prima di queste è minore della seconda. Quindi segue il risultato richiesto.

III. Siano n quantità positive $a, b, c, \ldots k$; allora

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{n}\right)^{a+b+c+\ldots+k} \text{ è } < a^a b^b c^c \ldots k^k,$$

o meno che le n quantità non siano eguali, ed allora l'ineguaglianza diviene un'eguaglianza.

Siano due quantità disuguali a e b; dobbiamo mostrare che $a^a b^b$ è $>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$.

Si supponga a maggiore di b; sia $a=c+x$, $b=c-x$.

Dobbiamo mostrare che $\left(1+\frac{x}{c}\right)^{c+x}\left(1-\frac{x}{c}\right)^{c-x}$ è >1,

cioè, che $$\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)^c\left(\frac{1+\frac{x}{c}}{1-\frac{x}{c}}\right)^x \text{ è } >1,$$

o sia che $$(1-z^2)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^z \text{ è } >1, \text{ in cui } z=\frac{x}{c}.$$

Ora il logaritmo di $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^z(1-z^2)$ è

$$2z\left\{z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\ldots\right\}-\left\{z^2+\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{3}z^6+\ldots\right\},$$

e questa è una quantità positiva; e siccome il logaritmo è positivo l'espressione è maggiore dell'unità.

La dimostrazione si estende poi al caso di tre o più quantità con un metodo simile a quello usato nell'Art. 165.

I problemi nei tre Articoli seguenti sono analoghi al soggetto considerato nel presente Capitolo.

174. Dividere un dato numero $2a$ in due parti, in modo che il loro prodotto abbia il più grande valore possibile.

Dinoti x una parte e $2a-x$ l'altra parte, e dinoti y il prodotto; allora dobbiamo determinare x in modo che y abbia il più grande valore possibile. Poichè $y=x(2a-x)$, abbiamo $x^2-2ax+y=0$; quindi $x=a\pm\sqrt{(a^2-y)}$. Così poichè x deve essere reale y non può essere maggiore di a^2, ed $x=a$, quando $y=a^2$.

175. Dividere un dato numero $2a$ in due parti, in modo che la somma delle loro radici quadrate abbia il più grande valore possibile.

Dinoti x una parte e $2a-x$ l'altra parte, e dinoti y la somma delle radici quadrate delle parti; allora dobbiamo determinare x in modo che y abbia il più grande valore possibile.

Poichè $\sqrt{x}+\sqrt{(2a-x)}=y$, $2a-x=(y-\sqrt{x})^2=y^2-2y\sqrt{x}+x$, e $2x-2y\sqrt{x}+y^2-2a=0$; quindi $\sqrt{x}=\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{(4a-y^2)}}{2}$.

Poichè $\sqrt{x}$ deve essere reale y^2 non può essere maggiore di $4a$, così $2\sqrt{a}$ è il più grande valore di y, ed $x=a$ quando $y=2\sqrt{a}$.

176. Trovare il minimo valore che può avere $\frac{x^2+a^2}{x}$ qualunque sia il valore reale di x.

Si ponga $\frac{x^2+a^2}{x}=y$, allora $x^2-xy+a^2=0$; così $x=\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{(y^2-4a^2)}}{2}$.

Quindi y^2 non può essere minore di $4a^2$; o sia $2a$ è il minimo valore di y.

O pure così, $\frac{x^2+a^2}{x}=x+\frac{a^2}{x}$; supponiamo x positivo, allora possiamo porre questa espressione nella forma $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+2a$; e siccome $2a$ è costante il minimo valore dell'intera espressione si

otterrà quando il termine positivo $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2$ svanisce, cioè, quando $x=a$. Non è necessario di considerare valori negativi di x, poichè $\frac{x^2+a^2}{x}$ ha lo stesso valore numerico quando x ha un valore *negativo* qualunque come quando x ha il corrispondente valore *positivo*.

ESEMPII DI INEGUAGLIANZE.

Negli esempii seguenti i simboli si suppongono dinotare quantità positive; e le *ineguaglianze* possono, in alcuni casi, divenire *eguaglianze*, come in alcuni degli Articoli del testo.

1. Se a, b, c sono tali che due qualunque di esse sono maggiori della terza, $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

2. Se $l^2+m^2+n^2=1$, ed $l'^2+m'^2+n'^2=1$, allora

$$ll'+mm'+nn'<1.$$

3. $(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2>ab+bc+ca$.

4. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

5. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)>6abc$ o $<2(a^3+b^3+c^2)$.

6. $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

7. Mostrare che $x^2-8x+22$ non è mai minore di 6, qualunque sia il valore di x.

8. Quale è più grande, $2x^3$ o $x+1$?

9. Se n è >1, allora $x+\frac{1}{nx}$ è $>1+\frac{1}{n}$, se x è >1, o pure $<\frac{1}{n}$.

10. Trovare il minimo valore di $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$.

11. Dividere un intero dispari in due altri interi, di cui il prodotto sia il più grande possibile.

12. Se $a>b$, allora $\sqrt{(a^2-b^2)}+\sqrt{(2ab-b^2)}>a$.

13. Se a,b,c,d sono in progressione armonica, $a+d>b+c$.

14. Se a, b, c sono in progressione armonica ed n è un intero positivo, $a^n + c^n > 2b^n$.

15. Se $a > b$, mostrare che $\frac{x+a}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$ è $>$ o $< \frac{x+b}{\sqrt{(x^2+b^2)}}$, secondo che x è $>$ o $< \sqrt{(ab)}$.

16. Se a, b, c, o b, c, a, o c, a, b sono in ordine *decrescente* di grandezza, $a^2b+b^2c+c^2a > a^2c+b^2a+c^2b$; se esse sono in ordine *crescente* di grandezza, $a^2b+b^2c+c^2a < a^2c+b^2a+c^2b$.

17. $(A^2+B^2+C^2+\ldots)(a^2+b^2+c^2+\ldots) > (Aa+Bb+Cc+\ldots)^2$.

18. $3(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)(ab+bc+ca)$.

19. $9abc < (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

20. $\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n) > \sqrt{(a_1a_2)}+\sqrt{(a_1a_3)}+\sqrt{(a_2a_3)}+\ldots$

21. La differenza tra la media aritmetica e la media geometrica di due quantità è minore di un ottavo della differenza quadrata dei numeri divisa pel numero minore, ma è maggiore di un ottavo di quella differenza quadrata divisa pel numero maggiore.

22. $\underline{|n} < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

23. $\underline{|n} > n^{\frac{n}{2}}$.

24. $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) < n^n$.

25. $\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(2-\frac{2n-1}{n}\right) > \frac{1}{\underline{|n}}$.

26. $a^4+b^4+c^4 > abc(a+b+c)$.

27. $8(a^3+b^3+c^3) > 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

28. $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b} > 3$.

29. $(a+b+c)^3 > 27abc$ e $< 9(a^3+b^3+c^3)$.

30. Se p e q sono ciascuno minore dell'unità,

$$\frac{\log_a(1-p)}{\log_a(1-q)} \text{ è } < \frac{p}{q(1-p)}, \text{ e } > \frac{p(1-q)}{q}.$$

31. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} > n$.

32. Se a ed x giacciono entrambi fra 0 ed 1, allora $\frac{1-a^x}{1-a} > x$.

XIV. TEORIA DEI NUMERI.

177. In tutto questo Capitolo la parola *numero* è usata come una abbreviazione per *intero positivo*.

178. Un numero il quale non può essere diviso esattamente per altro numero se non per sè stesso e per l'unità si chiama un *numero primo*, o brevemente un *primo*.

179. Due numeri si dicono primi tra loro quando non vi è altro numero, se non l'unità, che divida esattamente ciascuno di essi. Invece di dire che due numeri sono primi tra loro, si esprime la stessa cosa dicendo che uno di essi è primo con l'altro.

180. *Se un numero* p *divide un prodotto* ab, *ed è primo con un fattore* a, *esso deve dividere l'altro fattore* b.

Supponiamo a maggiore di p; si esegua l'operazione di trovare la massima comune misura di a e p; siano $q, q', q'', \ldots$ i quozienti successivi, ed $r, r', r'', \ldots$ i resti corrispondenti. Così

$$a = pq + r, \quad p = rq' + r', \quad r = r'q'' + r'', \ldots$$

si moltiplichi ciascun membro di ognuna di queste equazioni per b, e si divida per p; quindi

$$\frac{ab}{p} = bq + \frac{br}{p}, \; b = \frac{br}{p} \times q' + \frac{br'}{p}, \; \frac{br}{p} = \frac{br'}{p} \times q'' + \frac{br''}{p}, \ldots$$

Poichè $\frac{ab}{p}$ è un intero, segue dalla prima di queste equazioni che $\frac{br}{p}$ è un intero; quindi dalla seconda di queste equazioni $\frac{br'}{p}$ è un intero; quindi dalla terza $\frac{br''}{p}$ è un intero; e così di seguito. Ma, poichè a e p sono primi tra loro, l'ultimo dei resti $r, r', r'', \ldots$ è l'unità; quindi $\frac{b \times 1}{p}$ è un intero; cioè, b è divisibile per p.

181. *Quando il numeratore ed il denominatore di una frazione sono primi tra loro la frazione non si può ridurre ad una frazione equivalente in termini più piccoli.*

Supponiamo che a sia primo con b, e, se è possibile, sia $\frac{a}{b}$ eguale ad $\frac{a'}{b'}$, una frazione in termini più piccoli. Poichè $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, abbiamo $a'=\frac{ab'}{b}$; quindi b divide ab'; ma b è primo con a, quindi b divide b' (Art. 180); ma questo è impossibile, poichè b' è minore di b per supposizione. Quindi $\frac{a}{b}$ non si può ridurre ad una frazione equivalente in termini più piccoli.

182. *Se* a *è primo con* b, *ed* $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, *allora* a′ *e* b′ *debbono essere gli stessi multipli di* a *e* b *rispettivamente.*

Poichè $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$, abbiamo $a'=\frac{ab'}{b}$; ma b è primo con a, quindi b divide b'; onde $b'=nb$, in cui n è un intero; quindi $a'=na$.

183. *Se un numero primo* p *divide un prodotto* abcd ... *esso deve dividere uno dei fattori di quel prodotto.*

Infatti poichè p è un numero primo, se p non divide a esso è primo con a, e quindi deve dividere bcd...(Art. 180). Similmente, se p non divide b, esso è primo con b, e quindi deve dividere cd... Procedendo in questo modo dimostreremo che p deve dividere uno dei fattori del prodotto.

184. *Se un numero primo divide* a^n, *in cui* n *è un intero positivo, esso deve dividere* a.

Questo segue dall'Articolo precedente supponendo tutt'i fattori eguali.

185. *Se un numero* n *è divisibile per* p, p′, p″, ... *e ciascuno di questi divisori è primo con tutti gli altri,* n *è anche divisibile pel prodotto* pp′ p″ ...

Infatti poichè n è divisibile per p, abbiamo $n=pq$, in cui q è un intero. Poichè p' divide pq ed è primo con p, p' deve dividere q; quindi $q=p'q'$, in cui q' è un intero; così, $n=pp'q'$, ed è quindi divisibile per pp'. Procedendo così possiamo mostrare che n è divisibile per $pp'p''$...

186. *Se ciascuno dei numeri* a *e* b *è primo con* c, *allora* ab *è primo con* c.

Infatti se ab non è primo con c, supponiamo $ab=nr$ e $c=ns$, in cui n, r, ed s sono interi; allora, poichè a e b sono primi con c, essi sono primi con ns, e quindi con n; ma $ab=nr$, onde $\frac{a}{n}=\frac{r}{b}$; quindi b è un multiplo di n (Art. 182). Quindi b è nello stesso tempo primo con n ed un multiplo di n, il che è impossibile. Quindi ab è primo con c.

187. *Se* a *e* b *sono primi tra loro,* a^m *e* b^n *sono primi tra loro;* m *ed* n *essendo interi positivi.*

Infatti poichè a è primo con b, ne segue che $a\times a$ o a^2 è primo con b (Art. 186); similmente $a^2\times a$ o a^3 è primo con b; e così di seguito; così a^m è primo con b. Ancora, poichè a^m è primo con b, ne segue che a^m è primo con $b\times b$ o b^2; e così di seguito.

188. *Nessuna formola algebrica razionale intera può rappresentare numeri primi solamente.*

Infatti, se è possibile, supponiamo che la formola $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots$ rappresenti solamente numeri primi; supponiamo che quando $x=m$ la formola prenda il valore p, sicchè $p=a+bm+cm^2+dm^3+\ldots$ Si ponga per x, nella formola, $m+np$, e supponiamo che il valore sia allora p'; così $p'=a+b(m+np)+c(m+np)^2+d(m+np)^3+\ldots\ldots$ $=a+bm+cm^2+dm^3+\ldots+M(p)=p+M(p)$, in cui $M(p)$ dinota *un multiplo di* p; così p' è divisibile per p, e perciò *non* è un primo.

189. *Il numero dei numeri primi è infinito.*

Infatti se il numero dei numeri primi non è infinito, si supponga p il massimo numero primo; il prodotto di tutt'i numeri primi sino a p, cioè, $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\ldots p$ è divisibile per ciascuno di questi numeri primi; si aggiunga l'unità a questo prodotto, ed otteniamo un numero che non è divisibile per alcuno di questi numeri primi; questo numero è quindi o esso stesso numero primo, o pure è divisibile per qualche numero primo maggiore di p; così p non è il massimo numero primo, il che è contrario alla supposizione. Quindi il numero dei numeri primi è infinito.

190. *Se* a *è primo con* b, *e le quantità* a, 2a, 3a, ... (b−1) a, *si dividono per* b, *i resti saranno tutti differenti.*

Infatti, se è possibile, supponiamo che due di queste quantità ma ed $m'a$ quando si dividono per b diano lo stesso resto r, sicchè

$$ma = nb + r \quad \text{ed} \quad m'a = n'b + r;$$

allora
$$(m - m')\, a = (n - n')\, b;$$

onde
$$\frac{a}{b} = \frac{n - n'}{m - m'};$$

quindi $m - m'$ è un multiplo di b (Art. 182); ma questo è impossibile, poichè m ed m' sono entrambi minori di b.

191. *Un numero si può risolvere in fattori primi in un sol modo.*

Dinoti N il numero; supponiamo $N = abcd\ldots$, in cui $a, b, c, d, \ldots$ sono numeri primi eguali o disuguali. Supponiamo, se è possibile, che N sia anche $= \alpha\beta\gamma\delta\ldots$, in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ sono altri numeri primi. Allora $abcd\ldots = \alpha\beta\gamma\delta\ldots$; quindi α deve dividere $abcd\ldots$, e quindi deve dividere uno dei fattori di questo prodotto; ma questi fattori sono tutti numeri primi; quindi α deve essere eguale ad uno di essi, supponiamo a. Si divida per a o α, allora $bcd\ldots = \beta\gamma\delta\ldots$; da questo possiamo dimostrare che β deve essere eguale ad uno dei fattori in $bcd\ldots$; e così di seguito. Così i fattori in $abcd\ldots$ non possono essere diversi da quelli in $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$

192. *Trovare la massima potenza di un numero primo che è contenuta nel prodotto* $\lfloor m$.

Dinoti $I\left(\frac{m}{a}\right)$ il massimo intero contenuto in $\frac{m}{a}$,

$I\left(\frac{m}{a^2}\right)$ il massimo intero contenuto in $\frac{m}{a^2}$,

$I\left(\frac{m}{a^3}\right)$ il massimo intero contenuto in $\frac{m}{a^3}$,

e così di seguito; allora la massima potenza del numero primo a che è contenuta in $\lfloor m$ è $I\left(\frac{m}{a}\right) + I\left(\frac{m}{a^2}\right) + I\left(\frac{m}{a^3}\right) + \ldots$

Tra i numeri $1, 2, 3, \ldots m$, ve ne sono $I\left(\frac{m}{a}\right)$ che contengo-

no a almeno una volta, cioè i numeri a, $2a$, $3a$, $4a$, ... Similmente ve ne sono $I\left(\frac{m}{a^2}\right)$ che contengono a^2 almeno una volta; ve ne sono $I\left(\frac{m}{a^3}\right)$ che contengono a^3 almeno una volta; e così di seguito. La somma di queste espressioni è la massima potenza richiesta.

Questa proposizione sarà illustrata considerando un esempio numerico. Supponiamo per esempio che $m=14$ ed $a=2$; allora dobbiamo trovare la più alta potenza di 2 che è contenuta in $\underline{|14}$.

Qui $I\left(\frac{m}{a}\right)=7$, $I\left(\frac{m}{a^2}\right)=3$, $I\left(\frac{m}{a^3}\right)=1$; così la richiesta potenza è 11. Cioè, 2^{11} dividerà $\underline{|14}$, e nessuna più alta potenza di 2 dividerà $\underline{|14}$. Ora esaminiamo in qual modo nasce questo numero 11. Dei fattori 1, 2, 3, 4, ... 14 ve ne sono *sette* che possiamo dividere una prima volta per 2, cioè 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Vi sono *tre* fattori che si possono dividere per 2 una seconda volta, cioè, 4, 8, 12. Vi è *un* fattore che si può dividere per 2 una terza volta, cioè 8.

Così vediamo il modo in cui nasce $7+3+1$, cioè 11.

193. *Il prodotto di* n *interi successivi qualunque è divisibile per* $\underline{|n}$.

Sia $m+1$ il primo intero; dobbiamo allora mostrare che $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{\underline{|n}}$ è un intero. Si moltiplichino il numeratore ed il denominatore di questa espressione per $\underline{|m}$; essa allora diviene $\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$, che dinoteremo con $\frac{P}{Q}$. Sia a un numero primo qualunque; dinotino r_1, r_2, r_3, ... i massimi interi in $\frac{m+n}{a}$, $\frac{m+n}{a^2}$, $\frac{m+n}{a^3}$, ... rispettivamente; dinotino s_1, s_2, s_3, ... i massimi interi in $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{a^2}$, $\frac{m}{a^3}$, ... rispettivamente; e dinotino t_1, t_2, t_3, ... i massimi interi in $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{a^2}$, $\frac{n}{a^3}$, ... rispettivamente. Allora in P il fattore a si trova elevato alla potenza $r_1+r_2+r_3+\ldots$; in Q il fattore a si trova elevato alla potenza $s_1+s_2+s_3+\ldots+t_1+t_2+t_3+\ldots$ Ora si può mostrare facilmente che r_1 è uguale ad s_1+t_1 o ad s_1+t_1+1, e che r_2 è uguale ad s_2+t_2 o ad s_2+t_2+1, e così di seguito. Così a si trova

in P elevato ad una potenza almeno tanto alta quanto in Q. Similmente ogni fattore primo che si trova in Q si trova in P elevato ad una potenza almeno tanto alta quanto in Q. Così P è divisibile per Q.

194. *Se* n *è un numero primo, il coefficiente di ogni termine nello sviluppo di* $(a+b)^n$, *eccetto il primo e l'ultimo, è divisibile per* n.

Infatti la forma generale dei coefficienti escludendo il primo e l'ultimo è $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$, in cui r può avere un valore qualunque da 1 ad $n-1$ inclusivamente. Ora, per l'Art. 193, questa espressione è un intero; inoltre poichè n è un numero primo e maggiore di r, nessun fattore che si trova in $\lfloor r$ può dividere n; quindi $(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ deve essere divisibile per $\lfloor r$. Quindi ogni coefficiente, eccetto il primo e l'ultimo, è divisibile per n.

195. *Se* n *è un numero primo, il coefficiente di ogni termine nello sviluppo di* $(a+b+c+d\ldots)^n$, *eccetto quelli di* a^n, b^n, c^n, d^n, ..., *è divisibile per* n.

Si ponga β per $b+c+d+\ldots$; allora

$$(a+b+c+d+\ldots)^n=(a+\beta)^n.$$

Per l'Art. 194, ogni coefficiente nello sviluppo di $(a+\beta)^n$ è divisibile per n, eccetto quelli di a^n e β^n, ed il coefficiente di ciascuno di questi termini è l'unità. Ancora,

$$\beta^n=(b+c+d+\ldots)^n=(b+\gamma)^n \text{ supponiamo;}$$

ed ogni coefficiente nello sviluppo di $(b+\gamma)^n$ è divisibile per n eccetto quelli di b^n e γ^n. Procedendo in questo modo arriviamo al teorema enunciato.

196. *Se* n *è un numero primo, ed* N *è primo con* n, *allora* $N^{n-1}-1$ *è un multiplo di* n. (Teorema di Fermat).

Per l'Articolo precedente,

$$(a+b+c+d+\ldots+k)^n=a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots+k^n+M(n),$$

in cui $M(n)$ dinota un multiplo di n. Sia ciascuna delle quantità $a, b, c, d, \ldots k$ eguale all'unità, e supponiamo ve ne siano N di esse; così $N^n=N+M(n)$; quindi $N(N^{n-1}-1)=M(n)$.

Poichè N è primo con n, ne segue che $N^{n-1}-1$ è divisibile per n.

Possiamo quindi dire che $N^{n-1}=1+pn$, in cui p è un intero positivo.

197. Poichè n è un numero primo nell'Articolo precedente, $n-1$ è un numero *pari* eccetto quando $n=2$; quindi possiamo scrivere il teorema così, $(N^{\frac{n-1}{2}}-1)(N^{\frac{n-1}{2}}+1)=M(n)$; quindi, $N^{\frac{n-1}{2}}-1$ o pure $N^{\frac{n-1}{2}}+1$ è divisibile per n, sicchè $N^{\frac{n-1}{2}}=pn+1$, o pure $=pn-1$, in cui p è un intero positivo.

198. Il teorema seguente è un'estensione di quello di Fermat. Dinoti n un numero qualunque; e siano $1, a, b, c, \ldots n-1$, tutt'i numeri che sono minori di n e primi con n; supponiamo che vi siano m di questi numeri; allora sarà $x^m-1=M(n)$, quando per x sostituiamo uno qualunque dei detti m numeri, eccetto l'unità. Infatti si moltiplichino tutti gli m numeri per uno qualunque di essi eccetto l'unità, e si dinoti il moltiplicatore con x; così otteniamo $1\cdot x, ax, bx, cx, \ldots (n-1)x$; questi prodotti sono tutti diversi e tutti primi con n. Si può mostrare facilmente che quando questi prodotti si dividono per n, i resti sono *tutti diversi e tutti primi con* n; così i resti debbono essere gli m numeri primitivi $1, a, b, c, \ldots n-1$; essi non si troveranno necessariamente in questo ordine, ma ciò è indifferente per l'oggetto che abbiamo in vista. Quindi il prodotto della nuova serie di m numeri $x, ax, bx, cx, \ldots (n-1)x$, può differire solamente dal prodotto degli m numeri primitivi *per un multiplo di* n; così

$$x^m abc\ldots(n-1)=abc\ldots(n-1)+M(n).$$

Poichè due dei tre termini che entrano in questa identità sono divisibili per $abc\ldots(n-1)$, il terzo termine deve essere anche similmente divisibile, e siccome $abc\ldots(n-1)$ è primo con n, il quoziente dopo che $M(n)$ si è diviso per $abc\ldots(n-1)$ deve essere ancora un multiplo di M, e si può dinotare con $M(n)$; così

$$x^m=1+M(n), \quad \text{ed} \quad x^m-1=M(n).$$

199. Dedurremo ora il teorema di Fermat dal risultato dell'Articolo precedente. Supponiamo n un numero primo; allora i numeri $1, 2, 3, \ldots n-1$, sono tutti primi con n; così $m=n-1$. Quindi

$x^{n-1}-1=M(n)$, in cui x può essere un numero qualunque minore di n. In seguito dinoti y un numero qualunque che è maggiore di n e primo con n, allora possiamo supporre $y=pn+x$, in cui p è un intero ed x è minore di n. Quindi

$$y^{n-1}=(pn+x)^{n-1}=x^{n-1}+(n-1)\,x^{n-2}\,pn+\ldots=x^{n-1}+M(n);$$

ma abbiamo già mostrato che $x^{n-1}=1+M(n)$; così

$$y^{n-1}=1+M(n), \quad \text{ed} \quad y^{n-1}-1=M(n).$$

Così il teorema di Fermat è stabilito.

200. *Se* n *è un numero primo,* $1+\underline{|n-1}$ *è divisibile per* n. (Teorema di Wilson).

Per l'Art. 84 abbiamo

$$\underline{|n-1}=(n-1)^{n-1}-(n-1)\,(n-2)^{n-1}$$
$$+\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}(n-3)^{n-1}-\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}(n-4)^{n-1}+\ldots;$$

pel teorema di Fermat abbiamo

$$(n-1)^{n-1}=1+p_1n,\ (n-2)^{n-1}=1+p_2n,\ (n-3)^{n-1}=1+p_3n,\ \ldots$$

in cui $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sono interi positivi. Quindi

$$\underline{|n-1}=M(n)+1-(n-1)$$
$$+\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots;$$

la serie $1-(n-1)+\dfrac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2}-\ldots\ldots$, di $n-1$ termini, è eguale ad $(1-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}$, cioè, a -1, poichè $n-1$ è un numero pari. Così $\underline{|n-1}=M(n)-1$; quindi $1+\underline{|n-1}$ è divisibile per n.

Se n *non* è un numero primo, $1+\underline{|n-1}$ *non* è divisibile per n. Infatti supponiamo p un fattore di n; allora p è minore di $n-1$, e quindi $\underline{|n-1}$ è divisibile per p; quindi $1+\underline{|n-1}$ non è divisibile per p, e per conseguenza non è divisibile per n.

201. La deduzione seguente si può trarre dal Teorema di Wilson: Se $2p+1$ è un numero primo, $\{\underline{|p}\}^2+(-1)^p$ è divisibile per $2p+1$.

Pel Teorema di Wilson, poichè $2p+1$ è un numero primo, $1+\underline{|2p}$ è divisibile per $2p+1$. Si ponga n per $2p+1$, allora $\underline{|2p}$ si può scrivere così, $1(n-1)2(n-2)3(n-3)\ldots p(n-p)$; se questi fattori si suppongono moltiplicati fra loro, è chiaro che otterremo $(-1)^p 1^2 2^2 3^2 \ldots p^2$ insieme con un multiplo di n.

Quindi $1+(-1)^p\{\underline{|p}\}^2$ deve essere divisibile per n, e quindi $\{\underline{|p}\}^2+(-1)^p$ deve essere divisibile per n.

202. Dinoti x un intero positivo qualunque; allora il numero degl'interi positivi che sono minori di x e primi con x sarà dinotato con $L(x)$.

Consideriamo, per esempio, l'intero positivo 12; vi sono quattro interi positivi che sono minori di 12 e primi con 12, cioè 11, 7, 5, 1: così $L(12)=4$.

203. *Se* m *è primo con* n *allora* $L(mn)=L(m)\times L(n)$.

Infatti siano $1, a, b, \ldots m-1$ gl'interi positivi che sono minori di m e primi con m; allora, r dinotando uno qualunque di essi, gli n interi positivi seguenti sono tutti minori di mn e sono tutti primi con m,

$$r,\ r+m,\ r+2m,\ \ldots\ r+(n-1)\,m.$$

Ed ogni intero positivo che è minore di mn ed è primo con m deve essere della forma $r+pm$, in cui p è zero o un intero positivo minore di n, ed r è uno degl'interi positivi $1, a, b, \ldots m-1$.

Quindi vediamo che il numero degl'interi positivi minori di mn e primi con m è $n\times L(m)$.

Tra gl'interi positivi che sono minori di mn e primi con m dobbiamo ora determinare quelli che sono anche primi con n.

Abbia r lo stesso significato come prima. Se dividiamo ciascun termine del gruppo

$$r,\ r+m,\ r+2m,\ \ldots\ r+(n-1)\,m$$

per n i resti saranno tutti diversi; questo si mostra col metodo dell'Art. 190: così i resti debbono essere $0, 1, 2, \ldots n-1$; benchè essi non si troveranno necessariamente in questo ordine. Se un resto è primo con n il dividendo corrispondente è primo con n; e

viceversa se un dividendo è primo con n il resto corrispondente è primo con n. Ne segue perciò che tra gli n interi positivi del gruppo precedente ve ne sono $L(n)$ che sono primi con n. E siccome questo vale per ogni gruppo d'interi come quello che abbiamo considerato ne segue che $L(mn) = L(m) \times L(n)$.

Quindi se l, m, n, sono tutti primi tra loro, abbiamo

$$L(lmn) = L(lm) \times L(n) = L(l) \times L(m) \times L(n);$$

ed un simile risultato vale per un numero qualunque di fattori che sono primi tra loro.

204. *Trovare il numero degl'interi positivi che sono minori di un dato numero e primi con esso.*

Dinoti N il numero, e supponiamo primieramente $N = a^p$, in cui a è un numero primo. I soli termini della serie 1, 2, 3, 4 ... N che *non* sono primi con N sono a, $2a$, $3a$, $4a$, ... $\frac{N}{a}a$; e vi sono $\frac{N}{a}$ di questi termini. Quindi dopo di aver rigettato questi multipli di a, restano $N - \frac{N}{a}$ termini, cioè, $N\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ termini; così vi sono $N\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ interi positivi che sono minori di N e primi con N.

In seguito, supponiamo $N = a^p b^q c^r \ldots$ in cui $a, b, c, \ldots$ sono tutti numeri primi.

Allora, per l'Art. 203,

$$L(N) = L(a^p) \times L(b^q) \times L(c^r) \times \ldots$$
$$= a^p\left(1 - \frac{1}{a}\right) \times b^q\left(1 - \frac{1}{b}\right) \times c^r\left(1 - \frac{1}{c}\right) \times \ldots$$

pel primo caso.

Così finalmente se $N = a^p b^q c^r d^s \ldots$ in cui $a, b, c, d, \ldots$ sono tutti numeri primi, il numero degl'interi positivi che sono minori di N e primi con N è

$$N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\ldots$$

Si sarà osservato che in questo teorema *l'unità* è considerata come uno degl'interi positivi che sono minori di N e primi con N.

205. *Trovare il numero dei divisori di un numero dato.*

Dinoti N il numero, e supponiamo $N = a^p b^q c^r \ldots$, in cui $a, b, c, \ldots$ sono numeri primi. È evidente che N sarà divisibile per ogni numero che è formato dal prodotto di potenze a, b, c, ... purchè l'esponente della potenza di a sia compresa tra 0 e p, l'esponente della potenza di b tra 0 e q, l'esponente della potenza di c tra 0 ed r, e così di seguito; e nessun altro numero dividerà N. Quindi i divisori di N saranno i varii termini del prodotto

$$(1+a+a^2+\ldots+a^p)(1+b+b^2+\ldots+b^q)(1+c+c^2+\ldots+c^r)\ldots;$$

il *numero* dei divisori sarà perciò $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$

Questo include tra i divisori l'unità ed il numero stesso N.

206. *Trovare il numero dei modi in cui un numero si può risolvere in due fattori.*

Dinoti N il numero, e supponiamo $N = a^p b^q c^r \ldots$, in cui $a, b, c, \ldots$ sono numeri primi. Primieramente, supponiamo N *non* un quadrato perfetto; allora *uno* almeno degli esponenti $p, q, r, \ldots$ è un numero dispari; il numero richiesto è allora $\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$, poichè vi sono *due* divisori di N corrispondenti ad ogni modo in cui N si può risolvere in due fattori. In seguito supponiamo N un quadrato perfetto, allora tutti gli esponenti $p, q, r, \ldots$ sono pari; il numero richiesto si trova accrescendo $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$ di un'unità, e prendendo la metà del risultato; poichè in questo caso la radice quadrata di N è uno dei divisori, e se questo si prende per un fattore di N, l'altro fattore è eguale ad esso, sicchè solamente *un* divisore nasce da questo modo di risolvere N in *due* fattori.

Si sarà osservato che in questo teorema $N \times 1$ è contato come uno dei modi di risolvere N in due fattori.

207. *Trovare la somma dei divisori di un numero.*

Con la notazione dell'Art. 205, abbiamo la *somma* eguale ad

$$(1+a+a^2+\ldots+a^p)(1+b+b^2+\ldots+b^q)(1+c+c^2+\ldots+c^r)\ldots;$$

cioè,
$$\frac{a^{p+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{q+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{r+1}-1}{c-1} \ldots$$

208. *Trovare il numero dei modi in cui un numero si può risolvere in due fattori che sono primi tra loro.*

Sia il numero $N = a^p b^q c^r \ldots$ come sopra. Poichè i due fattori debbono essere primi tra loro, non possiamo avere una potenza di a in un fattore, ed una potenza di a nell'altro fattore, ma a^p deve trovarsi in uno dei fattori. Similmente, b^q deve trovarsi in uno dei fattori; e così di seguito. Quindi il numero richiesto è lo stesso che la metà del numero dei divisori di $abc \ldots$, ed è perciò 2^{n-1}, in cui n è il numero dei fattori primi *diversi* che si trovano in N.

ESEMPII DELLA TEORIA DEI NUMERI.

1. Se p e q sono numeri interi, e $p+q$ è un numero pari, allora $p-q$ è anche pari.

2. Trovare il minimo moltiplicatore di 3234 che renderà il prodotto un quadrato perfetto.

3. Trovare il minimo moltiplicatore di 1845 che renderà il prodotto un cubo perfetto.

4. Trovare il minimo moltiplicatore di 6480 che renderà il prodotto un cubo perfetto.

5. Trovare il minimo moltiplicatore di 13168 che renderà il prodotto un cubo perfetto.

6. Se la somma di un numero quadrato dispari e di un numero quadrato pari è anche un numero quadrato, allora il numero quadrato pari è divisibile per 16.

7. Ogni numero quadrato è della forma $5n$ o $5n \pm 1$.

8. Ogni numero cubo è della forma $7n$ o $7n \pm 1$.

9. Se un numero è ad un tempo un quadrato ed un cubo esso è della forma $7n$ o $7n+1$.

10. Nessun numero quadrato è della forma $3n-1$.

11. Nessun numero triangolare è della forma $3n-1$.

12. Se n è un numero qualunque, a la differenza tra n ed il numero prossimamente maggiore di n che è un numero quadrato, e b la differenza tra n ed il numero prossimamente minore di n che è un numero quadrato, allora $n-ab$ è un numero quadrato.

13. Se la differenza di due numeri che sono primi tra loro, è un numero dispari, ogni potenza della loro somma sarà un numero primo con ogni potenza della loro differenza.

14. Se vi sono tre numeri uno dei quali è la somma degli altri due, due volte la somma delle loro quarte potenze è un numero quadrato.

15. Mostrare quando n è un numero primo qualunque, che $x^n - 1$ ed $(x-1)^n$ lasceranno lo stesso resto quando si dividono per n.

16. Se $2p+1$ è un numero primo ed i numeri $1^2, 2^2, \ldots\ldots p^2$, si dividono per $2p+1$, i resti sono tutti diversi.

17. Ogni potenza pari di ogni numero dispari è della forma $8n+1$.

18. Ogni potenza dispari di 7 è della forma $8n-1$.

19. Se n è un intero qualunque, $n^2 - n + 1$ non può essere un numero quadrato.

20. Se n è un intero dispari qualunque, $n^3 + 1$ non può essere un numero quadrato.

21. Se a ed x sono interi, il massimo valore di $ax - 2x^2$ è l'intero eguale ad $\frac{a^2}{8}$ o prossimamente minore di $\frac{a^2}{8}$.

22. Mostrare che $n(n+1)(2n+1)$ è sempre divisibile per 6.

23. Se n è dispari, $(n-1)n(n+1)$ è divisibile per 24.

24. Se n è dispari e non divisibile per 3, allora n^2+5 è divisibile per 6.

25. Se n è un numero primo maggiore di 5, allora $n^4 - 1$ è divisibile per 240.

26. Mostrare che $\frac{m^5}{120} - \frac{m^3}{24} + \frac{m}{30}$ è un intero se m è anche un intero.

27. Mostrare che $n^7 - n$ è sempre divisibile per 42.

28. Se n è un numero primo ed x un intero qualunque, dimostrare che x^n ed x quando si dividono per n lasceranno lo stesso resto.

29. Se n è un numero primo qualunque ed N è primo con n, allora $N^m - 1$ è divisibile per n^2, in cui $m = n(n-1)$.

30. Se n è un numero primo qualunque maggiore di 2, eccetto 7, allora $n^6 - 1$ è divisibile per 56.

31. Se n è un numero primo qualunque maggiore di 2 ed N un numero dispari primo con n, allora $N^{n-1} - 1$ è divisibile per $8n$.

32. Se n è un numero primo qualunque maggiore di 3 ed N è primo con n, allora $N^n - N$ è divisibile per $6n$.

33. Se n ed N sono numeri primi diversi, e ciascuno maggiore di 3, allora $N^{n-1}-1$ è divisibile per $24n$.

34. Mostrare che $1^n+2^n+3^n+\ldots+(rn)^n$ è un multiplo di n, se n è un numero primo qualunque maggiore di 2.

35. Mostrare che la 10ma potenza di un numero qualunque è della forma $11n$ o $11n+1$.

36. Mostrare che la 12ma potenza di un numero qualunque è della forma $13n$ o $13n+1$.

37. Mostrare che la 9^a potenza di un numero qualunque è della forma $19n$ o $19n\pm1$.

38. Mostrare che l'11ma potenza di un numero qualunque è della forma $23n$ o $23n\pm1$.

39. Mostrare che la 20ma potenza di un numero qualunque è della forma $25n$ o $25n+1$.

40. Quanti interi positivi sono minori di 140 e primi con 140?

41. Quanti interi positivi sono minori di 360 e primi con 360?

42. Quanti interi positivi sono minori di 1000 e primi con 1000?

43. Quanti interi positivi sono minori di $3^4\times7^2\times11$ e primi con esso?

44. Quanti interi positivi sono minori di 10^n e primi con esso?

45. Trovare il numero dei divisori di 140.

46. Trovare il numero dei divisori di 1845.

47. Trovare il numero dei divisori di $\underline{|9}$, e la somma di questi divisori.

48. Trovare il numero dei modi in cui 1845 si può risolvere in due fattori.

49. In quanti modi una linea lunga 100800 pollici si può dividere in parti eguali, ciascuna un multiplo di un pollice?

50. In quanti modi quattro angoli retti si possono dividere in parti eguali in modo che ciascuna parte sia un multiplo dell'unità angolare, (1) quando l'unità è un grado della divisione sessagesimale, (2) quando l'unità è un grado della divisione decimale?

51. Quante sono le soluzioni intere positive diverse di $xy=10^n$?

52. Se N è un numero qualunque, n il numero dei suoi divisori, e P il prodotto di questi divisori, mostrare che $P=N^{\frac{n}{2}}$; mostrare che N^n è in tutti i casi un quadrato esatto.

53. Trovare il minimo numero che ha 30 divisori.

54. Trovare il minimo numero che ha 64 divisori.

55. Si supponga a primo con b, e si divida la serie delle quantità a, $2a$, $3a$, ... $(b-1)a$ per b: dimostrare che la somma dei quozienti che nascono da due termini qualunque equidistanti dal primo e dall'ultimo sarà $a-1$, e che la somma dei resti corrispondenti sarà b.

56. Se un numero qualunque di numeri quadrati si divide per un dato numero n non vi possono essere più di $\frac{n}{2}$ resti diversi.

57. Esprimere generalmente i valori razionali di x ed y che soddisfano $140x = y^3$.

58. Se r, la base di un sistema di numerazione, è un numero primo maggiore di 2, vi sono $\frac{r+1}{2}$ cifre diverse secondo le quali terminano i numeri quadrati in questo sistema.

59. Se un numero qualunque n si può risolvere nella somma di p quadrati, $2(p-1)n$ si può risolvere nella somma di $p(p-1)$ quadrati.

60. Se n è un intero positivo qualunque $2^{2n}+15n-1$ è divisibile per 9.

61. Se P_r dinota la somma dei prodotti dei primi n numeri presi ad r ad r, $1+P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}$ è un multiplo di $\lfloor n$.

62. Mostrare che la 100ma potenza di un numero qualunque è della forma $125n$ o $125n+1$.

XV. CONVERGENZA E DIVERGENZA DELLE SERIE.

209. Nel Capitolo VII abbiamo discusso il soggetto della convergenza e divergenza delle serie. Il principale risultato generale che è stato ottenuto si può esprimere così: *una serie infinita è convergente se a partire da un termine fisso qualunque in poi il rapporto di ciascun termine al termine seguente è maggiore di una certa quantità che è essa stessa numericamente maggiore dell'unità; e divergente se questo rapporto è l'unità o minore dell'unità, ed i termini sono tutti dello stesso segno.* Vi è un caso al quale questo risultato non si applica, che è desiderabile di notare, cioè il caso in cui il rapporto è maggiore dell'unità ma continuamente si avvicina all'unità. Si veg-

gano gli Articoli 94, 95, 96. I risultati di quegli Articoli sono qui riprodotti, ma in una forma differente, essendo conveniente pel nostro scopo attuale di riguardare il rapporto di un termine al termine *seguente* invece che al termine *precedente*.

210. Investigheremo ora dei teoremi che daranno caratteri di convergenza e divergenza pel caso in cui i caratteri precedenti non si applicano. Nelle serie infinite che considereremo supporremo che tutti i termini siano positivi, almeno da un certo termine fisso in poi se non dal principio.

211. *Una serie è convergente se da un certo termine fisso in poi il rapporto di ciascun termine al termine seguente non è mai minore del rapporto corrispondente in una seconda serie che si conosce essere convergente.*

È chiaro in questo caso che la serie proposta non è maggiore di una certa serie convergente; ed è quindi convergente.

212. *Una serie è divergente se da un certo termine fisso in poi il rapporto di ciascun termine al termine seguente non è mai maggiore del rapporto corrispondente in una seconda serie che si conosce essere divergente.*

È chiaro in questo caso che la serie proposta non è minore di una certa serie divergente; ed è quindi divergente.

213. *Dinoti* u_n *l'*n^{mo} *termine di una serie; allora se da un certo valore fisso di* n *in poi il valore di* $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *è sempre maggiore di una certa quantità positiva che è essa stessa maggiore dell'unità, la serie è convergente.*

Supponiamo che da un certo valore fisso di n in poi il valore di $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ sia sempre maggiore di γ, in cui γ è positiva e maggiore dell'unità. Allora $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$ è maggiore di $\frac{\gamma}{n}$; e quindi $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ è maggiore di $1 + \frac{\gamma}{n}$.

Ora, per l'Art. 169, si può trovare una quantità positiva p maggiore dell'unità, tale che quando n è abbastanza grande $\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$

sia minore di $1+\frac{\gamma}{n}$. Quindi, quando n è abbastanza grande, $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ è maggiore di $\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$. Ma, per l'Art. 97, la serie di cui l'n^{mo} termine è $\frac{1}{n^p}$ è convergente quando p è positivo e maggiore dell'unità; quindi per l'Art. 211 la serie di cui l'n^{mo} termine è u_n è convergente.

214. *Dinoti* u_n *l'* n^{mo} *termine di una serie; allora se da un certo valore fisso di* n *in poi il valore di* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ *non è mai positivo e maggiore dell'unità, la serie è divergente.*

Infatti qui dopo un certo valore fisso di n il valore di $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ è eguale ad $1+\frac{1}{n}$ o pure è minore di $1+\frac{1}{n}$. Ma, per l'Art. 97, la serie di cui l'n^{mo} termine è $\frac{1}{n}$ è divergente; quindi, per l'Art. 212, la serie di cui l'n^{mo} termine è u_n è divergente.

215. Le regole date negli Art. 213 e 214 spesso ci abiliteranno a decidere sulla convergenza o divergenza delle serie nel caso notato nell'Art. 209 in cui le nostre prime regole non si applicano. Vi è un caso al quale le nuove regole non si applicano, che è desiderabile di notare, cioè quello in cui da un certo valore fisso di n in poi il valore di $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ è sempre positivo e maggiore dell'unità, ma continuamente si avvicina all'unità. Procederemo ad investigare dei teoremi dai quali dedurremo caratteri per questo caso.

216. È chiaro per la natura di un logaritmo che se n cresce indefinitamente, accade lo stesso per $\log n$. Ma è importante osservare che $\log n$ cresce molto meno rapidamente di n; infatti $\frac{\log n}{n}$ si può rendere tanto piccolo quanto ci piace prendendo n abbastanza grande. Infatti si supponga $n=e^x$, sicchè $\log n=x$; allora al crescere n indefinitamente, cresce anche x. Ora si ha evidente-

mente $\frac{\log n}{n}=\frac{x}{e^x}=\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\dots}$; che è minore di $\frac{x}{x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\dots}$,

cioè minore di $\frac{1}{1+\frac{x}{\lfloor 2}+\frac{x^2}{\lfloor 3}+\dots}$, ed è chiaro che questo si può rendere tanto piccolo quanto ci piace prendendo n abbastanza grande.

Queste osservazioni si troveranno utili nello studiare il resto di questo Capitolo. Adotteremo per brevità la seguente notazione: si dinoti $\log n$ con $\lambda(n)$; si dinoti $\log(\log n)$ con $\lambda^2(n)$; si dinoti $\log\{\log(\log n)\}$ con $\lambda^3(n)$; e così di seguito.

217. *La serie di cui il termine generale è*

$$\frac{1}{n\lambda(n)\lambda^2(n)\dots\lambda^r(n)\{\lambda^{r+1}(n)\}^p}\quad\dots\dots\dots\dots\quad(1)$$

è convergente se p *è maggiore dell'unità, e divergente se* p *è eguale all'unità o minore dell'unità.*

Supponiamo n tanto grande che $\lambda^{r+1}(n)$ sia possibile e positivo.

La verità di questo teorema quando $r=0$ è stata dimostrata nell'Art. 98; la dimostreremo generalmente con l'Induzione.

Per l'Art. 98 la serie di cui (1) è il termine generale è convergente o divergente simultaneamente con la serie di cui il termine generale è

$$\frac{m^n}{m^n\lambda(m^n)\lambda^2(m^n)\dots\lambda^r(m^n)\{\lambda^{r+1}(m^n)\}^p}\quad\dots\dots\dots\quad(2),$$

in cui m è un intero positivo qualunque.

I. Supponiamo p maggiore dell'unità. Sia m un intero positivo qualunque *maggiore* della base dei logaritmi Neperiani; allora $\lambda(m^n)$ è *maggiore* di n. Segue da ciò che il termine generale (2) è *minore* di

$$\frac{1}{n\lambda(n)\lambda^2(n)\dots\lambda^{r-1}(n)\{\lambda^r(n)\}^p}\quad\dots\dots\dots\dots\quad(3);$$

così per l'Art. 211 se la serie di cui (3) è il termine generale è convergente, accade lo stesso per quella di cui (2) è il termine generale, e così anche per quella di cui (1) è il termine generale.

Quindi se la serie di cui (3) è il termine generale è convergente quando r ha un valore particolare qualunque, essa è convergente quando r si cambia in $r+1$. Ma poichè p è maggiore dell'unità, per l'Art. 98 la serie di cui (3) è il termine generale è convergente quando $r=1$, e quindi quando $r=2$, e quindi quando $r=3$, e così di seguito. Così la serie di cui (1) è il termine generale è convergente.

II. Supponiamo p eguale all'unità. Sia $m=2$ che è un intero positivo *minore* della base dei logaritmi Neperiani; allora $\lambda(m^n)$ è *minore* di n. Segue da ciò che il termine generale (2) è *maggiore* di

$$\frac{1}{n\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^{r-1}(n)\lambda^r(n)}.$$

Quindi procedendo come in I. possiamo mostrare che la serie di cui (1) è il termine generale è divergente.

III. Supponiamo p minore dell'unità. Allora il termine generale (1) è maggiore di quello che sarebbe se p fosse eguale all'unità, almeno quando n è grande abbastanza, e quindi *a fortiori* la serie è divergente.

Una dimostrazione semplice di questo teorema per mezzo del Calcolo integrale è data nell'*Integral Calculus*, Cap. IV.

218. Dinoti u_n il termine generale di una serie proposta. Se da un certo valore qualunque di n in poi il valore di

$$u_n n\,\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^r(n)\left\{\lambda^{r+1}(n)\right\}^p$$

è sempre finito, p essendo una quantità fissa qualunque maggiore dell'unità, la serie proposta è convergente.

Poichè in questo caso i termini della serie proposta hanno un rapporto finito ai termini di una serie che è stata dimostrata essere convergente.

Se da un valore qualunque di n in poi il valore di

$$u_n n\,\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^r(n)\lambda^{r+1}(n)$$

è sempre finito o infinito, la serie proposta è divergente.

Poichè in questo caso i termini della serie proposta hanno almeno un rapporto finito ai termini di una serie che è stata dimostrata essere divergente.

219. Il teorema dell'Art. 218 si può adoperare in casi ai quali i caratteri già dati di convergenza e divergenza non si applicano; ma in generale sarà più conveniente di usare le regole che dimostreremo nell'Articolo seguente.

220. *Stia* P_0 *per* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$; *allora se da un certo valore fisso di* n *in poi il valore di* $\lambda(n)(P_0-1)$ *è sempre maggiore di una certa quantità positiva che è essa stessa maggiore dell'unità la serie di cui l'*n^{mo} *termine è* u_n *è convergente; e se da un certo valore fisso di* n *in poi il valore di* $\lambda(n)(P_0-1)$ *non è mai positivo e maggiore dell'unità la serie è divergente.*

I. Supponiamo che da un certo valore fisso di n in poi il valore di $\lambda(n)(P_0-1)$ sia sempre maggiore di γ, in cui γ è positiva e maggiore dell'unità. Allora P_0-1 è maggiore di $\frac{\gamma}{\lambda(n)}$; quindi $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ è maggiore di $1+\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{n\lambda(n)}$.

Sia $$v_n=\frac{1}{n\{\lambda(n)\}^p};\ \text{allora}\ \frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\left\{\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)}\right\}^p.$$

Ora $\lambda(n+1)=\lambda(n)+\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)$; quindi $\lambda(n+1)$ è minore di $\lambda(n)+\frac{1}{n}$ per l'Art. 170; e quindi $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ è minore di $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{1}{n\lambda(n)}\right\}^p$; e quindi quando n è abbastanza grande $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ è minore di $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{q}{n\lambda(n)}\right\}$, purchè q sia maggiore di p: si vegga l'Art. 169. Così $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ è minore di $1+\frac{1}{n}+\frac{q}{n\lambda(n)}+\frac{q}{n^2\lambda(n)}$; e quando n è preso grande abbastanza l'ultimo dei quattro termini ora dati è incomparabilmente minore del terzo; e quindi $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ è minore di $1+\frac{1}{n}+\frac{r}{n\lambda(n)}$, purchè r sia maggiore di q.

Questo risultato vale comunque piccolo sia l'eccesso di q sopra p, e comunque piccolo sia l'eccesso di r sopra q: quindi poichè γ è maggiore dell'unità possiamo supporre che γ sia maggiore di r, ed avere ancora p positivo e maggiore dell'unità.

Poichè γ è maggiore di r abbiamo $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ maggiore di $\frac{v_n}{v_{n+1}}$. Ma, per l'Art. 217, la serie di cui il termine generale è v_n è convergente quando p è positivo e maggiore dell'unità; quindi, per l'Art. 211, la serie di cui l'n^{mo} termine è u_n è convergente.

II. Supponiamo che da un certo valore fisso di n in poi il valore di $\lambda(n)(P_0-1)$ non sia mai positivo e maggiore dell'unità. Allora P_0-1 è positivo e non maggiore di $\frac{1}{\lambda(n)}$ o è negativo. In tutti e due i casi $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ è minore di $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\lambda(n)}$.

Sia $$v_n=\frac{1}{n\lambda(n)};\ \text{allora}\ \frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\,\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)}.$$

Ora $\lambda(n+1)=\lambda(n)+\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)$; quindi $\lambda(n+1)$ è maggiore di $\lambda(n)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$ per l'Art. 171; e quindi $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ è maggiore di $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{1}{n\lambda(n)}-\frac{1}{2n^2\lambda(n)}\right\}$; quindi quando n è abbastanza grande $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ è maggiore di $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\lambda(n)}$.

Così quando n è abbastanza grande $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ è minore di $\frac{v_n}{v_{n+1}}$. Ma, per l'Art. 217, la serie di cui il termine generale è v_n è divergente; quindi, per l'Art. 212, la serie di cui l'^{mo} termine è u_n è divergente.

221. Il teorema dell'Art. 220 non si applica al caso in cui $\lambda(n)(P_0-1)$ è sempre positivo e maggiore dell'unità, ma si avvicina continuamente all'unità; allora si può adoperare un altro teorema il quale ancora è inapplicabile in un certo caso. Si può così ottenere una serie di teoremi ciascuno dei quali si può successivamente sperimentare con vantaggio se tutti quelli che lo precedono sono inapplicabili. I teoremi si troveranno nell'*Integral Calculus*, Cap. IV; essi si potrebbero dimostrare nel modo dell'Art. 220, ma siccome essi non sono richiesti nelle ricerche elementari non abbiamo bisogno di considerarli qui: come un esercizio per lo studente il teorema che segue in ordine a quello dell'Art. 220 è dato come l'ultimo Esempio in fine del presente Capitolo.

Illustreremo le regole che sono state dimostrate applicandole nei tre Articoli seguenti.

222. È stata chiamata *ipergeometrica* la serie

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)\,(\gamma+2)}x^3+\ldots\ldots;$$

determineremo ora quando la serie è convergente, e quando è divergente.

Si dinoti la serie con $u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$; così

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)\,(n+\gamma)}{(n+\alpha)(n+\beta)\,x}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)x};$$

così, per l'Art. 209, se x è minore dell'unità la serie è convergente, e se x è maggiore dell'unità la serie è divergente. Si ponga $x=1$; allora

$$P_0=\frac{1+\gamma-\alpha-\beta+\frac{\gamma-\alpha\beta}{n}}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)};$$

così se $\gamma-\alpha-\beta$ è positivo la serie è convergente, e se $\gamma-\alpha-\beta$ è negativo la serie è divergente: si veggano gli Art. 213, 214. Se $\gamma-\alpha-\beta$ è zero dobbiamo usare l'Art. 220; abbiamo allora

$$\lambda(n)\,(P_0-1)=-\frac{\frac{\alpha\beta}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda(n)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)};$$

questo si può rendere tanto piccolo quanto si vuole prendendo n abbastanza grande, e quindi la serie è divergente.

223. Supponiamo che $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+an^{k-1}+bn^{k-2}+cn^{k-3}+\ldots}{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+Cn^{k-3}+\ldots}$, in cui n è un intero positivo, e nessun esponente è negativo; ed $a,b,c,\ldots$ $A,B,C,\ldots$ sono quantità costanti qualunque: mostreremo che la serie di cui l'n^{mo} termine è u_n è convergente, se $a-A-1$ è positivo, e divergente se $a-A-1$ è negativo o zero.

Qui $$P_0=\frac{(a-A)\,n^k+(b-B)\,n^{k-1}+(c-C)\,n^{k-2}+\ldots}{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+\ldots};$$

così se $a-A-1$ è positivo la serie è convergente, e se $a-A-1$ è

negativo la serie è divergente: si veggano gli Art. 213, 214. Se $a-A-1$ è zero abbiamo

$$P_0 = \frac{n^k + (b-B)\,n^{k-1} + \ldots}{n^k + An^{k-1} + Bn^{k-2} + \ldots};$$

possiamo ancora in alcuni casi determinare se la serie è convergente o divergente senza adoperare alcuna nuova regola, per esempio se $b-B-A$ è negativo la serie sarà divergente per l'Art. 214. Ma sarà più conveniente far uso dell'Art. 220; abbiamo allora

$$\lambda(n)\,(P_0 - 1) = \frac{\lambda(n)\,\{(b-B-A)\,n^{k-1} + (c-C-B)\,n^{k-2} + \ldots\}}{n^k + An^{k-1} + Bn^{k-2} + \ldots};$$

questo si può rendere tanto piccolo quanto ci piace prendendo n abbastanza grande, e quindi la serie è divergente.

224. Esamineremo ora lo sviluppo di $(1+x)^m$ col Teorema del Binomio e determineremo se esso è convergente o divergente quando $x=1$ o -1.

Dinoti u_r l'r^{mo} termine nello sviluppo di $(1+x)^m$; allora

$$u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \ldots$$
$$= u_r \left\{ \frac{m-r+1}{r}\,x + \frac{(m-r+1)\,(m-r)}{r\,(r+1)}\,x^2 + \ldots \right\}.$$

Dobbiamo quindi considerare la serie inclusa fra parentesi.

I. Supponiamo $x=1$. Sia r numericamente non minore di m; allora i termini della serie in parentesi sono alternativamente positivi e negativi.

Se m è positivo, o negativo e numericamente minore dell'unità, ciascun termine è numericamente minore del termine precedente e la serie è convergente per l'Art. 93.

Se $m=-1$ la serie in parentesi prende la forma

$$-1+1-1+\ldots,$$

la quale è convergente secondo la definizione dell'Art. 89.

Se m è negativo e numericamente maggiore dell'unità ciascun termine della serie in parentesi è numericamente maggiore del termine precedente e la serie è divergente.

II. Supponiamo $x=-1$. Allora la serie in parentesi è

$$\frac{r-m-1}{r}+\frac{(r-m-1)(r-m)}{r(r+1)}+\frac{(r-m-1)(r-m)(r-m+1)}{r(r+1)(r+2)}+\dots$$

Sia r numericamente non minore di m; allora i termini di questa serie sono tutti dello stesso segno. Nell'Art. 222 si ponga $\alpha=1$, $\beta=r-m-1$, e $\gamma=r$: quindi troviamo che la serie è convergente se m è positivo, e divergente se m è negativo.

ESEMPII DI CONVERGENZA E DIVERGENZA DELLE SERIE.

1. Mostrare in qual modo determinare se il prodotto di un numero infinito di fattori u_1, u_2, u_3, u_4, ... sia finito o pur no.

2. Mostrare che il valore quando n è infinito di

$$\frac{\lfloor n\, n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

è finito eccetto quando x è un intero negativo.

3. Mostrare che quando x è l'unità il valore di u_n nell'Art. 222 cresce indefinitamente con n se $\alpha+\beta-\gamma-1$ è positivo.

4. Mostrare che quando x è l'unità il valore di u_n nell'Art. 222 è finito quando n cresce indefinitamente se $\alpha+\beta-\gamma-1$ è zero.

5. Mostrare che quando x è l'unità il valore di u_n nell'Art. 222 è indefinitamente piccolo quando n cresce indefinitamente se $\alpha+\beta-\gamma-1$ è negativo.

6. Determinare se la serie seguente è convergente o divergente, x essendo positivo:

$$ax+\frac{a(a+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{\lfloor 3}x^3+\dots$$

7. Se $u_n=\dfrac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$ mostrare che la serie è divergente.

8. Determinare se la serie seguente è convergente o divergente, x essendo positivo:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^3}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^4}{7}+\dots$$

9. Determinare se la serie seguente è convergente o divergente, β essendo una frazione propria positiva:

$$1+\frac{\beta(1-\beta)}{1^2}+\frac{(1+\beta)\beta(1-\beta)(2-\beta)}{1^2.2^2}$$
$$+\frac{(2+\beta)(1+\beta)\beta(1-\beta)(2-\beta)(3-\beta)}{1^2.2^2.3^2}+\dots$$

10. Se $u_n=\frac{n^p}{(n-1)^q}$, in cui p e q sono positivi, determinare se la serie è convergente o divergente.

11. Mostrare che se da un certo valore fisso di n in poi il valore di $n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}$ è sempre maggiore di una certa quantità positiva che è essa stessa maggiore dell'unità la serie è convergente.

12. Mostrare che se da un certo valore fisso di n in poi il valore di $n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}$ non è mai positivo e maggiore dell'unità la serie è divergente.

13. Determinare se la serie seguente è convergente o divergente, x essendo positivo:

$$\frac{a+x}{1}+\frac{(a+2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(a+3x)^3}{\lfloor 3}+\dots$$

14. Dare un'investigazione dei risultati dell'Art. 222 senza usare l'Art. 220.

15. Dare un'investigazione dei risultati dell'Art. 223 senza usare l'Art. 220.

16. Se $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^\alpha+an^\beta+bn^\gamma+\dots}{n^\alpha+An^\beta+Bn^\gamma+\dots}$ in cui α, β, γ ... sono costanti positive in ordine decrescente di grandezza, ed a, b, ... A, B, ... sono costanti qualunque, determinare se la serie di cui l'n^{mo} termine è u_n è convergente o divergente.

17. Mostrare che le due serie $u_0+u_1+u_2+u_3+\dots$

ed $$\frac{u_1}{u_0}+\frac{u_2}{u_1+u_0}+\frac{u_3}{u_2+u_1+u_0}+\frac{u_4}{u_3+u_2+u_1+u_0}+\dots$$

sono insieme convergenti o insieme divergenti; $u_0, u_1, u_2, \dots$ essendo tutte quantità positive.

18. Stia P_1 per $\lambda(n)(P_0-1)$; allora se da un certo valore fisso di n in poi il valore di $\lambda^2(n)(P_1-1)$ è sempre maggiore di una certa quantità positiva che è essa stessa maggiore dell'unità la serie di cui l'n^{mo} termine è u_n è convergente; e se da un certo valore fisso di n in poi il valore di $\lambda^2(n)(P_1-1)$ non è mai positivo e maggiore dell'unità la serie è divergente.

XVI. FRAZIONI CONTINUE.

225. La forma più generale di una frazione continua è

$$\cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 \pm \cfrac{b_3}{a_3 \pm \dots}}}.$$

Qui $a_1, a_2, a_3, \dots$ e $b_1, b_2, b_3, \dots$ possono dinotare quantità qualunque, intere o frazionarie, positive o negative. Le frazioni semplici $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$ si possono chiamare *componenti* della frazione continua. L'uno o l'altro segno si potrebbe prendere dove si trova $\pm$; ma considereremo solamente due casi, cioè quello in cui ogni segno è $+$, e quello in cui ogni segno è $-$. Avremo così due classi di frazioni continue, che chiameremo la prima classe e la seconda classe rispettivamente.

Nei Capitoli VIII. e IX. ci limitammo alle frazioni continue della prima classe in cui ogni componente ha l'unità per suo numeratore, ed un intero positivo per suo denominatore: ma daremo ora alcune proposizioni relative alla forma più generale.

226. Le frazioni ottenute fermandosi alla prima, seconda, terza,... componente si chiamano la prima, seconda, terza, ... *convergente*.

Così la prima convergente è $\frac{b_1}{a_1}$; la seconda convergente è $\cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2}}$, cioè $\frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 \pm b_2}$; e così di seguito.

227. Negli Art. 228...232 tratteremo delle frazioni continue della *prima* classe; negli Art. 233...240 tratteremo delle frazioni continue della *seconda* classe: in tutti questi Articoli supporremo che ogni componente abbia sì il numeratore che il denominatore positivo.

228. Si dinotino le convergenti successive con $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots\ldots$ Allora possiamo mostrare come nell'Art. 106 che le convergenti successive si possono ottenere con queste leggi:

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}.$$

Quindi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right); \text{ e } \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}},$$

che è una *frazione propria*. Così $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$ è numericamente minore di $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, ed è di segno contrario.

Ora $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}$; e questo è positivo. Quindi vediamo che la serie seguente consiste di quantità *positive* che sono in ordine decrescente di grandezza:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_6}{q_6}, \ldots$$

Questi risultati contengono i seguenti fatti per una frazione continua della prima classe:

Le convergenti di un ordine dispari decrescono continuamente, e le convergenti di un ordine pari crescono continuamente.

Ogni convergente di un ordine dispari è maggiore, ed ogni convergente di un ordine pari è minore, di tutte le convergenti seguenti.

229. Supponiamo ora il numero delle componenti infinito. Può accadere che prendendo n abbastanza grande possiamo rendere la differenza tra l'n^{ma} convergente e la convergente seguente minore di ogni quantità assegnata; o pure può accadere che comunque grande sia n la differenza tra l'n^{ma} convergente e la convergente seguente sia sempre maggiore di una certa quantità fissa.

Nel primo caso il valore verso del quale le convergenti d'ordine dispari decrescono continuamente, e le convergenti d'ordine pari crescono continuamente, si può chiamare il valore della frazione continua infinita: e diremo che la frazione continua infinita è *definita*. Nel secondo caso la frazione continua infinita non si può dire

che abbia un solo valore; ma essa si può considerare che rappresenti due valori, l'uno essendo quello al quale tendono le convergenti dispari e l'altro quello al quale tendono le convergenti pari.

230. *Se da un certo valore fisso di* r *in poi il valore* $\frac{a_r a_{r+1}}{b_{r+1}}$ *è maggiore di una certa quantità fissa positiva, la frazione continua infinita è definita.*

Dinoti γ la quantità fissa positiva.

Applicando successivamente il risultato dell'Art. 228 abbiamo

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right) \frac{b_3 q_1}{q_3} \frac{b_4 q_2}{q_4} \cdots \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}}.$$

Ora $\frac{b_{r+1} q_{r-1}}{q_{r+1}} = \frac{b_{r+1} q_{r-1}}{a_{r+1} q_r + b_{r+1} q_{r-1}} = \frac{b_{r+1} q_{r-1}}{a_{r+1}(a_r q_{r-1} + b_r q_{r-2}) + b_{r+1} q_{r-1}}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{a_r a_{r+1}}{b_{r+1}} + \frac{a_{r+1} b_r q_{r-2}}{b_{r+1} q_{r-1}}};$$

e questo è minore di $\frac{1}{1+\gamma}$ poichè $\frac{a_r a_{r+1}}{b_{r+1}}$ è maggiore di γ.

Quindi $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$ è numericamente minore di $\frac{c}{(1+\gamma)^{n-r+1}}$, in cui c è una costante; e prendendo n abbastanza grande questo si può rendere minore di ogni valore assegnato. Quindi la frazione continua infinita è *definita*.

Noi qui mostriamo che la condizione stabilita è *sufficiente* per assicurare che la frazione continua infinita sia definita; non si asserisce che la condizione sia *necessaria*.

231. *Una frazione continua infinita della prima classe in cui ogni componente è una frazione propria con il numeratore ed il denominatore interi deve essere una quantità incommensurabile.*

Infatti se è possibile supponiamo la frazione continua commensurabile, e dinotiamola con $\frac{B}{A}$, in cui A e B sono interi positivi. Così $\frac{B}{A} = \frac{b_1}{a_1 + \rho_1}$, in cui ρ_1 dinota la frazione continua infinita che incomincia con la componente $\frac{b_2}{a_2}$. Quindi $\rho_1 = \frac{Ab_1 - Ba_1}{B}$; il numeratore di questa frazione è un intero, che dinoteremo con C: e C

deve essere positivo poichè ρ_1 è positivo. In simil modo, se ρ_2 dinota la frazione continua infinita che incomincia con la componente $\frac{b_3}{a_3}$ troviamo che $\rho_2 = \frac{D}{C}$, in cui D è anche un intero positivo. E così di seguito.

Inoltre $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \ldots$ debbono essere tutte frazioni proprie. Infatti $\frac{B}{A}$ è minore di $\frac{b_1}{a_1}$, e questa è una frazione propria; $\frac{C}{B}$ è minore di $\frac{b_2}{a_2}$, e questa è una frazione propria; e così di seguito.

Quindi $A, B, C, D, \ldots$ formano una serie *d'interi positivi*, che sono in ordine *decrescente* di grandezza, e non pertanto *infiniti* di numero: questo è assurdo. Quindi la frazione continua infinita non può essere una quantità commensurabile.

232. *Se alcune delle componenti di una frazione continua infinita non sono frazioni proprie, ma da una certa componente in poi tutte le altre sono frazioni proprie la frazione continua infinita è incommensurabile.*

Infatti supponiamo che $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ e tutte le componenti seguenti siano frazioni proprie, allora per l'Art. 231 la frazione continua infinita che incomincia con $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ è incommensurabile; dinotiamola con x. Come nell'Art. 228 abbiamo

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}},$$

ed il valore della frazione continua si otterrà cambiando a_n in $a_n + x$; sicchè esso è $\frac{(a_n + x)p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{(a_n + x)q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$, cioè, $\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$. Questo non può essere commensurabile a meno che non sia $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, e questo per mezzo del valore di $\frac{p_n}{q_n}$ conduce a $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$; e così arriveremmo a $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1}$. Questo è impossibile, non potendo avere $b_1 = 0$ o $b_2 = 0$.

233. *Una frazione continua della seconda classe in cui il denominatore di ogni componente eccede il numeratore almeno di un'unità, ha tutte le sue convergenti frazioni proprie positive che sono in ordine crescente di grandezza.*

La prima convergente $\frac{b_1}{a_1}$ è una frazione propria positiva per ipotesi. La seconda convergente è $\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}$; e siccome $\frac{b_2}{a_2}$ è una frazione propria, ed a_1 eccede b_1 almeno per l'unità, $a_1 - \frac{b_2}{a_2}$ è positiva e maggiore di b_1; e così la seconda convergente è una frazione propria positiva. La terza convergente si può dinotare con $\frac{b_1}{a_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}}$, in cui $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ sta per $\frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}$, sicchè $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ è una frazione propria positiva per la stessa ragione che la seconda convergente è tale: quindi per la stessa ragione la terza convergente è una frazione propria positiva. La quarta convergente si può dinotare con $\frac{b_1}{a_1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}}$, in cui $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ dinota una frazione della stessa forma della terza convergente, la quale è perciò una frazione propria positiva: quindi la quarta convergente è una frazione propria positiva. E così di seguito.

Ancora; come nell'Art. 228 troveremo che le convergenti successive si possono ottenere con queste leggi:

$$p_n = a_n p_{n-1} - b_n p_{n-2} \quad , \quad q_n = a_n q_{n-1} - b_n q_{n-2}.$$

Quindi
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right);$$

così $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$ è dello stesso segno di $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$,

Ora $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 - b_2} - \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}$; e questo è positivo. Segue da ciò che $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ formano una serie di frazioni proprie positive in ordine crescente di grandezza.

234. Se il numero delle componenti è infinito le convergenti formano una serie infinita di frazioni proprie in ordine crescente di grandezza; e così i termini non eccederanno mai un certo valore fisso che è al più l'unità. Possiamo dire adunque che *una frazione continua infinita della seconda classe in cui il denominatore di ogni componente eccede il suo numeratore almeno per l'unità è definita.*

235. Mostreremo ora che p_n e q_n nell'Art. 233 crescono con n.

Infatti $p_n - p_{n-1} = (a_n - 1)p_{n-1} - b_n p_{n-2}$; ora a_{n-1} è almeno tanto grande quanto b_n; quindi p_n è maggiore di p_{n-1} se p_{n-1} è maggiore di p_{n-2}; e così di seguito: e p_2 è evidentemente maggiore di p_1. Così p_n è maggiore di p_{n-1}. Similmente q_n è maggiore di q_{n-1}.

236. *Se in una frazione continua infinita della seconda classe ogni componente ha il suo numeratore non minore dell'unità ed il suo denominatore maggiore del suo numeratore per l'unità, il valore della frazione continua infinita è l'unità.*

Qui abbiamo sempre $a_n = b_n + 1$; quindi per l'Art. 233,

$$p_n = (b_n + 1)p_{n-1} - b_n p_{n-2};$$

sicchè
$$p_n - p_{n-1} = b_n(p_{n-1} - p_{n-2}).$$

Ora $p_1 = b_1$, $p_2 = a_2 b_1 = (b_2 + 1)b_1$; così $p_2 - p_1 = b_1 b_2$. Quindi otteniamo successivamente

$$p_3 - p_2 = b_1 b_2 b_3,\ p_4 - p_3 = b_1 b_2 b_3 b_4,\ \ldots,\ p_n - p_{n-1} = b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Quindi, con l'addizione,

$$p_n = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \ldots + b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Similmente abbiamo $q_n - q_{n-1} = b_n(q_{n-1} - q_{n-2})$. Ora $q_1 = b_1 + 1$, $q_2 = (b_1 + 1)(b_2 + 1) - b_2$; sicchè $q_2 - q_1 = b_1 b_2$. Quindi otteniamo successivamente

$$q_3 - q_2 = b_1 b_2 b_3,\ q_4 - q_3 = b_1 b_2 b_3 b_4,\ \ldots,\ q_n - q_{n-1} = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Quindi, con l'addizione,

$$q_n = 1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \ldots + b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$$

Così, $q_n = p_n + 1$; e $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_n}{p_n + 1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{p_n}}$. Ora p_n per la nostra ipotesi non è minore di n, e così si può render tanto grande quanto

ci piace prendendo n abbastanza grande; quindi $\frac{p_n}{q_n}$ si può far differire dall'unità per meno di ogni quantità assegnata: e possiamo quindi dire che il valore della frazione continua infinita è l'unità.

237. Si sarà veduto che l'investigazione dell'Articolo precedente stabilisce qualche cosa di più di quello che è contenuto nell'enunciato che usammo per semplicità. Le condizioni essenziali sono che $a_n = b_n + 1$ per tutt'i valori di n; e che p_n debba crescere indefinitamente con n. È *sufficiente* per l'ultima condizione che b_n non sia mai minore dell'unità, ma non *necessario*. La condizione necessaria e sufficiente si è che la serie infinita di cui l'm^{mo} termine è $b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$ sia divergente; questo si assicurerebbe per esempio se $b_m = \frac{m}{m+1}$: si vegga l'Art. 97.

238. *Se il denominatore di ogni componente eccede il suo numeratore per più dell'unità mentre il denominatore di ogni componente eccede il suo numeratore almeno per l'unità il valore della frazione continua infinita è minore dell'unità.*

Supponiamo, per esempio, che $a_2 = b_2 + p$ in cui p è positiva e maggiore dell'unità. La frazione continua infinita è equivalente a $\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{b_2 + p - \rho}}$, in cui ρ è una quantità positiva che rappresenta la frazione continua infinita che incomincia con la componente $\frac{b_3}{a_3}$. Ora ρ non può eccedere l'unità per l'Art. 234; quindi $\frac{b_2}{b_2 + p - \rho}$ è una frazione propria positiva; e quindi come nell'Art. 233 vediamo che $\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{b_2 + p - \rho}}$ è una frazione propria positiva.

239. *Una frazione continua infinita della seconda classe in cui ogni componente è una frazione propria con il numeratore ed il denominatore interi, ed in cui il valore della frazione continua infinita che incomincia con una componente qualunque è minore dell'unità non può essere una quantità commensurabile.*

Infatti se è possibile, supponiamo la frazione continua commensurabile, e dinotiamola con $\frac{B}{A}$, in cui A e B sono interi positivi.

Così $\frac{B}{A} = \frac{b_1}{a_1 - \rho_1}$ in cui ρ_1 dinota la frazione continua infinita che incomincia con la componente $\frac{b_2}{a_2}$. Quindi $\rho_1 = \frac{a_1 B - b_1 A}{B}$; il numeratore di questa frazione è un intero che dinoteremo con C; e C deve essere positivo poichè ρ_1 è positivo. In simil modo, se ρ_2 dinota la frazione continua infinita che incomincia con la componente $\frac{b_3}{a_3}$ troviamo che $\rho_2 = \frac{D}{C}$, in cui D è anche un intero positivo. E così di seguito.

Inoltre $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, ... debbono essere tutte frazioni proprie per ipotesi.

Quindi A, B, C, D, ... formano una serie di *interi positivi*, i quali sono in ordine *decrescente* di grandezza, e non pertanto *infiniti* di numero; questo è assurdo. Quindi la frazione continua infinita non può essere una quantità commensurabile.

L'Articolo 232 si applica qui ancora, con la condizione dell'enunciato nell'Art. 239.

240. Abbiamo supposto nell'Articolo precedente che la frazione continua infinita che incomincia con una componente qualunque sia minore dell'unità. Per gli Art. 236, 239, questo sarà sempre assicurato eccetto nel caso in cui da una certa componente fissa in poi il denominatore di ogni componente eccede il numeratore per l'unità.

241. Per un esempio di una frazione continua infinita definita della prima classe, supponiamo che ogni componente sia $\frac{b}{2a}$, in cui a e b sono positivi. Si dinoti la frazione continua con x; allora

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}; \quad \text{sicchè} \quad x = \frac{b}{2a + x};$$

quindi $x^2 + 2ax - b = 0$; quindi $x = -a \pm \sqrt{(a^2 + b)}$: si deve prendere il segno superiore, poichè la frazione continua è positiva. Così, transponendo, otteniamo

$$\sqrt{(a^2 + b)} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}.$$

Questa formola dà varii modi per esprimere una radice quadrata nella forma di una frazione continua. Per esempio, si prenda $\sqrt{17}$. Possiamo porre $17 = 16 + 1$, o pure $= 9 + 8$, e così di seguito. Così,

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \dots}} = 3 + \cfrac{8}{6 + \cfrac{8}{6 + \dots}}.$$

242. Per un esempio di una frazione continua infinita definita della seconda classe, supponiamo che ogni componente sia $\frac{b}{2a}$, in cui a e b sono positivi, e $2a$ eccede b almeno per l'unità. Si dinoti la frazione continua con x; allora

$$x = \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \dots}}, \quad \text{sicchè } x = \frac{b}{2a - x};$$

quindi $x^2 - 2ax + b = 0$; quindi $x = a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$. Si deve prendere il segno inferiore, poichè col segno superiore abbiamo un risultato maggiore di $a + a - b$, cioè maggiore di $2a - b$, che è maggiore dell'unità: ma la frazione continua infinita non può essere maggiore dell'unità, per l'Art. 234. Così, transponendo, otteniamo

$$\sqrt{(a^2 - b)} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \dots}}.$$

243. Nell'Art. 228 abbiamo

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2};$$

e nell'Art. 233 abbiamo simili relazioni col segno + cambiato in −. Ora supponiamo che i valori di a_n e b_n siano dati per tutt'i valori di n, e che p_1 e p_2 e q_1 e q_2 siano stati ottenuti; allora dalle relazioni generali precedenti possiamo determinare successivamente $p_3, p_4, p_5, \dots$ e $q_3, q_4, q_5, \dots$ Alle volte possiamo con artificii particolari scoprire una tale legge di formazione dei termini successivi da abilitarci a dare espressioni generali per p_n e q_n: un esempio si è incontrato già nell'Art. 236. O pure una legge si può vedere per tentativo che ha luogo, e si può verificare con l'induzione. La ricerca delle espressioni generali per p_n e q_n appartiene però ad un ramo superiore delle matematiche, cioè al Calcolo delle Differenze Finite.

Si può notare un caso particolare. Supponiamo che a_n e b_n siano costanti per tutt'i valori di n; si dinoti la prima con a, e la seconda

con b. Allora abbiamo $p_n = ap_{n-1} + bp_{n-2}$; e vediamo per mezzo dell'Art. 139 che p_n è eguale al coefficiente di x^{n-1} nello sviluppo secondo le potenze ascendenti di x di

$$\frac{p_1 + (p_2 - ap_1)x}{1 - ax - bx^2}:$$

inoltre $p_1 = b$, e $p_2 = ab$, sicchè questa espressione diviene

$$\frac{b}{1 - ax - bx^2}.$$

Similmente, q_n è eguale al coefficiente di x^{n-1} nello sviluppo di

$$\frac{q_1 + (q_2 - aq_1)x}{1 - ax - bx^2}:$$

inoltre $q_1 = a$, e $q_2 = a^2 + b$, sicchè questa espressione diviene

$$\frac{a + bx}{1 - ax - bx^2}, \text{ cioè } \frac{1}{x(1 - ax - bx^2)} - \frac{1}{x}.$$

244. Mostreremo ora in qual modo convertire una serie che ha un numero finito di termini in una frazione continua.

La serie $\frac{1}{u_0} + \frac{x}{u_1} + \frac{x^2}{u_2} + \ldots + \frac{x^n}{u_n}$ è identicamente eguale ad una frazione continua della seconda classe con $n+1$ componenti, in cui la prima componente è $\frac{1}{u_0}$, la seconda è $\frac{u_0^2 x}{u_0 x + u_1}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{u^2_{r-2} x}{u_{r-2} x + u_{r-1}}$.

Questo si può dimostrare con l'induzione.

È chiaro che $\frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_0}$;

e che
$$\frac{1}{u_0} + \frac{x}{u_1} = \frac{1}{u_0 - \frac{u_0^2 x}{u_0 x + u_1}};$$

ammettiamo che il teorema valga quando vi sono $n+1$ termini nella serie: mostreremo allora che esso reggerà quando vi sono $n+2$ termini.

Infatti si muti u_n in $u_n - \frac{u_n^2 x}{u_n x + u_{n+1}}$; allora $\frac{x^n}{u_n}$ si cambia in $\frac{x^n}{u_n - \frac{u_n^2 x}{u_n x + u_{n+1}}}$, cioè in $\frac{x^n(u_n x + u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$, cioè in $\frac{x^n}{u_n} + \frac{x^{n+1}}{u_{n+1}}$; sicchè un altro termine si è nel fatto aggiunto alla serie. Inoltre se il cambiamento di u_n in $u_n - \frac{u_n^2 x}{u_n x + u_{n+1}}$ si fa nella frazione continua con $n+1$ componenti otteniamo una frazione continua con $n+2$ componenti formate secondo la stessa legge.

Quindi se il teorema vale quando la serie ha $n+1$ termini esso vale quando la serie ha $n+2$ termini; e si è mostrato che esso vale quando la serie ha due termini: quindi esso vale in generale.

245. Possiamo dedurre il risultato seguente da quello dell'Art. 244 semplificando le frazioni che vi si trovano; o pure possiamo stabilirlo direttamente nel modo dell'Art. 244: la serie

$$\frac{1}{v_0} + \frac{x}{v_0 v_1} + \frac{x^2}{v_0 v_1 v_2} + \ldots + \frac{x^n}{v_0 v_1 v_2 \ldots v_n}$$

è identicamente eguale ad una frazione continua della seconda classe con $n+1$ componenti in cui la prima componente è $\frac{1}{v_0}$, la seconda è $\frac{v_0 x}{x + v_1}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{v_{r-2} x}{x + v_{r-1}}$.

246. Nelle identità degli Art. 244 e 245 possiamo se ci piace cambiare il segno di x; si prenda per esempio l'identità dell'Art. 245; quindi otteniamo il risultato seguente: la serie

$$\frac{1}{v_0} - \frac{x}{v_0 v_1} + \frac{x^2}{v_0 v_1 v_2} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{v_0 v_1 v_2 \ldots v_n}$$

è identicamente eguale ad una frazione continua della prima classe con $n+1$ componenti, in cui la prima componente è $\frac{1}{v_0}$, la seconda è $\frac{v_0 x}{v_1 - x}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{v_{r-2} x}{v_{r-1} - x}$. Questo risultato si può anche stabilire direttamente nel modo dell'Art. 244.

247. Negli Art. 244, 245 e 246 possiamo supporre n tanto grande quanto ci piace purchè la serie rimanga convergente; ed allora possiamo trasformare una serie infinita convergente in una frazione continua infinita.

248. Una formola molto importante su questo argomento è dovuta a Gauss. Si dinoti la serie infinita *ipergeometrica* dell'Art. 222 con $F(\alpha,\beta,\gamma)$; allora Gauss ha trasformato $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{F(\alpha,\beta,\gamma)}$ in una frazione continua infinita: la trasformazione regge purchè $F(\alpha,\beta,\gamma)$ ed $F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)$ siano entrambe convergenti.

La parte essenziale della dimostrazione consiste della seguente relazione: si ponga z per $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{F(\alpha,\beta,\gamma)}$, allora

$$z=\frac{1}{1-\frac{k_1}{1-k_2z_2}},$$

in cui $k_1=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}$, $k_2=\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$, e z_2 è ciò che diviene z quando in z si cambiano α,β,γ in $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+2$ rispettivamente. Questo ora mostreremo.

Nella serie per $F(\alpha,\beta,\gamma)$ si muti β in $\beta+1$, e γ in $\gamma+1$, e si sottragga il valore primitivo: così otteniamo

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)\ldots (1)$$

Similmente abbiamo

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\beta(\gamma-\alpha)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)\ldots (2)$$

Da (1) con la divisione

$$1-\frac{1}{z}=k_1\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Da (2) con la divisione dopo di aver cambiato β in $\beta+1$, e γ in $\gamma+1$,

$$1-\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}=k_2z_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Da (3) e (4) otteniamo il risultato richiesto.

Allora la frazione continua per z si può prolungare per mezzo della relazione

$$z_2 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{k_3}{1 - k_4 z_4}};$$

e questo si può prolungare a piacere, i termini generali essendo

$$k_{2r-1} = \frac{(\alpha + r - 1)(\gamma + r - 1 - \beta)x}{(\gamma + 2r - 2)(\gamma + 2r - 1)},$$

$$k_{2r} = \frac{(\beta + r)(\gamma + r - \alpha)x}{(\gamma + 2r - 1)(\gamma + 2r)},$$

$$z_{2r} = \frac{F(\alpha + r, \beta + r + 1, \gamma + 2r + 1)}{F(\alpha + r, \beta + r, \gamma + 2r)}.$$

Supponiamo da per tutto che le serie infinite siano convergenti; non potendosi impiegare (1) e (2) senza questa condizione; si vedrà per l'Art. 222 che se il numeratore o il denominatore di z è convergente allora tutte le serie infinite che si considerano sono convergenti.

Quando r è infinitamente grande z_{2r} non differirà sensibilmente dall'unità.

Infatti
$$z_{2r} = \frac{1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots},$$

in cui $\quad B_1 = \dfrac{(\alpha + r)(\beta + r)}{1(\gamma + 2r)}, \quad B_2 = \dfrac{(\alpha + r + 1)(\beta + r + 1)}{2(\gamma + 2r + 1)} B_1, \ldots;$

ed $A_1, A_2, \ldots$ si possono ottenere da $B_1, B_2, \ldots$ rispettivamente cambiando β in $\beta + 1$ e γ in $\gamma + 1$.

Così $\dfrac{A_1}{B_1}, \dfrac{A_2}{B_2}, \ldots$ si possono considerare tutte eguali all'unità quando r è infinitamente grande; e così per l'Art. 162 possiamo considerare z_{2r} eguale anche all'unità.

Poichè z_{2r} si può considerare essere l'unità $k_{2r} z_{2r}$ diviene semplicemente k_{2r}.

Così z è trasformata in una frazione continua infinita.

249. Per un caso particolare si ponga $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ invece di x; indi supponiamo che $\beta=\alpha$, e che α cresca indefinitamente: così il denominatore di z diviene

$$1+\frac{x^2}{1\cdot\gamma}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\ldots$$

che dinoteremo con $f(\gamma)$; il numeratore si può ottenere dal denominatore cambiando γ in $\gamma+1$.

Inoltre k_{2r-1} diviene $-\frac{x^2}{(\gamma+2r-2)(\gamma+2r-1)}$,

e k_{2r} diviene $-\frac{x^2}{(\gamma+2r-1)(\gamma+2r)}$.

Così finalmente $\frac{f(\gamma+1)}{f(\gamma)}$ è trasformata in una frazione continua infinita $\cfrac{1}{1+\cfrac{p_1}{1+\cfrac{p_2}{1+\ldots}}}$, in cui $p_m=\frac{x^2}{(\gamma+m-1)(\gamma+m)}$.

Questo risultato si può ottenere indipendentemente nel modo dell'Art. 248; poichè abbiamo

$$f(\gamma)-f(\gamma+1)=-\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}f(\gamma+2);\ \text{così}$$

$$\frac{f(\gamma)}{f(\gamma+1)}=1+\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}\frac{f(\gamma+2)}{f(\gamma+1)};\ \text{e così di seguito.}$$

250. Nel risultato dell'Articolo precedente si ponga $\frac{1}{2}$ per γ ed $\frac{y}{2}$ per x. Allora si troverà che $\frac{f(\gamma+1)}{f(\gamma)}$ diviene $\frac{e^y-e^{-y}}{y(e^y+e^{-y})}$; e che p_m diviene $\frac{y^2}{4m^2-1}$. Moltiplicando per y e semplificando le frazioni otteniamo finalmente per $\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$ una frazione continua infinita della prima classe in cui la prima componente è $\frac{y}{1}$, la seconda è $\frac{y^2}{3}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{y^2}{2r-1}$.

Per y si ponga $\frac{m}{n}$ in cui m ed n sono interi positivi; allora semplificando le frazioni otteniamo per $\frac{e^{\frac{m}{n}}-e^{-\frac{m}{n}}}{e^{\frac{m}{n}}+e^{-\frac{m}{n}}}$ una frazione continua infinita della prima classe in cui la prima componente è $\frac{m}{n}$, la seconda è $\frac{m^2}{3n}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{m^2}{(2r-1)n}$.

Quando r è grande abbastanza $(2r-1)n$ eccede m^2; quindi per l'Art. 232 la frazione continua infinita che incomincia con una convenevole componente è incommensurabile; e quindi l'intera frazione continua è incommensurabile. Quindi $e^{\frac{m}{n}}$ è incommensurabile per tutt'i valori interi di m ed n.

ESEMPII DI FRAZIONI CONTINUE.

1. Trovare il valore di $5-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\ldots}}$.

2. Mostrare che $\left\{n+\frac{1}{2n+}\,\frac{1}{2n+\ldots}\right\}^2-\left\{n-\frac{1}{2n-}\,\frac{1}{2n-\ldots}\right\}^2=2$.

3. In una frazione continua della prima classe ogni componente è $\frac{b}{a}$: mostrare che $p_{n+1}=bq_n$.

4. In una frazione continua della prima classe ogni componente è $\frac{b}{a}$: trovare i valori di p_n e q_n.

5. In una frazione continua della prima classe se $a_n=b_n=n$, mostrare che $p_n+q_n=\underline{|n+1}$.

6. In una frazione continua della prima classe se $b_{n+1}=1+a_n$, mostrare che $p_n-b_{n+1}p_{n-1}=A_n(-1)^n$, $q_n-b_{n+1}q_{n-1}=B(-1)^n$; in cui A e B sono costanti qualunque sia n.

7. In una frazione continua infinita della prima classe l'n^{ma} componente è $\frac{(n-1)^2+1}{n^2}$: mostrare che $p_n-(n^2+1)p_{n-1}=(-1)^{n+1}$.

8. Mostrare che e^{-x} si può trasformare in una frazione continua infinita della prima classe in cui la prima componente è $\frac{1}{1}$, la seconda è $\frac{x}{1-x}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{(r-2)x}{r-1-x}$.

9. Mostrare che $\log 2$ è eguale ad una frazione continua infinita della prima classe in cui la prima componente è $\frac{1}{1}$, la seconda è $\frac{1}{1}$, e generalmente la r^{ma} è $\frac{(r-1)^2}{1}$.

10. Ottenere dall'Art. 248 una frazione continua infinita della prima classe per $\frac{1}{x}\log(1+x)$.

RISPOSTE.

IV. 13. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)}{\lfloor 3}x^r$.

14. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{\lfloor 4}x^r$.

15. $-\dfrac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\ldots\{(r-1)n-1\}}{n^r\lfloor r}x^r$.

16. $-\dfrac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\ldots\{(r-1)p-1\}}{\lfloor r}x^r$.

17. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{\lfloor r\, 2^r}(-1)^r x^r$. 18. $\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3r-1)}{\lfloor r\, 3^r}x^{2r}$.

19. $\dfrac{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2r+5)}{\lfloor r}x^r$. 20. $\dfrac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4r-3)}{4^r\lfloor r}x^r$.

28. 2° e 3° termine $\dfrac{4}{1}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$. 29. 3° termine $=\dfrac{12\cdot 13}{1\cdot 2}\,\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{78}{25}$.

30. 5° e 6° termine $=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{\lfloor 4}\left(\dfrac{5}{7}\right)^4=\dfrac{9375}{2401}$.

31. 3° termine $=\dfrac{8\cdot 11}{3\cdot 6}\left(\dfrac{7}{12}\right)^2$. 32. Se $n=1$ il 2° ed il 3° termine sono i più grandi; se $n=2$ il 2° termine è il più grande, e per tutti gli altri valori di n il primo termine è il più grande.

33. $\dfrac{11\cdot 12\cdot 13}{\lfloor 3}$. 34. Sesto termine. 37. $\dfrac{n+1}{3}(2n^2+4n+3)$.

38. Il coefficiente di x^{2r} è $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{2^r a^{2r}\lfloor r}$; il coefficiente di x^{2r+1} si ottiene dividendo questa espressione per a.

41. $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, cioè, $\sqrt{2}$. 42. $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$.

45. $\dfrac{2n(2n+1)\ldots(2n+r-1)}{\lfloor r}$.

V. 1. 6. 2. -16. 3. $2^6\cdot 3^2+2^7\cdot 3+2^5\cdot 3^3+3^4=1905$.

4. 3. 5. $-2^9\cdot 5+2^6\cdot 3^3\cdot 5-2^2\cdot 3^4\cdot 5$.

6. $\lfloor 12\left\{\frac{2^4}{\lfloor 8\lfloor 4}+\frac{2^3}{\lfloor 7\lfloor 2\lfloor 3}+\frac{2^2}{\lfloor 6\lfloor 4\lfloor 2}+\frac{2}{\lfloor 5\lfloor 6}+\frac{1}{\lfloor 4\lfloor 8}\right\}$.

7. $2^4\cdot 5\cdot 7^2-2^3\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7+2\cdot 5^5$. 8. -64. 9. -20.

10. $-\frac{15}{8}-\frac{35}{4}-\frac{63}{8}=-\frac{37}{2}$. 11. $-\frac{1}{4}$. 12. $-3+6+15+\frac{35}{8}$.

13. $\left(\frac{3\cdot 7}{2^5}-\frac{7\cdot 11\cdot 19}{2^{10}}\right)$. 14. 50. 15. $\frac{n^4+6n^3-13n^2+6n}{24}$.

16. L'espressione è $\{(1+x)(1-x)^{-2}\}^7$. Quindi il coefficiente è

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{\lfloor 4}+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{\lfloor 3}\cdot\frac{14}{1}+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{14\cdot 15}{1\cdot 2}+\frac{7}{1}\cdot\frac{14\cdot 15\cdot 16}{\lfloor 3}+\frac{14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{\lfloor 4}.$$

17. $m+1$. 18. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}3^4+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{\lfloor 2\lfloor 3}2^2 3^3$.

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{\lfloor 4\lfloor 2}2^4 3^2+\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{\lfloor 6}2^6 3+\frac{n(n-1)\ldots(n-7)}{\lfloor 8}2^8.$$

19. 0. 20. $5a_3^4+20a_1a_2a_3^3+10a_2^3a_3^2$.

21. $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}a_0^{n-3}a_1a_2^2+\frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{\lfloor 3}a_0^{n-4}a_1^3a_2$.

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{\lfloor 5}a_0^{n-5}a_1^5.$$ 22. -23. 23. $-\frac{b}{2}+\frac{3a^2}{8}$.

24. $ma_3+m(m-1)a_1a_2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}a_1^3$. 25. 20.

26. -210. 27. 1260. 28. 12600.

29. $a^n+na^{n-1}(b+c)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}(b+c)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}a^{n-3}(b+c)^3$.

30. $\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}d^{n-3}(a+b+c)^3$. 31. $\frac{\lfloor 10}{\{\lfloor 3\}^2 4}$. 32. $\frac{\lfloor 14}{\{\lfloor 3\}^4 4^2}$.

35. $1+bx-\left(\frac{1}{2}-\frac{3b^2}{2}\right)x^2-\left(\frac{3b}{2}-\frac{5b^3}{2}\right)x^3+\left(\frac{3}{8}-\frac{15b^2}{4}+\frac{35b^4}{8}\right)x^4$.

36. $a^{-1}-a^{-2}bx-(a^{-2}c-a^{-3}b^2)x^2$
$$+(2a^{-3}bc-a^{-4}b^3)x^3+(a^{-3}c^2-3a^{-4}b^2c-a^{-5}b^4)x^4.$$

37. $1-nx+\dfrac{n(n-3)}{2}x^2-\dfrac{n(n-2)(n-4)}{6}x^3.$

38. Si può dimostrare per induzione. 39. Per la prima parte si ponga $x=1$. Per la seconda parte, dinoti S la serie, sicchè $S=a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ldots+nra_{nr}$; e siccome i coefficienti dei termini equidistanti dal principio e dalla fine sono eguali, per l'Es. 38, $S=a_{nr-1}+2a_{nr-2}+\ldots+nra_0$. Quindi, per addizione;
$$2S=nr\{a_0+a_1+\ldots+a_{nr}\}=nr(r+1)^n:$$

40. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n-2}x^{2n-2}+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$; si muti il segno di x, e, poichè i coefficienti dei termini equidistanti dal principio e dalla fine sono eguali, abbiamo
$$(1-x+x^2)^n=a_{2n}-a_{2n-1}x+a_{2n-2}x^2-a_{2n-3}x^3+\ldots$$
Si moltiplichino insieme, e si scelga il coefficiente di x^{2n}: questo sarà perciò eguale al coefficiente di x^{2n} in
$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n, \text{ cioè, in } (1+x^2+x^4)^n.$$
Indi si ponga a_0^2 per a^2_{2n}, a_1^2 per a^2_{2n-1}, ... e si divida da ambe le parti per 2.

VI. 1. Questo è un esempio dell'equazione (1); Art. 80, in cui $m=(x+1)(x-1)$ ed $n=x^2$.

2. $\log(x+2h)x-\log(x+h)^2=\log\left\{1-\dfrac{h^2}{(x+h)^2}\right\}$. 3. Si vegga l'Es. 1.

5. $\log(3+3x+x^2)x-3\log(1+x)=\log\left\{1-\dfrac{1}{(1+x)^3}\right\}$. 6. Dobbiamo trovare una serie per
$$\log(x+1)-\frac{4x}{2x+1}\log x+\frac{2x-1}{2x+1}\log(x-1),$$
cioè, per $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{2x-1}{2x+1}\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$, cioè, per
$$\frac{2x}{2x+1}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2x+1}\log\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$ 9. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x\left(1-\dfrac{x^2}{2n}+\dfrac{x^3}{3n^2}\ldots\right).$

VII. 1. La serie $=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}-\text{etc.}\right\}$; convergente per l'Art. 93. 2. Divergente se $x>1$, convergente se $x<1$. Se $x=1$ il termine generale è $\frac{2n+1}{n^2+1}$, che è $>\frac{1}{n}$, e la serie è divergente. 3. Convergente se $a>1$; divergente se $a<1$. Se $a=1$ la serie è evidentemente divergente. 4. Divergente se $x>1$, convergente se $x<1$. Se $x=1$ la serie è evidentemente divergente. 5. Lo stesso risultato come nell'Es. 4. 6. La serie è $>1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+4}$ etc., e quindi divergente. 7. Divergente se $x>1$, convergente se $x<1$; se $x=1$, evidentemente divergente. 8. Risultati gli stessi come nell'Art. 97. 9. Divergente se $x>1$, convergente se $x<1$; se $x=1$ si ha una serie discussa nell'Art. 97. 10. Convergente se $x<1$, divergente se $x>1$; se $x=1$ i risultati sono gli stessi come nell'Art. 97.

VIII. 1. $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\frac{1}{9}$. 2. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{55}$.

3. $$\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{170}.$$

4. $$1+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}.$$

5. $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}$. 6. $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{39}{161}, \ldots$

IX. 1. $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{14}{5}, \frac{17}{6}$. 2. $\frac{3}{1}, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}$.

3. $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}$. 4. $\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{268}{65}, \frac{2177}{528}$.

5. $\frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}$. 6. $\frac{5}{1}, \frac{51}{10}, \frac{515}{101}, \frac{5201}{1020}$.

7. $\frac{5}{1}, \frac{26}{5}, \frac{265}{51}, \frac{1351}{260}$. 8. $\frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{27}{4}, \frac{34}{9}$.

9. $\frac{7}{1}, \frac{22}{3}, \frac{29}{4}, \frac{51}{7}$. 10. $\frac{10}{1}, \frac{201}{20}, \frac{4030}{401}, \frac{80801}{8040}$.

11. $a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\cdots\,\frac{a}{1},\ \frac{2a^2+1}{2a},\ \frac{4a^3+3a}{4a^2+1},\ \frac{8a^4+8a^2+1}{8a^3+4a}.$

12. $a-1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\cdots\,\frac{a-1}{1},\ \frac{a}{1},\ \frac{2a^2-a-1}{2a-1},\ \frac{2a^2-1}{2a}.$

13. $a+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2a}\cdots\,\frac{a}{1},\ \frac{2a+1}{2},\ \frac{4a^2+3a}{4a+1},\ \frac{8a^2+8a+1}{8a+4}.$

14. $a-1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\cdots$

$$\frac{a-1}{1},\ \frac{2a-1}{2},\ \frac{4a^2-5a+1}{4a-3},\ \frac{8a^2-8a+1}{8a-4}.$$

[13 e 14 sono legati tra loro, poichè $a^2-a=(a-1)^2+a-1$].

15. $\frac{256}{71}$, 16. $\frac{1520}{273}$. 18. $\frac{1}{(44)^2}$ ed $\frac{1}{2(49)^2}$. 20. $\frac{1}{(240)^2}$ ed $\frac{1}{2(2111)^2}$.

21. $\frac{1}{(273)^2}$ ed $\frac{1}{2(2885)^2}$. 26. $\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{13}{30},\ \frac{42}{97}$. 27. $\frac{485}{396}$.

28. $\frac{211}{80}$. 29. $\frac{1549}{360},\ \frac{251}{360}$. 30. $\frac{114}{41}$. 31. $\frac{17}{114}$. 32. $\sqrt{2}$.

33. Radice positiva di $x^2+2x-2=0$. 34. Quella di $7x^2-8x-3=0$.

35. Quella di $7x^2+8x-3=0$. 36. Quella di $59x^2-319x+431=0$.

X. 1. $\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}\right)^n$. 2. $\left\{3(-1)^n-\frac{3n}{2^{n+1}}\right\}x^n$.

3. $-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{7}{2\cdot 3^{n+1}}\right\}x^n$. 4. $\frac{1-p^n}{1-p}\,x^n$.

5. $(n+1)\,x^n$. 6. $(7n+5)\,(3x)^n$. 7. $(n+1)^3\,x^n$.

8. $1+x-x^3-x^4\ldots$ 9. $1+2x+x^2-4x^3-11x^4\ldots$

10. $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{7x^4}{8}\ldots$ 11. $\frac{1}{a^2}-\frac{x}{a^3}+\frac{x^3}{a^5}-\frac{x^4}{a^6}\ldots$

12. $1+px+p(p-1)x^2+(p^3-2p^2+1)x^3+p(p^3-3p^2+p+2)x^4\ldots$

13. $\frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+a^nx}\right)$.

14. $-\frac{1}{(1-a)^2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+ax}-\frac{1}{1+a^nx}+\frac{1}{1+a^{n+1}x}\right)$.

15. $a=1,\ b=11,\ c=11,\ d=1,\ e=0$.

XI. 1. $\dfrac{4-11x}{1-5x+6x^2}$; $(3x)^n+3(2x)^n$.

2. $\dfrac{1+x}{1-10x+21x^2}$; $2(7x)^n-(3x)^n$. 3. $\dfrac{1-2x}{1-5x+4x^2}$; $\dfrac{1}{3}(1+2^{2n+1})x^n$.

4. x minore di $\dfrac{1}{4}$. 5. $2^{n-1}(5n+6)$. 6. 3^n-n-1.

7. $\dfrac{64}{2^n}-\dfrac{54}{3^n}$; 47. 8. $\dfrac{2+5x+5x^2}{(1+x)^3}$; $(-1^n)x^n(n^2-2n+2)$.

XII. 3. $1-\dfrac{1}{1+n}$; 1. 4. $\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\}$; $\dfrac{1}{32}$.

5. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$; $\dfrac{11}{18}$.

6. $\dfrac{11}{96}-\dfrac{1}{2(n+2)(n+3)}-\dfrac{3}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$; $\dfrac{11}{96}$.

7. $\dfrac{5}{6}-\dfrac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$; $\dfrac{5}{6}$. 8. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

11. $\dfrac{x^n\{n(x-1)-1\}^2+x^{n+1}-(x+1)}{(x-1)^3}$. 12. $nar(a+br)^{n-1}$.

13. Si sviluppi ed otteniamo $\dfrac{x}{(1-x)^2}\left\{1+\dfrac{cx}{(1-x)^2}+\dfrac{c^2x^2}{(1-x)^4}+\ldots\right\}$.

14. $b^n\left\{1+na+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^2+\ldots+\dfrac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{\underline{|m-1}}a^{m-1}\right\}$.

15. $\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{-n}=2^n\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{-n}$. 18. 165. 19. 460.

22. Si proceda così; supponiamo $(1+xv)(1+x^2v)(1+x^3v)\ldots(1+x^pv)$ $=1+A_1v+A_2v^2+\ldots+A_pv^p$, in cui $A_1, A_2\ldots A_p$ non contengono v. *Ora si muti* v *in* xv; così possiamo dedurre che

$$(1+A_1v+A_2v^2+\ldots+A_pv^p)(1+x^{p+1}v)$$
$$=(1+A_1xv+A_2x^2v^2+\ldots+A_px^pv^p)(1+xv).$$

Ora si eguaglino i coefficienti delle stesse potenze di v nei due membri.

25. $\frac{1+x}{1+x^3}=\frac{1}{1-x+x^2}$; quindi $(1+x)\{1-x^3+x^6-x^9+\ldots\}$

$$=\frac{1}{1-x}\left(1+\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{x^4}{(1-x)^3}-\frac{x^6}{(1-x)^4}+\ldots$$

Si sviluppi ciascun termine dell'ultima linea col Teorema del Binomio indi si eguaglino i coefficienti di x^n nei due membri.

XIII. 8. $2x^3$ è $>$ o $<x+1$ secondo che x è $>$ o <1.
16. Questo dipende dal segno di $(a-b)(b-c)(c-a)$.
22 e 24 dipendono dall'Art. 164. 23. Si troverà che hanno luogo tante delle seguenti ineguaglianze quante se ne possano richiedere: $2(n-1)>n$, $3(n-2)>n, \ldots$; allora con la moltiplicazione si ottiene il risultato. 25. Questo si può dedurre dall'Es. 23. 31. Si moltiplichi; indi si adoperi l'Art. 164. 32. Si ponga $1-a=b$, e si sviluppi $(1-b)^x$ col Teorema del Binomio; la serie sarà convergente. Dovremo quindi mostrare che $1-\frac{(x-1)b}{\lfloor 2}+\frac{(x-1)(x-2)b^2}{\lfloor 3}-\ldots>1$; e questo è chiaro, poichè x è <1.

XIV. 2. 66. 3. $3\cdot5^2\cdot41^2$. 4. $2^2\cdot3^2\cdot5^2$. 5. $2^2\cdot(823)^2$. 12. Supponiamo che n cada tra m^2 ed $(m+1)^2$; allora $n-ab=(m^2+m-n)^2$. 19. n^2-n+1 è maggiore di $(n-1)^2$ e minore di n^2. 20. Supponiamo, se è possibile, $n^3+1=m^2$; allora $n^3=(m-1)(m+1)$. Ora nessun fattore, eccetto 2, può dividere ad un tempo $m-1$ ed $m+1$, e 2 qui non può dividerli, poichè n è dispari. Quindi $m-1$ ed $m+1$ debbono essere entrambi cubi perfetti; ma questo è impossibile; poichè la differenza di due cubi non può essere tanto piccola come 2. 35, 36, 37, 38. Questi dipendono tutti dal Teorema di Fermat. 40. 48. 41. 96. 42, 400. 43. 22680. 44. $2^{n+1}5^{n-1}$. 45. 12. 46. 12. 47. 160; 1481040. 48. 6. 49. 126. 50. 24; 15. 51. $(n+1)^2$. 53 e 54 si possono risolvere per tentativo; la risposta di 53 è $2^4\cdot3^2\cdot5$, e la risposta di 54 è $2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7$. 57. $x=2\cdot5^2\cdot7^2\cdot t^3$; $y=2\cdot5\cdot7\cdot t$.

XV. 6. Convergente se x è minore dell'unità, divergente se x è maggiore dell'unità; se x è eguale all'unità, convergente se a è negativa, divergente se a è positiva. 8. Divergente se x è maggiore dell'unità, convergente se x non è maggiore dell'unità.

9. Divergente. 10. Convergente se $q-p-1$ è positiva, divergente se $q-p-1$ è negativa o zero. 13. Convergente se x è minore di e^{-1}, divergente se x non è minore di e^{-1}. 16. I. Si supponga $a-A$ positiva: la serie è convergente se $\beta+1$ è maggiore di α, divergente se $\beta+1$ è minore di α; se $\beta+1=\alpha$ la serie è convergente se $a-A$ è maggiore dell'unità, divergente se $a-A$ non è maggiore dell'unità. II. Si supponga $a-A$ negativa: la serie è divergente. III. Si supponga $a-A=0$; allora si applichi l'Art. 214, e si distingua come nel Caso I.

XVI. 4. $$p_n = ba^{n-1} + (n-2)\,b^2 a^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{\underline{|2}}\,b^3 a^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{\underline{|3}}\,b^4 a^{n-7} + \ldots;$$

quindi q_n si può ottenere con l'Es. 3.

10. Ogni componente ha l'unità per denominatore; il numeratore della prima componente è 1, della seconda è $\frac{1}{2}x$, e generalmente della $(2r)^{\text{ma}}$ è $\frac{r^2 x}{(2r-1)\,2r}$, e della $(2r+1)^{\text{ma}}$ è $\frac{r^2 x}{2r\,(2r+1)}$.

FINE.

123024
BIBLIOTECA
Scuola Normale Superiore