CALCOLO DIFFERENZIALE.

Tipografia A. Trani Conte di Mola 13.

TRATTATO

SUL

CALCOLO DIFFERENZIALE

CON MOLTI ESEMPII.

PER

I. TODHUNTER, M. A.

SOCIO DEL COLLEGIO DI S. GIOVANNI, A CAMBRIDGE.

Versione dall'inglese con aggiunte

PER

G. BATTAGLINI

Prof. di Geometria superiore nell'Università di Napoli.

NAPOLI

LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE

DI B. PELLERANO

Str. di Chiaia 60.

1870.

AVVERTIMENTO DEL TRADUTTORE.

Nel pubblicare questa traduzione del *Calcolo Differenziale ed Integrale* del Signor I. TODHUNTER, non abbiamo avuto altro scopo se non di aggiungere ai libri, che corrono per le mani degli Studenti delle nostre Università, un' opera notevole per la chiarezza dell' esposizione, il rigore delle dimostrazioni, la giusta proporzione nelle parti, ed il ricco corredo di esempii, che offrono largo campo ad utili esercitazioni. Per rendere l' opera adatta all' insegnamento Universitario, nel modo che trovasi ordinato tra noi, abbiamo creduto dovervi aggiungere alcune appendici, le quali riguardano, pel Calcolo Differenziale, i principii della teoria delle linee a doppia curvatura, e delle superficie curve, e pel Calcolo Integrale, i principii dell' integrazione delle equazioni differenziali: i capitoli che costituiscono tali appendici sono stati tratti dall' eccellente opera del COURNOT, *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal.*

Si è messo ogni cura affinchè, per correzione e nitidezza di caratteri, questa edizione italiana emulasse la inglese. Se gli studiosi ritrarranno alcun vantaggio da questo lavoro, i nostri voti saranno pienamente soddisfatti.

*

PREFAZIONE ALLA TERZA EDIZIONE.

Nella presente opera mi sono studiato di esibire un quadro generale del Calcolo Differenziale seguendo il metodo dei Limiti. Nelle parti più elementari sono entrato in minute particolarità nelle spiegazioni, con la speranza che un lettore non assistito da maestro potesse rendersi atto ad acquistare una sufficiente conoscenza del soggetto. Ai diversi capitoli si troveranno aggiunti Esempii abbastanza numerosi per rendere un altro libro non necessario. Questi esempii sono stati scelti quasi esclusivamente dalle Memorie degli Esami del Collegio e della Università: si vedrà che la maggior parte di essi non presenta alcuna seria difficoltà allo studente, sebbene alcuni pochi richiedano una particolare abilità nell'analisi.

La mia propria esperienza con gli allievi è stata decisamente sfavorevole al sistema dei Differenziali; molti abili insegnanti che ho consultato hanno espresso una simile opinione, ed io ho perciò adattato esclusivamente il metodo dei Coefficienti Differenziali.

Sovente ho dato più di una sola investigazione di un teorema, poichè credo che lo studente ritragga vantaggio dal considerare la stessa proposizione sotto diversi aspetti, e che, per riuscire negli esami a dare, egli debba essere preparato per mezzo di una considerevole varietà nel modo di ordinare le diverse parti del soggetto, e di una corrispondente varietà nel modo di dimostrazione.

Siccome il mio solo oggetto è stato quello di produrre un'opera utile, non ho esitato ad avvalermi delle opere elementari che già si hanno; una nota di quelle cui sono principalmente debitore è quì appresso indicata.

Debbo i miei ringraziamenti ai molti amici che hanno preso interesse al libro, e che mi hanno favorito con le loro valevoli indicazioni e correzioni, le quali hanno fatto sparire da esso varie imperfezioni che altrimenti avrebbe contenuto.

Le prime edizioni contenevano poche pagine sul Calcolo Integrale; queste sono state poi incorporate in un trattato distinto su tale argomento, e per conseguenza non sono quì ristampate. Lo spazio così guadagnato mi ha permesso di spiegare più diffusamente alcune parti del soggetto che per esperienza si trovano essere difficoltose agli studenti.

I. TODHUNTER.

Collegio di S. Giovanni
Marzo 1860.

Cournot, *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal,* 2 vol. 8.° Paris, 1841.

De Morgan, *Differential and Integral Calculus.* Lond. 1842.

Duhamel, *Cours d' Analyse de l' Ecole Polytechnique,* 2.e edit. 2 vol. 8.° Paris, 1847.

Moigno, *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral,* 2 vol. 8.° Paris, 1840-44.

Navier, *Résumé des Leçons d' Analyse données à l' Ecole Polytechnique,* 2 vol. 8.° Paris, 1840.

Schlömilch, *Handbuch der Differential-und Integralrechnung* Greifswald, 1847.

INDICE.

Gli studenti che leggono questa opera per la prima volta possono omettere gli Articoli seguenti:

23, 83, 98—113, 141—143, 151, 156, 163—166, 185—189, 200, 206—208, 219, 220, 222, 226, 235—240, 248—256, 365—368.

AGGIUNTE.

ERRORI.			CORREZIONI.
Pagina.	Linea.		Si legga
20	23	$\frac{dy}{dz}$	$\frac{dy}{dx}$
41	1	$\sec x = y$	$\sec y = x$
52	25	$\sqrt{a + x)}$	$\sqrt{(a + x)}$
67	5	$\{ x + a \sqrt{(-1)}^{n+1}$	$\{ x + a \sqrt{(-1)} \}^{n+1}$
110	4	$\frac{d^2u}{dy^2}$	$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}$
186	15	$\frac{d\theta}{d\varphi}$	$\frac{d}{d\varphi}$
197	3	$\frac{d^2u}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
228	20	u	di u
238	9	valori	valori di
263	21	$\frac{dz}{d\varphi}$	$\frac{dz}{dx}$ ·
285	7	infinito	finito
350	28	dell'	dall'

CALCOLO DIFFERENZIALE.

CAPITOLO I.

DEFINIZIONI — LIMITE — INFINITO.

1. Se due quantità suscettibili di cangiamento sono collegate in modo che variando una di esse si ha per conseguenza una variazione nell'altra, la seconda quantità si dice *funzione* della prima. Così essendo x un simbolo al quale possiamo assegnare diversi valori numerici, le espressioni come $x^2, 3^x, \log x$, e $\operatorname{sen} x$, sono tutte *funzioni* di x. Se una funzione di x si suppone eguale ad un'altra quantità, come per esempio $\operatorname{sen} x = y$, allora ambedue le quantità si dicono *variabili*, una di esse essendo la *variabile indipendente* e l'altra la *variabile dipendente*. Una *variabile indipendente* è una quantità alla quale possiamo supporre assegnato arbitrariamente un valore qualunque; una *variabile dipendente* è una quantità il valore della quale è determinato allorchè si conosce quello di qualche variabile indipendente. Sovente quando si considerano due o più variabili è in nostro potere fissare ad arbitrio la variabile *indipendente*, ma una volta fatta la nostra scelta non è più lecito far cangiamento a questo riguardo nel corso delle operazioni; almeno un tal cangiamento richiederebbe alcune precauzioni e trasformazioni.

2. Generalmente si dinotano le funzioni con simboli come $F(x), f(x), \varphi(x), \psi(x)$, e simili, la variabile essendo indicata da x. Un'equazione quale $y = \varphi(x)$ esprime che la variabile dipendente y è così collegata alla variabile indipendente x, che il valore di y è conosciuto allorchè quello di x è dato, e che se un cangiamento si opera nel valore numerico assegnato ad x, il cangiamento che consegue in y può essere trovato.

3. Lo studente probabilmente ha già avuto occasione di considerare il significato dei termini « quantità variabile » e « funzione » che abbiamo qui introdotti. Nei trattati sulle sezioni coniche, per esempio, occorre l'equazione $y=2\sqrt{ax}$, in cui x è un simbolo generale al quale possono essere assegnati diversi valori numerici, ed a è un simbolo al quale si suppone assegnato un certo valore numerico invariabile, e che perciò è chiamato una « costante ». Per ogni valore dato ad x possiamo dedurre il corrispondente valore numerico di y. Nell'equazione $y=2\sqrt{ax}$, poichè il valore di y dipende sì da quello di a che da quello di x, possiamo dire che y è una funzione di a e di x. Segue da ciò che possono usarsi simboli come $F(a, x)$ per dinotare una funzione di a ed x, ed un'equazione quale $y=\varphi(x,z,t)$ indica che y è una funzione delle tre quantità dinotate dai simboli x, z e t.

4. Nell'equazione $y=2\sqrt{ax}$, conoscendo che a dev'essere una quantità *costante* nel corso di qualche ricerca da noi intrapresa, spesso non porremo mente a questa costante, e continueremo a parlare di y come una funzione di x. Similmente l'equazione $y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$ può essere rappresentata con $y=\varphi(x)$, in cui poniamo in evidenza solamente quel simbolo x il quale nel corso delle nostre investigazioni sarà considerato variabile.

5. Se l'equazione che lega le variabili x ed y è tale che si trovi la *sola* y in un membro e nell'altro membro una espressione che racchiude x e non y, si dice che y è una funzione *esplicita* di x. Quando un'equazione tra x ed y non è di questa forma, si dice che y è una funzione *implicita* di x. Così se $y=ax^2+bx+c$, y è una funzione esplicita di x. Se $ay^2-2bxy+cx^2+g=0$, y è una funzione implicita di x. Le parole *funzione implicita* suppongono che y sia realmente una *funzione* di x nel senso in cui abbiamo usato la parola funzione. Questa supposizione si vedrà essere vera nell'esempio dato, poichè con la risoluzione di un'equazione quadratica possiamo esibire y come una funzione di x; o piuttosto possiamo dedurre che y deve essere una tra due funzioni esplicite di x, cioè

$$\frac{bx+\sqrt{\{(b^2-ac)x^2-ag\}}}{a} \text{ o } \frac{bx-\sqrt{\{(b^2-ac)x^2-ag\}}}{a}.$$

Ritorneremo su questo punto in seguito, nell'Art. 58.

6. Le funzioni esplicite possono essere divise in *algebriche e trascendenti.* Le prime sono quelle in cui le sole operazioni indicate sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, e l'elevazione di una quantità ad una conosciuta potenza o l'estrazione di una conosciuta radice; le altre sono quelle che racchiudono altre operazioni, come le funzioni esponenziali, le funzioni logaritmiche, e le funzioni trigonometriche. Noi qui supponiamo che il numero delle operazioni indicate sia *finito;* poichè come vedremo in appresso una funzione trascendente può essere equivalente ad una serie infinita di funzioni algebriche.

Alla variabile indipendente in un'equazione possiamo supporre assegnato un valore qualunque, positivo o negativo, tanto grande o tanto piccolo quanto ci aggrada. Se supponiamo una serie di diversi valori assegnati ad x, a cominciare da un valore negativo numericamente molto grande e che va gradatamente crescendo algebricamente sino ad un grande valore positivo, la serie dei valori che si ottengono per y può presentare risultati molto diversi. Per esempio, se $y=x^3$, i valori di y formeranno una serie che comincia con un valore negativo numericamente grande, e va crescendo algebricamente sino ad un grande valore positivo. Se $y=x^2$, i valori di y sono sempre positivi, e formano una serie prima decrescente e poi crescente. Se $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$, i valori di y sono immaginari per ogni valore di x non compreso tra $-a$ e $+a$.

7. Passiamo ad un altro esempio più importante pel nostro scopo. Sia $y=\frac{x}{1+x}$, e si consideri la serie dei valori che prende y allorchè si assegnano ad x diversi valori *positivi.* Quando $x=0$, $y=0$, e quando x ha un valore positivo qualunque, y è una frazione propria positiva. Ponendo y sotto la forma $1-\frac{1}{1+x}$, si vede che al crescere di x cresce anche y, ma essendo y una frazione propria non può mai raggiungere l'unità. La differenza tra y e l'unità è $\frac{1}{1+x}$; questa frazione diminuisce al crescere di x, e *può essere resa minore di qualunque frazione assegnata, per piccola che sia, dando un valore sufficientemente grande ad x.* Così se vogliamo che y differisca dall'unità per una quantità minore di $\frac{1}{100,000}$, si

faccia $x = 100{,}000$ ed il risultato richiesto sarà ottenuto. Se desideriamo far differire y dall'unità per una quantità minore di $\frac{1}{1{,}000{,}000}$, si ponga $x = 1{,}000{,}000$, e sarà raggiunto lo scopo. In queste circostanze si dice che « il *limite* di y allorchè x cresce indefinitamente è l'unità. »

8. La nozione di *limite* è della più grande importanza; infatti tutto il Calcolo Differenziale consiste nell'esporre le conseguenze che discendono da questa nozione. Lo studente probabilmente ha già incontrato dei casi in cui la parola *limite* è stata usata, ai quali sarà utile di ricorrere. Per esempio, la somma della progressione geometrica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$ continuata sino ad n termini è $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, da cui egli ha dedotto il risultato che il *limite* della serie quando il numero dei termini cresce indefinitamente è 2.

$= a_1 \frac{1-q^n}{1+q}$

che $q < 1$

9. Un esempio molto importante di *limite* s'incontra nelle opere sulla Trigonometria. Vi si dimostra che se θ dinota la misura circolare di un angolo, la frazione $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, se θ diminuisce indefinitamente, si avvicinerà quanto si vuole all'unità. In altre parole il *limite* di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, a misura che θ diminuisce continuamente è l'unità. Esprimeremo ciò dicendo « il limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, *quando* $\theta = 0$, è l'unità » o sia, usiamo le parole « *quando* $\theta = 0$ » come un'abbreviazione di « *quando* θ *diminuisce continuamente verso zero* » o per « *quando* θ *diminuisce senza limite.* »

10. La proposizione « il limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, quando $\theta = 0$, è l'unità » è sovente espressa così « quando $\theta = 0$, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ » o « quando $\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = \theta$. » *Si ponga però ogni cura a non dimenticare che simili espressioni sono solamente abbreviazioni e non possono essere intese assolutamente.* Similmente il risultato ottenuto nell'Art. 7, cioè che il limite di $\frac{x}{1+x}$ allorchè

x cresce indefinitamente è l'unità, si esprimerebbe alle volte dicendo « quando x è infinito $\frac{x}{1+x}$ eguaglia l' unità. » Quì tutte e due le parti della sentenza sono abbreviazioni: « quando x è infinito » può avere solamente il significato di « quando x cresce senza limite, » ed « $\frac{x}{1+x}$ eguaglia l'unità » dinota a rigore « $\frac{x}{1+x}$ può farsi differire dall'unità per una quantità quanto si vuole piccola. »

11. Nell' esempio $y=\frac{x}{x+1}$ assegniamo ora ad x valori negativi. Si ponga $-z$ in vece di x; con ciò $y=\frac{z}{z-1}$. Si supponga ora z variare gradatamente da 0 ad 1; il numeratore di y è positivo e continuamente crescente, mentre il denominatore è negativo e numericamente continuamente decrescente. Il valore di y adunque è negativo ed in valore numerico cresce continuamente, e prendendo z sufficientemente vicino all' unità possiamo rendere y *grande quanto ci aggrada;* vale a dire, come z si avvicina all' unità y non ha limite finito. A motivo di brevità, ciò si esprime alle volte dicendo, « quando $z=1$, y è infinito; » ma non si deve dimenticare che quest' ultima frase *è un' abbreviazione*, e può solamente essere intesa così: « prendendo z sufficientemente vicino all' unità y può farsi superare qualunque grandezza assegnata, per quanto grande essa sia. » Non procederemo oltre con l' esempio; il lettore vedrà che quando z è maggiore dell' unità y è positivo; che y diminuisce continuamente a misura che z cresce, e si avvicina al limite l' unità quando z cresce indefinitamente.

12. Lo studente ha già veduto un' esempio analogo a quello considerato nell' articolo precedente, poichè probabilmente egli è stato avvezzo a dire « la tangente di un angolo di 90° è l'infinito. » Riflettendo egli vedrà che il solo modo in cui può darsi un significato a tale proposizione si è di considerarla un' abbreviazione della seguente: « a misura che un angolo cresce gradatamente sino a 90°, la tangente dell' angolo cresce, e prendendo l' angolo sufficientemente vicino a 90° possiamo rendere la tangente tanto grande quanto ci aggrada. » Noi non possiamo formarci un concetto distinto di una grandezza *infinita*, e questa parola può solamente essere

usata in Matematica come un'abbreviazione nel modo degli esempî quì considerati.

Se alla variabile indipendente x sono assegnati valori che cominciano da zero e crescono senza limite, si esprime ciò alle volte in modo abbreviato dicendo che x cresce da zero all'infinito.

13. Il significato della parola « limite » o l'equivalente « valore limite » s' intenderà dal suo uso negli articoli precedenti. Ciò che segue può essere dato come una definizione: « Il limite di una funzione per un valore assegnato della variabile indipendente, è quel valore dal quale si può far differire la funzione tanto poco quanto si vuole, facendo avvicinare la variabile indipendente al suo valore assegnato. »

14. Nell' esempio « limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ quando $\theta = 0$, » è chiaro che $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ non è mai eguale ad 1 fin tanto che θ ha un valore qualunque diverso da zero, e se effettivamente poniamo $\theta = 0$, rendiamo l'espressione $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ vuota di senso. In altri termini, benchè $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ si avvicini tanto quanto ci aggrada al limite l' unità, *esso giammai raggiunge effettivamente questo limite*. Alle volte nella definizione del limite sono state introdotte le parole « quel valore che la funzione non raggiunge mai effettivamente. » Ma è più conveniente di ometterle; poichè se prendiamo una funzione di x, per esempio $\frac{x}{x+1}$, ed assegniamo ad x un valore, supponiamo 1, si può determinare il valore *attuale* della funzione, che in questo caso sarebbe $\frac{1}{2}$. In conformità della definizione che abbiamo data nell'articolo precedente possiamo chiamare se ci piace $\frac{1}{2}$ il *limite* di $\frac{x}{x+1}$ quando x si avvicina all'unità. Lo stesso vale per qualsivoglia valore finito di ogni funzione, e generalmente secondo la definizione del limite data nell' Art. 13, *ogni valore attuale di una funzione può essere considerato come un valore limite.*

15. *Limite di* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Il teorema seguente, che procediamo a dimostrare, è molto importante. « Allorchè x cresce indefinitamente l'espressione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ si avvicina ad un certo limite il quale è compreso tra 2 e 3. »

In primo luogo supponiamo x un numero intero positivo, $=m$ per esempio; mostreremo che l'espressione suddetta cresce continuamente con m, ma non può mai raggiungere il valore 3. Assumendo il Teorema del Binomio per gli esponenti interi positivi, abbiamo

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots\{m-(m-1)\}}{1.2\dots m}\left(\frac{1}{m}\right)^m,$$

che può essere scritta

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\dots m}\dots(1).$$

Similmente

$$\left(1+\frac{1}{1+m}\right)^{m+1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m+1}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)}{1.2.3}+\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\dots\left(1-\frac{m}{m+1}\right)}{1.2\dots(m+1)}\dots(2).$$

Ora nelle due ultime serie vediamo che i loro primi e secondi termini sono eguali, ma il terzo termine in (2) è maggiore del terzo termine in (1); del pari il quarto termine in (2) è maggiore del quarto termine in (1), e così via; inoltre in (2) vi è un termine di più che in (1). Adunque

$$\left(1+\frac{1}{1+m}\right)^{m+1} \text{ è maggiore di } \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Quindi se poniamo successivamente m eguale a $2, 3, 4$, etc. l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cresce continuamente.

Ma poichè $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, $1-\frac{3}{m}$, etc. sono tutti positivi e tutti minori dell'unità ne segue che la serie in (1) non può essere maggiore di

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}\ldots\ldots(3),$$

comunque grande sia m.

Ma la serie in (3) è minore della progressione geometrica

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}},$$

vale a dire, minore di

$$1+\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}} \text{ o } 3-\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Quindi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ è minore di 3, comunque grande sia m.

Adunque poichè l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cresce continuamente con m, ma nello stesso tempo non può eccedere 3, vi deve essere un «limite» verso il quale essa si avvicina a misura che m cresce indefinitamente. Adopreremo il simbolo e per dinotare questo limite, e mostreremo in seguito come calcolare il suo valore approssimato: diciamo *approssimato*, poichè si dimostrerà essere un numero incommensurabile. Si vegga l'Art. 115.

16. Potremmo forse lasciare allo studente il convincersi che il valore limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ debba essere lo stesso sia che si attribuisca ad x una successione di valori *interi* o pure *frazionari* crescenti senza limite. Ma può essere formalmente dimostrato nel seguente modo. Qualunque sia il valore frazionario assegnato ad x vi debbono essere due interi consecutivi, supponiamo m ed $m+1$, tra i quali giace quel valore frazio-

nario. Sia adunque $1+\frac{1}{x}$ maggiore di $1+\frac{1}{n}$ e minore di $1+\frac{1}{m}$, in cui n è messo per $m+1$.

Laonde $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ giace tra $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ ed $\left(1+\frac{1}{m}\right)^x$.

Si supponga $x=m+\alpha=n-\beta$, così che α e β sono frazioni proprie, quindi

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ giace tra } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-\beta} \text{ ed } \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\alpha},$$

vale a dire, tra

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{1-\frac{\beta}{n}} \text{ ed } \left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{1+\frac{\alpha}{m}}.$$

Se ora si suppone x crescere senza limite, avverrà lo stesso per m ed n. Il limite di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ è e, e siccome $1-\frac{\beta}{n}$ ed $1+\frac{\alpha}{m}$ hanno l'unità per loro limite ne segue che il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è e.

17. Possiamo mostrare che il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è anche e quando x è *negativo* e cresce senza limite. Infatti posto $x=-z$, dovremo trovare il limite di $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}$ quando z cresce senza limite.

Ora
$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z}{z-1}\right)^z,$$
$$=\left(\frac{1+y}{y}\right)^{y+1}, \text{ in cui } y=z-1,$$
$$=\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\}^{1+\frac{1}{y}}.$$

Cresca adesso x numericamente senza limite, z, e per conseguenza y, faranno lo stesso. Il limite di $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ è e, e quello di $1+\frac{1}{y}$ è l'unità, quindi il limite di $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}$ è e.

18. Poichè il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ allorchè x cresce indefinitamente è e, si vede, ponendo $\frac{1}{x}=z$, che il limite di $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ quando z *diminuisce* indefinitamente è anche e. Possiamo quindi dedurre il limite per $z=0$ di $(1+az)^{\frac{1}{z}}$, in cui a è una quantità costante qualunque. Infatti

$$(1+az)^{\frac{1}{z}}=\left\{(1+az)^{\frac{1}{az}}\right\}^a.$$

Ora a misura che z diminuisce senza limite, accade lo stesso per az, quindi

$$\text{limite di } (1+az)^{\frac{1}{az}} \text{ è } e,$$

e

$$\text{limite di } (1+az)^{\frac{1}{z}} \text{ è } e^a.$$

19. Poichè
$$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\log_a(1+z),$$

a essendo una base qualunque, sarà, diminuendo z indefinitamente,

$$\begin{aligned}\text{limite di } \frac{\log_a(1+z)}{z} &= \text{limite di } \log_a(1+z)^{\frac{1}{z}},\\ &= \log_a e;\end{aligned}$$

e, ponendo e per a,

$$\text{limite di } \frac{\log_e(1+z)}{z}=1.$$

20. Dall'equazione

$$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{\log_a(1+z)}{z},$$

deduciamo, ponendo $1+z=a^v$,

$$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{v}{a^v-1}.$$

Si supponga ora z diminuire senza limite, e quindi anche v. Avremo

$$\begin{aligned}&\text{limite di } \frac{v}{a^v-1} \text{ per } v=0,\\ =\ &\text{limite di } \log_a(1+z)^{\frac{1}{z}} \text{ per } z=0,\\ =\ &\log_a e.\end{aligned}$$

Quindi $\quad$ limite di $\dfrac{a^v - 1}{v}$ per $v = 0$,

$$= \frac{1}{\log_a e},$$

$$= \log_e a.$$

Si supponga $\quad a = e^{\mu}$,

onde $\quad \mu = \log_e a$

e $\quad$ limite di $\dfrac{e^{\mu v} - 1}{v}$ per $v = 0$, $= \mu$.

21. I risultati seguenti si troveranno nelle opere sulla Trigonometria. Se la variabile x diminuisce indefinitamente

$$\text{limite di } \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\text{limite di } \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} = 1,$$

$$\text{limite di } \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1.$$

22. Alcune poche osservazioni generali si possono fare nel chiudere questo Capitolo d'Introduzione. Accade spesso che colui il quale intraprende questi studi si perdi di animo dal bel principio poichè egli non sa scoprire o immaginare alcuna applicazione pratica dei punti alquanto astrusi su'quali la sua attenzione è diretta. Da ciò che egli rammenta delle parti precedenti di quei rami delle matematiche di cui ha già cognizione, egli è condotto ad aspettarsi non appena incominciato il Calcolo Differenziale di poter comprendere il suo scopo generale, e di adoperarlo per risolvere problemi algebrici e geometrici; e rimanendo deluso in questa aspettativa, egli crede poter ragionevolmente supporre di non aver inteso a dovere i principii elementari del soggetto. Gioverà quindi a rassicurarlo, che la difficoltà della quale si lamenta probabilmente è dovuta più alla natura del soggetto che alla sua propria mancanza di penetrazione. Lo studente deve, per il meglio, lasciare al suo istitutore la cura di ordinare le diverse parti del soggetto che egli studia, e di scegliere

le definizioni necessarie ad essere compreso; e nel leggere un'opera sul Calcolo Differenziale, egli deve a principio contentarsi di riflettere sul significato delle definizioni, e di esaminare se le deduzioni tratte dallo scrittore da queste definizioni sono esatte. Vi sono innumerevoli applicazioni dei principii elementari del Calcolo Differenziale, come si vedrà nel Capitolo sugli Sviluppi e nei seguenti, ma da principio ci limiteremo semplicemente all'esercizio logico di tracciare le conseguenze di alcune definizioni.

Una difficoltà di più grave natura relativa alla nozione del limite, sembra imbarazzare molti studenti su questa materia, cioè, il sospetto che i metodi impiegati siano solamente approssimativi, e quindi il dubbio se i risultati siano assolutamente veri. Questa obiezione è certamente molto naturale, ma nello stesso tempo in verun modo facile ad essere affrontata, non essendo al caso il lettore d'indicare qualche punto preciso in cui la sua incertezza incomincia. In tale circostanza tutto ciò che egli può fare si è, di fissare la sua attenzione con molta cura su qualche parte della dottrina, sulla teoria degli sviluppi per esempio, in cui si ottengono formole speciali importanti. Egli esaminerà le dimostrazioni, e se non può scoprire alcun lato debole in esse, dovrà confessare che risultati *assolutamente veri e liberi da ogni approssimazione* possono legittimamente essere dedotti dalla dottrina dei Limiti.

23. La dimostrazione negli Art. 15, 16 della proposizione che $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ tende ad un limite fisso a misura che x cresce indefinitamente, è stata data in varie opere sul Calcolo Differenziale, e nello stesso modo è stata quì riportata. Ma il metodo seguente, nel quale non si assume il Teorema del Binomio, merita di esser notato.

Se m è un intero positivo, allora, con la divisione effettiva,

$$\frac{(1+\alpha)^m-1}{1+\alpha-1}=(1+\alpha)^{m-1}+(1+\alpha)^{m-2}+(1+\alpha)^{m-3}+\ldots+1;$$

onde $\qquad (1+\alpha)^m-1$ è $>m\alpha,$

ed è $\qquad <m\alpha(1+\alpha)^{m-1};$

quindi $\qquad (1+\alpha)^m$ è $>m\alpha+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$

ed $$(1+\alpha)^m \text{ è } < 1+m\alpha(1+\alpha)^{m-1} \ldots\ldots (2).$$

Da (2) segue, *a fortiori*, che

$$(1+\alpha)^m \text{ è } < 1+m\alpha(1+\alpha)^m \ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

quindi $$(1+\alpha)^m \text{ è } < \frac{1}{1-m\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

supponendo $m\alpha < 1$.

In (1) si ponga $\frac{\beta}{m}$ per α, e si estragga la radice m^{ma} da ambo i membri dell'eguaglianza; con ciò

$$1+\frac{\beta}{m} \text{ è } > (1+\beta)^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

In (4) si ponga $\frac{\beta}{m(\beta+1)}$ per α; allora

$$(1+\alpha)^m \text{ è } < 1+\beta,$$

quindi $$1+\frac{\beta}{m(\beta+1)} \text{ è } < (1+\beta)^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Si elevino i due lati di (6) all'n^{ma} potenza; allora

$$(1+\beta)^{\frac{n}{m}} \text{ è } > \left\{1+\frac{\beta}{m(\beta+1)}\right\}^n,$$

e quindi per (1) $$> 1+\frac{n}{m}\frac{\beta}{\beta+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Si elevino i due lati di (5) all'n^{ma} potenza, e si avrà

$$(1+\beta)^{\frac{n}{m}} < \left(1+\frac{\beta}{m}\right)^n;$$

onde per (4) $$< \frac{1}{1-\frac{n\beta}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

supponendo $\frac{n\beta}{m} < 1$.

In (7) ed (8) si ponga μ per $\frac{n}{m}$, e verrà

$$(1+\beta)^{\mu} > 1+\mu\frac{\beta}{1+\beta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9),$$

$$(1+\beta)^{\mu} < \frac{1}{1-\mu\beta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10),$$

in cui μ è una frazione positiva qualunque, ed in (10) $\mu\beta$ è <1.

Si moltiplichino ambo i lati di (9) per $1+\beta$; con ciò

$$(1+\beta)^{\mu+1} > 1+(\mu+1)\beta,$$

o sia, ponendo λ per $\mu+1$,

$$(1+\beta)^{\lambda} > 1+\lambda\beta \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11).$$

Così l' ineguaglianza in (1), la quale richiedeva che m fosse un intero positivo, è quì estesa, poichè λ può essere una frazione o un intero qualunque, purchè sia maggiore dell' unità.

In (11) si ponga $\beta=\frac{1}{\lambda\gamma}$, e si elevino i due lati alla potenza γ; allora

$$\left(1+\frac{1}{\lambda\gamma}\right)^{\lambda\gamma} \text{ è } > \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma};$$

vale a dire, se δ sia $>\gamma$,

$$\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{\delta} \text{ è } > \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma} \dots\dots\dots\dots (12).$$

Da (12) vediamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ cresce continuamente col crescere di x. Esso, però, non oltrepassa un certo limite finito; infatti in (10) si scriva $\frac{1}{\mu\gamma}$ per β, e si elevino ambo i lati alla potenza γ; allora

$$\left(1+\frac{1}{\mu\gamma}\right)^{\mu\gamma} \text{ è } < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma}} \text{ se } \gamma \text{ sia } > 1.$$

Laonde, se poniamo $\gamma=2$, troviamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ non può mai eccedere 4. Attribuendo a γ valori più grandi, otterremo un limite più vicino per $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Se $\gamma = 6$, vediamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ deve essere minore di $\left(\frac{6}{5}\right)^6$, quindi minore di 3. Poichè dunque il limite di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, a misura che x cresce indefinitamente, deve giacere tra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ed } \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

in cui n ha un valore positivo qualunque, possiamo, assegnando ad n valori interi successivi, facilmente approssimarci al valore numerico del limite.

CAPITOLO II.

DEFINIZIONE DEL COEFFICIENTE DIFFERENZIALE. COEFFICIENTE DIFFERENZIALE DI UNA SOMMA, UN PRODOTTO, ED UN QUOZIENTE.

24. Esporremo ora la definizione fondamentale del Calcolo Differenziale, e dedurremo da essa varie conseguenze.

Def. Dinoti $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x, e $\varphi(x+h)$ la stessa funzione di $x+h$; allora il valore limite di $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$, quando h diviene infinitamente piccolo, si dice il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x.

Questa definizione assume che la frazione precedente realmente *abbia un limite*. Parlando a rigore, dovremmo usare un enunciato della forma seguente — « Se $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ ha un limite quando h diviene infinitamente piccolo, questo limite si chiama il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x. » Mostreremo, però, che il limite esiste nelle funzioni di ogni sorta, esaminandole dettagliatamente in questo e nei due Capitoli seguenti. Diamo due esempii ad oggetto di chiarire la definizione.

Sia $$\varphi(x)=x^2;$$

onde $$\varphi(x+h)=(x+h)^2;$$

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h,$$

ed il limite di $2x+h$ quando $h=0$, è $2x$; adunque $2x$ è il coefficiente differenziale di x^2 rispetto ad x.

Sia, in secondo luogo $\varphi(x)=\dfrac{a}{b+x}$;

onde
$$\varphi(x+h)=\frac{a}{b+x+h},$$

e quindi
$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\frac{a}{(b+x)(b+x+h)}.$$

Il limite di questa espressione quando $h=0$ è
$$-\frac{a}{(b+x)^2},$$

il quale è adunque il coefficiente differenziale di $\dfrac{a}{b+x}$ rispetto ad x.

25. Diamo ora la notazione che usualmente accompagna la definizione nell' Art. 24.

Sia $\varphi(x)=y$, allora $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ è la *differenza* dei due valori della variabile dipendente y corrispondenti ai due valori, x ed $x+h$, della variabile indipendente. Questa differenza può convenientemente essere dinotata dal simbolo Δy, in cui Δ può essere preso come un'abbreviazione della parola *differenza*. Abbiamo così
$$\Delta y=\varphi(x+h)-\varphi(x).$$

Conformemente a questa notazione, h può essere dinotato con Δx, sicchè
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

Può sembrare una superfluità di notazione l' usare h e Δx per dinotare la stessa cosa, ma nel trovare il limite del secondo membro dovremo alle volte eseguire varie trasformazioni analitiche, e così una sola lettera è più conveniente. Nel primo membro Δx si raccomanda in considerazione della simmetria.

Diciamo adunque, secondo la definizione nell' Art. 24, che il limite di $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx diminuisce indefinitamente, è il coefficiente differenziale di y o $\varphi(x)$ rispetto ad x. *Questo limite è dinotato dal simbolo* $\dfrac{dy}{dx}$.

26. Noi consideriamo il simbolo $\frac{dy}{dx}$ siccome un *tutto*, e non diamo un significato separato a dy e dx. Intanto, siccome $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è un'effettiva frazione nella quale Δy e Δx hanno significati definiti, lo studente facilissimamente sospetterà che qualche significato possa darsi a dy e dx il quale lo abiliterà a riguardare $\frac{dy}{dx}$ come una frazione. Questo sospetto probabilmente acquisterà maggior forza a misura che egli procede innanzi nella materia e trova che in molti casi $\frac{dy}{dx}$ possiede le proprietà di una frazione algebrica. Osserviamo che vi sono in vero metodi di trattare il Calcolo Differenziale nei quali si danno dei significati a dy e dx, e ricorreremo ad essi in seguito (si vegga il Cap. XXVII.), ma per ora noi definiamo il simbolo $\frac{dy}{dx}$ come sopra, e solamente lasciamo al lettore l'incarico di esaminare se siamo conseguenti con noi stessi nelle deduzioni che procediamo a trarre ed esprimere per mezzo delle nostre definizioni e dei nostri simboli.

La seguente notazione è anche frequentemente adoperata. Se $\varphi(x)$ dinota una funzione qualunque di x, allora $\varphi'(x)$ dinota il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x.

L'operazione di trovare il coefficiente differenziale di una funzione è detta « differenziare » questa funzione.

27. *Coefficiente differenziale di una somma di Funzioni.*

Dinotino y e z due funzioni di x, ed u la loro somma. Supponiamo che y', z', u', dinotino i valori che prendono queste funzioni quando x si cambia in $x+h$. Allora

$$u=y+z,$$

$$u'=y'+z',$$

onde
$$u'-u=y'-y+z'-z;$$

o sia
$$\Delta u=\Delta y+\Delta z.$$

Si divida per h o Δx, allora

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Diminuisca ora h senza limite, ed avremo

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}.$$

Adunque *il coefficiente differenziale della somma di due funzioni è la somma dei coefficienti differenziali delle funzioni.*

Similmente, se

$$u=y-z,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}.$$

28. Il risultato dell'Art. 27 può essere esteso al caso di un numero qualunque di funzioni unite con i segni di addizione o sottrazione. Per esempio, sia

$$u=w+y+z,$$

allora, come sopra, $\Delta u=\Delta w+\Delta y+\Delta z;$

onde $$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta w}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta z}{\Delta x};$$

quindi, passando al limite,

$$\frac{du}{dx}=\frac{dw}{dx}+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}.$$

29. *Coefficiente differenziale del prodotto di due Funzioni.*

Dinotino $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, e sia

$$u=\varphi(x)\psi(x).$$

Si muti x in $x+h$, e dinoti $u+\Delta u$ il nuovo prodotto, allora

$$u+\Delta u=\varphi(x+h)\psi(x+h),$$

onde $$\Delta u=\varphi(x+h)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x),$$

$$=\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}\psi(x+h)+\varphi(x)\{\psi(x+h)-\psi(x)\};$$

quindi $$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\psi(x+h)+\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\varphi(x).$$

Ora supponiamo h diminuire indefinitamente; allora

$$\text{limite di }\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

è il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x, o $\varphi'(x)$;

$$\text{limite di } \frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$$

è il coefficiente differenziale di $\psi(x)$ rispetto ad x, o $\psi'(x)$;

$$\text{limite di } \psi(x+h) \text{ è } \psi(x);$$

quindi
$$\frac{du}{dx}=\varphi'(x)\psi(x)+\psi'(x)\varphi(x).$$

Adunque *il coefficiente differenziale del prodotto di due funzioni si trova moltiplicando ciascun fattore per il coefficiente differenziale dell'altro fattore ed addizionando i prodotti risultanti.*

Si divida ciascun membro dell'ultimo risultato per u o $\varphi(x)\psi(x)$; sarà

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

30. Un'equazione simile a quella testè ottenuta vale pel prodotto di un numero qualunque di funzioni. Per esempio, sia

$$u=wyz,$$

w, y, z essendo tutte funzioni di x.

Si prenda
$$v=wy,$$
onde
$$u=vz;$$
allora, per l'Art. 29,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{z}\frac{dz}{dx};$$

del pari
$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx};$$

onde
$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{z}\frac{dz}{dx};$$

quindi
$$\frac{du}{dx}=yz\frac{dw}{dx}+wz\frac{dy}{dx}+wy\frac{dz}{dx}.$$

Procedendo in questo modo abbiamo la regola — *Il coefficiente differenziale del prodotto di un numero qualunque di funzioni si trova moltiplicando il coefficiente differenziale di ciascun fattore per tutti gli altri fattori ed addizionando i prodotti così ottenuti.*

31. *Coefficiente differenziale di un quoziente.*

Dinotino $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, e sia

$$u = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Si supponga x mutato in $x+h$, e dinoti $u + \Delta u$ il nuovo valore del quoziente. Allora

$$u + \Delta u = \frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)},$$

onde $$\Delta u = \frac{\varphi(x+h)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x+h)}{\psi(x+h)\,\psi(x)}$$ $+ \psi x\, \varphi x - \psi x$

$$= \frac{\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\}\,\psi(x) - \{\psi(x+h) - \psi(x)\}\,\varphi(x)}{\psi(x+h)\,\psi(x)};$$

quindi $$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\,\psi(x) - \dfrac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}\,\varphi(x)}{\psi(x+h)\,\psi(x)}.$$

Diminuisca h senza limite, allora

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)\,\psi(x) - \psi'(x)\,\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^2}.$$

Adunque abbiamo questa regola — *Per trovare il coefficiente differenziale di un quoziente; si moltiplichi il denominatore pel coefficiente differenziale del numeratore ed il numeratore pel coefficiente differenziale del denominatore; si sottragga il secondo prodotto dal primo e si divida il risultato pel quadrato del denominatore.*

32. Il risultato dell'Art. 31 può anche ottenersi nel seguente modo:

Essendo $$u = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

onde $$\varphi(x) = u\psi(x);$$

sarà, per l'Art. 29.

$$\varphi'(x) = \frac{du}{dx}\psi(x) + u\psi'(x);$$

onde $$\psi(x)\frac{du}{dx} = \varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\psi'(x),$$

quindi $$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)\,\psi(x) - \psi'(x)\,\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^2}.$$

33. *Differenziazione di una costante.*

Se $y=c$ in cui c è una costante, allora $\frac{dy}{dx}=0$. Infatti dire che y sia eguale ad una costante equivale a dire che y non possa variare; da ciò $\Delta y=0$, onde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

qualunque sia il valore di Δx; quindi

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Adunque, facendo $\varphi(x)=$ad una costante c nell'Art. 29, abbiamo

$$\frac{dc\psi(x)}{dx}=c\psi'(x).$$

Del resto si può ottenere ciò direttamente come segue: sia

$$u=c\psi(x),$$

allora $$u+\Delta u=c\psi(x+h);$$

onde $$\frac{\Delta u}{\Delta x}=c\,\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h},$$

quindi $$\frac{du}{dx}=c\psi'(x).$$

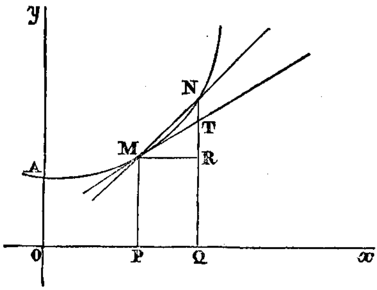
Similmente ponendo $\varphi(x)=c$ nell'Art. 31, abbiamo

$$\frac{d\dfrac{c}{\psi(x)}}{dx}=-\frac{c\psi'(x)}{\{\psi(x)\}^2},$$

il che può anche essere trovato indipendentemente.

34. Abbiamo ora definito il coefficiente differenziale ed abbiamo mostrato come possa trovarsi il coefficiente differenziale di una funzione composta allorchè conosciamo i coefficienti differenziali delle funzioni componenti. Prima di procedere alle regole per determinare il coefficiente differenziale di una qualunque data espressione algebrica, daremo alcune illustrazioni geometriche le quali saranno di aiuto nella formazione del concetto del significato del coefficiente differenziale e somministreranno alcuni cenni intorno alle applicazioni che possono farsi della dottrina dei limiti.

35. Supponiamo data l'equazione $y=\varphi(x)$, si attribuiscano alla variabile indipendente x tutt'i possibili valori tra $-\infty$ e $+\infty$ e si notino i valori corrispondenti di y. La Geometria ci dà il mezzo di rappresentare distintamente questa successione di valori. Possiamo prendere x per un'ascissa misurata da un' origine fissa lungo un certo asse, ed y per la corrispondente ordinata misurata lungo un asse perpendicolare al primo. I valori di y corrispondenti a quelli di x nell'equazione $y=\varphi(x)$ apparterranno ad una curva AMN, la forma della quale indicherà la serie dei valori che stiamo considerando. È necessario di avere sempre presente nella nostra mente non già un valore particolare di x ed il valore corrispondente di y, ma l'intera serie dei valori corrispondenti di queste due variabili.



36. Tra le proprietà della funzione $\varphi(x)$, o della linea che la rappresenta, la più rimarchevole, quella in fatti che forma l'oggetto del calcolo differenziale e che occorre continuamente di considerare in tutte le applicazioni di questo calcolo, *è il grado di rapidità col quale la funzione varia quando la variabile incomincia a variare da un valore assegnato qualunque*. Il grado di rapidità dell'accrescimento della funzione quando la variabile aumenta può differire non solamente nelle diverse funzioni ma anche nella stessa funzione secondo il valore attribuito alla variabile dal quale si suppone incominciare l'aumento. Supponiamo che si dia ad x un valore particolare dinotato da OP, al quale corrisponde un determinato valore di y o $\varphi(x)$ rappresentato da MP. Cresca x, a partire dal valore assegnato, di una quantità che dinotiamo con Δx, ed è rappresentata da PQ. La funzione y varierà in conseguenza di una certa quantità che dinotiamo con Δy, sicchè

$$y+\Delta y=\varphi(x+\Delta x),$$

onde

$$\Delta y=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x).$$

Il nuovo valore dell'ordinata è rappresentato nella figura da NQ, ed NR rappresenta Δy. La frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rappresenta il rapporto dell'accrescimento della funzione all'accrescimento della variabile, ed è eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo NMR formato dalla tangente MN con l'asse delle x.

37. È chiaro che questa frazione è una naturale misura del grado di rapidità col quale cresce la funzione y allorchè la variabile indipendente x aumenta; poichè quanto più grande è tale frazione, tanto maggiore sarà l'accrescimento della funzione y corrispondente al dato aumento Δx della variabile. Ma è importante l'osservare che il valore di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dipenderà non solamente dal valore dato ad x, *ma ancora dalla grandezza dell'incremento* Δx, eccettuato il caso in cui la curva diviene una linea retta.

Se dunque noi lasciamo questo incremento arbitrario, sarà impossibile assegnare alla frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alcun valore definito, ed è quindi necessario di adottare qualche convenzione che valga a rimuovere questa incertezza.

38. Supponiamo che dopo di aver dato a Δx un certo valore, al quale corrisponderà un certo valore per Δy ed una certa direzione per la segante MN, si faccia diminuire gradatamente il valore di Δx sino a che diventi zero. Il valore di Δy diminuirà anche gradatamente e diverrà finalmente zero. Il punto N si muoverà lungo la curva verso M, e troveremo *in ogni esempio che si consideri, che la retta MN si avvicinerà verso una posizione limite MT.* Ciò è in effetti equivalente all'asserzione contenuta nell'Art. 24, che esaminando ogni caso dettagliatamente potremmo mostrare come ogni funzione abbia un coefficiente differenziale. La posizione limite della segante quando N coincide con M si dice *la tangente della curva nel punto M,* e così $\frac{dy}{dx}$ è la tangente trigonometrica dell'inclinazione della retta tangente della curva all'asse delle x.

39. Il limite della frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx diminuisce indefinitamente, si può considerare come una misura precisa della rapidità con la quale la funzione cresce allorchè la variabile indipendente aumenta, poichè non vi rimane più nulla di arbitrario nell'espressione. Il limite $\frac{dy}{dx}$ non dipende dal valore assegnato a Δx nè dalla forma della curva ad una distanza finita dal punto di cui le coordinate sono x ed y; esso dipende solamente dalla *direzione* della curva in questo punto, vale a dire, dall'inclinazione della retta tangente all'asse delle x.

40. Come un esempio di ciò che precede, determineremo il coefficiente differenziale di $\sqrt{(a^2-x^2)}$, e ne daremo la sua applicazione geometrica.

Sia $\qquad y=\sqrt{(a^2-x^2)}$,

allora $\qquad y+\Delta y=\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}$;

onde

$$\Delta y=\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}-\sqrt{(a^2-x^2)},$$

$$=\frac{x^2-(x+h)^2}{\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

$$=\frac{-(2xh+h^2)}{\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

quindi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2x+h}{\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Il limite di questa espressione allorchè h diviene infinitamente piccolo è

$$-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

adunque

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Si vedrà che nell'esempio precedente abbiamo adoperato un artificio algebrico, cioè di moltiplicare il numeratore ed il denominatore di una frazione per $\sqrt{\{a^2-(x+h)^2\}}+\sqrt{(a^2-x^2)}$, allo scopo di ottenere $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in una forma di cui si possa con facilità vedere il limite. Nel trattare un esempio qualunque senza l'aiuto di regole generali, troveremmo sovente dipendere la nostra riuscita dalla nostra speditezza nell'effettuare simili trasformazioni; ma nei due prossimi capitoli si spiegheranno metodi per far dipendere la ricerca di un coefficiente differenziale qualunque dalla conoscenza di quelli di poche funzioni fondamentali.

41. Dalla geometria analitica conosciamo che l'equazione $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$ rappresenta un cerchio, ed è altresì conosciuto per i principii su questo soggetto che la tangente nel punto (x, y) di un cerchio è inclinata all'asse delle x sotto un angolo di cui la tangente trigonometrica è $-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Inoltre nel caso del cerchio la retta che abbiamo definita come la tangente è la stessa retta che soddisfa alla condizione di « toccare il cerchio » data in *Euclide*, Libro III.

42. Nei capitoli sulle applicazioni geometriche del calcolo differenziale ricorreremo al soggetto delle tangenti. Abbiamo dato quì l'esempio precedente affinchè lo studente possa dal bel principio acquistare la convinzione che importanti usi si possono fare del coefficiente differenziale.

43. La seguente è un'altra applicazione geometrica. L'area *OAMP*, (si vegga la fig. all'Art. 35), deve essere *una qualche* funzione di x, poichè essa è una quantità definita allorchè si assegna un valore definito ad x, e varia quando x varia. Si dinoti questa funzione con u, e PQ con Δx; allora

$$u+\Delta u = \text{area } OANQ,$$

onde
$$\Delta u = \text{area } MNQP;$$

quindi
$$\Delta u \text{ giace tra } MP \cdot PQ \text{ ed } NQ \cdot PQ,$$

cioè, tra
$$y\,\Delta x \text{ ed } (y+\Delta y)\,\Delta x;$$

onde
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ giace tra } y \text{ ed } y+\Delta y.$$

Quindi, diminuendo Δx, e per conseguenza Δy, senza limite, abbiamo

$$\frac{du}{dx}=y.$$

CAPITOLO III.

COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI SEMPLICI.

44. *Coefficiente differenziale di x^n in cui n è un intero positivo.*

Sia $y=x^n$, onde

$$y+\Delta y=(x+h)^n,$$
$$\Delta y=(x+h)^n-x^n,$$
$$=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n;$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}.$$

Diminuisca h senza limite, e si avrà

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

45. Lo stesso risultato può anche ottenersi per mezzo dell'Art. 30. Infatti sia

$$u=y_1\cdot y_2\cdots y_n,$$

in cui le n quantità $y_1, y_2, \ldots y_n$, sono tutte funzioni di x; abbiamo allora

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}+\ldots+\frac{1}{y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Se ora $y_1=x$, si ha

$$\Delta y_1=\Delta x,$$

onde $$\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=1,$$

quindi $$\frac{dy_1}{dx}=1.$$

Si pongano adunque $y_1, y_2, \ldots y_n$, tutte eguali ad x; con ciò u diviene x^n, ed otteniamo

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{n}{x},$$

quindi
$$\frac{du}{dx}=nx^{n-1}.$$

46. Se n non è un intero positivo, ammettendo la verità della serie binomiale per gli esponenti frazionari possiamo procedere come nell'Art. 44 per determinare $\frac{dx^n}{dx}$. Ma in questo caso dovremo richiedere di ammettere che « se si ha una serie di un numero infinito di termini e ciascun termine diviene ultimamente indefinitamente piccolo, la somma dei termini diviene ancora tale ». Per evitare di ammettere ciò adottiamo un altro modo.

47. *Coefficiente differenziale di* x^n, essendo n qualunque.

Sia $y=x^n$, onde
$$y+\Delta y=(x+h)^n,$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=x^n\frac{\left(\frac{x+h}{x}\right)^n-1}{h}.$$

Ora qualunque sia il valore di n, positivo o negativo, intero o frazionario, si può suppore $=\frac{p-q}{r}$, in cui p, q, r, sono interi positivi.

Sia
$$\frac{x+h}{x}=z,$$

onde
$$h=x(z-1),$$

e
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{n-1}\frac{z^n-1}{z-1}.$$

A misura che h diminuisce indefinitamente z si avvicina al limite 1, e dobbiamo trovare in questo caso il limite di

$$\frac{z^n-1}{z-1}.$$

Si supponga $v=z^{\frac{1}{r}}$, allora

$$\frac{z^n-1}{z-1} \text{ o } \frac{z^{\frac{p-q}{r}}-1}{z-1}=\frac{v^{p-q}-1}{v^r-1}=\frac{v^p-v^q}{v^q(v^r-1)}$$

$$=\frac{v^p-1-(v^q-1)}{v^q(v^r-1)}$$

$$=\frac{v^{p-1}+v^{p-2}+\ldots+1-(v^{q-1}+v^{q-2}+\ldots+1)}{v^q(v^{r-1}+v^{r-2}+\ldots+1)}.$$

L'ultimo risultato si è ottenuto dividendo il numeratore ed il denominatore della frazione precedente per $v-1$. Si avvicini ora v al limite 1, allora il limite dell'ultima frazione è

$$\frac{p-q}{r},$$

quindi
$$\frac{dy}{dx}=\frac{p-q}{r}x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

48. *Coefficiente differenziale di x^n con un altro metodo.*

Sia $y=x^n$, onde

$$y+\Delta y=(x+h)^n,$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h},$$

$$=\frac{x^n}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n-1\right\}.$$

Si ponga $\frac{h}{x}=z$ ed $(1+z)^n-1=v$, allora z e v sono quantità che diminuiscono indefinitamente con h. Con ciò

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{n-1}\frac{v}{z}.$$

Dalle supposizioni precedenti

$$(1+z)^n=1+v,$$

onde
$$\log_e(1+v)=n\log_e(1+z).$$

Dall'Art. 19 le espressioni

$$\frac{\log_e(1+z)}{z} \text{ e } \frac{\log_e(1+v)}{v}$$

tendono entrambe al limite l'unità. Quindi possiamo supporre

$$\frac{\log_e(1+v)}{v} = 1+\gamma,$$

$$\frac{\log_e(1+z)}{z} = 1+\delta,$$

in cui ciascuna delle quantità γ e δ ha zero per suo limite. Laonde

$$\frac{v}{z} = \frac{1+\delta}{1+\gamma} \cdot \frac{\log_e(1+v)}{\log_e(1+z)}$$

$$= n\frac{1+\delta}{1+\gamma} \text{ per le formole precedenti;}$$

adunque il limite di $\frac{v}{z}$ è n, e

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

49. *Coefficiente differenziale di* a^x.

Sia $y = a^x$, onde

$$y + \Delta y = a^{x+h} = a^x a^h,$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Ora, per l'Art. 20, il limite di

$$\frac{a^h - 1}{h},$$

quando h diminuisce indefinitamente è $\log_e a$; adunque

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log_e a.$$

Sia in seguito $y = a^{cx}$; allora

$$y = (a^c)^x;$$

onde per la regola testè dimostrata

$$\frac{dy}{dx} = (a^c)^x \log_e a^c$$

$$= a^{cx} c \log_e a.$$

Quindi se $y = e^{cx}$,

$$\frac{dy}{dx} = ce^{cx};$$

e se

$$y = e^x,$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

50. *Coefficiente differenziale di* $\log_a x$.

Sia $y = \log_a x$, onde

$$y + \Delta y = \log_a (x + h),$$

quindi

$$\Delta y = \log_a (x + h) - \log_a x$$

$$= \log_a \frac{x + h}{x};$$

laonde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \dfrac{x + h}{x}}{h}.$$

Si ponga $h = xz$, onde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a (1 + z)}{z}.$$

Per l'Art. 19 il limite di $\dfrac{\log_a (1 + z)}{z}$ quando z diminuisce indefinitamente è $\log_a e$, quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e a}.$$

Quindi se $y = \log_e x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

51. *Coefficiente differenziale di* sen x.

Sia $y = \operatorname{sen} x$, onde

$$y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + h),$$

quindi
$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x,$$
$$= 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{h}{2}, \text{ per la Trigonometria},$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Ora quando h diminuisce indefinitamente, il limite di $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ è l'unità per l'Art. 9, dunque

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

52. *Coefficiente differenziale di* cos x.

Sia $y = \cos x$, onde

$$y + \Delta y = \cos(x + h),$$

quindi
$$\Delta y = \cos(x + h) - \cos x$$
$$= -2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{h}{2},$$

quindi
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x.$$

53. *Coefficiente differenziale di* tan x.

Sia $y = \tan x$, onde

$$y + \Delta y = \tan(x + h),$$

quindi $$\Delta y = \tan(x+h) - \tan x.$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos(x+h)\cos x},$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} h}{h} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

54. *Coefficiente differenziale di* $\cot x$.

Procedendo come nell'ultimo esempio, si trova che se

$$y = \cot x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

55. *Coefficiente differenziale di* $\sec x$.

Sia $y = \sec x$, onde

$$y + \Delta y = \sec(x+h)$$

$$\Delta y = \sec(x+h) - \sec x$$

$$= \frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x \cos(x+h)}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\cos x \cos(x+h)};$$

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x \cos(x+h)} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

56. *Coefficiente differenziale di* cosec x.

Sia $y = \operatorname{cosec} x$; si proceda come nell'ultimo esempio, e si troverà

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

57. Poichè $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, e $\operatorname{cosec} x$ sono tutte forme frazionarie, noi possiamo dedurre il coefficiente differenziale di ciascuna di queste funzioni per mezzo dell'Art. 31 da quelli di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Così, sia

$$y = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \dfrac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \operatorname{sen} x \dfrac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x}, \text{ Art. 31},$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}, \text{ Art. 51 e 52},$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Similmente possiamo procedere per $\cot x$, $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$.

Poichè $\operatorname{vers} x = 1 - \cos x$, il coefficiente differenziale di $\operatorname{vers} x$, per gli Art. 27 e 33

$$= - \text{ il coefficiente differenziale di } \cos x$$

$$= \operatorname{sen} x.$$

CAPITOLO IV.

COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE E DELLE FUNZIONI COMPLESSE.

58. Sia $y = \varphi(x)$, sicchè y è una nota funzione di x; segue da ciò che x deve essere *una qualche* funzione di y, benchè possiamo non essere al caso di esprimere questa funzione in una forma semplice. Il miglior modo pel lettore di convincersi di ciò sarà di ricorrere alla geometria analitica e di supporre che x ed y siano le coordinate di un punto di una curva che ha per equazione $y = \varphi(x)$. Per ogni valore di x vi saranno generalmente uno o più valori di y, positivi o negativi, secondo la circostanza. Del pari per ogni valore di y vi saranno generalmente uno o più definiti valori di x, i quali, siccome essi realmente esistono, possono divenire il soggetto delle nostre investigazioni, anche sebbene il nostro attuale potere di espressioni matematiche non ci fornisca alcun modo semplice di rappresentarli.

59. Un esempio semplice sarà dato dall'equazione

$$y = x^2 - 2x + 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Si risolva questa equazione rispetto ad x, e si avrà

$$x = 1 \pm y^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Quì (2) mostra che se un valore qualunque si assegna ad y avremo per x uno tra due definiti valori.

Ora in (1), x essendo la variabile indipendente ed y la variabile dipendente, abbiamo per gli Art. 28, 33, e 44,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3).$$

Nell'equazione (2) possiamo trattare y come la variabile indipendente ed x come la variabile dipendente, e troviamo, per l'Art. 47,

$$\frac{dx}{dy} = \pm \tfrac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(4)}.$$

Da (2) $$x - 1 = \pm y^{\frac{1}{2}},$$

onde $$\frac{1}{x-1} = \pm y^{-\frac{1}{2}}.$$

Quindi, da (4), $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(x-1)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(5)}.$$

Paragonando (5) con (3), vediamo che

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1.$$

Il teorema ottenuto in questo semplice caso dimostreremo ora di esser vero in generale.

60. *Dimostrare che* $\dfrac{dy}{dx} \times \dfrac{dx}{dy} = 1.$

Sia $$y = \varphi(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(1)},$$

poichè da ciò segue che x deve essere *una qualche* funzione di y, si supponga

$$x = \psi(y) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(2)}.$$

Si muti in (1) x in $x + \Delta x$, in conseguenza di che y diviene $y + \Delta y$, onde

$$y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(3)}.$$

Ora in (2) può accadere che x *abbia più di un valore* per ogni valore assegnato ad y, ma se il valore di y in (2) è lo stesso che in (1), allora tra i valori che x può avere, *uno deve essere il valore che abbiamo supposto assegnato ad x in* (1). Quindi possiamo supporre x ed y in (2) di avere gli stessi valori che i medesimi simboli hanno rispettivamente in (1). Nell'equazione (2) si muti y in $y + \Delta y$, in cui y ha lo stesso valore che in (1) e (3), e Δy lo stesso valore che in (3). Allora tra i valori di cui la variabile dipendente è suscettibile in (2), *uno deve essere* $x + \Delta x$, i simboli avendo gli stessi valori che in (3).

Adunque $x + \Delta x = \psi (y + \Delta y)$ .... (4).

Da (1) e (3)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi (x + \Delta x) - \varphi (x)}{\Delta x} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5).$$

Da (2) e (4)

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\psi (y + \Delta y) - \psi (y)}{\Delta y} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6).$$

In (5) e (6) gli stessi simboli hanno gli stessi valori, e poichè in questo caso $\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$, abbiamo

$$\frac{\varphi (x + \Delta x) - \varphi (x)}{\Delta x} \times \frac{\psi (y + \Delta y) - \psi (y)}{\Delta y} = 1.$$

Ora si diminuiscano Δx e Δy senza limite, ed avremo

$$\varphi' (x) \times \psi' (y) = 1;$$

o, come può scriversi,

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1.$$

61. La dimostrazione data nell'ultimo articolo può sembrare laboriosa. Nel rivederla, lo studente si accorgerà che ciò proviene dalla necessità di dimostrare che gli x, y, Δx, e Δy, che si trovano in (5), *hanno gli stessi valori numerici delle quantità dinotate con gli stessi simboli rispettivamente in* (6). Questo punto è sovente ammesso, e si considera sufficiente il dire « poichè $\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$ sempre, abbiamo, passando al limite, $\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$, » ma sembrerebbe necessario almeno d'indicare ciò che si ammette.

62. Si supponga $z = \varphi (x)$,

$$y = \psi (z),$$

sicchè y è una funzione di z, e z una funzione di x. Ne segue che se sostituiamo per z il suo valore in $\psi (z)$, si renderà y una funzione esplicita di x, e per conseguenza y deve avere un coefficiente differenziale rispetto ad x. Per esempio, se $z=x^2$, ed $y=z^3$, abbiamo con la sostituzione $y=x^6$. Ora questa è una funzione di x di cui conosciamo il coefficiente differenziale, per l'Art. 44. Onde $\frac{dy}{dx}=6x^5$. Ma se $z=\cos x$ ed $y=a^z$, troviamo $y=a^{\cos x}$, una funzione di x che non abbiamo ancora veduto come differenziare. Quindi la necessità e l'uso della regola dimostrata nel prossimo articolo.

63. *Coefficiente differenziale di una funzione di funzione.*

Sia $$z=\varphi(x) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
ed $$y=\psi(z) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
sicchè y è una funzione di x; si cerca il coefficiente differenziale di y rispetto ad x.

Si muti x in $x+\Delta x$, in conseguenza di che z diviene $z+\Delta z$, e si supponga in conseguenza di questo cambiamento in z, che y divenga $y+\Delta y$; con ciò

$$z+\Delta z=\varphi(x+\Delta x) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$
$$y+\Delta y=\psi(z+\Delta z) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Supponiamo ora che ponendo per z il suo valore in (2), si ottenga

$$y=F(x) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

in cui $F(x)$ dinoti una qualche funzione di x. Dal modo nel quale l'equazione (5) è ottenuta segue che possiamo *supporre x ed y di avere rispettivamente gli stessi valori in* (5) *che in* (1) *e* (2), *ed anche che*

$$y+\Delta y=F(x+\Delta x) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

in cui Δx e Δy sono le stesse quantità che si trovano già in (3) *e* (4).

Da queste equazioni si deduce

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \text{ da (5) e (6),}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta z}=\frac{\psi(z+\Delta z)-\psi(z)}{\Delta z} \text{ da (2) e (4),}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \text{ da (1) e (3),}$$

in cui gli stessi simboli dinotano da per tutto le stesse quantità. Quindi, poichè

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\times\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

abbiamo

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\psi(z+\Delta z)-\psi(z)}{\Delta z}\times\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$$

Diminuiscano ora Δx, Δz, e Δy, senza limite, ed abbiamo

$$F'(x)=\psi'(z)\,\varphi'(x);$$

o, come si può scrivere,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}.$$

Adunque il coefficiente differenziale di y rispetto ad x è eguale al prodotto del coefficiente differenziale di y rispetto a z, e del coefficiente differenziale di z rispetto ad x.

64. Possiamo fare sulla dimostrazione in questo ultimo articolo un'osservazione simile a quella nell'Art. 61. Spesso si considera sufficiente il dire che « $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\times\frac{\Delta z}{\Delta x}$ per le proprietà delle frazioni, e quindi, prendendo il limite, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}$. »

65. *Coefficiente differenziale di* $\operatorname{sen}^{-1}x$.

Sia $y=\operatorname{sen}^{-1}x$, onde

$$\operatorname{sen} y = x,$$

quindi $$\frac{dx}{dy}=\cos y,\ \text{Art. 51},$$

quindi $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y},\ \text{Art. 60}.$$

Poichè $\operatorname{sen} y=x$, $\cos y=\pm\sqrt{(1-x^2)}$; il segno da prendere dipenderà naturalmente dal valore di y; possiamo adunque porre

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

ricordandosi di dare il segno negativo al radicale se $\cos y$ è negativo.

66. *Coefficiente differenziale di* $\cos^{-1} x$.

Sia $y = \cos^{-1} x$, onde

$$\cos y = x,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{sen} y, \text{ Art. } 52,$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}, \text{ Art. } 60,$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

(Si vegga l'articolo precedente).

67. *Coefficiente differenziale di* $\tan^{-1} x$ *e* $\cot^{-1} x$.

Sia $y = \tan^{-1} x$, onde

$$x = \tan y,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}, \text{ Art. } 53,$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y, \text{ Art. } 60.$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}.$$

Similmente, se $$y = \cot^{-1} x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

68. *Coefficiente differenziale di* $\sec^{-1} x$ *e* $\operatorname{cosec}^{-1} x$.

Sia $y = \sec^{-1} x$, onde

$$x = \sec y,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}, \text{ Art. } 55,$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen} y}, \text{ Art. } 60.$$

Ma $\sec x = y$, onde $\cos y = \frac{1}{x}$, e $\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$, si vegga l'Art. 65, con ciò

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}};$$

similmente, se $\quad y = \operatorname{cosec}^{-1} x,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

69. Nel modo esposto negli articoli precedenti i coefficienti differenziali delle funzioni trigonometriche inverse sono ordinariamente determinati. Essi però possono essere trovati senza usare l'Art. 60.

Per esempio, si supponga

$$y = \tan^{-1} x,$$

onde $\quad y + \Delta y = \tan^{-1}(x+h),$

quindi $\quad \Delta y = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1} x$

$$= \tan^{-1} \frac{h}{1 + x(x+h)}, \text{ per la Trigonometria,}$$

quindi $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{h} \tan^{-1} \dfrac{h}{1 + x(x+h)}$

$$= \frac{1}{1 + x^2 + xh} \cdot \frac{\tan^{-1} \dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}}.$$

Diminuisca ora h senza limite, sarà

$$\text{limite di } \frac{\tan^{-1} \dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}} = 1, \text{ Art. 21,}$$

onde $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}.$

70. In secondo luogo, si supponga $y = \operatorname{sen}^{-1} x$,

onde $y + \Delta y = \operatorname{sen}^{-1}(x+h)$,

quindi $\Delta y = \operatorname{sen}^{-1}(x+h) - \operatorname{sen}^{-1} x$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left[(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}} \right],$$

per la Trigonometria,

quindi $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}^{-1}\left[(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}} \right]}{h};$$

si ponga $(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}} = z$ per brevità,

allora $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}^{-1} z}{h} = \frac{\operatorname{sen}^{-1} z}{z} \cdot \frac{z}{h}.$$

Ora $$\frac{z}{h} = \frac{(x+h)\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}}{h}$$

$$= \frac{(x+h)^2(1-x^2) - x^2\{1-(x+h)^2\}}{h\left[(x+h)\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}} \right]}$$

$$= \frac{2x+h}{(x+h)\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{\{1-(x+h)^2\}}};$$

sicchè il limite di $\frac{z}{h}$, quando $h = 0$, è $\frac{x}{x\sqrt{(1-x^2)}}$ o $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$;

ed il limite di $\frac{\operatorname{sen}^{-1} z}{z}$ è 1, Art. 21; adunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

71. *Coefficiente differenziale di* $\operatorname{vers}^{-1} x$.

Sia $y = \operatorname{vers}^{-1} x$, onde

$$\operatorname{vers} y = x,$$

quindi $$1 - \cos y = x,$$

quindi $$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sen} y,$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sen} y} = \frac{1}{\sqrt{(1-\cos^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{\{1-(1-x)^2\}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

72. *Coefficiente differenziale di z^v.*

Sia $y = z^v$, in cui v e z sono entrambe funzioni di x.

Si prendano i logaritmi dei due membri dell' equazione, allora

$$\log_e y = v \log_e z.$$

Ora poichè queste due funzioni di x sono sempre eguali, i loro coefficienti differenziali rispetto ad x saranno ancora eguali.

E $$\frac{d \log_e y}{dx} = \frac{d \log_e y}{dy}\frac{dy}{dx}, \text{ Art. } 63,$$
$$= \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}, \text{ Art. } 50.$$

Inoltre il coefficiente differenziale di $v \log_e z$

$$= \frac{dv}{dx} \log_e z + v \frac{d \log_e z}{dx}$$
$$= \frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. } 63;$$

quindi $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z}\frac{dz}{dx},$$

e $$\frac{dy}{dx} = z^v\left(\frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z}\frac{dz}{dx}\right).$$

73. Se paragoniamo gli Art. 29–31 con l' Art. 72 possiamo ricavare una regola generale per il coefficiente differenziale di una funzione composta. Si differenzii ordinatamente ciascuna funzione componente, trattando tutte le altre come se fossero costanti; indi si aggiungano i risultati così ottenuti.

Giova richiamare l' attenzione dello studente esplicitamente sopra tre casi differenti che i principianti sono atti a confondere.

(1) Se $y = z^a$ in cui z è una funzione di x ed *a è una costante*, allora per gli Art. 47 e 63

$$\frac{dy}{dx} = az^{a-1}\frac{dz}{dx}.$$

(2) Se $y = a^z$ in cui z è una funzione di x ed *a è una costante*, allora per gli Art. 49 e 63

$$\frac{dy}{dx} = a^z \log_e a \frac{dz}{dx}.$$

(3) Se $y = z^v$ in cui z e v sono entrambe funzioni di x, allora per l'Art. 72

$$\frac{dy}{dx} = z^v \left(\frac{dv}{dx} \log_e z + \frac{v}{z}\frac{dz}{dx}\right).$$

74. *Coefficiente differenziale di x^n. Terzo metodo*, si veggano gli Art. 47 e 48.

Il coefficiente differenziale di x^n è alle volte trovato nel seguente modo:

In primo luogo si dimostri come negli Art. 44 e 45 che se n è un intero positivo, il coefficiente differenziale di x^n è nx^{n-1}.

Se poi n è frazionario e positivo, si supponga $= \frac{p}{q}$ in cui p e q sono interi positivi.

Sia $$y = x^n = x^{\frac{p}{q}},$$
onde $$y^q = x^p.$$

Quindi prendendo i coefficienti differenziali dei due lati

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}.$$

La regola è così stabilita finchè n è positivo. Se n è negativo si supponga $= -m$, sicchè m è positivo.

Sia $y = x^{-m}$, onde

$$\frac{1}{y} = x^m,$$

quindi $$1 = yx^m.$$

Si differenziino i due lati, e si avrà

$$0 = x^m \frac{dy}{dx} + ymx^{m-1}, \text{ Art. 29 e 33},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = -\frac{my}{x} = -mx^{-m-1}$$
$$= nx^{n-1}.$$

Quindi la regola per differenziare x^n è stabilita in generale.

75. Daremo ora alcuni esempi delle regole precedenti per trovare coefficienti differenziali.

(1) Sia $y = \operatorname{sen} ax$.

Si ponga $ax = z$; onde $y = \operatorname{sen} z$,

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. } 63.$$

Ma $$\frac{dy}{dz} = \cos z, \text{ Art. } 51,$$

e $$\frac{dz}{dx} = a, \text{ Art. } 33,$$

dunque $$\frac{dy}{dx} = a\cos z = a\cos ax.$$

(2) Sia $y = \operatorname{sen}(\log x)$.

Con $\log x$ senza specificare alcuna base, intendiamo $\log_e x$.

Si ponga $$\log x = z,$$

onde $$y = \operatorname{sen} z,$$

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. } 63.$$

Ma $$\frac{dy}{dz} = \cos z, \text{ Art. } 51,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ Art. } 50,$$

dunque $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos z}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}.$$

(3) $y = \log(\operatorname{sen} x)$.

Si ponga $$\operatorname{sen} x = z,$$

onde $$y = \log z,$$

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \text{ Art. } 63,$$

$$= \frac{1}{z}\cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \cot x.$$

(4) $y = \log \dfrac{a+bx}{a-bx}$.

Si ponga $$\frac{a+bx}{a-bx} = z,$$

onde $$\frac{dz}{dx} = \frac{b(a-bx)+b(a+bx)}{(a-bx)^2}, \text{ Art. } 31,$$

$$= \frac{2ab}{(a-bx)^2},$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\,\frac{2ab}{(a-bx)^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}.$$

Questo esempio può essere anche risoluto ponendo

$$y = \log(a+bx) - \log(a-bx),$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx} = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}.$$

(5) $y = \cos^{-1} \dfrac{4-3x^2}{x^3}$.

Si ponga $$\frac{4-3x^2}{x^3} = z,$$

onde $$y = \cos^{-1} z,$$

e $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}.$$

Ora $$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}, \text{ Art. } 66,$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{4-3x^2}{x^3}\right)^2\right\}}} = \frac{-x^3}{\sqrt{(x^6-9x^4+24x^2-16)}};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-6x^4-3x^2(4-3x^2)}{x^6}, \text{ Art. } 31,$$

$$= \frac{3(x^2-4)}{x^4};$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{\sqrt{(x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16)}} \cdot \frac{3(x^2-4)}{x^4}$$

$$= \frac{-3(x^2-4)}{x\sqrt{\{(x^2-1)(x^2-4)^2\}}} = -\frac{3}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Nel differenziare $\frac{4-3x^2}{x^3}$ facciamo uso della regola per trovare il coefficiente differenziale di una frazione. Ponendo l'espressione sotto la forma

$$\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x},$$

o sia, $$4x^{-3} - 3x^{-1},$$

abbiamo per il coefficiente differenziale

$$-12x^{-4} + 3x^{-2},\ \text{Art. } 47,$$

o $$\frac{3(x^2-4)}{x^4},\ \text{come sopra.}$$

Si può osservare che frequentemente si presentano casi di tal fatta nei quali possiamo adottare più di un metodo. Lo studente troverà molto utile nel rendersi familiare con le regole, di ottenere i suoi risultati, se è possibile, con diversi metodi.

(6) $$y = \frac{\sqrt{\{ax(x-3a)\}}}{\sqrt{(x-4a)}}.$$

È spesso conveniente di prendere i logaritmi dei due membri di un'equazione prima di differenziare. Così, dall'equazione precedente, abbiamo

$$\log y = \tfrac{1}{2}\{\log a + \log x + \log(x-3a) - \log(x-4a)\}.$$

Si prenda il coefficiente differenziale di ciascun membro dell'equazione, e verrà

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3a} - \frac{1}{x-4a}\right\}$$

$$= \frac{x^2 - 8ax + 12a^2}{2x(x-3a)(x-4a)},$$

onde $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a}\cdot(x^2-8ax+12a^2)}{2\{x(x-3a)\}^{\frac{1}{2}}(x-4a)^{\frac{3}{2}}}.$$

(7) $y=\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

Si ponga $\frac{x}{a}=z$, onde $y=\tan^{-1}z$,

quindi $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

(8) Sia $y=\tan^{-1}\frac{3a^2x-x^3}{a(a^2-3x^2)}$.

Si ponga $\frac{3xa^2-x^3}{a(a^2-3x^2)}=z$; onde $y=\tan^{-1}z$,

e $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}.$$

Ora $$\frac{dz}{dx}=\frac{3(a^2-x^2)(a^2-3x^2)+6x(3xa^2-x^3)}{a(a^2-3x^2)^2}, \text{ Art. 31.}$$

$$=\frac{3(a^4+2a^2x^2+x^4)}{a(a^2-3x^2)^2}.$$

E riducendo troviamo che

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{a^2(a^2-3x^2)^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Onde $$\frac{dy}{dx}=\frac{3a}{a^2+x^2}.$$

Infatti abbiamo dalla Trigonometria

$$\tan^{-1}\frac{3a^2x-x^3}{a(a^2-x^2)}=3\tan^{-1}\frac{x}{a},$$

e quindi il valore di $\frac{dy}{dx}$ deve essere $\frac{3a}{a^2+x^2}$.

È chiaro che altri esempi capaci di verificarsi possono essere formati a norma di questo esempio.

(9) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{e^x \cos x}{1 + e^x \operatorname{sen} x}\right).$

Si ponga $$\frac{e^x \cos x}{1 + e^x \operatorname{sen} x} = z,$$

onde $$y = \tan^{-1} z,$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}.$$

Ora $$\frac{dz}{dx} = \frac{(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)(1 + e^x \operatorname{sen} x) - e^x \cos x (e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x)}{(1 + e^x \operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{e^x(\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)}{(1 + e^x \operatorname{sen} x)^2};$$

ed $$\frac{1}{1+z^2} = \frac{(1 + e^x \operatorname{sen} x)^2}{1 + 2e^x \operatorname{sen} x + e^{2x}};$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)}{1 + 2e^x \operatorname{sen} x + e^{2x}}.$$

(10) $y = \operatorname{sen} x \tan^{-1} x\, a^x \log x.$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \tan^{-1} x\, a^x \log x + \frac{\operatorname{sen} x\, a^x \log x}{1+x^2}$$

$$+ \operatorname{sen} x \tan^{-1} x\, a^x \log a \log x + \frac{\operatorname{sen} x \tan^{-1} x\, a^x}{x}.$$ Art. 30.

76. I coefficienti differenziali delle funzioni semplici sono quì riuniti ad oggetto di richiamo.

$y = x^n.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$

$y = \log_a x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \log_e a}.$

$y = a^x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = a^x \log_e a.$

$$y = \operatorname{sen}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{a}.$$

$$y = \cos\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a}\operatorname{sen}\frac{x}{a}.$$

$$y = \tan\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\sec^2\frac{x}{a}.$$

$$y = \cot\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}.$$

$$y = \sec\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{a}}{\cos^2\frac{x}{a}}.$$

$$y = \operatorname{cosec}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a}\frac{\cos\frac{x}{a}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{a}}.$$

$$y = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

$$y = \cos^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

$$y = \tan^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2}.$$

$$y = \cot^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{a^2+x^2}.$$

$$y = \sec^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

$$y = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

$$y = \operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}}.$$

ESEMPII.

1. $y = c\sqrt{x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c}{2\sqrt{x}}$.

2. $y = \dfrac{a-x}{x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a}{x^2}$.

3. $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$.

4. $y = x\log x$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 1 + \log x$.

5. $y = \log \operatorname{cotan} x$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}$.

6. $y = \dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. $y = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

8. $y = e^x(1-x^3)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^x(1-3x^2-x^3)$.

9. $y = (x-3)e^{2x} + 4xe^x + x + 3$.

$$\frac{dy}{dx} = (2x-5)e^{2x} + 4(x+1)e^x + 1.$$

10. $y = (2x-5)e^{2x} + 4(x+1)e^x + 1$.

$$\frac{dy}{dx} = 4e^x\{(x-2)e^x + x + 2\}.$$

11. $y = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left\{1 + \log\dfrac{x}{n}\right\}$.

12. $y = \dfrac{x^n}{(1+x)^n}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$.

13. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

14. $y = \log(e^x + e^{-x})$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

15. $y = x^2 (a + x)^3 (b - x)^4.$

$$\frac{dy}{dx} = \{2ab - (6a - 5b)x - 9x^2\} x (a + x)^2 (b - x)^3.$$

16. $y = (a + x)^m (b + x)^n.$

$$\frac{dy}{dx} = (a + x)^{m-1} (b + x)^{n-1} \{m(b + x) + n(a + x)\}.$$

17. $y = \dfrac{1}{(a+x)^m} \dfrac{1}{(b+x)^n}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{m(b+x) + n(a+x)}{(a+x)^{m+1}(b+x)^{n+1}}.$

18. $y = \dfrac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \tan^4 x.$

19. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{(1 - x^2)}}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - \sqrt{(1 - x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}\{1 + 2x\sqrt{(1 - x^2)}\}}.$

20. $y = (a^2 + x^2) \tan^{-1} \dfrac{x}{a}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 2x \tan^{-1} \dfrac{x}{a} + a.$

21. $y = \sqrt{\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2x^2} \dfrac{bx + 2c}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}}.$

22. $y = \log\{\log(a + bx^n)\}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nbx^{n-1}}{(a + bx^n)\log(a + bx^n)}.$

23. $y = \log \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right).$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos x}.$

24. $y = e^{(a+x)^2} \operatorname{sen} x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^{(a+x)^2} \{2(a+x)\operatorname{sen} x + \cos x\}.$

25. $y = \dfrac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{2\sqrt{x}\sqrt{(a + x)}(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}.$

26. $y = \sqrt{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}(1 - x)}.$

27. $y = \sqrt{\left\{\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^3}\right\}}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x(2 - x^2)}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$

28. $y = \dfrac{x}{e^x - 1}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$.

29. $y = e^x \dfrac{(x-2)e^x + x + 2}{(e^x - 1)^3}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^4}\{(x-3)e^{2x} + 4xe^x + x + 3\}.$$

30. $y = \log \dfrac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

31. $y = \{x + \sqrt{(1-x^2)}\}^n$. $\dfrac{dy}{dx} = n\{x + \sqrt{(1-x^2)}\}^{n-1}\dfrac{\sqrt{(1-x^2)}-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

32. $y = \left\{\dfrac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ny}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

33. $y = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\left\{\dfrac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n$.

$$\frac{dy}{dx} = \left\{\frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n \frac{1+n\sqrt{(1-x^2)}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

34. $y = a^{\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\log_e a$.

35. $y = \tan a^{\frac{1}{x}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sec^2 a^{\frac{1}{x}}}{x^2}\log_e a . a^{\frac{1}{x}}$.

36. $y = \log\{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1-x^2)}\}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\left\{1 - \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\right\}$.

37. $y = (2a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})\sqrt{(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4a^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})}}$.

38. $y = x + \log\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1+\tan x}$.

39. $y = \dfrac{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3}\left\{1 + \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\right\}$.

40. $y = x \operatorname{sen}^{-1} x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^{-1} x + \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$

41. $y = \tan x \tan^{-1} x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^{-1} x + \dfrac{\tan x}{1+x^2}.$

42. $y = \operatorname{sen} nx\, (\operatorname{sen} x)^n.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = n (\operatorname{sen} x)^{n-1} \operatorname{sen} (n+1) x.$

43. $y = \dfrac{(\operatorname{sen} nx)^m}{(\cos mx)^n}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mn (\operatorname{sen} nx)^{m-1} \cos (mx - nx)}{(\cos mx)^{n+1}}.$

44. $y = e^{-a^2x^2} \cos rx.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = - e^{-a^2x^2} (2a^2 x \cos rx + r \operatorname{sen} rx).$

45. $y = \dfrac{x - \operatorname{sen}^{-1} x}{(\operatorname{sen} x)^3}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x \left\{ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \right\} - 3 (x - \operatorname{sen}^{-1} x) \cos x}{(\operatorname{sen} x)^4}.$$

46. $y = \log \left\{ \dfrac{a + b \tan \dfrac{x}{2}}{a - b \tan \dfrac{x}{2}} \right\}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ab}{a^2 \cos^2 \dfrac{x}{2} - b^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}}.$

47. $y = x^x.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^x (1 + \log x).$

48. $y = x^{\frac{1}{x}}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^{\frac{1}{x}} (1 - \log x)}{x^2}.$

49. $y = x^{\operatorname{sen}^{-1} x}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen}^{-1} x} \left\{ \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} + \dfrac{\log x}{\sqrt{(1-x^2)}} \right\}.$

50. $y = e^{e^x}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^{e^x} e^x.$

51. $y = e^{x^x}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^{x^x} x^x (1 + \log x).$

52. $y = x^{x^x}.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = y x^x \left\{ \dfrac{1}{x} + \log x + (\log x)^2 \right\}.$

53. $y = x^{e^x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^{e^x} e^x \dfrac{1 + x \log x}{x}$.

54. $y = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}$.

55. $y = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-2x-x^2)}}$.

56. $y = \tan\sqrt{(1-x)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\{\sec\sqrt{(1-x)}\}^2}{2\sqrt{(1-x)}}$.

57. $y = \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

58. $y = \tan^{-1}(n \tan x)$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{\cos^2 x + n^2 \operatorname{sen}^2 x}$.

59. $y = \sec^{-1} \dfrac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

60. $y = (x+a)\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{(ax)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$.

61. $y = \tan^{-1}\dfrac{x}{a} + \log\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

62. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{(\operatorname{sen} x)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\operatorname{cosec} x)}$.

63. $y = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1+x^2}$.

64. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{ax}{b+cx^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a(b-cx^2)}{\sqrt{\{b^2+(2bc-a^2)x^2+c^2x^4\}}} \cdot \dfrac{1}{b+cx^2}$.

65. $y = \sqrt{(1-x^2)}\operatorname{sen}^{-1}x - x$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x \operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

66. $y = \dfrac{x\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{(1-x^2)}} + \log\sqrt{(1-x^2)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

67. $y = \tan^{-1}\{x + \sqrt{(1-x^2)}\}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{(1-x^2)}-x}{2\sqrt{(1-x^2)}\{1+x\sqrt{(1-x^2)}\}}$.

68. $y = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{x \tan \alpha}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2 \tan \alpha}{a^2 - x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2 \sec^2 \alpha)}}$.

69. $y = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\left(\dfrac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}\right)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x\sqrt{(b^2 - a^2)}}{(b^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

70. $y = \tan^{-1} \sqrt{\left(\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$.

71. $y = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + b \cos x}$.

72. $y = \tan^{-1} \left\{ \dfrac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \operatorname{sen} x}{b + a \cos x} \right\}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + b \cos x}$.

73. $y = \cos^{-1} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n} + 1}$.

74. $y = \sec^{-1} \dfrac{1}{2x^2 - 1}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

75. $y = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{(1 + x^2)} - 1}{x}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2(1 + x^2)}$.

76. $y = \log \dfrac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + 2 \tan^{-1} \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\sqrt{2}}{1 + x^4}$.

77. Se $u = \frac{1}{6} \log \dfrac{(y + 1)^2}{y^2 - y + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \dfrac{2y - 1}{\sqrt{3}}$,

in cui
$$y = \frac{\sqrt[3]{(1 + 3x + 3x^2)}}{x},$$

mostrare che
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{xy(1 + x)}.$$

78. Essendo $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx = \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \dfrac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}$,

dedurre, prendendo i coefficienti differenziali dei due lati, la somma di

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

$$Ris.\ \frac{\frac{n+1}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2n+1}{2}\,x - \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{n+1}{2}\,x\right)^2}{\mathrm{sen}^2\,\frac{x}{2}}.$$

79. Essendo, per la Trigonometria,

$$\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{m}+x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{m}+x\right)\ldots\mathrm{sen}\left(\frac{m-1}{m}\,\pi+x\right)=\frac{\mathrm{sen}\,mx}{2^{m-1}},$$

in cui m è un intero positivo, dimostrare che

$$\cot x + \cot\left(\frac{\pi}{m}+x\right) + \ldots + \cot\left(\frac{m-1}{m}\,\pi + x\right) = m\cot mx.$$

80. Dal risultato precedente dedurre che

$$\mathrm{cosec}^2\,x + \mathrm{cosec}^2\left(\frac{\pi}{m}+x\right) + \ldots + \mathrm{cosec}^2\left(\frac{m-1}{m}\,\pi + x\right)$$

$$= m^2\,\mathrm{cosec}^2\,mx.$$

CAPITOLO V.

DIFFERENZIAZIONE SUCCESSIVA.

77. Nei capitoli precedenti abbiamo mostrato come da una data funzione di una variabile si può dedurre un'altra funzione, chiamata il coefficiente differenziale della prima. Questa seconda funzione, con le stesse regole, ha *il suo* coefficiente differenziale, il quale si dice il *secondo coefficiente differenziale* della funzione primitiva.

Così, se $y = x^n$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$. Il coefficiente differenziale di nx^{n-1} è $n(n-1)x^{n-2}$, il quale è perciò il *secondo* coefficiente differenziale di y o x^n. Il secondo coefficiente di y è dinotato da

$$\frac{d^2y}{dx^2},$$

il quale deve essere considerato come un'abbreviazione di

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}.$$

Ciò che si disse di $\frac{dy}{dx}$ nell'Art. 26, diciamo ora di $\frac{d^2y}{dx^2}$, il quale deve essere riguardato come un *simbolo intero, non suscettibile di decomposizione in un numeratore d^2y ed un denominatore dx^2*.

Siccome $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà generalmente una funzione di x avrà il *suo* coefficiente differenziale. Questo si dice il terzo coefficiente differenziale di y, ed è dinotato da

$$\frac{d^3y}{dx^3},$$

quale abbreviazione di

$$\frac{d\,\dfrac{d^2y}{dx^2}}{dx}.$$

Questo processo e questa notazione possono estendersi indefinitamente.

I coefficienti differenziali successivi di una funzione sono spesso indicati convenientemente con accenti sulla funzione. Così, se $\varphi(x)$ è una funzione qualunque di x, allora $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi^{\text{IV}}(x)$, etc. dinoteranno il primo, secondo, terzo, quarto, etc. coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ rispetto ad x.

78. In alcuni casi l'n^{mo} coefficiente differenziale di una funzione ammette un' espressione algebrica semplice. Per esempio, si supponga

$$y = \operatorname{sen} x;$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{dx} = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

del pari

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \operatorname{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

e generalmente

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Similmente, se $y = \operatorname{sen} ax$,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^n \operatorname{sen}\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right).$$

In modo analogo, se

$$y = \cos x,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

e se $$y = \cos ax, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

79. Si supponga $$y = a^x;$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = a^x \log a,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^x (\log a)^2,$$

e $$\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (\log a)^n.$$

Similmente, se $y = e^{ax}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{ax}$.

Se $$y = \log x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -x^{-2},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 2x^{-3},$$

e $$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\underline{|n-1}\,(-1)^{n-1}}{x^n},$$

in cui $\underline{|n-1}$ dinota $1.2.3 \ldots (n-1)$.

80. *Coefficiente differenziale del prodotto di due funzioni.*

Si supponga $$u = yz,$$

in cui y e z sono funzioni di x; abbiamo

$$\frac{du}{dx} = y\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}z.$$

Differenziando ambo i lati dell'equazione rispetto ad x, avremo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = y\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2}z$$

$$= y\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2}z.$$

Similmente

$$\frac{d^3u}{dx^3} = y\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3}z$$

$$= y\frac{d^3z}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{d^3y}{dx^3}z.$$

Nelle formole ottenute i coefficienti numerici seguono la stessa legge di quelli del teorema sul Binomio. Possiamo dimostrare col metodo d'induzione che avverrà lo stesso in generale. Infatti ammettiamo

$$\frac{d^nu}{dx^n} = y\frac{d^nz}{dx^n} + n\frac{dy}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\lfloor r}\frac{d^ry}{dx^r}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}}$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{\lfloor r+1}\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r-1}z}{dx^{n-r-1}} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n}z \quad \dots\dots (1).$$

Si differenziino i due lati rispetto ad x: allora

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = y\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + \frac{dy}{dx}\frac{d^nz}{dx^n} + n\frac{dy}{dx}\frac{d^nz}{dx^n} + n\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\lfloor r}\left\{\frac{d^ry}{dx^r}\frac{d^{n-r+1}z}{dx^{n-r+1}} + \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}}\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{\lfloor r+1}\left\{\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}} + \frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}}\frac{d^{n-r-1}z}{dx^{n-r-1}}\right\} +$$
$$\dots\dots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{dz}{dx} + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}z \quad \dots\dots\dots (2).$$

Riducendo i termini, abbiamo

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = y\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{dy}{dx}\frac{d^nz}{dx^n} + \dots$$
$$+ \frac{(n+1)n\dots(n+1-r)}{\lfloor r+1}\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}\frac{d^{n-r}z}{dx^{n-r}} +$$
$$\dots\dots + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}z \quad \dots\dots\dots (3).$$

Ora la serie (3) segue la stessa legge di (1). Quindi se la formola (1) è vera per un valore di n, essa è anche vera per il valore di n prossimamente maggiore. Ma abbiamo dimostrato che essa vale per $n = 3$; quindi essa vale per $n = 4$, quindi per $n = 5$, etc.; cioè a dire essa è vera in generale.

Questo teorema prende il nome del suo scopritore, Leibnitz.

81. Se $u = e^{ax}\cos bx$; abbiamo per gli Art. 78 ed 80,

$$\frac{d^n u}{dx^n} = e^{ax}\left\{a^n \cos bx + nba^{n-1}\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\cos\left(bx + \frac{2\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + b^n \cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

Possiamo trovare un' altra forma per questo coefficiente differenziale n^{mo} nel seguente modo:

$$\frac{du}{dx} = e^{ax}(a\cos bx - b\,\mathrm{sen}\,bx);$$

si ponga
$$a = r\cos\varphi,$$
$$b = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

sicchè
$$r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}};$$

con ciò
$$\frac{du}{dx} = re^{ax}\cos(bx + \varphi),$$

in cui r e φ sono quantità costanti.

Similmente
$$\frac{d^2u}{dx^2} = re^{ax}\{a\cos(bx + \varphi) - b\,\mathrm{sen}\,(bx + \varphi)\}$$
$$= r^2 e^{ax}\cos(bx + 2\varphi),$$

e generalmente

$$\frac{d^n e^{ax}\cos bx}{dx^n} = r^n e^{ax}\cos(bx + n\varphi).$$

82. Il seguente è un esempio importante dell'Art. 80.

Sia
$$u = e^{ax}y;$$

allora, rammentandosi che $\dfrac{d^n e^{ax}}{dx^n} = a^n e^{ax}$, abbiamo

$$\frac{d^n u}{dx^n} = e^{ax}\left\{a^n y + na^{n-1}\frac{dy}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n y}{dx^n}\right\} \ldots (1).$$

Se ora l'espressione

$$\left(a+\frac{d}{dx}\right)^n y,$$

si sviluppi col teorema del Binomio, ed i simboli

$$\left(\frac{d}{dx}\right)y,\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y,\ \left(\frac{d}{dx}\right)^3 y,\ \text{etc.}$$

si rimpiazzino con

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{etc. rispettivamente},$$

il risultato sarà lo stesso della serie in parentesi in (1). *Quindi, possiamo scrivere*

$$\frac{d^n(e^{ax}y)}{dx^n}=e^{ax}\left(a+\frac{d}{dx}\right)^n y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

come un conveniente metodo abbreviato di esprimere l'equazione (1).

83. Il teorema seguente è alle volte usato nei rami superiori delle matematiche.

Se n è un intero positivo qualunque

$$v\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^nuv}{dx^n}-n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{dv}{dx}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n u\frac{d^nv}{dx^n}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Questo teorema può essere stabilito subito con l'Induzione. Infatti esso è evidentemente vero per $n=1$, e se ammettiamo che sia vero per un certo valore di n possiamo mostrare che sia ancor vero quando n si cambia in $n+1$. Si ammetti vera l'equazione (1), e si differenziino i due lati; verrà

$$v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}+\frac{dv}{dx}\frac{d^nu}{dx^n}=\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}}-n\frac{d^n}{dx^n}\left(u\frac{dv}{dx}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\frac{d}{dx}\left(u\frac{d^nv}{dx^n}\right)\ldots\ldots\ldots (2).$$

Inoltre poichè il teorema è supposto vero pel valore n abbiamo da (1) cambiando v in $\frac{dv}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx}\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}\left(u\frac{dv}{dx}\right)-n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(u\frac{d^3v}{dx^3}\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}\ldots\ldots\ldots(3).$$

Si suppongano ora scritti i secondi membri di (2) e (3) in modo che il primo termine di (3) sia immediatamente sotto il secondo termine di (2), il secondo termine di (3) sotto il terzo termine di (2), e così di seguito. Allora sottraendo abbiamo

$$v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=\frac{d^{n+1}uv}{dx^{n+1}}-(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(u\frac{dv}{dx}\right)+\frac{(n+1)n}{1.2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(u\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n+1}u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}.$$

Ciò mostra che se il teorema è vero per un certo valore di n sarà vero ancora quando n si cambia in $n+1$. Quindi poichè esso è vero per $n=1$ sarà vero in generale.

ESEMPII.

1. Se $y=\tan x+\sec x$, $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$.

2. Sia $y=\operatorname{sen}^3 x=\frac{3\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 3x}{4}$,

allora $\quad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\operatorname{sen}\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

3. Se $y=x^2\log x$, $\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\underline{|2}}{x}$.

4. Se $y=x^3\log x$, $\qquad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{\underline{|3}}{x}$.

5. Se $y=(x^2+a^2)\tan^{-1}\frac{x}{a}$, $\qquad \frac{d^5y}{dx^5}=\frac{4a^3}{(a^2+x^2)^2}$.

6. Se $y = e^{-x}\cos x$, $\qquad \dfrac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0.$

7. Se $y = \sqrt{\left(\dfrac{x^3}{x-a}\right)}$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3a^2}{4\sqrt{x}\,(x-a)^{\frac{5}{2}}}.$

8. Se $y = \{x + \sqrt{(x^2-1)}\}^n$, $\qquad (x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - n^2y = 0.$

9. Se $y = x^{n-1}\log x$, $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{\lfloor n-1}{x}.$

10. Se $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{2(-1)^n\lfloor n}{(1+x)^{n+1}}.$

11. Se $u_n = (e^x + e^{-x})^n$, $\qquad \dfrac{d^2u_n}{dx^2} = n^2u_n - 4n(n-1)u_{n-2}.$

12. Se $y = e^{2\sqrt{x}}$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}\,e^{2\sqrt{x}}.$

13. Se $y = \dfrac{x^3}{1-x}$, $\qquad \dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{24}{(1-x)^5}.$

14. Se $y^2 = \sec 2x$, $\qquad y + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 3y^5.$

15. Se $y^2(1+x^2) = (1-x+x^2)^2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1+3x+x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$

16. Se $y = \dfrac{ax+b}{x^2-c^2}$, $\quad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{(-1)^n\lfloor n}{2c}\left\{\dfrac{b+ac}{(x-c)^{n+1}} - \dfrac{b-ac}{(x+c)^{n+1}}\right\}.$

17. Se $y = x^n \operatorname{sen} x$,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \lfloor n\left\{\operatorname{sen} x + \frac{n}{1}\,x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2\lfloor 2}\,x^2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3\lfloor 3}\,x^3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \text{etc.}\right\}.$$

18. Se $\dfrac{y}{a} = \tan^{-1}\dfrac{x}{a}$,

allora $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{a^2+x^2} = \cos^2\dfrac{y}{a},$

quindi
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a}\cos\frac{y}{a}\operatorname{sen}\frac{y}{a}\frac{dy}{dx}$$
$$= -\frac{1}{a}\operatorname{sen}\frac{2y}{a}\frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{1}{a}\cos\left(\frac{2y}{a}+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\frac{y}{a}.$$

Dimostrare che $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{2}{a^2}\cos\left(\dfrac{3y}{a}+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^3\dfrac{y}{a}$,

e generalmente $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{\lfloor n-1}{a^{n-1}}\cos\left\{\dfrac{ny}{a}+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right\}\cos^n\dfrac{y}{a}$.

Ora si ponga $\tan^{-1}\dfrac{x}{a} = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{a}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$;

con ciò $\cos\left\{\dfrac{ny}{a}+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right\} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{ny}{a}+\dfrac{n\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(n\pi - n\theta)$

$$= (-1)^{n-1}\operatorname{sen} n\theta;\ \text{e}\ \cos^n\frac{y}{a} = \frac{a^n}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}};$$

quindi
$$\frac{d^ny}{dx^n} = a\,(-1)^{n-1}\frac{\lfloor n-1}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}\operatorname{sen} n\theta.$$

19. Poichè

$$\frac{d\tan^{-1}\frac{x}{a}}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2},\quad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{1}{a}\frac{d^{n+1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{dx^{n+1}}.$$

Da ciò, dimostrare che

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{(-1)^n\lfloor n\operatorname{sen}(n+1)\theta}{a(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

in cui
$$\tan\theta = \frac{a}{x}.$$

[L'n^{mo} coefficiente differenziale di $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ rispetto ad x si ottiene alle volte nel seguente modo:

$$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{2a\sqrt{(-1)}}\left\{\frac{1}{x-a\sqrt{(-1)}}-\frac{1}{x+a\sqrt{(-1)}}\right\};$$

quindi

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n\lfloor n}{2a\sqrt{(-1)}}\left[\frac{1}{\{x-a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}-\frac{1}{\{x+a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}\right].$$

Ora si ponga $x=r\cos\theta$, $a=r\operatorname{sen}\theta$, sicchè

$$r^2=a^2+x^2 \text{ e } \tan\theta=\frac{a}{x}.$$

Allora $\{x+a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}=r^{n+1}\{\cos\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\theta\}^{n+1}$

$$=r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}(n+1)\theta\}$$

pel Teorema di De Moivre.

Quindi

$$\frac{1}{\{x-a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}-\frac{1}{\{x+a\sqrt{(-1)}\}^{n+1}}=\frac{2\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}(n+1)\theta}{r^{n+1}};$$

ed otteniamo lo stesso risultato come sopra per il proposto n^{mo} coefficiente differenziale.]

20. $$\frac{d^n\dfrac{x}{a^2+x^2}}{dx^n}=x\frac{d^n\left(\dfrac{1}{a^2+x^2}\right)}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}\left(\dfrac{1}{a^2+x^2}\right)}{dx^{n-1}}.$$ Art. 80.

Quindi, per mezzo dell'esempio precedente, mostrare che

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)=\frac{(-1)^n\lfloor n\cos(n+1)\theta}{(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

[Possiamo procedere anche nel modo indicato nell'esempio precedente, partendo da

$$\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+a\sqrt{(-1)}}+\frac{1}{x-a\sqrt{(-1)}}\right\}.\ ]$$

21. Trovare il 4° coefficiente differenziale di $\frac{1}{e^x-1}$ e di $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Risultati.

$$\frac{e^x+11e^{2x}+11e^{3x}+e^{4x}}{(e^x-1)^5} \text{ ed } e^{-\frac{1}{x^2}}\{16x^{-12}-144x^{-10}+300x^{-8}-120x^{-6}\}.$$

22. $$\frac{d^n(x^2a^x)}{dx^n}=\{x^2c^n+2nxc^{n-1}+n(n-1)c^{n-2}\}a^x,$$

in cui $c=\log a$. Art. 80.

23. Se $y=\operatorname{sen}(m\operatorname{sen}^{-1}x)$, mostrare che

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}-m^2y.$$

Applicare il teorema di Leibnitz, Art. 80, e dedurre

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(n^2-m^2)\frac{d^ny}{dx^n}.$$

24. Se $y=a\cos(\log x)+b\operatorname{sen}(\log x)$, mostrare che

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0,$$

e che $$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}+(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(n^2+1)\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

CAPITOLO VI.

SVILUPPO DELLE FUNZIONI IN SERIE.

84. Il teorema del Binomio ci fornisce una serie procedente secondo le potenze di h, che è equivalente all' espressione $(x+h)^n$. Altre serie si sono presentate nell'Algebra e nella Trigonometria, come lo sviluppo di e^x secondo le potenze di x e di $\log(1+x)$ secondo le potenze di x. Negli articoli precedenti di questo libro, non abbiamo ammesso, però, la conoscenza di alcuno sviluppo, *eccettuato il teorema binomiale nel caso dell' esponente intero e positivo;* ma ci proponiamo ora d'investigare lo sviluppo di $f(x+h)$ secondo le potenze di h, in cui $f(x)$ dinota una funzione qualunque di x, e si vedrà che tutti gli esempî isolati che lo studente ha considerato sinora, non sono che casi particolari di questo teorema generale.

85. Prima di esporre una rigorosa dimostrazione del teorema in questione, indicheremo il metodo che ordinariamente si adottava nei trattati sul Calcolo Differenziale non fondati sulla dottrina dei limiti. Tali trattati cominciavano con una dimostrazione poco soddisfacente della proposizione che $f(x+h)$ potesse generalmente svilupparsi in una serie procedente secondo le potenze positive intere ascendenti di h; rimaneva allora a determinare i coefficienti delle diverse potenze di h, e ciò si otteneva nel modo esposto nei due articoli seguenti.

86. Dobbiamo prima stabilire il teorema seguente. Se $f(x+h)$ è una funzione qualunque di $x+h$, otteniamo lo stesso risultato sia che la differenziamo rispetto ad x, considerando h costante, o la differenziamo rispetto ad h, considerando x costante.

Infatti si ponga $x+h=z$.

Nel primo caso

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$=f'(z),$$

poichè $$\frac{dz}{dx}=1.$$

Nel secondo caso,

$$\frac{df(x+h)}{dh}=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dh}$$
$$=f'(z),$$

poichè $$\frac{dz}{dh}=1.$$

87. Sviluppare $f(x+h)$ in una serie di potenze ascendenti di h.

Si ammetta (Art. 85) che

$$f(x+h)=A_0+A_1h+A_2h^2+A_3h^3+\ldots\ldots\ldots(1),$$

in cui A_0, A_1, A_2, etc., non contengono h.

Allora

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{dA_0}{dx}+h\frac{dA_1}{dx}+h^2\frac{dA_2}{dx}+h^3\frac{dA_3}{dx}+\ldots\ldots(2),$$

e $$\frac{df(x+h)}{dh}=A_1+2A_2h+3A_3h^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Per l' Art. 86, le serie (2) e (3) debbono essere eguali. Quindi, eguagliando i coefficienti delle potenze simili di h, abbiamo

$$A_1=\frac{dA_0}{dx},$$

$$A_2=\frac{1}{2}\frac{dA_1}{dx}=\frac{1}{1.2}\frac{d^2A_0}{dx^2},$$

$$A_3=\frac{1}{3}\frac{dA_2}{dx}=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3A_0}{dx^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

E ponendo $h=0$ in (1), si ha

$$A_0 = f(x).$$

Quindi, sostituendo i valori di A_0, A_1, etc. in (1), abbiamo

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots\ldots \quad (4),$$

il termine generale essendo

$$\frac{h^n}{\underline{|n}} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Questo risultato si dice il Teorema di Taylor.

88. Vi sono molte obiezioni al metodo degli articoli precedenti, e specialmente l'uso di una serie infinita, senza accertare che sia convergente, è inammissibile; procediamo perciò ad una rigorosa investigazione.

89. Sia $y=F(x)$, e si suppongano Δx e Δy rappresentare gl' incrementi simultanei di x ed y; allora la frazione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *poichè essa ha per limite il coefficiente differenziale $F'(x)$, avrà ultimamente lo stesso segno del suo limite se Δx è preso sufficientemente piccolo*, e quindi sarà positiva se il coefficiente differenziale è positivo, e negativa se il coefficiente differenziale è negativo. Nel primo caso, le quantità Δy e Δx essendo dello *stesso* segno, la funzione y crescerà o diminuirà secondo che x cresce o diminuisce. Nel secondo caso, Δy e Δx essendo di segni *contrarii*, y crescerà se x diminuisce e diminuirà se x cresce.

Ciò che si è detto suppone che vi è realmente un limite *finito* al quale tende $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; in altri termini noi supponiamo che $F'(x)$ non *sia infinita*. La limitazione che le funzioni da considerare non debbano divenire *infinite* deve essere sottintesa in molti teoremi nelle matematiche, quando non fosse formalmente enunciata. Nel presente soggetto però si usa di stabilire espressamente questa limitazione ne' punti importanti delle investigazioni.

Si può osservare che alle volte possiamo ottenere utili informazioni rispetto al segno di una funzione esaminando il coefficiente differenziale della funzione. Per esempio, si supponga

$$y = (x - 1)\, e^x + 1,$$

allora
$$\frac{dy}{dx} = xe^x;$$

siccome $\frac{dy}{dx}$ è positivo per tutti i valori positivi di x, ne segue per il presente articolo che y è sempre crescente finche x è positiva; ma $y = 0$ quando $x = 0$; quindi *y è positiva per tutt'i valori positivi di x.*

90. Una funzione di una variabile si dice essere *continua* tra certi valori della variabile se la funzione cangia *gradatamente* a misura che la variabile passa da un valore all' altro, così che un cambiamento indefinitamente piccolo della variabile dà origine ad un cangiamento indefinitamente piccolo della funzione. Quindi una funzione *continua* non può divenire infinita tra i valori per i quali essa è continua, poichè nelle vicinanze del valore infinito della funzione per un cangiamento indefinitamente piccolo della variabile il cangiamento nella funzione non è indefinitamente piccolo.

91. Sia $\varphi(x)$ una funzione che svanisce per $x = a$, e per $x = b$, ed è continua tra questi valori. Si supponga inoltre che $\varphi'(x)$ sia continua tra questi valori. Allora $\varphi'(x)$ si annullerà per qualche valore di x compreso tra a e b.

Infatti $\varphi'(x)$ non può essere sempre positiva tra questi valori, perchè allora $\varphi(x)$ sarebbe costantemente crescente a misura che la variabile crescesse dal più piccolo valore al più grande (Art. 89), il che non si accorda con la supposizione che $\varphi(x)$ svanisca per i due indicati valori. Similmente $\varphi'(x)$ non può essere sempre negativa. Quindi $\varphi'(x)$ deve mutare dal positivo al negativo o dal negativo al positivo tra gli assegnati valori; e poichè essa è continua non può divenire infinita e deve per conseguenza passare pel valore zero.

Se a dinota una quantità costante, le espressioni come $f'(a)$, $f''(a)$, etc. che s'incontreranno nelle nostre investigazioni significheranno che $f(x)$ deve essere differenziata una volta, due volte, etc., e nel risultato x si deve cambiare in a.

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Taylor. La dimostrazione che diamo nel prossimo articolo è dovuta al Signor

Homersham Cox; essa fu pubblicata nel 6° volume del *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, ed in seguito nel suo *Manual of the Differential Calculus*.

92. Si suppongano $f(a+x)$ ed i suoi coefficienti differenziali sino all'$(n+1)^{mo}$ essere continui tra i valori 0 ed h della variabile x. L'espressione

$$f(a+x)-f(a)-xf'(a)-\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(a)\ldots-\frac{x^n}{\underline{|n}}f^n(a)-\frac{x^{n+1}R}{\underline{|n+1}}\ldots(1),$$

svanisce per $x=h$ se $R=$

$$\frac{\underline{|n+1}}{h^{n+1}}\left\{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)\ldots-\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(a)\right\}\ldots(2),$$

Si supponga R avere questo valore che osserviamo è indipendente da x.

L'espressione (1) svanisce anche per $x=0$.

Quindi, per l'Art. 91 il coefficiente differenziale di (1) rispetto ad x deve svanire per qualche valore di x tra 0 ed h; si supponga x_1 questo valore, allora

$$f'(a+x)-f'(a)-xf''(a)\ldots-\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^n(a)-\frac{x^n}{\underline{|n}}R\ldots\ldots(3),$$

svanisce per $x=x_1$. Ma (3) svanisce anche per $x=0$; quindi vi è qualche valore di x tra 0 ed x_1 pel quale il coefficiente differenziale di (3) si annulla.

Continuando questo procedimento sino a $n+1$ differenziazioni di (1) troviamo che $f^{n+1}(a+x)-R$ è zero per qualche valore di x tra 0 ed h; sia questo valore di x θh, in cui θ è una frazione propria, onde

$$R=f^{n+1}(a+\theta h).$$

Si sostituisca questo valore di R in (2) ed abbiamo

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(a)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{n+1}(a+\theta h).$$

Possiamo ora porre x invece di a in questa equazione, poichè non vi è stata alcuna restrizione nel valore di a, eccettuato che tutte le quantità debbono essere *finite*, così otteniamo

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(x)$$
$$+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{n+1}(x+\theta h)\ldots(4).$$

Se la funzione $f^{n+1}(x+\theta h)$ è tale che prendendo n sufficientemente grande il termine $\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{n+1}(x+\theta h)$ può rendersi tanto piccolo quanto ci aggrada, allora continuando la serie

$$f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\frac{h^3}{\underline{|3}}f'''(x)+\text{etc.},$$

sino a quel numero di termini che ci piace, otteniamo un risultato che differisce tanto poco quanto si vuole da $f(x+h)$. In queste circostanze adunque possiamo asserire la verità del Teorema di Taylor.

93. Il Teorema di Taylor è così chiamato dal suo scopritore Dr. Brook Taylor; esso fu pubblicato la prima volta nel 1715. Il teorema contenuto nell'equazione (4) dell'Art. 92 è detto *il Teorema di Lagrange sui limiti del Teorema di Taylor*. Esso ci dà un'espressione per la differenza tra $f(x+h)$ ed i primi $n+1$ termini del suo sviluppo col Teorema di Taylor, ovvero come è chiamato « il resto dopo $n+1$ termini. »

94. All'espressione $f^{n+1}(x+\theta h)$ che s'incontra nell'Art. 92, possiamo assegnare il significato seguente. « Si differenzii $f(x)$ $n+1$ volte, e nel risultato finale si muti x in $x+\theta h$. » Non conosciamo altra cosa di θ, se non che esso giace tra 0 ed 1; esso sarà generalmente una funzione di x ed h, e quindi, differenziare $f(x+\theta h)$ rispetto ad x, non è la stessa cosa che differenziare $f(x)$ rispetto ad x e poi mutare x in $x+\theta h$.

95. Teorema di Maclaurin.

Nell'equazione

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\ldots+\frac{h^nf^n(x)}{\underline{|n}}$$
$$+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{n+1}(x+\theta h),$$

si ponga $x=0$, abbiamo allora

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\ldots\ldots+\frac{h^n f^n(0)}{\lfloor n}+\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{n+1}(\theta h).$$

Possiamo, se ci piace, cambiare h in x, e poichè le quantità $f(0)$, $f'(0)$, ...$f^n(0)$, non contengono x o h, non si fa alcun cangiamento in esse: quindi

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots\ldots+\frac{x^n f^n(0)}{\lfloor n}+\frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{n+1}(\theta x).$$

Allorchè l' ultimo termine, prendendo n grande abbastanza, può rendersi tanto piccolo quanto ci piace, abbiamo per $f(x)$ una serie infinita che procede secondo le potenze ascendenti di x. Questa serie è usualmente chiamata di Maclaurin, essendo stata pubblicata da lui nel 1742; sebbene essendo stata data alcuni anni prima da Stirling, essa alle volte porti il nome di quest' ultimo.

96. Ammettendo che ogni funzione di x possa essere sviluppata in una serie di potenze intere positive di x, è stato dato il seguente metodo per dimostrare il Teorema di Maclaurin.

Sia $f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots\ldots$

in cui A_0, A_1, A_2, etc. non contengono x.

Si differenzii successivamente, allora

$$f'(x)=A_1+2A_2x+\ldots\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots\ldots$$
$$f''(x)=2A_2+2.3A_3x+\ldots\ldots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\ldots\ldots$$
$$f'''(x)=2.3A_3+\ldots\ldots+n(n-1)(n-2)A_nx^{n-3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ora si supponga $x=0$ in ciascuna di queste equazioni, ed abbiamo

$$A_0=f(0),$$
$$A_1=f'(0),$$
$$A_2=\frac{1}{1.2}f''(0),$$
$$A_3=\frac{1}{1.2.3}f'''(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si sostituiscano i valori di A_0, A_1, etc. e si ottiene

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(0) + \text{etc.}$$

97. La dimostrazione data dell' equazione (4) nell'Art. 92, equazione che racchiude il Teorema di Taylor, ed anzi può essere chiamata il Teorema di Taylor, probabilmente non lascerà soddisfatto il lettore. Quantunque egli non possa scoprire verun difetto nel ragionamento, pure si dispiacerà del carattere artificioso ed incerto dell' insieme, e muoverà la stessa obiezione rispetto al metodo di dimostrazione di Cauchy che or ora daremo. Senza negare la giustizia di queste obiezioni, possiamo rispondere che il carattere altamente generale del teorema può in un certo modo far scusare la complicata ed indiretta natura dell' investigazione. Ma riguardo particolarmente alla mancanza di soddisfazione provata nell' essere costretto di dare l' assenso ad un certo numero di proposizioni senza conoscere dapprima quale si possa aspettare che sia l' andamento generale della dimostrazione, rammenteremo allo studente che mentre egli apprende gli elementi di un soggetto non deve aspettarsi di essere capace, in modo di dire, di *scoprire di nuovo il teorema da se stesso*. Invece di domandare, « cosa ha suggerito questo o quel passo? » egli deve spesso contentarsi della semplice questione « è il ragionamento esatto? » A ciò naturalmente, forse senza saperlo, egli è stato già avvezzato; per esempio, se una costruzione complicata incontrava nell' Euclide, egli si limitava semplicemente, almeno per qualche tempo, ad esaminare la validità della costruzione, e la verità delle deduzioni ricavate da essa, senza tentare di riconoscere i passi che condussero Euclide alla sua costruzione.

98. A motivo dell' importanza del Teorema di Taylor aggiungeremo un' altra dimostrazione; questa dimostrazione è dovuta a Cauchy, ed è data nella forma seguente da Moigno.

Siano $F(x)$ ed $f(x)$ due funzioni di x che rimangono continue, del pari che i loro coefficienti differenziali, tra i valori x_1 ed x_1+h della variabile x. Si supponga inoltre che tra questi stessi valori la funzione derivata $f'(x)$ non muti di segno, o in altri termini che tra questi valori la funzione $f(x)$ continuamente aumenti, o continuamente diminuisca. Allora la frazione

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}$$

sarà eguale al valore di

$$\frac{F'(x)}{f'(x)},$$

allorchè in quest'ultima x ha un certo valore compreso tra i valori indicati; vale a dire, θ dinotando una frazione propria, avremo

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

Infatti siano A e B i valori algebricamente minimo e massimo che la frazione

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

può prendere tra i valori x_1 ed x_1+h; le due espressioni

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}-A,$$

ed

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}-B,$$

avranno perciò segni contrarii, *ognuna di esse ritenendo il suo segno immutato.* Lo stesso si avrà per

$$F'(x)-Af'(x),$$

ed

$$F'(x)-Bf'(x),$$

poichè $f'(x)$ è immutabile nel segno. Ma queste espressioni sono i coefficienti differenziali delle due funzioni

$$F(x)-Af(x),$$

ed

$$F(x)-Bf(x).$$

Di queste ultime funzioni perciò, l'una deve crescere costantemente e l'altra decrescere, (Art. 89). Quindi, sottraendo i loro valori iniziali dai loro valori finali,

$$F(x_1+h)-F(x_1)-A\,\{f(x_1+h)-f(x_1)\},$$

ed $$F(x_1+h)-F(x_1)-B\,\{f(x_1+h)-f(x_1)\},$$

saranno, l'una positiva e l'altra negativa.

Adunque

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}-A,$$

ed $$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}-B,$$

sono di segni contrarii.

Poichè $\dfrac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}$ è maggiore di A e minore di B, essa deve essere compresa tra il valore massimo ed il minimo di $\dfrac{F'(x)}{f'(x)}$. Di più, questa frazione, passando dal suo valore massimo al suo valore minimo, deve passare per tutti i valori intermedii. Quindi vi deve essere *una frazione propria* θ, tale che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

99. Il risultato dell' articolo precedente è stato ottenuto supponendo che le funzioni siano continue e che $f'(x)$ *sia di segno invariabile* tra i valori x_1 ed x_1+h della variabile x. Il risultato però è vero se le funzioni sono continue e *l'una o l'altra* delle due $F'(x)$ ed $f'(x)$ è di segno invariabile. Infatti se $F'(x)$ è di segno invariabile possiamo dimostrare come nell' articolo precedente che

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{F(x_1+h)-F(x_1)}=\frac{f'(x_1+\theta h)}{F'(x_1+\theta h)},$$

e da ciò naturalmente segue che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

Il lettore il quale desidera di vedere l'applicazione di questo risultato allo stabilimento del Teorema di Taylor, può passare immediatamente all'Art. 106, per poi ritornare alla considerazione degli articoli omessi, nei quali daremo un'altra dimostrazione del risultato, ed inoltre alcune illustrazioni geometriche.

100. L'enunciato dell'Art. 98 essendo supposto, possiamo disporre la dimostrazione come segue:

Si divida h in un certo numero di parti eguali, e dinoti α una di queste parti. Si considerino le frazioni

$$\frac{F(x_1+\alpha)-F(x_1)}{f(x_1+\alpha)-f(x_1)},\ \frac{F(x_1+2\alpha)-F(x_1+\alpha)}{f(x_1+2\alpha)-f(x_1+\alpha)},\ \frac{F(x_1+3\alpha)-F(x_1+2\alpha)}{f(x_1+3\alpha)-f(x_1+2\alpha)},$$

$$\ldots\frac{F(x_1+h)-F(x_1+h-\alpha)}{f(x_1+h)-f(x_1+h-\alpha)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Si formi una nuova frazione aggiungendo insieme tutt'i numeratori in (1) per un nuovo numeratore, e tutt'i denominatori in (1) per un nuovo denominatore. Otteniamo così

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots(2).$$

Poichè i denominatori che si trovano in (1) hanno per ipotesi tutti lo stesso segno, sappiamo dall'algebra che la frazione (2) *giace in valore tra il massimo ed il minimo di quelli in* (1). Ora

$$\frac{F(x_1+\alpha)-F(x_1)}{f(x_1+\alpha)-f(x_1)}=\frac{\dfrac{F(x_1+\alpha)-F(x_1)}{\alpha}}{\dfrac{f(x_1+\alpha)-f(x_1)}{\alpha}};$$

se dunque poniamo questa frazione eguale ed

$$\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}+\beta,$$

sappiamo che β diminuisce senza limite al diminuire di α.

Similmente

$$\frac{F(x_1+2\alpha)-F(x_1+\alpha)}{f(x_1+2\alpha)-f(x_1+\alpha)}=\frac{F'(x_1+\alpha)}{f'(x_1+\alpha)}+\gamma,$$

$$\frac{F(x_1+3\alpha)-F(x_1+2\alpha)}{f(x_1+3\alpha)-f(x_1+2\alpha)}=\frac{F'(x_1+2\alpha)}{f'(x_1+2\alpha)}+\delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots$$

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1+h-\alpha)}{f(x_1+h)-f(x_1+h-\alpha)}=\frac{F'(x_1+h-\alpha)}{f'(x_1+h-\alpha)}+\mu,$$

in cui γ, δ, ... μ, diminuiscono senza limite al diminuire di α.

Poichè la frazione in (2) giace sempre tra il valore massimo ed il minimo dei termini della serie

$$\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}+\beta\,,\ \frac{F'(x_1+\alpha)}{f'(x_1+\alpha)}+\gamma\,,\ \frac{F'(x_1+2\alpha)}{f'(x_1+2\alpha)}+\delta\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{F'(x_1+h-\alpha)}{f'(x_1+h-\alpha)}+\mu\,,$$

essa deve giacere tra il massimo ed il minimo dei limiti verso i quali essi tendono; vale a dire, deve giacere tra il massimo ed il minimo dei valori che $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ può prendere tra x_1 ed x_1+h. Ma siccome $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, nel passare dal suo massimo al suo minimo valore, passa per tutti i valori intermedii, vi deve essere una frazione propria θ, tale che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta h)}{f'(x_1+\theta h)}.$$

101. Si supponga $\quad f(x)=x-x_1\,;$

onde $\quad f'(x)=1.$

Le condizioni richieste che debbono essere soddisfatte da $f(x)$ nell'enunciato dell'Art. 98 sono verificate. E siccome

$$f(x_1+h)=h\,,$$

ed
$$f(x_1)=0\,,$$

abbiamo $\quad F(x_1+h)-F(x_1)=hF'(x_1+\theta h).$

Questo caso semplice dell'Art. 98 può del resto essere dimostrato nello stesso modo col quale fu stabilita la proposizione generale.

102. Il risultato dell'Art. 101 può essere applicato a mostrare che un'espressione *indipendente* da x è la sola di cui il coefficiente differenziale rispetto ad x sia sempre zero. Infatti si supponga $F(x)$ una funzione, tale che $F'(x)$ sia sem-

pre zero; allora, dall'ultima equazione nell'Art. 101 segue, qualunque siano i valori di x_1 ed x_1+h, che

$$F(x_1+h)-F(x_1)=0,$$

onde
$$F(x_1+h)=F(x_1).$$

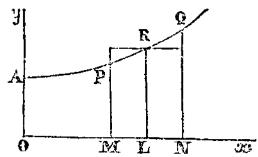
Quindi la funzione $F(x)$ ha sempre lo stesso valore qualunque sia il valore della variabile; vale a dire, essa è costante rispetto ad x, o in altri termini non dipende da x.

Da ciò segue, che due funzioni le quali hanno lo stesso coefficiente differenziale rispetto ad una variabile qualunque possono differire solamente per una costante. Infatti il coefficiente differenziale della differenza fra queste funzioni essendo sempre zero, segue da ciò che abbiamo ora dimostrato che tale differenza è una costante.

103. Il risultato dell'Art. 101 ammette la seguente semplice verificazione geometrica.

Abbiamo già mostrato, Art. 43, che se u rappresenta l'area contenuta tra gli assi delle x e delle y, l'ordinata y, ed una curva qualunque, allora

$$\frac{du}{dx}=y.$$



Sia $u=F(x)$, onde $y=F'(x)$ è l'equazione della curva; sia $OM=x_1$, $MN=h$;

allora
$$\text{area } OAPM=F(x_1),$$

$$\text{area } OAQN=F(x_1+h),$$

quindi
$$\text{area } PQNM=F(x_1+h)-F(x_1)$$

Ora è chiaro che un punto R deve esistere tra P e Q, tale che, tirando l'ordinata RL,

$$\text{rettangolo } RL.MN=\text{area } PQNM.$$

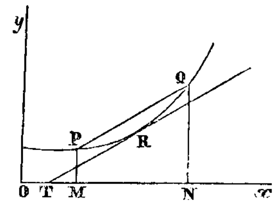
Ma
$$RL=F'(x_1+\theta h),$$

in cui θ è una frazione propria; adunque

$$hF'(x_1+\theta h)=F(x_1+h)-F(x_1).$$

104. La seguente è un' altra illustrazione geometrica dell' Art. 101.

Se $y = F(x)$ è l' equazione di una curva, allora $F'(x)$ è la tangente trigonometrica dell' angolo tra l' asse delle x e la tangente della curva nel punto (x, y). Art. 38.



Sia $OM = x_1$, $MN = h$,

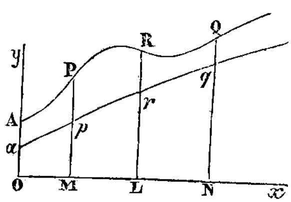
allora $\dfrac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h}$

è la tangente dell' inclinazione della corda PQ all' asse delle x. Quindi l' Art. 101 equivale all' asserire che *in un certo punto R tra P e Q la tangente RT della curva è parallela a PQ.*

Noi chiamiamo questa una *illustrazione*. Quando, però, lo studente ha sufficientemente considerata la natura della tangente ad una curva, ciò può equivalere ad una *dimostrazione* della proposizione di cui si tratta.

105. La seguente è un' *illustrazione* della proposizione generale nell' Art. 98.

Siano due curve APQ ed apq. Dinoti $F(x)$ l' area contenuta tra la prima curva, gli assi delle x e delle y e l' ordinata corrispondente ad un' ascissa x; allora $y = F'(x)$ è l' equazione di questa curva. Dinoti $f(x)$ una simile area rispetto alla seconda curva; allora $y = f'(x)$ è l' equazione di questa curva.



Sia $OM = x_1$, $MN = h$.

Allora
$$F(x_1 + h) - F(x_1) = \text{area } PMNQ,$$
$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \text{area } pMNq.$$

Quindi l' equazione
$$\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{f(x_1 + h) - f(x_1)} = \frac{F'(x_1 + \theta h)}{f'(x_1 + \theta h)}$$
equivale ad asserire che deve esistere un certo punto R tra P e Q, tale che
$$\frac{\text{area } PMNQ}{\text{area } pMNq} = \frac{RL}{rL}.$$

106. Si supponga ora che $F(x)$ ed $f(x)$ e tutti i loro coefficienti differenziali sino all'$(n+1)^{mo}$ inclusivamente, siano continui tra i valori x_1 ed x_1+h della variabile x; inoltre si supponga che uno dei due $F'(x)$ ed $f'(x)$ sia di segno invariabile tra gli stessi valori, similmente uno dei due $F''(x)$, ed $f''(x)$, e così di seguito sino ad $F^{n+1}(x)$ ed $f^{n+1}(x)$. Allora, per l'Art. 99.

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F'(x_1+\theta_1 h)}{f'(x_1+\theta_1 h)},$$

$$\frac{F'(x_1+\theta_1 h)-F'(x_1)}{f'(x_1+\theta_1 h)-f'(x_1)}=\frac{F''(x_1+\theta_2 h)}{f''(x_1+\theta_2 h)},$$

$$\frac{F''(x_1+\theta_2 h)-F''(x_1)}{f''(x_1+\theta_2 h)-f''(x_1)}=\frac{F'''(x_1+\theta_3 h)}{f'''(x_1+\theta_3 h)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{F^n(x_1+\theta_n h)-F^n(x_1)}{f^n(x_1+\theta_n h)-f^n(x_1)}=\frac{F^{n+1}(x_1+\theta h)}{f^{n+1}(x_1+\theta h)};$$

in cui θ_1, θ_2, ... θ_n, θ, sono tutte frazioni proprie.

Supponiamo ora che $F'(x)$, $F''(x)$, ... $F^n(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^n(x)$ *svaniscano tutte* per $x=x_1$; allora per le equazioni precedenti

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}=\frac{F^{n+1}(x_1+\theta h)}{f^{n+1}(x_1+\theta h)}.$$

107. Le condizioni necessarie riguardo ad $f(x)$ saranno verificate se prendiamo

$$f(x)=(x-x_1)^{n+1},$$

onde

$$f^{n+1}(x)=\underline{|n+1},$$

$$f(x_1)=0,$$

$$f(x_1+h)=h^{n+1}.$$

Se dunque i coefficienti differenziali di $F(x)$ sino all'n^{mo} inclusivamente, svaniscono per $x=x_1$, abbiamo, per l'Art. 106,

$$F(x_1+h)-F(x_1)=\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}F^{n+1}(x_1+\theta h).$$

Si supponga $x_1 = 0$ ed $F(x_1) = 0$, allora

$$F(h) = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} F^{n+1}(\theta h).$$

Sarà bene per distinzione di ripetere le condizioni richieste per l'ultimo risultato; esse sono solamente queste; $F(x)$ ed i suoi coefficienti differenziali sino all' $(n+1)^{\text{mo}}$ inclusivamente, debbono essere tutti continui tra i valori 0 ed h di x, e sino all'n^{mo} inclusivamente debbono tutti svanire per $x = 0$.

108. Applicazione al Teorema di Taylor.

Sia $\varphi(x+h)$ una funzione che debba svilupparsi in una serie di potenze intere positive ascendenti di h. Sia

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x) - \frac{h^2}{\lfloor 2} \varphi''(x) \ldots - \frac{h^n}{\lfloor n} \varphi^n(x) = F(h).$$

Allora $F(h)$ ed i suoi coefficienti differenziali rispetto ad h, sino all'n^{mo} inclusivamente, svaniscono per $h = 0$. Inoltre

$$F^{n+1}(h) = \varphi^{n+1}(x+h).$$

Adunque, per l'ultima equazione dell'Art. 107,

$$F(h) = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} F^{n+1}(\theta h) = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \varphi^{n+1}(x+\theta h),$$

e quindi

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{\lfloor 2} \varphi''(x) \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n} \varphi^n(x)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

Da ciò segue il Teorema di Taylor sempre che la funzione è tale che, crescendo sufficientemente n, il termine

$$\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \varphi^{n+1}(x+\theta h)$$

può essere reso tanto piccolo quanto ci piace.

109. La dimostrazione seguente del Teorema di Taylor merita di essere notata, come dipendente soltanto dall'equazione dimostrata geometricamente nell'Art. 103. Sia indicata

$$\varphi(z)-\varphi(x)-(z-x)\varphi'(x)-\frac{(z-x)^2}{\lfloor 2}\varphi''(x)\ldots-\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$

con $F(x)$, allora

$$F'(x)=-\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x).$$

Ora, per l'Art. 103,

$$F(x)=F(z)+(x-z)F'\{z+\theta(x-z)\}.$$

Inoltre $$F(z)=0,$$

ed $$F'\{z+\theta(x-z)\}=-\frac{\theta^n(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}\{z+\theta(x-z)\};$$

quindi $$\varphi(z)-\varphi(x)-(z-x)\varphi'(x)-\frac{(z-x)^2}{\lfloor 2}\varphi''(x)$$

$$\ldots\ldots-\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$

$$=\frac{\theta^n(z-x)^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}\{z+\theta(x-z)\}.$$

Si ponga h per $z-x$, allora

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}\varphi''(x)\ldots\ldots+\frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(x)$$

$$+\frac{\theta^n h^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x+h-\theta h).$$

110. Il risultato dell'articolo precedente ci dà un'espressione per il resto dopo $n+1$ termini dello sviluppo di $\varphi(x+h)$, che differisce nella forma da quello trovato precedentemente. Se poniamo $\theta=1-\theta_1$, il resto diventa

$$\frac{(1-\theta_1)^n h^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x+\theta_1 h).$$

111. Nelle dimostrazioni date del Teorema di Taylor, si è supposto che tutte le funzioni che vi si trovano siano continue. Se la funzione che vogliamo sviluppare, o alcuno dei

suoi coefficienti differenziali sino all'$(n+1)^{mo}$ inclusivamente, sia infinito per valori della variabile compresi tra certi valori, la dimostrazione data del teorema

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)\ldots\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(x)+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{n+1}(x+\theta h),$$

non è più valida. Si suole parlare dei casi nei quali entra un valore infinito come « esempii nei quali il Teorema di Taylor è in difetto ». La frase si connette al modo imperfetto di dimostrazione dato negli Art. 86 ed 87, nel quale non era stabilito prima di tutto quando il teorema supposto già dimostrato fosse realmente vero e quando no. Per esempio, si supponga

$$f(x)=\sqrt{(x-a)},$$
$$f(x+h)=\sqrt{(x-a+h)}.$$

Allora si direbbe che $f(x+h)$ può essere *sempre* sviluppata in una serie di potenze positive intere di h, *eccetto* quando $x=a$.

Quando $x=a$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc. diventano tutti infiniti ed $f(x+h)$ diviene $\sqrt{h}$.

112. In quel sistema di trattare il Calcolo Differenziale di cui è parola nell' Art. 85, si era solito di esprimere, o implicare, due proposizioni rispetto al « cadere in difetto del Teorema di Taylor ».

(1) Se il *vero* sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze di h contiene solamente potenze positive intere di h, allora nessuna delle quantità $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$... può essere infinita.

(2) Se il *vero* sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze di h racchiude potenze negative o frazionarie di h, allora *alcuna* delle quantità $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, etc., è infinita, come anche tutte quelle che le succedono.

Per il *vero* sviluppo di $f(a+h)$ s' intende lo sviluppo ottenuto per mezzo di qualche legittimo procedimento algebrico, applicabile all' esempio in quistione, come per esempio il teorema del binomio. La dimostrazione delle due precedenti proposizioni era data nel seguente modo.

Si supponga $f(a+h)=A_0+A_1h^\alpha+A_2h^\beta+A_3h^\gamma+\ldots\ldots$ essere il vero sviluppo, A_0, A_1, etc., non contenendo h. Allora per ottenere $f'(a)$, $f''(a)$, etc., possiamo differenziare $f(a+h)$ successivamente rispetto ad h, e porre $h=0$ nel risultato.

Se dunque $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ sono tutti interi positivi, non avremo mai potenze *negative* di h introdotte con la successiva differenziazione di $f(a+h)$. Quindi, ponendo $h=0$, non s'introducono valori *infiniti*.

Ma se alcuno degli esponenti α, β, γ, etc., è negativo, $f(a+h)$ e tutti i suoi coefficienti differenziali contengono potenze negative di h, e quindi $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, etc., sono tutti infiniti.

Se nessuno degli esponenti è negativo, ma uno o più tra essi siano frazioni positive, si supponga γ la più piccola di queste frazioni, e che sia compresa tra gl'interi n ed $n+1$. Allora $f(a+h)$ e tutt' i suoi coefficienti differenziali sino all' n^{mo} inclusivamente sono liberi da potenze negative di h; ma $f^{n+1}(a+h)$ e tutti i coefficienti differenziali seguenti le contengono. Quindi $f^{n+1}(a)$ è il primo coefficiente differenziale che diviene infinito, e tutti i coefficienti differenziali seguenti sono infiniti.

113. Si farà uso in seguito dell' osservazione che se per un valore finito della variabile una funzione diviene infinita, accade lo stesso pel coefficiente differenziale della funzione. In prova di ciò, è sufficiente notare i differenti casi che possono darsi. Una funzione *algebrica* può solamente divenire infinita, per un valore finito della variabile, avendo la forma di una frazione il denominatore della quale svanisce. Ora quando differenziamo una frazione non togliamo mai il denominatore, così che il coefficiente differenziale ha anche un denominatore evanescente, e per conseguenza diviene infinito. Similmente, il 2°, 3°, etc. coefficiente differenziale sono anche infiniti.

Le funzioni trascendenti $\log x$ ed $a^{\frac{1}{x}}$, le quali diventano entrambe infinite quando $x=0$, hanno i loro coefficienti differenziali, cioè $\frac{1}{x}$ e $-\frac{\log x}{x^2}\, a^{\frac{1}{x}}$, anche infiniti per $x=0$.

Le funzioni trigonometriche, come $\tan x$ e $\sec x$, le quali possono divenire infinite, sono forme frazionarie, e cadono sotto le osservazioni già fatte.

La proposizione non è necessariamente vera per le funzioni che diventano infinite per un valore *infinito* della variabile, come può vedersi nel caso di $\log x$, che è infinito quando x è infinito, mentre il suo coefficiente differenziale $\frac{1}{x}$ svanisce.

ESEMPII DIVERSI.

1. Se $y = \tan^{-1}\dfrac{a+bx}{b-ax}$. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Se $y = x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \tan^{-1}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

3. Se $y = \log\dfrac{\sqrt{(x^2+a^2)} + \sqrt{(x^2+b^2)}}{\sqrt{(x^2+a^2)} - \sqrt{(x^2+b^2)}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+a^2)}\,\sqrt{(x^2+b^2)}}.$$

4. Se $y = \dfrac{\sqrt{(1-x^2)}\,e^{sen^{-1}x}}{\sqrt{(1-x^2)}+x}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\,e^{sen^{-1}x}}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\dfrac{\sqrt{(1-x^2)}-x}{\{\sqrt{(1-x^2)}+x\}^2}$.

5. Se $y = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x\cos x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}\log\dfrac{e\,x}{\operatorname{sen} x}$,

6. Se $f(x) = \left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$, $f'(0) = \left\{2\log\dfrac{a}{b} + \dfrac{b^2-a^2}{ab}\right\}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a+b}$.

7. Se $y = \sqrt[3]{\{(x-a)^2(x-c)\}}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2(a-c)^2 y}{9(x-a)^2(x-c)^2}$,

8. Se $x = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$, ed $y = a\operatorname{sen}\theta - b\cos\theta$, allora

$$\frac{d^m x}{d\theta^m}\,\frac{d^n y}{d\theta^n} - \frac{d^n x}{d\theta^n}\,\frac{d^m y}{d\theta^m}$$

è indipendente da θ.

9. Se $\cos^{-1}\dfrac{y}{a} = \log\left(\dfrac{x}{b}\right)^n$, allora

$$x^2\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (2n+1)\,x\,\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2n^2\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

10. Mostrare che $(x-2)\,e^x + x + 2$ è positiva per tutti i valori positivi di x.

CAPITOLO VII.

ESEMPII DI SVILUPPO DI FUNZIONI.

114. Applicheremo da principio le formole del capitolo precedente a sviluppare alcune funzioni.

Si cerchi lo sviluppo di $(1+x)^m$, non essendo supposto m essere un intero positivo.

Se $\qquad f(x) = (1+x)^m,$

si ha $\qquad f'(x) = m(1+x)^{m-1},$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

. . . .

$$f^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{n+1}(x) = m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1};$$

onde $\qquad f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1),$ etc.

Quindi, per l' Art. 95,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}x^n$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

Se x è minore di 1 l'ultimo termine si può rendere tanto piccolo quanto ci piace crescendo sufficientemente n, ed in questo caso la serie infinita

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

prendendo un numero sufficiente di termini, si può rendere tanto prossima ad $(1+x)^m$ quanto ci piace.

115. Sia $$f(x) = a^x.$$
Per gli Art. 95 e 79, abbiamo

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{1.2}(\log a)^2 + \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n}(\log a)^n + \frac{x^{n+1} a^{\theta x} (\log a)^{n+1}}{\lfloor n+1}.$$

Quindi, cambiando a in e, e rammentandosi che

$$\log e = 1,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{\lfloor n+1}.$$

Il termine $\frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{\lfloor n+1}$ può essere reso tanto piccolo quanto si vuole crescendo sufficientemente n. Quindi possiamo scrivere

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \text{etc., } all'\,inf.$$

Si ponga $x = 1$, ed abbiamo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \text{etc.}$$

Questa serie può essere usata per calcolare il valore approssimato di e, e possiamo mostrare per mezzo di essa che e deve essere un numero *incommensurabile*.

116. Sia $$f(x) = \operatorname{sen} x.$$
Per gli Art. 95 e 78,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \ldots\ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\pi + \theta x\right).$$

Similmente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} \cos\left(\frac{n+1}{2}\pi + \theta x\right).$$

Negli Art. 115 e 116, lo studente vedrà che l'ultimo termine può rendersi tanto piccolo quanto ci piace, qualunque sia il valore di x, se n è preso sufficientemente grande.

117. Sia $\quad f(x) = \log(1+x);$

onde
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ ed } f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ ed } f''(0) = -1,$$

. . . .

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\lfloor\underline{n-1}}{(1+x)^n} \text{ ed } f^n(0) = (-1)^{n-1}\lfloor\underline{n-1};$$

. . . .

quindi, per l'Art. 95,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

In questa serie, se supponiamo x positivo e non maggiore dell'unità, allora, siccome $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$ non può essere maggiore dell'unità, l'errore che commettiamo, fermandoci al termine $\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, non è maggiore di $\frac{1}{n+1}$; vale a dire, può essere reso tanto piccolo quantò ci piace crescendo n sufficientemente.

Se si cambia il segno di x, abbiamo

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}},$$

la quale non dà una forma molto conveniente al *resto*. Ma per l'Art. 110, possiamo ancora scrivere

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}},$$

in cui θ è tra 0 ed 1;

ora $$\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}} = \left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^n \cdot \frac{x}{1-\theta x}.$$

Se x è minore dell'unità, accade lo stesso per $\dfrac{x-\theta x}{1-\theta x}$, ed $\left(\dfrac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^n$ si può rendere tanto piccolo quanto ci piace prendendo n sufficientemente grande.

Quindi, se n è preso sufficientemente grande, il *resto* si può rendere tanto piccolo quanto ci piace.

118. Negli esempii precedenti, abbiamo potuto scrivere il termine generale della serie, ed il *resto* dopo $n+1$ termini. Ma se $f(x)$ è una funzione complicata, l'espressione di $f^n(x)$ sarà generalmente troppo lunga per essere adoperata. Perciò non è raro di proporre quistioni come « sviluppare, col Teorema di Maclaurin, $e^x \log(1+x)$ sino al termine che contiene x^5. » Quì non si richiede il *termine generale*, o il *resto*, o di mostrare quando, per lo scopo della valutazione numerica, il resto può essere trascurato. Noi procediamo nel seguente modo.

$f(x) = e^x \log(1+x)$,

onde $$f(0) = 0.$$

Per l'Art. 80,

$$f'(x) = e^x \log(1+x) + \frac{e^x}{1+x},$$

onde $$f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = e^x \log(1+x) + \frac{2e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2},$$

onde $$f''(0) = 1;$$

$$f'''(x) = e^x \log(1+x) + \frac{3e^x}{1+x} - \frac{3e^x}{(1+x)^2} + \frac{2e^x}{(1+x)^3},$$

onde $$f'''(0) = 2;$$

$$f^{\text{IV}}(x) = e^x \log(1+x) + \frac{4e^x}{1+x} - \frac{6e^x}{(1+x)^2} + \frac{8e^x}{(1+x)^3} - \frac{6e^x}{(1+x)^4},$$

onde $$f^{\text{IV}}(0) = 0;$$

$$f^{\text{V}}(x) = e^x \log(1+x) + \frac{5e^x}{1+x} - \frac{10e^x}{(1+x)^2} + \frac{20e^x}{(1+x)^3} - \frac{30e^x}{(1+x)^4} + \frac{24}{(1+x)^5},$$

onde $$f^{\text{V}}(0) = 9.$$

Quindi $$e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{\lfloor 3} + \frac{9x^5}{\lfloor 5} + \text{etc.}$$

Questo risultato può verificarsi moltiplicando lo sviluppo di e^x per quello di $\log(1+x)$.

119. Metodi di sviluppo più o meno rigorosi sono spesso adoperati per casi speciali dei quali procediamo a dare esempii. Noi non poniamo importanza sopra di essi come investigazioni esatte, ma essi possono servire come esercizii nella differenziazione.

Sviluppare $\tan^{-1} x$ secondo le potenze di x.

Supponiamo $$\tan^{-1} x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \text{etc.} \ldots\ldots (1).$$

Differenziando i due lati rispetto ad x,

si ha $$\frac{1}{1+x^2} = A_1 + 2A_2 x + \ldots + nA_n x^{n-1} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ma $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

per mezzo della semplice divisione, o col teorema del binomio.

Eguagliando i coefficienti delle potenze simili di x in (2) e (3), abbiamo

$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = 0,$$
$$A_3 = -\tfrac{1}{3},$$
$$A_4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e ponendo $x=0$ in (1), otteniamo $A_0 = 0$; quindi

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Questo esempio può anche essere trattato facilmente col metodo rigoroso già usato negli Art. 114–117. Apparisce dall'Esempio 18, pag. 66, che l'n^{mo} coefficiente differenziale di $\tan^{-1} x$ è

$$\frac{(-1)^{n-1} \lfloor n-1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} - n \tan^{-1} x\right).$$

Quindi abbiamo

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{x^n}{n}(-1)^{n-1}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$
$$+ \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\operatorname{sen}\left\{\frac{(n+1)\pi}{2} - (n+1)\tan^{-1}\theta x\right\}.$$

E se x è numericamente minore di 1, l'ultimo termine può essere reso tanto piccolo quanto ci piace crescendo sufficientemente n; sicchè la serie infinita

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

prendendo un numero sufficiente di termini, può essere condotta tanto vicino quanto ci piace a $\tan^{-1}x$.

120. Sviluppare $\operatorname{sen}^{-1}x$ secondo le potenze di x.

Supponiamo $\operatorname{sen}^{-1}x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \text{etc.}$ (1).

Differenziando i due lati, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1} + \text{etc.} \quad (2).$$

Ma $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1.3}{2.4}x^4 + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (3),$

pel teorema del binomio.

Quindi, paragonando i coefficienti in (2) e (3), si determinano A_1, A_2, etc., e ponendo $x=0$ in (1) si ha $A_0 = 1$. Sostituendo in (1), abbiamo

$$\operatorname{sen}^{-1}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

121. Sviluppare $e^{a\operatorname{sen}^{-1}x}$ secondo le potenze di x.

Si ponga $$e^{a\operatorname{sen}^{-1}x} = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

allora $$\frac{dy}{dx} = e^{a\operatorname{sen}^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{a\operatorname{sen}^{-1}x}\frac{a^2}{1-x^2} + \frac{xae^{a\operatorname{sen}^{-1}x}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots (3);$$

quindi $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=a^2y \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Supponiamo $y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\text{etc.}$ (5);

quindi $$\frac{dy}{dx}=A_1+2A_2x+\ldots+nA_nx^{n-1}+\text{etc.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\qquad 2A_2+\ldots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\text{etc.}$$

Si sostituiscano questi valori di $y, \frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$, in (4), indi si eguaglino i coefficienti delle potenze simili di x nei due lati, ed otterremo

$$A_{n+2}=\frac{a^2+n^2}{(n+1)(n+2)}A_n \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

L'equazione (6) ci abilita a determinare A_2, A_3, A_4, etc., quando conosciamo A_0 ed A_1.

Ma A_0 è il valore di y o $e^{a\,\text{sen}^{-1}x}$, per $x=0$, ed

$A_1 \ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx}$ o $e^{a\,\text{sen}^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}}$, per $x=0$;

onde
$$A_0=1,$$
$$A_1=a.$$

Quindi, per (6),

$$A_2=\frac{a^2}{1.2}A_0=\frac{a^2}{1.2},$$

$$A_3=\frac{a^2+1}{2.3}A_1=\frac{(a^2+1)a}{\underline{|3}},$$

etc.;

adunque $$e^{a\,\text{sen}^{-1}x}=1+ax+\frac{a^2x^2}{1.2}+\frac{a(a^2+1)}{1.2.3}x^3+\frac{a^2(a^2+2^2)}{\underline{|4}}x^4$$
$$+\frac{a(a^2+1)(a^2+3^2)}{\underline{|5}}x^5+\text{etc.}$$

Poichè $e^{a\,\text{sen}^{-1}x}=1+a\,\text{sen}^{-1}x+\frac{a^2}{1.2}(\text{sen}^{-1}x)^2+\text{etc.},$

abbiamo, eguagliando i coefficienti di a in questa serie, e nel risultato testè ottenuto,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

come già si è trovato. Del pari eguagliando i coefficienti di a^2, abbiamo

$$(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 = x^2 + \frac{2^2}{3.4} x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6} x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8} x^8 + \text{etc.}$$

122. Si voglia lo sviluppo di $\operatorname{sen}(m \operatorname{sen}^{-1} x)$ secondo le potenze di x.

Ponendo y per questa funzione, possiamo mostrare che

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\,\frac{dy}{dx} - m^2 y.$$

Procedendo come nell'Art. 121, troviamo

$$(n+1)(n+2) A_{n+2} = (n^2 - m^2) A_n, \text{ e}$$

$$\operatorname{sen}(m \operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{m}{1} x + \frac{m(1^2 - m^2)}{\lfloor 3} x^3 + \frac{m(1^2 - m^2)(3^2 - m^2)}{\lfloor 5} x^5 + \text{etc.}$$

123. Similmente $\cos(m \operatorname{sen}^{-1} x)$

$$= 1 - \frac{m^2}{1.2} x^2 - \frac{m^2(2^2 - m^2)}{\lfloor 4} x^4 - \frac{m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2)}{\lfloor 6} x^6 - \text{etc.}$$

ESEMPII.

1. Se $e^{2x}(3-x) - 4xe^x - x - 3$ si sviluppi col Teorema di Maclaurin, il primo termine è $-\dfrac{4x^5}{\lfloor 5}$.

2. Sviluppare $\log(1+e^x)$ secondo le potenze di x.

Ris. $\log 2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2^3} - \dfrac{x^4}{2^3 \lfloor 4} + \text{etc.}$

3. Sviluppare $e^{x \operatorname{sen} x}$ secondo le potenze di x.

Ris. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{3} + \text{etc.}$

4. $e^x \sec x = 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \text{etc.}$

5. $\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^n = 1 + \frac{nx}{2} + \frac{n(n+1)}{2.2}\frac{x^2}{2} + \ldots$

6. $\sqrt{(1+4x+12x^2)} = 1 + 2x + 4x^2 + \text{etc.}$

7. $(e^x + e^{-x})^n = 2^n \left\{ 1 + \frac{n}{\lfloor 2} x^2 + \frac{3n^2 - 2n}{\lfloor 4} x^4 + \text{etc.} \right\}$

8. $(\cos x)^n = 1 - \frac{nx^2}{1.2} + \frac{n(3n-2)x^4}{\lfloor 4} - \frac{n\{15(n-1)^2+1\}x^6}{\lfloor 6}$

$+ \text{etc.}$

9. $-\log\cos x = \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{2x^4}{\lfloor 4} + \frac{16x^6}{\lfloor 6} + \frac{16\times 17\, x^8}{\lfloor 8} + \ldots$

10. $e^{\cos x} = e\left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{4x^4}{\lfloor 4} - \frac{31x^6}{\lfloor 6} \text{ etc.}\right\}$

11. $\operatorname{sen}^{-1}(x+h) = \operatorname{sen}^{-1}x + \frac{h}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{h^2}{\lfloor 2}$

$+ \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{h^3}{\lfloor 3} + \frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\frac{h^4}{\lfloor 4} + \text{etc.}$

12. $\log(1 - x + x^2) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \ldots$

13. $\log\{x + \sqrt{(a^2+x^2)}\} = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5a^5} - \ldots$

14. $\log(1 + \operatorname{sen} x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \ldots$

15. $e^{\tan^{-1}x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} \ldots$

16. Per quali valori di x è in difetto il Teorema di Taylor, se $y = \sqrt[5]{\left\{\frac{(x-a)^7(x-b)^{10}}{(x-c)^2}\right\}}$, e quale è il primo coefficiente differenziale che diviene infinito?

CAPITOLO VIII.

DIFFERENZIAZIONE SUCCESSIVA. DIFFERENZIAZIONE DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI.

124. Nell' Art. 77, abbiamo definito il *secondo coefficiente differenziale* di una funzione essere il coefficiente differenziale del coefficiente differenziale di questa funzione. Il coefficiente differenziale del secondo coefficiente differenziale è stato chiamato il terzo coefficiente differenziale, e così di seguito. Considereremo ora sotto un altro aspetto questi successivi coefficienti differenziali.

125. Sia

$$y = f(x),$$

$$y + \Delta y = f(x + h),$$

onde

$$\Delta y = f(x + h) - f(x).$$

Nel secondo membro dell' ultima equazione si muti x in $x + h$ e si sottragga il valore primitivo; otteniamo così

$$f(x + 2h) - f(x + h) - \{ f(x + h) - f(x) \},$$

o

$$f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x).$$

Questo risultato, d' accordo con la nostra stabilita notazione, può essere dinotato con $\Delta(\Delta y)$, che si abbrevia in $\Delta^2 y$. Quindi

$$\Delta^2 y = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x).$$

Similmente $\Delta(\Delta^2 y)$ o $\Delta^3 y$ sarà eguale a

$$f(x + 3h) - 2f(x + 2h) + f(x + h)$$
$$- \{ f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) \},$$

cioè,

$$\Delta^3 y = f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x).$$

126. Seguendo il metodo dell'ultimo articolo, si troveranno le espressioni per $\Delta^4 y$, $\Delta^5 y$, etc. Pel nostro scopo non cercheremo l'espressione generale di $\Delta^n y$. Sarà facile, però, al lettore di mostrare, con una pruova per induzione, che

$$\Delta^n y = f(x+nh) - nf\{x+(n-1)h\} + \frac{n(n-1)}{1.2} f\{x+(n-2)h\} - \dots$$
$$\dots\dots \pm nf(x+h) \mp f(x).$$

127. *Mostrare che il limite* di $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ è $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Abbiamo, per l'Art. 125,

$$\Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Ma, per l'Art. 92,

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{1.2} f''(x) + \frac{(2h)^3}{\underline{|3}} f'''(x+2\theta h),$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{\underline{|3}} f'''(x+\theta_1 h),$$

θ e θ_1 essendo frazioni proprie. Quindi

$$\Delta^2 y = h^2 f''(x) + \frac{h^3}{\underline{|3}} \{ 4f'''(x+2\theta h) - f'''(x+\theta_1 h) \}.$$

Si dividano ambo i lati per h^2, o sia per $(\Delta x)^2$, e quindi si faccia diminuire h indefinitamente. Si otterrà

$$\text{limite di } \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(x);$$

cioè, il limite di $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ è $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

128. Il risultato dell'ultimo Articolo può essere generalizzato col metodo induttivo di dimostrazione. Supponiamo

$$\Delta^n y = h^n f^n(x) + h^{n+1} \psi(x) \dots\dots\dots\dots (1),$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione di x ed h, che rimane finita quando h si pone $= 0$. Da (1) abbiamo

$$\Delta^{n+1} y = h^n f^n(x+h) + h^{n+1} \psi(x+h) - \{ h^n f^n(x) + h^{n+1} \psi(x) \}$$
$$= h^n \{ f^n(x+h) - f^n(x) \} + h^{n+1} \{ \psi(x+h) - \psi(x) \}.$$

Ora, per l'Art. 92,

$$f^n(x+h)=f^n(x)+hf^{n+1}(x)+\frac{h^2}{1.2}f^{n+2}(x+\theta h),$$

$$\psi(x+h)=\psi(x)+h\psi'(x+\theta_1 h),$$

quindi

$$\Delta^{n+1}y=h^{n+1}f^{n+1}(x)+h^{n+2}\{\tfrac{1}{2}f^{n+2}(x+\theta h)+\psi'(x+\theta_1 h)\},$$

$$=h^{n+1}f^{n+1}(x)+h^{n+2}\psi_1(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

L'equazione (2) ci mostra che, ammessa la verità di (1), possiamo dedurre per $\Delta^{n+1}y$ un valore della stessa forma di quella supposta per $\Delta^n y$. Ma l'Art. 127 dà per $\Delta^2 y$ un'espressione della forma supposta; quindi $\Delta^3 y$ ha la stessa forma, e così anche $\Delta^4 y$, e generalmente $\Delta^n y$.

Dall'equazione (1), dividendo i due lati per h^n e poi diminuendo h indefinitamente, abbiamo

$$\text{limite di } \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=f^n(x);$$

cioè, il limite di $\dfrac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ è $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

129. Sinora abbiamo considerato solamente funzioni di *una variabile indipendente;* vale a dire, abbiamo supposto nell'equazione $y=f(x)$, che sebbene quantità dinotate da simboli come a, b, etc. potessero trovarsi in $f(x)$, pure esse non fossero suscettibili di alcun cangiamento. Supponiamo ora che si abbia l'equazione

$$u=x^2+xy+y^2,$$

e dinoti y una quantità costante ed x una variabile, si ha

$$\frac{du}{dx}=2x+y.$$

Dalla stessa equazione, se x è una quantità costante ed y una variabile, si ottiene

$$\frac{du}{dy}=2y+x.$$

Naturalmente non possiamo considerare nello stesso tempo x come costante e variabile; ma non vi sarà alcun assurdo se in una occasione e per uno scopo consideriamo x costante, ed in un'altra occasione e per un altro scopo la consideriamo variabile.

130. Se x ed y dinotano quantità tali che ciascuna di esse può variare senza alterare l'altra, esse si dicono *variabili indipendenti*, ed ogni quantità u, il valore della quale dipende dai valori di x ed y, si dice una « funzione delle variabili indipendenti x ed y; »

$\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., dinotano i successivi coefficienti differenziali di u, presi nella supposizione che la x *solamente* varii;

$\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$..., dinotano i coefficienti differenziali successivi di u, presi nella supposizione che la y *solamente* varii.

131. Se u è una funzione delle variabili indipendenti x ed y, allora $\frac{du}{dx}$ sarà anche generalmente una funzione di x ed y. Quindi possiamo avere occasione di considerare i suoi coefficienti differenziali rispetto ad x o ad y. Il primo è dinotato da

$$\frac{d^2u}{dx^2},$$

come già si è stabilito; l'altro è dinotato da

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy},$$

il quale si abbrevia in $\frac{d^2u}{dy\,dx}$.

Similmente, tanto $\frac{d^2u}{dx^2}$ che $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ saranno generalmente funzioni di x ed y. Queste possono essere differenziate rispetto ad x e ad y. Quindi usiamo simboli come

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2},\quad \frac{d^3u}{dx\,dy\,dx},\quad \text{e}\quad \frac{d^3u}{dy^2\,dx};$$

il significato dei quali può essere raccolto dalle osservazioni precedenti. Per esempio, $\frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}$ indica che debbono eseguirsi tre operazioni: dobbiamo differenziare u rispetto ad x, supponendo y costante; la funzione che risulta deve essere differenziata rispetto ad y, supponendo x costante: quest' ultimo risultato deve essere differenziato rispetto ad x, supponendo y costante.

132. Considerando l'equazione $y=f(x)$, in cui abbiamo *una* variabile indipendente, lo studente poteva rapportarsi alla geometria analitica per avere illustrazioni della natura di una variabile dipendente e di un coefficiente differenziale. Si veggano gli Art. 35–43. In simil modo, se egli ha conoscenza degli elementi della geometria a tre dimensioni, troverà sussidio pel presente capitolo del Calcolo Differenziale. Per esempio, l'equazione

$$z = ax + by + c,$$

rappresenta un piano; x ed y sono *due variabili indipendenti*, di cui z è una funzione. Quì

$$\frac{dz}{dx} = a, \qquad \frac{dz}{dy} = b,$$

e tutt' i coefficienti differenziali di ordine superiore, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$, etc., svaniscono.

Ancora, $$z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

è l'equazione di una sfera. Se passiamo da un punto sulla sfera, di cui le coordinate sono x ed y, ad un altro di cui le coordinate sono $x+\Delta x$ ed y, noi variamo x *senza variare* y. Se in questo caso il valore della terza coordinata è $z+\Delta z$, abbiamo

$$z + \Delta z = \sqrt{\{ r^2 - y^2 - (x + \Delta x)^2 \}} \ldots\ldots (2).$$

Da (1) e (2) possiamo trovare $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$; ed il suo limite che dinotiamo con $\dfrac{dz}{dx}$, sarà $\dfrac{-x}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}$.

Il procedimento è lo stesso come se si avesse

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

in cui a è una costante; dalla quale si deduce

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

e finalmente si pone $r^2 - y^2$ per a^2.

Da un'altra parte, se passiamo dal punto (x, y) ad un punto che ha x ed $y + \Delta y$ per sue coordinate, abbiamo, come sopra,

$$z + \Delta z = \sqrt{\{ r^2 - x^2 - (y + \Delta y)^2 \}} \dots\dots\dots (3).$$

Ora, in (2) e (3) abbiamo usato Δz; ma non intendiamo che *il valore attribuito al simbolo sia lo stesso nei due casi.* Se vi fosse pericolo di errore col confonderli, si potrebbe usare $\Delta' z$ in (3), o qualche cosa di simile. Ma nel fatto noi usiamo solamente (3) per aiuto nel formarci un concetto di $\frac{dz}{dy}$; e siccome consideriamo $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ quali *simboli interi* non suscettibili di decomposizione, non può mai sorgere la quistione. « È il dz in $\frac{dz}{dx}$ lo stesso che il dz in $\frac{dz}{dy}$? »

133. Quando u è una funzione di due variabili indipendenti, i coefficienti differenziali $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, etc., sono spesso chiamati « coefficienti differenziali *parziali* ». Ciascuno di questi coefficienti differenziali si ottiene per mezzo di una o più operazioni, ciascuna operazione essendo condotta nella supposizione che solamente *una* delle possibili variabili x ed y sia *attualmente* variabile.

Supponiamo per esempio $u = \tan^{-1}\frac{x}{y}$; allora

$$\frac{du}{dx} = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

e così di seguito

Differenziando $\frac{du}{dx}$ rispetto ad y otteniamo

$$\frac{d\,\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

e differenziando $\dfrac{du}{dy}$ rispetto ad x abbiamo

$$\frac{d\,\dfrac{du}{dy}}{dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Così vediamo che in questo esempio

$$\frac{d\,\dfrac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\,\dfrac{du}{dy}}{dx}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

o, come può scriversi,

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Dimostreremo nel prossimo articolo che questo risultato è vero in generale. Dei due modi di scrivere il risultato dato in (1) e (2) il secondo è il più comodo, ma esso ha lo svantaggio di far *sembrare* ovvio allo studente il teorema che dobbiamo dimostrare, poichè gli suggerisce di dover semplicemente paragonare due *frazioni*. Ma come abbiamo già osservato, un simbolo di coefficiente differenziale è definito come un tutto, e non deve essere decomposto in un numeratore ed un denominatore. Si veggano gli Art. 26 e 77.

134. *Se* u *è una funzione qualunque delle variabili indipendenti* x *ed* y,

$$\frac{d\,\dfrac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\,\dfrac{du}{dy}}{dx}.$$

Sia $u=\varphi(x,y)$; si muti x in $x+h$, allora per l'Art. 92,

$$\varphi(x+h,y)=\varphi(x,y)+h\frac{du}{dx}+\frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h,y);$$

possiamo perciò scrivere

$$\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)=h\frac{du}{dx}+h^2v\dots\dots\dots (1).$$

in cui v è una certa funzione di x ed y, che rimane finita per $h=0$. In (1) si ponga $y+k$ invece di y; allora il primo membro diviene $\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)$; per l'Art. 92 $\frac{du}{dx}$ diviene $\frac{du}{dx}+k\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}+k^2\beta$, in cui β rimane finita per $k=0$; e v diviene $v+k\alpha$, in cui α è una quantità che rimane finita per $k=0$, poichè essa tende a $\frac{dv}{dy}$ come suo limite. Così

$$\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)=h\frac{du}{dx}+hk\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}+hk^2\beta$$
$$+h^2v+h^2k\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si sottragga (1) da (2); si avrà

$$\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y+k)+\varphi(x,y)$$
$$=hk\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}+h^2k\alpha+hk^2\beta.$$

Si divida per hk, ed indi si suppongano h e k diminuire indefinitamente; così

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}=\text{al limite quando } h \text{ e } k \text{ svaniscono di}$$
$$\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y+k)+\varphi(x,y)}{hk}.$$

In un modo simile cambiando *prima* y in $y+k$, e *dopo* x in $x+h$, possiamo dimostrare che $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ è anche eguale al limite precedente.

Quindi
$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}.$$

135. L'oggetto dell'Articolo precedente si è di provare che $\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}$; ciò si è fatto mostrando che ciascuna di queste quantità è eguale al limite di una certa espressione. Quale

sia questa espressione è relativamente cosa di poca importanza, ma è interessante notare l'analogia del risultato con quelli negli Art. 127 e 128.

Dimostrazioni della proposizione dell'articolo precedente alle volte sono state date che sembrano più semplici di quella quì adottata, ma che mancano di rigore. In particolare talvolta si *suppone* una cosa che merita di essere notata. Per ottenere $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, secondo la definizione del simbolo, si fanno le seguenti operazioni. (1) Nella funzione u poniamo $x+h$ per x, si sottrae il valore primitivo dal nuovo valore, e poi si divide per h. (2) Troviamo il limite del risultato per $h=0$. (3) Poniamo allora $y+k$ per y, si sottrae il valore primitivo dal nuovo valore, e poi si divide per k. (4) Troviamo il limite del risultato per $k=0$. Ora spesso si *suppone* che possiamo fare la *terza* delle precedenti operazioni *prima* della seconda invece di *dopo* di essa. *Ammettendo* ciò il risultato richiesto si ottiene prontamente; infatti dalla prima operazione si ha $\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}$, quindi dalla terza si ottiene

$$\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y+k)+\varphi(x,y)}{hk},$$

e secondo ciò che si è *supposto*, il limite di questa espressione è $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$. In modo analogo si trova che $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ è anche eguale allo stesso limite.

Un' altra osservazione deve farsi per non incorrere in un possibile errore. Nella dimostrazione dell' Art. 134 abbiamo usato v per $\frac{1}{2}\varphi''(x+\theta h,y)$; in questa espressione tutto ciò che si conosce di θ si è che sia una frazione propria, e non si deve supporre che sia funzione di x *solamente*. Quindi quando si muta y in $y+k$ il valore di θ muterà generalmente. Ciò non altera la dimostrazione precedente, poichè non era necessario in essa di trovare attualmente il valore di $\frac{dv}{dy}$; ma il *supporre* che θ non muti al mutare di y ha reso inesatte alcune dimostrazioni che sono state date della proposizione nell' Art. 134.

136. L' importante principio dimostrato nell' Art. 134 si enuncia così « L'ordine delle differenziazioni indipendenti è indifferente; » o pure vi si allude come al principio della « convertibilità delle differenziazioni indipendenti ». Esso può essere esteso ad un numero qualunque di differenziazioni sicchè *se una funzione di due variabili indipendenti*, x *ed* y, *si deve differenziare* m *volte rispetto ad* x, *ed* n *volte rispetto ad* y, *il risultato sarà lo stesso in qualunque ordine si eseguano le differenziazioni.* Nella dimostrazione di questa proprietà dobbiamo applicare solamente il teorema dell'Art. 134 ripetutamente nel modo mostrato nell'esempio seguente.

Dimostrare che $$\frac{d^3u}{dy^2\,dx}=\frac{d^3u}{dx\,dy^2};$$

$$\frac{d^3u}{dy^2\,dx}=\frac{d\,\dfrac{d^2u}{dy\,dx}}{dy},\ \text{per definizione},$$

$$=\frac{d\,\dfrac{d^2u}{dx\,dy}}{dy},\ \text{per l'Art. 134},$$

$$=\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy},\ \text{per definizione},$$

$$=\frac{d^2v}{dy\,dx},\ \text{se}\ v=\frac{du}{dy},$$

$$=\frac{d^2v}{dx\,dy},\ \text{per l'Art. 134},$$

$$=\frac{d^3u}{dx\,dy^2}.$$

137. Se u è una funzione delle tre variabili indipendenti, x, y, z, abbiamo in simil modo

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=\frac{d^2u}{dz\,dy},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz}=\frac{d^2u}{dz\,dx},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx},$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = \frac{d^3u}{dx\,dz\,dy} = \frac{d^3u}{dz\,dx\,dy},$$

e così di seguito.

ESEMPII.

1. Se $u = \frac{x^2y}{a^2 - z^2}$, trovare $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ e $\frac{d^2u}{dy\,dz}$.

2. Verificare nei seguenti casi l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}:$$

$$u = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x,$$

$$u = x \log y,$$

$$u = x^y,$$

$$u = \log \tan \frac{y}{x},$$

$$u = \frac{ay - bx}{by - ax},$$

$$u = y \log (1 + xy).$$

3. Se $u = Ax^\alpha y^{\alpha'} + Bx^\beta y^{\beta'} + Cx^\gamma y^{\gamma'} + \text{etc.}$,

in cui $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' \text{ etc.} = n$,

mostrare che $x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} = nu.$

In questo esempio u si dice una *funzione omogenea di n dimensioni.*

4. Se u è una funzione omogenea di n dimensioni, mostrare che

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + y\frac{d^2u}{dx\,dy} = (n-1)\frac{du}{dx}, \quad x\frac{d^2u}{dx\,dy} + y\frac{d^2u}{dy^2} = (n-1)\frac{du}{dy}.$$

5. Se u è una funzione omogenea di n dimensioni, mostrare che

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2xy \frac{d^2u}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2u}{dy^2} = n(n-1)\,u.$$

6. Verificare i teoremi negli Esempii 3 e 4 nei seguenti casi:

$$u = (x+y)^2,$$

$$u = \frac{xy}{x+y},$$

$$u = \sqrt[3]{(x^2+y^2)}.$$

7. Se $u = x^3z^4 + e^x y^2 z^3 + x^2y^2z^2$, mostrare che

$$\frac{d^4u}{dx^2\,dy\,dz} = 6e^x yz^2 + 8yz.$$

8. Se $u = e^{xyz}$, mostrare che

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\,e^{xyz}.$$

9. Se $u = y\sqrt{(a^2-x^2)} + x\sqrt{(a^2-y^2)}$, mostrare che

$$\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{a^4}{\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}}.$$

10. Se $u = \tan^{-1}\dfrac{xy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$, mostrare che

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^4u}{dx^2\,dy^2} = -\frac{15xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

11. Se $u = x\sqrt{(a^2-y^2)}\sqrt{(a^2-z^2)} + y\sqrt{(a^2-z^2)}\sqrt{(a^2-x^2)}$
$+ z\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)} - xyz,$

mostrare che

$$-\sqrt{(a^2-x^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}\sqrt{(a^2-z^2)}\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} = \sqrt{(a^2-x^2)}\frac{du}{dx}$$

$$= \sqrt{(a^2-y^2)}\frac{du}{dy} = \sqrt{(a^2-z^2)}\frac{du}{dz}.$$

12. Se $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, mostrare che

$$\frac{1}{6}\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz} - \frac{1}{3}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} = e^{-u},$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} = \frac{3}{x+y+z},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy} + 2\,\frac{d^2u}{dy\,dz} + 2\,\frac{d^2u}{dz\,dx}\,.$$

$$= -\frac{9}{(x+y+z)^2},$$

$$\frac{d^6u}{dx^2\,dy^2\,dz^2} + \frac{d^6u}{dx^3\,dy^2\,dz} + \frac{d^6u}{dx^2\,dy^3\,dz} = -\frac{360}{(x+y+z)^6},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{3}{(x+y+z)^2},$$

$$\frac{d^5u}{dx^3\,dy\,dz} + \frac{d^5u}{dx\,dy^3\,dz} + \frac{d^5u}{dx\,dy\,dz^3} = \frac{72}{(x+y+z)^5}\,.$$

CAPITOLO IX.

TEOREMA DI LAGRANGE E TEOREMA DI LAPLACE.

138. Si supponga $y = z + x\varphi(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$,
in cui z ed x sono indipendenti, e si cerchi di sviluppare $f(y)$ secondo le potenze ascendenti di x. Si ponga u per $f(y)$, allora, pel teorema di Maclaurin, abbiamo

$$u = u_0 + x\frac{du_0}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \frac{x^3}{\lfloor 3}\frac{d^3u_0}{dx^3} + \text{etc.},$$

in cui $u_0, \frac{du_0}{dx}, \frac{d^2u_0}{dx^2}$, etc. dinotano i valori di u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. quando x si pone $= 0$ dopo la differenziazione. Procediamo a trasformare questi coefficienti differenziali di u rispetto ad x in una forma più conveniente per determinare i loro valori quando $x = 0$. Mostreremo dapprima che

$$\frac{d}{dx}\left\{F(v)\frac{dv}{dz}\right\} = \frac{d}{dz}\left\{F(v)\frac{dv}{dx}\right\} \ldots\ldots\ldots (2),$$

supponendo v una funzione delle quantità indipendenti x è z, ed $F(v)$ una funzione qualunque di v.

Per stabilire (2) basta osservare solamente che il primo membro è

$$F'(v)\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + F(v)\frac{d^2v}{dx\,dz},$$

ed il secondo è

$$F'(v)\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + F(v)\frac{d^2v}{dz\,dx};$$

e queste due espressioni sono eguali per l' Art. 134.

Da (1) abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) + x\varphi'(y)\frac{dy}{dx},$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y)}{1 - x\varphi'(y)}.$$

Inoltre $$\frac{dy}{dz} = 1 + x\varphi'(y)\frac{dy}{dz},$$

onde $$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1 - x\varphi'(y)}.$$

Quindi $$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)\frac{dy}{dz}.$$

Di più $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ e } \frac{du}{dz} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dz},$$

onde $$\frac{du}{dx} = \varphi(y)\frac{du}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi $$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\varphi(y)\frac{du}{dz}\right\},$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\varphi(y) f'(y)\frac{dy}{dz}\right\}, \text{ poichè } u = f(y),$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\varphi(y) f'(y)\frac{dy}{dx}\right\} \text{ per } (2),$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\varphi(y)\frac{du}{dx}\right\},$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\overline{\varphi(y)}|^2\frac{du}{dz}\right\} \text{ per } (3).$$

Ancora $$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2}{dx\,dz}\left\{\overline{\varphi(y)}|^2\frac{du}{dz}\right\},$$

$$= \frac{d^2}{dz\,dx}\left\{\overline{\varphi(y)}|^2\frac{du}{dz}\right\} \text{ per l' Art. 134.}$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}\left\{\overline{\varphi(y)}|^2\frac{du}{dx}\right\} \text{ per } (2),$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}\left\{\overline{\varphi(y)}|^3\frac{du}{dz}\right\} \text{ per } (3).$$

Supponiamo, secondo questa legge, che

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \left[\varphi(y)\right]^n \frac{du}{dz} \right\};$$

allora
$$\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} = \frac{d^n}{dx\, dz^{n-1}} \left\{ \left[\varphi(y)\right]^n \frac{du}{dz} \right\},$$

$$= \frac{d^n}{dz^{n-1}\, dx} \left\{ \left[\varphi(y)\right]^n \frac{du}{dz} \right\}, \text{ per l'Art. 134,}$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \left[\varphi(y)\right]^n \frac{du}{dx} \right\} \text{ per (2)},$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \left[\varphi(y)\right]^{n+1} \frac{du}{dz} \right\},$$

il che mostra che l'espressione di $\frac{d^n u}{dx^n}$ segue la stessa legge che quella di $\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$. Quindi, siccome questa legge è stata dimostrata valere per $\frac{d^2 u}{dx^2}$ e $\frac{d^3 u}{dx^3}$, essa vale in generale. In $\frac{d^n u_0}{dx^n}$ dobbiamo porre $x=0$ *dopo* che la differenziazione è stata eseguita; ma quando trasformiamo $\frac{d^n u}{dx^n}$, con la formola precedente, in una espressione che racchiude solamente coefficienti differenziali *presi rispetto a* z, possiamo porre $x=0$ *prima* della differenziazione, poichè x deve essere considerata come una costante nel differenziare rispetto a z. Quando $x=0$,

$$y = z,$$

$$\varphi(y) = \varphi(z),$$

onde
$$\frac{du_0}{dz} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z),$$

$$\frac{du_0}{dx} = \varphi(z) f'(z),$$

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{d}{dz} \left\{ \left[\varphi(z)\right]^2 f'(z) \right\},$$

. . . .

e così

$$f(y)=f(z)+x\varphi(z)f'(z)+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dz}\left\{\overline{\varphi(z)}|^2 f'(z)\right\}$$
$$+\frac{x^3}{\lfloor 3}\frac{d^2}{dz^2}\left\{\overline{\varphi(z)}|^3 f'(z)\right\}$$
$$\ldots\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}|^n f'(z)\right\}+\text{etc.}$$

Questo risultato si chiama il Teorema di Lagrange.

139. Supposto $y=F\{z+x\varphi(y)\}$;

si cerca lo sviluppo di $f(y)$ secondo le potenze di x.

Si ponga t per $z+x\varphi(y)$; allora

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dF}{dt}\left\{\varphi(y)+x\varphi'(y)\frac{dy}{dx}\right\},$$

onde
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(y)\dfrac{dF}{dt}}{1-x\varphi'(y)\dfrac{dF}{dt}};$$

del pari
$$\frac{dy}{dz}=\frac{dF}{dt}\frac{dt}{dz}=\frac{dF}{dt}\left\{1+x\varphi'(y)\frac{dy}{dz}\right\},$$

onde
$$\frac{dy}{dz}=\frac{\dfrac{dF}{dt}}{1-x\varphi'(y)\dfrac{dF}{dt}}.$$

Quindi
$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y)\frac{dy}{dz}.$$

Da ciò, nello stesso modo che nell' Art. 138, deduciamo che

$$\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(y)}|^n\frac{du}{dz}\right\},$$

in cui
$$u=f(y).$$

Se poniamo $x=0$ nell' equazione

$$y=F\{z+x\varphi(y)\},$$

si deduce
$$y = F(z),$$
$$\varphi(y) = \varphi\{F(z)\},$$
$$\frac{du}{dz} = \frac{df\{F(z)\}}{dz},$$
e finalmente,
$$f(y) = f\{F(z)\} + x\varphi\{F(z)\}\frac{df\{F(z)\}}{dz} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dz}\left[\overline{\varphi\{F(z)\}}\,\rceil^2 \frac{df\{F(z)\}}{dz}\right]$$
$$\ldots\ldots + \frac{x^n}{\lfloor n}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\overline{\varphi\{F(z)\}}\,\rceil^n \frac{df\{F(z)\}}{dz}\right] + \text{etc.}$$
Questo si chiama il Teorema di Laplace.

140. Il Teorema di Lagrange si può dedurre immediatamente da quello di Laplace, ponendo $F(z) = z$. Ma il Teorema di Laplace può anche dedursi da quello di Lagrange, come segue:

Nell'equazione $\quad y = F\{z + x\varphi(y)\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$

si ponga $\quad z + x\varphi(y) = y',$

onde $\quad y = F(y'),$

con ciò $\quad y' = z + x\varphi\{F(y')\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$

ed $\quad f(y)$ diviene $f\{F(y')\}$.

Adunque si tratta di sviluppare $f\{F(y')\}$ secondo le potenze di x, per mezzo dell'equazione (2). Ma ciò è precisamente quello che si ottiene col Teorema di Lagrange, le funzioni complesse $f\{F(y')\}$ e $\varphi\{F(y')\}$ prendendo il posto delle funzioni semplici $f(y')$ e $\varphi(y')$.

141. Deve essere ricordato, che nel richiamare il Teorema di Maclaurin, il quale serve di fondamento a quelli di Lagrange e di Laplace, a rigore avremmo dovuto adoperarlo nella forma data nell'Art. 95, con una espressione del resto dopo $n+1$ termini. Però questa espressione del resto diviene così complicata in questo caso, che non ci siamo riferiti ad essa. Le investigazioni dei Teoremi di Lagrange e di Laplace si deve confessare essere imperfette, poichè i caratteri della convergenza di queste serie, la quale solamente può giustificare il loro uso come equivalenti aritmetici delle funzioni che esse intendono rappresentare sono di un carattere troppo difficile per un libro elementare. Lo studente provetto

può consultare Moigno *Leçons de Calcul Différentiel*, 18ª Lezione. Liouville *Journal de Mathématiques*, tom. XI. p. 129 e 313.

142. Se $x = a + y\varphi(x)$, abbiamo pel Teorema di Lagrange

$$f(x) = f(a) + y\{\varphi(x) f'(x)\} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left\{\overline{\varphi(x)}|^2 f'(x)\right\}$$
$$+\frac{y^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dx^2}\left\{\overline{\varphi(x)}|^3 f'(x)\right\} + \text{etc.},$$

in cui nei coefficienti delle diverse potenze di y, dobbiamo fare $x = a$ dopo che le differenziazioni sono state eseguite. Sia y o $\frac{x-a}{\varphi(x)} = \psi(x)$, sicchè $x = a$ è una radice di $\psi(x) = 0$; allora

$$f(x) = f(a) + \psi(x)\left[\frac{f'(x)(x-a)}{\psi(x)}\right] + \frac{\{\psi(x)\}^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)(x-a)^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+ \text{etc.}$$

in cui, nei coefficienti delle diverse potenze di $\psi(x)$, x deve essere posto $= a$ dopo le differenziazioni. Questa serie per $f(x)$ secondo le potenze di $\psi(x)$ si chiama il Teorema di Burmann.

143. Dinoti $\psi^{-1}(x)$ la funzione inversa di $\psi(x)$, sicchè se $u = \psi(x)$ si ha $\psi^{-1}(u) = x$, e quindi $\psi\{\psi^{-1}(u)\} = u$. Se scriviamo nel Teorema di Burmann $\psi^{-1}(x)$ invece di x, abbiamo

$$f\{\psi^{-1}(x)\} = f(a) + x\left[\frac{f'(x)(x-a)}{\psi(x)}\right] + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)(x-a)^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+\frac{x^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{f'(x)(x-a)^3}{\{\psi(x)\}^3}\right] + \text{etc.}$$

Non si è fatto alcun cangiamento nelle quantità chiuse in parentesi, poichè esse non contengono x quando le operazioni indicate sono completamente effettuate.

Se $f(u) = u$, abbiamo

$$\psi^{-1}(x) = a + x\left[\frac{x-a}{\psi(x)}\right] + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+\frac{x^3}{\underline{|3}}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{(x-a)^3}{\{\psi(x)\}^3}\right] + \text{etc.}$$

e se $a=0$, così che $\psi(x)$ svanisca con x,

$$\psi^{-1}(x)=x\left[\frac{x}{\psi(x)}\right]+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{\{\psi(x)\}^2}\right]$$
$$+\frac{x^3}{\lfloor 3}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{x^3}{\{\psi(x)\}^3}\right]+\text{etc.}$$

ESEMPII.

1. Dato $y=z+xe^y$, sviluppare y secondo le potenze di x.

Quì
$$\varphi(y)=e^y,$$
$$f(y)=y;$$

onde
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}\,\right]^n f'(z)\right\}=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^{nz}=n^{n-1}e^{nz}.$$

Quindi
$$y=z+xe^z+\frac{x^2}{1.2}2e^{2z}+\frac{x^3}{\lfloor 3}3^2e^{3z}+\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n}n^{n-1}e^{nz}+\text{etc.}$$

2. Dato $y=z+x\dfrac{y^2-1}{2}$, sviluppare y secondo le potenze di x.

Quì
$$\varphi(y)=\frac{y^2-1}{2},$$
$$f(y)=y;$$

onde
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}\,\right]^n f'(z)\right\}=\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n.$$

Quindi
$$y=z+x\frac{1}{2}(z^2-1)+\frac{x^2}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{2^2}\frac{d}{dz}(z^2-1)^2+\ldots$$
$$+\frac{x^n}{\lfloor n}\cdot\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n+\text{etc.}$$

3. Dato $xy-\log y=0$, sviluppare y secondo le potenze di x. Dall'equazione data
$$y=e^{xy};$$
onde
$$yx=xe^{xy},$$
o sia
$$y'=xe^{y'}.$$

Se dunque poniamo $z=0$ nel risultato del primo Esempio, si deduce

$$y'=x+x^2+\frac{x^3}{\lfloor 2}3+\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n-1}n^{n-2}+\text{etc.},$$

si riponga yx per y' e si divida per x; allora

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} 3 + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} n^{n-2} + \text{etc.}$$

4. Se $y = \frac{x}{1 + \sqrt{(1-x^2)}}$, sviluppare y^n secondo le potenze ascendenti di x.

Poichè
$$y = \frac{x}{1 + \sqrt{(1-x^2)}},$$
abbiamo
$$y\sqrt{(1-x^2)} = x - y;$$
onde
$$y^2(1-x^2) = x^2 - 2xy + y^2,$$
ed
$$y = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2} x.$$

Possiamo dunque porre
$$y = z + \frac{y^2}{2} x,$$
sicchè
$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2},$$
$$f(y) = y^n.$$

Con ciò $y^n = z^n + x.\frac{n.z^{n+1}}{2} + \ldots + \frac{x^r}{\lfloor r} \frac{n}{2^r} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}(z^{2r+n-1}) + \text{etc.}$,

e *dopo* che le differenziazioni sono eseguite, dobbiamo porre $\frac{x}{2}$ per z.

5. Se $x = ye^y$, sviluppare $\operatorname{sen}(\alpha + y)$ secondo le potenze di x. Abbiamo
$$y = xe^{-y}.$$
Si supponga allora
$$y = z + xe^{-y},$$
sicchè
$$\varphi(y) = e^{-y},$$
$$f(y) = \operatorname{sen}(\alpha + y).$$

Il termine generale dato dal Teorema di Lagrange è
$$\frac{x^n}{\lfloor n} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ e^{-nz} \cos(\alpha + z) \},$$

il quale diviene

$$\frac{x^n}{\lfloor n}(-1)^{n-1}(1+n^2)^{\frac{n-1}{2}}e^{-nz}\cos\{\alpha+z-(n-1)\varphi\},$$

in cui $\cot\varphi=n$, con un procedimento simile a quello nell'Art. 81.

Ponendo $z=0$ in questo, abbiamo per lo sviluppo cercato

$$\operatorname{sen}(\alpha+y)=\operatorname{sen}\alpha+x\cos\alpha+\dots$$

$$+\frac{x^n}{\lfloor n}(-1)^{n-1}(1+n^2)^{\frac{n-1}{2}}\cos\{\alpha-(n-1)\cot^{-1}n\}+\text{etc.}$$

6. Dato $a-y+x\log y=0$, trovare $\operatorname{sen} y$ secondo le potenze di x.

7. Dato $y=z+xy^p e^{qy}$, sviluppare $y^m e^{ny}$ secondo le potenze di x.

8. Dato $y=z+x\operatorname{sen} y$, sviluppare $\operatorname{sen} y$ e $\operatorname{sen} 2y$ secondo le potenze di x.

9. Dato $y=\log(z+x\cos y)$, sviluppare e^y secondo le potenze di x.

10. Dall'equazione

$$xy^4+2xy^3+3xy^2+2y+1=0,$$

determinare y secondo le potenze ascendenti di x.

Risultato. $y=-\frac{1}{2}-\frac{9}{32}x-\frac{9}{32}x^2-\frac{1395}{4096}x^3$ etc.

11. Se $y=e^{\frac{\pi}{4}+x\operatorname{sen}\log y}$, trovare i primi quattro termini dello sviluppo di $\cos\log y$ secondo le potenze di x.

Risultato. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{x}{2}-\frac{3x^2}{4\sqrt{2}}-\frac{x^3}{3}.$

12. Se $y^3+my^2+ny=x$, mostrare che un valore di y è

$$\frac{x}{n}-\frac{m}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{2m^2-n}{n^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\frac{5m^3-5mn}{n^3}\left(\frac{x}{n}\right)^4+\dots$$

CAPITOLO X.

VALORI LIMITI DELLE FUNZIONI CHE PRENDONO UNA FORMA INDETERMINATA.

144. Nell'equazione, limite di $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$ quando θ diminuisce indefinitamente, abbiamo un esempio di una frazione che si avvicina ad un limite finito quando il numeratore ed il denominatore tendono entrambi al limite zero. L'oggetto di questo capitolo è di trovare il limite di una frazione qualunque di cui il numeratore ed il denominatore svaniscono ultimamente, ed anche il valore limite di alcune altre *forme indeterminate*.

145. Forma $\frac{0}{0}$.

Si supponga $$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

una frazione tale che il numeratore ed il denominatore svaniscano quando $x=a$; si cerca di trovare il limite verso il quale tende la frazione precedente allorchè x si avvicina al limite a.

Abbiamo dimostrato nell'Art. 95 che

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=h\varphi'(a+\theta h),$$

$$\psi(a+h)-\psi(a)=h\psi'(a+\theta_1 h).$$

Se dunque $\varphi(a)=0$ e $\psi(a)=0$, abbiamo, con la divisione,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta_1 h)}.$$

Si diminuisca h indefinitamente; allora

il limite quando $x=a$ di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

146. Si supponga che non solamente

$$\varphi(a)=0, \text{ e } \psi(a)=0,$$

ma anche $\varphi'(a)=0,\ \varphi''(a)=0,\ \ldots \varphi^n(a)=0,$

e $\psi'(a)=0,\ \psi''(a)=0,\ \ldots \psi^n(a)=0.$

Per l'Art. 92,

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)-h\varphi'(a)\ldots-\frac{h^n}{\underline{|n}}\varphi^n(a)=\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

$$\psi(a+h)-\psi(a)-h\psi'(a)\ldots-\frac{h^n}{\underline{|n}}\psi^n(a)=\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}\psi^{n+1}(a+\theta_1 h).$$

Quindi, con la divisione, abbiamo

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi^{n+1}(a+\theta h)}{\psi^{n+1}(a+\theta_1 h)}.$$

Si diminuisca h indefinitamente, ed abbiamo

$$\text{il limite per } x=a \text{ di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ è } \frac{\varphi^{n+1}(a)}{\psi^{n+1}(a)}.$$

147. Nell'Art. 145, se

$$\psi'(a)=0,$$

e $\varphi'(a)=$ ad una quantità finita,

si ha

$$\text{il limite per } x=a \text{ di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ è l'infinito;}$$

se $\varphi'(a)=0,$

e $\psi'(a)=$ ad una quantità finita,

$$\text{il limite per } x=a \text{ di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ è zero.}$$

Nello stesso modo, possiamo mostrare che se il primo dei coefficienti differenziali $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., che non svanisce, è di ordine *inferiore* del primo che non svanisce nella serie $\psi'(a)$, $\psi''(a)$, etc., il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ per $x=a$ è l'infinito; se di ordine *superiore* il limite è zero.

Questi risultati possono anche ottenersi senza l'uso del Teorema di Taylor.

Se $\varphi(a)=0$ e $\psi(a)=0$, abbiamo

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)}=\frac{\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}}{\dfrac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}}.$$

Si diminuisca ora h indefinitamente, e verrà

$$\text{il limite per } x=a \text{ di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ è } \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Se $\varphi'(a)=0$ e $\psi'(a)=0$, abbiamo nello stesso modo

$$\text{il limite per } x=a \text{ di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \text{ è } \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Quindi, il limite per $x=a$ di $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è $\dfrac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$.

Questo procedimento può essere esteso, dando lo stesso risultato dell'Art. 146.

148. Forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ funzioni che diventano entrambe infinite quando $x=a$; si cerca il limite della frazione $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\dfrac{1}{\psi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)}},$$

e la frazione a dritta prende la forma $\dfrac{0}{0}$ quando $x=a$; quindi, per la regola precedente il suo limite è

$$\frac{-\dfrac{\psi'(a)}{\{\psi(a)\}^2}}{-\dfrac{\varphi'(a)}{\{\varphi(a)\}^2}} \quad \text{o} \quad \left\{\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\}^2\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Quindi $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\left\{\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\}^2\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)};$$

onde $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

149. Dall'ultimo articolo apparirebbe che il limite di una frazione che tende alla forma $\frac{\infty}{\infty}$, potesse trovarsi considerando il rapporto del coefficiente differenziale del numeratore al coefficiente differenziale del denominatore. Ma, per l'Art. 113, quando per un *valore finito* della variabile una funzione diviene infinita, accade lo stesso pel suo coefficiente differenziale. Quindi se

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \text{ prende la forma } \frac{\infty}{\infty},$$

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \text{ prende la stessa forma},$$

e così il risultato dell'Art. 148 apparirebbe non essere di alcun pratico valore. *Può*, però, accadere che il limite della frazione $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ sia più facile a trovarsi che quello di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Per esempio $$\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

per $x=0$, prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Quì $$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x,$$

il limite del quale è 0.

Quindi, il limite di $\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$, per $x=0$, è 0.

150. La dimostrazione nell' Art. 148, che è quella data ordinariamente, è soddisfacente solamente nel caso in cui $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *realmente* ha un limite finito. Poichè noi dividiamo i due lati di un' equazione per questo limite nel che tacitamente si suppone che il limite non sia nè zero nè l' infinito.

Ma la dimostrazione può essere completata nel seguente modo:

Si supponga il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ realmente zero; allora il limite di $\frac{\psi(x)+\varphi(x)}{\psi(x)}$ è realmente finito, cioè, l' unità. Quindi, è stato dimostrato che

$$\text{il limite di } \frac{\psi(x)+\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ per } x=a \text{ è } \frac{\psi'(a)+\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

vale a dire $\quad 1 + \text{limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)};$

quindi $\quad \text{il limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$

Se il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è realmente l' infinito, allora il limite di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ è realmente zero, e quindi, come si è detto pocanzi, il limite di $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ sarà zero. Quindi, il limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ sarà l' infinito.

Combinando quindi questo articolo con l' Art. 148, possiamo asserire che se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ diventano entrambi infiniti per $x=a$, il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ sarà lo stesso che il limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

151. I due articoli 148 e 150 possono essere rimpiazzati dal modo seguente di esibire la proposizione.

Si supponga $\quad \varphi(a)=\infty, \text{ e } \psi(a)=\infty.$

Allora $\quad \frac{1}{\varphi(a)}=0 \text{ ed } \frac{1}{\psi(a)}=0;$

ora $$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\dfrac{1}{\psi(a+h)}}{\dfrac{1}{\varphi(a+h)}}=\frac{\dfrac{\psi'(a+\theta h)}{\{\psi(a+\theta h)\}^2}}{\dfrac{\varphi'(a+\theta h)}{\{\varphi(a+\theta h)\}^2}},\ \text{(Art. 106)};$$

quindi $$\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}=\frac{\varphi(a+\theta h)}{\psi(a+\theta h)}\cdot\frac{\dfrac{\varphi(a+\theta h)}{\psi(a+\theta h)}}{\dfrac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}}.$$

Se $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ha un limite finito quando $x=a$, il limite del secondo fattore nel secondo membro dell'equazione è l' unità. Quindi

$$\text{limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\text{limite di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Ma se $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ tende a 0 o all'∞ quando x si avvicina ad a, esso in generale finirà coll'avvicinarsi al limite in modo tale che il secondo fattore sarà nel primo caso minore dell'unità, e nel secondo maggiore. Quindi, $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ diventa zero o l'infinito nello stesso tempo che $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

152. Nelle regole precedenti per trovare il limite di una funzione che prende la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ quando $x=a$, non abbiamo fatto alcuna supposizione circa la grandezza di a. Quindi le regole sono spesso applicate al caso nel quale a è infinita. Ma per una diretta dimostrazione di questo caso possiamo procedere nel seguente modo

Supponiamo che si cerchi il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, per $x=\infty$, conoscendosi che allora o $\varphi(x)=0$ e $\psi(x)=0$, o pure $\varphi(x)=\infty$, e $\psi(x)=\infty$.

Si ponga $x=\frac{1}{y}$, allora

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Ora quando y tende a zero, abbiamo, per le regole precedenti,

$$\text{limite di } \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)} = \text{limite di } \frac{\frac{1}{y^2}\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}\psi'\left(\frac{1}{y}\right)}$$

$$= \text{limite di } \frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \text{limite di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

153. Es. Si cerca il valore di

$$\frac{\frac{1}{x}}{\cot x} \text{ quando } x=0.$$

Differenziando il numeratore ed il denominatore, troviamo che il limite cercato è lo stesso che quello di

$$\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x}} \text{ o di } \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}, \text{ che è l' unità.}$$

Lo stesso risultato può ottenersi scrivendo la frazione proposta sotto la forma $\frac{0}{0}$; così

$$\frac{\frac{1}{x}}{\cot x} = \frac{\tan x}{x} \text{ o } \frac{1}{\cos x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Il limite di $\frac{1}{\cos x}$ è 1 e quello di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è 1; quindi quello della frazione proposta è 1.

Come un altro esempio possiamo trovare il limite di $\frac{x^n}{e^x}$ quando x è infinito, n essendo positivo.

$$\text{Limite di } \frac{x^n}{e^x} = \text{limite di } \frac{nx^{n-1}}{e^x}$$

$$= \text{limite di } \frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{e^x} \text{ etc.}$$

Procedendo così, arriveremo, se n è un intero positivo, alla frazione $\frac{\lfloor n}{e^x}$, il limite della quale è 0. Se n è una frazione, arriveremo ad una frazione che ha e^x al denominatore ed una potenza *negativa* di x al numeratore, la quale anche ha 0 per suo limite.

Quindi il limite di $\frac{x^n}{e^x}$, per $x = \infty$, è zero.

154. Un'osservazione deve essere fatta ad oggetto di prevenire un falso concetto di alcuni dei risultati di questo capitolo. Supponiamo che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ svaniscano entrambi per $x=a$, e che $\varphi'(a)=0$, mentre $\psi'(a)$ è finito. Diciamo allora, che quando $x=a$,

$$\text{limite di } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \text{limite di } \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

intendendo che ciascun lato dell'equazione svanisce. *Non segue da ciò necessariamente che*

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \div \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \text{ ha l'unità per suo limite.}$$

Es.
$$\varphi(x)=x^2, \qquad \psi(x)=\operatorname{sen} x,$$
$$\varphi'(x)=2x, \qquad \psi(x)=\cos x.$$

Quando x si avvicina al limite zero, possiamo inferirne che, poichè $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ si avvicina a zero, accade lo stesso per $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Ma evidentemente non è vero che il limite di

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} x} \div \frac{2x}{\cos x} \text{ o di } \frac{x^2 \cos x}{2x \operatorname{sen} x} \text{ sia l'unità};$$

il limite è infatti $\frac{1}{2}$.

155. Deve osservarsi che vi sono esempii i quali *possono* risolversi per mezzo del Calcolo Differenziale, ma che possono anche essere risoluti, ed alle volte più semplicemente, per mezzo delle ordinarie trasformazioni algebriche. Per esempio

$$\frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{4}}}$$

quando $x=a$ prende la forma $\frac{0}{0}$. Si ponga $x=a+h$, e la frazione diviene

$$\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2a+h)^{\frac{1}{4}}} \text{ o } \frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2a+h)^{\frac{1}{4}}};$$

ed il limite, per $h=0$, è 0.

In secondo luogo, supponiamo che si debba trovare il limite di

$$\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

quando x si avvicina all'unità; si ponga $x=1+h$, e la frazione diviene

$$\frac{\sqrt{(h+1)}-1+\sqrt{h}}{\sqrt{(h^2+2h)}}.$$

Si moltiplichino il numeratore ed il denominatore per

$$\sqrt{(h+1)}+1-\sqrt{h},$$

ed otteniamo

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{(h+2)}\,\{\sqrt{(h+1)}+1-\sqrt{h}\}} \text{ o } \frac{2}{\sqrt{(h+2)}\,\{\sqrt{(h+1)}+1-\sqrt{h}\}},$$

ed il limite di questo, quando $h=0$, è $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

156. Vi sono casi nei quali non solamente $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ svaniscono, ma tutti i loro coefficienti differenziali, ed in cui, per conseguenza, non possiamo determinare il limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Infatti si supponga

$$\varphi(x)=a^{-\frac{1}{x^n}},$$

a ed n essendo numeri positivi, ed a maggiore dell' unità: abbiamo

$$\varphi'(x)=\frac{n\log a.a^{-\frac{1}{x^n}}}{x^{n+1}},$$

$$\varphi''(x)=n\log a.a^{-\frac{1}{x^n}}\left\{\frac{n\log a}{x^{2(n+1)}}-\frac{n+1}{x^{n+2}}\right\},$$

etc.

Si ponga $\frac{1}{x}=z$,

allora $$\varphi'(x)=\frac{n\log a . z^{n+1}}{a^{z^n}},$$

$$\varphi''(x)=\frac{n\log a\,\{n\log a . z^{2(n+1)}-(n+1)\,z^{n+2}\}}{a^{z^n}};$$

ed il valore $x=0$ corrisponde a $z=\infty$. Ma è facile vedere che ogni espressione della forma

$$\frac{z^m}{a^{z^n}},$$

in cui a, m, n, sono numeri positivi, ed a maggiore dell'unità, è zero quando z è infinito. Poichè se applichiamo a questo esempio la regola per trovare il valore di una frazione che prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$ e differenziamo r volte successivamente, r essendo il numero intero prossimamente maggiore di m, abbiamo

$$\text{limite di }\frac{z^m}{a^{z^n}}=\text{limite di }\frac{k}{\psi(z)},$$

in cui k è una costante, e $\psi(z)$ una funzione di z che è infinita quando z è infinito. Per conseguenza, tutt'i coefficienti differenziali di $\varphi(x)$ svaniscono per $x=0$.

Se dunque abbiamo

$$\varphi(x)=a^{-\frac{1}{x^n}},$$

$$\psi(x)=b^{-\frac{1}{x^{n'}}},$$

in cui b è un numero positivo maggiore dell'unità, ed n' anche positivo, i coefficienti differenziali di tutti gli ordini dei due termini della frazione svaniranno per $x=0$, ed il limite non può essere trovato con questo metodo.

Nel caso di $n'=n$, la frazione diviene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{x^n}};$$

questa, quando $x=0$, sarà 0 o ∞, secondo che a è maggiore o minore di b.

157. La frazione

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=0$. Si ponga $x=\frac{1}{y}$ ed abbiamo $\frac{y}{e^y}$, di cui il limite, per y infinito, è 0, per l'Art. 153;

$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, o $\frac{1}{x}\times e^{\frac{1}{x}}$ è naturalmente infinito per $x=0$.

Quindi, $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ è 0 o ∞ quando x si avvicina al limite 0, secondo che si suppone x negativo o positivo.

158. Forma $0\times\infty$. Supponiamo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, tali che $\varphi(a)=0$, e $\psi(a)=\infty$; si cerca il limite di $\varphi(x)\,\psi(x)$ quando x si avvicina ad a;

$$\varphi(x)\,\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}},$$

e siccome la frazione a dritta prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, il suo valore limite può essere trovato con le regole già date.

Es. Sia
$$\varphi(x)=\log\left(2-\frac{x}{a}\right),$$
$$\psi(x)=\tan\frac{\pi x}{2a}.$$

Quì, $\varphi(x)\,\psi(x)$ prende la forma $0\times\infty$ quando $x=a$.

Allora
$$\log\left(2-\frac{x}{a}\right)\tan\frac{\pi x}{2a}$$
$$=\frac{\log\left(2-\dfrac{x}{a}\right)}{\cot\dfrac{\pi x}{2a}}.$$

Il limite di questa espressione quando $x=a$, si trova ponendo $x=a$ in

$$\frac{-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2-\frac{x}{a}}}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2a}}}$$

che dà

$$\frac{2}{\pi}.$$

Ancora,

$$x^m(\log x)^n,$$

in cui m ed n sono positivi, prende la forma $0\times\infty$, quando $x=0$.

Quì $\dfrac{x^m}{\dfrac{1}{(\log x)^n}}$ prende la forma $\dfrac{0}{0}$

quando $x=0$; il suo limite è lo stesso che quello di

$$\frac{mx^{m-1}}{-\dfrac{n}{x(\log x)^{n+1}}};$$

che non conduce allo scopo.

Se poniamo $x=e^{-y}$, allora $x^m(\log x)^n$ diviene

$$(-1)^n\frac{y^n}{e^{my}};$$

di cui il valore, quando y è ∞, è 0. Art. 153.

Si noti accuratamente il risultato di questo caso, incontrandosi spesso nelle ricerche matematiche.

159. Forme 0^0, ∞^0, 1^∞.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x, tali che quando $x=a$, l'espressione

$$\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$$

prenda una delle forme 0^0, ∞^0, 1^∞; si cerca il valore limite di questa espressione. Poichè

$$\varphi(x)=e^{\log\varphi(x)},$$

abbiamo

$$\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}=e^{\psi(x)\log\varphi(x)}.$$

Ora $\psi(x)\log\varphi(x)$ in ciascuno dei casi proposti prende la forma $0\times\infty$, ed il suo valore limite può essere trovato per l'Art. 158, e così il valore di $\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$ sarà conosciuto.

Es. $\quad x^x$, per $x=0$, prende la forma 0^0;

$$x^x = e^{x\log x};$$

ed $x\log x=0$, quando $x=0$, (Art. 158);

quindi, $\quad x^x=1$, quando $x=0$.

Ancora, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$ prende la forma ∞^0 per $x=0$; si ha

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = e^{-\operatorname{sen} x\log x}.$$

Ora, $\quad \operatorname{sen} x\log x = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.\,x\log x;$

quando $x=0$, abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,$$

$$x\log x=0,\ \text{(Art. 158)},$$

onde $\quad \operatorname{sen} x\log x=0$, quando $x=0$,

quindi, $\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}=1$, quando $x=0$.

Quando $x=a$, l'espressione

$$\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$$

prende la forma 1^∞.

L'espressione precedente $= e^{\tan\frac{\pi x}{2a}\log\left(2-\frac{x}{a}\right)}$

$$= e^{\frac{2}{\pi}} \text{ quando } x=a,\ \text{(Art. 158)}.$$

160. Forma $\infty-\infty$.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni di x che diventino infinite quando $x=a$, allora

$$\varphi(x)-\psi(x)$$

prende la forma $\infty-\infty$; si cerca il valore dell'espressione.

Si ponga $\qquad y = \varphi(x) - \psi(x),$

allora
$$e^y = e^{\varphi(x)-\psi(x)}$$
$$= \frac{e^{-\psi(x)}}{e^{-\varphi(x)}}.$$

Così, per $x = a$, y prende la forma $\frac{0}{0}$ ed il suo valore può essere ricercato con l'Art. 145.

O pure possiamo procedere come segue,
$$y = \varphi(x)\left\{1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right\};$$
quindi y è infinito a meno che il limite di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ non sia l'unità; se il limite di $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ è l'unità, poichè
$$y = \frac{1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$
esso prende la forma $\frac{0}{0}$.

Es. Si supponga $y = \tan x - \sec x$;
allora y prende la forma $\infty - \infty$ quando $x = \frac{\pi}{2}$.

Inoltre
$$y = \tan x\left(1 - \frac{\sec x}{\tan x}\right)$$
$$= \frac{1 - \operatorname{cosec} x}{\cot x};$$
questo prende la forma $\frac{0}{0}$, ed il suo valore limite è
$$\frac{\operatorname{cosec} x \cot x}{-\operatorname{cosec}^2 x} \text{ o } 0.$$

161. Il limite di $\frac{F(x)}{x}$ quando $x = \infty$, supponendo $F(x)$ essere allora infinita, sarà lo stesso di quello di $\frac{F'(x)}{1}$, o $F'(x)$, (Art. 151).

Ma, $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x+\theta h).$$

Se x si fa crescere indefinitamente il limite del secondo membro dell'equazione è $F'(x)$.

Quindi,

$$\text{limite per } x=\infty \text{ di } \frac{F(x)}{x}=\text{limite per } x=\infty \text{ di } \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Se per semplicità si pone $h=1$, abbiamo

$$\text{limite di } \frac{F(x)}{x}=\text{limite di } \{F(x+1)-F(x)\}.$$

162. Il limite di $\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}$ quando x è infinito, è lo stesso che quello di

$$e^{\frac{\log F(x)}{x}}.$$

Ma, per l'Art. 161, supponendo $F(x)$ diventare infinito con x, il limite di $\frac{\log F(x)}{x}$ è lo stesso che il limite di

$$\log F(x+1)-\log F(x),$$

o di $$\log\frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Quindi il limite, per $x=\infty$, di $\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}$

$$=\text{al limite di } \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Supponiamo, per esempio, che si cerchi il limite quando x è infinito di $\left\{\frac{x^x}{\lfloor x}\right\}^{\frac{1}{x}}$.

Per il teorema or ora dimostrato il limite richiesto

$$=\text{limite di } \frac{(x+1)^{x+1}}{\lfloor x+1}\,\frac{\lfloor x}{x^x}$$

$$=\text{limite di } \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

$$=\text{limite di } \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$=e \text{ per l'Art. 16.}$$

163. Alcune poche osservazioni si possono fare sulle frazioni indeterminate che racchiudono più di una variabile.

Una funzione di due variabili può prendere la forma $\frac{0}{0}$, 1° quando una delle variabili rimane indeterminata e l'altra ha un valore particolare, 2° quando tutte e due ricevono valori particolari.

Come un esempio del primo caso, si supponga

$$z = \frac{c(x^2 - a^2)}{y(x-a) + (x-a)^2};$$

se si pone $x = a$ abbiamo $z = \frac{0}{0}$, qualunque sia y. Ma togliendo il fattore $x - a$ dal numeratore e dal denominatore di z, si ha

$$z = \frac{c(x+a)}{y + x - a}.$$

Quindi, per $x = a$, abbiamo

$$z = \frac{2ca}{y}.$$

Questo caso è molto semplice, e sempre che s' incontra l' applicazione delle regole precedenti darà il valore limite verso il quale z si avvicina a misura che x si avvicina al suo limite.

Come un esempio del secondo caso, si supponga

$$z = \frac{c(x-a)}{y-b}.$$

Questa frazione prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=a$ ed $y=b$, ed è realmente indeterminata. Infatti supposto $y - b = m(x-a)$, allora

$$z = \frac{c}{m}.$$

Quindi il valore di z è indeterminato, poichè x ed y essendo indipendenti m può avere qualunque valore ci piace.

164. Può accadere che i valori che prende una tale funzione, benchè infiniti di numero, siano confinati tra certi limiti. Per esempio si supponga

$$z = \frac{c(x-a)(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Si prenda $$y - b = m(x-a);$$

quindi $$z = \frac{cm}{m^2+1}$$

$$= \frac{c}{m + \frac{1}{m}}.$$

Quì il più grande valore di z si ha per $m=1$, e z è sempre compreso tra $\frac{c}{2}$ e $-\frac{c}{2}$.

165. Diamo ancora due altri esempii: 1°, sia

$$z = \frac{(x-a)^m + c(y-b)^n}{(x-a)^p + c(y-b)^q};$$

questo prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x=a$ ed $y=b$.

Si ponga $x - a = h$ ed $y - b = k$;

quindi $$z = \frac{h^m + ck^n}{h^p + ck^q}.$$

Se ora si prende $k = Ah^\alpha$, abbiamo

$$z = \frac{h^m + cA^n h^{\alpha n}}{h^p + cA^q h^{\alpha q}},$$

e, secondo le diverse ipotesi che facciamo rispetto ad α, m, p, etc., otterremo per z un valore finito, infinito, o zero,

2.° Sia $$z = \frac{(x-y)a^n - (a-y)x^n + (a-x)y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)}.$$

Se $x = y = a$, questo prende la forma $\frac{0}{0}$. Si pongano $a+h$ ed $a+k$ per x ed y rispettivamente; avremo

$$z = \frac{(h-k)a^n + k(a+h)^n - h(a+k)^n}{(h-k)kh}.$$

Se sviluppiamo $(a+h)^n$ ed $(a+k)^n$, e facciamo alcune riduzioni, otteniamo

$$z=\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(h+k)+\text{etc.}$$

Quindi, ponendo h e k eguali a zero, abbiamo

$$z=\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}.$$

Questo risultato può anche trovarsi esaminando il limite verso il quale tende z quando x si avvicina ad y, e quindi il limite verso cui tende questo risultato quando y si avvicina ad a.

L'articolo seguente deve essere omesso sino a che lo studente abbia letto il Cap. XI.

166. Generalmente, se $z=\dfrac{f(x,y)}{F(x,y)}$, ed il numeratore e denominatore di z svaniscono per certi valori di x ed y, il valore di z è realmente indeterminato, ed infatti dipende dalla relazione arbitraria che a nostra scelta stabiliamo tra x ed y. Supponiamo che $x=a$, $y=b$ siano i valori che fanno prendere a z la forma $\frac{0}{0}$; e poniamo $y=\psi(x)$, in cui $\psi(x)$ è una funzione qualunque di cui il valore è b quando $x=a$.

Con ciò il numeratore ed il denominatore di z diventano funzioni della sola x; e per le regole precedenti per determinare il valore di una frazione che prende la forma $\frac{0}{0}$, abbiamo

$$z=\frac{\left(\dfrac{df}{dx}\right)+\left(\dfrac{df}{dy}\right)\psi'(x)}{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)\psi'(x)},$$

x essendo messo $=a$ ed $y=b$ dopo eseguite le differenziazioni. Questo valore è indeterminato, poichè $\psi'(x)$ è una funzione del tutto arbitraria.

Ma se $\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ e $\left(\dfrac{dF}{dx}\right)$ svaniscono,

o se $\left(\dfrac{df}{dy}\right)$ e $\left(\dfrac{dF}{dy}\right)$ svaniscono,

allora il valore di z diviene determinato:

Il valore di z è anche determinato se

$$\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Se $\left(\frac{df}{dx}\right) = 0, \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \left(\frac{df}{dy}\right) = 0, \left(\frac{dF}{dy}\right) = 0,$

allora procedendo ad una seconda differenziazione abbiamo

$$z = \frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)\psi'(x) + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\overline{\psi'(x)}|^2}{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)\psi'(x) + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\overline{\psi'(x)}|^2}, \text{ (Art. 176)},$$

che è generalmente indeterminato, poichè $\psi'(x)$ è una funzione arbitraria.

Es. 1. $z = \frac{\log x + \log y}{x + 2y - 3}, \quad a = 1, \quad b = 1;$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{x} = 1, \quad \text{per } x = 1,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1}{y} = 1, \quad \text{per } y = 1,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 1, \quad \left(\frac{dF}{dy}\right) = 2;$$

quindi $$z = \frac{1 + \psi'(x)}{1 + 2\psi'(x)},$$

che è realmente indeterminato, e può prendere ogni valore tra $+\infty$ e $-\infty$.

Es. 2. In secondo luogo, si supponga

$$z = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - 1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - y + 1}.$$

Quì z prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x = 1$ ed $y = 1$.

Inoltre allora $\left(\frac{df}{dx}\right)=0$ e $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$.

Quindi z ha un valore determinato, cioè, $-\frac{3}{2}$.

Es. 3. Si supponga $z=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

Quì quando $x=0$ ed $y=0$, abbiamo

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{df}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{dF}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=0,$$

e
$$z=\frac{1+2\psi'(x)+\overline{\psi'(x)}|^2}{1+\overline{\psi'(x)}|^2}=\frac{\{1+\psi'(x)\}^2}{1+\overline{\psi'(x)}|^2}$$

$$=\frac{(1+u)^2}{1+u^2} \text{ supponiamo.}$$

Quì il valore di z è indeterminato; ma si troverà che è confinato tra i limiti 0 e 2, come può mostrarsi scrivendo l'ultima frazione sotto la forma $1+\frac{2u}{1+u^2}$, ricordandosi che $\frac{2u}{1+u^2}$ non è mai maggiore dell'unità.

167. Nel risolvere gli esempî su questo capitolo vi sono varie considerazioni che abbrevieranno il lavoro delle operazioni, come si vedrà nel seguente caso.

Trovare il valore di $\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$ quando $x=0$.

L'espressione proposta prende la forma $\frac{0}{0}$ per $x=0$. Se procediamo nel modo ordinario, troveremo dopo alcune riduzioni che il coefficiente differenziale del numeratore è

$$\frac{2x+4x^3}{1+x^2+x^4}$$

e che il coefficiente differenziale del denominatore è

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\operatorname{sen} x.$$

Così otteniamo di nuovo la forma $\frac{0}{0}$, e possiamo continuare nella via ordinaria il processo della valutazione. Possiamo però ottenere il risultato più facilmente ponendo la frazione che dobbiamo ora valutare sotto la forma:

$$\frac{2(1+2x^2)\cos^2 x}{(1+x^2+x^4)(1+\cos^2 x)} \times \frac{x}{\operatorname{sen} x}.$$

Quì il primo fattore non è indeterminato quando $x=0$; il suo valore è allora l'unità. Il secondo fattore prende la forma $\frac{0}{0}$, ed il suo valore limite si conosce essere l'unità. Quindi l'unità è il richiesto valore limite dell'espressione originale.

O pure l'espressione originale può essere valutata nel seguente modo. Essa si può mettere sotto la forma

$$\frac{\cos x \log(1+x^2+x^4)}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ora $\cos x = 1$ quando $x=0$; non occorre quindi fare attenzione a questo fattore, ma considerare quello che dobbiamo valutare

$$\frac{\log(1+x^2+x^4)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

quando $x=0$; e possiamo procedere nel modo solito differenziando il numeratore ed il denominatore. O se ci è permesso di usare i risultati degli sviluppi delle funzioni abbiamo

$$\frac{\log(1+x^2+x^4)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{x^2+x^4-\frac{1}{2}(x^2+x^4)^2+\frac{1}{3}(x^2+x^4)^3-\ldots}{\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)^2}$$

$$= \frac{x^2+\frac{1}{2}x^4-\ldots}{x^2-\frac{1}{3}x^4+\ldots}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}x^2-\ldots}{1-\frac{1}{3}x^2+\ldots}$$

$$= 1 \text{ quando } x=0.$$

ESEMPII.

Trovare i limiti delle seguenti funzioni.

1. $\dfrac{\log x}{x-1}$, quando $x=1$. *Ris.* 1.

2. $\dfrac{x-1}{x^n-1}$, quando $x=1$. *Ris.* $\dfrac{1}{n}$.

3. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$, $x=0$. *Ris.* 2.

4. $\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$, $x=0$. *Ris.* 2.

5. $\dfrac{x-\operatorname{sen}^{-1} x}{(\operatorname{sen} x)^3}$, $x=0$. *Ris.* $-\dfrac{1}{6}$.

6. $\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $x=0$. *Ris.* $\log\dfrac{a}{b}$.

7. $\dfrac{\tan x-x}{x-\operatorname{sen} x}$, $x=0$. *Ris.* 2.

8. $\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$, $x=0$. *Ris.* $\dfrac{1}{6}$.

9. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x}$ $x=0$. *Ris.* $-\dfrac{3}{2}$.

10. $\dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{(2x-x^2)}}$, $x=1$. *Ris.* -1.

11. $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{x}{\log x}$, $x=1$. *Ris.* -1.

12. $\dfrac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\operatorname{sen} x}$ $x=0$. *Ris.* 2.

13. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x+2\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x}{\cos x-\cos^2 x}$, $x=0$. *Ris.* 4.

14. $x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x, \quad x = \frac{\pi}{2}. \quad$ *Ris.* $-1.$

15. $\frac{(x-2)e^x + x + 2}{(e^x - 1)^3}, \quad x = 0. \quad$ *Ris.* $\frac{1}{6}.$

16. $\frac{x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}, \quad x = 3. \quad$ *Ris.* $10.$

$x = -3. \quad$ *Ris.* $\frac{1}{10}.$

17. $\frac{x\sqrt{(3x - 2x^4)} - x\sqrt[3]{x}}{1 - x^{\frac{2}{3}}}, \quad x = 1. \quad$ *Ris.* $\frac{81}{20}.$

18. $\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1}, \quad x = 1. \quad$ *Ris.* $-\frac{3}{2}.$

19. $\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(x^2-1)}}, \quad x = 1. \quad$ *Ris.* $0.$

20. $\frac{m \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} m\theta}{\theta(\cos\theta - \cos m\theta)}, \quad \theta = 0. \quad$ *Ris.* $\frac{m}{3}.$

21. $\frac{\theta^2}{1 - \cos m\theta}, \quad \theta = 0. \quad$ *Ris.* $\frac{2}{m^2}.$

22. $\frac{\operatorname{sen}(\theta + h) - \operatorname{sen}(\theta - h)}{\cos(\theta + h) - \cos(\theta - h)}, \quad h = 0. \quad$ *Ris.* $-\cot\theta.$

23. $\frac{\tan nx - n \tan x}{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx}, \quad x = 0. \quad$ *Ris.* $2.$

24. $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)} + a - x}{\sqrt{\left(a^2 - \frac{x^3}{a}\right)} + \sqrt{(ax - x^2)}}, \quad x = a. \quad$ *Ris.* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}.$

25. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}, \quad x = a. \quad$ *Ris.* $\frac{1}{\sqrt{(2a)}}.$

26. $\sqrt{\left(\frac{2 + \cos 2x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} 2x + x \cos x}\right)} - \left(\frac{\pi - 2x}{2 \operatorname{sen} 2x}\right)^2, \quad x = \frac{\pi}{2}. \quad$ *Ris.* $-\frac{1}{4}.$

27. $2^x \operatorname{sen} \dfrac{a}{2^x}$, $x = \infty$. *Ris.* a.

28. $(a^{\frac{1}{x}} - 1)x$, $x = \infty$. *Ris.* $\log a$.

29. $\left(\dfrac{a}{x} + 1\right)^x$, $x = \infty$. *Ris.* e^a.

30. $\dfrac{m^x \operatorname{sen} nx - n^x \operatorname{sen} mx}{\tan nx - \tan mx}$, (1) $x = 0$. (2) $m = n$. *Ris.* 1.

Ris. $n^{x-1}(n \cos nx - \operatorname{sen} nx) \cos^2 nx$.

31. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, $x = 0$. *Ris.* 1.

32. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $x = 0$. *Ris.* 1.

33. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $x = 0$. *Ris.* $e^{\frac{1}{3}}$.

34. $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$, $x = 0$. *Ris.* ∞.

35. $(\cos mx)^{\frac{n}{x}}$, $x = 0$. *Ris.* 1.

36. $(\cos mx)^{\frac{n}{x^2}}$, $x = 0$. *Ris.* $e^{-\frac{nm^2}{2}}$.

37. $(\cos mx)^{\frac{n}{x^3}}$, $x = 0$. *Ris.* 0.

38. $\dfrac{x^3 (\cot x)^2 + \operatorname{sen} x}{x}$, $x = 0$. *Ris.* 2.

39. $\dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - 2x^2 (e^x + e^{-x})}{x^4}$, $x = 0$. *Ris.* $-\dfrac{2}{3}$.

40. $\dfrac{1 - \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1+x^2)}}$, $x = 0$. *Ris.* 1.

41. $(\operatorname{sen} x)^{\tan x}$, $x = \frac{\pi}{2}$. *Ris.* 1.

42. $\dfrac{\sqrt{(2)} - \operatorname{sen} x - \cos x}{\log \operatorname{sen} 2x}$, $x = \frac{\pi}{4}$. *Ris.* $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

43. $\sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \cot \left\{ \dfrac{\pi}{2} \sqrt{\left(\dfrac{a-x}{a+x} \right)} \right\}$, $x = a$. *Ris.* $\dfrac{4a}{\pi}$.

44. $(1 - x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$, $x = 1$. *Ris.* $\dfrac{2}{\pi}$.

45. $x^{\frac{1}{1-x}}$, $x = 1$. *Ris.* $\dfrac{1}{e}$.

46. $x^{x^{\pm a}}$, $x = 0$. *Ris.* col segno superiore 1, col segno inferiore 0.

47. $\dfrac{\sec \dfrac{\pi x}{2}}{\log (1 - x)}$, $x = 1$. *Ris.* ∞.

48. $(Ax^m + Bx^{m-1} \ldots + Mx + N)^{\frac{1}{x}}$, $x = \infty$. *Ris.* 1.

49. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \log \dfrac{2x + b + 2\sqrt{(ax + bx + x^2)}}{b + 2\sqrt{(ax)}}$, $x = 0$.

Ris. $\dfrac{2}{b} \{ \sqrt{(a + b)} - \sqrt{a} \}$.

50. $\sqrt{\left\{ \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{4x^2} \right\}} - \dfrac{1}{2x}$, $x = 0$. *Ris.* -1.

51. $\dfrac{\cos x\theta - \cos a\theta}{e^{-x^2\theta} - e^{-a^2\theta}}$, $x = a$. *Ris.* $\dfrac{\operatorname{sen} a\theta e^{a^2\theta}}{2a}$.

52. $\dfrac{e^x + \log \left(\dfrac{1-x}{e} \right)}{\tan x - x}$, $x = 0$. *Ris.* $-\dfrac{1}{2}$.

53. $\dfrac{e^x \operatorname{sen} x - e^a \{ \operatorname{sen} a + \sqrt{2}\, (x - a) \cos (a - \frac{1}{4}\pi) \}}{e^x - e^a (x + 1 - a)}$, $x = a$.

Ris. $2 \cos a$.

54. $\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$, $x = \infty$. *Ris.* $a_1 a_2 \ldots a_n$.

55. $\dfrac{(\theta + \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta)^4}{(3 + \cos\theta - 4\cos\frac{1}{2}\theta)^3}$, $\theta = 0$. *Ris.* $\dfrac{128}{81}$.

56. $\left\{\dfrac{\log x}{x}\right\}^{\frac{1}{x}}$, $x = \infty$. *Ris.* 1.

57. $\dfrac{(\log x)^{\frac{2}{3}} + (1 - x^2)^{\frac{3}{4}}}{\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}(x - 1)}$ $x = 1$. *Ris.* 1.

58. Dimostrare che quando x è infinito $\dfrac{a^{x^m}}{b^{x^n}}$ è infinito o zero, secondo che m è maggiore o minore di n; a e b essendo tutti e due maggiori dell' unità.

59. Mostrare che quando x è infinito

$$x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

60. Se $u\sqrt{(xc)} = \tan^{-1}\dfrac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}} + \log\left\{\dfrac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}} + \sqrt{\left(1 + \dfrac{a^2 x}{c}\right\}}\right.$, mostrare che quando $x = 0$, $u = \dfrac{2a}{c}$, e $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{a^3}{2c^2}$; e quando $x = \infty$, $u = 0$, e $\dfrac{du}{dx} = 0$.

CAPITOLO XI.

COEFFICIENTE DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE DI FUNZIONI E DELLE FUNZIONI IMPLICITE.

168. Si supponga u una funzione di y e z, ed y e z stesse funzioni di x, si cerca di trovare $\frac{du}{dx}$. Naturalmente ciò potrebbe ottenersi sostituendo in u per y e z i loro valori espressi in x, con la quale sostituzione u diviene una funzione esplicita di x, e $\frac{du}{dx}$ può essere trovato con i metodi precedenti. Ma è spesso conveniente di avere una regola che dia $\frac{du}{dx}$ senza richiedere la sostituzione per y e z. A questa regola ora procediamo.

169. Si supponga $\quad u = \varphi(y, z),$

in cui y e z sono tutte e due funzioni di x. Diventi x $x + \Delta x$, ed in conseguenza y, z, ed u, diventino rispettivamente $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, ed $u + \Delta u$. Allora

$$\begin{aligned}\Delta u &= \varphi(y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(y, z)\\ &= \varphi(y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(y, z + \Delta z) + \varphi(y, z + \Delta z) - \varphi(y, z);\end{aligned}$$

onde
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(y, z + \Delta z)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varphi(y, z + \Delta z) - \varphi(y, z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Ora Δx e per conseguenza Δy, Δz, e Δu, diminuiscano senza limite; allora

$$\text{il limite di } \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ è } \frac{du}{dx},$$

$$\text{il limite di } \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ è } \frac{dy}{dx},$$

$$\text{il limite di } \frac{\Delta z}{\Delta x} \text{ è } \frac{dz}{dx}.$$

Il limite di $\frac{\varphi(y, z+\Delta z)-\varphi(y,z)}{\Delta z}$ è il coefficiente differenziale di $\varphi(y,z)$ o u, preso nella supposizione che z sia la sola variabile; e può perciò essere dinotato con $\frac{du}{dz}$.

Il limite di $\frac{\varphi(y+\Delta y, z+\Delta z)-\varphi(y, z+\Delta z)}{\Delta y}$, se Δz non cangiasse, sarebbe il coefficiente differenziale di $\varphi(y, z+\Delta z)$ rispetto ad y. Ma siccome Δz diminuisce senza limite con Δy, il limite è il coefficiente differenziale di $\varphi(y,z)$, *preso nella supposizione che y sia la sola variabile.*

Abbiamo dunque finalmente

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}.$$

170. In questo risultato $\frac{du}{dy}$ dinota, come si è stabilito, « il coefficiente differenziale di u, preso rispetto ad y, *supponendo variare la sola y* ». Non è impossibile che il lettore sia inclinato a dire. « Ma y e z essendo tutte e due funzioni di x, se y varia, z *deve* variare ancora, come dunque *posso* fare la supposizione che varii solamente la y? » La sua propria ulteriore riflessione probabilmente rimuoverà la difficoltà, se questa ne è una. Però se egli non fosse abile di soddisfare a se stesso, gli si potrebbe suggerire che noi non facciamo la supposizione che varii solamente y come una *finale* supposizione. Noi ammettiamo la variazione sì di y che di z, ma è conveniente al nostro scopo di considerare queste variazioni *una sola per volta.*

Si è solito di scrivere $\left(\frac{du}{dy}\right)$ e $\left(\frac{du}{dz}\right)$, invece di $\frac{du}{dy}$ e $\frac{du}{dz}$, le parentesi servendo a rammentarci le supposizioni fatte nel trovare i valori di questi coefficienti differenziali. Quindi l'equazione precedente si scriverebbe

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\,.$$

È chiaro che le parentesi *possono* essere omesse, ed in effetti frequentemente si omettono, purchè ci sentiamo sicuri di rammentarci le condizioni che esse debbono esprimere. Il *principiante* farà bene di adoperarle, benchè a misura che egli si avanzi nel soggetto possa dispensarsene.

171. Es.
$$u = z^2 + y^3 + zy\,,$$
$$z = \operatorname{sen} x\,,$$
$$y = e^x\,,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 3y^2 + z\,,$$
$$\left(\frac{du}{dz}\right) = 2z + y\,,$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x\,,$$
$$\frac{dz}{dx} = \cos x\,;$$

onde
$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= (3y^2 + z)\, e^x + (2z + y) \cos x \\ &= (3e^{2x} + \operatorname{sen} x)\, e^x + (2 \operatorname{sen} x + e^x) \cos x \\ &= 3e^{3x} + e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + \operatorname{sen} 2x\,,\end{aligned}$$

e questo valore è naturalmente quello stesso che si ottiene se sostituiamo in u per y e z i loro valori espressi in x, il che dà $u = e^{3x} + e^x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, e quindi differenziamo rispetto ad x.

172. Un caso importante della proposizione generale si ottiene supponendo $z = x$ sicchè $\frac{dz}{dx} = 1$. Abbiamo allora

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Quì non possiamo dispensarci dalle parentesi o da altra equivalente notazione, $\left(\frac{du}{dx}\right)$ dinotando quale *sarebbe* il coefficiente differenziale di u rispetto ad x, se y non fosse una funzione di x, e $\frac{du}{dx}$ dinotando l'attuale coefficiente differenziale di u rispetto ad x, quando y *è* una funzione di x.

173. Es.

$$u = \tan^{-1}(xy),$$

$$y = e^x,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{y}{1 + x^2y^2},$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{x}{1 + x^2y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x;$$

onde

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^x x + y}{1 + x^2y^2}$$

$$= \frac{e^x(1 + x)}{1 + x^2 e^{2x}},$$

il che naturalmente è ciò che si ottiene se differenziamo $\tan^{-1}(xe^x)$ rispetto ad x.

174. Si supponga $u = \varphi(v, y, z)$ in cui v, y, z, sono funzioni di x. Abbiamo, come sopra,

$$\begin{aligned}\Delta u &= \varphi(v + \Delta v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z)\\ &= \varphi(v + \Delta v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z)\\ &\quad + \varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z + \Delta z)\\ &\quad + \varphi(v, y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u}{\Delta x} &= \frac{\varphi(v + \Delta v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\ &\quad + \frac{\varphi(v, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z + \Delta z)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &\quad + \frac{\varphi(v, y, z + \Delta z) - \varphi(v, y, z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Procedendo al limite, otteniamo

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dv}\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Il procedimento può essere esteso al caso nel quale u racchiude più di tre funzioni di x.

175. Esempii possono incontrarsi più complicati in apparenza, ma che essenzialmente si riferiscono ai principii stessi degli articoli precedenti. Si supponga per esempio

$$u=\varphi(v, y, z, x),$$
$$v=\psi(y, z, x),$$
$$y=f(x),$$
$$z=F(x),$$

così che, eseguendo le sostituzioni, u potrebbe rendersi una funzione esplicita di x; si voglia esprimere il coefficiente differenziale di u rispetto ad x, senza fare queste sostituzioni.

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dv}\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\frac{dv}{dx}=\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\qquad \frac{dz}{dx}=F'(x).$$

Quindi $$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dv}\right)\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)f'(x)+\left(\frac{dv}{dz}\right)F'(x)+\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{du}{dy}\right)f'(x)+\left(\frac{du}{dz}\right)F'(x)+\left(\frac{du}{dx}\right).$$

176. Fatte le stesse sostituzioni come nell' Art. 169, si cerca di esprimere $\frac{d^2u}{dx^2}$. Abbiamo

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Ora $\left(\frac{du}{dy}\right)$ è esso stesso una funzione di y e z. Se la dinotiamo con v il suo coefficiente differenziale rispetto ad x sarà

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx},$$

che può essere scritto

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)\frac{dz}{dx}.$$

Il coefficiente differenziale di $\frac{dy}{dx}$ rispetto ad x è $\frac{d^2y}{dx^2}$. Procedendo nello stesso modo col fattore

$$\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx},$$

e ricordandosi, (Art. 134), che

$$\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right),$$

abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$
$$+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Se $z=x$, abbiamo $\frac{dz}{dx}=1, \frac{d^2z}{dx^2}=0$; così

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

177. Finora in questo capitolo abbiamo dato metodi i quali, benchè spesso convenienti, non sono assolutamente *necessarî*, poichè in tutt' i casi, effettuando le richieste sostituzioni, possiamo ottenere una funzione esplicita di x, e differenziarla con le regole conosciute. Ma il caso che ora consideriamo è uno nel quale un nuovo metodo è spesso *indispensabile*.

Sia $\varphi(x, y)=0$ un' equazione che lega le variabili x ed y; si cerca di trovare $\frac{dy}{dx}$. Se la data equazione può risolversi in modo da dare y espresso in x, vale a dire $y = \psi(x)$, allora il coefficiente differenziale di y rispetto ad x può trovarsi con le regole precedenti. Se x può essere espresso per mezzo di y, possiamo determinare $\frac{dx}{dy}$ e quindi $\frac{dy}{dx}$, essendo $\frac{dx}{dy} \times \frac{dy}{dx} = 1$. Ma siccome è spesso difficile, ed alle volte impossibile, di risolvere la data equazione, è necessario d'investigare una regola per trovare $\frac{dy}{dx}$ che non richieda questa operazione.

Si ponga u per $\varphi(x, y)$. Per l'equazione data y è *una certa* funzione definita di x; quindi

$$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)$$

è, per l'Art. 172, il coefficiente differenziale di u rispetto ad x. Ma u è sempre zero, e per conseguenza è anche tale il suo coefficiente differenziale rispetto ad x. Quindi

$$0 = \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right),$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}.$$

178. Questo risultato importante può ottenersi anche nel seguente modo, che nel fatto riunisce in un articolo porzioni delle pagine precedenti. Sia

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Si supponga x diventare $x + \Delta x$ ed y diventare $y + \Delta y$, sicchè

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Quindi

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = 0,$$

e

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) + \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y) = 0.$$

Si divida per Δx, ed abbiamo

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Questa equazione, essendo sempre vera, rimane tale quando Δx e Δy diminuiscono indefinitamente.

Il limite di $\frac{\varphi(x+\Delta x, y)-\varphi(x,y)}{\Delta x}$, quando Δx diminuisce, è il coefficiente differenziale di $\varphi(x,y)$ *rispetto ad* x, *formato nella supposizione che varii solamente* x, e se poniamo u per $\varphi(x,y)$, questo limite può essere dinotato con $\left(\frac{du}{dx}\right)$.

Il limite di $\frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y)-\varphi(x+\Delta x,y)}{\Delta y}$, se Δx rimanesse costante, sarebbe il coefficiente differenziale di $\varphi(x+\Delta x, y)$ *formato nella supposizione che varii solamente* y. Ma siccome Δx diminuisce senza limite insieme a Δy, il limite è il coefficiente differenziale di u rispetto ad y, formato nella supposizione che varii solamente y. Esso può essere dinotato con $\left(\frac{du}{dy}\right)$.

Il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è $\frac{dy}{dx}$. Quindi finalmente

$$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)=0.$$

179. Es. Si supponga

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Quì
$$u=a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=2b^2x,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=2a^2y;$$

onde
$$a^2y\frac{dy}{dx}+b^2x=0,$$

quindi
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Poichè $y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$ dalla data equazione, otteniamo direttamente
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Se in (1) si sostituisce il valore di y espresso in x, il risultato coincide con (2).

In questo caso possiamo verificare la nostra nuova regola, paragonando i suoi risultati con quelli trovati precedentemente. In esempii più complicati, come

$$x^5 - ax^3y + bx^2y^2 - y^5 = 0,$$

possiamo trovare $\frac{dy}{dx}$ solamente col nuovo metodo;

ponendo u per $x^5 - ax^3y + bx^2y^2 - y^5$, abbiamo

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 5x^4 - 3ax^2y + 2bxy^2,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = - ax^3 + 2bx^2y - 5y^4;$$

quindi $$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 - 3ax^2y + 2bxy^2}{5y^4 - 2bx^2y + ax^3}.$$

180. Investigheremo ora il *secondo* coefficiente differenziale di una funzione implicita.

Dall' equazione

$$u \text{ o } \varphi(x, y) = 0,$$

abbiamo dedotto $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

si cerca di trovare $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Osserviamo che $\left(\frac{du}{dx}\right)$ essendo una funzione di x e di y, il suo coefficiente differenziale rispetto ad x può essere trovato con l' Art. 172. Se poniamo v per $\left(\frac{du}{dx}\right)$, il richiesto coefficiente differenziale sarà

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Similmente, dinotando $\left(\frac{du}{dy}\right)$ con w, abbiamo per il suo coefficiente differenziale rispetto ad x,

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dw}{dx}\right).$$

Quindi, da (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right\} - v\left\{\left(\frac{dw}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dw}{dx}\right)\right\}}{w^2} \quad \ldots\ldots (2).$$

Ora $$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),$$

l'ultimo simbolo dinotando che v si deve differenziare due volte rispettò ad x, *nella supposizione che varii solamente* x; inoltre

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right),$$

l'ultimo simbolo dinotando che u si deve differenziare rispetto ad x, supponendo *variare solamente* x, ed il risultato rispetto ad y, supponendo variare solamente y. Similmente

$$\left(\frac{dw}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Quindi, sostituendo in (2), abbiamo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)\left\{\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\right\} - \left(\frac{du}{dx}\right)\left\{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\right\}}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Se sostituiamo in (3) il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato da (1), abbiamo, poichè $\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ per l'Art. 134,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)^2 - 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\left(\frac{du}{dy}\right)^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

181. Questo risultato può essere anche trovato con l'Art. 176, supponendo sempre $u=0$, e quindi $\frac{d^2u}{dx^2}=0$; o indipendentemente nel modo seguente.

Da
$$u=0$$
segue che
$$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si dinoti questo risultato per brevità con
$$v=0.$$

Quindi
$$\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
il quale risultato, espresso per mezzo di u, è
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \ldots (3);$$
siccome $\frac{dy}{dx}$ è già conosciuto, questa equazione darà $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'equazione (1) è chiamata frequentemente « la prima equazione derivata, » o « l'equazione differenziale del primo ordine; » e l'equazione (3) è chiamata « la seconda equazione derivata, » o l'equazione differenziale del secondo ordine; » l'equazione $u=0$ essendo chiamata « l'equazione primitiva ».

182. Se il lettore riuscisse a dedurre correttamente da sè stesso l'importante equazione (3) dell'ultimo articolo, egli potrebbe omettere i due articoli seguenti, non essendo necessario di dirigere la sua attenzione sulle difficoltà che egli *avrebbe potuto* incontrare, o sugli errori che *avrebbe potuto* commettere. Però se egli ha sbagliato nei suoi tentativi, potrà paragonare il suo procedimento col seguente.

In (1), si ponga p per $\frac{dy}{dx}$, sicchè v stia per
$$\left(\frac{du}{dy}\right)p+\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Da ciò
$$\left(\frac{dv}{dx}\right)=\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),$$
$$\left(\frac{dv}{dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right).$$

Così (2) diviene

$$\left\{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\right\}p$$

$$+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0,$$

o

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)p+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\left\{\left(\frac{dp}{dy}\right)p+\left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}=0,$$

Ma $\left(\frac{dp}{dy}\right)p+\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{dp}{dx}$, cioè $\frac{d^2y}{dx^2}$, (Art. 172), e con questa semplificazione otteniamo il risultato richiesto.

Un errore molto comune si è di omettere le parentesi in $\left(\frac{dp}{dy}\right)p+\left(\frac{dp}{dx}\right)$, e così $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ è scritto $\frac{d^2y}{dx^2}$, e vi rimane un termine superfluo, cioè $\frac{dp}{dy}$, o come forse è stato scritto dallo studente, $\frac{d^2y}{dy\,dx}$.

183. Nell'Art. 182 procedemmo strettamente secondo quanto esigeva letteralmente la regola racchiusa nell'equazione (2) dell'Art. 181. Avremmo potuto ragionare nel seguente modo.

Si tratta semplicemente di esprimere simbolicamente il fatto, che il coefficiente differenziale di

$$\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)$$

rispetto ad x è zero.

Ora il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rispetto ad x, è

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx};$$

ed il coefficiente differenziale di $\frac{dy}{dx}$ rispetto ad x è $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Quindi il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$ è

$$\left\{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\;\ldots\ldots(1).$$

D'altronde il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dx}\right)$ è

$$\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Riunendo i termini in (1) e (2), abbiamo

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

184. Non è necessario di procedere oltre con i coefficienti differenziali successivi delle funzioni implicite, poichè le equazioni diventano troppo complicate per essere spesso usate. Il lettore, come un esercizio, può ottenere il risultato seguente dall'equazione (3) dell'Art. 181, per mezzo di uno dei metodi usati negli Art. 182 e 183:

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)+3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{dy}{dx}+3\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

$$+3\left\{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}\right\}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

Possiamo osservare che spesso si è trovato utile di usare una certa notazione abbreviata per i coefficienti differenziali parziali. Così se $\varphi(x,y)$ è una funzione qualunque di x ed y, ogni coefficiente differenziale parziale della funzione può essere indicato dalla lettera φ, con accenti *superiori* corrispondenti al numero delle differenziazioni rispetto ad x, e con accenti *inferiori* corrispondenti al numero delle differenziazioni rispetto ad y. Per esempio, φ'' indicherà $\left(\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx^2}\right)$, e $\varphi_{\prime}'$ indicherà $\left(\frac{d^2\varphi(x,y)}{dx\,dy}\right)$, e così di seguito.

Possiamo anche usare y' per $\frac{dy}{dx}$, ed y'' per $\frac{d^2y}{dx^2}$, e così di seguito. In tal modo con questa notazione le equazioni (1) e (3) dell'Art. 181, e l'equazione che si può ottenere da (3) saranno espresse rispettivamente come segue:

$$\varphi' + \varphi_{,} y' = 0,$$

$$\varphi'' + 2\varphi_{,}' y' + \varphi_{,,} y'^2 + \varphi_{,} y'' = 0,$$

$$\varphi''' + 3\varphi_{,}'' y' + 3\varphi_{,,}' y'^2 + \varphi_{,,,} y'^3 + 3(\varphi_{,}' + \varphi_{,,} y') y'' + \varphi_{,} y''' = 0.$$

185. Si suppongano le due equazioni

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$F(x, y, z) = 0,$$

esistere *simultaneamente*, nelle quali x è la variabile indipendente ed y e z sono variabili dipendenti. Dalle due date equazioni possiamo eliminare z, e così trovare un'equazione tra y ed x. Quindi $\frac{dy}{dx}$ può essere determinato. Similmente, dalle due date equazioni possiamo eliminare y, e così trovare una relazione tra z ed x, onde $\frac{dz}{dx}$ può essere determinato. Nei casi in cui l'eliminazione è noiosa o impraticabile possiamo procedere nel seguente modo.

Si dinoti $f(x, y, z)$ con u ed $F(x, y, z)$ con v. Poichè y e z sono funzioni di x, il coefficiente differenziale di u rispetto ad x è, per gli Art. 172 e 174,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$$

e poichè u è sempre $= 0$, abbiamo

$$0 = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \cdots\cdots (1).$$

Similmente, $$0 = \left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \cdots\cdots (2);$$

dalle quali troviamo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{du}{dz}\right)} \cdots\cdots (3),$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)}\quad\ldots\ldots\ldots(4).$$

186. Differenziando le equazioni (1), (2) dell'ultimo articolo rispetto ad x, otteniamo

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dv}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}=0.$$

Da queste equazioni possiamo dedurre $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dx^2}$, che possono anche trovarsi differenziando le equazioni (3) e (4) dell'articolo precedente.

187. Supponiamo di avere n equazioni tra $n+1$ variabili $x, y, z, \ldots\ldots t$. Siano le equazioni

$$F_1(x, y, z, \ldots\ldots t)=0,\quad \text{o}\ \ u_1=0,$$
$$F_2(x, y, z, \ldots\ldots t)=0,\quad \text{o}\ \ u_2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x, y, z, \ldots\ldots t)=0,\quad \text{o}\ \ u_n=0.$$

Per queste equazioni tutte le variabili eccetto una possono considerarsi funzioni di quest'una. Se x sia la variabile indipendente, abbiamo

$$0=\left(\frac{du_1}{dx}\right)+\left(\frac{du_1}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du_1}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\ldots\ldots+\left(\frac{du_1}{dt}\right)\frac{dt}{dx},$$
$$0=\left(\frac{du_2}{dx}\right)+\left(\frac{du_2}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du_2}{dz}\right)\frac{dz}{dx}+\ldots\ldots+\left(\frac{du_2}{dt}\right)\frac{dt}{dx},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0=\left(\frac{du_n}{dx}\right)+\left(\frac{du_n}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\,+\ldots\ldots\ldots\left(\frac{du_n}{dt}\right)\frac{dt}{dx};$$

dalle quali n equazioni possiamo determinare le n quantità

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ldots\ldots\ldots\frac{dt}{dx}.$$

188. Si supponga $\varphi(x,y,z)=0$ essere la sola equazione che lega tre variabili, sicchè z possa essere considerata una funzione implicita delle due variabili indipendenti x ed y; si cerca di trovare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$.

Con $\frac{dz}{dx}$ s'intende il coefficiente differenziale di z rispetto ad x, supponendo y costante, e con $\frac{dz}{dy}$ il coefficiente differenziale di z rispetto ad y supponendo x costante. Teoreticamente possiamo per mezzo della data equazione trovare il valore di z espresso con x ed y e quindi effettuare la differenziazione con le regole comuni; (si vegga l'Art. 131). Ma per evitare la difficoltà di risolvere l'equazione data adottiamo un altro metodo. Si supponga y costante così che abbiamo due variabili x e z, e si ponga u per $\varphi(x, y, z)$, allora per l'Art. 178

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

in cui $\left(\frac{du}{dx}\right)$ sta per il coefficiente differenziale di u preso nella supposizione che varii solamente x, e $\left(\frac{du}{dz}\right)$ per il coefficiente differenziale di u preso nella supposizione che varii solamente z. Similmente

$$\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dy}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Le equazioni (1) e (2) determinano $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$.

Possiamo determinare $\frac{d^2z}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dy^2}$ col metodo dell'Art. 180, o con quello dell'Art. 181. Se adottiamo l'ultimo, le due equazioni che otteniamo sono

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right)\frac{dz}{dy}+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Possiamo ottenere un'equazione per trovare $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ differenziando (1) rispetto a y, o (2) rispetto ad x. Deduciamo così

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)\frac{dz}{dy}+\left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)\frac{dz}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}$$
$$+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{d^2z}{dy\,dx}=0.$$

189. Supponiamo di avere due equazioni che legano quattro variabili; per esempio,

$$f(v,x,y,z)=0, \quad \text{o} \quad u_1=0,$$
$$F(v,x,y,z)=0, \quad \text{o} \quad u_2=0;$$

per queste equazioni v e z possono essere considerate funzioni delle variabili indipendenti x ed y. Se eliminiamo v otteniamo un'equazione tra z, x, ed y, sicchè $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ possono essere ottenuti per mezzo dell'articolo precedente; e similmente se eliminiamo z possiamo trovare $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dv}{dy}$. O pure possiamo procedere così: da $u_1=0$ deduciamo, per l'Art. 174,

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)+\left(\frac{du_1}{dv}\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du_1}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=0,$$

e da $u_2=0$ abbiamo

$$\left(\frac{du_2}{dx}\right)+\left(\frac{du_2}{dv}\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du_2}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=0,$$

dalle quali possono ricavarsi $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Similmente, da $u_1 = 0$ ed $u_2 = 0$ deduciamo

$$\left(\frac{du_1}{dy}\right) + \left(\frac{du_1}{dv}\right)\frac{dv}{dy} + \left(\frac{du_1}{dz}\right)\frac{dz}{dy} = 0,$$

e

$$\left(\frac{du_2}{dy}\right) + \left(\frac{du_2}{dv}\right)\frac{dv}{dy} + \left(\frac{du_2}{dz}\right)\frac{dz}{dy} = 0,$$

dalle quali possono trovarsi $\frac{dz}{dy}$ e $\frac{dv}{dy}$.

Nelle equazioni come quelle del presente articolo è molto comune di scrivere $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dv}$, $\frac{dF}{dy}$, etc., per dinotare $\frac{du_1}{dy}$, $\frac{du_1}{dv}$, $\frac{du_2}{dy}$, etc.

190. Se i valori di x ed y che soddisfano un'equazione $u = 0$ tra x ed y, annullano inoltre $\left(\frac{du}{dx}\right)$ e $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\frac{dy}{dx}$, che è

$$= -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)},$$

prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Se applichiamo il metodo dell'Art. 145, abbiamo

$$\text{il limite di } \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \text{al limite di } \frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}},$$

il numeratore ed il denominatore della seconda frazione essendo rispettivamente il coefficiente differenziale di $\left(\frac{du}{dx}\right)$ e di $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rispetto ad x.

Abbiamo dunque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In questa espressione dobbiamo sostituire in $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$, i valori di x ed y che si considerano, e così otteniamo un'equazione di 2° grado per trovare $\frac{dy}{dx}$. Questa equazione quadratica è

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0\,\ldots\ldots\,(2);$$

l'equazione (2) si accorda con l'equazione (3) dell'Art. 181, ricordandosi che per ipotesi $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$.

191. Se i valori di x ed y che si considerano, oltre di rendere $u=0$, $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, rendono anche

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0,\quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)=0,$$

allora il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato dall'equazione (1) dell'articolo precedente prende anche la forma $\frac{0}{0}$. Quindi, applicando di nuovo la regola per trovare il limite di una tale frazione, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)+2\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)+2\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(1).$$

Poichè $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ svaniscono, otteniamo da (1)

$$\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(2),$$

in cui in tutt'i coefficienti differenziali di u dobbiamo sostituire i valori di x ed y che si considerano, dando una equazione cubica per determinare $\frac{dy}{dx}$. Si paragoni con l'Art. 184.

Si deve osservare che questo metodo è soggetto ad un'obiezione. Noi *supponiamo* che $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ svaniscano perchè in ciascun caso un fattore svanisce; però se $\frac{d^2y}{dx^2}$ *fosse infinito*, non seguirebbe necessariamente l'annullarsi di $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$.

192. Es. $y^4+3a^2y^2-4a^2xy-a^2x^2=0$, o $u=0$.

Quì
$$\left(\frac{du}{dx}\right)=-4a^2y-2a^2x,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right)=4y^3+6a^2y-4a^2x;$$

quindi
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4a^2y+2a^2x}{4y^3+6a^2y-4a^2x}=\frac{2a^2y+a^2x}{2y^3+3a^2y-2a^2x}.$$

Quì $x=0$, $y=0$, verificano $u=0$, e fanno prendere a $\frac{dy}{dx}$ la forma $\frac{0}{0}$.

Si differenziino il numeratore ed il denominatore, ed abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\text{al limite di }\frac{2a^2\frac{dy}{dx}+a^2}{(6y^2+3a^2)\frac{dy}{dx}-2a^2}$$

$$=\frac{2\frac{dy}{dx}+1}{3\frac{dy}{dx}-2}\text{ ultimamente.}$$

Quindi,
$$\frac{dy}{dx}\left(3\frac{dy}{dx}-2\right)=2\frac{dy}{dx}+1;$$

onde
$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\frac{dy}{dx}-1=0;$$

quindi
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

In secondo luogo, supponiamo essere la data equazione

$$ay^3 - bx^2y + x^4 = 0.$$

Allora
$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 4x^3 - 2bxy,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 3ay^2 - bx^2;$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2bxy}{bx^2 - 3ay^2}.$$

Questo valore di $\frac{dy}{dx}$ prende la forma $\frac{0}{0}$ quando x ed y svaniscono. Quindi, differenziando il numeratore ed il denominatore, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 - 2by - 2bx\frac{dy}{dx}}{2bx - 6ay\frac{dy}{dx}},$$

quando x ed y si fanno $= 0$.

Di nuovo, abbiamo la forma $\frac{0}{0}$. Quindi, differenziando di nuovo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x - 4b\frac{dy}{dx} - 2bx\frac{d^2y}{dx^2}}{2b - 6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6ay\frac{d^2y}{dx^2}},$$

x ed y essendo messi $= 0$. Così *supponendo* che $x\frac{d^2y}{dx^2}$ ed $y\frac{d^2y}{dx^2}$ svaniscano, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}\left\{2b - 6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = -4b\frac{dy}{dx},$$

da cui
$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

o pure
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

193. Si può notare che l'equazione (2) dell'Art. 190 differisce dall'equazione (3) dell'Art. 181 solamente nella omis-

sione del termine $\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$. Questo termine non si troverebbe se $\frac{dy}{dx}$ fosse una quantità costante, poichè allora $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarebbe zero. Quindi l'equazione (2) dell'Art. 190 *può* essere dedotta differenziando l'equazione

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

rispetto ad x *e trattando* $\frac{dy}{dx}$ *come se fosse una costante.*

Similmente, l'equazione (2) dell'Art. 191 *può* essere dedotta dall'equazione (2) dell'Art. 190 differenziando rispetto ad x *e trattando* $\frac{dy}{dx}$ *come se fosse una costante.*

194. Se nell'equazione (2) dell'Art. 190 si ha $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0$, avremo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)}$$

per *uno* dei valori di $\frac{dy}{dx}$. L'altro valore di $\frac{dy}{dx}$ sarà infinito, poichè conosciamo dall'Algebra che se in un'equazione quadratica il coefficiente della più alta potenza dell'incognita diminuisce gradatamente senza limite, una delle radici simultaneamente cresce senza limite.

195. Il valore di $\frac{dy}{dx}$, quando i valori $x=0$, $y=0$, gli fanno prendere una forma indeterminata, spesso può essere trovato più semplicemente come segue. Basta cercare il limite di $\frac{y}{x}$ a misura che x ed y diminuiscono senza limite; ciò è ovvio pel significato di $\frac{dy}{dx}$; si vedrà ancora ciò, se ci riferiamo all'illustrazione geometrica dell'Art. 38.

Es. $\qquad y^4+3a^2y^2-4a^2xy-a^2x^2=0.$

Onde,
$$y^2\left(\frac{y}{x}\right)^2+3a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2-4a^2\frac{y}{x}-a^2=0.$$

Se ora $\frac{y}{x}$ ha un limite *finito*, il termine $y^2\left(\frac{y}{x}\right)^2$ svanirà per $y=0$, ed abbiamo per trovare il valore finale di $\frac{y}{x}$ l'equazione
$$3a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2-4a^2\left(\frac{y}{x}\right)-a^2=0,$$
o
$$3\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\left(\frac{y}{x}\right)-1=0;$$
quindi
$$\frac{y}{x}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

Se $\frac{y}{x}$ ha un valore infinito, allora $\frac{x}{y}$ ha un valore zero: ponendo l'equazione data sotto la forma
$$y^2+3a^2-4a^2\frac{x}{y}-a^2\left(\frac{x}{y}\right)^2=0,$$
vediamo che $\frac{x}{y}=0$ *non* la soddisfarebbe nel limite. Quindi $\frac{y}{x}$ non ha un valore infinito.

In secondo luogo, sia
$$ay^3-bx^2y+x^4=0;$$
onde
$$a\left(\frac{y}{x}\right)^3-b\left(\frac{y}{x}\right)+x=0:$$
quando x svanisce, abbiamo
$$\frac{y}{x}\left\{a\left(\frac{y}{x}\right)^2-b\right\}=0;$$
quindi
$$\frac{y}{x}=\text{o ultimamente},$$
o pure
$$\frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Ancora, si supponga
$$x^4+ax^2y+bxy^2-y^4=0;$$
onde
$$x+a\frac{y}{x}+b\left(\frac{y}{x}\right)^2-y\left(\frac{y}{x}\right)^3=0.$$

I valori limiti *finiti* di $\frac{y}{x}$ sono dati da

$$a\left(\frac{y}{x}\right)+b\left(\frac{y}{x}\right)^2=0;$$

quindi $$\frac{y}{x}=0,$$

o pure $$\frac{y}{x}=-\frac{a}{b}.$$

E poichè l'equazione data può essere messa sotto la forma

$$x\left(\frac{x}{y}\right)^3+a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)-y=0,$$

vediamo che $\frac{x}{y}=0$ nel limite la soddisfa; quindi $\frac{y}{x}=\infty$ è nel limite un altro valore.

Adunque i limiti di $\frac{y}{x}$ sono

$$0,\ \text{o}\ -\frac{a}{b},\ \text{o}\ \infty.$$

Questo metodo è esente dalla difficoltà indicata in fine dell'Art. 191.

Se si volesse conoscere col metodo di questo articolo il valore di $\frac{dy}{dx}$ nel punto pel quale $x=a$, $y=b$, possiamo porre $a+x'$ per x e $b+y'$ per y nell'equazione che lega x ed y. Avremo allora da trovare il valore di $\frac{dy'}{dx'}$ quando $x'=0$ ed $y'=0$; e questo può farsi col metodo mostrato negli esempii precedenti.

ESEMPII.

1. Se $u=\sqrt{\left(\frac{z^2-y^2}{z^2+y^2}\right)}$, in cui z ed y sono funzioni di x, trovare $\frac{du}{dx}$.

2. Se $u = \text{sen}^{-1}\dfrac{z}{y}$, in cui z ed y sono funzioni di x, trovare $\dfrac{du}{dx}$.

3. Se $ye^{ny} = ax^m$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{my}{x(1+ny)}$.

4. Se $x^y - y^x = 0$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - xy\log y}{x^2 - xy\log x}$.

5. Se $(a+y)^2(b^2-y^2) + (x+a)^2y^2 = 0$, trovare $\dfrac{dy}{dx}$.

6. Se $\text{sen}(xy) = mx$, trovare $\dfrac{dy}{dx}$.

7. Dato $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, mostrare che $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

8. Dato $x^4 + 2ax^2y = ay^3$, trovare $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, e scrivere la terza equazione derivata.

9. Se $y = \varphi(x, y, u)$ e $\psi(x, y, u) = 0$, trovare $\dfrac{du}{dx}$.

$$\textit{Risultato}\quad \frac{du}{dx} = -\frac{\dfrac{d\psi}{dx}\dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{d\psi}{dy}\dfrac{d\varphi}{dx} - \dfrac{d\psi}{dx}}{\dfrac{d\psi}{du}\dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{d\psi}{dy}\dfrac{d\varphi}{du} - \dfrac{d\psi}{du}}.$$

10. Se $u = \varphi(x, y)$, ed $u = \chi(x)$, trovare $\dfrac{du}{dy}$.

$$\textit{Risultato}\quad \frac{du}{dy}\left\{\chi'(x) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\chi'(x).$$

11. Se $u = a^{x^y} + \sqrt{(\sec xy)}$ trovare $\dfrac{du}{dx}$, (1) quando x ed y sono indipendenti, (2) quando $x + y = a$.

12. Se $a^{x^y} + \sqrt{(\sec xy)} = 0$, trovare $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\textit{Risultato}\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y\sqrt{(\sec xy)}\tan xy + 2a^{x^y}yx^{y-1}\log a}{x\sqrt{(\sec xy)}\tan xy + 2a^{x^y}x^y\log a\log x}.$$

13. Se $x^4+2ax^2y-ay^3=0$, mostrare che $\dfrac{dy}{dx}=0$, o $\pm\sqrt{2}$, quando $x=0$ ed $y=0$.

14. Se $x^4-ay^3+2axy^2+3ax^2y=0$, mostrare che $\dfrac{dy}{dx}=0$, o -1, o 3, quando $x=0$ ed $y=0$.

15. Se $ax^3+x^3y-ay^3=0$, mostrare che $\dfrac{dy}{dx}=1$, quando $x=0$ ed $y=0$.

16. Se $x^2y^2=(a^2-y^2)(b+y)^2$, mostrare che $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, quando $x=0$ ed $y=-b$.

17. Se $(y^2-x^2)(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=2(y^2+x^2-2x)^2$,

trovare $\dfrac{dy}{dx}$ quando x ed y svaniscono, e quando $x=1$, $y=1$.

Risultati $\sqrt{\left(\dfrac{19}{3}\right)}$ e $\dfrac{-1\pm\sqrt{(33)}}{16}$.

18. Se $y^4-y^2+3xy-2x^2=0$, trovare $\dfrac{dy}{dx}$ quando $x=0$.

Risultato 1, 2, o $-\dfrac{3}{2}$.

19. Dato
$$u^2+x^2+y^2+z^2=c^2,$$
$$\log(xy)+\frac{y}{x}=a^2,$$
$$\log\left(\frac{z}{x}\right)+zx=b^2,$$

trovare $\dfrac{du}{dx}$.

Risultato $u\dfrac{du}{dx}=\dfrac{y^2}{x}\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{z^2}{x}\dfrac{xz-1}{xz+1}-x.$

20. Se $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, trovare
$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dx\,dy},\quad \text{e}\quad \frac{d^2z}{dy^2}.$$

CAPITOLO XII.

CAMBIAMENTO DELLA VARIABILE INDIPENDENTE.

196. Nell' Art. 60 abbiamo dimostrato l'equazione

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

e nell' Art. 63,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

ed ora procediamo ad alcune estensioni di queste formole.

Date x ed y, tutte e due funzioni di una terza variabile z, si cerca di esprimere i coefficienti differenziali successivi di y rispetto ad x, per mezzo di quelli di y ed x rispetto a z.

Abbiamo $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \text{ per } (2),$$

$$=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} \quad \text{per } (1).$$

Quindi $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{d}{dz}\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}\cdot\frac{dz}{dx} \text{ per } (2),$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dx}{dz}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{dy}{dz}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3} \text{ per (1).}$$

In seguito, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dz}\dfrac{\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3} \cdot \dfrac{dz}{dx}$

$$= \frac{\left(\dfrac{d^3y}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dy}{dz}\right)\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3 - 3\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2\dfrac{d^2x}{dz^2}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^6}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{d^3y}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dy}{dz}\right)\dfrac{dx}{dz} - 3\dfrac{d^2x}{dz^2}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^5}.$$

Similmente possiamo esprimere $\dfrac{d^4y}{dx^4}$, etc.

Questo procedimento è detto « *cambiare la variabile indipendente da x a z;* » poichè in $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ la variabile indipendente è x, ma nell'espressione

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz} - \dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3}$$

la variabile indipendente è z.

197. Supponiamo nell' articolo precedente che si ponga $z = y$.

Abbiamo $\qquad \dfrac{dy}{dz} = 1, \quad \dfrac{d^2y}{dz^2} = 0, \quad \dfrac{d^3y}{dz^3} = 0,$ etc.

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{d^2x}{dy^2}, \text{ etc.}$$

e con ciò
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

198. Le formole dell' Art. 197 possono anche ottenersi direttamente come segue,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

quindi
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$=\frac{d}{dy}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{d}{dx}\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}=-\frac{d}{dy}\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 - 3\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^7}$$

$$= -\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

Questo procedimento è detto *cambiare la variabile indipendente da x ad y.*

199. Rispetto all'*uso* degli articoli precedenti dobbiamo osservare che, come accade per alcune altre parti del Calcolo Differenziale, lo studente acquista quì materiali da adoperare in alcuni dei soggetti seguenti. Alcune espressioni possono alle volte semplificarsi di molto trasformandole nel modo sopra indicato; di tali esempii se ne vedranno alla fine di questo Capitolo.

200. Il seguente è un caso importante.

Cambiare la variabile indipendente in $x^n \frac{d^ny}{dx^n}$ da x a t, essendo $x = e^t$.

Abbiamo $$\frac{d}{dt}\left(x^n \frac{d^ny}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^n \frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \left(nx^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n} + x^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)x$$

$$= nx^n \frac{d^ny}{dx^n} + x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}};$$

quindi $$\frac{d}{dt}\left(x^n \frac{d^ny}{dx^n}\right) - nx^n \frac{d^ny}{dx^n} = x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.$$

Questo risultato per brevità può essere espresso così

$$\left(\frac{d}{dt} - n\right)x^n \frac{d^ny}{dx^n} = x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Si ponga $n=1$; allora

$$\left(\frac{d}{dt}-1\right)x\frac{dy}{dx}=x^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ma
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx};$$

onde
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d}{dt}-1\right)\frac{dy}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Si ponga $n=2$ in (1); allora

$$\left(\frac{d}{dt}-2\right)x^2\frac{d^2y}{dx^2}=x^3\frac{d^3y}{dx^3};$$

o da (2),

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\left(\frac{d}{dt}-2\right)\left(\frac{d}{dt}-1\right)\frac{dy}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Procedendo così deduciamo

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}=\left\{\frac{d}{dt}-(n-1)\right\}\left\{\frac{d}{dt}-(n-2)\right\}\ldots\left\{\frac{d}{dt}-1\right\}\frac{dy}{dt}\ \ldots\ldots\ (4).$$

201. È spesso utile nelle applicazioni geometriche del Calcolo Differenziale di avere espressioni per $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ in termini di θ, supponendo

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Poichè y è per supposizione una funzione di x, segue da (1) che sussiste un'equazione tra r e θ, sicchè r può essere considerata una funzione di θ.

Ora
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\mathrm{sen}\,\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\,\mathrm{sen}\,\theta},\text{ da (1)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\,\frac{\mathrm{sen}\,\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\,\mathrm{sen}\,\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}.$$

Il numeratore di questa frazione è

$$\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d^2r}{d\theta^2}+2\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)$$
$$-\left(\cos\theta\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}-r\cos\theta\right)\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta\right)$$

ed il denominatore è

$$\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)^3.$$

Quindi, $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta\right)^3}.$$

202. Sia u una funzione delle variabili indipendenti x ed y, cioè $u=f(x,y)$; e si suppongano x ed y funzioni di due nuove variabili indipendenti r, θ, sicchè

$$x=F_1(r,\theta),$$
$$y=F_2(r,\theta).$$

Si cercano i valori di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ espressi per mezzo dei coefficienti differenziali di u presi rispetto alle nuove variabili.

Se per x ed y sostituiamo i loro valori in termini di r e θ, rendiamo u una funzione esplicita di r e θ. Ora, per l'Art. 169,

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dr},$$
$$\frac{du}{d\theta}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta}.$$

Da queste equazioni possono trovarsi $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$.

203. Se le equazioni che legano x, y, r, θ, in vece di quelle nell'Art. 202, siano

$$r=F_1(x,y),$$
$$\theta=F_2(x,y),$$

possiamo usare le formole

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}.$$

204. Se le equazioni che legano x, y, r, θ, sono date nella forma

$$F_1(x, y, r, \theta)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$F_2(x, y, r, \theta)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

per trovare i valori di $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dy}{d\theta}$, richiesti dalle formole dell'Art. 202, eliminando successivamente y ed x da (1) e (2), possiamo ottenere esplicitamente i valori di x ed y in termini di r e θ. O pure, per l'Art. 189, possiamo trovare $\frac{dx}{d\theta}$ e $\frac{dy}{d\theta}$ dalle equazioni

$$\left(\frac{dF_1}{d\theta}\right)+\left(\frac{dF_1}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta}+\left(\frac{dF_1}{dy}\right)\frac{dy}{d\theta}=0,$$

$$\left(\frac{dF_2}{d\theta}\right)+\left(\frac{dF_2}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta}+\left(\frac{dF_2}{dy}\right)\frac{dy}{d\theta}=0,$$

ed usare due simili equazioni per $\frac{dx}{dr}$ e $\frac{dy}{dr}$.

205. Es.

$$u=f(x, y),$$

$$x=r\cos\theta,$$

$$y=r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\frac{dx}{d\theta}=-r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta,$$

$$\frac{dx}{dr}=\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dr}=\mathrm{sen}\,\theta.$$

Quindi, per l'Art. 202,

$$\frac{du}{dr} = \cos\theta \frac{du}{dx} + \operatorname{sen}\theta \frac{du}{dy},$$

$$\frac{du}{d\theta} = -r \operatorname{sen}\theta \frac{du}{dx} + r\cos\theta \frac{du}{dy}$$

onde

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \cos\theta \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \operatorname{sen}\theta \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{du}{dy} &= \operatorname{sen}\theta \frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{du}{d\theta}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Se procediamo secondo l'Art. 203, dobbiamo porre le equazioni tra x, y, r, θ, sotto la forma

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x};$$

onde,

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2};$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x}{r}\frac{du}{dr} - \frac{y}{r^2}\frac{du}{d\theta}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{y}{r}\frac{du}{dr} + \frac{x}{r^2}\frac{du}{d\theta}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Poichè $\frac{x}{r} = \cos\theta$ ed $\frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$, le formole (1) e (2) sono d'accordo tra loro.

In questo ramo del soggetto i principianti sono esposti ad errori non ponendo sufficiente attenzione al *significato preciso dei simboli.* Generalmente parlando la notazione matematica è così definita che il significato di ogni simbolo può essere fissato senza badare al contesto; ma alle volte invece di usare un simbolo complesso per esprimere il nostro intento senza alcuna possibilità di errore adoperiamo un simbolo che in sè stesso può essere ambiguo, ma che è reso perfettamente definito per mezzo della connessione in cui si trova. Così, per esempio, come abbiamo detto nell'Art. 170, le *parentesi* indicative di differenziazione sotto certe condizioni sono alle volte omesse, cioè, si lascia che esse siano suggerite dal contesto.

Nel caso presente il significato dei simboli $\frac{du}{dr}$, $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ che s'incontrano negli Art. 202 e 203 deve essere osservato accuratamente. Noi potremmo usare una notazione più complessa, come per esempio la seguente; sia $\psi(x, y)$ una funzione di x ed y, e sia $\chi(r, \theta)$ la forma che prende $\psi(x,y)$ quando per x ed y si sostituiscono i loro valori in termini di r e θ; allora

$$\frac{d\chi(r,\theta)}{dr} = \left\{\frac{d\psi(x,y)}{dx}\right\}\frac{dx}{dr} + \left\{\frac{d\psi(x,y)}{dy}\right\}\frac{dy}{dr},$$

e questa è l'equazione che nell'Art. 202 è espressa più brevemente così,

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dr}.$$

Il principiante però deve rammentarsi che la seconda forma è un'abbreviazione della prima forma, ed egli deve ricorrere alla prima forma se incontra qualche dubbio sul significato dei simboli $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dr}$.

Non pertanto è rispetto ai simboli $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ che si trovano nell'Art. 202, ed i simboli $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$, $\frac{d\theta}{dy}$, che si trovano nell'Art. 203, che più frequentemente si commettono errori. Per esempio, i principianti alle volte s'immaginano che il $\frac{dx}{dr}$ dell'Art. 202 ed il $\frac{dr}{dx}$ dell'Art. 203 sono *legati dalla formola* $\frac{dx}{dr} \times \frac{dr}{dx} = 1$. Questa formola però non è affatto applicabile quì; poichè essa suppone che vi sia una sola equazione che racchiude x ed r e nessuna altra variabile, il che quì non ha luogo.

Nell'Art. 202 supponiamo che x ed y siano espressi come funzioni di r e θ, e $\frac{dx}{dr}$ dinota il coefficiente differenziale di x quando r varia ma θ non varia; e come r varia y varierà ancora, sicchè nell'insieme r, x, ed y variano e θ non varia. Nell'Art. 203 supponiamo che r e θ siano espressi come funzioni di x ed y, e $\frac{dr}{dx}$ dinota il coefficiente differenziale di r quando x varia ma y non varia; e come x varia θ varierà ancora; sicchè nell'insieme x, r, e θ variano ed y non varia.

Così il $\frac{dx}{dr}$ dell'Art. 202 ed il $\frac{dr}{dx}$ dell'Art. 203 sono formati in differenti supposizioni riguardo alle quantità che variano e le quantità che non variano.

Nell'esempio del presente articolo il $\frac{dx}{dr}$ dell'Art. 202$=\cos\theta$, ed il $\frac{dr}{dx}$ dell'Art. 203 $=\frac{x}{r}=\cos\theta$; ed il prodotto dei due *non* è l'unità.

206. Si supponga u una funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z, e che queste siano legate da tre equazioni con tre nuove variabili indipendenti θ, φ, r; si cerca di esprimere $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, per mezzo dei coefficienti differenziali di u presi rispetto alle nuove variabili.

Abbiamo, per l'Art. 174,

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}\\ \frac{du}{dy}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}\\ \frac{du}{dz}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(1).$$

Ma per mezzo delle tre equazioni tra $x, y, z, \theta, \varphi, r$, possiamo determinare i valori di

$$\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\theta}{dz}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{dr}{dx}, \frac{dr}{dy}, \frac{dr}{dz},$$

e quindi le equazioni precedenti esprimono $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$, e $\frac{du}{dz}$, in termini di $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}$, e $\frac{du}{dr}$.

Inoltre risolvendo le equazioni precedenti possiamo esprimere $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$, in termini di $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$, e $\frac{du}{dz}$, i quali possono anche trovarsi per mezzo delle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\theta} \\ \frac{du}{d\varphi} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{du}{dr} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dr} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

207. Supponiamo, per dare un esempio su ciò che precede, che si ponga

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Onde, per applicare le equazioni (2) dell'Art. 206, abbiamo

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\theta} = r\cos\theta\cos\varphi, && \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, && \frac{dz}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta, \\ &\frac{dx}{d\varphi} = -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, && \frac{dy}{d\varphi} = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, && \frac{dz}{d\varphi} = 0, \\ &\frac{dx}{dr} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, && \frac{dy}{dr} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, && \frac{dz}{dr} = \cos\theta; \end{aligned}$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{du}{dx} + r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{du}{dy} - r\operatorname{sen}\theta\frac{du}{dz} \\ \frac{du}{d\varphi} &= -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{du}{dx} + r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dr} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{du}{dx} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{du}{dy} + \cos\theta\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \ldots . (1).$$

Se adoperiamo le equazioni (1) dell' Art. 206, dobbiamo porre le relazioni tra x, y, e z, sotto la forma,

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{z},$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x};$$

quindi $$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x}{r} = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} = \cos \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r},$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \varphi}{r},$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{r \operatorname{sen} \theta},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r \operatorname{sen} \theta},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0;$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{du}{dr} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{du}{d\theta} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{du}{dy} &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{du}{dr} + \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \varphi}{r} \frac{du}{d\theta} + \frac{\cos \varphi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{du}{d\varphi} \\ \frac{du}{dz} &= \cos \theta \frac{du}{dr} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{du}{d\theta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2),$$

il che si troverà d'accordo con (1).

Per esercizio diamo i risultati che nascono dal differenziare le equazioni (2) della precedente investigazione.

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\left\{\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r}\frac{d^2u}{d\theta\,dr}-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{du}{dr}-\frac{\cos\theta}{r^2}\left(2\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\frac{du}{d\theta}\right\}$$

$$+\cos2\varphi\left\{\frac{1}{r}\frac{d^2u}{d\varphi\,dr}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\varphi\,d\theta}-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right\};$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dz}=\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\cos\varphi\left\{\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right\}$$

$$+\frac{\cos2\theta\cos\varphi}{r}\left\{\frac{d^2u}{d\theta\,dr}-\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}\right\}$$

$$+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\left\{\frac{1}{r}\frac{d^2u}{d\theta\,d\varphi}-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d^2u}{dr\,d\varphi}\right\}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}2\theta\cos\varphi}{2}A+\frac{\cos2\theta\cos\varphi}{r}B+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}C,\ \text{poniamo;}$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=\frac{\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\varphi}{2}A+\frac{\cos2\theta\operatorname{sen}\varphi}{r}B-\frac{\cos\varphi}{r}C;$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\cos^2\theta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{du}{dr}\right)+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}-\frac{d^2u}{dr\,d\theta}\right);$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=$$

$$\cos^2\varphi\left\{\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r}\frac{d^2u}{dr\,d\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{du}{dr}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}\right\}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{r}\left\{\frac{d^2u}{d\varphi\,dr}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{d^2u}{d\theta\,d\varphi}-\frac{1}{r\operatorname{sen}^2\theta}\frac{du}{d\varphi}\right\}$$

$$+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r}\left\{\frac{1}{r\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{du}{dr}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{du}{d\theta}\right\},$$

$$=\cos^2\varphi\,L-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{r}M+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r}N,\ \text{poniamo,}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\operatorname{sen}^2\varphi\,L+\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{r}M+\frac{\cos^2\varphi}{r}N.$$

Addizionando, abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{du}{d\theta}.$$

208. L'esempio seguente per *due* variabili indipendenti è analogo a quello nell'Art. 200 per *una* variabile indipendente.

Se $x=e^\theta$ ed $y=e^\varphi$ si cerca di cambiare le variabili indipendenti da x ed y a θ e φ nell'espressione

$$x^n\frac{d^nu}{dx^n}+nx^{n-1}y\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}+\ldots$$

Si dinoti questa espressione con v_n, e dinoti v_{n+1} ciò che essa diventa quando n si cambia in $n+1$; dimostreremo che

$$v_{n+1}=\frac{dv_n}{d\theta}+\frac{dv_n}{d\varphi}-nv_n\,\ldots\ldots\,(1).$$

Infatti $$\frac{dv_n}{d\theta}=\frac{dv_n}{dx}\frac{dx}{d\theta}=x\frac{dv_n}{dx},$$

e $$\frac{dv_n}{d\varphi}=\frac{dv_n}{dy}\frac{dy}{d\varphi}=y\frac{dv_n}{dy}.$$

Ora si prenda un termine qualunque nell'espressione rappresentata da v_n e si eseguano le operazioni seguenti; si differenzii il termine rispetto ad x e dopo si moltiplichi per x; si differenzii il termine rispetto ad y e dopo si moltiplichi per y; indi si aggiungano i due risultati. Si prenda per esempio l'$(r+1)^{\text{mo}}$ termine cioè

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^{n-r}y^r\frac{d^nu}{dx^{n-r}dy^r},$$

ed eseguendo le operazioni otteniamo

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}\left\{x^{n+1-r}y^r\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1-r}dy^r}+x^{n-r}y^{r+1}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-r}dy^{r+1}}\right.$$
$$\left.+nx^{n-r}y^r\frac{d^nu}{dx^{n-r}dy^r}\right\}.$$

Da ciò deduciamo che $x\dfrac{dv_n}{dx}+y\dfrac{dv_n}{dy}$ è eguale ad nv_n insieme con due serie; ed unendo i termini simili nelle due serie otteniamo una sola serie di cui il termine generale è

$$\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-r+1)}{\underline{|r}}x^{n+1-r}y^r\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1-r}dy^r}.$$

Quindi
$$x\frac{dv_n}{dx}+y\frac{dv_n}{dy}=nv_n+v_{n+1};$$

e così (1) è dimostrata; possiamo scrivere (1) per abbreviazione così,

$$v_{n+1}=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-n\right\}v_n \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si ponga $n=1$ in (2); allora

$$v_2=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}v_1=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}\right\}$$
$$=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{du}{d\theta}+\frac{du}{d\varphi}\right\}=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}\right\}u,$$

come si può scrivere; si ponga poi $n=2$ in (2); allora

$$v_3=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-2\right\}v_2=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-2\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}\right\}u.$$

Procedendo nello stesso modo otteniamo

$$v_n=\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-(n-1)\right\}\ldots\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-2\right\}\left\{\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\varphi}-1\right\}\left\{\frac{d\theta}{d\varphi}+\frac{d}{d\varphi}\right\}u.$$

ESEMPII.

1. Cambiare la variabile indipendente da x ad y nell'equazione

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+u=0,$$

supponendo $y=\log x$. *Risultato* $\dfrac{d^2u}{dy^2}+u=0.$

2. Trasformare $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1+x^2)^2}=0$ in un' equazione nella quale θ è la variabile indipendente, essendo $\theta=\tan^{-1}x$.

Risultato $\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=0.$

3. Trasformare $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$, in un' equazione nella quale t è la variabile indipendente, essendo $x^2=4t$.

Risultato $t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0.$

4. Se $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(e^x+e^{-x})^2}$, ed $x=\log\frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}}$, mostrare che

$$(t-t^3)\,\frac{d^2y}{dt^2}+(1-3t^2)\frac{dy}{dt}=ty.$$

5. Se $x=\cos t$, allora

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0 \text{ diventa } \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

6. Trasformare $\dfrac{x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}$, prendendo $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\theta$.

Risultato $\dfrac{r^2}{\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}}.$

7. Se $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, mostrare che

$$\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{x\frac{dy}{dx}-y}=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}.$$

8. Se $x=a\,(1-\cos t)$ ed $y=a\,(nt+\text{sen}\,t)$, esprimere $\frac{d^2y}{dx^2}$ in termini di t. *Risultato* $-\frac{n\cos t+1}{a\,\text{sen}^3 t}.$

9. Si supponga u una funzione di r ed

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots\dots + x_n^2;$$

allora se

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} + \frac{d^2u}{dx_2^2} + \frac{d^2u}{dx_3^2} + \dots\dots + \frac{d^2u}{dx_n^2} = 0,$$

mostrare che

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

10. Dati $x = a\cos\varphi$, $y = b\,\text{sen}\,\varphi$, esprimere

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ in termini di } \varphi.$$

Risultato $\dfrac{(a^2\,\text{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

11. Trasformare $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4n^2y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0$ in un'equazione nella quale t sia la variabile indipendente, essendo $x = \log\sqrt{(\tan t)}$.

Risultato $\dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$.

12. Cambiare la variabile indipendente da y ad x in $\dfrac{d^3u}{dy^3} - 4\tan y\dfrac{d^2u}{dy^2} + 2\tan^2 y\dfrac{du}{dy} = 0$, supponendo $\tan y = x$.

Risultato $(1 + x^2)^2\dfrac{d^3u}{dx^3} + 2x(1 + x^2)\dfrac{d^2u}{dx^2} + 2\dfrac{du}{dx} = 0$.

13. Trasformare $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ in un'espressione nella quale y è la variabile indipendente.

14. Dato $x = t + t^2$, trasformare $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ in un'espressione nella quale x è la variabile indipendente.

15. Se $$z = u - e \operatorname{sen} u,$$

e $$\tan\frac{u}{2} = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \tan\frac{v}{2},$$

dimostrare che $$\frac{dz}{dv} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos v)^2}.$$

16. Se $$(a^2 - x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{a^2}{x}\frac{dz}{dx} - z = 0,$$

ed $$x^2 + y^2 = a^2,$$

dimostrare che $$x^2\frac{d^2z}{dy^2} - z = 0.$$

17. Trasformare

$$(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2} + A\,(a+bx)\frac{dy}{dx} + By = F'(x),$$

ponendo $$a + bx = e^t.$$

18. Se z è una funzione delle due variabili indipendenti x ed y, ed x ed y sono legate con due nuove variabili r e θ per mezzo di due equazioni, esprimere

$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dx\,dy},\quad \text{e}\quad \frac{d^2z}{dy^2},$$

in termini delle nuove variabili

Es. Se $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostrare che

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A + B\cos 2\theta - C\operatorname{sen} 2\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = A - B\cos 2\theta + C\operatorname{sen} 2\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = B\operatorname{sen} 2\theta + C\cos 2\theta;$$

in cui $A + B = \dfrac{d^2z}{dr^2}$, $A - B = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2z}{d\theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dr}$,

$$C = \frac{1}{r}\frac{d^2z}{dr\,d\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{dz}{d\theta}.$$

19. Se x, y, z e ξ, η, ζ, sono le coordinate dello stesso punto P riferito a due differenti sistemi rettangolari, dimostrare che

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}.$$

20. Es. Se $$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}=0,$$

ed $$x=ye^z,$$

dimostrare che $y\dfrac{d^2z}{dy^2}+\dfrac{dz}{dy}=0.$

21. Dato $$u=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2;$$

e $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,$$

mostrare che

$$u\left(\frac{ds}{dt}\right)^4=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2.$$

22. Trasformare $\dfrac{d^2y}{d\theta^2}-\sec\theta\operatorname{cosec}\theta\dfrac{dy}{d\theta}+y\,n^2\tan^2\theta=0$, in un'equazione nella quale x sia la variabile indipendente, avendo messo $x=\log(\sec\theta)$.

Risultato $\dfrac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0.$

23. Se $y=e^{-\theta}$ ed $x=\operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{e^{-\theta}}{\cos^5\theta}\{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}^2\theta-2\}.$$

24. Se $s=e^x+e^y$, e $t=e^{-x}+e^{-y}$, esprimere

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\text{ in termini di }\frac{du}{ds},\ \frac{du}{dt},\ldots$$

Risultato $s^2\dfrac{d^2u}{ds^2}-2st\dfrac{d^2u}{ds\,dt}+t^2\dfrac{d^2u}{dt^2}+s\dfrac{du}{ds}+t\dfrac{du}{dt}.$

25. Se $x=ae^\theta\cos\varphi$, ed $y=ae^\theta\operatorname{sen}\varphi$, mostrare che

$$y^2\frac{d^2u}{dx^2}-2xy\frac{d^2u}{dx\,dy}+x^2\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{du}{d\theta}.$$

CAPITOLO XIII.

MASSIMI E MINIMI DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE.

209. Si supponga $\varphi(x)$ dinotare una certa funzione di x, e che mentre la variabile x passa gradatamente da un definito valore ad un altro, $\varphi(x)$ varii in modo che sia talora crescente e talora decrescente. Vi debbono essere allora alcuni valori di x, per i quali $\varphi(x)$ incomincia a decrescere, essendo stata prima crescente, o incomincia a crescere, essendo stata prima decrescente. Nel primo caso, $\varphi(x)$ ha per il valore particolare di x un valore maggiore di quelli che ha per i valori adiacenti di x, e si dice di avere un valore *massimo*. Nel secondo caso, $\varphi(x)$ ha pel valore particolare di x un valore minore di quelli che ha per i valori adiacenti di x, e si dice di avere un valore *minimo*. Quindi, questi termini *massimo* e *minimo* non sono usati per dinotare i valori aritmeticamente più grandi e più piccoli che una funzione può prendere; poichè si vede per la spiegazione precedente che una funzione *può* avere diversi valori massimi e minimi, e che un particolare minimo può essere maggiore di un particolare massimo.

210. Def. Se mentre x cresce o decresce dal valore a per un intervallo finito, comunque piccolo, $\varphi(x)$ è sempre minore di $\varphi(a)$, allora $\varphi(a)$ si dice un valore *massimo* di $\varphi(x)$; se $\varphi(x)$ è sempre maggiore di $\varphi(a)$, allora $\varphi(a)$ si dice un valore *minimo* di $\varphi(x)$.

211. *Regola per scoprire i valori massimi e minimi.*

Dinoti $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x. Per l'Art. 92, abbiamo

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h).$$

Se $\varphi'(x)$ non è zero possiamo dare un tale valore ad h che il segno di

$$h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h)$$

sarà per questo valore di h, e per tutti i valori inferiori di h, lo stesso che il segno di $h\varphi'(x)$, poichè $\frac{h}{2}\varphi''(x+\theta h)$ può sempre rendersi minore di $\varphi'(x)$ prendendo h sufficientemente piccolo. In questo caso

$$\varphi(x+h) - \varphi(x)$$

e
$$\varphi(x-h) - \varphi(x)$$

hanno segni *differenti*, e per conseguenza $\varphi(x)$ non ha nè un massimo nè un minimo valore.

Adunque, come prima condizione per l'esistenza di un valore massimo o minimo di $\varphi(x)$, dobbiamo avere

$$\varphi'(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Sia a un valore di x dedotto dall'equazione (1), sicchè

$$\varphi'(a) = 0.$$

Abbiamo ora, per l'Art. 92,

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \frac{h^3}{\underline{|3}}\varphi'''(a+\theta h).$$

Si supponga $\varphi''(a)$ diverso da zero; allora dando ad h un valore sufficientemente piccolo, il segno di

$$\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \frac{h^3}{\underline{|3}}\varphi'''(a+\theta h)$$

sarà lo stesso che quello di $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)$, o di $\varphi''(a)$, per questo valore di h e per tutti i valori inferiori;

quindi
$$\varphi(a+h) - \varphi(a),$$

e
$$\varphi(a-h) - \varphi(a),$$

hanno gli *stessi* segni.

Se dunque $\varphi''(a)$ è *positivo* $\varphi(a)$ è un valore minimo di $\varphi(x)$; se $\varphi''(a)$ è negativo $\varphi(a)$ è un valore massimo di $\varphi(x)$.

Se $\varphi''(a)$ svanisce del pari che $\varphi'(a)$ allora, per l'Art. 92,

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\frac{h^3}{\underline{|3}}\varphi'''(a)+\frac{h^4}{\underline{|4}}\varphi''''(a+\theta h).$$

Con ragionamento simile a quello usato innanzi, possiamo mostrare che se $\varphi'''(a)$ non svanisce $\varphi(a)$ non può essere nè un massimo nè un minimo valore di $\varphi(x)$; ma che se $\varphi'''(a)$ svanisce e $\varphi''''(a)$ è positivo $\varphi(a)$ è un minimo, e se $\varphi'''(a)$ svanisce e $\varphi''''(a)$ è negativo $\varphi(a)$ è un massimo.

Poichè questo procedimento può essere continuato finchè si arrivi ad un coefficiente differenziale che *non* svanisce per $x=a$, abbiamo il seguente risultato. Affinchè $\varphi(x)$ possa avere un valore massimo o minimo quando $x=a$, è necessario che questo valore di x faccia svanire un numero *dispari* di coefficienti differenziali successivi di $\varphi(x)$, cominciando dal primo; quando questa condizione è soddisfatta $\varphi(a)$ è un massimo se il coefficiente differenziale seguente è negativo ed un minimo se esso è positivo.

212. Si deve osservare che nella dimostrazione precedente abbiamo usato θ per dinotare una *frazione minore dell'unità*, e non si deve supporre che la *stessa* frazione sia dinotata ovunque il simbolo viene adoperato. Inoltre abbiamo supposto al solito che nessuna delle funzioni $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc. sia infinita. Vedremo quì appresso, che i valori massimi e minimi si *possono* avere quando $\varphi'(x)=\infty$, del pari che quando $\varphi'(x)=0$.

213. Supponiamo che quando $x=a$, la funzione $\varphi(x)$ abbia un valore massimo o minimo, e che $\varphi^n(a)$ sia il primo coefficiente differenziale che non svanisca, *n essendo pari*. Per l'Art. 92, poichè $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc. svaniscono tutti sino a $\varphi^{n-1}(a)$ inclusivamente, abbiamo

$$\varphi'(a+h)=\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}}\varphi^n(a)+\frac{h^n}{\underline{|n}}\varphi^{n+1}(a+\theta h),$$

$$\varphi'(a-h)=-\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}}\varphi^n(a)+\frac{h^n}{\underline{|n}}\varphi^{n+1}(a-\theta_1 h),$$

in cui θ e θ_1 sono frazioni proprie.

Da questi valori di $\varphi'(a+h)$ e $\varphi'(a-h)$ vediamo che $\varphi'(x)$ cambia di segno quando x passa pel valore a. Se supponiamo x *crescere* e passare pel valore a, allora $\varphi'(x)$ muta dal positivo al negativo se $\varphi''(a)$ è negativo, cioè, se $\varphi(a)$ è un massimo; e $\varphi'(x)$ muta dal negativo al positivo se $\varphi''(a)$ è positivo, cioè, se $\varphi(a)$ è un minimo. Ciò suggerisce un' altra forma per la definizione dei valori massimi e minimi e per la ricerca delle condizioni della loro esistenza che diamo nel prossimo articolo.

214. Def. Se variando x in un intervallo finito, comunque piccolo, $\varphi(x)$ cresce finchè $x=a$ e poi decresce, $\varphi(a)$ si dice un valore massimo di $\varphi(x)$; se $\varphi(x)$ decresce finchè $x=a$ e poi cresce, $\varphi(a)$ si dice un valore minimo.

Per l' Art. 89, se il coefficiente differenziale di una funzione è positivo questa funzione cresce con la variabile, e se il coefficiente differenziale è negativo la funzione decresce al crescere della variabile. Quindi, al crescere di x, $\varphi'(x)$ deve passare dal positivo al negativo quando $x=a$, se $\varphi(a)$ è un massimo, e dal negativo al positivo se $\varphi(a)$ è un minimo. Ma una funzione può solamente mutare il suo segno passando per zero o per l' infinito. Quindi, dobbiamo trovare i valori di x che rendono

$$\varphi'(x) = 0,$$

o

$$\varphi'(x) = \infty;$$

e se passando x per uno di questi valori $\varphi'(x)$ muta di segno, abbiamo per questo valore di x un massimo o minimo valore di $\varphi(x)$, secondo che, crescendo x, il cangiamento è dal positivo al negativo o dal negativo al positivo.

Es. (1) Si supponga $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$,

allora

$$\varphi'(x) = 3(x^2 - 6x + 8),$$

$$\varphi''(x) = 6(x - 3).$$

Se poniamo $\varphi'(x) = 0$ otteniamo $x = 2$, o $x = 4$;

quando $x = 2$, $\varphi''(x)$ è negativo,

quando $x = 4$, $\varphi''(x)$ è positivo.

Quindi quando $x = 2$, $\varphi(x)$ ha un valore massimo, e quando $x = 4$, $\varphi(x)$ ha un valore minimo.

Es. (2) Sia

$$\varphi(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x;$$

onde

$$\varphi'(x) = e^x - e^{-x} - 2\operatorname{sen} x,$$

$$\varphi''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x,$$

$$\varphi'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\,\mathrm{sen}\,x,$$

$$\varphi''''(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Se $x = 0$, abbiamo $\varphi'(x) = 0$, $\varphi''(x) = 0$, $\varphi'''(x) = 0$, e $\varphi''''(x) = 4$. Quindi, $\varphi(x)$ è un minimo per $x = 0$.

Si può mostrare facilmente che $x = 0$ è il solo valore di x pel quale $\varphi'(x)$ svanisce; infatti

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \text{etc.},$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \text{etc.},$$

$$2\,\mathrm{sen}\,x = 2\left\{x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \text{etc.}\right\};$$

quindi $$\varphi'(x) = 4\left\{\frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^7}{\lfloor 7} + \frac{x^{11}}{\lfloor 11} + \text{etc.}\right\}.$$

Tutt'i termini in $\varphi'(x)$ essendo dello *stesso* segno, $\varphi'(x)$ non può mai svanire eccetto quando $x = 0$.

Es. (3) si supponga $\frac{du}{dx} = x(x-1)^2(x-3)^3$, per quali valori di x sarà u un massimo o un minimo? In questo esempio il metodo dell'Art. 214 è preferibile. Quando x è negativo $\frac{du}{dx}$ è positivo; quando x è positivo e minore dell'unità, $\frac{du}{dx}$ è negativo. Quindi $\frac{du}{dx}$ muta dal positivo al negativo quando x passa pel valore 0, ed $x = 0$ rende u un massimo. Quando $x = 1$, $\frac{du}{dx}$ svanisce; esso però non cangia il suo segno, ma continua ad essere negativo finchè $x = 3$, e dopo ciò esso è positivo. Quindi, quando $x = 1$, u non ha nè un massimo nè un minimo valore, ma ha un valore minimo quando $x = 3$.

Supponiamo che nell'ultimo esempio dato si volesse semplicemente conoscere se $x = 0$ dà un valore massimo o minimo ad u, e che dovessimo procedere secondo il metodo dell'Art. 211: abbiamo

$$\frac{du}{dx} = x(x-1)^2(x-3)^3,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (x-1)^2(x-3)^3 + 2x(x-1)(x-3)^3 + 3x(x-1)^2(x-3)^2;$$

quando $x = 0$ il primo termine in $\frac{d^2u}{dx^2}$ è negativo, *e gli altri due termini svaniscono poichè essi hanno tutti e due x per fattore.* Quindi non avevamo bisogno di esprimerli, ma potevamo porre

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (x-1)^2(x-3)^3 + \text{termini che svaniscono quando } x = 0.$$

Questa osservazione è importante ad essere notata, poichè in esempii come il precedente ci risparmia la pena di scrivere termini superflui.

215. *Valori massimi e minimi di una funzione implicita.*

Sia $\varphi(x, y) = 0$ un'equazione che lega x ed y; si cerca di trovare i valori massimi o minimi di y. Per la data equazione conosciamo che y deve essere *una certa* funzione di x, e se l'equazione si può risolvere possiamo esprimere y esplicitamente in termini di x, e quindi trovare i valori massimi o minimi di y per gli articoli precedenti.

Ma invece di risolvere la data equazione possiamo procedere nel seguente modo: per l'Art. 177,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)};$$

in cui u sta per $\varphi(x, y)$. Ma i valori di x che rendono y un massimo o un minimo debbono, per l'Art. 211, trovarsi risolvendo l'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$. Quindi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0,$$

e questa equazione, combinata con $u = 0$, determinerà i valori di x, che *possono* rendere y un massimo o un minimo. Per determinare se un tale valore di x *rende* y un massimo o un minimo, dobbiamo, per l'Art. 211, esaminare il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$. Per l'Art. 180, poichè $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, abbiamo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}.$$

Quindi abbiamo questa regola: Per trovare i valori massimi o minimi di y, che è una funzione implicita di x determinata da $u = 0$, dobbiamo trovare i valori di x ed y che soddisfano $u = 0$ e $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$. Se quando questi valori si sostituiscono in $\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$ la frazione è *positiva*, abbiamo ottenuto un valore massimo di y; se la frazione è *negativa*, abbiamo un valore minimo di y.

Es. Se $$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \text{ . . . . } (1),$$
trovare i valori massimi o minimi di y.

Quì $$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

quindi $$ay - x^2 = 0 \text{ . . . . } (2).$$

Combinando (1) con (2), abbiamo

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0;$$

onde $$x = 0,$$

o $$x = a\sqrt[3]{2}.$$

I corrispondenti valori di y sono

$$y = 0,$$

$$y = a\sqrt[3]{4}.$$

Se sostituiamo i valori $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$, in $-\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$, cioè, in $-\frac{6x}{3(y^2-ax)}$, otteniamo $-\frac{2}{a}$. Quindi vi è un valore massimo di y. I valori $x=0$, $y=0$, che annullano il numeratore di $\frac{dy}{dx}$, annullano anche il suo denominatore; così $\frac{dy}{dx}$ prende una forma indeterminata, e dobbiamo scoprire il suo effettivo valore. Formando le equazioni derivate della data equazione, abbiamo

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a\frac{dy}{dx}+2x=0,$$

$$(y^2-ax)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(6y\frac{dy}{dx}-3a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2=0.$$

Allorchè poniamo in queste $x=0$, $y=0$, la prima ci dà $\frac{dy}{dx}=0$, e la seconda $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3a}$. Quindi, quando $x=0$, ed $y=0$, y è un minimo.

216. Se i valori di x ed y trovati da $u=0$ e $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, annullano $\frac{d^2y}{dx^2}$, allora affinchè essi possano rendere y un massimo o minimo, sarà necessario che anche $\frac{d^3y}{dx^3}$ svanisca. Ciò può essere attestato facendo uso del valore di $\frac{d^3y}{dx^3}$ dato nell' Art. 184; ed ottenendo una formola per $\frac{d^4y}{dx^4}$ simile a quella per $\frac{d^3y}{dx^3}$ or ora indicata, possiamo accertare se $\frac{d^4y}{dx^4}$ è positivo o negativo per i valori particolari di x ed y. Non pertanto a motivo della complicazione delle formole generali per $\frac{d^3y}{dx^3}$ e $\frac{d^4y}{dx^4}$, è preferibile di determinarlo in ogni esempio direttamente col *metodo* dell' Art. 184, anzichè richiamare i risultati di quell' articolo.

217. Si supponga $u=\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)=0$; sicchè y è una funzione di x per la seconda equazione, e quindi per la prima equazione u è una funzione di x; si cercano i valori massimi e minimi di u. Possiamo procedere teoreticamente così:

si risolva l'equazione $\psi(x, y) = 0$, e così otteniamo y in funzione di x; si sostituisca questo valore di y in $\varphi(x, y)$; così u diviene una funzione della sola x, ed i suoi valori massimi e minimi possono trovarsi con le regole precedenti. Ma possiamo evitare la difficoltà di risolvere l'equazione $\psi(x, y) = 0$, nel seguente modo.

Per l'Art. 172, abbiamo

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Inoltre, ponendo v per $\psi(x, y)$, abbiamo, per l'Art. 177,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)};$$

onde

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)}.$$

Quindi, i valori di x ed y che rendono u un massimo o un minimo debbono cercarsi tra quelli che soddisfano simultaneamente

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

e $\psi(x, y)$ o $v = 0$.

Il valore di $\frac{d^2u}{dx^2}$ deve poi trovarsi con l'Art. 176, e dobbiamo esaminare se i valori particolari di x ed y lo rendono positivo o negativo, per determinare se u è un massimo o un minimo.

Es. $$u = x^2 + y^2,$$

mentre $$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0, \text{ o } v = 0.$$

Quì $$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x, \qquad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = 2(x - a), \qquad \left(\frac{dv}{dy}\right) = 2(y - b).$$

Onde $$x(y-b)-y(x-a)=0;$$
quindi $$ay=bx.$$

Si sostituisca il valore di y in $v=0$, ed abbiamo

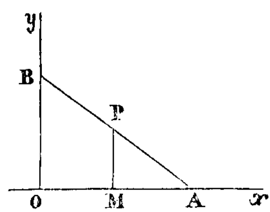
$$x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-2x\left(a+\frac{b^2}{a}\right)+a^2+b^2=c^2;$$

onde $$x=a\pm\frac{ac}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Esaminando si troverà, che se prendiamo il segno superiore nel valore di x otteniamo un valore massimo per u, e se prendiamo il segno inferiore, un minimo. Questo esempio è una soluzione della quistione geometrica, « Trovare i punti sulla circonferenza di un dato cerchio che sono ad una distanza massima o minima da un dato punto. »

218. L'esempio seguente introdurrà il lettore a considerazioni con le quali il procedimento per trovare i valori massimi e minimi può alle volte essere abbreviato.

Per un punto dato P si tira una linea retta, che incontra gli assi Ox ed Oy in A e B rispettivamente; trovare la lunghezza minima che questa linea può avere.



Sia $OM=a$, $MP=b$, $PAO=\theta$.

Allora $$PA=\frac{b}{\operatorname{sen}\theta},$$
$$PB=\frac{a}{\cos\theta}.$$

Si ponga $u=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\theta}+\dfrac{a}{\cos\theta}$, e dobbiamo trovare il valore minimo di u.

Ora $$\frac{du}{d\theta}=-\frac{b\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}+\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta};$$

quindi $\dfrac{du}{d\theta}$ svanisce solamente quando $\tan\theta=\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$.

Dalla figura apparisce che facendo θ o tanto piccolo quanto ci piace, o tanto prossimamente eguale ad un angolo retto quanto ci piace, la linea AB può rendersi tanto grande quanto ci piace. Inoltre, variando θ da 0 a $\frac{\pi}{2}$, vi deve essere un valore di θ che dà alla linea AB la *minima* lunghezza che può avere, e questa *più piccola* lunghezza di AB soddisferà alla definizione di una lunghezza *minima*. E come $\frac{du}{d\theta}$ per un valore di θ tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ non può mai cambiare il suo segno eccetto quando $\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, questo deve essere il valore di θ che dà la lunghezza minima che cerchiamo.

Questo valore di θ dà per la lunghezza minima il valore

$$(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

In questo esempio è facile vedere pel valore di $\frac{du}{d\theta}$, che esso *muta* di segno dal negativo al positivo quando θ cresce e passa pel valore assegnato; ma in quistioni più complicate è spesso più conveniente di mostrare nella maniera adoperata innanzi, che un massimo o un minimo *deve* necessariamente esistere, ed allora ci risparmiamo la pena di esaminare se il coefficiente differenziale della funzione muta di segno quando svanisce.

219. Il procedimento per trovare i valori massimi e minimi di una funzione implicita può essere esteso al caso nel quale una variabile è legata con più di un'altra variabile, il numero totale delle equazioni essendo minore di un'unità del numero totale delle variabili. Supponiamo, per esempio, le tre equazioni,

$$F(x, y, z, u) = 0,$$

$$F_1(x, y, z, u) = 0,$$

$$F_2(x, y, z, u) = 0;$$

u essendo la variabile di cui si vuol trovare il massimo o minimo valore.

Dalle equazioni date segue che possiamo considerare y, z, ed u funzioni della variabile indipendente x. Quindi

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{du}\frac{du}{dx}=0\\ \frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx}=0\\ \frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF_2}{du}\frac{du}{dx}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(1).$$

Da queste equazioni possiamo eliminare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, ed il valore di $\frac{du}{dx}$ che allora otteniamo deve essere messo eguale a zero. O, più semplicemente, possiamo porre $\frac{du}{dx}=0$ in queste equazioni, e poi eliminare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ dalle equazioni risultanti che sono

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0\\ \frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx}=0\\ \frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(2).$$

L'equazione ottenuta eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, combinata con le equazioni $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, determinerá x, y, z ed u.

Differenziando di nuovo le equazioni (1), possiamo ottenere $\frac{d^2u}{dx^2}$, e dal segno che i valori di x, y, z, u, già trovati, danno a questa quantità, determiniamo se u è un massimo o un minimo.

220. Supponiamo di avere una funzione di n variabili, le variabili essendo legate da $n-1$ equazioni, e cerchiamo il valore massimo o minimo della funzione. Per esempio, supponiamo tre equazioni

$$F(x, y, z, u)=0, \quad F_1(x, y, z, u)=0, \quad F_2(x, y, z, u)=0,$$

e cerchiamo il massimo o minimo di $f(x, y, z, u)$. In questo caso, alle equazioni (1) dell'articolo precedente, in cui $\frac{du}{dx}$ non deve essere supposto zero, dobbiamo aggiungere

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=0.$$

Da queste quattro equazioni dobbiamo eliminare $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, e $\frac{du}{dx}$. L'equazione risultante combinata con le date equazioni $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, determinerà x, y, z, ed u. Formeremo quindi il secondo coefficiente differenziale di $f(x,y,z,u)$ rispetto ad x. Questo conterrà $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, e $\frac{d^2u}{dx^2}$, i quali dovranno trovarsi differenziando le equazioni (1): dal segno di questo secondo coefficiente differenziale di $f(x,y,z,u)$ si deciderà se la funzione è un massimo o un minimo.

221. Nell'Art. 214 si ottenne per la condizione affinchè $f(x)$ abbia un valore massimo o minimo, che $\varphi'(x)$ muti di segno, e quindi che $\varphi'(x)$ sia zero o infinito. I casi nei quali $\varphi'(x)$ è infinito si presentano raramente, e negli articoli che seguono l'Art. 214 abbiamo considerato sempre che $\varphi'(x)$ *svanisca* quando $\varphi(x)$ è un massimo o un minimo. Aggiungeremo quì una proposizione la quale mostra che secondo il primo concetto dato dei valori massimi e minimi (Art. 209–213), *può* esistere un massimo o un minimo quando il coefficiente differenziale della funzione considerata diviene infinito.

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una tale funzione di x che per $x=a$ alcuno dei coefficienti differenziali di $\varphi(x)$ sia infinito, sicchè $\varphi(a+h)$ non possa svilupparsi secondo le potenze di h col Teorema di Taylor.

Supponiamo che con un procedimento algebrico non soggetto ad eccezione si trovi

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+Ch^{\gamma}+\text{etc.},$$

in cui α, β, γ, etc., non sono necessariamente interi positivi. Se alcuno di questi esponenti è una frazione nei suoi minimi termini con un denominatore pari, allora $\varphi(a-h)-\varphi(a)$ sarà impossibile, e la considerazione dei valori massimi e minimi diviene inapplicabile. Se nessuno degli esponenti è di questa forma, allora $\varphi(a-h)-\varphi(a)$ sarà una quantità possibile. Ora vi possono essere casi nei quali, prendendo h sufficientemente piccolo, il segno di Ah^α determina il segno di $\varphi(a+h)-\varphi(a)$; per esempio, questo accade se il numero dei termini in $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ è finito, e gli esponenti α, β, γ, etc., sono tutti positivi, ed α il minimo. Supponiamo tale caso, e sia α una frazione propria con un numeratore pari; allora $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ e $\varphi(a-h)-\varphi(a)$ sono tutte e due positive se A è positivo, e negative se A è negativo, quando h è preso sufficientemente piccolo. Quindi $\varphi(a)$ nel primo caso è un valore minimo di $\varphi(x)$ e nel secondo caso è un valore massimo.

Inoltre, poichè α è una frazione *propria*,

$$\frac{d\varphi(a+h)}{dh} \text{ è infinito quando } h=0,$$

quindi $\qquad \varphi'(x)$ è infinito quando $x=a$.

Adunque $\varphi(x)$ *può* essere un massimo quando $\varphi'(x)$ è infinito.

Es. Si supponga

$$\varphi(x)=c+(x-a)^{\frac{2}{3}}+(x-a)^{\frac{4}{3}};$$

onde

$$\varphi(a+h)=c+h^{\frac{2}{3}}+h^{\frac{4}{3}},$$

$$\varphi(a)=c,$$

$$\varphi(a\pm h)-\varphi(a)=h^{\frac{2}{3}}+h^{\frac{4}{3}}.$$

Quindi $\varphi(a+h)$ e $\varphi(a-h)$ sono tutte e due necessariamente maggiori di $\varphi(a)$. Adunque $\varphi(a)$ è un valore minimo di $\varphi(x)$, ed è chiaro che $\varphi'(x)$ è infinito quando $x=a$.

222. *Intorno ad alcuni casi di Massimi e Minimi Geometrici.*

Occasionalmente s'incontrano in Geometria casi di valori massimi e minimi per i quali gli ordinarii procedimenti analitici sembrano essere in difetto, benchè per considerazioni geometriche sia ovvia l'esistenza di massimi e minimi. Il problema seguente introdurrà la difficoltà che ci proponiamo di spiegare. « Trovare la perpendicolare massima e la minima condotta dal fuoco sulla tangente di un'ellisse, la perpendicolare essendo espressa in termini del raggio vettore. »

L'equazione che dà la perpendicolare in termini del raggio vettore è

$$p^2 = \frac{b^2 r}{2a - r};$$

onde $$p\frac{dp}{dr} = \frac{ab^2}{(2a-r)^2}, \text{ che deve essere} = 0.$$

Ora ciò può essere solamente soddisfatto da $r = \pm\infty$, i quali valori non sono ammissibili, mentre conosciamo dalla Geometria che p *ha* un valore massimo $= a(1+e)$, ed un valore minimo $= a(1-e)$.

La ragione per la quale non troviamo questi valori col precedente ordinario procedimento analitico è la seguente. Nella teoria ordinaria dei massimi e minimi la funzione si considera espressa in termini di una variabile *indipendente* la quale può prendere tutt'i valori possibili. Ora nell'esempio precedente r non è una variabile *indipendente;* i suoi valori sono limitati a quelli trovati attribuendo *tutt'i valori possibili a* θ nell'equazione

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}.$$

Poichè r è così una funzione di θ, possiamo considerare p che è una funzione di r essere anche una funzione di θ. Quindi $\frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{d\theta}$, e ciò può rendersi $= 0$ se possiamo avere $\frac{dr}{d\theta} = 0$. Questo si può fare, e così p ha un valore massimo o minimo nello stesso tempo che r.

Simili osservazioni si applicano ad altri esempii. Così generalmente, se $y = \varphi(x)$, in cui x non è suscettibile di tutt'i valori possibili, può essere impossibile di porre $\frac{dy}{dx} = 0$, e così non vi potrà essere, apparentemente, nessun valore massimo o minimo di y. Ma in questo caso, se x può essere espressa in termini di una variabile θ che può prendere tutt'i valori possibili, dobbiamo porre $\frac{dx}{d\theta} = 0$, il che dà $\frac{dy}{d\theta} = 0$, e così determiniamo valori simultanei massimi o minimi di x ed y.

Es. Trovare la massima e la minima lunghezza della retta condotta ad un circolo da un dato punto esterno.

Si prenda l'asse delle x che passi pel centro del circolo e pel dato punto esterno, il primo essendo l'origine. Sia

$a =$ al raggio del circolo,

$c =$ alla distanza del punto dato (sia A) dal centro,

x sia l'ascissa di un punto P del circolo; allora $AP^2 = c^2 + a^2 - 2cx$.

Il coefficiente differenziale di questa espressione rispetto ad x è $-2c$, il quale non può svanire. Ma se poniamo $x = a \cos\theta$,

$$AP^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\theta,$$

$$\frac{d.AP^2}{d\theta} = 2ac \operatorname{sen}\theta;$$

e $\theta = 0$, $\theta = \pi$, danno rispettivamente i valori minimo e massimo di AP^2.

In questo esempio la difficoltà non apparirebbe se scegliessimo i nostri assi in modo che x non sia un massimo simultaneamente con AP. Chiamando b l'ordinata di A, c l'ascissa di A, ed a il raggio del circolo, avremo

$$AP^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b\sqrt{(a^2 - x^2)} - 2cx,$$

che ha i suoi valori massimo e minimo, quando

$$x = \pm \frac{ac}{\sqrt{(b^2 + c^2)}}.$$

Il seguente è un caso analogo. Trovare quei diametri coniugati di un' ellisse di cui la somma è un massimo o un minimo. Se r ed r' siano due diametri coniugati qualunque, allora

$u = r + r'$ deve essere un massimo o un minimo,

mentre $\quad r^2 + r'^2 = a^2 + b^2 = c^2$, supponiamo;

così
$$u = r + \sqrt{(c^2 - r^2)},$$

$$\frac{du}{dr} = 1 - \frac{r}{\sqrt{(c^2 - r^2)}}.$$

Se $\frac{du}{dr}$ si pone $= 0$, otteniamo $r^2 = \frac{c^2}{2}$, e quindi $r'^2 = \frac{c^2}{2}$. Questo ci dà i *diametri conjugati eguali*, la somma dei quali conosciamo essere un massimo. Se esprimiamo r, e per conseguenza r', in termini di una variabile che possa prendere tutt'i valori possibili, come per esempio φ l'inclinazione di r sull'asse maggiore, otterremo un risultato addizionale. Infatti $\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\varphi}$, e quindi, se $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, abbiamo anche $\frac{du}{d\varphi} = 0$. Ma $\frac{dr}{d\varphi}$ rende r un massimo o un minimo, e così otteniamo i *due assi principali*, la di cui somma è un minimo. Con un metodo differente, avremmo potuto ottenere prima il valore minimo di $r + r'$. Infatti essendo

$$r^2 + r'^2 = a^2 + b^2,$$

ed

$$rr' \operatorname{sen} \theta = ab,$$

abbiamo

$$(r + r')^2 = a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\operatorname{sen} \theta},$$

in cui θ è l'angolo tra r ed r'. Si differenzii rispetto a θ, e si ha

$$-\frac{2ab \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 0,$$

onde $\theta = \frac{\pi}{2}$; questo dà il valore minimo come sopra; $\frac{d\theta}{d\varphi} = 0$ ci darebbe un secondo risultato, che sarebbe il massimo.

L'articolo precedente è stato preso quasi letteralmente dal 3.° vol. del *Cambridge Mathematical Journal*, p. 237. Il problema seguente fornirà un esercizio. Trovare la lunghezza massima o minima della retta condotta dall'estremità dell'asse minore di un'ellisse ad incontrare la curva. Se x, y, siano le coordinate del punto in cui una retta tirata dall'estremità dell'asse minore incontra la curva, la lunghezza della linea può essere espressa come una funzione di x o di y; così due soluzioni possono essere ottenute e paragonate.

Nella risoluzione di alcuni degli esempii sui massimi e minimi si richiederanno i seguenti risultati; essi possono essere stabiliti per mezzo del Calcolo Integrale.

Il volume di un cilindro retto si trova moltiplicando l'area della sua base per l'altezza.

La superficie convessa di un cilindro retto si trova moltiplicando il perimetro della sua base per l'altezza.

Il volume di un cono retto è un terzo del prodotto della sua base per l'altezza.

La superficie convessa di un cono retto a base circolare è un mezzo del prodotto del suo lato pel perimetro della sua base.

Se r è il raggio di una sfera il suo volume è $\frac{4\pi r^3}{3}$ e la sua superficie $4\pi r^2$.

ESEMPII DI MASSIMI E MINIMI.

1. Se $u = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, trovare il suo valore massimo ed il minimo. $x=1$ dà un massimo, $x=3$ un minimo, $x=0$ nè l'uno nè l'altro.

2. Se $u = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, trovare il suo valore massimo ed il minimo. 4 è un massimo, e -28 un valore minimo.

3. Se $u = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$, mostrare che esso non ha nè un valore massimo nè un minimo.

4. Se $u = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$, è esso un massimo o un minimo quando $x = 1$? Nè l'uno nè l'altro.

5. $u = (x-1)^4 (x+2)^3$.
   Massimo quando $x = -\frac{5}{7}$, minimo quando $x = 1$, nè l'uno nè l'altro quando $x = -2$.

6. $u = (1+x)^{\frac{2}{3}} (7-x)^2$. $x = 0$ rende u un minimo, $x = 1$ rende u un massimo, ed $x = 7$ un minimo.

7. $u = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$.
   Un massimo quando $x = -4$, e quando $x = 3$; ed un minimo quando $x = -3$ e quando $x = 4$.

8. $u = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$. $x = \frac{1}{2}$ rende u un minimo.

9. $u = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$. Se $x = 4$, u è un massimo, e se $x = 16$, un minimo.

10. Se $\dfrac{du}{dx} = x^3 (x-1)^2 (x-2)^3 (x-3)^4$, trovare quali valori di x rendono u un massimo o un minimo.
    $x = 0$ dà un massimo, ed $x = 2$ un minimo.

11. Se $\frac{du}{dx}=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, trovare quando u è un massimo o un minimo.

$x=1$ dà un massimo, ed $x=3$ un minimo.

12. $u=x(a+x)^2(a-x)^3$.

Un massimo quando $x=\frac{a}{3}$, e quando $x=-a$, ed un minimo quando $x=-\frac{a}{2}$.

13. $u=\frac{(a-x)^3}{a-2x}$.

Un minimo quando $x=\frac{a}{4}$.

14. $u=b+c(x-a)^{\frac{2}{3}}$.

Un minimo quando $x=a$.

15. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$.

Un minimo quando $x=\frac{a^2}{a+b}$, ed un massimo quando $x=\frac{a^2}{a-b}$.

16. $u=\frac{3x^2-a^2}{(a^2+x^2)^3}$.

Un minimo quando $x=0$, ed un massimo quando $x=\pm a$.

17. $u=(mx+na)^{m+n}-(m+n)^{m+n}x^m a^n$.

Un minimo quando $x=a$.

18. $u=\frac{x}{1+x\tan x}$.

Un massimo quando $x=\cos x$.

19. $u=x^{\frac{1}{x}}$.

Un massimo quando $x=e$.

20. $u=\frac{\tan^3 x}{\tan 3x}$.

Un massimo quando $x=\frac{\pi}{8}$, etc.

21. Mostrare che sen x $(1+\cos x)$ è un massimo quando $x=\frac{\pi}{3}$.

22. Se $xy(y-x)=2a^3$, trovare se y ha un massimo o un minimo valore.

Un minimo quando $x=a$.

23. Se $3a^2y^2+xy^3+4ax^3=0$, mostrare che quando $x=\frac{3a}{2}$, y ha un valore massimo, cioè $-3a$, il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ essendo allora $-\frac{8}{5a}$.

24. Se $x^4+2ax^2y-ay^3=0$, mostrare che quando $x=\pm a$, $y=-a$ ed è un minimo. Inoltre, quando $y=-\frac{8a}{9}$, x è sì un massimo che un minimo, ed è $=\pm\frac{4a\sqrt{6}}{9}$.

25. Se $2x^5+3ay^4-x^2y^3=0$, $x=a.5^{\frac{4}{3}}$ rende y un minimo, ed $=a.5^{\frac{5}{3}}$.

26. Trovare il massimo ed il minimo valore di y, quando

$$y^4-4c^2yx+x^4=0.$$

$x=c\sqrt[8]{3}$ rende $y=c\sqrt[8]{(27)}$ un massimo.

$x=-c\sqrt[8]{3}$ rende $y=-c\sqrt[8]{(27)}$ un minimo.

27. Una persona trovandosi in una barca 3 miglia lontano dal punto più vicino del lido, desidera di pervenire nel più breve tempo ad un luogo 5 miglia lontano da quel punto lungo la costa; supposto che egli possa percorrere camminando 5 miglia ad ora, ma remigare solamente alla ragione di 4 miglia ad ora, si cerca il posto dove deve approdare.

Un miglio lontano dal luogo dove vuol prevenire.

28. I lati di un rettangolo sono a e b; il massimo rettangolo che si può descrivere in modo che i suoi lati passino per i vertici del dato rettangolo è un quadrato, il lato del quale è $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

29. Se un pezzo rettangolare di cartone, i lati del quale sono a e b, abbia un quadrato tagliato in ciascun

angolo, trovare il lato del quadrato in modo che il rimanente possa formare una scatola di massimo volume.

$$\text{Il lato} = \frac{a+b-\sqrt{(a^2-ab+b^2)}}{6}.$$

30. Una finestra Normanna consiste di un rettangolo sormontato da un semicerchio. Dato il perimetro, si cerca l'altezza e la larghezza della finestra quando la quantità di luce introdotta è un massimo.

Il raggio del semicerchio deve eguagliare l'altezza del rettangolo.

31. Mostrare che l'altezza del massimo triangolo equilatero che può essere circoscritto ad un dato triangolo, è

$$\{a^2+b^2-2ab\cos(\tfrac{1}{3}\pi+C)\}^{\frac{1}{2}}.$$

32. Una linea retta condotta per un punto dato P, incontra gli assi Ox ed Oy in A e B rispettivamente (si vegga la fig. nell'Art. 218); trovare la posizione della retta,

(1) Quando AB è un minimo.
(2) Quando $OA+OB$ è un minimo.
(3) Quando $OA\times OB$ è un minimo.
(4) Quando $OA+OB+AB$ è un minimo.
(5) Quando $OA\times OB\times AB$ è un minimo.
(6) Quando OA^n+OB^n è un minimo.

Dinoti θ l'angolo PAO, allora dobbiamo avere

(1) $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$,

(2) $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$,

(3) $\tan\theta = \frac{b}{a}$,

(4) $\tan\theta = \frac{b+\sqrt{(2ab)}}{a+\sqrt{(2ab)}}$,

(5) $2a\tan^3\theta - b\tan^2\theta + a\tan\theta - 2b = 0$,

(6) $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

33. Essendo dati un angolo di un triangolo ed il lato opposto, dimostrare che l'area sarà un massimo quando il dato angolo è equidistante dagli altri angoli.

34. Essendo dati un angolo di un quadrilatero ed i due lati opposti ad esso, dimostrare che l'area sarà un massimo quando il dato angolo è equidistante dagli altri angoli.

Segue dall'esempio precedente che i due lati i quali contengono l'angolo dato debbono essere eguali per ottenere un'area massima; poichè se essi non fossero eguali l'area del quadrilatero sarebbe aumentata cambiando questi due lati in due lati eguali.

35. Trovare la minima ellisse che può essere circoscritta ad un dato parallelogrammo, e mostrare che la sua area sta a quella del parallelogrammo come $\pi : 2$.

36. La minima tangente ad un'ellisse intercetta tra gli assi è divisa nel punto di contatto in due parti, le quali sono eguali ai semiassi rispettivamente.

37. Trovare l'area e la posizione del massimo triangolo che può essere iscritto in un dato segmento parabolico, avendo la corda del segmento per sua base.

38. Trovare il minimo triangolo che può essere circoscritto ad una data ellisse, avendo un lato parallelo all'asse maggiore ed avendo gli altri lati eguali.

L'altezza è tre volte il semiasse minore.

39. Dimostrare che di tutt' i settori circolari descritti con lo stesso perimetro, il settore di massima area è quello nel quale l'arco circolare è doppio del raggio.

40. Una corda PSP' è condotta pel fuoco S di un'ellisse, ed i punti P, P', sono congiunti con l'altro fuoco H: determinare quando l'area PHP' è un massimo.

Sia e l'eccentricità dell'ellisse e θ l'angolo tra la corda PSP' e l'asse maggiore dell'ellisse. Se $2e^2$ è maggiore di 1 il massimo è determinato da $\cos^2\theta = 2 - \frac{1}{e^2}$, e $\theta = \frac{\pi}{2}$ dà un minimo; se $2e^2$ non è maggiore di 1 il massimo si ha quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e non vi è alcun minimo.

41. Trovare la lunghezza della più piccola corda normale in una parabola, e dimostrare che essa intersega la curva più vicino al vertice di ogni altra corda normale.

Se $4a$ è il lato retto della parabola la lunghezza richiesta è $6a\sqrt{3}$.

42. Due navi navigano uniformemente con velocità u, v lungo linee inclinate sotto un angolo θ; mostrare che se a, b sono le loro distanze ad un certo tempo dal punto d'intersezione dei corsi, la minima distanza delle navi è eguale ad

$$\frac{(av-bu) \operatorname{sen} \theta}{(u^2+v^2-2uv\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

43. Di tutte le linee condotte dal vertice di una data ellisse alla circonferenza del cerchio circoscritto, determinare quella per la quale la porzione intercetta tra le due curve è un massimo.

Se θ è l'inclinazione della linea all'asse maggiore dell'ellisse, ed e l'eccentricità dell'ellisse,

$$2e^2\cos^2\theta = 3-e^2-\sqrt{\{(1-e^2)(9-e^2)\}}.$$

44. Se un'ellisse è descritta che tocca un dato semicerchio ed il suo diametro simmetricamente, la sua area quando è un massimo sarà $\frac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$, r essendo il raggio del cerchio.

45. Un'ellisse è iscritta in un triangolo isoscele, ed ha uno dei suoi assi coincidente in direzione con la linea che bisega l'angolo al vertice del triangolo; mostrare che quest'asse è due-terzi dell'altezza del triangolo quando l'area dell'ellisse è un massimo.

46. Qual settore deve tagliarsi da un dato circolo, affinchè il rimanente possa formare la superficie curva di un cono di massimo volume?

L'angolo del settore deve essere $\frac{2\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$.

47. Due corde focali sono tirate in un'ellisse ad angoli retti, trovare quando la loro somma è un massimo, e quando è un minimo.

[Nei problemi seguenti i coni ed i cilindri sono supposti essere coni e cilindri *retti* a basi *circolari*.]

48. Determinare il massimo cilindro che può essere iscritto in un dato cono.

Se b è l'altezza del cono, ed a il raggio della sua base, il volume del cilindro è $\frac{4}{27}\pi a^2 b$.

49. Determinare il cilindro di massima superficie convessa che può essere iscritto nello stesso cono.

La superficie $= \frac{\pi b a}{2}$.

50. Determinare il cilindro, in modo che la sua superficie *totale* sia un massimo.

Il raggio del cilindro $= \frac{ab}{2(b-a)}$; ma per la natura del problema questo deve essere minore di a; ciò conduce alla condizione che b deve essere maggiore di $2a$ per ottenere un massimo. Se b non è maggiore di $2a$ la superficie totale del cilindro *cresce continuamente* al crescere del raggio, e non vi è *massimo*.

51. Determinare il massimo cilindro che può essere iscritto in una data sfera.

Se r è il raggio della sfera l'altezza del cilindro è $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

52. Determinare il cilindro iscritto in una data sfera che ha la massima superficie convessa.

Altezza $= r\sqrt{2}$.

53. Determinare il cilindro in modo che la sua superficie *totale* sia un massimo.

$$\text{Altezza} = r\left\{2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

54. Determinare il massimo cono che può essere iscritto in una data sfera.

Altezza $= \frac{4}{3} r$.

55. Determinare il cono di massima superficie convessa.

Altezza $= \frac{4}{3} r$.

56. Determinare il cono in modo che la sua superficie *totale* sia un massimo.

$$\text{Altezza} = \frac{r}{16}\left(23 - \sqrt{17}\right).$$

57. Dato il volume di un cilindro, trovare la sua altezza ed il raggio quando la somma delle aree della sua superficie convessa e di una base è un minimo.

L'altezza è uguale al raggio.

58. Di tutt'i coni circoscritti ad una data sfera, trovare quello di minimo volume.

Il seno del semi-angolo verticale deve essere $\frac{1}{3}$.

59. Una serie di coni ha i loro lati della stessa lunghezza; trovare quello che ha il massimo volume.

La tangente del semi-angolo verticale $= \sqrt{2}$.

60. Trovare la posizione della corda che passa per un dato punto interno alla parabola, e taglia dalla parabola la minima area possibile.

61. Trovare un punto in un'ellisse dal quale, tirando le perpendicolari sopra due dati diametri coniugati, la somma dei loro quadrati sia un massimo.

62. Dimostrare che $\varphi\{f(x)\}$ è necessariamente un massimo o un minimo quando $f(x)$ è un massimo.

CAPITOLO XIV.

SVILUPPO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI INDIPENDENTI.

223. Sia $u=\varphi(x, y)$ una funzione di due variabili indipendenti, e supponiamo che $\varphi(x+h, y+k)$ debba svilupparsi secondo le potenze ascendenti di h e k. Si ponga

$$h=\alpha h',\ k=\alpha k',$$

allora
$$\varphi(x+h, y+k)=\varphi(x+\alpha h', y+\alpha k');$$

l'ultima espressione si può considerare una funzione di α, e dinotare con $f(\alpha)$. Pel teorema di Maclaurin,

$$f(\alpha)=f(0)+f'(0)\cdot\alpha+f''(0)\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}+\text{etc.};$$

mostreremo ora come i coefficienti differenziali di $f(\alpha)$ si possono esprimere convenientemente. Si supponga

$$x+\alpha h'=x',\quad y+\alpha k'=y';$$

allora $f(\alpha)$ sta per $\varphi(x', y')$ e poiche sì x' che y' contiene α, abbiamo per l'Art. 169,

$$f'(\alpha)=\frac{d\varphi(x', y')}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha}+\frac{d\varphi(x', y')}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha}$$
$$=h'\frac{d\varphi(x', y')}{dx'}+k'\frac{d\varphi(x', y')}{dy'}.$$

Inoltre per l'Art. 63,

$$\frac{d\varphi(x', y')}{dx}=\frac{d\varphi(x', y')}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx};$$

ma
$$\frac{dx'}{dx}=1;$$

quindi $$\frac{d\varphi(x', y')}{dx'} = \frac{d\varphi(x', y')}{dx}.$$

Similmente $$\frac{d\varphi(x', y')}{dy'} = \frac{d\varphi(x', y')}{dy};$$

onde $$f'(\alpha) = h' \frac{d\varphi(x', y')}{dx} + k' \frac{d\varphi(x', y')}{dy},$$

che, per brevità, può essere scritta

$$f'(\alpha) = h' \frac{df}{dx} + k' \frac{df}{dy}.$$

Similmente,

$$f''(\alpha) = h'^2 \frac{d^2f}{dx^2} + 2h'k' \frac{d^2f}{dx\,dy} + k'^2 \frac{d^2f}{dy^2},$$

$$f'''(\alpha) = h'^3 \frac{d^3f}{dx^3} + 3h'^2k' \frac{d^3f}{dx^2\,dy} + 3h'k'^2 \frac{d^3f}{dx\,dy^2} + k'^3 \frac{d^3f}{dy^3}.$$

Così la legge di formazione dei coefficienti differenziali successivi di $f(\alpha)$ è ovvia. Quando $\alpha = 0$, $f(\alpha)$ diviene u; quindi abbiamo

$$f(0) = u,$$

$$f'(0) = h' \frac{du}{dx} + k' \frac{du}{dy},$$

$$f''(0) = h'^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2h'k' \frac{d^2u}{dx\,dy} + k'^2 \frac{d^2u}{dy^2},$$

etc. . . . .

Si riponga h per $\alpha h'$, e k per $\alpha k'$; allora

$$\varphi(x+h, y+k) = u + h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy}$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left\{h^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2hk \frac{d^2u}{dx\,dy} + k^2 \frac{d^2u}{dy^2}\right\}$$
$$+ \frac{1}{\underline{|3}}\left\{h^3 \frac{d^3u}{dx^3} + 3h^2k \frac{d^3u}{dx^2\,dy} + 3hk^2 \frac{d^3u}{dx\,dy^2} + k^3 \frac{d^3u}{dy^3}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

224. Se desideriamo terminare la serie per $\varphi(x+h, y+k)$ dopo un numero finito di termini, possiamo porre lo sviluppo di $f(\alpha)$ sotto la forma

$$f(\alpha)=f(0)+f'(0)\cdot\alpha+f''(0)\cdot\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+f^{n-1}(0)\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\lfloor n-1}$$
$$+f^n(\theta\alpha)\cdot\frac{\alpha^n}{\lfloor n};$$

e da questa si può ottenere per $\varphi(x+h, y+k)$ la forma richiesta. Per esempio, se $n=3$,

$$\varphi(x+h, y+k)=u+h\frac{du}{dx}+k\frac{du}{dy}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{h^2\frac{d^2u}{dx^2}+2hk\frac{d^2u}{dx\,dy}+k^2\frac{d^2u}{dy^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{\lfloor 3}\left\{h^3\frac{d^3v}{dx^3}+3h^2k\frac{d^3v}{dx^2\,dy}+3hk^2\frac{d^3v}{dx\,dy^2}+k^3\frac{d^3v}{dy^3}\right\},$$

in cui v sta per $\varphi(x+\theta h, y+\theta k)$.

225. Nella formola stabilita nell'Art. 223, si ponga $x=0$, ed $y=0$; allora

$$\varphi(h, k)=u_0+h\frac{du_0}{dx}+k\frac{du_0}{dy}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{h^2\frac{d^2u_0}{dx^2}+2hk\frac{d^2u_0}{dx\,dy}+k^2\frac{d^2u_0}{dy^2}\right\}$$
$$+\text{etc.},$$

in cui u_0, $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{d^2u_0}{dx^2}$, etc. dinotano i valori di u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. quando in queste espressioni poniamo $x=0$, ed $y=0$. Se mutiamo h e k in x ed y rispettivamente nella formola precedente, abbiamo

$$\varphi(x,y)=u_0+x\frac{du_0}{dx}+y\frac{du_0}{dy}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{x^2\frac{d^2u_0}{dx^2}+2xy\frac{d^2u_0}{dx\,dy}+y^2\frac{d^2u_0}{dy^2}\right\}$$
$$+\text{etc.},$$

x ed y essendo messi eguali a zero in u_0 e nei suoi coefficienti differenziali dopo che le differenziazioni sono state eseguite.

In questo modo la formola di Maclaurin è estesa allo sviluppo delle funzioni di due variabili.

226. L'espressione per l'n^{mo} coefficiente differenziale di $f(\alpha)$, nell'Art. 223, è

$$h'^n \frac{d^n f}{dx^n} + n h'^{n-1} k' \frac{d^n f}{dx^{n-1}\, dy} + \frac{n(n-1)}{1.2} h'^{n-2} k'^2 \frac{d^n f}{dx^{n-2}\, dy^2} \dots + k'^n \frac{d^n f}{dy^n},$$

che, per abbreviazione, si può scrivere

$$\left(h' \frac{d}{dx} + k' \frac{d}{dy}\right)^n f$$

purchè interpetriamo questa espressione così: $\left(h' \frac{d}{dx} + k' \frac{d}{dy}\right)^n$ si deve sviluppare col teorema del binomio come se $h' \frac{d}{dx}$ fosse un termine e $k' \frac{d}{dy}$ l'altro termine: quando lo sviluppo è effettuato, ciascuno dei termini che si ottiene come

$$\left(h' \frac{d}{dx}\right)^{n-r} \left(k' \frac{d}{dy}\right)^r f$$

deve essere rimpiazzato da $h'^{n-r} k'^r \frac{d^n f}{dx^{n-r}\, dy^r}$. Se adottiamo questa abbreviazione il risultato dell'Art. 223 si può scrivere

$$\varphi(x+h, y+k) = u + \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right) u + \frac{1}{1.2} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^2 u$$

$$+ \dots\dots + \frac{1}{\underline{|n-1}} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^{n-1} u + \frac{1}{\underline{|n}} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^n v,$$

in cui $u = \varphi(x, y)$, e $v = \varphi(x + \theta h, y + \theta k)$.

Per l'Art. 107 l'ultimo termine dello sviluppo può, se ci piace, essere rimpiazzato da

$$\frac{1}{\underline{|n-1}} (1-\theta)^{n-1} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}\right)^n v.$$

I metodi qui esposti per lo sviluppo di una funzione di due variabili indipendenti si possono immediatamente estendere allo sviluppo di una funzione di più di due variabili indipendenti.

ESEMPII DIVERSI.

1. Mostrare che se x e c sono positivi

$$2 \log \frac{x}{c+x} + \frac{c}{x} + \frac{c}{c+x}$$

decresce al crescere di x.

2. Mostrare che se x e c sono positivi

$$\left(\frac{x}{c+x}\right)^{c+2x}$$

cresce al crescere di x.

3. Se $u = (x-3)e^{2x} + 4xe^{x} + x + 3$ mostrare che $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{du}{dx}$, ed u sono positivi per tutt'i valori positivi di x.

4. Mostrare che per i valori positivi di x l'espressione

$$\frac{e^{2x}(x-2) + e^{x}(x+2)}{(e^{x}-1)^3}$$

diminuisce al crescere di x, e che il suo massimo valore è $\frac{1}{6}$.

5. Dimostrare la seguente espressione approssimata quando x è piccolo,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left\{1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16}\right\}.$$

6. Valutare $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ quando $x = 0$.

Risultato. $-\dfrac{e}{2}$.

7. Mostrare che quando x è infinito

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - ex^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

8. Trovare il valore quando x è infinito di

$$8x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - 8ex^3 \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Risultato. e.

9. Valutare $\dfrac{\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x}{x^n - e^{sen\,(\log x)}}$ quando $x = 1$.

10. Valutare $\dfrac{\log\left(\cot\frac{x}{2}\right)}{\cot x + \log x}$ quando $x = 0$.

11. Valutare $\dfrac{\sec^n x}{e^{\tan x}}$ quando $x = \dfrac{\pi}{2}$.

12. Valutare $\dfrac{\tan nx - \tan mx}{\operatorname{sen}(n^2x - m^2x)}$,

(1) quando $x = 0$, (2) quando $n = m$.

13. Nell'equazione $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$, mostrare che se $f''(x)$ non è zero il valore limite di θ quando h diminuisce indefinitamente è $\frac{1}{2}$; inoltre mostrare che se $f^r(x)$ è il primo dei coefficienti differenziali $f''(x)$, $f'''(x)$,... che non è zero, il valore limite di θ quando h diminuisce indefinitamente è

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}}.$$

14. Nell'equazione $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$ mostrare che se θ è lo stesso per tutt'i valori di h, esso deve eguagliare $\frac{1}{2}$ ed $f''(x)$ deve essere costante.

15. Cambiare la variabile indipendente da z ad x nell'equazione

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - 1 = (\log z)^2\left\{z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz}\right\},$$

in cui $z = e^{\operatorname{sen} x}$.

Risultato. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \tan x\dfrac{dy}{dx} = 1$.

16. Trasformare l'espressione

$$\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right\}\left\{x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}\right\}^{-2}$$

in una nella quale r, θ, φ siano le variabili indipendenti essendo

$$x=r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

17. Se x, y e ξ, η siano le coordinate dello stesso punto riferito a due sistemi di coordinate rettangolari, mostrare che

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2=\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}-\left(\frac{d^2\varphi}{d\xi\,d\eta}\right)^2.$$

18. Mostrare che $x^2+x\,\mathrm{sen}\,x+4\cos x$ è un minimo quando $x=0$.

19. CQ è la perpendicolare dal centro C di un'ellisse sulla tangente in un punto P; trovare il massimo valore di PQ.

Risultato. $a-b$.

20. Una linea retta condotta dall'estremità dell'asse minore di un'ellisse sega l'asse maggiore in Q e la curva in P; da P si tira sull'asse maggiore l'ordinata PN; trovare quando l'area PQN è un massimo.

Risultato. $PN=\frac{b}{4}(\sqrt{17}-1)$.

CAPITOLO XV.

VALORI MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI INDIPENDENTI.

227. DEF. Una funzione $\varphi(x,y)$ di due variabili indipendenti si dice di avere un valore *massimo* quando $\varphi(x+h, y+k)$ è *minore* di $\varphi(x,y)$ per tutt'i valori di h e k, positivi o negativi, compresi tra zero e certi limiti finiti comunque piccoli. La funzione si dice di avere un *minimo* valore se $\varphi(x+h, y+k)$ è *maggiore* di $\varphi(x,y)$ per tutti i suddetti valori di h e k.

228. *Investigare le condizioni affinchè una funzione di due variabili indipendenti possa avere un valore massimo o minimo.*

Sia
$$u = \varphi(x, y),$$
$$v = \varphi(x + \theta h, y + \theta k);$$
allora, per l'Art. 226,
$$\varphi(x + h, y + k) = u + h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + R,$$
in cui
$$R = \frac{1}{1.2}\left\{h^2\frac{d^2v}{dx^2} + 2hk\frac{d^2v}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2v}{dy^2}\right\}.$$

Ora, prendendo h e k sufficientemente piccoli, possiamo sempre rendere R minore di $h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy}$, e quindi il segno di $\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y)$ dipenderà da quello di $h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy}$, e cambierà per conseguenza cambiando quelli di h e k; è impossibile quindi che $\varphi(x, y)$ abbia un valore massimo o minimo a meno che sia
$$h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} = 0.$$

Poichè le quantità h e k sono *indipendenti*, dobbiamo avere

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0.$$

Si trovino i valori di x ed y da queste equazioni, e siano $x=a$, $y=b$; i valori di $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, quando si assegnano questi valori ad x ed y, siano dinotati con A, B, C, rispettivamente. Abbiamo allora per l'Art. 226,

$$\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)=\frac{1}{1.2}\{Ah^2+2Bhk+Ck^2\}+R_1,$$

in cui $R_1=\frac{1}{\underline{|3}}\left\{h^3\frac{d^3v}{dx^3}+3h^2k\frac{d^3v}{dx^2dy}+3hk^2\frac{d^3v}{dx\,dy^2}+k^3\frac{d^3v}{dy^3}\right\}$,

x essendo posto $=a$, ed $y=b$, dopo che le differenziazioni sono state eseguite.

Il segno di $\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)$, quando h e k sono presi sufficientemente piccoli, dipenderà da quello di

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2,$$

o di

$$\frac{k^2}{A}\left\{\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+AC-B^2\right\}.$$

Se $AC-B^2$ è negativa, sarà possibile, attribuendo un conveniente valore ad $\frac{h}{k}$, di annullare l'ultima espressione e di mutare il suo segno; ed allora $\varphi(a, b)$ non è nè un massimo nè un minimo valore di $\varphi(x, y)$. Quindi *generalmente* dobbiamo avere $AC-B^2$ *positiva* come una condizione per l'esistenza di un massimo o di un minimo. In questo caso A e C avranno lo stesso segno, ed $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ avrà lo stesso segno di A e C; e se questo segno è *positivo*, $\varphi(a, b)$ è un valore *minimo* di $\varphi(x, y)$, se *negativo*, $\varphi(a, b)$ è un valore *massimo*.

Diciamo che *generalmente* $AC-B^2$ deve essere positiva; poichè, in fatti, vi *può essere* un valore massimo o minimo quando $AC-B^2=0$, come procediamo a mostrare.

229. *Investigare le condizioni addizionali per l'esistenza di un massimo o di un minimo quando* $AC-B^2=0$.

Se $AC-B^2=0$, allora

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{k^2}{A}\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2;$$

quindi $\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b)$ è sempre dello stesso segno di A, quando h e k sono presi sufficientemente piccoli, *eccettuato quando* $\frac{h}{k}$ *è eguale a* $-\frac{B}{A}$; ed allora il segno è ancora ignoto e si richiede ulteriore investigazione. Dinotino P, Q, S, T i valori di

$$\frac{d^3u}{dx^3}, \quad \frac{d^3u}{dx^2\,dy}, \quad \frac{d^3u}{dx\,dy^2}, \quad \frac{d^3u}{dy^3},$$

rispettivamente, quando $x = a$, ed $y = b$; e sia

$$R_2 = \frac{1}{\underline{|4}}\left\{h^4\frac{d^4v}{dx^4} + 4h^3k\frac{d^4v}{dx^3\,dy} + \ldots + k^4\frac{d^4v}{dy^4}\right\},$$

x essendo messo $= a$, ed $y = b$ dopo le differenziazioni.

Si supponga $\frac{h}{k}$ *eguale a* $-\frac{B}{A}$, allora svanisce $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ e

$$\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b) = \frac{1}{\underline{|3}}\{Ph^3 + 3Qh^2k + 3Shk^2 + Tk^3\} + R_2.$$

Quindi se h e k sono sufficientemente piccoli il segno di

$$\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b)$$

sarà lo stesso che il segno di

$$Ph^3 + 3Qh^2k + 3Shk^2 + Tk^3,$$

e per conseguenza muterà mutando il segno di h e k; è impossibile quindi che $\varphi(a, b)$ sia un valore massimo o minimo a meno che

$$Ph^3 + 3Qh^2k + 3Shk^2 + Tk^3$$

svanisca quando $\frac{h}{k}$ *è eguale a* $-\frac{B}{A}$.

Supponiamo questa condizione soddisfatta, allora il segno di

$$\varphi(a+h, b+k) - \varphi(a, b),$$

quando $\frac{h}{k}$ *è eguale a* $-\frac{B}{A}$, è lo stesso che il segno di R_2; e quando $\frac{h}{k}$ *non* è eguale a $-\frac{B}{A}$, ed h e k sono presi sufficientemente piccoli, il segno di $\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)$ è lo stesso che il segno di A. Ma affinchè $\varphi(a, b)$ possa essere un valore massimo o minimo il segno di $\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)$ deve essere invariabile quando h e k sono presi sufficientemente piccoli. Quindi abbiamo la condizione che il segno di R_2 *quando* $\frac{h}{k}$ *è eguale a* $-\frac{B}{A}$ ed h e k sono presi sufficientemente piccoli deve essere lo stesso che il segno di A.

Se queste due condizioni addizionali sono soddisfatte $\varphi(a, b)$ è un valore massimo se A è negativo, ed un valore minimo se A è positivo.

230. Se $A=0$, $B=0$, e $C=0$, dobbiamo procedere così:

$$\varphi(a+h, b+k)-\varphi(a, b)=\frac{1}{\underline{|3}}\{Ph^3+3Qh^2k+3Shk^2+Tk^3\}+R_2,$$

in cui P, Q, S, T, dinotano i valori di $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^3u}{dx^2\,dy}$, etc., quando $x=a$ ed $y=b$, ed

$$R_2=\frac{1}{\underline{|4}}\left\{h^4\frac{d^4v}{dx^4}+4h^3k\frac{d^4v}{dx^3\,dy}\cdots+k^4\frac{d^4v}{dy^4}\right\},$$

x essendo messo $=a$, ed $y=b$, dopo le differenziazioni.

Quindi, affinchè $\varphi(a, b)$ possa essere un massimo o un minimo, è necessario che P, Q, S, T, svaniscano tutti. Inoltre, R_2 deve essere di segno invariabile; ma le condizioni per ciò sono troppo complicate per potersi quì investigare.

231. Il seguente è un altro metodo per investigare le condizioni affinchè una funzione di due variabili indipendenti possa ammettere un massimo o un minimo.

Sia $u=\varphi(x,y)$, in cui x ed y sono indipendenti: si cercano i massimi e minimi valori di u.

Se y, invece di essere indipendente da x, fosse eguale ad una funzione di x, poniamo $\psi(x)$, allora u sarebbe funzione di *una* variabile x. Avremmo allora

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\psi'(x),$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\psi'(x)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\{\psi'(x)\}^2+\left(\frac{du}{dy}\right)\psi''(x).$$

Affinchè u possa essere un massimo o un minimo, dobbiamo avere, per l'Art. 211,

$$\frac{du}{dx}=0,$$

onde
$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\psi'(x)=0.$$

Quindi, poichè y è realmente indipendente da x, questa equazione deve sussistere qualunque sia la funzione $\psi'(x)$;

onde
$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0, \quad \left(\frac{du}{dy}\right)=0.$$

Affinchè u possa essere un *massimo*, i valori di x ed y ricavati dalle ultime equazioni debbono rendere $\frac{d^2u}{dx^2}$ negativo, qualunque sia $\psi'(x)$; onde, dinotando con A, B, C, i valori che prendono rispettivamente $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$, e $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ per i valori di x ed y che si considerano, richiediamo che

$$A+2B\psi'(x)+C\{\psi'(x)\}^2$$

sia sempre negativa, qualunque sia $\psi'(x)$. Quindi come nell'Art. 228, A deve essere *negativo*, e *generalmente* $AC-B^2$ deve essere positivo. Similmente, affinchè u possa essere un *minimo* dobbiamo avere A *positivo*, e *generalmente* $AC-B^2$ positivo.

Il metodo precedente si può rendere più simmetrico supponendo sì x che y funzione di una terza variabile t. Ponendo per brevità Dx per $\frac{dx}{dt}$, Dy per $\frac{dy}{dt}$, abbiamo

$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{du}{dx}\right)Dx+\left(\frac{du}{dy}\right)Dy,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(Dx)^2+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)Dx\,Dy+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)(Dy)^2$$
$$+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dDx}{dt}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dDy}{dt}.$$

Quindi dobbiamo avere

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0, \quad \left(\frac{du}{dy}\right)=0.$$

Inoltre per i valori di x ed y ricavati da queste equazioni,

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(Dx)^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)Dx\,Dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)(Dy)^2$$

deve conservare un segno invariabile, qualunque siano i segni ed i valori di Dx e Dy. Da ciò deduciamo gli stessi risultati come nell'articolo precedente.

232. Non vi è alcuna difficoltà teoretica nel trovare il valore massimo o minimo di una funzione *implicita* di due variabili indipendenti, nè nel trovare il valore massimo o minimo di una variabile che è legata con un numero qualunque di altre variabili da equazioni quando il numero totale delle equazioni è minore di *due* del numero totale delle variabili. Per esempio, si suppongano le due equazioni

$$f_1(x, y, z, u) = 0, \quad f_2(x, y, z, u) = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

che racchiudono le quattro variabili x, y, z, u, e si cerchi il valore massimo o minimo di u. Noi possiamo eliminare una delle tre variabili x, y, z tra le due equazioni; si supponga che si elimini z; allora otteniamo un' equazione che lega x, y, ed u; da questa troviamo u in termini di x ed y, e procediamo nel modo ordinario per investigare il valore massimo o minimo u. O pure se vogliamo evitare l'eliminazione possiamo adottare il metodo seguente; si considerino x ed y come le variabili indipendenti e si differenziino le date equazioni (1); così

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df_1}{du}\frac{du}{dx} = 0\\
&\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df_1}{du}\frac{du}{dy} = 0\\
&\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df_2}{du}\frac{du}{dx} = 0\\
&\frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df_2}{du}\frac{du}{dy} = 0
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Da queste equazioni possiamo eliminare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, e trovare $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$; allora per un valore massimo o minimo di u

i valori di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ debbono essere zero. Così, più semplicemente, possiamo porre $\frac{du}{dx}=0$ e $\frac{du}{dy}=0$ nell'equazioni (2), e poi eliminare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$; le due equazioni risultanti combinate con (1) determineranno i valori di x, y, z ed u, i quali *possono* corrispondere ad un valore massimo o minimo di u. E differenziando le equazioni (2) rispetto ad x ed y possiamo trovare $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, e $\frac{d^2u}{dy^2}$, e così stabilire se u è realmente un massimo o minimo.

Praticamente la soluzione dei problemi di questa classe è facilitata dal metodo dei *moltiplicatori indeterminati*, il quale sarà spiegato nel capitolo seguente.

233. Lo studente troverà vantaggioso di illustrare questo capitolo per mezzo della Geometria a tre dimensioni. Se $z=\varphi(x, y)$ è l'equazione di una superficie, trovare i valori massimi e minimi di z corrisponde a trovare quei punti della superficie che sono ad una maggiore o minore distanza dal piano delle (x, y) rispetto ai punti adiacenti. Le condizioni $\frac{dz}{dx}=0$, e $\frac{dz}{dy}=0$, rendono il *piano tangente* in uno dei punti in quistione parallelo al piano delle (x, y). L'interpetrazione del caso nel qual $B^2-AC=0$ si vedrà da quanto è stabilito nell'Art. 235.

Il metodo dato nell'Art. 231 ammette una chiara illustrazione geometrica. Se, per esempio, vi è un punto della data superficie il quale è ad una distanza *massima* dal piano delle (x, y), allora passando da questo punto ad un punto adiacente, *lungo una curva qualunque giacente sulla superficie*, dobbiamo avvicinarci al piano delle (x, y). Ora, combinando l'equazione $z=\varphi(x,y)$ con $y=\psi(x)$, otteniamo una curva posta sulla superficie data, e dando ogni varietà di forma a $\psi(x)$ otteniamo tante curve quante ci piace. Quindi vediamo che se si pone $y=\psi(x)$, e lasciamo la forma della funzione $\psi(x)$ arbitraria, realmente non togliamo la restrizione che x ed y debbono essere indipendenti.

234. Una funzione u di due variabili *può* avere un valore massimo o minimo per valori di x ed y che rendono $\frac{du}{dx}$ e

$\frac{du}{dy}$ *indeterminati o infiniti.* Tali casi eccezionali debbono essere esaminati in modo speciale, non essendovi alcuna teoria generale applicabile ad essi. Per esempio, si supponga

$$u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Quì, quando x ed y svaniscono $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ diventano indeterminati. Se poniamo $y = \alpha x$, si ha

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1 + \alpha^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{2\alpha}{3x^{\frac{1}{3}}(1 + \alpha^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Quindi $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ sono infiniti quando $x = 0$, ed $y = 0$. Ma u è allora realmente un *minimo,* poichè esso svanisce solamente quando x ed y svaniscono e non è mai negativo.

235. *Sopra un caso di valori massimi o minimi di una funzione di due variabili indipendenti.*

Se u dinota una funzione di due variabili indipendenti x ed y, i valori di x ed y che rendono u un massimo o un minimo sono dati dalle due equazioni

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0.$$

Se queste equazioni sono soddisfatte da una *sola* relazione tra x ed y, non possiamo determinare un numero *finito* di valori di x ed y, che rendono u un massimo o un minimo. Questo caso ci proponiamo di esaminare.

Si supponga $$u = \varphi(x, y) \quad \text{.....................} \quad (1),$$

$$\frac{du}{dx} = U \cdot M, \; \frac{du}{dy} = V \cdot M \quad \text{..........} \quad (2),$$

in cui U, V, M sono funzioni di x ed y.

Se $$M = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$
sì $\frac{du}{dx}$ che $\frac{du}{dy}$ svanisce.

Dalle equazioni (2) si deduce

$$\frac{d^2u}{dx^2} = U \cdot \frac{dM}{dx} + M \cdot \frac{dU}{dx} = U \cdot \frac{dM}{dx} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = V \cdot \frac{dM}{dy} + M \cdot \frac{dV}{dy} = V \cdot \frac{dM}{dy} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = V \cdot \frac{dM}{dx} + M \cdot \frac{dV}{dx} = V \cdot \frac{dM}{dx} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dx} = U \cdot \frac{dU}{dy} + M \cdot \frac{dU}{dy} = U \cdot \frac{dM}{dy} \text{ quando (3) è soddisfatta,}$$

Ma $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$ sempre; quindi, quando (3) è soddisfatta,

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 = U \cdot V \cdot \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dM}{dy}.$$

Se dunque A, B, C dinotano i valori di $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, e $\frac{d^2u}{dy^2}$ quando (3) è soddisfatta, abbiamo

$$AC = B^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Ora supponiamo che da $M = 0$, si trovi y in termini di x, poniamo $y = \psi(x)$, e si sostituisca in u; così rendiamo u funzione della sola x. In questa ipotesi

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$= U \cdot M + V \cdot M \frac{dy}{dx}, \text{ da (2),}$$

$$= 0, \text{ poichè } M = 0 \text{ per ipotesi.}$$

Quindi, questa sostituzione di $\psi(x)$ per y ha ridotto u ad una *costante*, poichè $\frac{du}{dx}$ svanisce senza assegnare alcun valore particolare ad x.

Ritorniamo ora alle equazioni (1) e (2). Si mutino in $\varphi(x, y)$ le variabili x ed y in $x+h$ ed $y+k$ rispettivamente. Chiamando u' il nuovo valore di u, abbiamo

$$u' = u + h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + \frac{h^2}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2k}{h}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k^2}{h^2}\frac{d^2u}{dy^2}\right\} + R.$$

Assegniamo ora ad x ed y dei valori qualunque che siano d'accordo con (3), lasciando però il rapporto di k ad h del tutto arbitrario, ed esaminiamo se u' diviene minore o maggiore di u quando k ed h diminuiscono sufficientemente. Il coefficiente di $\frac{h^2}{2}$ nel valore precedente di u', è

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2k}{h}\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k^2}{h^2}\frac{d^2u}{dy^2} \quad \text{o} \quad A + \frac{2k}{h}B + \frac{k^2}{h^2}C.$$

Ora da (4) questo è

$$= A\left\{1 + \frac{k}{h}\sqrt{\frac{C}{A}}\right\}^2,$$

ed è per conseguenza necessariamente positivo se A è positivo, e necessariamente negativo se A è negativo, *qualunque sia il rapporto di k ad h, eccettuato per quel valore particolare del rapporto che fa svanire il coefficiente.* Quindi la conchiusione sarà questa: se assegniamo ad x ed y valori di accordo con $M=0$, allora quando h e k diminuiscono sufficientemente, u' è certamente minore di u se $\frac{d^2u}{dx^2}$ è negativo, e certamente maggiore di u se $\frac{d^2u}{dx^2}$ è positivo, *eccettuato solamente quando k ha ad h un rapporto particolare.* Quest'ultimo caso richiederebbe ulteriore esame, se non avessimo *già mostrato che per una certa supposizione u è ridotto ad una costante*, sicchè quando k ha ad h quell'*unico* particolare rapporto, u' è ultimamente nè maggiore di u nè minore di u, ma eguale ad esso.

L'intera teoria può essere illustrata geometricamente; per esempio, se

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2 + (x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \,\ldots\ldots\ldots\, (1).$$

trovare i valori massimi o minimi di z;

$$z\frac{dz}{dx} = -x + (x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cos\alpha$$

$$= (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

$$z\frac{dz}{dy} = -(y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cos\alpha;$$

quindi, quando $\qquad y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$

$\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ svaniscono entrambi.

In queste circostanze z diviene $= \pm a$.

Ora l'equazione (1) rappresenta un cilindro che ha il suo asse parallelo al piano delle (x, y). L'equazione (2) rappresenta un piano che passa per l'asse del cilindro, e taglia la superficie secondo due linee rette parallele. Lungo la linea superiore abbiamo $z = a$. Tutt'i punti in questa linea sono alla stessa distanza dal piano delle (x, y), e *ad una distanza maggiore in paragone di ogni altro punto fuori di questa linea.* Questa linea è infatti una *vetta* nella superficie.

Un'altro esempio si può vedere nell'equazione

$$z^2 = 2a\sqrt{(x^2+y^2)} - (x^2+y^2).$$

Questa superficie è quella formata dalla rotazione di un cerchio intorno ad una retta tangente che è l'asse delle z. Il più alto punto del circolo genererà con la rotazione un circolo, tutt'i punti del quale sono alla stessa distanza dal piano delle (x, y), e ad una distanza maggiore in paragone di ogni punto adiacente sulla superficie.

ESEMPII.

1. Sia $\qquad u = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y},$

$$\frac{du}{dx} = 2x + y - \frac{a^3}{x^2}, \qquad \frac{du}{dy} = 2y + x - \frac{a^3}{y^2};$$

quindi $\quad 2x + y - \frac{a^3}{x^2} = 0, \quad 2y + x - \frac{a^3}{y^2} = 0;$

quindi $\quad (2x+y)\,x^2 = a^3 = (2y+x)\,y^2;$

quindi $\qquad 2(x^3 - y^3) = xy(y - x)$;

quindi $2(x - y)(x^2 + xy + y^2) = xy(y - x)$:

adunque o $\qquad x = y$,

o $\qquad 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$.

L'ultima equazione conduce ad un risultato impossibile; la prima dà $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

Inoltre
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 + \frac{2a^3}{x^3},$$
$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = 1,$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = 2 + \frac{2a^3}{y^3};$$
per conseguenza $\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2$ è positivo quando x ed y hanno i valori assegnati, e $\frac{d^2u}{dx^2}$ è positivo; quindi u è allora un minimo.

2. Sia
$$u = \cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha \cos(y - \beta),$$
$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x \cos \alpha + \cos x \operatorname{sen} \alpha \cos(y - \beta),$$
$$\frac{du}{dy} = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(y - \beta).$$

Quindi $\frac{du}{dy}$ svanisce quando $y = \beta$, ed allora $\frac{du}{dx}$ diviene $\operatorname{sen}(\alpha - x)$, e svanisce quando $x = \alpha$.

Inoltre
$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\cos x \cos \alpha - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha \cos(y - \beta),$$
$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\cos x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(y - \beta),$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x \cos(y - \beta).$$

Il primo diviene -1, il secondo 0, ed il terzo $-\text{sen}^2\alpha$, quando si sostituiscono i valori assegnati di x ed y. Quindi

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2$$

è positivo, ed u è un massimo.

3. Si supponga $u = e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$,

$$\frac{du}{dx} = 2x\,(a-ax^2-by^2)\,e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{du}{dy} = 2y\,(b-ax^2-by^2)\,e^{-x^2-y^2}.$$

Quì $\frac{du}{dx}=0$, e $\frac{du}{dy}=0$, ci dà per una coppia di valori $x=0$, $y=0$. E questi valori rendono

$$\frac{d^2u}{dx^2}=2a,\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=2b;$$

quindi u ha allora un valore minimo.

Un'altra coppia di valori è data da

$$x=0,$$

e $$b-ax^2-by^2=0,$$

cioè, $$x=0,\ \text{ed}\ y=\pm 1.$$

Con questi valori abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2}=2\,(a-b)\,e^{-1},\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=-4be^{-1}.$$

Quindi, se a è minore di b, abbiamo un valore massimo di u, e se a è maggiore di b, non abbiamo nè un massimo nè un minimo.

Vi è solamente un'altra soluzione, cioè, quella trovata combinando

$$y=0,\ \text{ed}\ a-ax^2-by^2=0;$$

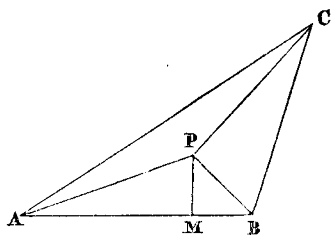
onde $$y=0,\ \text{ed}\ x=\pm 1.$$

Quì troveremmo che se a è maggiore di b, non vi è nè un massimo nè un minimo, e se a è maggiore di b, vi è un valore massimo di u.

Se in questo esempio $a = b$, arriviamo al caso eccezionale considerato nell' Art. 235.

4. Trovare un punto tale che la somma delle rette che lo congiungono con i vertici di un dato triangolo sia un minimo.

Sia ABC il dato triangolo; siano $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Si prenda un punto qualunque P e si tiri PM perpendicolare ad AB; sia $AM = x$, $PM = y$. Inoltre siano $AP = u$, $BP = v$, $CP = w$; l'angolo $APM = \theta$, $BPM = \varphi$, $CPM = \psi$.



Allora $$u^2 = x^2 + y^2,$$
$$v^2 = (c - x)^2 + y^2,$$
$$w^2 = (b \cos A - x)^2 + (b \operatorname{sen} A - y)^2.$$

Per un valore minimo di $u + v + w$ dobbiamo avere

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

e $$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora $$\frac{du}{dx} = \frac{x}{u} = \operatorname{sen} \theta,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c - x}{v} = -\operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{b \cos A - x}{w} = -\operatorname{sen} \psi,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{y}{u} = \cos \theta,$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{y}{v} = \cos\varphi,$$
$$\frac{dw}{dy} = -\frac{b \operatorname{sen} A - y}{w} = \cos\psi.$$

Quindi, da (1) e (2),

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi,$$
$$\cos\theta = -\cos\varphi - \cos\psi.$$

Si elevi a quadrato e si addizioni; così

$$1 = 2 + 2\cos(\psi - \varphi),$$

quindi $\cos(\psi - \varphi) = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ.$

Adunque l'angolo CPB deve essere di 120°. Similmente si può mostrare che APB ed APC devono essere ciascuno di 120°. Quindi abbiamo il seguente risultato; si descrivano sui lati del dato triangolo segmenti di cerchio tali che ciascuno contenga un angolo di 120°, ed il loro punto comune di intersezione è il punto cercato.

È chiaro che vi deve essere un punto pel quale la somma proposta è un minimo, e quindi non abbiamo bisogno di esaminare i criterii dipendenti dai secondi coefficienti differenziali.

Se il dato triangolo ha un angolo eguale a 120°, allora il vertice di quest'angolo è il punto richiesto; se esso ha un angolo maggiore di 120°, il metodo non dà la soluzione. Si può provare però che quando il triangolo ha un angolo maggiore di 120°, il vertice dell'angolo ottuso è il punto richiesto.

Infatti si supponga il punto P *dentro* del triangolo e molto vicino all'angolo B del triangolo; sia $PB = r$, $PBA = \alpha$, $PBC = \gamma$; allora

$$u = \sqrt{(c^2 - 2cr\cos\alpha + r^2)}, \quad v = r,$$
$$w = \sqrt{(a^2 - 2ar\cos\gamma + r^2)}.$$

Così trascurando i quadrati e le potenze superiori di r abbiamo approssimativamente

$$u + v + w = a + c + r - r(\cos\alpha + \cos\gamma)$$
$$= a + c + r - 2r\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Ora $2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$ è minore dell'unità se B è maggiore di 120°, e così $a+c+r-2r\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$ è *maggiore* di $a+c$. Ed è chiaro che se P è *fuori* del triangolo la somma delle sue distanze da A, B, e C è maggiore di $a+c$. Quindi nel passare da B ad un punto adiacente sì dentro che fuori del triangolo la somma delle sue distanze *aumenta;* e quindi al punto B la somma è un minimo.

I valori $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dv}{dy}$ prendono la forma $\frac{0}{0}$ nel punto B; è questa la ragione per la quale la soluzione non dà il punto B. Abbiamo già osservato nell'Art. 234 che un valore massimo o minimo può esistere corrispondente a tali valori indeterminati dei coefficienti differenziali.

5. Sia
$$u=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\cos(x+y),$$
$$\frac{du}{dx}=\cos x-\operatorname{sen}(x+y),$$
$$\frac{du}{dy}=\cos y-\operatorname{sen}(x+y).$$

Se $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ svaniscono, dobbiamo avere
$$\cos x=\cos y=\operatorname{sen}(x+y).$$

Queste equazioni ammettono numerose soluzioni. Per esempio,

se $$\cos x=\cos y,$$
abbiamo $x=y$, per una soluzione.

Quindi abbiamo
$$\cos x=\operatorname{sen}2x$$
$$=2\operatorname{sen}x\cos x;$$
onde, o $\cos x=0$, o $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$.

Se prendiamo il primo, e poniamo $x=y=\frac{\pi}{2}$, non si ha nè un massimo nè un minimo; se prendiamo

$$x = y = \frac{3\pi}{2},$$

ottteniamo un minimo.

Se prendiamo $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, e poniamo

$$x = y = \frac{\pi}{6},$$

otteniamo un valore massimo per u.

6. Trovare il valore massimo o minimo di

$$\frac{(hx + ky - a)(hx + ky - b)}{1 + x^2 + y^2}.$$

Dinoti u l'espressione, e v dinoti

$$1 + x^2 + y^2;$$

allora $\qquad u = v^{-1}(hx + ky - a)(hx + ky - b);$

$$\frac{du}{dx} = \frac{h(2hx + 2ky - a - b)}{v} - \frac{2x(hx + ky - a)(hx + ky - b)}{v^2},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{k(2hx + 2ky - a - b)}{v} - \frac{2y(hx + ky - a)(hx + ky - b)}{v^2}.$$

Si ponga $\frac{du}{dx} = 0$, e $\frac{du}{dy} = 0$; così deduciamo

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{k} = r \text{ poniamo.}$$

Si sostituisca rh per x ed rk per y in $\frac{du}{dx} = 0$, o $\frac{du}{dy} = 0$; otterremo dopo riduzione la seguente equazione di 2º grado in r,

$$r^2(h^2 + k^2)(a + b) + 2r(h^2 + k^2 - ab) - (a + b) = 0;$$

così i valori di r sono possibili, ed uno è positivo e l'altro negativo.

Se differenziamo i valori di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$, e dopo la differenziazione usiamo le relazioni che nascono da

$\frac{du}{dx} = 0$ e $\frac{du}{dy} = 0$, troveremo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{h(2ky - a - b)}{xv} = -\frac{2k^2r - a - b}{rv},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{k(2hx - a - b)}{yv} = -\frac{2h^2r - a - b}{rv},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{2hk}{v}.$$

Quindi il segno di $AC - B^2$ è lo stesso segno di

$$\frac{(2k^2r - a - b)(2h^2r - a - b)}{r^2} - 4h^2k^2,$$

ed è per conseguenza lo stesso che il segno di

$$(a + b)^2 - 2r(h^2 + k^2)(a + b).$$

Ora si può mostrare che se $a + b$ non è zero ed a non è eguale a b, il segno dell'ultima espressione è *positivo* per tutti e due i valori che r può avere. Infatti si supponga $a + b$ *positivo;* allora dobbiamo dimostrare che $\frac{a + b}{2(h^2 + k^2)} - r$ è positivo, cioè, dobbiamo dimostrare che $\frac{a + b}{2(h^2 + k^2)}$ è maggiore della radice positiva dell'equazione di 2° grado in r. Si sostituisca la quantità positiva $\frac{a + b}{2(h^2 + k^2)}$ in luogo di r nell'espressione che forma il primo membro dell'equazione; otterremo un risultato *positivo* se a e b sono diseguali; ciò dimostra che $\frac{a + b}{2(h^2 + k^2)}$ *è* maggiore della radice positiva dell'equazione. Similmente possiamo stabilire il risultato se $a + b$ è negativo

Quindi le condizioni necessarie per un massimo o minimo sono soddisfatte.

Poichè $AC - B^2$ è positivo A e C hanno lo stesso segno, e questo segno è lo stesso che il segno di $A + C$, e quindi lo stesso che il segno di

$$\frac{a + b - (h^2 + k^2)r}{r}.$$

Se $a+b$ è positivo questa espressione è positiva o negativa secondo che r è positivo o negativo; se $a+b$ è negativo essa è positiva o negativa secondo che r è negativo o positivo. Così possiamo distinguere tra il valore massimo ed il minimo di u.

Due casi particolari che sono stati eccettuati precedentemente rimangono a notarsi.

I. Si supponga $a=b$. Quì avremo

$$\frac{du}{dx}=2v^{-2}(hx+ky-a)\{hv-x(hx+ky-a)\},$$

$$\frac{du}{dy}=2v^{-2}(hx+ky-a)\{kv-y(hx+ky-a)\}.$$

Se supponiamo $hx+ky-a=0$ arriviamo al caso discusso nell'Art. 235, nel quale non vi è propriamente un massimo o un minimo. Se prendiamo gli altri fattori in $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ e poniamo

$$hv-x(hx+ky-a)=0 \text{ e } kv-y(hx+ky-a)=0,$$

otterremo

$$x=-\frac{h}{a}, \qquad y=-\frac{k}{a};$$

questi valori si troverà che rendono u un massimo.

L'equazione di 2^o grado in r, quando $a=b$, ha per sue radici

$$r=\frac{a}{h^2+k^2} \text{ o } r=-\frac{1}{a};$$

il primo valore conduce a valori di x ed y che soddisfano $hx+ky-a=0$; il secondo conduce ai valori

$$x=-\frac{h}{a},\ y=-\frac{k}{a}.$$

II. Si supponga $a+b=0$. L'investigazione originale diviene inapplicabile; si può mostrare che i soli valori di x ed y che annullano $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ sono $x=0$, $y=0$; e questi danno un valore minimo ad u.

7. Trovare il valore massimo di $x^3y^2(6 - x - y)$.

Risultato. Massimo quando $x = 3, y = 2$.

8. Se $u = (2ax - x^2)(2by - y^2)$, trovare il suo valore massimo o minimo.

Risultato. $x = a, y = b$, rende u un massimo.

9. Se $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, mostrare che quando $x = 0$, ed $y = 0$, u non è nè un massimo nè un minimo; quando $x = \pm\sqrt{2}$, ed $y = \mp\sqrt{2}$, u è un minimo.

10. Se $u = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$, allora $3 + 4\sqrt{2}$ è un valore massimo di u e $-6 - 4\sqrt{2}$ è un valore minimo di u.

11. Se $u = x^2 + xy + y^2 - ax - by$, allora $\frac{1}{3}(ab - a^2 - b^2)$ è un valore minimo di u.

12. Dividere un numero n in tre parti, x, y, e z, tali che $\frac{xy}{2} + \frac{xz}{3} + \frac{yz}{4}$ sia un massimo o un minimo, e determinare quale esso sia.

Risultato. $\frac{x}{21} = \frac{y}{20} = \frac{z}{6}$; un massimo.

13. Se $u = x^3 + y^3 + 3axy$, allora a^3 è un valore massimo di u.

14. Trovare il massimo o minimo di $x(x^2 + y^2) - 3axy$.

15. Trovare il valore massimo o minimo di $\frac{1 + x^2 + y^2}{1 - ax - by}$.

Risultato. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2}$;

col segno superiore vi è un massimo, con l'inferiore un minimo.

16. Se $u = \sqrt{\{(c - x)(c - y)(x + y - c)\}}$, mostrare che vi è un massimo quando $x = y = \frac{2c}{3}$.

17. Mostrare che $\frac{a + bx + cy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}}$ è un massimo quando $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$.

18. Mostrare che $xe^{y+x \operatorname{sen} y}$ non ha nè un massimo nè un minimo.

19. Trovare il valore minimo di $x+y+z$, assoggettato alla condizione

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1.$$

Risultato. Quando $\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{y}{\sqrt{b}}=\frac{z}{\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

20. Trovare il valore minimo di $x^p y^q z^r$ assoggettato alla stessa condizione come nell'esempio precedente.

Risultato. Quando $\frac{px}{a}=\frac{qy}{b}=\frac{rz}{c}=p+q+r$.

21. Essendo dati i tre lati di un triangolo, trovare un punto dentro di esso, tale, che abbassando da esso le perpendicolari sui lati, il loro prodotto continuo sia un massimo. Mostrare che le rette le quali uniscono questo punto con i vertici del triangolo lo divideranno in tre triangoli eguali.

22. Trovare il valore massimo di xyz assoggettato alla condizione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Risultato. $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

23. Determinare un punto dentro un triangolo, tale che la somma dei quadrati delle distanze dai tre lati sia un minimo.

Risultato. Se p, q, r sono le perpendicolari sui lati a, b, c, rispettivamente, allora

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}=\frac{2 \text{ area del triangolo}}{a^2+b^2+c^2}.$$

24. Determinare un punto dentro un triangolo tale che la somma dei quadrati delle distanze dai vertici dei tre angoli sia un minimo.

Risultato. Il centro di gravità del triangolo.

25. Per un punto dentro un triangolo si tirino tre rette parallele ai lati le quali dividono il triangolo in tre parallelogrammi e tre triangoli; mostrare che la somma di questi triangoli è un minimo quando le rette si tirano pel centro di gravità del triangolo.

26. Uno spazio triangolare deve essere diminuito trincerando gli angoli, ciascuna trincea essendo circolare ed avendo per centro il vertice dell'angolo più vicino; mostrare in qual modo si lascia il massimo spazio centrale possibile con una data lunghezza di trincea.

Risultato. I raggi delle tre trincee circolari sono eguali.

27. Data la somma dei tre spigoli di un parallelepipedo rettangolo, trovare la sua forma affinchè la sua superficie sia un massimo.

28. In una data sfera iscrivere un parallelepipedo rettangolo il di cui volume è un massimo. Inoltre uno la di cui superficie è un massimo.

Risultato. Un cubo.

29. Tra tutt' i triangoli dello stesso perimetro trovare quello che genera il massimo doppio cono rivolgendosi intorno ad un lato.

Risultato. Il lato fisso deve essere i due terzi di ciascuno degli altri lati del triangolo.

30. Un parallelepipedo rettangolo è così costruito che un piano condotto per tre dei suoi angoli, ma per nessuno spigolo, contiene un punto le cui distanze dalle tre facce adiacenti ad uno degli altri angoli sono date. Mostrare che la minima diagonale che un tale parallelepipedo può avere, è $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, in cui a, b, c sono le date distanze.

CAPITOLO XVI.

VALORI MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI.

236. Sia $u = \varphi(x, y, z)$ una funzione di tre variabili indipendenti, di cui si cercano i valori massimi e minimi. Con un' investigazione simile a quella nell' Art. 224,

$$\varphi(x + h, y + k, z + l) - \varphi(x, y, z)$$

$$= h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz}$$

$$+ \frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{l^2}{2}\frac{d^2u}{dz^2} + kl\frac{d^2u}{dy\,dz} + hl\frac{d^2u}{dx\,dz} + hk\frac{d^2u}{dx\,dy}$$
$$+ R;$$

in cui R è una funzione che racchiude le potenze ed i prodotti di h, k, l del terzo grado, la quale può essere espressa per abbreviazione con

$$\frac{1}{\underline{|3}}\left\{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} + l\frac{d}{dz}\right\}^3 v,$$

v dinotando $\quad \varphi(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l)$.

Se prendiamo h, k, l sufficientemente piccoli, il segno di

$$\varphi(x + h, y + k, z + l) - \varphi(x, y, z)$$

dipenderà da quello dei termini che racchiudono solamente le prime potenze di h, k, l; quindi, per assicurare un massimo o un minimo, dobbiamo avere

$$h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz} = 0,$$

e quindi, poichè h, k, l sono indipendenti,

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0, \quad \frac{du}{dz}=0.$$

Si trovino i valori di x, y, z da queste equazioni, e quando questi valori si sostituiscono in $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc. sia

$$\frac{d^2u}{dx^2}=A, \quad \frac{d^2u}{dy^2}=B, \quad \frac{d^2u}{dz^2}=C,$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=A', \quad \frac{d^2u}{dx\,dz}=B', \quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=C'.$$

Il segno di

$$\varphi(x+h, y+k, z+l)-\varphi(x, y, z),$$

con i valori ora trovati di x, y, z, può farsi dipendere da quello di

$$Ah^2+Bk^2+Cl^2+2A'kl+2B'hl+2C'hk \ldots\ldots (1).$$

Quindi, affinchè u possa avere un valore massimo o minimo, l'espressione (1) deve ritenere lo stesso segno, qualunque siano i segni ed i valori di h, k, l compresi tra zero e limiti fissi finiti. Se poniamo

$$h=sl, \quad k=tl,$$

ne segue che

$$As^2+Bt^2+C+2A't+2B's+2C'st \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

deve essere di segno invariabile, qualunque siano i segni ed i valori di s e t. Si moltiplichi (2) per A, e si riordinino i termini; allora

$$(As+B'+C't)^2+(AB-C'^2)t^2+2(AA'-B'C')t+AC-B'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

deve ritenere un segno invariabile.

Quindi, $(AB-C'^2)t^2+2(AA'-B'C')t+AC-B'^2$ deve essere incapace di diventare negativa; per conseguenza

$$AB-C'^2 \text{ deve essere positiva, ed} \ldots\ldots (4),$$

$$(AA'-B'C')^2 \text{ minore di } (AB-C'^2)(AC-B'^2) \ldots\ldots (5);$$

(4) e (5) sono le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè u possa essere un massimo o un minimo. Viceversa,

se esse sono soddisfatte, u è un massimo o un minimo; infatti allora (3) è necessariamente positiva, quindi (2) ha sempre lo stesso segno di A, ed u è un massimo se A è negativo, ed un minimo se A è positivo.

Quindi le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un valore massimo o minimo di una funzione u di tre variabili indipendenti, sono, che i valori di x, y, z tratti da

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,\quad \frac{du}{dz}=0,$$

rendano $$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 \text{ positiva,}$$

e $$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy\,dz}-\frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 \text{ minore di}$$

$$\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2\right\}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2\right\}$$

Segue evidentemente da queste condizioni, che

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right)^2 \text{ deve essere positiva,}$$

e così $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$ debbono avere tutti lo stesso segno, ed u è un massimo se questo segno è negativo, ed un minimo se esso è positivo.

Dalle condizioni (4) e (5) dovremmo congetturare pel principio di simmetria, che $BC-A'^2$ sarà anche positiva se sussistono (4) e (5). Ciò si verifica facilmente, infatti da (5) troviamo che

$$A\{ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2\}$$

è positiva, e quindi, poichè da (4) A e B hanno lo stesso segno,

$$B\{ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2\}$$

è positiva, e quindi

$$(BB'-A'C')^2 \text{ è minore di } (BC-A'^2)\,(BA-C'^2),$$

da cui segue che $BC-A'^2$ è positiva.

237. Es. Sia $u = \dfrac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{yz(ay-x^2)}{(a+x)^2(x+y)^2(y+z)(z+b)} = \frac{u(ay-x^2)}{x(a+x)(x+y)}.$$

Similmente, $$\frac{du}{dy} = \frac{u(xz-y^2)}{y(x+y)(y+z)},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{u(by-z^2)}{z(y+z)(z+b)}.$$

Quindi, se $ay-x^2=0$, $xz-y^2=0$, e $by-z^2=0$, u *può* essere un massimo o minimo: queste equazioni danno

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{b}{z};$$

onde ciascuna di queste frazioni $= \sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{b}{z}\right)}$ o $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$. Si chiami questa r; allora

$$x = ar,\ \ y = xr = ar^2,\ \ z = yr = ar^3.$$

Procedendo ai secondi coefficienti differenziali di u, abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2xu}{x(a+x)(x+y)} + \text{etc.}$$

i termini racchiusi nell'etc. essendo tali da svanire quando si assegnano i valori speciali ad x, y, z.

Quindi $$A = -\frac{2u}{a^2r(1+r)^2} = -\frac{2}{a^3r(1+r)^6}.$$

Similmente possono trovarsi B, C, etc. ed arriveremo finalmente al risultato che u è un massimo.

238. Supponiamo che si cerchi di determinare i valori massimi e minimi di una funzione $\varphi(x, y, z, \ldots)$ di m variabili, queste variabili essendo legate da n equazioni, di cui la forma generale è

$$F_r(x, y, z, ..) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Le m variabili contenute in φ evidentemente non sono tutte indipendenti, poichè per mezzo delle date equazioni n di esse si possono esprimere in termini delle rimanenti $m-n$. Il più semplice metodo *teoretico* per investigare i valori massimi e minimi di φ sarebbe di esprimere per mezzo delle date equazioni i valori di n delle variabili in termini delle rimanenti, e di sostituire questi valori in φ; così φ diverrebbe una funzione di $m-n$ variabili indipendenti, e potremmo procedere a trovare i suoi valori massimi e minimi nel modo già dato per le funzioni di una, due, o tre variabili indipendenti. Ma questo metodo sarebbe spesso impraticabile per la difficoltà di risolvere le date equazioni, e quindi si adotta il seguente.

Si suppongano $x, y, z\ldots$ tutte funzioni di una nuova variabile t, di cui per conseguenza φ diviene una funzione. Si ponga per brevità

$$\frac{dx}{dt}=Dx,\ \frac{dy}{dt}=Dy,\ \frac{dz}{dt}=Dz,\ldots..$$

allora $$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{dx}Dx+\frac{d\varphi}{dy}Dy+\frac{d\varphi}{dz}Dz+\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Dalle n date equazioni (1) deduciamo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dF_1}{dx}Dx+\frac{dF_1}{dy}Dy+\frac{dF_1}{dz}Dz+\ldots=0\\
&\frac{dF_2}{dx}Dx+\frac{dF_2}{dy}Dy+\frac{dF_2}{dz}Dz+\ldots=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dF_n}{dx}Dx+\frac{dF_n}{dy}Dy+\frac{dF_n}{dz}Dz+\ldots=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (3).$$

Risolvendo le equazioni lineari (3) possiamo esprimere n delle quantità $Dx, Dy, Dz\ldots$ in termini delle rimanenti $m-n$. Si sostituiscano questi valori in (2), allora rimangono solamente $m-n$ delle quantità $Dx, Dy, Dz\ldots$, ed abbiamo un risultato che può essere scritto

$$\frac{d\varphi}{dt}=X\cdot Dx+Y\cdot Dy+Z\cdot Dz\ldots+Q\cdot Dq\ldots\ (4),$$

in cui X, Y, $Z\ldots$ non contengono alcuna delle quantità Dx, Dy, Dz, etc. Poichè, d' accordo con le date equazioni, possiamo considerare le $m-n$ quantità $Dx, Dy, Dz,\ldots$ come del tutto arbitrarie, segue, nello stesso modo come nell'Art. 232, che se φ deve essere un massimo o un minimo, dobbiamo avere

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \ldots\ldots \quad Q=0 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Queste $m-n$ equazioni, combinate con le n date equazioni, daranno i valori delle variabili per i quali φ *può* essere un massimo o un minimo. Per determinare se φ *è* un massimo o un minimo dobbiamo esprimere $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Da (4), *con l'uso di* (5), abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dx} Dx\, Dy + \frac{dZ}{dx} Dx\, Dz + \ldots \\ + \frac{dX}{dy} Dy\, Dx + \frac{dY}{dy}(Dy)^2 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dovremmo allora esaminare se l'espressione precedente ritiene un segno invariabile, quando si adoperano i valori speciali delle variabili $x, y, z, \ldots$, qualunque siano i valori arbitrarii assegnati a Dx, Dy, Dz, etc. Se ciò avviene, allora φ è un massimo se quel segno è negativo, ed un minimo se è positivo.

239. La soluzione pratica di un esempio qualunque secondo la precedente teoria è facilitata facendo uso di *moltiplicatori indeterminati*. Si moltiplichi la prima delle equazioni (3) per λ_1, la seconda per $\lambda_2, \ldots$ l'n^{ma} per λ_n, i valori di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ essendo per ora indeterminati. Si aggiungano i risultati a (2), allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} = \left\{\frac{d\varphi}{dx} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dx} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dx} + \ldots\right\} Dx \\ + \left\{\frac{d\varphi}{dy} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dy} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dy} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dy} + \ldots\right\} Dy \\ + \left\{\frac{d\varphi}{dz} + \lambda_1 \frac{dF_1}{dz} + \lambda_2 \frac{dF_2}{dz} + \lambda_3 \frac{dF_3}{dz} + \ldots\right\} Dz \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).\end{aligned}$$

Se eguagliamo a zero i coefficienti di n delle quantità $Dx, Dy, \ldots$, avremo n equazioni per determinare $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Si sostituiscano questi valori di $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, nei rimanenti termini di (6), e $\frac{d\varphi}{dt}$ prende la forma data in (4); dobbiamo quindi eguagliare a zero i coefficienti delle rimanenti $m-n$ delle quantità $Dx, Dy, \ldots$ Quindi abbiamo la regola: « Si eguaglino a zero i coefficienti di *ciascuna* delle quantità $Dx, Dy, \ldots$ in (6); le m equazioni così trovate, insieme alle n equazioni date, ci faranno eliminare le n quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, e trovare i valori delle quantità $x, y, z \ldots$

240. La rimanente parte della teoria nell'Art. 238, nella quale si tratta di esaminare il segno di $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, spesso diviene in pratica eccessivamente complicata. Nel fatto gli esempii di questo metodo sono generalmente tali da permetterci di prevedere che *deve* esistere un massimo o un minimo, e di dispensarci dalla seconda parte dell'investigazione.

Es. 1. Trovare il valore massimo o minimo di

$$x^2+y^2+z^2,$$

assoggettato alle condizioni

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz-1=0, \\ a'x+b'y+c'z-1=0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ponendo φ per $x^2+y^2+z^2$, abbiamo

$$\frac{d\varphi}{dt}=2x\,Dx+2y\,Dy+2z\,Dz.$$

Inoltre dalle equazioni (1),

$$\left.\begin{aligned} aDx+bDy+cDz=0, \\ a'Dx+b'Dy+c'Dz=0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quindi, moltiplicando le equazioni (2) per λ_1 e λ_2 rispettivamente, possiamo porre

$$\frac{d\varphi}{dt}=(2x+\lambda_1 a+\lambda_2 a')\,Dx+(2y+\lambda_1 b+\lambda_2 b')\,Dy$$
$$+(2z+\lambda_1 c+\lambda_2 c')\,Dz.$$

Onde
$$\left.\begin{aligned}2x+\lambda_1 a+\lambda_2 a'=0,\\ 2y+\lambda_1 b+\lambda_2 b'=0,\\ 2z+\lambda_1 c+\lambda_2 c'=0,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Si moltiplichino le equazioni (3) per a, b, c, rispettivamente e si sommino; allora abbiamo, per (1),

$$2+\lambda_1(a^2+b^2+c^2)+\lambda_2(aa'+bb'+cc')=0\ldots\ldots\ldots(4).$$

Similmente,

$$2+\lambda_2(a'^2+b'^2+c'^2)+\lambda_1(aa'+bb'+cc')=0\ldots\ldots\ldots(5).$$

Le equazioni (4) e (5) determinano λ_1 e λ_2, e quindi da (3) troviamo x, y, z. Inoltre moltiplicando (3) per x, y, z, rispettivamente e sommando, abbiamo

$$2\varphi+\lambda_1+\lambda_2=0,$$

che determina φ. Questa è la soluzione della seguente quistione di Geometria a tre dimensioni: «Nella retta d'intersezione di due piani dati trovare il punto più vicino all'origine delle coordinate.» Dalla natura della quistione è evidente che vi deve essere un valore minimo di φ.

Es. 2. Determinare il massimo quadrilatero che si può formare con i quattro lati dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, presi in quest'ordine.

Dinoti x l'angolo tra α e β,

y l'angolo tra γ e δ.

L'area della figura è

$$\frac{1}{2}(\alpha\beta \operatorname{sen} x+\gamma\delta \operatorname{sen} y),$$

onde possiamo porre

$$\varphi(x, y)=\alpha\beta \operatorname{sen} x+\gamma\delta \operatorname{sen} y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Se tiriamo una diagonale della figura dall'intersezione di β e γ all'intersezione di α e δ, abbiamo dai due differenti valori che possono trovarsi per la lunghezza di questa diagonale,

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\cos y.$$

Così $\quad \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x-\gamma^2-\delta^2+2\gamma\delta\cos y=0\ldots\ldots\ldots(2).$

Da (1) e (2),

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\beta\cos x\,Dx+\gamma\delta\cos y\,Dy\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

$$0=\alpha\beta\operatorname{sen}x\,Dx-\gamma\delta\operatorname{sen}y\,Dy\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

onde
$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\beta\left\{\cos x+\frac{\operatorname{sen}x\cos y}{\operatorname{sen}y}\right\}Dx\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Quindi, poichè il coefficiente di Dx deve svanire,

$$\operatorname{sen}(x+y)=0.$$

Adunque $x+y$ deve essere zero, o un multiplo di π; la sola soluzione applicabile alla presente quistione è

$$x+y=\pi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

Quindi $\cos y=-\cos x$: sostituendo questo valore di $\cos y$ nell'equazione (2), abbiamo

$$\cos x=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Poichè da (5)
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\alpha\beta\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}y}Dx,$$

abbiamo, trascurando i termini che svaniscono, per (6),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\alpha\beta\cos(x+y)}{\operatorname{sen}y}Dx\,(Dx+Dy),$$

che, per mezzo di (4) e (6), diviene

$$-\frac{\alpha\beta}{\operatorname{sen}y}\left(1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)(Dx)^2.$$

Quindi, poichè $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ è *negativo,* abbiamo trovato un valore massimo di φ, cioè, quando la somma di due angoli opposti della figura è eguale a due angoli retti.

Es. 3. Trovare il valore massimo e il minimo di u^2 quando

$$u^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

mentre
$$x^2+y^2+z^2=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

ed
$$lx+my+nz=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Da (1), (2), e (3), deduciamo

$$0 = a^2xDx + b^2yDy + c^2zDz \dots\dots\dots\dots (4),$$

$$0 = xDx + yDy + zDz \dots\dots\dots\dots (5),$$

$$0 = lDx + mDy + nDz \dots\dots\dots\dots (6).$$

Si moltiplichi (5) per λ_1 e (6) per λ_2 e si aggiungano a (4); allora si eguaglino a zero i coefficienti di Dx, Dy, Dz; così

$$a^2x + \lambda_1 x + \lambda_2 l = 0 \dots\dots\dots\dots (7),$$

$$b^2y + \lambda_1 y + \lambda_2 m = 0 \dots\dots\dots\dots (8),$$

$$c^2z + \lambda_1 z + \lambda_2 n = 0 \dots\dots\dots\dots (9).$$

Si moltiplichi (7) per x, (8) per y, e (9) per z, e si aggiungano; allora per (2) e (3),

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + \lambda_1 = 0.$$

Quindi $$\lambda_1 = -u^2.$$

Onde, da (7), (8), e (9),

$$x = \frac{\lambda_2 l}{u^2 - a^2},$$

$$y = \frac{\lambda_2 m}{u^2 - b^2},$$

$$z = \frac{\lambda_2 n}{u^2 - c^2},$$

e così, dall'equazione (3),

$$\frac{l^2}{u^2 - a^2} + \frac{m^2}{u^2 - b^2} + \frac{n^2}{u^2 - c^2} = 0.$$

Questa equazione è di 2° grado in u^2, dalla quale possono dedursi due valori di u^2, uno dei quali sarà un massimo e l'altro un minimo. È chiaro che deve esistere un valore massimo ed un valore minimo di u^2, poichè x, y, z, non possono svanire simultaneamente, e nessuna di esse può essere maggiore dell'unità; quindi u^2 deve giacere tra i limiti 0 ed $a^2 + b^2 + c^2$.

Es. 4. Trovare i valori di x, y, z, quando x^4yz^2 è un massimo o minimo, assoggettato alla condizione

$$a^2x^2 + 2by^3 + z^4 = c^4.$$

Abbiamo, ponendo u per x^4yz^2,

$$4x^3yz^2\,Dx + x^4z^2\,Dy + 2x^4yz\,Dz = 0,$$

o
$$u\left\{\frac{4Dx}{x} + \frac{Dy}{y} + \frac{2Dz}{z}\right\} = 0.$$

Inoltre
$$a^2x\,Dx + 3by^2Dy + 2z^3Dz = 0.$$

Onde
$$\frac{4}{x} + \lambda a^2 x = 0,$$

$$\frac{1}{y} + 3\lambda by^2 = 0,$$

$$\frac{1}{z} + \lambda z^3 = 0.$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per x, la seconda per $\frac{2y}{3}$, e la terza per z, e si sommino; allora

$$\frac{17}{3} + \lambda\,\{\,a^2x^2 + 2by^3 + z^4\,\} = 0;$$

onde
$$\lambda = -\frac{17}{3c^4}.$$

Quindi
$$a^2x^2 = \frac{12c^4}{17}, \qquad by^3 = \frac{c^4}{17}, \qquad z^4 = \frac{3c^4}{17}.$$

5. Trovare il valore massimo ed il minimo di r^2 quando

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

le variabili e le costanti essendo legate dalle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1),$$

$$lx + my + nz = p \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2),$$

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = p \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3),$$

$$\frac{\alpha}{a^2l} = \frac{\beta}{b^2m} = \frac{\gamma}{c^2n} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4).$$

[Lo studente che ha conoscenza della Geometria a tre dimensioni vedrà che (1) è l'equazione di un ellissoide, e (2) è l'equazione di un piano; α, β, γ sono le coordinate del centro della curva d'intersezione del piano e dell'ellissoide, ed r è il raggio vettore tirato dal centro di questa curva ad un punto qualunque della curva}.

Poichè r^2 deve essere un massimo o un minimo, abbiamo

$$(x-\alpha)\,Dx+(y-\beta)\,Dy+(z-\gamma)\,Dz=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5);$$

inoltre da (1) e (2)

$$\frac{xDx}{a^2}+\frac{yDy}{b^2}+\frac{zDz}{c^2}=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6),$$

$$lDx+mDy+nDz=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7).$$

Si moltiplichi (6) per λ, e (7) per μ, e si aggiungano a (5); indi si eguaglino a zero i coefficienti di Dx, Dy, e Dz; così,

$$x-\alpha+\frac{\lambda x}{a^2}+\mu l=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (8),$$

$$y-\beta+\frac{\lambda y}{b^2}+\mu m=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (9),$$

$$z-\gamma+\frac{\lambda z}{c^2}+\mu n=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (10).$$

Si moltiplichino (8), (9), e (10) per $x-\alpha$, $y-\beta$, e $z-\gamma$ rispettivamente, e si aggiungano; così per (2) e (3)

$$r^2+\lambda\left\{\frac{x(x-\alpha)}{a^2}+\frac{y(y-\beta)}{b^2}+\frac{z(z-\gamma)}{c^2}\right\}=0,$$

cioè,

$$r^2+\lambda\left\{1-\frac{x\alpha}{a^2}-\frac{y\beta}{b^2}-\frac{z\gamma}{c^2}\right\}=0 \;..\; (11).$$

Ora da (4)

$$\frac{\alpha}{a^2l}=\frac{\beta}{b^2m}=\frac{\gamma}{c^2n}=\frac{\alpha l+\beta m+\gamma n}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}=\frac{p}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2},$$

così (11) diviene per mezzo di (2)

$$r^2=\lambda\left\{\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}-1\right\}=\lambda k \text{ poniamo.}$$

Così (8), (9), e (10) possono scriversi

$$\left.\begin{aligned} x\left(1+\frac{r^2}{ka^2}\right) &= \alpha - \mu l, \\ y\left(1+\frac{r^2}{kb^2}\right) &= \beta - \mu m, \\ z\left(1+\frac{r^2}{kc^2}\right) &= \gamma - \mu n, \end{aligned}\right\} \qquad (12).$$

Sostituendo i valori di x, y, e z da queste in (2), otteniamo

$$\frac{lka^2(\alpha-\mu l)}{ka^2+r^2}+\frac{mkb^2(\beta-\mu m)}{kb^2+r^2}+\frac{nkc^2(\gamma-\mu n)}{kc^2+r^2}=p;$$

inoltre $\quad l\alpha \quad + \quad m\beta \quad + \quad n\gamma \quad = p.$

Sottraendo verrà

$$\frac{a^2l^2\left(k\mu+\dfrac{r^2\alpha}{a^2l}\right)}{ka^2+r^2}+\frac{b^2m^2\left(k\mu+\dfrac{r^2\beta}{b^2m}\right)}{kb^2+r^2}+\frac{c^2n^2\left(k\mu+\dfrac{r^2\gamma}{c^2n}\right)}{kc^2+r^2}=0.$$

Ora $k\mu+\dfrac{r^2\alpha}{a^2l}$, $k\mu+\dfrac{r^2\beta}{b^2m}$, e $k\mu+\dfrac{r^2\gamma}{c^2n}$ sono di egual valore per (4); e questo valore non può essere zero, poichè allora per (12) otterremmo i valori inammissibili $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$. Quindi dividendo abbiamo

$$\frac{a^2l^2}{ka^2+r^2}+\frac{b^2m^2}{kb^2+r^2}+\frac{c^2n^2}{kc^2+r^2}=0.$$

Questa equazione di 2° grado darà due valori di r^2, uno sarà il valore massimo di r^2 e l'altro il valore minimo.

[Il *prodotto* dei valori di r^2 sarà

$$\frac{k^2a^2b^2c^2\,(l^2+m^2+n^2)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2};$$

e π volte la radice quadrata di questo prodotto è l'*area* della curva d'intersezione dell'ellissoide col piano; quindi prendendo il valore *positivo* della radice quadrata abbiamo per l'area

$$\frac{\pi abc\,(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-p^2)\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}{(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg].$$

6. Trovare il valore massimo o minimo di u quando $u=x^2y^3z^4$, e $2x+3y+4z=a$.

Risultato. $\left(\frac{a}{9}\right)^9$ è un valore massimo.

7. Trovare il valore minimo di u dall'equazione

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots\ldots,$$

le variabili essendo legate dall'equazione

$$ax + by + cz + \ldots\ldots = k.$$

Il risultato è $u = \dfrac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots}$.

8. Trovare il valore minimo di

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z - xy.$$

Risultato. $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$.

9. Trovare il valore minimo di

$$x^4 + y^4 + z^4,$$

in cui $xyz = c^3$.

10. Se x, y, z sono gli angoli di un triangolo, trovare i valori di x, y, z che rendono

$$\operatorname{sen}^m x \operatorname{sen}^n y \operatorname{sen}^p z$$

un massimo.

11. Trovare il valore massimo o minimo di $x^p y^q z^r$ assoggettato alla condizione $lx + my + nz = a$. Quindi trovare il parallelepipedo di volume massimo che ha per suoi tre spigoli gli assi delle x, y, z, ed ha l'intersezione dei suoi spigoli opposti in un piano dato.

12. Se $ax^2 + bxy + cy^2 = f$, ed $r^2 = x^2 + y^2$, mostrare che i valori massimo e minimo di r^2 sono dati dall'equazione

$$(b^2 - 4ac)\,r^4 + 4f(a + c)\,r^2 - 4f^2 = 0.$$

13. Trovare il valore massimo di

$$(ax + by + cz)\, e^{-\alpha^2x^2-\beta^2y^2-\gamma^2z^2}.$$

Risultato. $x = \dfrac{\mu a}{\alpha^2}$, $\quad y = \dfrac{\mu b}{\beta^2}$, $\quad z = \dfrac{\mu c}{\gamma^2}$;

in cui
$$\frac{1}{\mu} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)}.$$

14. Ad un dato volume V di metallo deve darsi la forma di un vaso rettangolare; le pareti del vaso debbono essere di data spessezza a, e non vi deve essere coperchio. Determinare la figura del vaso affinchè abbia una capacità massima.

Risultato. Se x, y e z, sono le esterne lunghezza, larghezza, e profondità;

$$x = y = a + \left(\frac{V - a^3}{3a}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad z = \frac{x}{2}.$$

15. Se $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, in cui

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy = 1,$$

ed
$$lx + my + nz = 0,$$

trovare il valore massimo ed il minimo di r^2.

Risultato. Essi sono determinati dall'equazione

$$l^2\left(b - \frac{1}{r^2}\right)\left(c - \frac{1}{r^2}\right) + m^2\left(c - \frac{1}{r^2}\right)\left(a - \frac{1}{r^2}\right) + n^2\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right)$$
$$- 2mna'\left(a - \frac{1}{r^2}\right) - 2nlb'\left(b - \frac{1}{r^2}\right) - 2lmc'\left(c - \frac{1}{r^2}\right)$$
$$+ 2mnb'c' + 2nlc'a' + 2lma'b' - l^2a'^2 - m^2b'^2 - n^2c'^2 = 0.$$

CAPITOLO XVII.

ELIMINAZIONE DELLE COSTANTI E DELLE FUNZIONI.

241. Possiamo far uso della differenziazione per eliminare da un'equazione che racchiude variabili e costanti una o più delle costanti. Per esempio, sia

$$(y-b)^2+(x-a)^2-c^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Differenziando tre volte, si ha

$$(y-b)\frac{dy}{dx}+x-a=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$(y-b)\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Da queste quattro equazioni possiamo dedurre un'equazione liberata dalle tre costanti: abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(y-b)^3}=-\frac{c^2}{(y-b)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}}{y-b}=-\frac{3c^2(x-a)}{(y-b)^5}.$$

Quindi $$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

242. In generale, se abbiamo un'equazione tra x ed y ed n costanti arbitrarie, e differenziamo m volte successivamente, abbiamo $m+1$ equazioni tra le quali possiamo eliminare m costanti, e ciò darà un risultato che contiene $\frac{d^my}{dx^m}$ ed i coefficienti differenziali inferiori di y. Nell'equazione risultante vi saranno ancora $n-m$ costanti; e siccome possiamo scegliere a piacere le m costanti che si eliminano, possiamo formare tante equazioni risultanti che contengono $n-m$ costanti, quante sono le combinazioni di n cose prese m per volta; cioè,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{\underline{|m}}.$$

Ciascuna di queste equazioni risultanti si dice *un'equazione differenziale dell'm^{mo} ordine*, $\frac{d^my}{dx^m}$ essendo il più alto coefficiente differenziale di y che si trova in essa.

Quando l'equazione primitiva si differenzia n volte successivamente, abbiamo $n+1$ equazioni, tra le quali *tutte* le costanti possono essere eliminate, dandoci un'equazione differenziale dell'n^{mo} ordine.

243. Se ritorniamo all'esempio nell'Art. 241, abbiamo per una delle tre equazioni differenziali del primo ordine,

$$(y-b)\frac{dy}{dx}+x-a=0.$$

Se troviamo a da questa equazione in termini di x, y, b, e $\frac{dy}{dx}$, e sostituiamo nell'equazione data, otteniamo un'altra equazione differenziale del primo ordine. Se troviamo b in termini di x, y, etc., e sostituiamo nell'equazione data, otteniamo la rimanente equazione differenziale del primo ordine.

Le tre equazioni differenziali del secondo ordine che possono trovarsi combinando le equazioni (1), (2), e (3) dell'Art. 241, sono

$$b = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$a = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$c^2 = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}.$$

Si troverà col fatto, che se prendiamo *una qualunque* delle equazioni differenziali del primo ordine, e differenziamo due volte, otterremo lo stesso risultato se eliminiamo le due costanti contenute in queste tre equazioni, come abbiamo già trovato nell'equazione (5) dell'Art. 241. Inoltre, se prendiamo *una qualunque* delle equazioni differenziali del secondo ordine, differenziamo una volta, ed eliminiamo la costante contenuta in queste due equazioni, arriveremo sempre all'equazione (5) dell'Art. 241.

244. Il procedimento col quale, come nell'articolo precedente, possiamo dedurre le equazioni differenziali per mezzo della differenziazione e dell'eliminazione delle costanti, non ha in se stesso molto interesse o valore. Ma il metodo di passare dalle equazioni differenziali all'equazione primitiva da cui esse sono dedotte, forma un'importantissimo ramo delle matematiche. Infatti tutte le investigazioni nella scienza fisica conducono ad *equazioni differenziali*, le quali debbono essere risolute prima che possiamo dire di comprendere il soggetto che si considera. Non entriamo quì nella soluzione delle equazioni differenziali, ma è solito, nei trattati sul Calcolo Differenziale di considerare alquanto la formazione di tali equazioni per mezzo dell'eliminazione, questo procedimento rischiarando i metodi da adottarsi per la loro soluzione.

245. Non solamente le costanti si possono eliminare, ma le funzioni. Si supponga, per esempio,

$$y = \operatorname{sen} x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$= \sqrt{(1 - y^2)};$$

onde
$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Quindi la funzione *sen* x è stata eliminata.

Inoltre, sia

$$y = \tan(x + y);$$

onde
$$\frac{dy}{dx} = \{1 + \tan^2(x + y)\} \left\{1 + \frac{dy}{dx}\right\}$$

$$= (1 + y^2)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right).$$

Quindi $\tan(x + y)$ è stata eliminata.

In questi esempii funzioni *date* sono state eliminate: procediamo a casi nei quali si eliminano funzioni *ignote.*

246. Si supponga $z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, in cui φ dinota una funzione la forma della quale non è data, e che è chiamata perciò una *funzione arbitraria*. Le variabili x ed y si suppongono indipendenti.

Si ponga $\frac{x}{y} = t$; allora

$$z = \varphi(t),$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \varphi'(t)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}\varphi'(t),$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi'(t)\frac{dt}{dy} = -\frac{x}{y^2}\varphi'(t);$$

onde
$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0.$$

Quindi quest' ultima equazione è vera *qualunque* sia la forma della funzione φ; per esempio, se $z=\log\left(\frac{x}{y}\right)$, o $z=\operatorname{sen}\frac{x}{y}$, o $z=\left(\frac{x}{y}\right)^m$, in ciascun caso abbiamo che l'equazione sussiste.

247. Si supponga $u=\varphi(v)$, in cui u e v sono funzioni note di x, y, e z, ma la *forma* di φ non è data. Le variabili x ed y si suppongono indipendenti. Se differenziamo ambo i membri dell'equazione rispetto ad x ed y successivamente, abbiamo

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=\varphi'(v)\left\{\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right\},$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=\varphi'(v)\left\{\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right\}.$$

Onde, qualunque sia la forma di φ,

$$\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=\left(\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right).$$

In altri termini si è eliminata la funzione arbitraria φ.

248. Si suppongano

$$\alpha_1=f_1(x, y, z),$$

$$\alpha_2=f_2(x, y, z),$$

due note funzioni di x, y, z, che entrano in un'equazione

$$F\{x, y, z, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2)\}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

φ_1 e φ_2 essendo *funzioni arbitrarie*. Se formiamo le equazioni

$$\frac{dF}{dx}=0, \qquad \frac{dF}{dy}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}=0, \qquad \frac{d^2F}{dx\,dy}=0, \qquad \frac{d^2F}{dy^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

introduciamo le funzioni ignote

$$\varphi_1'(\alpha_1), \quad \varphi_2'(\alpha_2), \quad \varphi_1''(\alpha_1), \quad \varphi_2''(\alpha_2),$$

e queste, con $\varphi_1(\alpha_1)$, e $\varphi_2(\alpha_2)$, formano *sei* quantità da eliminarsi tra le *sei* equazioni (1), (2), (3). Ciò *generalmente* non può essere effettuato. Procedendo alle equazioni

$$\frac{d^3F}{dx^3}=0,\quad \frac{d^3F}{dx^2\,dy}=0,\quad \frac{d^3F}{dx\,dy^2}=0,\quad \frac{d^3F}{dy^3}=0 \ldots (4),$$

introdurremo solamente *due* nuove funzioni ignote, cioè $\varphi_1'''(\alpha_1)$ e $\varphi_2'''(\alpha_2)$. Quindi possiamo ottenere con l'eliminazione un'equazione tra z ed i suoi coefficienti differenziali parziali rispetto ad y ed x del terzo ordine inclusivamente, la quale sarà liberata dalle funzioni $\varphi_1(\alpha_1)$ e $\varphi_2(\alpha_2)$ e dalle loro funzioni derivate. Poichè abbiamo dieci equazioni ed otto quantità da eliminare, possono generalmente ottenersi due equazioni risultanti.

249. Abbiamo detto che generalmente, nel caso supposto nell'articolo precedente, *non possiamo eliminare* le funzioni arbitrarie procedendo sino alle seconde equazioni derivate. Si hanno però dei casi, nei quali, per la forma di α_1 ed α_2, questa eliminazione *può* essere effettuata; per esempio, si supponga

$$z=\varphi_1(x+ay)+\varphi_2(x-ay).$$

Qui

$$\frac{dz}{dx}=\varphi_1'(x+ay)+\varphi_2'(x-ay),$$

$$\frac{dz}{dy}=a\varphi_1'(x+ay)-a\varphi_2'(x-ay),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\varphi_1''(x+ay)+\varphi_2''(x-ay),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=a^2\varphi_1''(x+ay)+a^2\varphi_2''(x-ay);$$

quindi

$$\frac{d^2z}{dy^2}=a^2\frac{d^2z}{dx^2}.$$

250. Supponiamo un'equazione fra tre variabili della forma

$$F\{x,y,z,\varphi_1(\alpha_1),\varphi_2(\alpha_2),\ldots\ldots\varphi_n(\alpha_n)\}=0,$$

che racchiude *n funzioni arbitrarie* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots\ldots\varphi_n$ delle *n note funzioni* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\alpha_n$ rispettivamente.

Se procediamo nel modo dell' Art. 248, e deduciamo da questa equazione tutte le sue equazioni derivate sino a quelle dell' ordine m^{mo} inclusivamente, otterremo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots (m+1)$$

equazioni, cioè $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ equazioni.

Il numero delle funzioni ignote sarà $(m+1)n$, e quindi, per potere eliminare le funzioni arbitrarie, dobbiamo avere generalmente

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \text{ maggiore di } (m+1)n,$$

onde $$\frac{m+2}{2} \text{ maggiore di } n;$$

quindi $$m = 2n - 1 \text{ al meno.}$$

Se $m = 2n - 1$, il numero delle equazioni sarà $n(2n+1)$, ed il numero delle funzioni da eliminarsi, $2n^2$; quindi, vi saranno generalmente n equazioni risultanti.

251. Daremo un caso nel quale sono contenute più di tre variabili. Si supponga

$$F\{u, x, y, z, \varphi(\alpha, \beta)\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

in cui $\varphi(\alpha, \beta)$ dinota una funzione arbitraria delle due quantità α e β, le quali sono esse stesse tutte e due funzioni di u, x, y, e z. Se differenziamo (1) rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti x, y, z, otteniamo tre equazioni

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

In queste equazioni, oltre la funzione arbitraria φ, abbiamo le sue due funzioni derivate $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ e $\frac{d\varphi}{d\beta}$. Quindi, tra le quattro equazioni (1) e (2), potremo eliminare le tre funzioni arbitrarie, ed arrivare ad un' equazione che contiene

$$u, x, y, z, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \text{e} \quad \frac{du}{dz}.$$

252. Supponiamo due equazioni della forma

$$f\{x, y, z, c, \quad \varphi(c), \quad \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, c, \quad \varphi(c), \quad \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$

e si debba investigare in quali casi, con le differenziazioni successive, si possano eliminare c e le funzioni arbitrarie $\varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots$

Dobbiamo considerare z e c come funzioni delle variabili indipendenti x ed y, ed eliminare le quantità

$$c, \ \frac{dc}{dx}, \ \frac{dc}{dy}, \ \frac{d^2c}{dx^2}, \ \frac{d^2c}{dx\,dy}, \ \frac{dc^2}{dy^2}, \ldots,$$
$$\varphi(c), \quad \varphi'(c), \quad \varphi''(c), \ldots\ldots,$$
$$\chi(c), \quad \chi'(c), \quad \chi''(c), \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

tra le due date equazioni e quelle derivate da esse con la differenziazione successiva rispetto ad x ed y. Supponiamo che il numero delle funzioni arbitrarie $\varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots$ sia n, e sia m un numero intero. Il numero totale delle quantità comprese in c e nei suoi coefficienti differenziali parziali sino all'm^{mo} ordine inclusivamente è

$$1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (m+1), \ \text{o} \ \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Il numero delle quantità comprese in

$$\varphi(c), \quad \varphi'(c), \quad \varphi''(c), \ldots\ldots \varphi^m(c),$$
$$\chi(c), \quad \chi'(c), \quad \chi''(c), \ldots\ldots \chi^m(c),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

è $n(m+1)$. Se aggiungiamo alle due date equazioni tutte quelle che possono ottenersi prendendo le equazioni derivate sino a quelle dell'm^{mo} ordine inclusivamente, il numero totale delle equazioni sarà $(m+1)(m+2)$. Quindi l'eliminazione si può effettuare se

$$(m+1)(m+2) \text{ è maggiore di } n(m+1) + \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

cioè, se

$$m + 2 \text{ è maggiore di } n + \frac{m+2}{2},$$

o

$$m + 2 \text{ maggiore di } 2n.$$

Se prendiamo $m = 2n - 1$, avremo $2n(2n+1)$ equazioni, e $4n^2 + n$ quantità da eliminare; quindi, possono ottenersi n differenti equazioni risultanti che contengono x, y, z, ed i coefficienti differenziali parziali di z sino a quelli dell'ordine $(2n-1)^{\text{mo}}$ inclusivamente.

253. Come un esempio di quanto precede, supponiamo solamente *una* funzione arbitraria $\varphi(c)$. Le date equazioni diventano

$$f\{(x, y, z, c, \varphi(c)\} = 0,$$
$$F\{(x, y, z, c, \varphi(c)\} = 0.$$

Si differenzii ciascuna rispetto ad x ed y. Abbiamo così sei equazioni, dalle quali possiamo eliminare

$$c, \ \frac{dc}{dx}, \ \frac{dc}{dy}, \ \varphi(c), \text{ e } \varphi'(c),$$

lasciando un'equazione tra

$$x, y, z, \frac{dz}{dx} \text{ e } \frac{dz}{dy}.$$

254. Ancora, supponiamo le funzioni arbitrarie ridursi a *due* $\varphi(c)$ e $\chi(c)$. Se adoperiamo le due date equazioni e quelle ottenute procedendo sino alle *seconde* equazioni derivate, abbiamo in tutto *dodici* equazioni, dalle quali non possiamo in generale eliminare le *dodici* quantità

$$c, \ \frac{dc}{dx}, \ \frac{dc}{dy}, \ \frac{d^2c}{dx^2}, \ \frac{d^2c}{dx\,dy}, \ \frac{d^2c}{dy^2},$$
$$\varphi(c), \ \varphi'(c), \ \varphi''(c), \ \chi(c), \ \chi'(c), \ \chi''(c).$$

Procedendo alle equazioni derivate del *terzo* ordine, abbiamo *venti* equazioni e *dieciotto* quantità da eliminare, cioè le dodici già scritte, e

$$\frac{d^3c}{dx^3}, \ \frac{d^3c}{dx^2dy}, \ \frac{d^3c}{dx\,dy^2}, \ \frac{d^3c}{dy^3}, \ \varphi'''(c), \text{ e } \chi'''(c).$$

Quindi possiamo ottenere *due* equazioni differenziali che contengono x, y, z, ed i coefficienti differenziali parziali di z sino al terzo ordine inclusivamente.

255. In casi particolari l'eliminazione può essere effettuata senza procedere a tante differenziazioni quante ne indica la teoria generale. Supponiamo, per esempio, che si abbiano tre funzioni arbitrarie, dovremmo generalmente formare le equazioni derivate del *quinto* ordine per l'Art. 252. Ma se le tre funzioni arbitrarie sono legate in modo, che

$$\chi(c) = \varphi'(c),$$
$$\psi(c) = \varphi''(c),$$

le date equazioni prendono la forma

$$f\{x, y, z, \varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c)\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, \varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c)\} = 0;$$

e procedendo sino alle *seconde* equazioni derivate, abbiamo *dodici* equazioni ed *undici* quantità da eliminarsi, cioè

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dy^2}, \frac{d^2c}{dx\,dy},$$
$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \varphi'''(c), \varphi''''(c).$$

Così possiamo dedurre *una* equazione risultante tra x, y, z, ed i coefficienti differenziali di z sino a quelli del secondo ordine inclusivamente.

256. Le *due* equazioni

$$f\{x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots\} = 0,$$

sono equivalenti ad *una* equazione della forma

$$F\{x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \chi_1(x, y, z), \ldots\ldots\} = 0;$$

la quale può ottenersi teoreticamente, trovando dalla prima equazione il valore di c e sostituendolo nella seconda. Per l'Art. 254 vediamo che generalmente non potremo eliminare le due funzioni arbitrarie φ_1, χ_1, da un'equazione della forma

$$F\{x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \chi_1(x, y, z)\} = 0,$$

procedendo solamente alle seconde equazioni derivate. Ciò si è già presentato nell'Art. 248.

ESEMPII.

1. Eliminare la costante da

$$xy - c = (x + y)(c - 1).$$

$$\textit{Risultato.}\ (x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} + y^2 + y + 1 = 0.$$

2. Eliminare e^x e $\cos x$ da

$$y - e^x \cos x = 0.$$

$$\textit{Risultato.}\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

3. Se $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$, mostrare che

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

4. Se $y = ae^{mx}\operatorname{sen} nx$, mostrare che

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + (m^2 + n^2)\,y = 0.$$

5. Se $y = a\operatorname{sen} x + b\cos x$, allora

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

6. Eliminare gli esponenziali da

$$xy = ae^x + be^{-x}.$$

$$\textit{Risultato.}\ x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

7. Eliminare le costanti da

$$y^2 + bx^2 = a.$$

$$\textit{Risultato.}\ xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0.$$

8. Eliminare le costanti e gli esponenziali da

$$ae^y + be^{-y} = fe^x + ge^{-x}.$$

$$\textit{Risultato.}\ \left\{\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx}\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right\} = 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

9. Se $(x+y)(c+\log x) = ae^{\frac{y}{x}}$, allora

$$xy\frac{dy}{dx} - y^2 = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}.$$

10. Eliminare a e b da

$$y = \frac{a}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\log x + b\right).$$

Risultato. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$

11. Eliminare le costanti dall'equazione

$$1 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Risultato. $\dfrac{d^3y}{dx^3}\left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right) + 3x\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$

12. Se $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, mostrare che

$$x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = z^2.$$

13. Se $\log z = \varphi(ay + bx) + \psi(ay - bx)$, allora

$$a^2\left\{z\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} = b^2\left\{z\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}$$

14. Se $z = e^{\frac{x}{x+y}}\varphi(x+y)$, allora $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z}{x+y}$.

15. Se $z = \varphi(e^x \operatorname{sen} y)$, allora $\operatorname{sen} y\dfrac{dz}{dy} = \cos y\dfrac{dz}{dx}$.

16. Se $\dfrac{dz}{dx} + f(z)\dfrac{dz}{dy} = 0$, allora

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0.$$

17. Se $z = f\left(\dfrac{y - nz}{x - mz}\right)$, allora

$$(x - mz)\frac{dz}{dx} + (y - nz)\frac{dz}{dy} = 0.$$

18. Eliminare le funzioni arbitrarie da

$$z = x\varphi(ax+by) + y\psi(ax+by).$$

Risultato. $a^2 \frac{d^2z}{dy^2} - 2ab \frac{d^2z}{dx\,dy} + b^2 \frac{d^2z}{dx^2} = 0.$

19. Eliminare le funzioni arbitrarie e le esponenziali da

$$u = e^{nx} F(x+y) + e^{-nx} f(x-y).$$

Risultato. $\frac{d^2u}{dx^2} = n^2u + 2n \frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$

20. Eliminare le funzioni circolari e le logaritmiche da

(1) $y = \operatorname{sen} \log x$, (2) $y = \log \operatorname{sen} x$.

Risultati. (1) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$, (2) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$

21. Se $z = \frac{y^2}{2} + \varphi\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$, allora $y\frac{dz}{dy} + x^2 \frac{dz}{dx} = y^2$.

22. Eliminare le funzioni da $y = xf(z) + \varphi(z)$.

Risultato. Lo stesso come nell'Es. 16.

23. Se $z + mx + ny = f\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}$, allora

$$\{y - b - n(z-c)\}\frac{dz}{dx} - \{x - a - m(z-c)\}\frac{dz}{dy} = n(x-a) - m(y-b).$$

24. Se $z = x^2(ax+by) + \varphi(y^2+x^2) + \psi(y^2-x^2)$,

allora $\frac{1}{x^2}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{1}{x^3}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{y^3}\frac{dz}{dy} = \frac{3a}{x} - \frac{bx^2}{y^3}.$

25. Se $z = \varphi\{x + f(y)\}$, allora

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

26. Eliminare le funzioni arbitrarie da

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \cdot \chi(xy).$$

Risult. $\left(x^2\frac{d^2z}{dx^2} - y^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)z + \left(z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}\right)\left(x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}\right) = 0.$

27. Se $u+y+z=x^2 f\{x(u-y), x(y-z)\}$, allora

$$x\frac{du}{dx}+(u+z)\frac{du}{dy}+(u+y)\frac{du}{dz}=y+z.$$

28. Se $u=\varphi\left\{F(y^2-xz), f\left(\frac{3zy}{x}-\frac{2y^3}{x^2}-t\right)\right\}$, allora

$$x\frac{du}{dy}+2y\frac{du}{dz}+3z\frac{du}{dt}=0.$$

29. Se $u=xyz\cdot F\{f_1(x^2+y^2+z^2), f_2(xy+xz+yz)\}$, allora

$$(y-z)\frac{du}{dx}+(z-x)\frac{du}{dy}+(x-y)\frac{du}{dz}$$

$$=u\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right).$$

30. Eliminare z dalle equazioni

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\varphi(x,y), \qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\psi(x,y).$$

Risultato. $2\varphi(x,y)=\dfrac{d}{dx}\dfrac{\psi(x,y)-\varphi(x,y)\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$.

31. Eliminare le funzioni arbitrarie da

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Risultato. $x^2\dfrac{d^2z}{dx^2}+2xy\dfrac{d^2z}{dx\,dy}+y^2\dfrac{d^2z}{dy^2}+x\dfrac{dz}{dx}+y\dfrac{dz}{dy}=n^2z.$

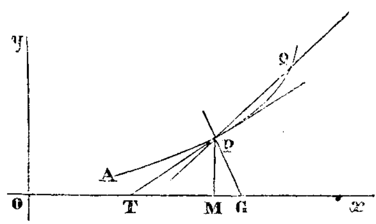
32. Mostrare come eliminare le n funzioni arbitrarie da

$$z=\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)\ldots\ldots+x^{n-1}\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right).$$

CAPITOLO XVIII.

TANGENTE E NORMALE AD UNA CURVA PIANA.

257. Def. Siano P, Q, due punti di una curva, e si supponga una linea retta tirata per essi; la posizione limite di questa retta, a misura che Q si muove lungo la curva e si



avvicina indefinitamente a P, è chiamata *la tangente della curva nel punto P*.

Trovare l'equazione della tangente in un dato punto della curva.

Siano x, y, le coordinate del dato punto P,

$x+\Delta x$, $y+\Delta y$, le coordinate di un' altro punto Q della curva.

Allora x', y', essendo le coordinate correnti, avremo per l'equazione della retta PQ,

$$y'-y=\frac{y+\Delta y-y}{x+\Delta x-x}(x'-x),$$

cioè,
$$y'-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(x'-x).$$

Ora si avvicini Q indefinitamente a P; il limite di

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è $\frac{dy}{dx}$, e l'equazione della tangente in P è

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x).$$

258. Def. La normale ad una curva in un punto è la linea retta condotta pel punto perpendicolarmente alla tangente nello stesso punto.

Trovare l'equazione della normale in un punto della curva.

Poichè l'equazione della tangente nel punto (x, y) è

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

l'equazione della normale nello stesso punto è

$$y'-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x'-x),$$

supposti gli assi rettangolari.

259. La tangente e la normale nel punto P incontrino l'asse delle x nei punti T e G rispettivamente; si tiri l'ordinata PM; allora

MT si chiama la *sottangente*,

MG si chiama la *sunnormale*.

Ora $$\frac{MP}{MT}=\text{alla tangente di } PTx,$$

$$=\frac{dy}{dx};$$

onde $$MT=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=y\frac{dx}{dy}.$$

Similmente $$\frac{MG}{MP}=\text{tangente di } GPM=\text{tangente di } PTx,$$

$$=\frac{dy}{dx};$$

onde $$MG=y\frac{dy}{dx},$$

In queste espressioni della sunnormale e della sottangente, si deve osservare che la sottangente è misurata da M verso *sinistra*, e la sunnormale è misurata da M verso *dritta*. Se in una curva qualunque $y\frac{dy}{dx}$ è una quantità *negativa*, ciò indica che G giace a *sinistra* di M, e, siccome in questo caso $y\frac{dx}{dy}$ è anche negativa, T giace a *dritta* di M.

260. Nell'equazione della tangente si ponga $y'=0$, allora

$$x'=x-y\frac{dx}{dy};$$

questo adunque è il valore di OT.

Similmente, se poniamo $x'=0$, si trova

$$y'=y-x\frac{dy}{dx},$$

che dà l'ordinata del punto in cui la tangente incontra l'asse delle y.

261. La lunghezza della perpendicolare abbassata dall'origine sulla tangente è, per le formole ordinarie della geometria analitica,

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\pm\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}.$$

262. Se l'equazione di una curva è data sotto la forma $\varphi(x, y)=0$, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}.$$

Con ciò l'equazione della tangente diventa

$$(y'-y)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+(x'-x)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0,$$

e quella della normale

$$(y'-y)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-(x'-x)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=0.$$

La lunghezza della perpendicolare alla tangente dall'origine è, tralasciando il segno,

$$\frac{x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+y\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\sqrt{\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right\}}}.$$

263. Alle volte conviene determinare una curva per mezzo delle due equazioni

$$y=\psi(t), \qquad x=\chi(t),$$

sicchè x ed y sono ambedue funzioni di una variabile t, eliminando la quale tra le date equazioni, si può ottenere un risultato della forma ordinaria $y=f(x)$. Con questa supposizione, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Quindi l'equazione della tangente diventa

$$(y'-y)\frac{dx}{dt}=(x'-x)\frac{dy}{dt},$$

e quella della normale

$$(y'-y)\frac{dy}{dt}=-(x'-x)\frac{dx}{dt}.$$

Nella figura abbiamo supposti gli assi rettangolari; se essi sono obbliqui non si ha alcun cangiamento sia nella ricerca dell'equazione della tangente che nel risultato. Ma l'equazione della normale è

$$y'-y=-\frac{1+\cos\omega\,\frac{dy}{dx}}{\cos\omega+\frac{dy}{dx}}(x'-x),$$

in cui ω è l'angolo d'inclinazione degli assi.

264. **Es.** (1). L'equazione generale di una curva di secondo ordine è

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0.$$

Quindi, per l' Art. 262, l'equazione della tangente nel punto (x, y) è

$$(y'-y)(Ay+Bx+D)+(x'-x)(Cx+By+E)=0,$$

la quale si riduce per mezzo della data equazione ad

$$y'(Ay+Bx+D)+x'(Cx+By+E)+Dy+Ex+F=0.$$

Es. (2). Supponiamo che l'equazione della curva sia

$$y=ae^{\frac{x}{c}},$$

onde
$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{c}e^{\frac{x}{c}}=\frac{y}{c};$$

e l'equazione della tangente diventa

$$y'-y=\frac{y}{c}(x'-x).$$

La sottangente $MT=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=c$, ed è per conseguenza costante in questa curva che è chiamata la *curva logaritmica*.

Es. (3). L'equazione della spirale logaritmica è

$$\tan^{-1}\frac{y}{x}=k\log\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Onde
$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2+y^2}=\frac{k\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)}{x^2+y^2},$$

quindi
$$\frac{dy}{dx}=\frac{kx+y}{x-ky};$$

e l'equazione della tangente è

$$y'-y=\frac{kx+y}{x-ky}(x'-x).$$

Es. (4). Supponiamo che l'equazione $\varphi(x, y) = 0$, o $u = 0$, possa essere messa sotto la forma

$$v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots\ldots + v_1 + v_0 = 0,$$

in cui v_n, v_{n-1}, ... sono funzioni *omogenee* del grado $n, n-1, \ldots\ldots$ rispettivamente; da ciò

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\ldots\ldots,$$

e l'equazione della tangente è

$$(y'-y)\left(\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\right) + (x'-x)\left(\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\right) = 0.$$

Ma per la proprietà delle funzioni omogenee (si vegga Es. 3 alla fine del Capitolo VIII.)

$$y\frac{dv_n}{dy} + x\frac{dv_n}{dx} = nv_n,$$

$$y\frac{dv_{n-1}}{dy} + x\frac{dv_{n-1}}{dx} = (n-1)\,v_{n-1}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quindi l'equazione della tangente diviene

$$y'\left(\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\ldots\right) + x'\left(\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\ldots\right)$$

$$= nv_n + (n-1)\,v_{n-1} + (n-2)\,v_{n-2} + \ldots\ldots,$$

o, poichè $\quad v_n + v_{n-1} + v_{n-2} \ldots + v_1 + v_0 = 0,$

$$y'\left(\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_{n-1}}{dy} + \ldots\ldots\right) + x'\left(\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} + \ldots\ldots\right)$$

$$+ v_{n-1} + 2v_{n-2} + \ldots + (n-1)\,v_1 + nv_0 = 0.$$

Es. (5). Determinare un punto in una curva data in modo che l'area del triangolo formato dalla tangente in questo punto e dagli assi delle coordinate sia un massimo o un minimo.

Per l'Art. 260, l'area varia come il prodotto di

$$x - y\frac{dx}{dy}, \text{ ed } y - x\frac{dy}{dx};$$

si ponga
$$u = \frac{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dy}{dx}};$$

allora si cerca il massimo o il minimo valore di u.

Si troverà che

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ora, come vedremo nel Capitolo XXI, dove $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, la curva ha in generale un punto singolare chiamato un *punto d'inflessione*. Dove $y - x\frac{dy}{dx} = 0$, la tangente passa per l'origine e *l'area in quistione svanisce*. Sarà spesso evidente quando si considera una curva particolare, che nessuno di questi casi eccezionali può aver luogo. Abbiamo dunque $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ come la condizione che determina il punto cercato.

Quando $x\frac{dy}{dx} + y = 0$, abbiamo, per l'Art. 260,

$$x' = 2x, \text{ ed } y' = 2y.$$

Quindi in generale quando l'area è un massimo o un minimo la porzione della tangente tra gli assi è *bisegata nel punto di contatto*. In generale sarà chiaro dalla figura nel caso di una curva particolare se l'area è un massimo o un minimo.

265. Se l'equazione della curva è data nella forma

$$F(x, y) - c = 0,$$

l'equazione della tangente nel punto (x, y), sarà

$$(y' - y)\frac{dF}{dy} + (x' - x)\frac{dF}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

e l'equazione della normale

$$(y' - y)\frac{dF}{dx} - (x' - x)\frac{dF}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se consideriamo x', y', come costanti, l'equazione (1) combinata con $F(x, y) = c$, darà le coordinate dei punti in cui le tangenti condotte dal punto (x', y') incontrano le diverse curve rappresentate da $F(x, y) = c$; e l'equazione (2) combinata con $F(x, y) = c$, darà le coordinate dei punti in cui le normali condotte dal punto (x', y') incontrano le diverse curve rappresentate da $F(x, y) = c$.

Poichè le equazioni (1) e (2) sono indipendenti da c, esse rappresenteranno i luoghi geometrici dei punti in cui le curve che si ottengono attribuendo diversi valori a c nella equazione $F(x, y) = c$, sono incontrate dalle loro tangenti o dalle loro normali rispettivamente, che passano pel punto (x', y'). Così, se vogliamo tirare le *tangenti* dal punto (x', y') ad una qualunque delle curve $F(x, y) = c$, dovremo costruire la curva

$$(x' - x)\left(\frac{dF}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

e determinare dove essa intersega la curva particolare $F(x, y) = c$ che si considera; congiungendo il punto o i punti d'intersezione col punto (x', y') avremo la richiesta tangente o le tangenti. Similmente, possiamo tirare le *normali* da (x', y') ad una qualunque delle curve $F(x, y) = c$.

ESEMPII.

1. Nella curva $y(x-1)(x-2) = x - 3$, mostrare che la tangente è parallela all'asse delle x nel punto pel quale $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

2. Nella curva $y^3 = (x-a)^2 (x-c)$, mostrare che la tangente è parallela all'asse delle x nel punto pel quale $x = \frac{2c+a}{3}$.

3. Nella curva $x^2y^2 = a^3(x+y)$, la tangente all'origine è inclinata sotto un angolo di 135^0 all'asse delle x.

4. Nella curva $x^2(x+y) = a^2(x-y)$, l'equazione della tangente all'origine è $y = x$.

5. Nella curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ trovare la lunghezza della perpendicolare dall'origine sulla tangente nel punto (x, y); inoltre trovare la lunghezza della parte della tangente compresa tra i due assi.

Risultati. (1) $\sqrt[3]{(axy)}$; (2) a.

6. Se x_1, y_1 sono le parti degli assi delle x e delle y tagliate dalla tangente nel punto (x, y) alla curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \text{ allora } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

7. Mostrare che tutte le curve rappresentate dall'equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2,$$

attribuendo diversi valori ad n, si toccano scambievolmente nel punto (a, b).

8. Nella curva $y^n = a^{n-1}x$, esprimere l'equazione della tangente nella sua forma più semplice; e determinare il valore di n quando l'area racchiusa tra la tangente e gli assi delle coordinate è costante.

9. Se la normale alla curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, fa un angolo φ con l'asse delle x, mostrare che la sua equazione è

$$y \cos\varphi - x \operatorname{sen}\varphi = a \cos 2\varphi.$$

10. Sotto quale angolo la curva $y^2 = 2ax$ taglia la curva $x^3 - 3axy + y^3 = 0$?

Risultato. Le curve s'intersegano all'origine; ivi la prima curva ha per tangente l'asse delle y, e la seconda curva ha tutte e due gli assi per tangenti. Le curve inoltre s'intersegano nel punto $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$; ed ivi esse s'intersegano sotto un angolo che ha per cotangente $\sqrt[3]{4}$.

11. Siano tirate le tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ed al circolo $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, nei punti in cui un'ordinata comune l'incontra; mostrare che se φ è la più grande inclinazione di queste tangenti

$$\tan\varphi = \frac{a-b}{2\sqrt{(ab)}}.$$

12. Se si conducono le tangenti da un punto (h, k) alla curva che ha per equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 = 1$, un'ellisse di cui i semiassi sono $a\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$, e $b\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$ passerà per i punti di contatto.

13. Mostrare che tutti i punti della curva $y^2 = 4a\left(x + a \operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)$ nei quali la tangente è parallela all'asse delle x appartengono ad una certa parabola.

14. La normale ad una parabola in un punto P è prolungata sino ad incontrare la direttrice in Q, e la tangente in P incontra la direttrice in R; trovare (1) quando QR è un minimo, (2) quando il triangolo PQR è un minimo.

Risultati. (1) $x = \frac{a}{3}$, (2) $x = \frac{a}{5}$; in cui $y^2 = 4ax$ è l'equazione della parabola.

CAPITOLO XIX.

ASINTOTI.

266. Supponiamo uno o più rami di una curva estendersi ad una distanza infinita dall'origine, e che ai punti successivi di un tal ramo si tirino le tangenti. Allora due casi diversi possono darsi rispetto alle direzioni di queste tangenti; esse, nel passare da un punto ad un altro lungo la curva, o si avvicinano ad un limite definito o no. E rispetto alla *posizione* di queste tangenti, due casi sono possibili; le parti intercette dagli assi o tendono ad un limite finito o no. Se la direzione ha un limite, come anche una o tutte e due le intercette un limite, vi esiste una linea retta verso la quale si avvicinano continuamente le successive tangenti. Una tale retta si chiama un asintoto della curva; quindi abbiamo la definizione seguente.

267. Def. Un asintoto di una curva è la posizione limite della tangente quando il punto di contatto si allontana ad una distanza infinita dall'origine.

Per trovare se una curva proposta ha un asintoto, dobbiamo prima stabilire se $\frac{dy}{dx}$ ha un valore limite quando procediamo ad una distanza infinita dall'origine. Se esso *non lo ha* generalmente non vi è asintoto. Se $\frac{dy}{dx}$ *ha* un valore limite, dobbiamo allora stabilire se l'intercetta sull'asse delle x, che per l'Art. 260 è $x - y\frac{dx}{dy}$, ha un valore limite. Supponiamo che lo abbia, e sia dinotato da c mentre μ dinoti il limite di $\frac{dy}{dx}$, allora $y = \mu(x - c)$ è l'equazione di un asintoto.

268. Se $\frac{dy}{dx}$ cresce senza limite, *e nello stesso tempo* $x - y\frac{dx}{dy}$ *ha un limite finito*, abbiamo un asintoto parallelo all'asse delle y.

Inoltre *possiamo* avere un asintoto quando il limite di $x - y\frac{dx}{dy}$ è infinito, cioè nel caso in cui il limite di $\frac{dy}{dx}$ è zero, ed il limite di $y - x\frac{dy}{dx}$, che è l'intercetta sull'asse delle y, è infinito. L'asintoto è allora parallelo all'asse delle x.

269. Es. L'equazione della parabola è $y = 2\sqrt{ax}$; onde $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}$; quindi, quando x cresce indefinitamente il limite di $\frac{dy}{dx}$ è zero; ma $y - x\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{ax} - \sqrt{ax} = \sqrt{ax}$, che non ha limite finito. Quindi non vi è asintoto.

L'equazione dell'iperbole è

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)};$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}},$$

ed

$$x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}.$$

Quindi il limite di $\frac{dy}{dx}$ quando x è infinito è $\frac{b}{a}$, ed il limite di $x - y\frac{dx}{dy}$ è 0. Onde $y = \frac{b}{a}x$ è l'equazione di un asintoto.

Si supponga $y = \frac{a^3}{(x-b)^2} + c$ essere l'equazione di una curva, allora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3}{(x-b)^3},$$

$$x - y\frac{dx}{dy} = x + \frac{x-b}{2} + \frac{c(x-b)^3}{2a^3}.$$

A misura che x si avvicina a b, y e $\frac{dy}{dx}$ crescono senza limite. Il limite di $x - y\frac{dx}{dy}$ è b, e, per l'Art. 268, vi è un asintoto parallelo all'asse delle y, avente per equazione $x = b$.

270. Un asintoto si può anche definire come *una linea retta, la distanza della quale da un punto di una curva diminuisce senza limite quando il punto sulla curva si allontana ad una distanza infinita dall'origine.*

Si supponga $$y = \mu x + \beta$$

l'equazione di una linea retta, ed

$$y = \mu x + \beta + v$$

l'equazione di una curva, allora se v diminuisce senza limite quando x ed y crescono senza limite, la linea retta sarà un asintoto della curva. Poichè se x, y, sono le coordinate di un punto della curva, la distanza perpendicolare di tal punto dalla linea retta è

$$\frac{y - \mu x - \beta}{\sqrt{(1 + \mu^2)}} \text{ o } \frac{v}{\sqrt{(1 + \mu^2)}},$$

e questa diminuisce senza limite quando x ed y crescono senza limite.

271. Che queste due definizioni di un asintoto conducano in generale agli stessi risultati può vedersi considerando diversi esempii, o con la seguente dimostrazione. Sia $y = \mu x + \beta + v$ l'equazione di una curva, in cui μ e β sono costanti, e v diminuisce senza limite quando x ed y crescono senza limite. Dall'equazione data

$$\frac{y}{x} = \mu + \frac{\beta + v}{x}.$$

Quindi μ è il limite di $\frac{y}{x}$ quando x ed y crescono senza limite. Ma, per l'Art. 148,

$$\text{il limite di } \frac{y}{x} = \text{al limite di } \frac{\frac{dy}{dx}}{1} \text{ o } \frac{dy}{dx}.$$

Inoltre β è il limite di $y-\mu x$; ma $\mu=$ al limite di $\frac{dy}{dx}$; onde *in generale* $\beta=$ al limite di $y-\frac{dy}{dx}x$. Quindi l'equazione della tangente alla curva nel punto (x, y), che è

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

diviene, quando x ed y crescono indefinitamente,

$$y'=\mu x'+\beta;$$

cioè, l'equazione dell'asintoto trovata secondo la prima definizione è la stessa che l'equazione trovata secondo la seconda definizione.

272. Abbiamo detto nell'ultimo articolo che *in generale* il limite di $y-\mu x=$ al limite di $y-\frac{dy}{dx}x$. Supponiamo, per esempio, che l'equazione della curva sia

$$y=Ax+B+\frac{a}{x};$$

onde $$\frac{y}{x}=A+\frac{B}{x}+\frac{a}{x^2}.$$

Quindi $\mu=$ al limite di $\frac{y}{x}=A$, ed

$$y-\mu x=B+\frac{a}{x}.$$

Inoltre $$\frac{dy}{dx}=A-\frac{a}{x^2},$$

onde $$y-\frac{dy}{dx}x=B+\frac{2a}{x}.$$

Quì $y-\frac{dy}{dx}x$ ed $y-\mu x$ hanno lo stesso limite, cioè B.

Ma si supponga $y=Ax+B+\frac{a+\operatorname{sen} x}{x}$.

Quì, come sopra, $\mu=A$.

Inoltre $$y - \mu x = B + \frac{a + \operatorname{sen} x}{x}.$$

E $$\frac{dy}{dx} = A + \frac{\cos x}{x} - \frac{a + \operatorname{sen} x}{x^2},$$

onde $$y - \frac{dy}{dx} x = B - \cos x + \frac{2(a + \operatorname{sen} x)}{x}.$$

Quì non possiamo asserire che $y - \mu x$ ed $y - \frac{dy}{dx} x$ hanno lo stesso limite: il limite del primo è B, ma l'altro non si può dire che abbia un limite, a motivo del termine $\cos x$, che non tende ad un limite quando x cresce indefinitamente. In questo caso la curva

$$y = Ax + B + \frac{a + \operatorname{sen} x}{x}$$

ha un asintoto secondo la definizione dell'Art. 270, cioè, $y = Ax + B$, ma non secondo la definizione dell'Art. 267.

La dimostrazione nell'Art. 270 potrebbe, naturalmente, partire dall'equazione $x = \mu y + \beta + v$; sicchè, dovendo l'asintoto essere parallelo all'asse delle y, col prendere la seconda forma evitiamo di avere μ infinito.

273. Finora ci siamo limitati agli asintoti *rettilinei*; ora estendiamo la definizione agli asintoti curvilinei.

Def. Quando la differenza delle ordinate di due curve corrispondenti ad un' ascissa comune diminuisce senza limite, o la differenza delle ascisse corrispondenti ad un' ordinata comune diminuisce senza limite, nel passare da punto a punto lungo l'una e l'altra curva, ciascuna curva si dice essere un asintoto dell'altra.

Quindi, se l'equazione di una curva può essere messa sotto la forma

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \dots,$$

allora $y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$

è l'equazione di una curva che è un asintoto della prima. Similmente per

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n + \frac{B_1}{x},$$

ed $$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2},$$

e così di seguito.

Es. Trovare gli asintoti della curva

$$x^3 - xy^2 + ay^2 = 0.$$

Quì $$y^2 = \frac{x^3}{x-a}; \text{ onde } y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^3}{x-a}\right)}.$$

Quando x si avvicina al valore a, sì y che $\frac{dy}{dx}$ crescono senza limite, ed $x = a$ è l'equazione di un asintoto rettilineo.

Ponendo y nella forma $\pm x\left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$, e sviluppando col Teorema del Binomio, abbiamo

$$y = \pm x\left\{1 + \frac{a}{2x} + \frac{3a^2}{8x^2} + \frac{5a^3}{16x^3} + \ldots\right\} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Quindi $y = \pm\left(x + \frac{a}{2}\right)$ sono le equazioni di due asintoti rettilinei. Possiamo ottenere quanti asintoti curvilinei vogliamo facendo uso della serie in (1). Per esempio,

$$y = \pm\left(x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{8x}\right)$$

sono le equazioni di due curve asintotiche di secondo ordine. Lo studente si rammenterà che per l'Art. 114 possiamo usare il teorema del binomio nell'esempio precedente come *un vero sviluppo aritmetico* quando $\frac{a}{x}$ è *minore* dell'unità, il che sarà certamente il caso quando x cresce indefinitamente.

274. Il metodo seguente fornirà gli asintoti rettilinei con grande speditezza in molti esempii. Supponiamo l'equazione di una curva, $F(x, y) = 0$, tale che $F(x, y)$ sia la somma di differenti funzioni *omogenee* di x ed y, sicchè l'equazione possa mettersi sotto la forma

$$x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^p \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^q \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots . (1),$$

in cui n, p, q, sono disposti in ordine decrescente di grandezza. Ogni equazione algebrica razionale intera tra x ed y può essere messa in questa forma. Da (1) abbiamo

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-p}} \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-q}} \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots . (2).$$

Ora nel trovare un asintoto dobbiamo prima per l'Art. 271 stabilire il limite di $\frac{y}{x}$ quando x ed y sono infiniti. Se chiamiamo questo limite μ, e lo supponiamo finito, abbiamo da (2)

$$\varphi(\mu) = 0.$$

Sia μ_1 un valore di μ ottenuto da questa equazione; dobbiamo in seguito trovare il limite di $y - \mu_1 x$. Si ponga $y - \mu_1 x = \beta$, allora da (2)

$$\varphi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-p}} \psi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots\ldots (3).$$

Ma, per l'Art. 92,

$$\varphi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) = \varphi(\mu_1) + \frac{\beta}{x} \varphi'\left(\mu_1 + \frac{\theta\beta}{x}\right)$$

$$= \frac{\beta}{x} \varphi'\left(\mu_1 + \frac{\theta\beta}{x}\right),$$

poichè $\varphi(\mu_1) = 0.$

Così (3) diviene

$$\beta\varphi'\left(\mu_1 + \frac{\theta\beta}{x}\right) + \frac{1}{x^{n-p-1}} \psi\left(\mu_1 + \frac{\beta}{x}\right) + \ldots = 0 \ldots . (4).$$

Nell'equazione (4) si supponga x crescere indefinitamente, allora avremo differenti risultati secondo il valore di p.

Se p è *maggiore* di $n-1$ il valore di β è infinito, e non vi è asintoto per la radice μ_1 dell'equazione

$$\varphi(\mu)=0.$$

Se p è *eguale* ad $n-1$ e $\varphi'(\mu_1)$ non è zero, il limite di β è $-\frac{\psi(\mu_1)}{\varphi'(\mu_1)}$; e l'equazione di un asintoto è

$$y=\mu_1 x-\frac{\psi(\mu_1)}{\varphi'(\mu_1)}.$$

Se p è *minore* di $n-1$ e $\varphi'(\mu_1)$ non è zero, il limite di β è 0 e l'equazione di un asintoto è

$$y=\mu_1 x.$$

In quest'ultimo caso le equazioni

$$y=\mu x, \qquad \varphi(\mu)=0,$$

danno per determinare gli asintoti

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0, \quad \text{o} \quad x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0;$$

quindi quando l'equazione di una curva può esibirsi sotto la forma della somma di più funzioni omogenee eguale a zero, ed il grado n della più alta di queste funzioni eccede di più di un'unità il grado di ognuna delle altre, tutti gli asintoti *in generale* passano per l'origine e possono trovarsi eguagliando a zero la funzione omogenea dell'n^{mo} grado. Diciamo *in generale* poichè vi è la limitazione che $\varphi'(\mu_1)$ non deve essere zero; cioè, per la teoria delle equazioni $\varphi(\mu)=0$ non deve avere *radici eguali.*

275. Consideriamo ora il caso in cui $\varphi'(\mu_1)$ è zero. Prima supponiamo p *eguale* ad $n-1$.

Se $\psi(\mu_1)$ non è zero β diviene infinito, e non vi è asintoto per la radice μ_1 dell'equazione $\varphi(\mu)=0$. Ma se $\psi(\mu_1)=0$ il valore di β diviene indeterminato.

Si supponga in questo caso $q=n-2$, sicchè l'equazione (2) dell'Art. 274 dà

$$\varphi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}\psi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\chi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots=0.$$

Poichè $\varphi(\mu_1)=0$ e $\varphi'(\mu_1)=0$, abbiamo, per l'Art. 92,

$$\varphi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=\frac{\beta^2}{2x^2}\varphi''\left(\mu_1+\frac{\theta\beta}{x}\right);$$

inoltre $$\psi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=\frac{\beta}{x}\psi'\left(\mu_1+\frac{\theta_1\beta}{x}\right).$$

Si sostituiscano questi valori nell'equazione precedente, si moltiplichi per x^2, e poi si proceda al limite, ed abbiamo per determinare i valori limiti di β, l'equazione quadratica

$$\frac{\beta^2}{2}\varphi''(\mu_1)+\beta\psi'(\mu_1)+\chi(\mu_1)=0.$$

Se i valori di β sono possibili, otteniamo così due asintoti paralleli.

Se questa equazione quadratica prende una forma indeterminata, possiamo procedere nello stesso modo a formare un'equazione cubica in β.

Nel caso in cui $\varphi'(\mu_1)$ è zero e $\psi(\mu_1)$ non è zero, non vi è asintoto rettilineo per la radice μ_1 dell'equazione $\varphi(\mu)=0$, come abbiamo già stabilito nel principio di questo articolo. In questo caso possiamo in generale ottenere un asintoto *parabolico*, come ora mostreremo.

Per l'Art. 92 $$\varphi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2}\varphi''\left(\mu_1+\frac{\theta\beta}{x}\right).$$

Quindi l'equazione (3) dell'Art. 274 diviene

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2}\varphi''\left(\mu_1+\frac{\theta\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}\psi\left(\mu_1+\frac{\beta}{x}\right)=0;$$

quando x cresce indefinitamente quest'equazione si avvicina alla forma

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2}=-\frac{\psi(\mu_1)}{x\varphi''(\mu_1)},$$

sicchè $$\frac{\beta}{x}=\left\{-\frac{2\psi(\mu_1)}{x\varphi''(\mu_1)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi abbiamo un *asintoto parabolico* determinato dall'equazione

$$y - \mu_1 x = x \left\{ \frac{-2\psi(\mu_1)}{x\varphi''(\mu_1)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

cioè,
$$(y - \mu_1 x)^2 = \frac{-2x\psi(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)}.$$

In secondo luogo supponiamo *p minore* di $n-1$. Allora poichè $\varphi'(\mu_1)=0$ l'equazione (4) dell'Art. 274 non determinerà β; ed invece di questa equazione avremo ultimamente nel modo ora mostrato

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{x^2} = -\frac{\psi(\mu_1)}{x^{n-p}\varphi''(\mu_1)}.$$

Se $n-p=2$, otteniamo

$$\beta^2 = -\frac{2\psi(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)},$$

sicchè se $\psi(\mu_1)$ e $\varphi''(\mu_1)$ sono di segni diversi abbiamo due valori possibili di β, e quindi due asintoti paralleli i quali sono equidistanti dall'origine.

Se $n-p$ non è eguale a 2, abbiamo un asintoto curvilineo determinato dall'equazione

$$(y - \mu_1 x)^2 = -\frac{2\psi(\mu_1)}{x^{n-p-2}\varphi''(\mu_1)}.$$

276. Abbiamo supposto nell'Art. 274, che il limite di $\frac{y}{x}$ sia *finito;* se non è tale, il limite di $\frac{x}{y}$ sarà zero, e dobbiamo esaminare se vi è un asintoto parallelo all'asse delle y. Questo si può generalmente stabilire con facilità in ogni esempio particolare. O pure possiamo porre l'equazione data nella forma

$$y^n\varphi_1\left(\frac{x}{y}\right) + y^p\psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots = 0,$$

e procedere come sopra.

277. Se una curva è data da un'equazione algebrica razionale intera, possiamo determinare gli asintoti che sono

paralleli all'asse delle y nel seguente modo. Si ordini l'equazione secondo le potenze di y; supposto che essa sia

$$y^n f(x) + y^{n-1} f_1(x) + y^{n-2} f_2(x) + \ldots = 0,$$

allora gli asintoti paralleli all'asse delle y saranno dati dalle radici reali dell'equazione

$$f(x) = 0.$$

Infatti l'equazione della curva può essere scritta

$$f(x) + \frac{f_1(x)}{y} + \frac{f_2(x)}{y^2} + \ldots = 0,$$

ed è chiaro che questa è soddisfatta supponendo $y = \infty$ ed $f(x) = 0$; e che quando y è infinito nessun'altro valore di x eccetto quelli dedotti da $f(x) = 0$ la verificherà. Quindi gli asintoti paralleli all'asse delle y si trovano *eguagliando a zero il coefficiente della più alta potenza di* y nell'equazione della curva.

Similmente gli asintoti paralleli all'asse delle x possono trovarsi eguagliando a zero il coefficiente della più alta potenza di x nell'equazione della curva.

Quando una curva è data da un'equazione algebrica razionale intera, converrà determinare col metodo precedente gli asintoti paralleli agli assi, e quindi procedere per gli altri asintoti secondo la regola seguente; supponiamo l'equazione dell'n^{mo} grado. Si sostituisca per y nell'equazione data $\mu x + \beta$ e si ordinino i termini dell'equazione secondo le potenze di x. Si eguagli a zero il coefficiente di x^n; ciò darà un'equazione per determinare μ; sia μ_1 uno dei valori reali di μ. Indi si esamini il coefficiente di x^{n-1}, e si dia il valore μ_1 a μ se esso si trova in questo coefficiente. Se possiamo determinare β in modo da far svanire questo coefficiente, allora $y = \mu_1 x + \beta$ sarà l'equazione di un asintoto; se il coefficiente non si può far sparire non vi è asintoto corrispondente. Se il coefficiente svanisce qualunque sia il valore di β, allora si ponga il coefficiente di x^{n-2} eguale a zero, sostituendo in esso μ_1 per μ; avremo così generalmente un'equazione quadratica per determinare i valori di β, e se questi valori sono reali, otteniamo due asintoti paralleli. Se il coefficiente di x^{n-2} svanisce, qualunque sia il valore di β, dobbiamo eguagliare a zero il coefficiente di x^{n-3} e così di seguito.

Si può dimostrare facilmente che questa regola è d'accordo con gli Art. 274 e 275. L'equazione (1) dell'Art. 274, si può supporre l'equazione della curva nella quale n è un intero, $p=n-1$, $q=n-2, \ldots\ldots$ Allora se poniamo $\mu x+\beta$ per y, e si ordinano i termini secondo le potenze di x, otterremo l'espressione

$$x^n\varphi(\mu)+x^{n-1}\{\psi(\mu)+\beta\varphi'(\mu)\}+x^{n-2}\{\chi(\mu)+\beta\psi'(\mu)+\frac{\beta^2}{2}\varphi''(\mu)\}+\ldots$$

Così eguagliando a zero il coefficiente di x^n arriviamo all'equazione per determinare μ data nell'Art. 274. Quindi eguagliando a zero il coefficiente di x^{n-1} otterremo lo stesso valore di β trovato nell'Art. 274; o se il coefficiente di x^{n-1} svanisce, qualunque sia β, allora eguagliando a zero il coefficiente di x^{n-2} arriviamo all'equazione quadratica data nell'Art. 275.

Es. (1) $$y^3+x^3-3axy=0.$$

Si ponga $\mu x+\beta$ per y, allora

$$(\mu x+\beta)^3+x^3-3ax(\mu x+\beta)=0;$$

onde $$(\mu^3+1)x^3+3x^2(\mu^2\beta-a\mu)+Mx+N=0.$$

Quindi, $$\mu^3+1=0,$$

$$\mu^2\beta-a\mu=0,$$

sono le equazioni da cui debbono trovarsi μ e β; esse danno $\mu=-1$, $\beta=-a$; quindi,

$$y=-x-a,$$

è l'equazione di un asintoto.

Es. (2). $$x^2(x+y)=a^2(x-y).$$

Si ponga $\mu x+\beta$ per y, allora

$$x^2(x+\mu x+\beta)=a^2(x-\mu x-\beta);$$

onde $$x^3(1+\mu)+\beta x^2-xa^2(1-\mu)+a^2\beta=0.$$

Quindi, $$1+\mu=0 \text{ e } \beta=0;$$

onde $y=-x$ è l'equazione di un asintoto.

Es. (3). $xy(y-x)(y-x+3a)+4a^3x-a^4=0.$

Quì il termine che contiene la più alta potenza di y è xy^3; così $x=0$ dà un asintoto, cioè l'asse delle y. Similmente, il termine che contiene la più alta potenza di x è yx^3; onde $y=0$ dà un asintoto, cioè l'asse delle x. Allora si ponga $\mu x+\beta$ per y, ed otteniamo l'espressione

$$x(\mu x+\beta)\{(\mu-1)x+\beta\}\{(\mu-1)x+3a+\beta\}+4a^3x-a^4.$$

Ordinandola secondo le potenze di x, abbiamo

$$x^4\mu(\mu-1)^2+x^3(\mu-1)\{3\mu a+(3\mu-1)\beta\}$$
$$+x^2\{\beta^2(3\mu-2)+3a\beta(2\mu-1)\}+\ldots$$

Si ponga $\mu(\mu-1)^2=0$; abbiamo quindi $\mu=0$, o $\mu=1$; il primo valore di μ condurrà all'asintoto che coincide con l'asse delle x il quale abbiamo già trovato. Il valore $\mu=1$ fa svanire il coefficiente di x^3 nella precedente espressione; onde eguagliamo a zero il coefficiente di x^2, ponendo in esso $\mu=1$. Otteniamo così $\beta^2+3a\beta=0$; così, $\beta=0$, o $\beta=-3a$. Quindi abbiamo per le equazioni degli asintoti $y=x$, ed $y=x-3a$.

Si osserverà che tutte le conclusioni di questo capitolo reggono siano gli assi rettangolari o pure obbliqui.

ESEMPII.

Trovare gli asintoti delle seguenti curve.

1. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$. *Ris.* $x=2a$; $y=\pm(x+a)$.

2. $y^3=x^2(2a-x)$. *Ris.* $y=-x+\dfrac{2a}{3}$.

3. $y(a^2+x^2)=a^2(a-x)$. *Ris.* $y=0$.

4. $y^2(ay+bx)=a^2y^2+b^2x^2$. *Ris.* $y=-\dfrac{b}{a}x+2a$.

5. $y^3=(x-a)^2(x-c)$. *Ris.* $y=x-\dfrac{1}{3}(2a+c)$.

6. $xy^2+yx^2=a^3$. *Ris.* $x=0$; $y=0$; $y=-x$.

7. $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$. *Ris.* $y=\pm a$.

8. $4x^3 = (a + 3x)(x^2 + y^2)$

$$\textit{Ris.}\quad y = \pm\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) \text{ ed } x = -\frac{a}{3}.$$

9. $(x + a)y^2 = (y + b)x^2$.

$$\textit{Ris.}\quad x + a = 0,\ y + b = 0,\ y = x + b - a.$$

10. $(y - 2x)(y^2 - x^2) - a(y - x)^2 + 4a^2(x + y) = a^3$.

$$\textit{Ris.}\quad y = x,\ y + x = \frac{2a}{3},\ y - 2x = \frac{a}{3}.$$

11. $y^2(x - y)^2 + ax^2(x - y) - 3a^2y^2 - a^4 = 0$.

$$\textit{Ris.}\quad y = x + \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{13}).$$

12. $x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) = 3xy^2 + a^3$.

$$\textit{Ris.}\quad 2y = x,\ y + x - a = 0,\ y + x + a = 0.$$

13. $x^2(x - y)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$.

$$\textit{Ris.}\quad x = \pm a,\ y = x \pm a\sqrt{2}.$$

14. $(y - x)^2(x^2 - a^2) = a^4$.

15. $y^3 - 3y^2x + 4x^3 + ay^2 + axy - 6ax^2 + 2b^2x - b^2y + c^3 = 0$.

16. Se una curva di terzo grado è riferita a due asintoti come assi, mostrare che la sua equazione sarà della forma

$$xy(ax + by + c) + a'x + b'y + c' = 0,$$

e che l'equazione del terzo asintoto sarà

$$ax + by + c = 0.$$

CAPITOLO XX.

TANGENTI ED ASINTOTI DELLE CURVE RIFERITE A COORDINATE POLARI.

278. Se abbiamo l'equazione di una curva espressa in x ed y, possiamo trasformarla in una tra le coordinate polari ponendo $x = r\cos\theta$ ed $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Così r diviene una funzione di θ, e l'equazione di una curva in coordinate polari prende la forma $r = f(\theta)$, o $F(r, \theta) = 0$. In questo caso la curva si chiama una *curva polare* o *spirale*; r si dice il *raggio vettore* e θ l'*angolo vettoriale*.

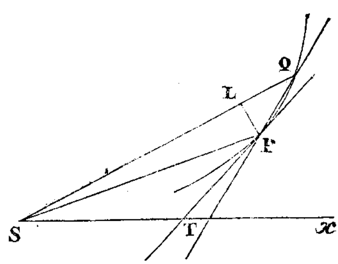
L'angolo (ψ) che la tangente alla curva fa con l'asse delle x è dato dall'equazione

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}, \text{ (Art. 257)}.$$

Quindi, per l'Art. 201,

$$\tan\psi = \frac{\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

279. ***Espressione per l'angolo compreso tra il raggio vettore in un punto di una curva, e la tangente della curva in quel punto.***



Sia P un punto di una curva, le coordinate polari del quale sono r e θ, S essendo il polo.

Sia Q un altro punto, le coordinate del quale sono

$$r + \Delta r, \text{ e } \theta + \Delta\theta.$$

Si tiri PL perpendicolare ad SQ, allora

$$PL = r \operatorname{sen} \Delta\theta,$$
$$LQ = r + \Delta r - r \cos \Delta\theta;$$

onde
$$\tan LQP = \frac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{r + \Delta r - r \cos \Delta\theta}.$$

Si avvicini Q lungo la curva a P; la posizione limite di QP è per definizione la tangente della curva in P; sia questa PT. Il limite dell'angolo LQP sarà l'angolo SPT; si chiami questo φ, allora

$$\tan \varphi = \text{limite di } \frac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{r + \Delta r - r \cos \Delta\theta}$$

quando $\Delta\theta$ e Δr diminuiscono indefinitamente.

Ora
$$\frac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{r + \Delta r - r \cos \Delta\theta} = \frac{\dfrac{r \operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{2r \operatorname{sen}^2 \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} + \dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}}.$$

Il limite di $\dfrac{\operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta}$ è 1.

Il limite di $\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}$ è dinotato da $\dfrac{dr}{d\theta}$.

Il limite di $\dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}$, cioè di $\dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} \operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}$, è zero.

Quindi
$$\tan \varphi = r \frac{d\theta}{dr}.$$

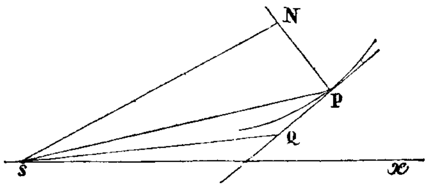
280. Il risultato dell'ultimo articolo si può anche ottenere così,

$$\tan PTx = \frac{\operatorname{sen} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \cos \theta}{\cos \theta \dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta}, \text{ (Art. 278).}$$

$$PSx = \theta; \text{ onde}$$

$$\tan SPT = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta} - \tan\theta}{1 + \dfrac{\tan\theta\left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta\right)}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta}} = r\frac{d\theta}{dr} \text{ per la riduzione.}$$

281. *Trovare l'equazione polare della tangente ad una curva.*



Siano $SP = r$, $PSx = \theta$, le coordinate polari del punto di contatto.

Siano $SQ = r'$, $QSx = \theta'$, le coordinate polari di un punto Q della tangente. Dal triangolo SPQ, abbiamo, ponendo $SPQ = \varphi$,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{sen} SQP}{\operatorname{sen} SPQ} = \frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta' + \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$= \operatorname{sen}(\theta - \theta')\cot\varphi + \cos(\theta - \theta').$$

Ma $$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr};$$

onde $$\frac{r}{r'} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta - \theta') + \cos(\theta - \theta') \ldots\ldots\ (1).$$

Questo risultato si può scrivere,

$$r'\frac{d}{d\theta} r\operatorname{sen}(\theta - \theta') = r^2 \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Se poniamo $\frac{1}{r} = u$, ed $\frac{1}{r'} = u'$, allora

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}.$$

Quindi, dividendo ambo i lati di (1) per r, otteniamo

$$u' = u\cos(\theta - \theta') - \frac{du}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta - \theta'),$$

o
$$u' = u\cos(\theta' - \theta) + \frac{du}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta' - \theta).$$

282. *Trovare l'equazione polare della normale in un punto di una curva.*

Siano
$$SP = r, \quad PSx = \theta,$$
$$SN = r', \quad NSx = \theta',$$

N essendo un punto della normale; allora

$$\frac{SP}{SN} = \frac{\operatorname{sen} SNP}{\operatorname{sen} SPN} = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta' - \theta + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)};$$

onde
$$\frac{r}{r'} = \operatorname{sen}(\theta' - \theta)\tan\varphi + \cos(\theta' - \theta)$$
$$= \operatorname{sen}(\theta' - \theta)\frac{r\,d\theta}{dr} + \cos(\theta' - \theta).$$

Ciò si può scrivere

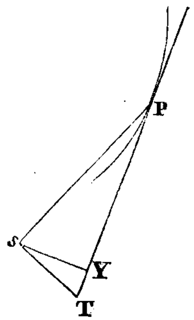
$$r'\frac{d}{d\theta}r\cos(\theta - \theta') = r\frac{dr}{d\theta},$$

e può essere trasformato in

$$u' = u\cos(\theta' - \theta) - u^2\frac{d\theta}{du}\operatorname{sen}(\theta' - \theta).$$

283. Le equazioni polari negli *Art.* 281 e 282, possono anche dedursi dalle equazioni rettangolari della tangente e della normale degli Art. 257 e 258, trasformando queste in coordinate polari, usando il valore di $\frac{dy}{dx}$ dato nell'Art. 278.

284. Da S si tiri SY perpendicolare alla tangente PT; allora



$$SY = r \operatorname{sen} SPT = \frac{r \tan SPT}{\sqrt{(1 + \tan^2 SPT)}}.$$

Quindi, se $SY = p$, abbiamo

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cot^2 SPT = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \text{ se } u = \frac{1}{r}.$$

285. Da S si tiri ST perpendicolare al raggio vettore, allora ST si chiama la *sottangente polare;* il suo valore è

$$r \tan SPT, \text{ cioè } r^2 \frac{d\theta}{dr}.$$

286. Poichè un asintoto è una tangente che rimane a distanza finita dall'origine quando il punto di contatto si allontana a distanza infinita, se una curva polare ha un asintoto, SP o r deve essere infinito mentre ST rimane finita. Quindi per determinare gli asintoti di una curva polare, dobbiamo prima trovare quei valori di θ, se ve ne sono, che rendono r infinito. Sia α un tale valore di θ; se per questo valore di θ la sottangente polare $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è *infinita*, non vi è asintoto corrispondente. Se $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è *finita* vi è un asintoto che può essere costruito così: si concepisca una linea tirata da

S sotto un angolo α alla linea iniziale; si tiri da S una linea ad angoli retti alla prima, a *dritta* di essa, se $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è positiva, ed a *sinistra* di essa, se $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è negativa, ed eguale in lunghezza ad $r^2 \frac{d\theta}{dr}$; per l'estremità di questa seconda linea si tiri una linea parallela alla prima, ed essa sarà l'asintoto richiesto.

I termini a *dritta* ed a *sinistra* nella regola precedente debbono intendersi rispetto alla linea che si è tirata prima, l'occhio essendo supposto guardare *lungo* questa linea *da S*.

La *ragione* della regola deve raccogliersi dalla figura dell'Art. 284 e dal principio generale dell'interpetrazione dei segni; in quella figura r cresce con θ, e quindi $r^2 \frac{d\theta}{dr}$ è positiva. Se tracciamo una figura in cui r diminuisca quando θ cresce, sicchè $\frac{dr}{d\theta}$ e la sottangente polare siano *negative*, troveremo che ST cade a *sinistra* di SP.

287. Es. $$r = \frac{a\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Quì r è infinito quando θ è un multiplo di π.

Inoltre $$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta};$$

onde $$r^2\frac{d\theta}{dr} = \frac{a\theta^2}{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta}.$$

Quindi, quando $\operatorname{sen}\theta = 0$, il valore della sottangente polare è $-\frac{a\theta}{\cos\theta}$.

Quando $\theta = \pi$, la sottangente polare $= a\pi$.

Quando $\theta = 2\pi$, la sottangente polare $= -2a\pi$,

e generalmente quando $\theta = n\pi$, la sottangente polare $=(-1)^{n-1}na\pi$.

Per tirare il primo asintoto, pel quale $\theta=\pi$, l'occhio deve supporsi guardare da S lungo la direzione *opposta* ad Sx, e quindi misurare da S perpendicolarmente ad Sx e verso la dritta, una linea di lunghezza $a\pi$; una linea parallela alla linea iniziale e ad una distanza $a\pi$ da essa è l'asintoto richiesto.

Per tirare il secondo asintoto, pel quale $\theta = 2\pi$, l'occhio deve supporsi guardare lungo Sx, e quindi misurare a *sinistra* (poichè la sottangente è negativa) una lunghezza $2a\pi$. Quindi l'asintoto è parallelo alla linea iniziale ad una distanza $2a\pi$ da essa, e al *di sopra* della linea iniziale.

Procedendo in questo modo troviamo un numero infinito di asintoti paralleli ed equidistanti, e tutti al *di sopra* di Sx.

Se attribuiamo a θ valori negativi, otterremo in simil modo una serie di asintoti tutti paralleli ad Sx, ed equidistanti, situati al di sotto di Sx.

ESEMPII.

1. Nella curva $r = a \operatorname{sen} \theta$, mostrare che $\varphi = \theta$.

2. Determinare i punti della curva $r = a(1 + \cos\theta)$ nei quali la tangente è parallela alla linea iniziale.

3. Mostrare che nella curva $r\theta = a$ la sottangente polare è di lunghezza costante.

4. Nella curva $r(ae^{\theta} + be^{-\theta}) = ab$, la lunghezza della sottangente polare è $-\dfrac{ab}{ae^{\theta} - be^{-\theta}}$.

5. In una sezione conica, il fuoco essendo il polo, il luogo dell'estremità della sottangente polare è una linea retta perpendicolare all'asse maggiore.

6. Trovare l'angolo tra il raggio vettore e la tangente in un punto di un'ellisse, (1) il fuoco essendo il polo, (2) il centro essendo il polo. Determinare in ciascun caso quando l'angolo è un massimo.

7. Se $r = a(1 - \cos\theta)$, allora $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$, $p = 2a \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{2}$, e la sottangente polare $= 2a \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2} \tan \dfrac{\theta}{2}$.

8. Se $r^2 \cos 2\theta = a^2$, mostrare che $\operatorname{sen} \varphi = \frac{a^2}{r^2}$.

9. Se $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, mostrare che $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\theta$.

10. Se $r = a \sec^3 \frac{\theta}{3}$, mostrare che il luogo di Y è una parabola. Si vegga la figura nell'Art. 284.

11. Se $r = a(1 + \cos\theta)$, mostrare che il luogo di Y è determinato da $r = 2a\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$.

12. Se $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, mostrare che il luogo di Y è determinato da $r^2 = a^2\left(\cos\frac{2\theta}{3}\right)^3$.

13. Mostrare che la curva $r \cos\theta = a \cos 2\theta$ ha un asintoto che ha per equazione $r \cos\theta = -a$.

14. Mostrare che la curva $(r - a) \operatorname{sen}\theta = b$ ha un asintoto che ha per equazione $r \operatorname{sen}\theta = b$.

15. Determinare gli asintoti della curva $r \cos 2\theta = a$.

16. Determinare gli asintoti della curva

$$r \operatorname{sen} 4\theta = a \operatorname{sen} 3\theta.$$

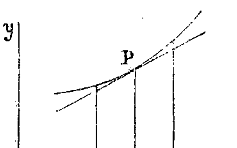
CAPITOLO XXI.

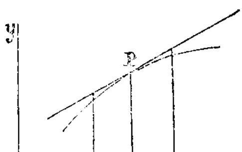
CONCAVITÀ E CONVESSITÀ.

288. Le parole concavo, e convesso, ordinariamente non si definiscono nelle opere sul Calcolo Differenziale, ma sono adoperate nel loro significato ordinario. La definizione seguente non pertanto è stata data: « Una curva si dice essere concava in uno dei suoi punti rispetto ad una data linea, quando nel passare per quel punto i suoi due rami sono inizialmente racchiusi *dentro* l'angolo acuto formato dalla linea data e dalla tangente alla curva in quel punto. Quando, al contrario, i due rami sono inizialmente *fuori* di quest'angolo, la curva si dice essere convessa in quel punto rispetto alla linea ».

289. *Trovare un carattere della convessità o concavità di una curva.*

Sia P un punto di una curva di cui le coordinate sono x, y.





Si tiri la tangente in P; allora se nel punto P la curva è *convessa* verso l'asse delle x, le ordinate della curva corrispondenti alle ascisse $x \pm h$ debbono essere maggiori delle ordinate corrispondenti della tangente in P, h avendo un valore qualunque compreso tra un limite finito e zero: se la curva è *concava*, le ordinate della curva debbono essere minori delle ordinate della tangente. Ciò può dedursi dalla definizione dell'Art. 288; o se omettiamo quella definizione esso può ancora prendersi come una conseguenza del significato dei termini *concavo* e *convesso*.

Dinoti y_1 l'ordinata della curva corrispondente all'ascissa $x+h$, ed y_2 l'ordinata corrispondente della tangente in P. Se $y=\varphi(x)$ è l'equazione della curva, abbiamo

$$y_1 = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^3}{\underline{|2}}\varphi''(x+\theta h).$$

E poichè l'equazione della tangente in P è

$$Y - y = \varphi'(x)(X - x),$$

abbiamo

$$y_2 = \varphi(x) + h\varphi'(x);$$

onde

$$y_1 - y_2 = \frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h).$$

Questo, se prendiamo h sufficientemente piccolo, avrà lo stesso segno di $\varphi''(x)$; e quindi se $\varphi''(x)$ è positivo la curva è convessa all'asse delle x, e concava se $\varphi''(x)$ è negativo.

Abbiamo supposto nelle figure che la curva sia *al di sopra* dell'asse delle x. Se essa è *al di sotto* dell'asse delle x, allora $-y_1$ e $-y_2$ sono i valori *numerici* delle ordinate, e la curva è convessa se $-y_1+y_2$ è positivo, cioè, se $\varphi''(x)$ è negativo, e concava se $\varphi''(x)$ è positivo.

Tutti e due i casi possono racchiudersi in un solo enunciato, così, « Una curva è convessa o concava all'asse delle x secondo che $y\dfrac{d^2y}{dx^2}$ è positivo o negativo. »

290. Def. Un punto d'inflessione è un punto nel quale una curva sega la sua tangente in quel punto.

Trovare le condizioni per l'esistenza di un punto d'inflessione. Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione di una curva; siano x, y, le coordinate di un punto della curva, ed $x+h, y_1$, le coordinate di un punto adiacente. Si tiri la tangente alla curva nel punto (x, y), e sia y_2 l'ordinata di questa tangente corrispondente all'ascissa $x+h$. Allora

$$y_1 = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h),$$

$$y_2 = \varphi(x) + h\varphi'(x);$$

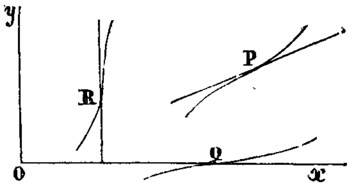
onde
$$y_1 - y_2 = \frac{h^2}{2}\varphi''(x+\theta h).$$

Quindi, se $\varphi''(x)$ non è zero, il segno di $y_1 - y_2$, se h è sufficientemente piccolo, sarà lo stesso che quello di $\varphi''(x)$, per h sì positivo che negativo, e la curva non può tagliare la sua tangente. Quindi se vi è un punto d'inflessione, dobbiamo avere $\varphi''(x)=0$. Supponiamo questa condizione soddisfatta, allora

$$y_1 - y_2 = \frac{h^3}{\underline{|3}}\varphi'''(x+\theta h):$$

e questa espressione muta di segno con h, purchè $\varphi'''(x)$ non sia zero. Se $\varphi'''(x)$ è zero, si può mostrare che $\varphi''''(x)$ deve anche svanire; e generalmente se per un certo valore di x più coefficienti differenziali successivi di y svaniscono, cominciando dal secondo, vi è un punto d'inflessione se il primo coefficiente differenziale che *non* svanisce è di ordine *dispari*.

Poichè generalmente in un punto d'inflessione $\frac{d^2y}{dx^2}$ *svanisce* mentre $\frac{d^3y}{dx^3}$ *è finito*, $\frac{d^2y}{dx^2}$ muta di segno. Infatti $\frac{d^3y}{dx^3}$ è il coefficiente differenziale di $\frac{d^2y}{dx^2}$; onde per l'Art. 89 se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è positivo $\frac{d^2y}{dx^2}$ cresce con x, e se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è negativo $\frac{d^2y}{dx^2}$ decresce al crescere di x. Quindi $\frac{d^2y}{dx^2}$ deve passare dal negativo al positivo se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è positivo, e dal positivo al negativo se $\frac{d^3y}{dx^3}$ è negativo.

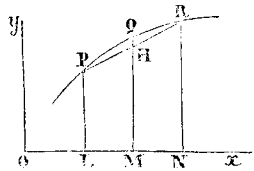


291. Nella figura precedente P, Q, R, sono punti d'inflessione per le curve che passano per essi. In P vi è un cambiamento dalla concavità alla convessità rispetto all'asse delle x. In Q vi è un punto d'inflessione, ma la curva dai due lati di Q è convessa all'asse delle x. Ciò si accorda con l'Art. 289; poichè, se y e $\frac{d^2y}{dx^2}$ mutano entrambi di segno, non si ha cambiamento nel segno del loro prodotto. In R abbiamo un punto d'inflessione nel quale $\frac{dy}{dx}$ è infinito e quindi anche $\frac{d^2y}{dx^2}$ è infinito per l'Art. 113, il quale caso non è incluso nell'investigazione dell'Art. 290. Dovremmo perciò in ogni esempio stabilire se $\frac{d^2y}{dx^2}$ può divenire infinito, e se ciò ha luogo dobbiamo esaminare questo caso particolarmente. Possiamo tracciare la curva nelle vicinanze di quel punto, o possiamo esaminare il segno di $\frac{d^2y}{dx^2}$ per valori di x che differiscono pochissimo da quello che dà origine al valore infinito, e così determinare se la curva è concava o convessa nelle vicinanze del punto in quistione.

Se consideriamo y come la variabile indipendente, possiamo mostrare come negli articoli precedenti, che una curva è convessa o concava all'asse delle y, secondo che $x \frac{d^2x}{dy^2}$ è positivo o negativo, e che in un punto d'inflessione $\frac{d^2x}{dy^2}$ deve svanire o mutare di segno. Questo è spesso utile nei casi in cui $\frac{d^2y}{dx^2}$ diviene infinito.

292. Il legame tra $\frac{d^2y}{dx^2}$ e la concavità o convessità di una curva, può anche mostrarsi così.

Siano PL, QM, RN tre ordinate equidistanti. Si tiri la corda PR che incontra QM in H. Sia $y = \varphi(x)$ l'equazione della curva; siano x, y, le coordinate di P; $LM = MN = h$. Se la curva è *concava* all'asse delle x, QM è *maggiore* di HM; e quindi $2QM$ maggiore di $2HM$, cioè, maggiore di $PL + RN$. Quindi



$$\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x) \text{ è negativa},$$

e quindi anche

$$\frac{\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x)}{h^2} \text{ è negativa.}$$

Diminuisca h indefinitamente, e segue dall'Art. 127, che $\varphi''(x)$ è negativo. Similmente, se la curva è convessa $\varphi''(x)$ è positivo.

293. Indicheremo brevemente un altro metodo col quale alle volte si ottengono i risultati di questo capitolo. O si deduce da una definizione della concavità e della convessità, o si dà come definizione di queste parole, che una curva è *convessa* all'asse delle x, (y essendo supposto positivo,) se $\frac{dy}{dx}$ è crescente, cioè, se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, e *concava* se $\frac{dy}{dx}$ è decrescente, cioè, se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativo.

Inoltre un punto d'inflessione si può definire come un punto in cui la curva cambia dall'essere concava all'essere convessa o *viceversa*. Quindi $\frac{d^2y}{dx^2}$ deve mutare di segno in un punto d'inflessione.

Un punto d'inflessione si può anche definire come un punto nel quale l'inclinazione della tangente all'asse ha un valore massimo o minimo. Poichè quando quest'angolo ha un valore massimo o minimo, lo stesso avviene per la sua tangente, dobbiamo avere $\frac{dy}{dx}$ un massimo o un minimo in un punto d'inflessione. Quindi $\frac{d^2y}{dx^2}$ deve mutare di segno.

294. Una curva riferita a coordinate polari si dice essere concava o convessa al polo in un punto, secondo che la curva nelle vicinanze di quel punto giace, o no, dalla stessa parte della tangente insieme al polo.

Se p è la perpendicolare dal polo sulla tangente in un punto di cui le coordinate sono r, θ, si vedrà da una figura, che se la curva è *concava* al polo, p cresce se r cresce, e decresce se r decresce; quindi $\frac{dp}{dr}$ deve essere *positivo*. Similmente se la curva è *convessa* al polo $\frac{dp}{dr}$ deve essere *negativo*. Così in un punto d'inflessione $\frac{dp}{dr}$ deve mutare segno.

295. Poichè
$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2, \text{ Art. } 284,$$

onde
$$-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{du}{d\theta};$$

quindi
$$\frac{dp}{du} = -p^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right).$$

Ma
$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}\frac{dp}{du}$$
$$= \frac{p^3}{r^2}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right).$$

Quindi, in un punto d'inflessione dobbiamo avere generalmente che $u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$ muti di segno.

ESEMPII.

1. Se $y = \frac{x^3}{a^2 + x^2}$, vi è un punto d'inflessione nell'origine, ed un altro quando $x = \pm a\sqrt{3}$.

2. Se $y = \frac{x^2(x+a)}{a(x-a)}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = -a(\sqrt[3]{2} - 1)$.

3. Se $y(a^4 - b^4) = x(x-a)^4 - xb^4$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \frac{2a}{5}$. Vi è un punto d'inflessione quando $x = a$?

4. Se $\frac{y}{a} = \sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \frac{3a}{4}$.

5. Se $\frac{y}{a} = \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{3}{5}}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = a$.

6. Se $x^{\frac{1}{3}} = \log y$, vi è un punto d'inflessione quando $x = 8$.

7. Se $ax^2 - x^2y - a^2y = 0$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$.

8. Se $\frac{y}{a} = \sqrt{\left(\frac{x}{2a-x}\right)}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = \frac{a}{2}$.

9. Se $xy = a^2 \log\frac{x}{a}$, vi è un punto d'inflessione quando $x = ae^{\frac{3}{2}}$.

10. Trovare il punto d'inflessione della curva,

$$\{y - 2\sqrt[3]{(a^2x)}\}^2 = 4ax. \qquad \textit{Risultato. } x = \left(\frac{8}{9}\right)^6 a.$$

11. Se $y(x^2 + a^2) = a^2(a - x)$, vi sono tre punti d'inflessione che giacciono in linea retta.

12. Se $r = \frac{a\theta^2}{\theta^2 - 1}$, vi è un punto d'inflessione quando $r = \frac{3a}{2}$.

13. Se $r = b.\theta^n$, vi è un punto d'inflessione quando

$$r = b\,\{-n(n+1)\}^{\frac{n}{2}}.$$

14. Se $x = a(1 - \cos\varphi)$, ed $y = a(n\varphi + \operatorname{sen}\varphi)$, vi è un punto d'inflessione quando $\cos\varphi = -\frac{1}{n}$.

CAPITOLO XXII.

PUNTI SINGOLARI.

296. Sotto il titolo comune di « Punti singolari » si comprendono tutti quei punti di una curva che presentano qualche particolarità dipendente dalla curva stessa ed indipendente dalla posizione degli assi coordinati. Procediamo a definire i differenti punti singolari e ad investigare le condizioni della loro esistenza.

Punti d'inflessione.

297. Questi punti sono stati considerati negli Art. 288–295; la condizione della loro esistenza è che $\frac{d^2y}{dx^2}$ muti di segno.

Punti multipli.

298. Def. Un punto multiplo è un punto pel quale passano due o più rami di una curva.

Sia $\varphi(x, y) = 0$ una equazione in una forma *razionale;* per l' Art. 177

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ora poichè due o più rami di una curva passano per un punto multiplo, sarà possibile di tirare più di una tangente alla curva in quel punto; quindi $\frac{dy}{dx}$ deve ammettere più di un valore. Ma poichè l' equazione $\varphi(x, y) = 0$ è supposta *razionale,* $\frac{d\varphi}{dx}$ e $\frac{d\varphi}{dy}$ avranno ciascuno un solo valore per i dati valori di x ed y. Quindi dall'equazione (1) $\frac{dy}{dx}$ non può avere più di un valore a meno che non siano

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \text{e } \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Queste adunque sono le condizioni per l'esistenza di un punto multiplo. Se possono trovarsi valori di x ed y che soddisfano queste equazioni e l'equazione della curva, allora per tali valori di x ed y abbiamo, per l'Art. 181,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \ldots\ldots (2).$$

Da questa equazione quadratica possiamo trovare due valori di $\frac{dy}{dx}$, e così determinare due tangenti che si possono tirare nel punto multiplo. In questo caso il punto multiplo si chiama un punto doppio.

Se la precedente equazione prende una forma indeterminata per l'annullarsi di $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, e $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, per i valori di x ed y che si considerano, abbiamo, per l'Art. 184,

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} + 3\frac{d^3\varphi}{dx^2\,dy}\frac{dy}{dx} + 3\frac{d^3\varphi}{dx\,dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^3\varphi}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \ldots\ldots (3).$$

Quest'equazione cubica dà tre valori di $\frac{dy}{dx}$; se essi sono tutti reali, *tre* tangenti della curva passano pel punto che si considera; il punto si chiama allora un punto triplo.

Se l'equazione (3) prende una forma indeterminata per l'annullarsi dei coefficienti delle diverse potenze di $\frac{dy}{dx}$, dobbiamo procedere alla *quarta* equazione derivata di $\varphi(x, y) = 0$, ed otteniamo così un'equazione biquadratica per determinare $\frac{dy}{dx}$.

299. Se i due valori di $\frac{dy}{dx}$ forniti dall'equazione (2) dell'Art. 298 sono eguali, i due rami che passano pel punto in quistione hanno una tangente comune in quel punto. In

questo caso, però, il metodo col quale siamo giunti all'equazione (2) non è soddisfacente, poichè nell'ottenerla abbiamo supposto che $\frac{dy}{dx}$ abbia più di *un solo* valore. Ma come in questo caso due rami diversi della curva passano per lo stesso punto, vi saranno generalmente *due differenti valori* di $\frac{d^2y}{dx^2}$; per l'Art. 181,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

e poichè $\varphi(x, y)$ è razionale, ciascuno dei coefficienti differenziali di φ ha solamente un valore; quindi se $\frac{d\varphi}{dy}$ è differente da zero $\frac{d^2y}{dx^2}$ può avere *solamente un valore.* Ma, per supposizione $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha più di un valore; quindi $\frac{d\varphi}{dy}=0$ è la condizione che deve verificarsi nel punto in cui due rami si toccano. Poichè $\frac{d\varphi}{dy}=0$, segue da (1) dell'Art. 298 che $\frac{d\varphi}{dx}$ anche $=0$.

Se $\frac{d^2y}{dx^2}$ avesse due valori *eguali,* allora il ragionamento di questo articolo potrebbe applicarsi a $\frac{d^3y}{dx^3}$ ed alla *terza* equazione derivata di $\varphi(x, y)=0$; e si dedurrebbe lo stesso risultato come sopra.

I punti in cui due o più valori di $\frac{dy}{dx}$ sono eguali si chiamano « Punti di Osculazione ».

300. Es. Sia $y^2-x^2(1-x^2)=0$.

Quì $\frac{d\varphi}{dy}=2y,\quad \frac{d\varphi}{dx}=-2x(1-x^2)+2x^3.$

Quindi $x=0$, $y=0$, sono le coordinate di un punto che *può* essere un punto doppio. L'equazione (2) dell'Art. 298 diviene

$$1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

onde $\frac{dy}{dx}=\pm 1$, e vi è un punto doppio.

Possiamo in questo caso porre la data equazione nella forma

$$y = \pm x \sqrt{(1 - x^2)},$$

e da questa vediamo che per valori di x compresi tra 0 ed 1, positivi e negativi, y è possibile, e che vi sono *due* valori di y per ogni valore di x. Quando $x = 0$ i due valori di y diventano eguali; ma poichè

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(1 - x^2)} \mp \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)}},$$

vediamo che quando $x = 0$ vi sono *due* valori di $\frac{dy}{dx}$. Quindi, invece di liberare un'equazione dai radicali in modo da ridurla ad una forma *razionale*, e quindi applicare il metodo dell'Art. 298, possiamo spesso trovare un punto multiplo più facilmente osservando quali valori di x fanno *svanire uno dei radicali nel valore di* y.

Cuspidi.

301. Def. Una cuspide è un punto di una curva nel quale due rami incontrano una tangente comune e si fermano in quel punto. Se i due rami giacciono in parti *opposte* della tangente comune, la cuspide si dice essere della *prima* specie; se dalla *stessa* parte, la cuspide si dice essere della *seconda* specie.

Poichè una cuspide è realmente un punto multiplo, se esiste una cuspide nella curva $\varphi(x, y) = 0$ in un punto, dobbiamo avere

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

in quel punto. Per distinguere una cuspide da un ordinario punto multiplo, dobbiamo tracciare la curva nelle vicinanze del punto in quistione.

Es. Sia $$(cy - bx)^2 - \frac{(x - a)^3}{a} = 0 \dots\dots\dots\dots (1).$$

Quì quando $x = a$ ed $y = \frac{ab}{c}$ l'equazione della curva è soddisfatta ed anche

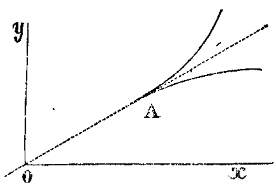
$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Ponendo l'equazione data nella forma

$$y = \frac{bx}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{\left\{ \frac{(x-a)^3}{a} \right\}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

vediamo che y è impossibile finchè x è minore di a, e che quando x è maggiore di a vi sono due valori di y per ogni valore di x. Quando $x = a$ il radicale in y svanisce, ed i due valori di y diventano eguali; nello stesso tempo $\frac{dy}{dx}$ ha solamente *un* valore, cioè $\frac{b}{c}$. Quindi vi è una cuspide.

Nella figura, A rappresenta la cuspide; la linea OA ha per sua equazione $y = \frac{bx}{c}$; e poichè dei due valori di y dati dall'equazione (2), uno è *maggiore* e l'altro *minore* di $\frac{bx}{c}$, è chiaro che i due rami giacciono in parti *opposte* di OA, e la cuspide in A è della *prima* specie. Generalmente la cuspide è della *prima* specie se i due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ infinitamente vicini al punto sono di segni *contrarii*, e di seconda specie se sono dello *stesso* segno.



Le cuspidi della prima specie sono state chiamate « cuspidi ceratoidi » e quelle della seconda « cuspidi ramfoidi. »

Punti coniugati.

302. Def. Un punto coniugato è un punto *isolato* le coordinate del quale soddisfano l'equazione della curva. Per esempio, sia

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Quì i valori $x = 0$, $y = 0$, soddisfano l'equazione della curva, ma nessun ramo della curva passa per il punto così determinato, y essendo impossibile per tutt'i valori di x compresi tra 0 ed a. Quindi l'origine delle coordinate è un punto coniugato in questa curva.

Nell'esempio precedente, poichè

$$y = \pm \frac{x}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

troviamo che il valore di $\frac{dy}{dx}$ è impossibile quando $x = 0$; ma $\frac{dy}{dx}$ *può* essere possibile in un punto coniugato; per esempio, sia

$$y = \pm \frac{x^2}{a^2} \sqrt{(x^2 - a^2)}.$$

Quì, quando $x = 0$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = 0$; ma l'origine è un punto coniugato, poichè $x = 0$, $y = 0$, soddisfano all'equazione, ed y è impossibile per tutti gli altri valori di x tra $-a$ ed a. In simil modo $\frac{d^2y}{dx^2}$ o un numero qualunque dei coefficienti differenziali di y *può* essere possibile in un punto coniugato, ma essi non possono essere *tutti* possibili, poichè se fossero tali non si avrebbe nulla per distinguere il punto in quistione da un ordinario punto della curva.

Trovare la condizione per l'esistenza di un punto coniugato. Poichè in un punto coniugato i valori dei coefficienti differenziali di y non possono essere tutti possibili, sia l'n^{mo} coefficiente differenziale di y il primo che è impossibile. Supponiamo l'equazione della curva messa in una forma razionale, e dinotata da $\varphi(x, y) = 0$. Si prenda l'n^{ma} equazione derivata; abbiamo

$$\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^ny}{dx^n} + \ldots\ldots + \frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0,$$

in cui i termini non scritti contengono i coefficienti differenziali di φ rispetto ad x ed y, ed anche i coefficienti differenziali di y rispetto ad x di ordini inferiori all'n^{mo}. Quindi se $\frac{d\varphi}{dy}$ non è zero il valore di $\frac{d^ny}{dx^n}$ fornito dall'equazione precedente sarà possibile; sicchè $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ è una condizione necessaria per l'esistenza di un punto coniugato; ma

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

quindi anche $\frac{d\varphi}{dx} = 0$.

303. Si fa manifesto dagli articoli precedenti che se $\varphi(x, y)=0$ è l' equazione di una curva, dobbiamo avere in un ordinario punto multiplo, in una cuspide, ed in un punto coniugato,

$$\frac{d\varphi}{dx}=0, \text{ e } \frac{d\varphi}{dy}=0.$$

Quindi, quando abbiamo trovato i valori di x ed y che soddisfano queste tre equazioni, dobbiamo, esaminando la curva particolare, e tracciandola nelle vicinanze del punto in quistione, determinare quale specie di punto singolare esista.

Passiamo ora ad alcuni altri punti singolari che s' incontrano raramente, e, come lo studente sperimenterà, mai si presentano nelle curve di cui le equazioni sono di una forma *algebrica*. Si vegga l'Art. 6.

Punti di fermata.

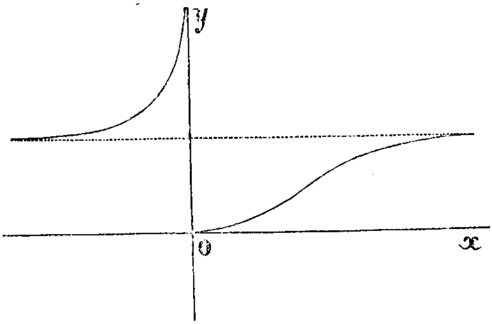
304. Un *punto di fermata* è un punto nel quale un singolo ramo di una curva bruscamente si ferma.

Es. Sia $y=x \log x$.

Quì quando $x=0$ abbiamo $y=0$; ma se x è negativo, y diviene impossibile. Quindi l'origine è un *punto di fermata.*

Inoltre, sia $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

Quì se x si rende indefinitamente piccolo e *positivo*, abbiamo che y si avvicina al limite zero; ma se x è *negativo* ed indefinitamente piccolo, y è indefinitamente grande.

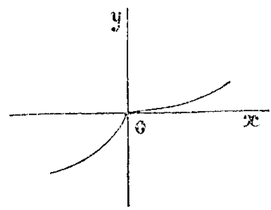


Quindi la curva ha la forma rappresentata nella figura, l'origine essendo un *punto di fermata;* la linea punteggiata è un asintoto che ha per sua equazione $y=1$.

305. Un *punto saliente* è un punto nel quale due rami di una curva s'incontrano e si fermano senza avere una tangente comune.

Es. Sia
$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$
onde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\,(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

Quì, se x è *positivo* e si avvicina a zero come suo limite, abbiamo in fine $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$; ma se x è *negativo*, abbiamo in fine $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 1$. Quindi nell'origine due rami s'incontrano, l'uno avendo l'asse delle x per sua tangente, e l'altro inclinato all'asse delle x sotto un angolo di 45.°



Rami punteggiati.

306. Se una curva ha un numero *infinito* di punti coniugati, questa serie di punti si dice un *ramo punteggiato.*

Per esempio, si supponga $y^2 = x \operatorname{sen}^2 x$; per tutt'i valori positivi di x vi sono due valori possibili di y, ma quando x è negativo y è impossibile, a meno che x sia un multiplo di π. Quindi abbiamo un *numero infinito* di punti coniugati situati sull'asse delle x e formando un *ramo punteggiato.*

ESEMPII.

1. Se $a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ vi è un punto multiplo nell'origine.

2. Nelle curve seguenti vi è un punto d'inflessione nell'origine,
$$y = \operatorname{sen} x;\quad y = x \cos x;\quad y = \tan x;\quad y = x^2 \tan x.$$

3. Se $y = \varphi(x) + (x - a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x)$, quando $x = a$, vi è una cuspide della prima specie se $\frac{2p+1}{2q}$ è maggiore di 1 e minore di 2, ed una cuspide della seconda specie se $\frac{2p+1}{2q}$ è maggiore di 2.

4. Le curve seguenti hanno cuspidi all'origine,

$$y^2 = x^3; \quad (y-x)^2 = x^3; \quad (y-x^2)^2 = x^5.$$

5. La curva $y^3 = (x-a)^2(x-c)$ ha una cuspide della prima specie nel punto $x = a$.

6. La curva $(xy+1)^2 + (x-1)^3(x-2) = 0$ ha una cuspide della prima specie nel punto $x = 1$.

7. La curva $y - b = (x-a)^{\frac{1}{3}} + (x-a)^{\frac{3}{4}}$ ha una cuspide della seconda specie nel punto $x = a$.

8. La curva $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$ ha una cuspide della seconda specie nell'origine.

9. La curva $x^4 - ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$ ha un punto coniugato nell'origine.

10. La curva $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$ ha un punto doppio quando $x = \pm a$, e $\frac{dy}{dx}$ allora $= \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$; inoltre un punto doppio quando $y = -a$, e $\frac{dy}{dx}$ allora $= \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11. Se $ay^2 = (x-a)^2(x-b)$, quando $x = a$ vi è un punto coniugato se a è minore di b, un punto doppio se a è maggiore di b, ed una cuspide se $a = b$.

12. Mostrare che la curva $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$ ha un punto coniugato nell'origine ed un punto d'inflessione quando $x = \frac{4b}{3}$.

13. Trovare i punti d'inflessione nelle curve seguenti,

$$y^2(1+x^2) = (1-x+x^2)^2; \quad r^2\theta = a^2; \quad r\theta \operatorname{sen}\theta = a.$$

14. Trovare i punti singolari nelle curve seguenti,

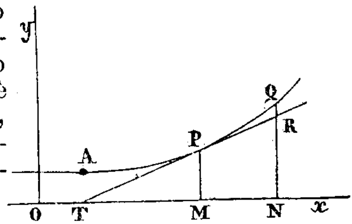
$$(y+x+1)^2 = (1-x)^5; \quad y^4 - axy^2 + x^4 = 0;$$

$$y^2 = x^3 - x^4; \quad y^4 + xy^3 + x^2(ay - bx) = 0.$$

CAPITOLO XXIII.

COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DI UN ARCO, DI UN'AREA, ETC.

307. La lunghezza dell'arco di una curva APQ, contato da un punto fisso A al punto P, è evidentemente una funzione dell'ascissa x del punto P. Questa funzione spesso è molto difficile a determinarsi, ma il suo coefficiente differenziale rispetto ad x può sempre essere assegnato.



Siano P, Q, due punti di una curva;

x, y, le coordinate di P;

$x + \Delta x$, $y + \Delta y$, le coordinate di Q.

Si tirino le ordinate PM, QN, e la tangente in P che incontra QN in R ed Ox in T.

Sia $$AP = s, \qquad AQ = s + \Delta s.$$

Ammettiamo come assioma, che la lunghezza Δs è maggiore della corda PQ, e minore di $PR + RQ$.

La corda $PQ = \sqrt{\{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\}}$,

$$PR = MN \sec PTM = MN \sqrt{(1 + \tan^2 PTM)}$$

$$= \Delta x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$QR = y + \Delta y - RN$$

$$= y + \Delta y - (PM + \Delta x \tan PTM)$$

$$= \quad \Delta y - \Delta x \frac{dy}{dx};$$

onde Δs giace tra $\sqrt{\{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\}}$ e

$$\Delta x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} + \Delta y - \Delta x \frac{dy}{dx};$$

quindi $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ giace tra $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}$ e

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} + \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}.$$

Ora il limite di $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}$, quando Δx diminuisce indefinitamente, è

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Il limite di $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} + \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}$ è

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}, \text{ o } \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Il limite di $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ è, per definizione, $\frac{ds}{dx}$; quindi

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Si elevi a quadrato e si moltiplichi per $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$, allora

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Se x ed y sono entrambe funzioni di una terza variabile t, poichè

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}, \text{ e } \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}},$$

abbiamo da (2), $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \dots\dots\dots\dots (3).$

308. Degli assiomi sui quali è fondata la dimostrazione precedente, il primo probabilmente sarà concesso subito; il secondo è più difficile, e non sarà necessariamente vero se l'arco non è *concavo verso la corda PQ lungo la sua estensione*. Si deve intendere perciò, nello stabilirlo, che l'arco PQ deve essere preso così piccolo che sia sempre concavo verso la sua corda.

Vi è un altro modo di arrivare ai risultati dell'Art. 307, il quale è preferito da alcuni scrittori: essi asseriscono che non possiamo formarci un'idea precisa della *lunghezza di un'arco*, se non riguardandolo come il *limite del perimetro di un poligono iscritto in quell'arco*, *quando la lunghezza di ciascun lato del poligono diminuisce indefinitamente*. Se adottiamo questa definizione della lunghezza di un arco, dobbiamo mostrare che il limite menzionato esiste, ed è lo stesso in qualunque maniera si supponga il poligono iscritto, purchè ciascun lato diminuisca in fine indefinitamente.

Si tirino due corde che dividono l'intero arco che si considera in due porzioni; indi in ciascuna di queste suddivisioni si situino due corde che dividono l'intero arço in quattro porzioni; in ciascuna di queste ultime suddivisioni si situino due corde, e così di seguito. I perimetri dei poligoni così formati costituiscono una serie continuamente crescente; e come è facile vedere che essi non possono crescere senza limite, dimostriamo il primo punto, cioè, che vi è un *limite* al *perimetro del poligono inscritto quando la lunghezza di ciascun lato diminuisce indefinitamente*.

Supponiamo ora due poligoni con lati indefinitamente piccoli inscritti nella curva, uno di essi essendo uno della serie testè considerata, e l'altro descritto secondo un'altra legge. Si tirino le tangenti alla curva nei vertici di *tutti e due* i poligoni, formando così *un* poligono circoscritto all'arco. Allora è facile vedere che una corda di ciascun poligono serba alla corrispondente porzione della figura circoscritta, un rapporto che può rendersi tanto vicino all'unità quanto ci piace diminuendo sufficientemente la lunghezza di ciascuna corda. Quindi il perimetro di ciascuna figura inscritta serba a quello della figura circoscritta un rapporto che è ultimamente quello di eguaglianza, e per conseguenza il rapporto del perimetro di una figura inscritta a quello dell'altra figura inscritta è ultimamente quello di eguaglianza. Ciò dimostra il secondo punto contenuto nella definizione della lunghezza di un arco, cioè, che il limite ottenuto è lo stesso secondo qualunque legge i poligoni siano inscritti.

Da questa definizione della lunghezza di un arco segue che l' ultimo rapporto della lunghezza di un arco indefinitamente piccolo alla sua corda è quello di eguaglianza, cioè,

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\}}} \text{ o } \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}}=1, \text{ ultimamente,}$$

onde $$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

309. Poichè secante $PTx=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$,

abbiamo $$\cos PTx=\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=\frac{dx}{ds},$$

e $$\operatorname{sen} PTx=\cos PTx \tan PTx$$

$$=\frac{dx}{ds}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}.$$

310. Se x ed y sono espressi in termini di θ dalle equazioni

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\operatorname{sen}\theta,$$

abbiamo $$\frac{ds}{d\theta}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right\}}.$$

Ma $$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta;$$

onde $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right\}}.$$

Inoltre $$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{\left\{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right\}}.$$

Abbiamo dimostrato nell'Art. 279, che

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr},$$

in cui φ è l'angolo tra il raggio vettore al punto di cui le coordinate polari sono r, θ, e la tangente in quel punto. Quindi

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\sqrt{\left\{1 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2\right\}}} = \frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\dfrac{ds}{dr}} = r\frac{d\theta}{ds}.$$

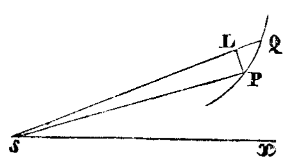
Similmente $$\cos\varphi = \frac{dr}{ds}.$$

Questi risultati possono anche dedursi immediatamente dalla figura nell'Art. 279; infatti $\operatorname{sen}\varphi$ è il valore limite di $\frac{PL}{PQ}$, cioè, di $\frac{PL}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{PQ}$ o di $\frac{r\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{PQ}$. Il limite di $\frac{r\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta s}$ è $\frac{rd\theta}{ds}$; ed il limite di $\frac{\Delta s}{PQ}$ è l'unità; quindi $\operatorname{sen}\varphi = \frac{rd\theta}{ds}$. Similmente può trovarsi il valore di $\cos\varphi$.

311. Il valore di $\frac{ds}{d\theta}$, nell'Art. 310, può anche ottenersi così:

Siano P, Q, punti di una curva, e si supponga

$SP = r$, $PSx = \theta$,
$SQ = r + \Delta r$, $QSx = \theta + \Delta\theta$.



Si tiri PL perpendicolare ad SQ, allora

$$PL = r\operatorname{sen}\Delta\theta,$$

$$LQ = r + \Delta r - r\cos\Delta\theta$$
$$= \quad \Delta r + 2r\,\mathrm{sen}^2\frac{\Delta\theta}{2}.$$

Inoltre la corda $PQ = \sqrt{(PL^2 + LQ^2)}$.

Da ciò, se procediamo secondo il metodo degli articoli precedenti, arriveremo a

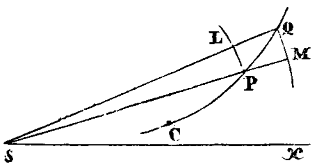
$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}.$$

312. Se A dinota l'area contenuta tra una curva e l'asse delle x, abbiamo dimostrato, Art. 43,

$$\frac{dA}{dx} = y.$$

313. Trovare il coefficiente differenziale dell'area di una curva riferita a coordinate polari.

Dinoti A l'area contenuta tra il raggio SP, il raggio SC tirato ad un punto fisso C della curva, e la curva CP. Dinoti ΔA l'area PSQ. Col centro S e raggio SP si descriva un arco che incontra SQ in L, e col centro S e raggio SQ si descriva un arco che incontra SP prolungato in M. Allora ΔA giace tra PSL e QSM, cioè, tra



$$\frac{r^2\Delta\theta}{2} \quad \text{ed} \quad \frac{(r+\Delta r)^2}{2}\Delta\theta;$$

onde $\dfrac{\Delta A}{\Delta\theta}$ giace tra $\dfrac{r^2}{2}$ ed $\dfrac{(r+\Delta r)^2}{2}$.

Quindi, procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}.$$

314. *Coefficiente differenziale del volume di un solido di rotazione.*

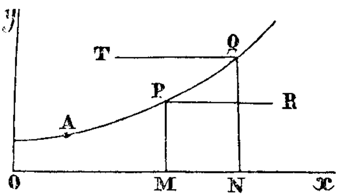
Supponiamo che la curva APQ nella figura dell' Art. 307 giri intorno l'asse delle x, e così generi un solido. Dinoti

V il volume di una porzione di questo solido contenuta tra due piani perpendicolari all'asse Ox, l'uno condotto per un punto fisso A e l'altro per P. Dinoti ΔV il volume del solido contenuto tra i piani per P e Q perpendicolari all'asse. Il volume di un cilindro che ha MN per suo asse e per sua base l'area circolare descritta dalla rotazione di PM intorno all'asse Ox, è $\pi y^2 \Delta x$. Il volume di un cilindro che ha MN per suo asse e per sua base l'area circolare descritta dalla rotazione di QN intorno ad Ox, è $\pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$. Quindi ΔV giace tra $\pi y^2 \Delta x$ e $\pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$. Onde $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ giace tra πy^2 e $\pi(y+\Delta y)^2$. Quindi, procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2.$$

315. *Coefficiente differenziale della superficie di un solido di rotazione.*

Siano P, Q, due punti di una curva che girando intorno all'asse Ox genera un solido di rotazione. Sia A un punto fisso della curva, e supponiamo $AP = s$, $PQ = \Delta s$. Dinoti S l'area della superficie descritta dalla rotazione di AP, e ΔS l'area della superficie descritta dalla rotazione di PQ. Si tirino PR e QT ciascuna eguale a Δs e ciascuna parallela ad Ox. Se PR gira intorno ad Ox genera un cilindro, la superficie del quale è $2\pi y \Delta s$. Se QT gira intorno ad Ox genera un cilindro, la superficie del quale è $2\pi(y+\Delta y)\Delta s$. Ammettiamo come un assioma che la superficie generata dall'arco PQ giace tra la prima e la seconda. Quindi Δs giace tra $2\pi y \Delta s$ e $2\pi(y+\Delta y)\Delta s$, e procedendo al limite, abbiamo



$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y;$$

onde
$$\frac{dS}{dx} = 2\pi y \frac{ds}{dx}.$$

ESEMPII.

1. Nell' ellisse $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}\right)}$; e se $x = a \operatorname{sen} \varphi$,

$$\frac{ds}{d\varphi} = a \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}.$$

2. Nella parabola $y^2 = 4ax$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{a+x}{x}\right)}$.

3. Nel circolo $\frac{ds}{dx} = \frac{a}{y}$.

4. Trovare il coefficiente differenziale dell'arco della curva $e^y(e^x - 1) = e^x + 1$.

Risultato. $\frac{ds}{dx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$.

5. Nella curva $r = a^\theta$, $\frac{ds}{d\theta} = r \sqrt{\{1 + (\log a)^2\}}$.

6. Nella curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $\frac{ds}{d\theta} = \frac{a^2}{r}$.

7. Nella curva $r = a\theta$, $\frac{ds}{dr} = \frac{\sqrt{(a^2 + r^2)}}{a}$.

8. Se $e^{-y} = \cos x$, $\frac{dx}{ds} = \cos x$.

CAPITOLO XXIV.

CONTATTO. CURVATURA. EVOLUTE ED INVOLUTE.

316. Sia $y = \varphi(x)$ l'equazione di una curva, ed $y = \psi(x)$ l'equazione di un'altra; allora se $\varphi(a) = \psi(a)$ le curve *s'intersegano* nel punto di ascissa a. Se inoltre $\varphi'(a) = \psi'(a)$ le curve hanno una tangente comune nel punto comune; in questo caso si dice che esse hanno un contatto di *primo* ordine. Se inoltre $\varphi''(a) = \psi''(a)$ le curve si dice che hanno un contatto di *secondo* ordine. Se $\varphi(a) = \psi(a)$, $\varphi'(a) = \psi'(a)$, $\varphi''(a) = \psi''(a)$, $\varphi'''(a) = \psi'''(a)$, e così di seguito sino a $\varphi^n(a) = \psi^n(a)$, le curve si dice di avere un contatto di n^{mo} ordine nel punto comune. Quando parliamo di due curve che hanno contatto di n^{mo} ordine intendiamo che esse non abbiano contatto di un ordine superiore; cioè, con la precedente notazione intendiamo che $\varphi^{n+1}(a)$ *non* sia eguale a $\psi^{n+1}(a)$.

317. Se due curve hanno in un punto un contatto di n^{mo} ordine, allora nelle vicinanze del punto comune nessuna curva può passare tra esse a meno che abbia con ciascuna di esse un contatto di un ordine non inferiore all'n^{mo}. Infatti siano $y = \varphi(x)$ ed $y = \psi(x)$ le equazioni di due curve che hanno contatto di ordine n^{mo} nel punto $x = a$; e dinoti y_1 l'ordinata della prima curva corrispondente all'ascissa $a + h$, ed y_2 l'ordinata dell'altra curva corrispondente alla stessa ascissa; allora, per l'Art. 92,

$$y_1 = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a) \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(a) + \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\varphi^{n+1}(a + \theta h),$$

$$y_2 = \psi(a) + h\psi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\psi''(a) \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n}\psi^n(a) + \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}\psi^{n+1}(a + \theta h).$$

Quindi, poichè le curve hanno contatto di n^{mo} ordine,

$$y_1 - y_2 = \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \{ \varphi^{n+1}(a + \theta h) - \psi^{n+1}(a + \theta h) \}.$$

Si supponga ora essere $y = \chi(x)$ l'equazione di una terza curva che ha contatto di m^{mo} ordine con la prima curva nel punto $x = a$; allora se $y_3 = \chi(a + h)$, abbiamo

$$y_1 - y_3 = \frac{h^{m+1}}{\lfloor m+1} \{ \varphi^{m+1}(a + \theta h) - \chi^{m+1}(a + \theta h) \}.$$

Se m è minore di n possiamo dare tale valore ad h da rendere $y_1 - y_2$ minore di $y_1 - y_3$ per quel valore di h e per tutt'i valori numericamente inferiori sì positivi che negativi. Quindi nelle vicinanze del punto comune la seconda curva è più vicina alla prima in paragone della terza.

Nelle espressioni precedenti θ dinota semplicemente una frazione propria, e non è necessariamente la *stessa* frazione propria nei differenti casi.

318. L'espressione di $y_1 - y_2$ nell'Art. 317, quando h diminuisce sufficientemente, ha lo stesso segno di

$$h^{n+1} \{ \varphi^{n+1}(a) - \psi^{n+1}(a) \},$$

e quindi cambia segno con h se n è *pari;* onde se due curve hanno contatto di un ordine *pari* esse si attraversano scambievolmente nel punto comune. Se due curve hanno contatto di un ordine *dispari* esse non si attraversano scambievolmente nel punto comune.

319. Affinchè una curva possa avere contatto di n^{mo} ordine con una curva data, apparisce dall'Art. 316 che $n+1$ equazioni debbono essere soddisfatte. Quindi, se l'equazione di una specie di curve contiene $n+1$ costanti, possiamo, dando valori convenienti a queste costanti, trovare la curva particolare della specie che ha contatto di n^{mo} ordine con una curva data in un punto dato. Per esempio, l'equazione di una linea retta è della forma $y = mx + c$; poichè vi sono due costanti, m e c, possiamo, determinandole convenevolmente, trovare la linea retta che ha contatto di *primo* ordine

con una curva data in un punto dato. Se la curva data è $y = \varphi(x)$, ed il punto dato quello che ha per coordinate $x = a$, $y = \varphi(a)$, allora dobbiamo avere

$$ma + c = \varphi(a),$$

ed

$$m = \varphi'(a).$$

Onde m e c sono determinate.

Se $y = \varphi(x)$ è l'equazione di una curva, allora

$$y = \varphi(a) + (x - a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a) \ldots + \frac{(x-a)^n}{\underline{|n}}\varphi^n(a)$$

è l'equazione di una curva che ha un contatto di n^{mo} ordine con la curva data nel punto $x = a$. Questo si può verificare facilmente.

320. *Cerchio di curvatura.* L'equazione generale di un cerchio racchiude tre costanti; quindi in un punto qualunque di una curva può trovarsi un cerchio che abbia contatto di *secondo* ordine con la curva in quel punto. Procediamo a determinare il raggio ed il centro di un tal circolo.

Def. Il cerchio di curvatura in un punto di una curva è un cerchio che ha in quel punto un contatto di secondo ordine con la curva.

Sia
$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = \rho^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

l'equazione di un cerchio, sicchè a, b, sono le coordinate del suo centro e ρ è il suo raggio. Da (1) differenziando abbiamo

$$\left.\begin{aligned} X - a + (Y - b)\frac{dY}{dX} &= 0 \\ 1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + (Y - b)\frac{d^2Y}{dX^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Se questo cerchio è il cerchio di curvatura nel punto (x, y) della curva data, dobbiamo avere

$$\left.\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \\ \frac{dY}{dX} &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi, da (2),

$$\left.\begin{aligned} (x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}&=0 \\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}&=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Onde

$$\left.\begin{aligned} y-b&=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\ x-a&=\frac{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Da (1) e (5) abbiamo

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Quindi i valori di a, b, ρ, sono trovati, e così la posizione ed il raggio del cerchio di curvatura in un punto di una curva sono determinati.

Nel valore di ρ sarà conveniente in ogni esempio particolare di dare al radicale nel numeratore lo stesso segno che ha $\frac{d^2y}{dx^2}$, in modo da rendere ρ positivo. Quindi se y è positivo e la curva *concava* all'asse delle x dovremmo porre

$$\rho=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Dalla prima delle equazioni (4) vediamo che il punto (a, b) è sulla normale alla curva data nel punto (x, y).

Il centro del cerchio di curvatura in un punto si dice per brevità «il centro di curvatura.» Ancora il raggio del cerchio di curvatura si dice «il raggio di curvatura».

Se una linea è tirata da un punto di una curva in una direzione qualunque la porzione di questa linea intercetta dal cerchio di curvatura nel punto che si considera si chiama la *corda di curvatura* in quel punto secondo la data direzione. Per la natura di un circolo la lunghezza della corda di curvatura si otterrà moltiplicando il diametro del cerchio di curvatura pel coseno dell'angolo tra la corda di curvatura e la normale comune alla curva ed al circolo nel punto che si considera.

321. Se p è la perpendicolare dall'origine sulla tangente nel punto (x, y) di una curva, abbiamo

$$p = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}},$$

onde
$$\frac{dp}{dx} = \frac{x\frac{d^2y}{dx^2}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Inoltre, se
$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$r\frac{dr}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}.$$

Dai valori di $\frac{dp}{dx}$ e $\frac{dr}{dx}$, ed il valore di ρ nell'Art. 320, vediamo che,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho} r \frac{dr}{dx},$$

e
$$\rho = r\frac{dr}{dp}.$$

322. Se x ed y sono ciascuna una funzione di una terza variabile t, abbiamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Adoperando questi valori, deduciamo

$$\rho=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}.$$

Per esempio, se $t=s$ l'arco della curva misurato da un punto fisso, allora

$$\rho=\frac{1}{\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

poichè per l'Art. 307 $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$.

Quindi $$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Differenziando (2) otteniamo

$$0=\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Si elevino a quadrato (3) e (4), e si addizionino; così

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

Da (3), per mezzo di (4), possiamo anche dedurre

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}=-\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}.$$

323. Se poniamo $x = r\cos\theta$ ed $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, abbiamo dall'Art. 201 i valori di $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$. Si sostituiscano questi nell'espressione di ρ dell'Art. 320, e troviamo

$$\rho = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Se $r = \frac{1}{u}$, allora $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$, e

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Si sostituiscano questi nel precedente valore di ρ; allora

$$\rho = \frac{\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}.$$

Questo risultato può essere anche trovato così. Per l'Art. 321

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = -\frac{1}{u^3}\frac{du}{dp}.$$

Per l'Art. 284 $$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2,$$

onde $$-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\frac{du}{d\theta},$$

e $$\frac{dp}{du} = -p^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right).$$

Quindi $$\rho = \frac{1}{u^3p^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$$

$$= \frac{\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$$

La corda di curvatura che passa per l'origine si otterrà moltiplicando 2ρ per il coseno dell'angolo tra il raggio vettore e la normale alla curva nel punto considerato. (Art. 320). Quindi la corda di curvatura per l'origine

$$= 2\rho \frac{p}{r} = 2p \frac{dr}{dp};$$

$$= \frac{2u^2 + 2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2}{u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}.$$

324. Se ψ è l'angolo che la tangente in un punto di una curva fa con l'asse delle x, abbiamo

$$\psi = \tan^{-1}\frac{dy}{dx},$$

onde
$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

onde
$$\rho = \frac{ds}{d\psi}.$$

325. Se due curve polari hanno un punto comune le coordinate polari di questo punto debbono soddisfare le equazioni di tutte e due le curve. Se esse hanno un contatto di primo ordine in quel punto il valore di $\frac{dy}{dx}$ è lo stesso per tutte e due le curve in quel punto, e quindi, per l'Art. 201, il valore di $\frac{dr}{d\theta}$ è lo stesso per tutte e due le curve. Se le curve hanno contatto di second'ordine il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ancora è lo stesso per tutt'e due le curve nel punto comune, e quindi, per l'Art. 201, il valore di $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ è lo stesso per tutte e due le curve in quel punto. Procedendo in questo modo, vediamo che se due curve hanno contatto di n^{mo} ordine in un punto, se esse sono riferite a coordinate polari, i valori di

$\frac{dr}{d\theta}, \frac{d^2r}{d\theta^2}, \dots \frac{d^nr}{d\theta^n}$ saranno gli stessi per tutte e due le curve nel punto comune.

326. Poichè $$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2,$$

segue dall'ultimo articolo, che se due curve hanno contatto di primo ordine il valore di p sarà lo stesso per tutte e due le curve nel punto comune. Inoltre, poichè

$$\frac{dp}{dr} \text{ o } \frac{\frac{dp}{d\theta}}{\frac{dr}{d\theta}} \text{ racchiude solamente } r, \frac{dr}{d\theta}, \text{ e } \frac{d^2r}{d\theta^2},$$

segue che se due curve hanno contatto di second'ordine il valore di $\frac{dp}{dr}$ deve anche essere lo stesso per le due curve nel punto comune.

327. Possiamo applicare l'articolo precedente a stabilire l'equazione dimostrata nell'Art. 321 come segue.

Se R è il raggio vettore di un punto di un circolo,

P la perpendicolare sulla tangente,

c il raggio del circolo,

b la distanza del centro dall'origine,

abbiamo, per le proprietà del circolo,

$$2cP = R^2 + c^2 - b^2.$$

Differenziando, $$c = R\frac{dR}{dP}.$$

Se questo circolo è il circolo di curvatura in un punto di una curva che ha r per suo raggio vettore e p per la perpendicolare sulla tangente, abbiamo per l'ultimo articolo,

$$R = r$$

$$P = p,$$

$$\frac{dR}{dP} = \frac{dr}{dp},$$

onde
$$c = r\frac{dr}{dp};$$

cioè, il raggio di curvatura $= r\dfrac{dr}{dp}$.

328. In un punto in cui il raggio di curvatura è un massimo o un minimo il circolo di curvatura ha contatto di *terzo* ordine con la curva.

Poichè
$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

abbiamo, quando $\dfrac{d\rho}{dx} = 0$,
$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = 0.$$

Se nell'Art. 320 differenziamo la seconda delle equazioni (2), abbiamo
$$3\frac{dY}{dX}\frac{d^2Y}{dX^2} + (Y-b)\frac{d^3Y}{dX^3} = 0.$$

Quindi
$$\frac{d^3Y}{dX^3} = -\frac{3\frac{dY}{dX}\frac{d^2Y}{dX^2}}{Y-b}$$
$$= \frac{3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

per le equazioni (3) di quell'articolo. Affinchè il circolo di curvatura possa avere contatto di *terzo* ordine con la curva nel punto proposto, dobbiamo avere
$$\frac{d^3Y}{dX^3} = \frac{d^3y}{dx^3},$$

onde
$$\frac{d^3y}{dx^3}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}.$$

Questa è la relazione che abbiamo già mostrato di aver luogo nei punti in cui il raggio di curvatura è un massimo o un minimo.

329. Nella figura dell'Art. 284 sia $SP=r$ ed $SY=p$; se p' dinota la perpendicolare da S sulla tangente in Y alla locale di Y, allora sarà

$$p'=\frac{p^2}{r}.$$

Siano x, y, le coordinate di P,

x', y', le coordinate di Y;

allora
$$p'=\frac{x'\frac{dy'}{dx'}-y'}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right\}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

L'equazione della tangente in P è

$$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x),$$

η e ξ essendo le coordinate variabili.

Poichè il punto Y è sulla tangente,

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

L'equazione di SY è $\eta=\frac{y'}{x'}\xi$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$

Ma SY è perpendicolare a PY, onde

$$\frac{y'}{x'}=-\frac{dx}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Combinando (2) e (4),

$$(y'-y)\,y'=-x'(x'-x);$$

onde
$$yy'+xx'=y'^2+x'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Si differenzii (5), così

$$y'\frac{dy}{dx}+y\frac{dy'}{dx}+x'+x\frac{dx'}{dx}=2y'\frac{dy'}{dx}+2x'\frac{dx'}{dx}.$$

Questo per (4) si riduce a

$$(2x'-x)\frac{dx'}{dx}+(2y'-y)\frac{dy'}{dx}=0,$$

onde
$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{2x'-x}{2y'-y}.$$

Si sostituisca in (1), ed otteniamo

$$p'=\frac{x'^2+y'^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{p^2}{r}.$$

330. Def. L'*evoluta* di una curva piana è il luogo del centro di curvatura; una curva quando si considera rispetto alla sua evoluta si chiama un'*involuta*.

Se x', y', sono le coordinate del centro di curvatura nel punto (x, y) di una curva, abbiamo per l'Art. 320,

$$x-x'+(y-y')\frac{dy}{dx}=0 \quad\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad\ldots\ldots\ldots (2).$$

Per mezzo dell'equazione della curva y, $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$ si possono esprimere in termini di x; quindi dalle equazioni precedenti, eliminando x, possiamo ottenere una relazione tra x' ed y' che è l'equazione dell'evoluta. Per le equazioni precedenti, x' ed y' si possono considerare funzioni di x; differenziando la prima, abbiamo

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dx'}{dx}-\frac{dy'}{dx}\frac{dy}{dx}=0.$$

Per mezzo di (2) questa dà

$$\frac{dx'}{dx}+\frac{dy'}{dx}\frac{dy}{dx}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

onde
$$1+\frac{dy'}{dx'}\frac{dy}{dx}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Quindi (1) si può scrivere

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

il che mostra che il punto (x, y) è situato sulla *tangente* all'*evoluta* nel punto (x', y'). Inoltre (1) mostra che il punto (x', y') è sulla *normale* alla *curva* nel punto (x, y). Quindi la normale in un punto di un'involuta è tangente nel corrispondente punto dell'evoluta.

331. Se ρ è la lunghezza del raggio di curvatura nel punto (x, y) di una curva, ed x', y', sono le coordinate del centro di curvatura, abbiamo

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Come x' ed y' sono funzioni di x, tale anche è ρ; quindi differenziando abbiamo

$$(x - x')\left(1 - \frac{dx'}{dx}\right) + (y - y')\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) = \rho\frac{d\rho}{dx}.$$

Per mezzo dell'equazione (1) dell'articolo precedente ciò dà

$$(x - x')\frac{dx'}{dx} + (y - y')\frac{dy'}{dx} = -\rho\frac{d\rho}{dx} \quad \ldots\ldots. (1).$$

Dalle equazioni (1) e (3) dell'articolo precedente otteniamo

$$\frac{\frac{dx'}{dx}}{x' - x} = \frac{\frac{dy'}{dx}}{y' - y} = \pm\left\{\frac{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\rho}\frac{ds'}{dx},$$

s' essendo la lunghezza dell'arco dell'evoluta. Si vegga l'Art. 307. Quindi, per (1),

$$\frac{1}{\rho}\left\{(x' - x)^2 + (y' - y)^2\right\}\frac{ds'}{dx} = \pm\rho\frac{d\rho}{dx},$$

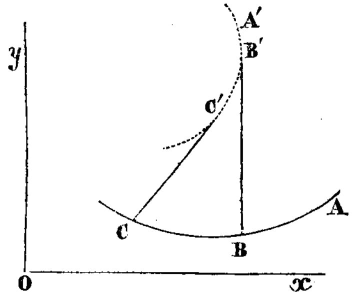
onde

$$\frac{ds'}{dx} = \pm\frac{d\rho}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Poichè $\dfrac{d(s' \mp \rho)}{dx} = 0$, abbiamo, per l'Art. 102,

$$s' \mp \rho = \text{ad una costante, poniamo } l.$$

Sia ABC la curva data, e $A'B'C'$ l'evoluta, BB' essendo



il raggio di curvatura della curva data in B, e CC' in C. Allora se A' è il punto fisso dell'evoluta dal quale si misura l'arco, abbiamo

$$A'B' + B'B = l,$$

$$A'B'C' + C'C = l,$$

onde

$$B'C' = BB' - CC'.$$

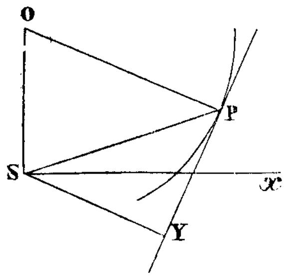
Quindi, se un filo flessibile di lunghezza l è fisso in A' e posto in contatto con l'evoluta $A'B'C'$, allora, a misura che il filo si svolge dall'*evoluta*, l'estremità libera di esso descriverà l'*involuta* CBA. Per questa proprietà si sono adoperati i nomi di evoluta e di involuta.

Nella figura al crescere di s' diminuisce ρ ed abbiamo $s' + \rho =$ ad una costante; se s' è misurato nella direzione da C' verso A', allora s' e ρ crescono insieme ed abbiamo $s' - \rho =$ ad una costante.

Si osserverà che una curva ha solamente *una* evoluta; ma una curva ha un numero infinito di involute, poichè nell'equazione $s' \mp \rho =$ costante, la costante può avere quel valore che ci piace.

332. Le seguenti formole polari per determinare l'evoluta di una curva sono alle volte utili.

Sia O il centro di curvatura corrispondente al punto P di una curva riferita a coordinate polari. Sia SY la perpendicolare sulla tangente in P.



Sia $$SP = r, \quad PO = \rho, \quad SY = p,$$
$$SO = r', \quad p' = \text{alla perpendicolare da } S \text{ sopra } PO.$$

Dal triangolo SOP abbiamo

$$\begin{aligned} r'^2 &= \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos SPO \\ &= \rho^2 + r^2 - 2r\rho \operatorname{sen} SPY \\ &= \rho^2 + r^2 - 2\rho p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1). \end{aligned}$$

Inoltre $$p'^2 = r^2 - p^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

$$\rho = r\frac{dr}{dp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Dall'equazione data della curva possiamo trovare p in termini di r, e quindi tra (1) e (2) possiamo eliminare r, e così abbiamo un'equazione tra p' ed r' per determinare il luogo di O. Poichè PO è tangente alla locale di O, p' è la perpendicolare dall'origine sulla tangente all'evoluta in O.

Nella figura la curva è tracciata *concava* al polo.

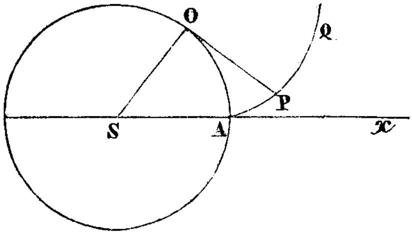
Se la curva è *convessa* al polo $\frac{dr}{dp}$ è negativo (Art. 294), e dovremmo prendere $\rho = -r\frac{dr}{dp}$; in questo caso troveremo invece di (1) l'equazione

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 + 2\rho p.$$

Così in entrambi i casi abbiamo

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 - 2pr\frac{dr}{dp}.$$

333. *Involuta di un circolo.*



Sia S il centro di un circolo, APQ una porzione dell'involuta, $OP = OA$ la porzione del filo svolto. Sia $SO = a$, $OSA = \varphi$, e siano x, y, le coordinate di P, l'origine essendo in S, ed SA la direzione dell'asse delle x. Allora

$$OP = a\varphi,$$

$$x = a\cos\varphi + a\varphi \operatorname{sen}\varphi,$$

$$y = a \operatorname{sen}\varphi - a\varphi\cos\varphi.$$

Sia $AP = s$, allora

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right\}}, \text{ Art. } 307,$$
$$= a\varphi.$$

Quindi, come vedremo nel Calcolo Integrale,

$$s = \frac{a\varphi^2}{2}.$$

ESEMPII.

1. Nella curva

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

l'ordinata in un punto è media proporzionale tra il raggio di curvatura ivi e nel punto più basso.

2. Nella curva
$$y = x^4 - 4x^3 - 18x^2,$$
il raggio di curvatura nell'origine $= \frac{1}{36}$.

3. Nella curva
$$y = x^3 + 5x^2 + 6x,$$
il raggio di curvatura nell'origine $= 22 \cdot 506$. In quale punto il raggio di curvatura è infinito?

4. Se $\varphi(x, y) = 0$ è l'equazione di una curva, allora
$$\rho = \frac{\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2}}.$$

5. Trovare la parabola con l'asse parallelo a quello delle y che ha il contatto più intimo con la curva $y = \frac{x^3}{a^2}$ nel punto in cui $x = a$.

Risultato. $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a}{3}\left(y - \frac{a}{4}\right)$.

6. Se $r = a\,(1 - \cos\theta)$, $\rho = \frac{4a}{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

7. Se $r = a\,(2\cos\theta - 1)$, $\rho = \frac{a\,(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6\cos\theta}$.

8. Se le curve $f(x, y) = 0$ e $\varphi(x, y) = 0$ si toccano, mostrare che nel punto di contatto
$$\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

9. Applicare l'ultimo risultato a trovare se la linea retta
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$
tocca la curva
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - (a^2 + b^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

10. Quando l'angolo tra il raggio vettore e la perpendicolare sulla tangente ha un valore massimo o minimo, mostrare che $p\rho = r^2$.

11. Se in ogni punto di una curva

$$2a\frac{dx}{ds} = \frac{b^2}{y} + y, \qquad \text{allora } \rho = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2}.$$

Mostrare inoltre che $\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}$,

in cui n è la porzione della normale intercetta dall'asse delle x.

12. Trovare il valore di ρ quando $r = a\cos\theta$.

13. Se $x = \sqrt{(c^2 + s^2)}$, trovare ρ.

14. Le equazioni che determinano le coordinate a, b, del centro di curvatura di una curva si possono porre sotto la forma

$$2a\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d^2r^2}{dy^2}, \qquad 2b\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2r^2}{dx^2},$$

in cui $\qquad r^2 = x^2 + y^2.$

15. Nella parabola $y^2 = 4mx$,

$$a = 2m + 3x,\ b = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}},\ \rho = \frac{2(m+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}.$$

Mostrarè che il circolo di curvatura in ogni punto di una parabola, eccetto il vertice, sega l'asse in due punti in parti opposte del vertice.

16. Se $\qquad Ax^2 + By^2 + C = 0,$

$$a = \frac{A(A-B)}{BC}x^3, \quad b = \frac{B(B-A)}{AC}y^3.$$

17. Se $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$, allora $\rho = \frac{a^2 + s^2}{a}$.

18. Il raggio di curvatura della curva

$$y^2 = \frac{ax(x-3a)}{x-4a},$$

in uno dei punti in cui $y = 0$ è $\frac{3a}{8}$, e nell'altro $\frac{3a}{2}$.

19. Se $s = a \operatorname{sen}^n \psi$, trovare ρ. Si vegga l'Art. 324.

20. Trovare l'equazione del cerchio di curvatura della curva $y^4 = 4a^2x^2 - x^4$, nell'origine.

21. Se $y + ae^{-\frac{x}{a}} = 0$, allora $\rho = \dfrac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$.

22. Mostrare che il circolo

$$\left(x - \frac{3a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

e la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

hanno contatto di *terzo* ordine nel punto $x = y = \dfrac{a}{4}$.

23. Se $r = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$, trovare ρ. *Risultato.* $\rho = 2a \sec^3 \dfrac{\theta}{2}$.

24. Trovare le due parabole che, avendo i loro assi paralleli agli assi delle coordinate rispettivamente, hanno un contatto di secondo ordine col circolo $x^2+y^2=5a^2$, nel punto $x=a$, $y=2a$.

Risult. $\left(y - \dfrac{8a}{5}\right)^2 = \dfrac{2a}{5}\left(\dfrac{7a}{5} - x\right)$, $\left(x - \dfrac{a}{5}\right)^2 = \dfrac{16a}{5}\left(\dfrac{11a}{5} - y\right)$.

25. Nella curva $\dfrac{y}{c} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$, mostrare che le coordinate del centro di curvatura sono

$$Y = 2y,\ X = x - y\sqrt{\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)},$$

e trovare l'equazione dell'evoluta.

26. Trovare l'equazione dell'evoluta dell'ellisse, e la lunghezza totale dell'evoluta.

Risultati. $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$; $4\left(\dfrac{a^2}{b} - \dfrac{b^2}{a}\right)$.

27. Se $r = f(p)$ è l'equazione polare di una curva, mostrare che l'equazione del luogo del piede della perpendicolare condotta dal polo sulla tangente è $p' = \frac{r'^2}{f(r')}$. Trovare il luogo quando $p^2 = \frac{b^2 r}{2a - r}$, e mostrare che esso è un circolo.

28. Trovare l'evoluta della curva $p^2 = r^2 - a^2$.

29. Se A è l'area tra una curva, il suo raggio di curvatura, e la sua evoluta, allora

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}{2\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

30. Se ρ è il raggio di curvatura di una curva, allora il raggio di curvatura dell'evoluta nel punto corrispondente è $\rho \frac{d\rho}{ds}$.

31. Se x', y', sono le coordinate del centro di curvatura della curva $y^3 = a^2 x$; mostrare che

$$x' = \frac{a^4 + 15y^4}{6ya^2}, \quad y' = \frac{a^4 y - 9y^5}{2a^4},$$

e trovare l'equazione dell'evoluta.

32. Mostrare che in una parabola il raggio di curvatura in un punto è eguale a due volte la porzione della normale intercetta tra il punto e la direttrice.

33. Dimostrare le espressioni seguenti del raggio di curvatura in un punto di un'ellisse:

$$(1) \quad \frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad (2) \quad \frac{b^2}{a(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

in cui r ed r' sono le distanze focali del punto e φ è l'angolo che la normale nel punto fa con l'asse maggiore.

34. Il luogo dei centri di tutte le ellissi per le quali sono date le direzioni dei loro assi, e che hanno un contatto di secondo ordine con una curva data in un punto dato, è un'iperbole rettangolare che passa per quel punto.

35. Trovare gli asintoti dell'evoluta della curva $y = a \tan x$.

36. Mostrare che corrispondente alla porzione della curva $a^3 y^2 = x^5$ vicina all'origine, l'evoluta è prossimamente una curva di cui l'equazione è della forma $xy^2 = c^3$.

37. Mostrare che corrispondente alla porzione della curva $a^{\frac{3}{2}} y = a^{\frac{1}{2}} x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ vicina all'origine, l'evoluta è approssimativamente una curva di cui l'equazione è

$$(y - \alpha)^3 + \beta^2 x = 0.$$

38. Mostrare che la corda di curvatura parallela all'asse delle x della curva $\sec \frac{y}{a} = e^{\frac{x}{a}}$ è costante; e che

$$\sec \left(\frac{3y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x-a}{a}}$$

prossimamente rappresenta l'evoluta di questa curva per la parte vicina all'origine.

39. Se lungo una curva ed il suo circolo di curvatura in un punto si misurano archi eguali (δs) dal punto di contatto e dalla stessa parte di esso, mostrare che la distanza fra le loro estremità sarà in fine $\frac{1}{6} \frac{d\rho}{ds} \frac{(\delta s)^3}{\rho^2}$.

40. Dimostrare che in generale si può trovare una sezione conica che ha un contatto di *quarto* ordine con una curva data in un punto proposto, e mostrare come trovarla quando la lunghezza della curva è data in termini dell'angolo che la normale fa con una linea fissa.

Se la curva è una spirale equiangola, ed α è l'angolo tra il raggio vettore e la tangente in un punto, mostrare che la sezione conica è un'ellisse, l'asse maggiore della quale fa con la normale alla curva un angolo ω dato dell'equazione

$$\tan 2\omega + 3 \tan \alpha = 0.$$

CAPITOLO XXV.

INVILUPPI.

334. Si supponga

$$F(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

essere l'equazione di una curva, essendo a una quantità costante. Cambiando a in $a + h$, abbiamo un'altra curva della stessa specie di (1), l'equazione della quale è

$$F(x, y, a + h) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Il punto d'intersezione di (1) e (2) si troverà combinando le equazioni. Ora (2) si può scrivere

$$F(x, y, a) + h F'(x, y, a + \theta h) = 0 \ldots\ldots\ldots (3),$$

l'accento dinotando che $F(x, y, a)$ deve essere differenziata rispetto ad a, e nel risultato mutarsi a in $a + \theta h$. Quindi, combinando (3) ed (1), abbiamo il punto d'intersezione determinato da

$$F(x, y, a) = 0, \text{ ed } F'(x, y, a + \theta h) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Se h diminuisce indefinitamente, le equazioni (4) diventano

$$F(x, y, a) = 0, \text{ ed } F'(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Il punto determinato dalle equazioni (5) è il *limite della intersezione di* (1) *e* (2).

Se tra le equazioni (5) si elimina a, otteniamo l'equazione di una curva che si chiama il *luogo delle intersezioni finali delle curve formate variando continuamente* a *nell' equazione* $F(x, y, a) = 0$.

La quantità a si chiama il parametro della curva.

335. Il luogo delle intersezioni finali di una serie di curve *tocca* ciascuna della serie delle curve che s' intersegano.

Sia $F(x, y, a) = 0$ l'equazione che dà la serie delle curve variando continuamente la quantità a. Allora il luogo delle intersezioni finali si trova eliminando a tra

$$F(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

ed

$$F'(x, y, a) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Supponiamo che da (2) si ottenga a in termini di x ed y, supponiamo $a = \varphi(x, y)$; allora se sostituiamo in (1) abbiamo

$$F\{x, y, \varphi(x, y)\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

che è perciò l'equazione del luogo delle intersezioni finali. Ora se per un valore assegnato di a l'equazioni (1) e (2) danno valori possibili di x ed y, allora la curva rappresentata da (1) quando a ha questo assegnato valore, incontrerà la curva rappresentata da (3).

Il valore di $\frac{dy}{dx}$ per la curva (1) si trova dall'equazione

$$\frac{dF(x, y, a)}{dx} + \frac{dF(x, y, a)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (4).$$

Il valore di $\frac{dy}{dx}$ per la curva (3) si trova da

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{dy}\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\left\{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Ma $\frac{dF}{d\varphi}$ differisce solamente da $\frac{dF}{da}$ nell' avere $\varphi(x, y)$ in luogo di a; quindi per (2) abbiamo *nel punto in cui* (1) e (3) *s' intersegano*, $\frac{dF}{d\varphi} = 0$. Così (5) diviene in quel punto

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (6).$$

Poichè nel punto d' intersezione di (1) e (3) abbiamo $a = \varphi(x, y)$, l' equazione (6) dà per $\frac{dy}{dx}$ in quel punto lo stesso valore come l'equazione (4). Quindi (1) e (3) si *toccano* nel loro punto comune.

Per questa proprietà il luogo delle intersezioni finali di una serie di curve si chiama l'*inviluppo* della serie di curve.

336. Es. Trovare il luogo delle intersezioni finali di una serie di parabole trovate variando a nell'equazione

$$y = ax - \frac{1 + a^2}{2p} x^2.$$

Qui $$F(x, y, a) = y - ax + \frac{1 + a^2}{2p} x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$F'(x, y, a) = \qquad \frac{ax^2}{p} - x \qquad = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da (2) $$a = \frac{p}{x}.$$

Si sostituisca in (1) ed abbiamo

$$y - p + \frac{p^2 + x^2}{2p} = 0,$$

o $$x^2 + 2py - p^2 = 0,$$

che è l'equazione di una parabola.

337. Si cerca il luogo delle intersezioni finali di una serie di normali condotte nei differenti punti di una curva data.

Siano x, y, le coordinate di un punto della curva data, allora

$$x' - x + (y' - y)\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

è l'equazione della normale in quel punto; x', y', essendo le coordinate variabili. Dall'equazione della curva data y e $\frac{dy}{dx}$ si possono esprimere come funzioni di x; così x è il *parametro* in (1), variando il quale si ottiene la serie delle normali. Quindi il luogo richiesto deve trovarsi eliminando x

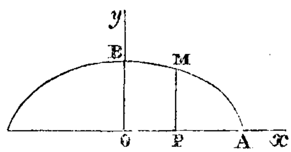
tra (1) e l'equazione ottenuta da (1) differenziandola rispetto ad x, che è

$$-1+(y'-y)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Apparisce da (1) e (2), paragonate con l'Art. 320, che x', y', saranno le coordinate del centro di curvatura nel punto (x, y) della curva data. *Quindi il luogo delle intersezioni finali delle normali di una curva è l'evoluta di quella curva.*

338. Può accadere che l'inviluppo non tocca *tutte* le curve della serie, come apparirà da un esempio.

Si supponga il centro di un circolo di raggio variabile muoversi lungo l'asse delle x, sicchè l'ascissa OP del suo centro ed il suo raggio PM siano l'ascissa e l'ordinata di un' ellisse AMB che ha per sua equazione



$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1;$$

si cerca l'inviluppo del sistema di circoli.

Se $OP=a$, l'equazione del circolo sarà

$$(x-a)^2+y^2-\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2)=0 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Quindi differenziando rispetto ad a, abbiamo

$$x-a-\frac{n^2a}{m^2}=0;$$

onde

$$a=\frac{m^2x}{m^2+n^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si sostituisca in (1) ed otteniamo

$$\frac{x^2}{m^2+n^2}+\frac{y^2}{n^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

che è l'equazione dell'inviluppo.

Per tutt'i valori di a compresi tra $\frac{m^2}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ ed m, i circoli non s'intersegano ultimamente, e *non* sono toccati dall'inviluppo: infatti il valore di y trovato da (2) e (3) è

$$y = \pm n \sqrt{\left\{1 - \frac{(m^2+n^2)\,a^2}{m^4}\right\}},$$

che è impossibile quando a è maggiore di $\frac{m^2}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

Perciò nell'enunciato dell'Art. 335 non asseriamo che l'inviluppo tocchi ciascuna delle serie delle curve, ma che esso tocchi ciascuna delle serie delle curve che *s'intersegano*. La dimostrazione in questo articolo suppone che le equazioni (1) e (2) conducano a valori *possibili* di x ed y; o in altri termini, che una curva della serie interseghi ultimamente la curva adiacente.

339. Il metodo dell'Art. 334 può essere esteso al caso nel quale vi sono n parametri legati da $n-1$ equazioni. Per esempio, si supponga

$$F(x, y, a, b, c) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

essere l'equazione di una curva, i parametri a, b, c, essendo legati dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(a, b, c) = 0 \\ \varphi_2(a, b, c) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

e che si cerchi il luogo delle intersezioni ultime delle curve ottenute dando ai parametri in (1) tutt'i valori possibili di accordo con (2). Se dalle equazioni (2) troviamo i valori di b e c in termini di a e li sostituiamo in (1), possiamo allora procedere come nell'Art. 334. Però se la risoluzione delle equazioni (2) è difficile possiamo procedere così. Riguardando b e c in (1) come funzioni implicite di a, abbiamo, se si differenzia rispetto ad a, e si pone il risultato eguale a zero come nell'Art. 334,

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} + \frac{dF}{dc}\frac{dc}{da} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (3).$$

Per trovare $\frac{db}{da}$ e $\frac{dc}{da}$, abbiamo differenziando (2),

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\varphi_1}{da}+\dfrac{d\varphi_1}{db}\dfrac{db}{da}+\dfrac{d\varphi_1}{dc}\dfrac{dc}{da}=0\\[2ex]\dfrac{d\varphi_2}{da}+\dfrac{d\varphi_2}{db}\dfrac{db}{da}+\dfrac{d\varphi_2}{dc}\dfrac{dc}{da}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(4).$$

Se i valori di $\dfrac{db}{da}$ e $\dfrac{dc}{da}$ da (4) si sostituiscono in (3), e quindi si eliminano $a, b, c,$ tra (1), (2), e (3), l'equazione risultante tra x ed y sarà il luogo richiesto.

Questo procedimento si può rendere più simmetrico supponendo $a, b, c,$ tutte funzioni di una terza variabile, supponiamo t; allora adoperando Da, Db, Dc per $\dfrac{da}{dt}, \dfrac{db}{dt}, \dfrac{dc}{dt}$ rispettivamente, abbiamo invece di (3) e (4) le equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dF}{da}Da+\dfrac{dF}{db}Db+\dfrac{dF}{dc}Dc=0\\[2ex]\dfrac{d\varphi_1}{da}Da+\dfrac{d\varphi_1}{db}Db+\dfrac{d\varphi_1}{dc}Dc=0\\[2ex]\dfrac{d\varphi_2}{da}Da+\dfrac{d\varphi_2}{db}Db+\dfrac{d\varphi_2}{dc}Dc=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(5).$$

E la soluzione del problema sarà facilitata con l'uso dei moltiplicatori indeterminati. Così si moltiplichi la seconda delle equazioni (5) per λ, la terza per μ, e si aggiungano alla prima; ciò dà

$$\left(\frac{dF}{da}+\lambda\frac{d\varphi_1}{da}+\mu\frac{d\varphi_2}{da}\right)Da+\left(\frac{dF}{db}+\lambda\frac{d\varphi_1}{db}+\mu\frac{d\varphi_2}{db}\right)Db$$
$$+\left(\frac{dF}{dc}+\lambda\frac{d\varphi_1}{dc}+\mu\frac{d\varphi_2}{dc}\right)Dc=0.\ldots.(6).$$

Ora poichè λ e μ sono attualmente indeterminate, possiamo prenderle in modo che

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dF}{da}+\lambda\dfrac{d\varphi_1}{da}+\mu\dfrac{d\varphi_2}{da}=0\\[2ex]\dfrac{dF}{db}+\lambda\dfrac{d\varphi_1}{db}+\mu\dfrac{d\varphi_2}{db}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(7),$$

dalle quali segue per (6) che

$$\frac{dF}{dc}+\lambda\frac{d\varphi_1}{dc}+\mu\frac{d\varphi_2}{dc}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Quindi dobbiamo eliminare a, b, c, λ e μ dalle equazioni (1), (2), (7) ed (8); il risultato è l'equazione dell'inviluppo richiesto.

Esempio. Una linea si muove in modo che la lunghezza intercetta tra gli assi delle coordinate è costante; si cerca l'inviluppo della retta mobile.

Sia l'equazione della retta

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

sicchè $a^2+b^2=$ ad una costante $=k^2$, supponiamo... (10).

Da (9) $$\frac{x}{a^2}Da+\frac{y}{b^2}Db=0,$$

da (10) $$aDa+\ bDb=0;$$

così $$\left(\frac{x}{a^2}+\lambda a\right)Da+\left(\frac{y}{b^2}+\lambda b\right)Db=0,$$

onde $$\frac{x}{a^2}+\lambda a=0, \text{ ed } \frac{y}{b^2}+\lambda b=0 \ldots\ldots\ldots (11);$$

si moltiplichi la prima di queste equazioni per a e la seconda per b e si aggiungano; così

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(a^2+b^2)=0,$$

cioè, $$1+\lambda k^2=0, \text{ onde } \lambda=-\frac{1}{k^2}.$$

Quindi da (11)

$$a^3=k^2x, \text{ e } b^3=k^2y.$$

Onde da (9)

$$\frac{x}{\sqrt[3]{(k^2x)}}+\frac{y}{\sqrt[3]{(k^2y)}}=1,$$

o $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}.$$

Questa equazione determina l'inviluppo.

ESEMPII.

1. Trovare l'inviluppo della serie di linee

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

in cui $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{k}$ una costante.

Risultato. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=k^{\frac{1}{3}}$.

2. Siano descritte ellissi col centro e gli assi coincidenti, e che hanno la somma dei semiassi $=c$. Il luogo delle intersezioni ultime è

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}.$$

3. Trovare l'inviluppo di tutte le ellissi che hanno un'area costante, gli assi essendo coincidenti.

Risultato. $4x^2y^2=c^4$ in cui πc^2 è l'area data.

4. Una linea retta taglia dagli assi coordinati distanze AB, AC, tali che

$$nAB+AC=c,$$

dimostrare che l'inviluppo delle linee è

$$(y+nx-c)^2=4nxy.$$

5. Trovare l'evoluta di una parabola $y^2=4ax$, prendendo l'equazione della normale nella forma

$y=m(x-2a)-am^3$. Si vegga l'Art. 337.

Risultato. $27ay^2=4(x-2a)^3$.

6. Trovare l'evoluta della curva $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. (Si vegga l'Esempio 9, nel Capitolo XVIII).

Risultato. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

7. Mostrare che l'inviluppo della serie di parabole

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}+\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)}=1,$$

sotto la condizione $ab=c^2$, è un'iperbole che ha i suoi asintoti coincidenti con gli assi.

8. Trovare il luogo delle intersezioni ultime delle perpendicolari condotte alle normali della parabola $y^2=4ax$, nei punti in cui esse tagliano l'asse.

Risultato. $y^2=4a(2a-x)$.

9. Le linee rette condotte ad angoli retti sulle tangenti di una parabola nei punti in cui esse incontrano una data linea retta perpendicolare all'asse, sono in generale tangenti ad una parabola confocale.

10. Trovare l'inviluppo delle curve

$$\left(\frac{x-a}{h}\right)^2+\left(\frac{y-b}{k}\right)^2=1,$$

i parametri variabili a, b, essendo legati dall'equazione $\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=1$.

Risultato. $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=4$.

11. Siano descritti dei circoli sulle successive doppie ordinate di una parabola come diametri; mostrare che il loro inviluppo è un'eguale parabola. Quale parte di questo sistema di circoli non ammette inviluppo?

12. Un circolo si muove col suo centro su di una parabola che ha per equazione $y^2-4ax=0$, e passa sempre pel vertice della parabola; mostrare che esso tocca sempre la curva $y^2(x+2a)+x^3=0$.

13. Una serie di parabole di lato retto l è descritta con i loro vertici in una data parabola di lato retto l'. Mostrare che il luogo delle intersezioni ultime è una parabola col lato retto $l+l'$, le concavità essendo nella stessa direzione e gli assi paralleli.

14. Trovare l'inviluppo di tutte le ellissi che hanno lo stesso centro e nelle quali la linea che congiunge le estremità degli assi è di lunghezza costante.

Risultato. $x\pm y=\pm c$.

15. Da un punto qualunque dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

si conducano le perpendicolari sugli assi, e si congiungano i piedi di queste perpendicolari; mostrare che la linea retta così ottenuta tocca sempre la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

16. Da ogni punto dell'ellisse

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}-1=0$$

siano tirate le coppie di tangenti all'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

il luogo delle intersezioni ultime delle corde di contatto è

$$\frac{h^2x^2}{a^4}+\frac{k^2y^2}{b^4}=1.$$

17. Siano descritti dei circoli che passano per l'origine ed hanno i loro centri sulla curva

$$a^2y^2-b^2(2ax-x^2)=0;$$

mostrare che il luogo delle intersezioni ultime di questi circoli è

$$(x^2+y^2-2ax)^2-4a^2x^2-4b^2y^2=0.$$

18. Il circolo che ha per equazione

$$x^2+y^2+2ax+2by+2c=0,$$

è tagliato da un altro cerchio che passa per l'origine ed il di cui centro è sulla curva

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1;$$

dimostrare che la corda che unisce i punti d'intersezione tocca la curva

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=(ax+by+c)^2.$$

19. Trovare il luogo delle intersezioni ultime di un sistema di linee definitive dall'equazione

$$y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta = c - c \operatorname{sen} \theta \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right),$$

in cui θ è il parametro variabile.

Risultato. $2y = c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

20. L'equazione di una spirale è $r^n \cos n\theta = a^n$; se si tirano le perpendicolari per le estremità dei raggi vettori l'inviluppo delle perpendicolari è la curva

$$r^m \cos m\theta = a^m, \text{ in cui } m = \frac{n}{n+1}.$$

21. Una serie di ellissi ha lo stesso centro e la stessa direttrice; mostrare che l'inviluppo è una coppia di parabole, ma che l'inviluppo non incontrerà quelle ellissi la di cui eccentricità è minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

22. Trovare il luogo delle intersezioni ultime di un'ellisse che tocca una retta data in un dato punto nell'estremità dell'asse minore, l'eccentricità variando come l'asse maggiore. Quali sono i limiti dell'eccentricità affinchè due ellissi consecutive possano intersegarsi?

23. Una retta è condotta dal fuoco ad un punto qualunque di una sezione conica, ed un circolo è descritto sopra di essa come diametro; mostrare che il luogo delle intersezioni ultime di tutti questi circoli è un circolo, eccettuato, per un certo caso, in cui esso è una linea retta.

24. Mostrare che il luogo delle intersezioni ultime di tutte le corde di un'ellisse che congiungono i punti di contatto delle coppie di tangenti ad angoli retti tra loro è un'ellisse confocale.

25. Trovare il luogo delle intersezioni ultime delle linee

$$x \cos 3\theta + y \operatorname{sen} 3\theta = a (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}},$$

in cui θ è il parametro variabile.

Risultato. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

26. Trovare l'inviluppo dei circoli descritti sui raggi di un'ellisse, condotti dal centro, come diametri.

Risultato. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

27. Sopra ogni raggio vettore della curva $r=c\sec^n\frac{\theta}{n}$ come diametro si descrive un circolo; mostrare che l'inviluppo di tutti questi circoli è la curva $r=c\sec^{n-1}\frac{\theta}{n-1}$.

28. Trovare il luogo delle intersezioni ultime di una famiglia di parabole di cui il polo di una data spirale equiangola è il fuoco, e le sue tangenti le direttrici.

Risultato. Una spirale equiangola simile.

29. Siano condotte le perpendicolari dal polo di una spirale equiangola sulle tangenti della curva; trovare l'inviluppo dei circoli descritti su queste perpendicolari come diametri.

Risultato. Una spirale equiangola simile.

30. Da ogni punto di una parabola come centro si descrive un cerchio con un raggio che eccede la distanza focale del punto di una quantità costante; trovare l'inviluppo dei circoli.

Risultato. $(x+c+a)\{y^2+(x-a)^2-c^2\}=0$; in cui c è la quantità costante.

31. Trovare l'inviluppo delle linee rette

$$ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2.$$

Risultato. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.

32. Da un punto fisso A sulla circonferenza di un circolo si tiri una corda AP e si biseghi in H, e su PH come diametro si descriva un cerchio; trovare il luogo delle intersezioni ultime del sistema di circoli descritti secondo questa legge.

Risultato. $a^2(x^2+y^2)=(2x^2+2y^2-3ax)^2$;

in cui $x^2+y^2=2ax$ è l'equazione del dato circolo.

CAPITOLO XXVI.

DESCRIZIONE DELLE CURVE.

340. In questo capitolo daremo alcuni esempii sulla descrizione delle curve per mezzo delle loro equazioni.

Es. (1). Sia $$y^2 = \frac{x^2 (x^2 - 4a^2)}{x^2 - a^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Si trovi prima il valore di $\frac{dy}{dx}$; prendendo i logaritmi dei due lati dell'equazione e differenziando, abbiamo

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 4a^2} - \frac{x}{x^2 - a^2};$$

onde $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x\sqrt{(x^2 - 4a^2)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} \left\{\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 4a^2} - \frac{x}{x^2 - a^2}\right\} \dots (2).$$

In appresso si trovino gli asintoti: poichè

$$y^2 = \frac{x^2\left(1 - \frac{4a^2}{x^2}\right)}{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

onde $$y = \pm x \left(1 - \frac{4a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm x \left\{1 - \frac{2a^2}{x^2} - \frac{2a^4}{x^4} - \dots\right\} \left\{1 + \frac{a^2}{2x^2} + \frac{3a^4}{8x^4} + \dots\right\}$$

$$= \pm x \left\{1 - \frac{3a^2}{2x^2} \dots\right\}$$

$$= \pm \left\{x - \frac{3a^2}{2x} \dots\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3).$$

Quindi $$y = x$$
ed $$y = -x$$
sono asintoti.

Inoltre quando $x = \pm a$ vediamo che y è infinita.

Quindi $$x = a$$
ed $$x = -a$$
sono asintoti.

Possiamo ora assegnare diversi valori ad x, e notare i corrispondenti valori di y e $\frac{dy}{dx}$ ottenuti da (1) e (2). Poichè la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x, possiamo limitare la nostra attenzione ai valori positivi di y.

Quando $x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm 2.$

Da $x = 0$ ad $x = a$, y è possibile.

Quando $x = a, \quad y = \infty, \quad \frac{dy}{dx} = \infty.$

Da $x = a$ ad $x = 2a$, y è impossibile.

Quando $x = 2a, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \infty.$

Quando x è maggiore di $2a$, y è possibile.

Non è necessario di dare valori negativi ad x in questo esempio, poichè la curva è simmetrica rispetto all'asse delle y.

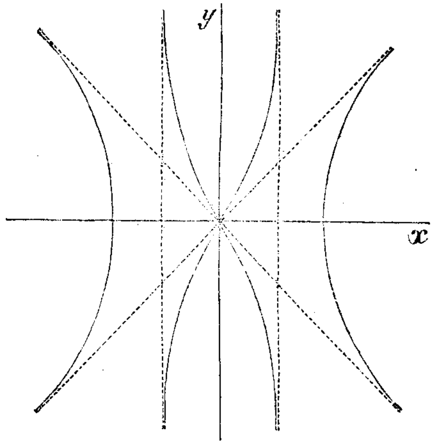
Se tiriamo gli asintoti e facciamo uso della precedente lista di valori particolari di y e $\frac{dy}{dx}$, avremo sufficienti materiali per stabilire la forma generale della curva. Se è necessario, in ogni esempio, possiamo trovare $\frac{d^2y}{dx^2}$, per determinare i punti d'inflessione; inoltre esaminando quando $\frac{dy}{dx}$ svanisce, possiamo determinare i valori massimi e minimi di y.

Se prendiamo il segno superiore nell'equazione (3), abbiamo per l'asintoto

$$y = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

e per la curva $$y = x - \frac{3a^2}{2x} \text{ etc} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Quando x è molto grande i termini racchiusi nell'etc. dell'equazione (5) saranno molto piccoli rispetto a $\frac{3a^2}{2x}$. Quindi paragonando (4) e (5) vediamo che corrispondendo alla stessa ascissa l'ordinata della curva è *minore* di quella dell'asintoto, e quindi la curva giace *al di sotto* dell'asintoto come è rappresentata nella figura.



341. Es. (2). Si supponga

$$y^2 = \frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a} \dots\dots\dots\dots (1);$$

onde
$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-2a} - \frac{1}{x+3a},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}\right\}}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-2a} - \frac{1}{x+3a}\right\} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Inoltre da (1) abbiamo

$$y = \pm x\left(1 - \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{3a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{a}{2x} - \frac{a^2}{8x^2}\dots\right)\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2}\dots\right)\left(1 - \frac{3a}{2x} + \frac{27a^2}{8x^2}\dots\right).$$

Se le tre serie si moltiplicano insieme abbiamo

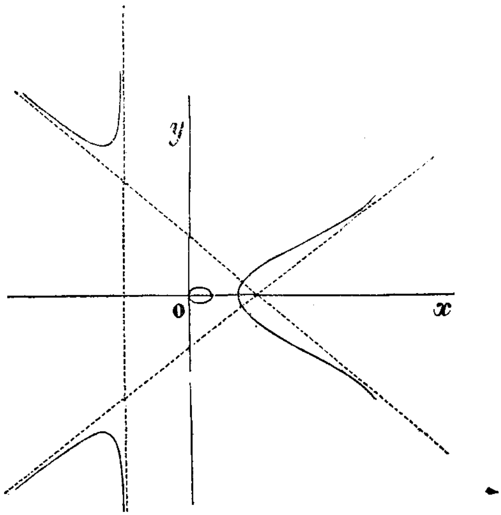
$$y = \pm x\left(1 - \frac{3a}{x} + \frac{11a^2}{2x^2}\dots\right)$$

$$= \pm \left(x - 3a + \frac{11a^2}{2x}\dots\right) \dots\dots\dots (3).$$

Quindi $$y = x - 3a$$
ed $$y = -x + 3a$$
sono asintoti.

Inoltre $$x = -3a$$
è un asintoto.

Da (1) e (2) abbiamo i risultati seguenti, limitandoci ai valori positivi di y.



Quando $x = 0$, $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \infty$.

Da $x = 0$ ad $x = a$, y è possibile.

Quando $x = a$, $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \infty$.

Da $x = a$ ad $x = 2a$, y è impossibile.

Quando $\qquad x = 2a, \qquad y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \infty$.

Quando x è maggiore di $2a$, y è possibile.

Quando x è negativa e tra 0 e $-3a$, y è impossibile.

Quando $\qquad x = -3a, \quad y = \infty, \qquad \frac{dy}{dx} = \infty$.

Quando x giace tra $-3a$ e $-\infty$, y è possibile.

Da (3) vediamo che l'equazione della curva quando x è molto grande è approssimativamente

$$y = x - 3a + \frac{11a^2}{2x};$$

e sia x positiva sia negativa $x - 3a + \frac{11a^2}{2x}$ è numericamente maggiore di $x - 3a$. Quindi la curva giace al di *sopra* dell'asintoto.

342. Negli esempii precedenti il valore di y è dato esplicitamente in termini di x. In modo simile possiamo procedere se x è dato esplicitamente in termini di y. Ma se l'equazione che lega x ed y non ammette facile risoluzione dobbiamo abbandonare questo metodo. In tali casi possiamo trovare gli asintoti con l'Art. 277: possiamo determinare la natura della curva vicino all'origine col metodo esposto nei due prossimi articoli; per mezzo di questi risultati possiamo formarci un'idea della forma della curva. Trasformando l'equazione in coordinate polari saremo abilitati alle volte a tracciarla più accuratamente.

343. Determinare la forma della curva

$$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0. \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

vicino all'origine.

Si supponga che vicino all'origine il termine by^3 possa essere trascurato in paragone degli altri due termini in (1); in questo caso avremmo

$$x^4 - ayx^2 = 0,$$

onde
$$x^2 = ay.$$

Ciò fa variare y come x^2, e quindi y^3 varia come x^6. Quindi il termine trascurato by^3 varia come x^6, mentre i termini ritenuti, x^4 ed ayx^2, variano come x^4. Ma prendendo x sufficientemente piccolo x^6 può rendersi tanto piccolo quanto ci piace paragonato con x^4, e quindi vicino all'origine un ramo della curva si può trovare approssimativamente trascurando by^3. Il ramo che così si ottiene, essendo determinato dall'equazione $x^2 = ay$, è una porzione di parabola che ha il suo asse coincidente con quello delle y.

In secondo luogo, supponiamo che vicino all'origine il termine ayx^2 possa essere trascurato in paragone degli altri. Così troviamo

$$x^4 + by^3 = 0;$$

onde y varia come $x^{\frac{4}{3}}$.

Quindi il termine trascurato ayx^2 varierebbe come $x^{2+\frac{4}{3}}$; cioè come $x^{\frac{10}{3}}$, mentre i termini ritenuti varierebbero come x^4. Ma poichè $x^{\frac{10}{3}}$ può rendersi tanto *grande* quanto ci piace paragonato con x^4 prendendo x sufficientemente piccolo, *non* otteniamo un ramo approssimato vicino all'origine trascurando ayx^2.

Finalmente, supponiamo che x^4 possa essere trascurato vicino all'origine; allora

$$by^3 - ax^2y = 0,$$

onde

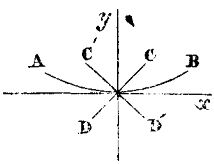
$$by^2 - ax^2 = 0.$$

Quindi y varia come x; i termini ritenuti variano come x^3 ed il termine rigettato come x^4; e così

$$by^2 - ax^2 = 0, \quad \text{o} \quad y = \pm x\sqrt{\frac{a}{b}},$$

ci darà un'approssimazione alla curva vicino all'origine.

La figura mostra la natura della curva vicino all'origine; AB è il ramo parabolico, e CD, $C'D'$, sono i due rami trovati trascurando x^4.



Le conclusioni in questo caso si possono verificare risolvendo l'equazione data rispetto ad x^2. Troviamo così

$$x^2 = \frac{y}{2}\{a \pm \sqrt{(a^2 - 4by)}\}.$$

Si sviluppi $\sqrt{(a^2 - 4by)}$ secondo le potenze di y col teorema binomiale, e si prenda il segno superiore, allora

$$x^2 = ay \text{ approssimativamente;}$$

col segno inferiore

$$x^2 = \frac{b}{a} y^2 \text{ approssimativamente.}$$

In questa maniera, o pure trasformando l'equazione in una forma polare, possiamo completare la descrizione della curva. Si troverà che i rami che si estendono dall'origine a C e B rispettivamente, si uniscono, formando così un cappio. Il ramo dall'origine a D' si estende all'infinito, e non ha asintoto rettilineo. La curva evidentemente è simmetrica rispetto all'asse delle y.

344. Determinare la natura della curva

$$y^4 + ay^2x - x^4 = 0$$

vicino all'origine.

Se trascuriamo x^4 abbiamo

$$y^4 + ay^2x = 0,$$

onde
$$y^2 = - ax.$$

Quindi x varia come y^2; il termine trascurato varia come y^8, mentre i termini ritenuti variano come y^4, onde abbiamo nella parabola $y^2 = - ax$ un'approssimazione alla curva data vicino all'origine.

In secondo luogo, rigettiamo il termine ay^2x; così

$$y^4 - x^4 = 0,$$

onde
$$y = \pm x.$$

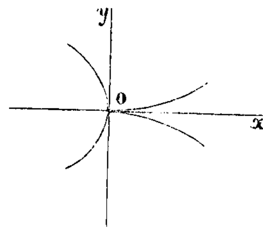
Quindi y varia come x; il termine rigettato varia come x^3, ed i termini ritenuti variano come x^4; quindi questo *non* ci dà un ramo approssimato.

Finalmente, si rigetti y^4; così

$$ay^2x - x^4 = 0,$$

onde
$$y^2 = \frac{x^3}{a}.$$

Quindi y^2 varia come x^3; il termine rigettato varia come x^6, ed i termini ritenuti variano come x^4, e per conseguenza otteniamo un ramo approssimato.



Il ramo a sinistra dell'asse delle y è quello dato da $y^2 = -ax$, e la cuspide a dritta dell'asse delle y è quella data da $y^2 = \frac{x^3}{a}$. In questo esempio, si può trovare y^2 in termini di x e tracciare l'intera curva.

345. Possiamo osservare che negli esempii degli articoli precedenti, la supposizione che si trovò inammissibile vicino all'origine, sarà ammissibile per punti ad una distanza molto grande dall'origine. Così se

$$y^4 + ay^2x - x^4 = 0,$$

quando x ed y sono indefinitamente grandi, ay^2x può essere trascurato in paragone di y^4 ed x^4; ed $y^4 = x^4$, o $y = \pm x$, sarà un' approssimazione nei punti lontani dall' origine. Se troviamo gli asintoti con l'Art. 277, avremo

$$y = \pm\left(x - \frac{a}{4}\right);$$

cui
$$y = \pm x$$

si può considerare un'approssimazione quando x ed y sono indefinitamente grandi.

346. Si cerchi la natura della curva

$$y^4 + xy^3 + ax^2y - bx^3 = 0$$

vicino all' origine.

Supponiamo
$$ax^2y - bx^3 = 0$$

come un'approssimazione vicino all'origine. Quindi

$$ay = bx,$$

onde $\qquad y$ varia come x,

i termini ritenuti variano come x^3, e quelli rigettati variano come x^4, ed abbiamo perciò un'approssimazione alla curva nell'origine. Se esaminiamo tutt'i sei casi che si presentano ritenendo due dei termini della data equazione e rigettando gli altri due, troveremo che la sola altra ammissibile supposizione è, che xy^3 e bx^3 possono essere rigettati, ed

$$y^4 + ax^2y = 0,$$

o
$$y^3 = -ax^2$$

ci dà un ramo approssimato. Sarà facile di tracciare i rami che abbiamo trovato; l'equazione $y^3 = -ax^2$ ci dà una cuspide, i due rami essendo dai due lati della parte negativa dell'asse delle y.

347. Se in alcuni esempii vogliamo solamente trovare le *direzioni delle tangenti nell'origine*, possiamo pervenire ad esse immediatamente, come si è mostrato nell'Art. 195.

Si supponga $\qquad y^4 + xy^3 + ax^2y - bx^3 = 0,$

onde
$$(y + x)\left(\frac{y}{x}\right)^3 + a\frac{y}{x} - b = 0.$$

Quindi, quando x ed y svaniscono, abbiamo

$$\text{Limite di } \frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Oltre a ciò, il limite di $\frac{y}{x}$ *può* avere un valore infinito, e questo può essere determinato esaminando se $\frac{x}{y}$ ha zero per limite. L'equazione data può essere messa sotto la forma

$$y + x + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left\{a - b\frac{x}{y}\right\} = 0.$$

Quindi uno dei valori limiti di $\frac{x}{y}$ è zero.

In simil modo, se

$$y^4 + ay^2x - x^4 = 0,$$

abbiamo
$$y\left(\frac{y}{x}\right)^3 + a\left(\frac{y}{x}\right)^2 - x = 0.$$

Quindi $\frac{y}{x}$ ha zero per uno dei suoi valori limiti. Inoltre dall'equazione data possiamo dedurre

$$y + a\frac{x}{y} - x\left(\frac{x}{y}\right)^3 = 0.$$

Quindi $\frac{x}{y}$ ha zero per uno dei suoi valori limiti. Così $\frac{y}{x}$ può essere zero o infinito quando x ed y diminuiscono indefinitamente, e quindi gli assi delle x e delle y sono tangenti ai rami per l'origine.

348. Daremo ora alcuni esempii di curve polari.

Si supponga
$$r = a \sec\frac{\theta}{3},$$

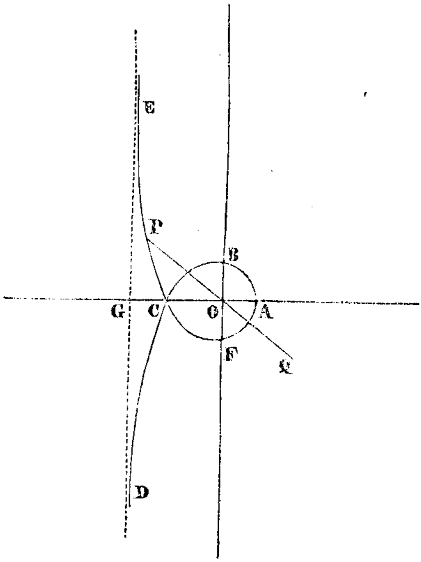
onde
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{3}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}}{\cos^2\frac{\theta}{3}},$$

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} = 3\cot\frac{\theta}{3}. \quad \text{(Art. 279)}.$$

$$\text{La sottangente polare} = r^2\frac{d\theta}{dr} = 3a\operatorname{cosec}\frac{\theta}{3}.$$

Quando $\frac{\theta}{3} = \frac{\pi}{2}$, r è infinito, e la sottangente polare $= 3a$; quindi abbiamo un asintoto. Quando θ cresce da 0 a $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{dr}{d\theta}$ è positivo, ed r è positivo e cresce con θ. Quando θ cresce da $\frac{3\pi}{2}$ a 3π, r è negativo, e $\frac{dr}{d\theta}$ è positivo sicchè r diminuisce numericamente.

Per condurre l'asintoto procediamo così: poichè, quando



$\theta = \frac{3\pi}{2}$, r è infinito, e la sottangente polare è $3a$, l'occhio deve essere supposto in O guardando lungo OF, ed una distanza $OG = 3a$ deve essere misurata a dritta di OF e perpendicolare ad essa; una retta condotta per G parallela ad OF è l'asintoto richiesto.

Quando θ varia da 0 a $\frac{3\pi}{2}$ si descrive il ramo $ABCD$, che taglia OA ad angoli retti in A poichè $\tan\varphi = \infty$ quando $\theta = 0$. Quando θ diviene maggiore di $\frac{3\pi}{2}$, r è negativo, e secondo l'ordinaria convenzione rispetto ai segni, deve essere misurato in una direzione *opposta* a quella che avrebbe se fosse positivo. Per esempio, se l'angolo AOQ misurato nell'ordinaria via in giro da OA è $\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ il corrispondente valore di r è

$$\frac{a}{\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \text{ o } -\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}} \text{ o } -a\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1);$$

quindi prendiamo $OP=a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ misurandola lungo QO prolungata. In questo modo, quando θ varia da $\frac{3\pi}{2}$ a 3π, otteniamo la porzione $ECFA$ della curva.

Se supponiamo θ negativo, o positivo e maggiore di 3π, otterremo solamente ripetizioni di rami già trovati.

349. Un errore molto comune nel descrivere le curve polari si commette rispetto agli asintoti. Per esempio, se r è infinito quando $\theta=0$, si ritiene che la linea iniziale è un asintoto. Ciò contiene un doppio errore, poichè in primo luogo da che r è infinito non segue che vi *è* un asintoto; ed in secondo luogo, se vi è un asintoto esso può essere *parallelo* alla linea iniziale invece di coincidere con essa.

Per esempio, l'equazione polare della parabola dal vertice è

$$r=\frac{4a\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Quì quando $\theta=0$, r è ∞, ma la curva non ha asintoto. Nella curva

$$r=\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}},$$

quando $\theta=0$, r è infinito; vi è un asintoto, ma non coincide con la linea iniziale; si troverà che è parallelo ad essa e ad una distanza $3a$.

350. Descrivere la curva

$$r=\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$$

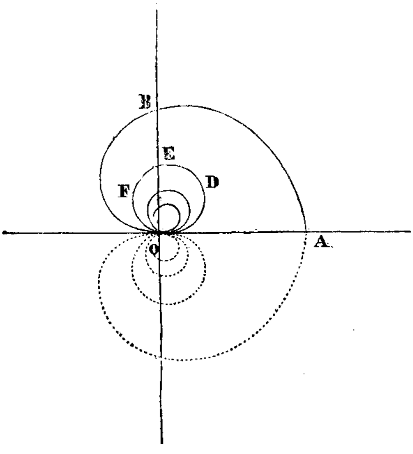
Quì
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a(\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{\theta^2},$$

$$\tan\varphi = \frac{\theta\operatorname{sen}\theta}{\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}.$$

Siccome r non è mai infinito non vi è asintoto; r è positivo da $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, negativo da $\theta = \pi$ a $\theta = 2\pi$, e così di seguito.

Quando $\theta = 0$, $\tan\varphi$ prende la forma $\frac{0}{0}$; esaminandola si troverà infinita.

La curva incomincia da A, attraversando la linea iniziale

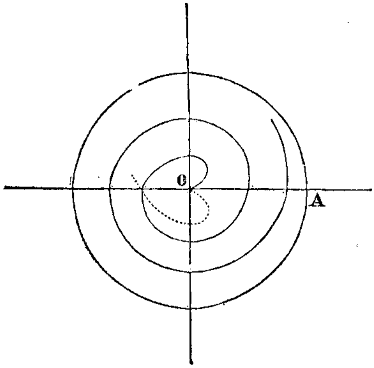


ad angoli retti, poichè ivi $\tan\varphi$ è infinita: quando θ varia da 0 a π si descrive la porzione ABO; quando θ varia da π a 2π si descrive la porzione $ODEFO$, e così di seguito. La curva forma un numero infinito di cappî, ciascuno minore del precedente e tutti che passano per O.

Se attribuiamo valori negativi a θ otteniamo la parte punteggiata posta *al di sotto* della linea OA.

351. Descrivere la curva
$$r = \frac{a\theta^2}{1 + \theta^2}.$$

In questo caso la curva incomincia dal polo O e fa un in-



finito numero di rivoluzioni intorno ad esso; r non può mai divenire grande quanto a, al qual valore però esso si avvicina continuamente. Quindi $r = a$ è l'equazione di *un circolo asintotico*, al quale la curva si avvicina continuamente quando θ cresce senza limite.

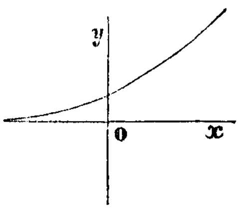
Se diamo a θ valori negativi, abbiamo un ramo simile a quello ottenuto per i valori positivi di θ. Esso è rappresentato nella figura dalla porzione punteggiata.

352. Daremo ora le equazioni e le figure di alcune poche curve che si presentano frequentemente nei problemi.

La Curva Logaritmica.

L'equazione di questa curva è

$$y = be^{\frac{x}{c}};$$



o, ciò che è una forma equivalente,

$$y = ba^x.$$

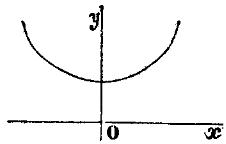
La curva si estende all'infinito secondo le due direzioni la positiva e la negativa dell'asse delle x. Quando

x cresce numericamente nella direzione negativa, y tende al limite zero, sicchè l'asse delle x è un asintoto.

353. *La Catenaria.*

L'equazione di questa curva è

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$



Questa è la curva secondo la quale si disporrebbe una catena flessibile quando fosse sospesa a due punti, come si mostra nelle opere sulla Statica.

354. *La Spirale Logaritmica.*

L'equazione di questa curva è

$$r = be^{\frac{\theta}{c}},$$

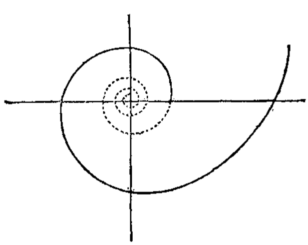
o

$$r = ba^{\theta}.$$

Prendendo la prima forma abbiamo

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} = c.$$

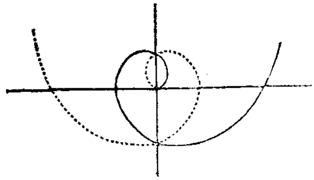
Poichè così φ è costante la curva si chiama anche la *spirale equiangola.*



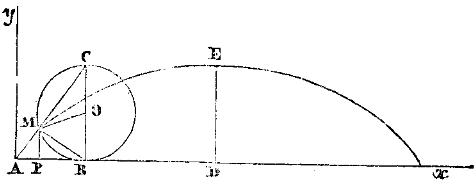
La parte punteggiata nasce dai valori negativi di θ.

355. *La Spirale di Archimede.*

$$r = a\theta.$$



356. *La Cicloide.*



La cicloide è descritta da un punto sulla circonferenza di un circolo quando il circolo *rotola* lungo una linea retta.

Sia Ax la retta lungo la quale rotola il circolo;

M il punto fisso nel circolo BMC che descrive la cicloide;

A il punto della linea Ax col quale M era primitivamente in contatto;

O il centro del circolo:

$$AP = x, \quad MP = y, \quad MOB = \varphi, \quad OB = a.$$

L'arco $MB = a\varphi$, e per la natura della curva esso è eguale ad AB;

onde $$x = a\varphi - PB = a\varphi - a \operatorname{sen}\varphi,$$

$$y = a - a\cos\varphi.$$

Se eliminiamo φ abbiamo

$$x = a\cos^{-1}\frac{a-y}{a} - \sqrt{(2ay - y^2)}.$$

357. Dall'ultima equazione abbiamo

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\left(\frac{y}{2a-y}\right)}.$$

Quindi l'equazione della tangente in M è

$$y' - y = \sqrt{\left(\frac{2a-y}{y}\right)}\,(x'-x),$$

e della normale

$$y' - y = -\sqrt{\left(\frac{y}{2a-y}\right)}\,(x'-x).$$

Se nell'ultima equazione poniamo $y'=0$, abbiamo

$$x' - x = \sqrt{\{y\,(2a-y)\}} = a \operatorname{sen}\varphi = PB.$$

Quindi MB è la direzione della normale in M, e per conseguenza MC è la direzione della tangente in M.

Se nelle equazioni dell'Art. 356 si pone $\varphi = \pi$, abbiamo $y = 2a$ ed $x = a\pi$ per le coordinate del vertice E. Quindi

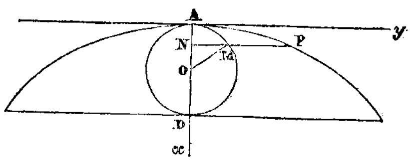
$$\begin{aligned} PD &= a\pi - a\varphi + a \operatorname{sen}\varphi \\ &= a\,(\theta + \operatorname{sen}\theta), \qquad \text{se } \theta = \pi - \varphi. \end{aligned}$$

Inoltre la distanza di M da una linea condotta per E parallela ad Ax è

$$2a - a\,(1-\cos\varphi) \quad \text{o} \quad a\,(1-\cos\theta).$$

358. Se prendiamo il vertice come origine, e la tangente in quel punto per asse delle y, abbiamo per l'ultimo articolo

$$\left.\begin{aligned} y &= PN = a\,(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ x &= AN = a\,(1-\cos\theta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$



Si descriva un semicircolo sopra AD come diametro: incontri PN questo circolo in M, e si congiunga M col centro O; allora

$$AN = a\,(1 - \cos AOM);$$

onde $$AOM = \theta.$$

Poichè l'arco $AM = a\theta$, segue che

$$MP = \text{arc}\, AM.$$

Da (1) abbiamo

$$y = a\cos^{-1}\frac{a-x}{a} + \sqrt{(2ax - x^2)} \, \ldots\ldots\ldots \, (2),$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}.$$

Se s dinota l'arco AP, abbiamo

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)},$$

onde

$$s = \sqrt{(8ax)},$$

come si vedrà nel Calcolo Integrale.

La normale alla curva in D è parallela ad MD, come possiamo vedere per l'Art. 357 o con una indipendente investigazione.

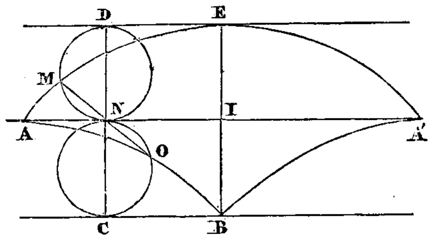
Per la proprietà del circolo segue che

$$MD = 2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

Se cerchiamo il valore del raggio di curvatura in P lo troveremo essere due volte MD, cioè,

$$4a\cos\frac{\theta}{2}, \quad \text{o} \quad 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)}.$$

359. *L'evoluta della cicloide è una cicloide eguale.*



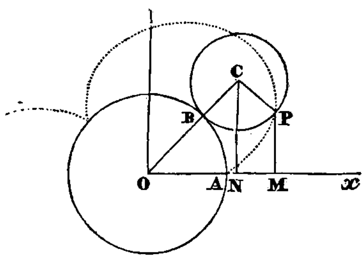
Infatti apparisce dall'Art. 358 che il raggio di curvatura in un punto M di una cicloide è due volte MN. Quindi se prolunghiamo MN in O, facendo $NO = MN$, O è il centro di curvatura corrispondente al punto M. Si tiri EIB e si faccia $IB = 2a$; si tiri BC parallela ad ED; il circolo descritto sopra NC come diametro passerà per O.

L'arco $NO =$ all'arco MN e quindi $= AN$,

onde $$\text{arc } OC = NI = CB.$$

Quindi O è un punto di una cicloide generata dal rotolare di un circolo di raggio a lungo BC. Quindi l'evoluta della cicloide AEA' è composta delle due semicicloidi AB ed $A'B$.

360. L'epicicloide è la curva descritta da un punto sulla circonferenza di un cerchio che rotola sulla *parte esterna* di un circolo fisso.



Siano O e C rispettivamente i centri del cerchio fisso e del cerchio che rotola, B il punto di contatto, P il punto descrivente, A la sua posizione iniziale. Si prenda OA per asse delle x; si tirino CN, PM, perpendicolari all'asse delle x. Sia

$$OB = a,\ BC = b,\ AOB = \theta,\ BCP = \varphi.$$

Allora
$$\begin{aligned} x &= ON + NM \\ &= (a+b)\cos\theta + b \operatorname{sen}(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi + \theta) \\ &= (a+b)\cos\theta - b\cos(\varphi + \theta). \end{aligned}$$

Ma l'arco $AB =$ all'arco BP, pel modo di generazione, cioè, $a\theta = b\varphi$, onde

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta.$$

Similmente

$$y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta.$$

L'ipocicloide è la curva descritta da un punto sulla circonferenza di un circolo che rotola nella *parte interna* di un cerchio fisso.

Può trovarsi con un metodo simile al precedente che per l'ipocicloide

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos \frac{a - b}{b} \theta,$$

$$y = (a + b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen} \frac{a - b}{b} \theta.$$

361. Il raggio del circolo che rotola può essere maggiore o minore del raggio del circolo fisso sì nell'epicicloide che nell'ipocicloide; è facile però ricavare dalla figura che una ipocicloide nella quale il raggio del circolo che rotola è maggiore di quello del circolo fisso si può ritenere come una epicicloide. Infatti nelle equazioni per l'ipocicloide si ponga $\frac{b - a}{b} \theta = \varphi$; allora quelle equazioni si possono scrivere

$$x = (a + b - a) \cos \varphi - (b - a) \cos \frac{a + b - a}{b - a} \varphi,$$

$$y = (a + b - a) \operatorname{sen} \varphi - (b - a) \operatorname{sen} \frac{a + b - a}{b - a} \varphi;$$

queste sono le equazioni per un'epicicloide nella quale il raggio del circolo fisso è a, ed il raggio del circolo che rotola è $b - a$.

Similmente possiamo mostrare che un'ipocicloide nella quale il raggio del circolo che rotola è *maggiore* della metà del raggio del circolo fisso si può considerare come un'ipocicloide nella quale il raggio del circolo che rotola è *minore* della metà del raggio del circolo fisso. Quindi possiamo ottenere *tutte* le epicicloidi ed ipocicloidi se in aggiunta alle epicicloidi prendiamo le ipocicloidi nelle quali il raggio del circolo che rotola è minore della metà del raggio del circolo fisso.

362. Se a e b sono nel rapporto di due numeri interi possiamo eliminare θ tra le due equazioni che determinano un'epicicloide o un'ipocicloide, e così ottenere l'equazione della curva in una forma algebrica. Per esempio, supponiamo nell'ipocicloide che $a = 4b$; allora

$$x = 3b\cos\theta + b\cos 3\theta = 4b\cos^3\theta,$$

$$y = 3b\,\mathrm{sen}\,\theta - b\,\mathrm{sen}\,3\theta = 4b\,\mathrm{sen}^3\theta;$$

onde
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Se nell' ipocicloide supponiamo $a = 2b$, si ottiene

$$x = 2b\cos\theta \text{ ed } y = 0;$$

così y è sempre zero ed x può avere un valore qualunque tra $-a$ e $+a$; quindi la curva si riduce ad un diametro del circolo fisso.

363. Se nell' Art. 360 il punto descrivente, invece di essere *sulla* circonferenza del circolo che rotola, è sopra un raggio fisso di quel circolo, ma *al di dentro*, o *al di fuori* della circonferenza, la curva generata si chiama l' epitrocoide quando il circolo che rotola si muove dalla parte esterna del circolo fisso, e l' ipotrocoide quando il circolo che rotola si muove dalla parte interna del circolo fisso. Nel primo caso abbiamo

$$x = (a + b)\cos\theta - mb\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$

$$y = (a + b)\,\mathrm{sen}\,\theta - mb\,\mathrm{sen}\frac{a+b}{b}\theta,$$

e nell' altro

$$x = (a - b)\cos\theta + mb\cos\frac{a-b}{b}\theta,$$

$$y = (a - b)\,\mathrm{sen}\,\theta - mb\,\mathrm{sen}\frac{a-b}{b}\theta,$$

mb essendo la distanza del punto descrivente dal centro del circolo che rotola.

364. Se un circolo rotola lungo una linea retta la curva descritta da un punto *sulla* circonferenza del circolo che rotola, come già si è stabilito, si chiama la cicloide. Se il punto descrivente è *al di fuori* della circonferenza la curva si chiama la cicloide *allungata*, se al di dentro, la cicloide *accorciata*; si adopera ancora la parola *trocoide* per dinotare sì la cicloide *allungata* che la cicloide *accorciata*.

Le equazioni

$$x = a(1 - m\cos\theta),$$
$$y = a(\theta + m\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

rappresenteranno una cicloide allungata, una cicloide comune, o una cicloide accorciata, secondo che m è maggiore dell' unità, eguale all' unità, o minore dell' unità. Si vegga l' Art. 358.

ESEMPII.

Descrivere le seguenti curve:

1. $y^3 = ax^2 - x^3$.

2. $y^3 = a^3 - x^3$.

3. $y^2(x - a) = (x + a)x^2$.

4. $x^2y^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

5. $y^2(x - 4a) = ax(x - 3a)$.

6. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

7. $y^2(2a - x) = x^3$. (La cissoide).

8. $x^2y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2$. (La concoide). Si trasporti l'origine al punto $(0, -b)$ e quindi si passi alle coordinate polari e si avrà l'equazione

$$r = b\,\mathrm{cosec}\,\theta \pm a.$$

9. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (La lemniscata).

10. $r = a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$.

11. $r = a(\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$.

12. $r\,\mathrm{sen}\,\theta = a\cos^2\theta$.

13. $r = \log\mathrm{sen}\,\theta$.

14. $r^2\cos\theta = a^2\,\mathrm{sen}^2\,3\theta$.

15. $r^2\cos\theta = a^2\,\mathrm{sen}^3\,\theta$.

16. $r(\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = a(\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$.

17. $r = a(1 - \cos\theta)$. (La cardioide).

18. $r\theta = a$. (La spirale iperbolica).

19. Trovare le equazioni della tangente e della normale nel punto P dell'epicicloide. Si vegga la Fig. dell' Art. 360. Mostrare che la normale in P passa per B.

20. Descrivere la curva determinata dalle equazioni

$$x = a(1 - \cos\varphi), \quad y = a\varphi;$$

questa curva si chiama *la compagna della cicloide.*

21. Ottenere in una forma algebrica l'equazione dell'epicicloide per la quale $a = 2b$.

Risultato. $4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27a^4y^2$.

22. Mostrare che quando $a = b$ l'epicicloide diviene la cardioide.

23. Descrivere la curva che ha per equazione $r = a \cos\frac{\theta}{3}$; e mostrare che se A è il punto in cui la curva incontra il primo raggio prolungato indietro e $PSQR$ una corda qualunque condotta pel polo S e che incontra la curva in P, Q, ed R, gli angoli PAQ e QAR sono ciascuno di 60^o, e l'angolo ASQ è eguale a tre volte l'angolo APS.

24. Mostrare che le equazioni

$$r = a - a \tan\theta \quad \text{e} \quad 2a = r - r \tan\theta$$

rappresentano la stessa curva in differenti posizioni, e che i raggi vettori ai punti d'intersezione bisegano gli angoli tra le tangenti in quei punti.

25. Descrivere la curva $\frac{y}{c} = \operatorname{sen}\frac{x}{a} \log\left(m \operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)$, (1) quando m è maggiore dell'unità, (2) quando m è eguale all'unità, (3) quando m è minore dell'unità e maggiore del valore reciproco della base dei logaritmi Neperiani, (4) quando m è minore del valore reciproco della base dei logaritmi Neperiani.

CAPITOLO XXVII.

SUI DIFFERENZIALI.

365. Nelle pagine precedenti abbiamo dato le proposizioni che si trovano ordinariamente nei trattati sul Calcolo Differenziale, ed abbiamo adoperato il metodo dei limiti in tutte le dimostrazioni. Offriamo ora alcune poche osservazioni sopra un altro metodo di trattare il soggetto.

Nello sviluppo di $f(x+h)$ col Teorema di Taylor, il coefficiente di h si mostrò essere quella funzione di x che avevamo chiamato il coefficiente differenziale di $f(x)$ rispetto ad x. Lagrange propose di *definire* il coefficiente differenziale di $f(x)$ rispetto ad x *come il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$*, e così di evitare ogni ricorso alla teoria dei limiti. Le vedute di Lagrange furono proposte verso la fine del secolo scorso e furono generalmente adottate dagli scrittori elementari.

Un'obiezione a questo metodo è il suo uso delle serie infinite senza assicurare che queste serie siano *convengenti*, e la dimostrazione che $f(x+h)$ possa sempre svilupparsi in una serie secondo le potenze ascendenti di h, che si prende per fondamento del Calcolo Differenziale, ha serii difetti. Un'altra obiezione si è l'impossibilità di evitare d'introdurre la nozione di un limite nelle applicazioni del soggetto alla geometria ed alla meccanica; la definizione della linea tangente di una curva può essere data come un esempio.

366. Quasi tutti i recenti trattati sul Calcolo Differenziale hanno seguito il metodo dei limiti, ed il solo punto d'importanza nel quale vi sia una differenza tra essi è rispetto all'uso dei *differenziali*. In questa opera $\frac{dy}{dx}$ è stato definito

come *un* simbolo, così; se $y = \varphi(x)$ *il limite di* $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ *quando h diminuisce indefinitamente è dinotato da* $\frac{dy}{dx}$. Alcuni scrittori aggiungono le seguenti parole: *le quantità dx e dy si chiamano i differenziali di x ed y rispettivamente; i loro valori assoluti sono indeterminati, ed essi possono essere o finiti o indefinitamente piccoli purchè le loro grandezze relative siano tali che* $\frac{dy}{dx}$ *sia eguale al limite sopra menzionato.*

Con questo significato assegnato a dy e dx possono incontrarsi equazioni come

$$dy = \varphi'(x)\,dx,$$

in cui $\varphi'(x)$ è il coefficiente differenziale di $\varphi(x)$ o y.

Le equazioni espresse per mezzo dei differenziali sono in generale capaci di immediata traduzione nel linguaggio dei coefficienti differenziali. Per esempio, se x ed y sono le coordinate di un punto di una curva e sono funzioni di una terza variabile t, e se s dinota il corrispondente arco della curva a cominciare da un punto fisso, abbiamo, per l'Art. 307,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

e con la differenziazione

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Uno scrittore che adoperi i *differenziali* esprimerà questi risultati così,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

$$dxd^2x + dyd^2y = dsd^2s.$$

Lo studente può considerare queste ultime come semplicemente modi abbreviati di scrivere le precedenti equazioni, e può prendere dx, dy, d^2x,... come messi in luogo di

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \text{ rispettivamente.}$$

367. Sia u una funzione di un numero qualunque di variabili, per esempio tre, sicchè $u = \varphi(x, y, z)$. Se supponiamo

x, y, z, tutte funzioni di una variabile t, e per brevità poniamo

$$\frac{du}{dt} = Du, \quad \frac{dx}{dt} = Dx, \quad \frac{dy}{dt} = Dy, \quad \frac{dz}{dt} = Dz,$$

abbiamo

$$Du = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) Dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) Dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) Dz \ldots\ldots (1).$$

Nelle opere sul Calcolo Differenziale, che adoperano i *differenziali*, troviamo un'equazione simile alla precedente che si presenta in un periodo anteriore, cioè,

$$du = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dz \ldots\ldots\ldots (2).$$

L'introduzione e l'uso di questa equazione forma la principale differenza tra tali opere ed una che, come la presente, adopera solamente *coefficienti differenziali*. Per stabilire (2) si adotta il metodo seguente.

Sia $$u = \varphi(x, y, z),$$
ed $$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z),$$
onde

$$\begin{aligned} \Delta u &= \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z) \\ &= \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x \\ &+ \frac{\varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y \\ &+ \frac{\varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z \ldots\ldots\ldots\ldots (3). \end{aligned}$$

Se Δx, Δy, e Δz, diminuiscono senza limite, la quantità

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x}$$

si avvicina al limite $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$. Se quindi poniamo per questa quantità $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \alpha$, sappiamo che α diminuisce senza limite quando Δx, Δy, e Δz, diminuiscono del pari. In questo modo possiamo dedurre da (3) l'equazione

$$\Delta u = \left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\alpha\right\}\Delta x + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\beta\right\}\Delta y + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)+\gamma\right\}\Delta z \ldots\ldots (4),$$

in cui α, β, γ, diminuiscono tutte senza limite al pari di Δx, Δy, Δz. Quindi se du, dx, dy, e dz, dinotano quantità le di cui grandezze assolute sono indeterminate, ma di cui le grandezze *relative* sono quelle alle quali Δu, Δx, Δy, e Δz, si avvicinano rispettivamente come loro limiti quando esse diminuiscono indefinitamente, abbiamo

$$du = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dz.$$

Avendo così dimostrato (2), diamo un esempio della sua applicazione. Poichè nello stabilire (2) non avevamo alcuna occasione da considerare se x, y, e z, erano indipendenti o no, il risultato è vero generalmente, qualunque relazione sia data o supposta tra le variabili. Se, per esempio, $\varphi(x, y, z)$ è sempre $= 0$, abbiamo

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Ora se $\varphi(x, y, z) = 0$ è la sola equazione che lega x, y, e z, possiamo se ci piace variare x e z senza mutare y. Quindi nella investigazione precedente $\Delta y = 0$ da per tutto, e quindi in (5) $dy = 0$; così abbiamo

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Quindi
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)},$$

in cui $\frac{dz}{dx}$ è il coefficiente differenziale di z, supponendo variare x ed y essere costante. Si vegga l'Art. 188.

368. Si occuperebbe troppo spazio se procedessimo innanzi sul soggetto dei differenziali. I coefficienti differenziali sono

stati adoperati esclusivamente nella presente opera, per la convinzione che il soggetto è così presentato nella forma più chiara, e che se alcune delle operazioni sono così rese alquanto più lunghe di quel che sarebbero altrimenti, vi è nell'istesso tempo molto minore facilità di errare. L'equazione (2) è certamente di grande uso nelle applicazioni del Calcolo Differenziale, particolarmente nelle parti superiori della Geometria a Tre Dimensioni: dopo le osservazioni già fatte, lo studente probabilmente incontrerà poca difficoltà in quelle applicazioni. Forse egli potrà essere assistito ulteriormente riferendosi al teorema per lo sviluppo di una funzione di tre variabili. Se $u = \varphi(x, y, z)$, abbiamo

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z) \text{ o } \Delta u$$
$$= h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz} + R,$$

in cui R racchiude i quadrati ed i prodotti di h, k, l. Quindi quanto più piccoli si prendono h, k, l, tanto più piccolo è l'errore contenuto nell'asserzione

$$\Delta u = h\frac{du}{dx} + k\frac{du}{dy} + l\frac{du}{dz}.$$

ESEMPII DIVERSI.

1. Dato $u = \text{sen}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{(x - x^2)}$,

$$v = \cos^{-1}(x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}) - (x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},$$

trovare $\frac{du}{dv}$.

2. Trovare i valori massimi e minimi di $(\text{sen}\, x)^{\text{sen}\, x}$.

3. Trovare l'area del più grande triangolo isoscele che si può iscrivere in una data ellisse, il triangolo avendo il suo vertice coincidente con una estremità dell'asse maggiore.

4. $APP'B$ è un semicerchio il di cui diametro è AB, e PP' è parallela ad AB. Si tirino AP' e BP, che s'incontrino in Q; trovare la posizione di P e P' in modo che il triangolo PQP' sia un massimo.

5. Una figura formata di un rettangolo e di un triangolo isoscele è iscritta in un semicerchio; determinare le sue dimensioni affinchè la sua area sia un massimo.

6. Trovare il cono di minima superficie, esclusa la base, che può circondare una data sfera.

Risultato. Il seno del semi-angolo al vertice $= \sqrt{2} - 1$.

7. Trovare il cono di minima superficie, inclusa la base, che può circondare una data sfera.

Risultato. Il seno del semiangolo al vertice $= \frac{1}{3}$.

8. Trovare il valore massimo di $\cos\theta \cos\varphi \cos\psi$, in cui $\theta + \varphi + \psi = \pi$.

9. Trasformare $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$, prendendo

$$x' = l_1 x + m_1 y,$$
$$y' = l_2 x + m_2 y.$$

10. Un'equazione fra tre variabili contiene n funzioni arbitrarie di una di esse, e $4n^2 - n - 1$ costanti arbitrarie; mostrare che l'equazione generalmente deve essere differenziata almeno $4n - 2$ volte affinchè le funzioni e le costanti possano essere eliminate.

11. Se V è una funzione qualunque di x, y, z, e V' il valore di V quando si sostituisce vw per x, wu per y, ed uv per z; allora

$$x^2 \frac{d^2V}{dx^2} + y^2 \frac{d^2V}{dy^2} + z^2 \frac{d^2V}{dz^2} + yz \frac{d^2V}{dy\,dz} + zx \frac{d^2V}{dz\,dx} + xy \frac{d^2V}{dx\,dy}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ u^2 \frac{d^2V'}{du^2} + v^2 \frac{d^2V'}{dv^2} + w^2 \frac{d^2V'}{dw^2} \right\}.$$

12. Se $y = e^{zx} + e^{-zx}$, e $z + xe^{-2zx} = 0$, dimostrare che il termine generale di y quando si sviluppa in serie è

$$\frac{x^{2n}}{\underline{|n}} \{ (2n+1)^{n-1} - (2n-1)^{n-1} \}.$$

13. Se $y = x + \alpha\psi(y) + \beta\varphi(y) + \ldots\ldots$, allora

$$F(y) = F(x) + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [F'(x) \{ \alpha\psi(x) + \beta\varphi(x) + \ldots \}^n] + \ldots$$

14. Se $y=z+x\varphi(y)$, ed $y'=z'+x'\psi(y')$, z e z' essendo variabili indipendenti, mostrare che il termine generale nello sviluppo di $f(y, y')$ secondo le potenze ed i prodotti di x ed x' è

$$\frac{d^{m+n-2}}{dz^{m-1}\,dz'^{n-1}}\left\{\overline{\varphi(z)}\,\rceil^m\,\overline{\psi(z')}\,\rceil^n\,\frac{d^2 f(z, z')}{dz\,dz'}\right\}\frac{x^m}{\lfloor m}\cdot\frac{x'^n}{\lfloor n}.$$

Trovare il coefficiente di x^2x' nello sviluppo di $\cos(\alpha y+\alpha' y')$, quando $y=z+x\,\mathrm{sen}\,y$, ed $y'=z'+x'\,\mathrm{sen}\,y'$.

15. In ogni curva la parte della tangente tra il punto di contatto e la perpendicolare dall'origine sulla tangente è eguale ad $\dfrac{r\,dr}{ds}$.

16. Mostrare che l'equazione della normale in ogni punto di una curva può essere messa sotto la forma

$$\frac{x'-x}{\dfrac{d^2x}{ds^2}}=\frac{y'-y}{\dfrac{d^2y}{ds^2}}.$$

Mostrare che questa equazione è l'espressione analitica del fatto, che se si tira una tangente ad una curva in un punto P, e nella tangente si prende PT eguale all'arco PQ e dalla stessa parte di P, allora la linea QT è ultimamente perpendicolare alla tangente.

17. Nell'ellisse la distanza focale sega la curva secondo un angolo, di cui la tangente è media proporzionale tra le tangenti degli angoli secondo i quali il diametro corrispondente e la parallela all'asse trasverso condotta pel punto segano la curva.

18. Se una curva è riferita ad assi inclinati tra loro sotto un angolo α, dimostrare che il raggio di curvatura è

$$\frac{\left\{1+2\cos\alpha\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\,\mathrm{sen}\,\alpha\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

19. L'equazione di una parabola riferita a due tangenti qualunque essendo $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$, mostrare che il raggio di curvatura è $\frac{2}{ab \operatorname{sen} \alpha} \{ax - 2\cos\alpha \sqrt{(abxy)} + by\}^{\frac{3}{2}}$, in cui α è l'inclinazione delle tangenti; e quindi trovare le coordinate del vertice ammettendo che la curvatura è un massimo in quel punto.

20. Se una curva passa per l'origine e tocca l'asse delle y, il diametro del circolo di curvatura è eguale al limite di $\frac{y^2}{x}$; se essa tocca l'asse delle x il diametro è eguale al limite di $\frac{x^2}{y}$.

21. Se una curva passa per l'origine con un'inclinazione α all'asse delle x, mostrare che il diametro di curvatura nell'origine è il limite di $\frac{x^2 + y^2}{x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha}$. Quindi, mostrare che il raggio di curvatura nell'origine per la curva

$$y^2 + 2ay - 2ax = 0 \text{ è } 2\sqrt{2}a.$$

22. Se φ è l'angolo tra la tangente ed il raggio vettore di una curva polare, dimostrare che il raggio di curvatura è $\frac{r \operatorname{cosec} \varphi}{1 + \frac{d\varphi}{d\theta}}$.

23. Le equazioni di un'epicicloide essendo

$$x = a\,(2 \cos \theta - \cos 2\theta),$$
$$y = a\,(2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta),$$

trovare ρ, e mostrare che l'evoluta è un'epicicloide nella quale il raggio di ciascun circolo è $\frac{a}{3}$.

24. Nella curva $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$, trovare la natura della curva nei punti $x = 3, -1$, e $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

25. Mostrare che la curva $y = e^{-x^2}$ ha punti d'inflessione quando $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

26. In ogni curva l'equazione $\frac{d\varphi}{d\theta} + 1 = 0$ ha luogo in un punto d'inflessione, θ e φ essendo gli angoli che il primo raggio e la tangente fanno rispettivamente col raggio vettore.

27. È $\frac{dr}{d\theta}$ necessariamente della forma $\frac{0}{0}$ in un punto multiplo?

28. Se (α, β) è un punto della curva $\varphi(x, y) = 0$, pel quale passano n tangenti, il luogo di tutte le tangenti in quel punto è espresso da

$$\left\{ (x - \alpha) \frac{d}{d\alpha} + (y - \beta) \frac{d}{d\beta} \right\}^n \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

29. Trovare i punti singolari nelle curve

$$4(x^2 + y^2) = 1 + 3y^{\frac{2}{3}},$$

ed $$y^2 - 2xy + 2x^2 - x^3 = 0.$$

30. Trovare la natura della curva

$$y + 1 = 2x - x^2 \pm (2 - x)^{\frac{5}{2}}$$

nel punto $x = 2$.

31. Determinare il punto d'inflessione nella curva

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16.$$

32. Dal polo della curva $r = Aa^\theta$ si tirano le perpendicolari sulle tangenti; per i punti d'intersezione delle perpendicolari con le tangenti, si tirano le rette parallele ai raggi vettori; mostrare che l'equazione del luogo delle intersezioni ultime di tutte queste linee è

$$r = A \cos\alpha\, a^{\theta + \alpha},$$

in cui $$\cot\alpha = \log a.$$

33. Se i raggi vettori di una spirale equiangola sono diametri di una serie di circoli, il luogo delle intersezioni ultime dei circoli sarà una spirale simile.

34. Se un semicircolo rotola lungo una linea retta, la curva alla quale il suo diametro è sempre tangente è una cicloide.

35. Se una cicloide rotola lungo una linea retta, l'equazione della curva toccata dalla sua base è

$$\frac{x}{2a} = \left\{2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}\left\{1 - \left(\frac{y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

36. Una serie di circoli è descritta che hanno i loro centri sopra un'iperbole equilatera e passano per il suo centro, mostrare che il luogo delle loro intersezioni ultime sarà una lemniscata.

37. Esaminare la natura delle seguenti curve nell'origine:

$$y^4 + 2ay^2x + x^4 - 2ax^3 = 0,$$

$$y^4 - \frac{x^5}{a} + x^4 + 3x^2y^2 = 0,$$

$$y^4 - 4xy(ay - bx) - x^4 = 0,$$

$$y^5 + x^5 = 2a^2x^2y.$$

38. Tracciare la curva $x^2y^2 + (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 0$, e mostrare che la larghezza di ciascuna porzione chiusa è due volte tanto grande nella direzione delle y che in quella delle x. Dimostrare ancora che quando b si avvicina ad a come limite, ciascuna di queste porzioni è ultimamente simile ad un'ellisse.

39. Descrivere la curva $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = a^4$. Mostrare che quando $b = a$ essa si riduce a due ellissi.

40. Se una sezione conica di cui il fuoco è al polo di una data curva ha con la curva un contatto di secondo ordine nel punto (u, θ) l'equazione della sezione conica sarà

$$u' + \cos^2(\theta' - \theta)\,\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\frac{du}{d\theta}}{\cos(\theta' - \theta)}\right\} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

41. Una curva data rotola sopra una linea retta, spiegare il metodo per trovare il luogo del centro di curvatura nel punto di contatto della curva e della linea retta.

Se la curva che rotola è una spirale equiangola il luogo richiesto sarà una linea retta; se una cicloide un circolo; se una catenaria una parabola.

42. Triangoli rettangoli sono iscritti in un circolo; se uno dei lati che comprendono l'angolo retto passa per un punto fisso, trovare la curva alla quale l'altro è sempre tangente.

Risultato. $c^2(x^2+y^2)=(a^2+b^2-c^2-ax-by)^2$,

in cui a e b sono le coordinate del centro del dato circolo e c il suo raggio, il punto fisso essendo l'origine.

43. Determinare l'equazione dell'inviluppo di tutte le iperboli equilatere che hanno il centro comune e segano ad angoli retti una stessa linea retta.

Risultato. $x^2+3(axy)^{\frac{2}{3}}-y^2+a^2=0$,

in cui $x=a$ rappresenta la data linea retta.

44. Trovare l'inviluppo dell'asse di una parabola che ha una corda focale data in posizione e grandezza.

Risultato. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$; l'origine essendo il punto medio della data corda, ed uno degli assi coincidendo con quella corda.

45. Un sistema di ellissi è descritto in modo che ciascuna ellisse tocchi due assi rettangolari, ai quali i suoi assi siano paralleli, e che il rettangolo degli assi dell'ellisse sia una costante; dimostrare che ciascuna ellisse è toccata da due iperboli rettangolari, in cui il rettangolo degli assi trasversi è eguale al rettangolo degli assi di ciascuna ellisse.

46. A, B, sono i centri di due circoli eguali, ed AP, BQ, sono due raggi sempre perpendicolari tra loro; trovare la curva che è sempre toccata dalla linea retta PQ, e spiegare il risultato quando

$$AB^2=2\cdot AP^2.$$

47. Descrivere le seguenti curve:

$$x^3-xy^2+ay^2=0,$$

$$y^3-7yx^2+6x^3-a^3=0,$$

$$y^4+x^2y^2-a^2x^2=0,$$

$$a(x^3+7x^2y+7xy^2+y^3)-x^2y^2=0,$$

$$xy^2+ax^2-a^3=0,$$

$$y^2(x-2a)-x^3+a^3=0,$$

$$y^5-ax^3y-bxy^3+x^5=0,$$

$$y^5-5ax^2y^2+x^5=0,$$

$$y=\frac{x^2}{a}\pm(x-a)\frac{\sqrt{(x^2-b^2)}}{a},$$

$$y^2(a+x)=x^2(a-x),$$

$$y=xe^{-x},$$

$$y=e^{-x}\sqrt{(x^2-1)},$$

$$e^{\left(\frac{y}{a}\right)^2}=\operatorname{sen}\frac{x}{a},$$

$$y=e^{\cos x},$$

$$r^2\operatorname{sen}\theta=a^2\cos 2\theta,$$

$$r(\theta-\pi)^2=a\left(\theta^2-\frac{\pi}{4}\right).$$

48. S ed H sono due punti fissi, ed una curva è descritta in modo che, se P è un suo punto qualunque il rettangolo di SP ed HP è costante; mostrare che le linee rette condotte da S ad angoli retti sopra SP e da H ad angoli retti sopra HP incontrano la tangente in P in punti equidistanti da P.

49. Se $f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ è una funzione omogenea razionale di $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ di n dimensioni, mostrare che l'inviluppo delle curve rappresentate dall'equazione $f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=1$, sotto la condizione $ab=$ costante, consiste in generale di n iperboli rettangolari che hanno gli assi per asintoti.

50. Se un quadrilatero $ABCD$ muta la sua forma, i suoi lati rimanendo costanti, dimostrare che le variazioni degli angoli A, B, C, D sono ultimamente nello stesso rapporto delle aree dei triangoli BCD, CDA, DAB, ABC.

51. Nell' Art. 274, se $p = n - 1$, abbiamo approssimativamente quando x ed y sono molto grandi

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \frac{b}{x}, \text{ in cui } b = -\frac{\psi(\mu_1)}{\varphi'(\mu_1)};$$

mostrare che se $q = n - 2$, abbiamo continuando l'approssimazione

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \frac{b}{x} - \frac{2\chi(\mu_1) + 2b\psi'(\mu_1) + b^2\varphi''(\mu_1)}{2x^2\varphi'(\mu_1)} + \ldots$$

Quindi mostrare che in generale le due estremità dell'asintoto rettilineo sono in parti opposte della curva.

52. Nell'Art. 275, se $p = n - 1$, abbiamo approssimativamente quando x ed y sono molto grandi

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ in cui } A = -\frac{2\psi(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)};$$

mostrare che se $q = n - 2$, abbiamo continuando l'approssimazione

$$\frac{y}{x} = \mu_1 + \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^{\frac{3}{2}}} + \ldots$$

in cui
$$B = -\frac{\psi'(\mu_1)}{\varphi''(\mu_1)} - \frac{\varphi'''(\mu_1)A}{6\varphi''(\mu_1)},$$

$$C = -\frac{\chi(\mu_1) + \frac{A}{2}\psi''(\mu_1) + \left\{\psi'(\mu_1) + \frac{A}{2}\varphi'''(\mu_1) + \frac{B}{2}\varphi''(\mu_1)\right\}B}{A^{\frac{1}{2}}\varphi''(\mu_1)}$$

AGGIUNTE

AL

CALCOLO DIFFERENZIALE.

AGGIUNTE.

CAPITOLO I.

PRINCIPII DELLA TEORIA DELLE LINEE A DOPPIA CURVATURA.

1. Una linea è determinata nello spazio per mezzo di due equazioni tra le coordinate x, y, z che esprimono le distanze di un punto preso sulla linea da tre piani fissi, perpendicolari tra loro; e reciprocamente, il sistema di due simili equazioni può essere rappresentato da una linea tracciata nello spazio, di cui x, y, z dinoterebbero le coordinate rettangolari. La linea è ancora rappresentata graficamente dalle due curve piane che sono le sue proiezioni sopra due dei piani coordinati, come quelli delle xy e delle xz. Le equazioni delle proiezioni sono quelle che si otterrebbero eliminando alternativamente z ed y tra le equazioni

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

per mezzo delle quali la linea è determinata nello spazio.

Si può considerare questa linea come l'intersezione di due superficie cilindriche che avrebbero rispettivamente per basi le proiezioni sui piani delle xy e delle xz, e di cui le rette generatrici sarebbero rispettivamente parallele agli assi delle z e delle y. In generale, le linee così determinate nello spazio non sono piane; esse si dicono *linee a doppia curvatura*, denominazione che sarà spiegata in seguito.

In virtù delle due equazioni della curva, una sola delle tre variabili x, y, z può essere considerata come indipendente: le due altre, del pari che le loro derivate di tutti gli ordini, ne sono delle funzioni esplicite o implicite. Ma, per avere il vantaggio della simmetria delle formole, sarà utile di trattare x, y, z come tre funzioni di una stessa variabile indipendente t. Supponendo date tre equazioni tra x, y, z, t, se si formano due combinazioni di queste equazioni prese a due a due, e si elimina t tra le due equazioni di ciascun gruppo, si avranno le due equazioni della curva.

2. Supponiamo condotta la corda che congiunge due punti (x, y, z), $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ della curva: in virtù di principii conosciuti, questa corda ha per lunghezza

$$\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}\;;$$

e le equazioni delle sue proiezioni sui piani delle xy e delle xz sono

$$y' - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x' - x), \qquad z' - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(x' - x),$$

x', y', z' dinotando le coordinate correnti. In fine essa forma con le parallele agli assi delle x, delle y e delle z, condotte pel punto (x, y, z) nel senso delle coordinate positive, degli angoli che hanno rispettivamente per coseni

$$\frac{\pm \Delta x}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}}, \quad \frac{\pm \Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}}, \quad \frac{\pm \Delta z}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}}.$$

Quando il secondo punto si avvicina indefinitamente al primo, la corda si avvicina indefinitamente ad una posizione determinata, che è quella della tangente alla curva nello spazio: nello stesso tempo le proiezioni del secondo punto su ciascuno dei piani coordinati si avvicinano indefinitamente alle proiezioni del primo punto, e la proiezione della corda tende a prendere una posizione determinata, che è quella della tangente alla linea proiezione. Dunque le tangenti alle linee proiezioni sono le proiezioni della retta che tocca nello spazio la linea proiettata; e questa retta tangente è determinata dal sistema delle due equazioni

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \qquad z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x),$$

dalle quali si deduce

$$y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z).$$

Per maggiore simmetria si racchiudono queste tre equazioni nella formola

$$\frac{dx}{x' - x} = \frac{dy}{y' - y} = \frac{dz}{z' - z}, \quad \dots\dots\dots\dots (2).$$

Dinotando con α, β, γ gli angoli che la tangente alla curva fa con le parallele agli assi delle x, y, z, nel senso delle coordinate positive, si avrà ancora

$$\cos\alpha = \frac{\pm dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{\pm dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}},$$
$$\cos\gamma = \frac{\pm dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ovvero, a motivo di $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

S'intende per lunghezza dell'arco di una linea a doppia curvatura, il limite al quale si avvicina indefinitamente la lunghezza di una porzione di poligono storto, inscritta nell'arco e terminata alle sue due estremità, quando il numero dei lati aumenta indefinitamente ed ogni lato decresce indefinitamente. Secondo questa definizione, se s dinota la lunghezza dell'arco di una linea a doppia curvatura, misurata a partire da un punto preso arbitrariamente sulla linea, si ha

$$ds = \pm\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

secondo che l'arco cresce o decresce, e che il differenziale ds è positivo o negativo. Così possiamo scrivere

$$\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \pm\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{dz}{ds}.$$

3. S'intende per *piano tangente* di una linea nello spazio, ogni piano che contiene la tangente a questa linea: così, la linea ha in ogni punto un'infinità di piani tangenti.

Si ha ancora, in ogni punto, un'infinità di *normali* della curva o di rette perpendicolari alla tangente; il piano che le comprende tutte è il *piano normale* della curva nello stesso punto. Se si dinotano con x', y', z' le coordinate correnti del piano normale nel punto x, y, z, la sua equazione è, secondo i principii della geometria analitica, ed in virtù delle equazioni (2),

$$(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0. \ldots\ldots (5).$$

La differenziazione delle equazioni (1) dà

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0,$$

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0,$$

d'onde si ricava, per mezzo delle equazioni (2) e (3),

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dx}(x'-x)+\frac{df}{dy}(y'-y)+\frac{df}{dz}(z'-z)=0,\\ \frac{dF}{dx}(x'-x)+\frac{dF}{dy}(y'-y)+\frac{dF}{dz}(z'-z)=0;\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dx}\cos\alpha+\frac{df}{dy}\cos\beta+\frac{df}{dz}\cos\gamma=0,\\ \frac{dF}{dx}\cos\alpha+\frac{dF}{dy}\cos\beta+\frac{dF}{dz}\cos\gamma=0.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7)$$

Si ponga, per brevità,

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz}-\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy}=L,$$

$$\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dx}-\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dz}=M,$$

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dx}=N:$$

le equazioni (7) daranno

$$\frac{\cos\alpha}{L}=\frac{\cos\beta}{M}=\frac{\cos\gamma}{N}=\pm\frac{1}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}},$$

Le equazioni della tangente saranno anche, in virtù delle equazioni (6),

$$\frac{x'-x}{L}=\frac{y'-y}{M}=\frac{z'-z}{N},$$

e quella del piano normale diverrà

$$L(x'-x)+M(y'-y)+N(z'-z)=0.$$

4. Supponiamo che a partire dal punto (x, y, z), indicato dalla lettera m, si prenda sulla curva una serie di punti m_1, m_2, m_3, ..., molto vicini gli uni agli altri, e che si congiungano con corde in modo da formare un poligono storto, di cui il perimetro si avvicina tanto maggiormente a confondersi con la curva, quanto più i vertici sono ravvicinati. Due lati consecutivi mm_1, m_1m_2 determinano un piano che si sposta un poco nello spazio, continuando a passare pel punto m, quando i punti m_1, m_2 si avvicinano di più in più ad m, e che si sposta tanto meno quanto più i punti m, m_1, m_2, sono di già maggiormente ravvicinati. Questo piano tende in generale verso una posizione determinata che il calcolo assegnerà, quando si stabilirà l'equazione del piano trattando le distanze mm_1, m_1m_2 come quantità infinitamente piccole. Si dice allora che il piano è stato assoggettato a passare per tre punti infinitamente vicini: esso prende il nome di *piano osculatore* della curva nel punto m, per analogia col cerchio osculatore di una curva piana, che si può considerare come determinato dalla condizione di avere con la curva tre punti comuni, infinitamente vicini.

Se si dinotano con x', y', z' le coordinate correnti del piano osculatore nel punto (x, y, z), la sua equazione sarà della forma

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

X, Y, Z indicando dei coefficienti ignoti che si debbono determinare. Questa equazione deve sussistere quando vi si rimpiazzano x, y, z con $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, e così si ha

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

infine queste due equazioni debbono ancora sussistere quando vi si rimpiazzano ad un tempo

$$x, y, z; \quad dx, dy, dz$$

con $\quad x + dx,\ y + dy,\ z + dz;\quad dx + d^2x,\ dy + d^2y,\ dz + d^2z,$

ciò che dà $\qquad X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z = 0.$

Allorchè si combinano queste tre equazioni in modo da eliminare due delle tre ignote X, Y, Z, la terza va via nello stesso tempo, e resta per equazione del piano osculatore

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(x'-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(y'-y)$$
$$+ (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(z'-z) = 0;$$

ma, per brevità di scrittura, si può conservare l'equazione del piano osculatore sotto la forma (8), ponendo le equazioni ausiliarie

$$X = dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad Y = dz\, d^2x - dx\, d^2z,$$
$$Z = dx\, d^2y - dy\, d^2x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

5. Abbiamo trovato per l'equazione del piano normale nel punto (x, y, z),

$$(x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz = 0 \ldots\ldots (5)$$

Se si vuole avere l'equazione del piano normale condotto per un punto infinitamente vicino, bisogna aggiungere al primo membro dell'equazione precedente il suo differenziale rispetto a tutte le variabili. Per i punti situati sulla retta d'intersezione dei due piani normali infinitamente vicini, si ha dunque, oltre dell'equazione precedente, quella che se ne deduce con la differenziazione, cioè

$$(x' - x)\, d^2x + (y' - y)\, d^2y + (z' - z)\, d^2z - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,$$

ossia

$$(x' - x)\, d^2x + (y' - y)\, d^2y + (z' - z)\, d^2z - ds^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (10).$$

Questa linea d'intersezione dei due piani normali incontra il piano osculatore in un punto (x', y', z'), di cui le coordinate debbono soddisfare alle tre equazioni (5), (10), (8). Questo punto è il centro di un cerchio che passa per tre punti della curva infinitamente vicini, o il centro del *cerchio osculatore*. In effetti, poichè nella determinazione geometrica del cerchio osculatore di una curva piana non entrano che due elementi consecutivi ed infinitamente piccoli della curva, e due elementi consecutivi di una curva qualunque sono compresi in uno stesso piano, o piuttosto determinano questo piano, che è il piano osculatore, la costruzione del cerchio osculatore si adatta alle curve qualunque, come alle curve piane. Se si pone

$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

il raggio ρ del cerchio osculatore farà con le parallele agli assi delle x, y, z, gli angoli λ, μ, ν, dati dalle equazioni

$$\pm \rho \cos\lambda = x' - x, \quad \pm \rho \cos\mu = y' - y, \quad \pm \rho \cos\nu = z' - z.$$

La curvatura della linea, nel suo piano osculatore, ha per misura $\frac{1}{\rho}$; e l'angolo di *contingenza* $d\tau$, (cioè l'angolo esteriore delle due tangenti consecutive che determinano il piano osculatore) è legato a ρ dall'equazione

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\tau}{ds} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

6. Le equazioni (5), (10), (8) danno immediatamente con l'eliminazione dei binomii $x'-x$, $y'-y$,

$$z'-z=\frac{ds^2(Xdy-Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2};$$

da cui si deduce cambiando semplicemente le lettere,

$$y'-y=\frac{ds^2(Zdx-Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$x'-x=\frac{ds^2(Ydz-Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2};$$

indi viene

$$\rho=\pm\frac{ds^2\sqrt{[(X^2+Y^2+Z^2)ds^2-(Xdx+Ydy+Zdz)^2]}}{X^2+Y^2+Z^2}$$

o sia

$$\rho=\pm\frac{ds^3}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

in virtù della relazione

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Si troverà ancora

$$\begin{aligned}Xdy-Ydx&=d^2z\,(dx^2+dy^2)-dz\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y)\\&=d^2z\,(ds^2-dz^2)-dz\,(ds\,d^2s-dz\,d^2z)\\&=d^2z\;ds^2-dz\,ds\,d^2s=ds^3\;d\cdot\frac{dz}{ds},\end{aligned}$$

e similmente

$$Zdx-Xdz=ds^3\;d\cdot\frac{dy}{ds},\quad Ydz-Zdy=ds^3\;d\cdot\frac{dx}{ds},$$

onde

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^4 \left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 \right\},$$

e quindi

$$x' - x = \rho^2 \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad y' - y = \rho^2 \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad z' - z = \rho^2 \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

$$\rho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 \right\}}} \ldots (13)$$

Finalmente la formola (11) dà pel valore dell' angolo di contingenza $d\tau$,

$$d\tau = \pm \sqrt{\left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2 \right\}} \ldots (14)$$

Osservando che $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sono i coseni degli angoli α, β, γ che la tangente della curva nel punto (x, y, z) fa con gli assi delle coordinate, la formola (14) mostra che l' angolo infinitesimo $d\tau$ compreso tra quella tangente e la tangente infinitamente vicina si può esprimere con

$$d\tau = \pm \sqrt{\{ (d \cdot \cos \alpha)^2 + (d \cdot \cos \beta)^2 + (d \cdot \cos \gamma)^2 \}}.$$

7- Dinotiamo con λ', μ', ν' gli angoli che la normale al piano osculatore fa con gli assi delle x, delle y e delle z: avremo

$$\cos \lambda' = \pm \frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}, \quad \cos \mu' = \pm \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}},$$

$$\cos \nu' = \pm \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}.$$

Dinotiamo inoltre con $d\theta$ l'angolo infinitamente piccolo che formano tra loro le normali ai due piani osculatori infinitamente vicini, di cui l' uno si riferisce al punto (x, y, z) e l'altro al punto $(x+dx, y+dy, z+dz)$: si avrà, per l'osservazione fatta poco innanzi,

$$d\theta^2 = (d\cdot\cos\lambda')^2 + (d\cdot\cos\mu')^2 + (d\cdot\cos\nu')^2$$

$$=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}$$

$$=\frac{(XdY-YdX)^2+(ZdX-XdZ)^2+(YdZ-ZdY)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2},$$

Si trova d'altronde

$$dX = dy\,d^3z - dz\,d^3y, \quad dY = dz\,d^3x - dx\,d^3z,$$

$$dZ = dx\,d^3y - dy\,d^3x,$$

$$\frac{XdY-YdX}{dz} = \frac{ZdX-XdZ}{dy} = \frac{YdZ-ZdY}{dx}$$

$$= dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)$$

$$+ dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y),$$

e per conseguenza $\dfrac{d\theta}{ds} =$

$$\frac{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2y\,d^3z-d^2zd^3y)}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}.$$

Ora, come l'espressione

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{\rho},$$

in cui $d\tau$ dinota l'angolo di contingenza formato da due tangenti infinitamente vicine, misura la curvatura della linea nel suo piano osculatore, o la sua *prima curvatura*, così l'espressione

$$\frac{d\theta}{ds},$$

nella quale $d\theta$ dinota l'angolo di *flessione* formato da due piani osculatori consecutivi, misurerà la *seconda curvatura* della linea; ciò che giustifica la denominazione di *linee a doppia curvatura*, data alle linee che non sono piane.

Per concepire la rettificazione di una linea a doppia curvatura, si può immaginare che il primo piano osculatore si abbassi sul secondo, che questi due si abbassino sul terzo, e così di seguito, in modo da trasformare la linea in curva piana; indi, che la prima tangente si abbassi sulla seconda, queste due sulla terza, e così di seguito, in modo da trasformare la curva piana in linea retta; senza che la lunghezza degli elementi della curva primitiva sia stata alterata in questa doppia operazione.

Dunque, con un' operazione in senso inverso o con due flessioni consecutive, si passerebbe dalla linea retta ad una curva tracciata nello spazio in un modo qualunque.

Si vede che l'espressione della seconda curvatura dipende dai differenziali di terzo ordine delle coordinate x, y, z; mentre quella della prima curvatura dipende solamente dai differenziali di primo e di secondo ordine.

8. Applichiamo le formole precedenti alla linea dinotata col nome di *elica*, la quale è tracciata sulla superficie di un cilindro retto a base circolare, in modo che la tangente alla curva formi un angolo costante con le generatrici del cilindro, o (ciò che torna lo stesso) in modo che la curva si muti in linea retta con lo sviluppo della superficie cilindrica sopra un piano. Siano R il raggio del cilindro di cui supponiamo che l'asse coincida con quello delle z; φ l'angolo compreso tra il piano delle xz e quello tra i piani condotti per l'asse nel quale si trova il punto (x, y, z) della curva; a la tangente trigonometrica dell'angolo costante formato dalla tangente alla curva con la generatrice del cilindro: la definizione dell'elica darà immediatamente

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\operatorname{sen}\varphi, \quad z = aR\varphi\,, \ldots\ldots (15)$$

facendo passare l'asse delle x pel punto in cui l'elica penetra il piano xy.

Le equazioni in coordinate rettangolari delle proiezioni della curva sopra i piani delle xz e delle yz, saranno

$$x = R\cos\frac{z}{aR}, \quad y = R\operatorname{sen}\frac{z}{aR};$$

in quanto all'equazione della proiezione della curva sul piano xy, essa si confonde evidentemente con quella della traccia del cilindro

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Si avrebbe ancora l'equazione

$$\frac{y}{x} = \tan.\frac{z}{aR},$$

che è quella della superficie generata da una retta la quale si moverebbe restando parallela al piano xy, in modo da appoggiarsi costantemente sull'elica e sull'asse del cilindro.

Si troverà per le equazioni della tangente

$$-\frac{x'-x}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{y'-y}{\cos\varphi} = \frac{z'-z}{a},$$

e per quella del piano normale

$$(x'-x)\operatorname{sen}\varphi - (y'-y)\cos\varphi - a(z'-z) = 0.$$

Se ne conchiude che il piano normale forma un angolo costante con quello delle xy, il che risulta d'altronde dalla definizione della curva.

Le coordinate x', y' del punto in cui la tangente dell'elica nel punto (x, y, z) penetra il piano xy, sono date dalle equazioni

$$x'-x = \frac{z}{a}\operatorname{sen}\varphi = R\varphi\operatorname{sen}\varphi, \quad y'-y = -\frac{z}{a}\cos\varphi = -R\varphi\cos\varphi,$$

onde $$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = R^2\varphi^2.$$

Sia A il punto dell'elica sul piano xy, ed m la proiezione su questo piano del punto (x, y, z) della curva; se μ è il punto d'incontro dello stesso piano con la tangente dell'elica, la retta $m\mu$ toccherà il cerchio, base del cilindro, in m; e risulta dall'equazione precedente che la porzione di retta $m\mu$ ha la stessa lunghezza dell'arco di cerchio Am. Dunque, se la tangente all'elica si muove toccando costantemente questa curva, il punto μ in cui essa penetra il piano xy descrive su questo piano una involuta del cerchio dato dall'intersezione del cilindro e del piano: e l'involuta ha il suo regresso nel punto in cui il piano è penetrato dall'elica.

Prendendo l'angolo φ per variabile indipendente, le formole (15) daranno

$$dx = -R \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi, \quad dy = R \cos \varphi \, d\varphi, \quad dz = aR \, d\varphi;$$

$$d^2x = -R \cos \varphi \, d\varphi^2, \quad d^2y = -R \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi^2, \quad d^2z = 0;$$

$$d^3x = R \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi^3, \quad d^3y = -R \cos \varphi \, d\varphi^3, \quad d^3z = 0.$$

Dinotiamo inoltre con i l'angolo costante di cui la tangente è a: verrà

$$ds = \frac{R}{\cos i} d\varphi, \quad d^2s = 0;$$

e quindi si avrà per la misura della prima curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 i}{R},$$

e per la misura della seconda curvatura,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\operatorname{sen} i \cos i}{R}.$$

L'equazione del piano osculatore diviene

$$\tan i \, [(x' - x) \operatorname{sen} \varphi - (y' - y) \cos \varphi] + z' - z = 0,$$

o più semplicemente, per le equazioni (15),

$$z' - z = a (y' \cos \varphi - x' \operatorname{sen} \varphi);$$

e si riconosce che esso ha un'inclinazione costante sul piano delle xy.

CAPITOLO II.

PRINCIPII DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE CURVE.

Piano tangente, e retta normale di una superficie.

9. Essendo data l'equazione di una superficie riferita alle coordinate rettilinee x, y, z, che (per maggiore semplicità) supponiamo rettangolari, due delle variabili, come x, y, possono considerarsi indipendenti; e la terza variabile z, funzione delle due prime, ammette due derivate parziali del primo ordine p, q, in modo che si ha per espressione del suo differenziale totale

$$dz = p dx + q dy,$$

gli accrescimenti infinitamente piccoli dx, dy restando indipendenti l'uno dall'altro.

Ma supponendo che si sia tracciata sulla superficie una linea qualunque che passa pel punto (x, y, z), vi sarà per i punti situati su questa linea una dipendenza tra y ed x, e per conseguenza tra dy e dx, in modo che si potrà porre

$$dy = y_1\, dx, \quad dz = (p + q y_1)\, dx,$$

y_1 dinotando una funzione di x, determinata in virtù della descrizione della curva.

Chiamiamo x', y', z' le coordinate correnti della tangente alla curva di cui si tratta, condotta nel punto (x, y, z): le equazioni di questa tangente saranno (Art. 2)

$$y' - y = y_1 (x' - x), \quad z' - z = (p + q y_1)(x' - x) \ldots . (1)$$

Se dunque si elimina tra esse y_1, l'equazione risultante apparterrà alla superficie sulla quale si trovano tutte le tangenti che si possono condurre, pel punto (x, y, z), alle curve qualunque tracciate sulla superficie data. L'eliminazione dà

$$z' - z = p (x' - x) + q (y' - y), \ldots\ldots\ldots (2)$$

equazione di un piano che avrebbe x', y', z' per coordinate correnti, ed al quale si dà il nome di *piano tangente*, poichè esso è il luogo di tutte le tangenti delle curve tracciate sulla superficie, e che passano pel punto di contatto.

Il piano tangente può non avere che un punto di comune con la superficie, il che è una proprietà delle superficie convesse in tutti i loro punti, come quelle della sfera e dell'ellissoide. Ma più generalmente questo piano può intersegare la superficie, ed anche segarla secondo una linea che passa pel punto di contatto, ciò che non impedisce che esso sia il luogo delle tangenti a tutte le curve tracciate per quel punto sulla superficie. Questa linea d'intersezione separa sulla superficie le linee che si elevano al di sopra del piano tangente da quelle che si abbassano al di sotto dello stesso piano.

10. Sia $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie, ed esprimiamo le derivate p, q per mezzo delle derivate parziali della funzione F: l'equazione del piano tangente diverrà

$$(x' - x)\frac{dF}{dx} + (y' - y)\frac{dF}{dy} + (z' - z)\frac{dF}{dz} = 0;$$

vale a dire che essa si deduce da $dF = 0$, rimpiazzando i differenziali dx, dy, dz con le differenze $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$.

La retta condotta pel punto di contatto, perpendicolarmente al piano tangente, è la *normale* della superficie, ed i piani che passano per la normale si chiamano *piani normali*. L'intersezione della superficie con uno qualunque dei suoi piani normali è qualificata come *sezione normale*, e, per opposizione, le altre sezioni piane della superficie si dicono *sezioni oblique*.

Le due equazioni della normale si ricavano dalla formola

$$\frac{x' - x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{y' - y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{z' - z}{\frac{dF}{dz}},$$

o
$$\frac{x' - x}{p} = \frac{y' - y}{q} = -(z' - z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Siano λ, μ, ν gli angoli della normale con le parallele agli assi delle x, y, z, questi angoli essendo misurati dalla parte delle coordinate positive, e poniamo

$$R = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right\}}:$$

avremo

$$\cos\lambda = \frac{1}{R}\cdot\frac{dF}{dx},\ \cos\mu = \frac{1}{R}\cdot\frac{dF}{dy},\ \cos\nu = \frac{1}{R}\cdot\frac{dF}{dz},$$

o pure

$$\cos\lambda = \frac{\pm p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\ \cos\mu = \frac{\pm q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\cos\nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Le lettere λ, μ, ν dinotano ancora gli angoli del piano tangente con quelli delle yz, delle xz e delle xy.

Sia $$dF = Xdx + Ydy + Zdz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

l'equazione differenziale comune ad una serie di superficie

$$F(x, y, z) = a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

le quali non differiscono che pel valore del parametro a: le equazioni della normale potranno scriversi sotto la forma

$$Y(x'-x) - X(y'-y) = 0, \quad Z(x'-x) - X(z'-z) = 0;$$

e saranno queste le equazioni delle rette che toccano nel punto (x, y, z) delle linee tracciate nello spazio, le quali hanno la proprietà di soddisfare alle equazioni differenziali

$$Y - X\frac{dy}{dx} = 0, \quad Z - X\frac{dz}{dx} = 0.$$

Dunque queste linee hanno anche la proprietà d'incontrare sotto l'incidenza normale tutte le superficie rappresentate dall'equazione (5) o (4).

Caratteri analitici delle principali famiglie di superficie.

11. Si sa che ogni legame matematico tra le variabili x, y, z, dinotato in generale con

$$F(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

dà luogo alla costruzione di una superficie, quando si considerano x, y, z come le tre coordinate che fissano la posizione di un punto nello spazio. Ma in generale la superficie così costruita non sarebbe definita geometricamente; e volendo, non già figurare nell'estensione i concetti dell'analisi, ma applicare l'analisi alla teoria dell'estensione, non avremo realmente a considerare che le superficie caratterizzate da proprietà geometriche.

Può accadere che la definizione geometrica di una superficie si traduca immediatamente con una equazione tra le sue coordinate correnti; così l'equazione.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

esprime immediatamente quel carattere geometrico col quale si può definire la superficie di una sfera: vale a dire, che tutti i suoi punti sono ad una distanza costante da un altro punto preso quì per origine delle coordinate. Ma, più ordinariamente, la definizione geometrica di una superficie consiste ad assegnare la legge della descrizione della superficie per mezzo di una linea: sia che la linea si muova semplicemente nello spazio senza cambiare di forma, sia che essa muti forma nello stesso tempo che si sposta. In questo caso, l'equazione (6) si riguarda come data dall'eliminazione del parametro α tra le equazioni

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha) = 0 \,, \ldots\ldots. \quad (7)$$

che sono quelle di una linea tracciata nello spazio: questa linea, alla quale si dà il nome di *generatrice*, variando continuamente, o di posizione e di forma, o almeno di posizione, col parametro α.

Si dice ancora che la superficie (6) è il luogo geometrico di tutte le linee che dà il sistema delle equazioni (7), quando vi si fa variare in modo continuo il parametro α.

Così, il cono retto che si considera negli elementi di geometria è la superficie descritta da una retta che si muove passando costantemente per un punto fisso, e facendo con un'altra retta condotta per lo stesso punto un angolo costante. Si potrebbe ancora considerare la superficie del cono come descritta da un cerchio di raggio variabile, di cui il centro si muove sull'asse del cono mentre il suo piano resta perpendicolare a quest'asse, e di cui il raggio è proporzionale alla distanza del vertice del cono dal centro del cerchio mobile.

12. Ciò conduce alla distribuzione delle superficie in famiglie, secondo le analogie geometriche dei loro modi di de-

scrizione; distribuzione che non bisogna confondere con la classificazione delle superficie algebriche secondo il grado delle loro equazioni. Per esempio, il cono retto, di cui si è parlato or ora, appartiene alla famiglia delle superficie *coniche*, che hanno per carattere generico di essere descritte da una retta assoggettata a passare costantemente per un punto fisso. Similmente il cilindro retto, che si considera negli elementi di geometria, appartiene alla famiglia delle superficie *cilindriche*, generate da una retta che si muove restando costantemente parallela a sè stessa. Per dirigere, nell'uno e nell'altro caso, il movimento della retta generatrice, nulla impedisce di sostituire al cerchio che dà il cilindro ed il cono ordinario, una curva qualunque. In generale, si chiamano linee *direttrici* quelle sulle quali si appoggia la linea generatrice per descrivere una superficie determinata.

La distribuzione delle superficie in famiglie differisce da una classificazione propriamente detta in questo senso che la stessa superficie può appartenere a diverse famiglie, secondo le analogie diverse che il suo modo di descrizione manifesta. Così, si possono ancora considerare il cono ed il cilindro ordinarii come appartenenti alla famiglia delle superficie di *rotazione*, che hanno per carattere generico di essere descritte da una linea piana, che si dice *linea meridiana*, la quale gira intorno ad un asse fisso compreso nel piano della meridiana, o nel piano *meridiano*. La linea meridiana si riduce ad una retta, parallela o obbliqua all'asse di rotazione, nel caso del cilindro o del cono retto, ma essa può essere una curva tracciata arbitrariamente nel piano meridiano.

Si chiamano superficie *rigate* tutte quelle che può descrivere una retta movendosi nello spazio in un modo qualunque. S'invertirà questa definizione dicendo che, per un punto qualunque preso sopra una superficie rigata, si può tirare una retta che si applica in tutti i suoi punti sulla superficie. La classe delle superficie rigate comprende l'ordine delle superficie *storte*, per le quali due generatrici infinitamente vicine non s'incontrano, e l'ordine delle superficie *sviluppabili*, per le quali avviene il contrario, o sia in cui le rette generatrici hanno un inviluppo, che dicesi *spigolo di regresso* della superficie sviluppabile. Il piano tangente in un punto di una superficie rigata, comprende la generatrice condotta per quel punto, però in una superficie storta quel piano sega la superficie in ogni altro punto della retta generatrice, mentre in una superficie sviluppabile esso è tangente della superficie lungo tutta la retta generatrice. Le superficie sviluppabili prendono questo nome per la proprietà che esse hanno di potersi svolgere o adattare sopra un piano senza lacerazione o duplicatura, o senza che una linea qualunque, tracciata sulla superficie, sia raccorciata o allungata in alcuno dei suoi elementi.

In ciò che segue parleremo solamente delle superficie cilindriche, delle coniche, di una famiglia particolare di superficie storte, e delle superficie di rotazione.

13. *Famiglia delle superficie cilindriche.* Mettiamo le equazioni della retta generatrice sotto la forma

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta; \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

affinchè questa retta mantenendosi sempre parallela alla direzione $x = az$, $y = bz$, possa descrivere una superficie, dovrà aversi tra i parametri variabili α, β, un legame

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

d'onde

$$y - bz = \varphi(x - az) \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Finchè i coefficienti a, b e la funzione φ conservano la loro indeterminazione, l'equazione (9) conviene ad una superficie cilindrica qualunque.

Prendendo le derivate dell'equazione (9) rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti x, y, si avrà

$$-bp = \varphi'(x - az)(1 - ap), \; 1 - bq = -\varphi'(x - az)\, aq,$$

da cui, eliminando la funzione derivata φ', si deduce l'equazione alle differenze parziali

$$ap + bq = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Pel significato geometrico delle derivate p, q, l'equazione (10) esprime che il piano tangente è sempre parallelo alla retta $x = az$, $y = bz$; e si potrebbe partire da questa proprietà del piano tangente delle superficie cilindriche, per stabilire direttamente l'equazione (10).

Per determinare la funzione arbitraria φ che entra nell'equazione (9), si può assoggettare la superficie a passare per una curva *direttrice* data. Siano

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

le equazioni della direttrice: si elimineranno x, y, z tra le equazioni (8) ed (11), e verrà per risultante un'equazione della forma

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0$$

che deve essere identica con l'altra $\beta = \varphi(\alpha)$, e che determina per conseguenza la funzione φ. D'altronde, se si rimettono nell'equazione precedente per α e β i loro valori in x, y, z, verrà

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

e questa sarà l'equazione della superficie cilindrica richiesta.

Se la superficie cilindrica deve essere tangente ad una superficie definita dall'equazione $f = 0$, come nel problema delle ombre allorchè il punto luminoso si allontana all'infinito, si ricaveranno da f i valori di p, q in x, y, z, e si sostituiranno nell'equazione (10), ciò che darà una seconda equazione $F = 0$ appartenente alla linea di contatto del cilindro con la superficie data. Prendendo questa linea di contatto per direttrice, si completerà la soluzione del problema come precedentemente.

14. *Famiglia delle superficie coniche.* Le equazioni della retta mobile che descrive una superficie conica passando costantemente pel punto (x_0, y_0, z_0), si possono mettere sotto la forma

$$x - x_0 = \alpha(y - y_0), \quad z - z_0 = \beta(x - x_0) \ldots . (13).$$

Si debbono supporre i parametri α e β legati da un'equazione quale $\beta = \varphi(\alpha)$, ed allora viene

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \varphi\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Finchè le costanti x_0, y_0, z_0 ed il segno φ conservano la loro indeterminazione, questa equazione è atta a rappresentare una superficie conica qualunque. Si elimina la caratteristica φ col procedimento ordinario (prendendo le derivate parziali dell'equazione (14) rispetto ad x ed y), e si perviene all'equazione alle differenze parziali

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) \ldots\ldots\ldots (15).$$

Si perviene ancora direttamente a questa equazione, considerando che il piano tangente alla superficie conica deve sempre passare pel punto (x_0, y_0, z_0), centro della superficie.

Allorchè si prende questo centro per origine delle coordinate, l'equazione (14) si riduce a

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

ed, a motivo di questa forma, essa è omogenea per rapporto alle variabili x, y, z. Nelle stesse circostanze, l'equazione (15) diviene

$$z = px + qy,$$

il che si accorda col teorema delle funzioni omogenee.

Se la superficie conica ha per curva direttrice la linea determinata da $f=0$ ed $F=0$, si elimineranno x, y, z tra queste equazioni e le (13), ciò che condurrà ad un'equazione finale $\Phi=0$, la quale determina implicitamente la funzione φ. Rimettendo per α, β i loro valori in x, y, z, si avrà per l'equazione della superficie conica

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}, \quad \frac{z-z_0}{x-x_0}\right) = 0 \; \dots\dots\dots\dots \; (16)$$

Nel caso in cui la funzione F non fosse data direttamente, ma dovesse essere determinata con la condizione che la superficie conica toccasse la superficie $f=0$, caso che si presenta nel problema delle ombre allorchè il punto luminoso è ad una distanza finita dal corpo opaco, si ricaverebbero dall'equazione $f=0$ i valori di p, q in x, y, z; sostituendoli nell'equazione (15) si otterrebbe l'equazione $F=0$.

15. *Famiglia delle superficie conoidi.* Allorchè la generatrice di una superficie rigata è assoggettata alla doppia condizione di avere una direttrice rettilinea e di restare parallela ad un piano direttore, la superficie descritta si dice un *conoide*, il quale è *retto* quando la retta direttrice è perpendicolare al piano direttore. È facile vedere che le superficie conoidi (ad eccezione del piano che vi si trova compreso) sono superficie storte.

Prendiamo per piano direttore quello delle xy, e per origine il punto in cui la retta direttrice incontra il piano: le equazioni della direttrice saranno

$$x = az, \quad y = bz, \; \dots\dots\dots\dots\dots \; (17)$$

e quelle della generatrice

$$z = \beta, \quad y - b\beta = \alpha(x - a\beta).$$

Si deve sempre supporre l'esistenza del legame $\beta = \varphi(\alpha)$ tra i parametri α, β; ciò che dà per l'equazione generale delle superficie conoidi

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz}{x - az}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Se ne ricava, eliminando nel modo ordinario la caratteristica φ,

$$p(x - az) + q(y - bz) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Questa equazione esprime che, se si tira nel piano tangente al punto (x, y, z) una retta parallela al piano xy, essa incontrerà la direttrice (17); ed in effetto la retta condotta così nel piano tangente si confonde con una generatrice.

16. *Famiglia delle superficie di rotazione.* Tra le superficie alle quali non si assegna per carattere distintivo di essere descritte dal movimento di una retta, non considereremo quì che la famiglia delle superficie di rotazione. Siano

$$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

le equazioni dell'asse di rotazione, condotto pel punto (x_0, y_0, z_0): un piano perpendicolare a quest'asse ha per equazione

$$ax + by + z = \alpha,$$

e questo piano sega la superficie di rotazione secondo un cerchio che si può considerare come l'intersezione del piano e di una sfera che avrebbe il suo centro nel punto (x_0, y_0, z_0). L'equazione di questa sfera è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \beta,$$

ed il legame $\beta = \varphi(\alpha)$, che dipende nella sua forma dalla curva meridiana, dà

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(ax + by + z) : \ldots (20)$$

equazione atta a rappresentare una superficie qualunque di rotazione, finchè le costanti x_0, y_0, z_0, a, b, e la caratteristica φ conservano la loro indeterminazione.

Prendendo le derivate parziali rispetto ad x e ad y, si ha

$$2[x - x_0 + p(z - z_0)] = (a + p)\varphi'(ax + by + z),$$

$$2[y - y_0 + q(z - z_0)] = (b + q)\varphi'(ax + by + z);$$

d'onde si conchiude con l'eliminazione di φ,

$$p\left[y-y_0-b(z-z_0)\right]-q\left[x-x_0-a(z-z_0)\right]$$
$$=b(x-x_0)-a(y-y_0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Quest'ultima equazione esprime che la normale alla superficie incontra l'asse di rotazione. Infatti dinotiamo con x', y', z' le coordinate correnti della normale nel punto (x, y, z); le equazioni di questa normale saranno

$$x'-x+p(z'-z)=0 \quad y'-y+q(z'-z)=0;$$

quelle dell'asse di rotazione, riferite alle stesse coordinate correnti, diverranno

$$x'-x_0=a(z'-z_0), \quad y'-y_0=b(z'-z_0);$$

se si eliminano x', y', z' da queste quattro equazioni, si ricade sull'equazione (21).

Allorchè si prende l'asse di rotazione per quello delle z, ciò che corrisponde a fare $x_0=0$, $y_0=0$, $a=0$, $b=0$, l'equazione (21) si riduce a

$$py-qx=0,$$

e l'equazione (20) diviene

$$x^2+y^2+(z-z_0)^2=\varphi(z),$$

o, ciò che vale lo stesso, per l'indeterminazione della funzione φ,

$$x^2+y^2=\varphi(z), \text{ o pure } z=\psi(x^2+y^2).$$

z è allora l'ordinata della curva meridiana, di cui $\sqrt{(x^2+y^2)}$ dinota l'ascissa.

Si assoggetterà la superficie di rotazione a passare per una curva $f=0$, $F=0$, per mezzo del procedimento di eliminazione già indicato per le superficie cilindriche e coniche.

Delle superficie inviluppi.

17. La teoria delle curve inviluppi si generalizza e si estende ancora alle superficie.

Sia $$F(x, y, z, \alpha)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

l'equazione di una superficie curva, nella quale entra il parametro α. Assegnando una serie di valori a questo parametro, si ha una serie di superficie della stessa specie, le quali in generale s'intersegano secondo certe linee. Consideriamo in particolare due di queste superficie

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0:$$

con la diminuzione continua ed indefinita di $\Delta\alpha$, la linea d'intersezione si sposta sulla prima superficie; essa si avvicina di più in più ad un'altra linea data dal sistema dell'equazione (22) e della sua derivata

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

La linea così determinata si chiama *caratteristica*.

Le equazioni della caratteristica contengono il parametro α, e variano per ciascuna delle superficie, in numero infinito, rappresentate da (22) finchè α resta indeterminato. Se si elimina α tra le equazioni (22), (23), si avrà una terza equazione

$$\Phi\,(x, y, z) = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

e questa apparterrà ad una superficie che può essere considerata come il luogo di tutte le caratteristiche.

Per tutt'i punti situati sopra una stessa caratteristica, la superficie (24) ha lo stesso piano tangente di quella tra le superficie (22) alla quale questa caratteristica corrisponde. Infatti, l'equazione del piano che tocca quest'ultima superficie nel punto (x, y, z), è

$$\frac{dF}{dx}(x' - x) + \frac{dF}{dy}(y' - y) + \frac{dF}{dz}(z' - z) = 0;$$

d'altronde, siccome l'equazione (24) non è altra cosa che l'equazione (22) in cui si è messo per α il suo valore in x, y, z, tratto dall'equazione (23), l'equazione del piano tangente della superficie (24) si può mettere sotto la forma

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\right)(x' - x) + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)(y' - y)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dz} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dz}\right)(z' - z) = 0,$$

la quale si riduce all'equazione precedente in virtù di (23).

La superficie (24) gode della proprietà di toccare o d'inviluppare le superficie in numero infinito, di cui la serie è data dalla variazione continua del parametro α nell'equazione (22). Si dà per conseguenza a queste il nome *d'inviluppate* ed alla superficie che le tocca il nome *d'inviluppo*. Ciascuna caratteristica è la linea di contatto dell'inviluppo con una inviluppata.

Il sistema delle equazioni (22), (23) e

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2}=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

quando esse non sono inconciliabili, determina il punto in cui una caratteristica è incontrata dalla caratteristica infinitamente vicina; e l'eliminazione di α tra queste tre equazioni dà le due equazioni dello *spigolo di regresso* della superficie inviluppo descritta dal movimento della caratteristica.

Finalmente se a (22), (23), (25) si aggiunge

$$\frac{d^3F}{d\alpha^3}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

si può eliminare α e si possono determinare individualmente le coordinate x, y, z di un punto situato sullo spigolo di regresso, che è in generale un punto singolare di questo spigolo.

18. Consideriamo ora l'equazione di una superficie

$$F(x, y, z, \alpha, \beta)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

nella quale entrerebbero due parametri arbitrarii α, β: non vi ha luogo a supporre che questi due parametri variino ad un tempo ed indipendentemente l'uno dall'altro, poichè ciò non condurrebbe ad alcuna conseguenza geometrica; ma si può naturalmente ammettere che vi sia tra α e β una relazione $\beta=\varphi(\alpha)$, per mezzo di cui l'equazione precedente diviene

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha))=0.$$

Si può ora far variare il parametro α, ciò che genererà una serie d'inviluppate ed una superficie inviluppo corrispondente. Siccome la funzione φ è arbitraria, ciascuna forma che ad essa si assegna determinerà un sistema di superficie inviluppate, avente il suo inviluppo particolare.

D'altronde, siccome l'equazione (27) racchiude due variabili indipendenti x, y, è permesso di differenziarla per rapporto a ciascuna di queste variabili, ciò che dà

$$\frac{dF}{dx}+p\frac{dF}{dz}=0, \quad \frac{dF}{dy}+q\frac{dF}{dz}=0: \ldots\ldots. (28)$$

l'eliminazione di α, β tra le equazioni (27) e (28) conduce all'equazione alle differenze parziali del primo ordine

$$f(x, y, z, p, q)=0; \ldots\ldots\ldots\ldots. (29)$$

e tutte le superficie inviluppate date dall'equazione (27), come anche tutte le superficie inviluppi date dall'eliminazione di α tra le due equazioni

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha))=0, \quad \frac{d\cdot F(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha))}{d\alpha}=0 \ldots (30)$$

godono evidentemente della proprietà di soddisfare all'equazione (29).

Se si eliminano α, β tra l'equazione (27) e le sue due derivate rispetto ad α e a β

$$\frac{dF}{d\alpha}=0, \quad \frac{dF}{d\beta}=0,$$

si ha un'equazione in x, y, z solamente

$$\Psi(x, y, z)=0, \ldots\ldots\ldots\ldots. (31)$$

che soddisfa ancora all'equazione (29); e la superficie (31) gode della proprietà di toccare o d'inviluppare, non solamente le inviluppate (27), ma ancora gl'inviluppi (30).

CAPITOLO III.

DELLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE.

Teoremi di Meusnier e di Eulero — Determinazione dei raggi di curvatura principali e degli umbilichi.

19. Si concepisca un'infinità di linee, piane o a doppia curvatura, tracciate sopra una superficie e concorrenti in uno stesso punto: esse avranno nel punto comune dei raggi di curvatura differenti, in numero infinito; ma nondimeno i valori di questi raggi di curvatura saranno legati gli uni agli altri, e si potranno far dipendere da un piccolo numero di elementi. Procediamo ad esporre questa riduzione che è un punto capitale nella teoria delle superficie.

Siano $$z = f(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

l'equazione della superficie; (x, y, z) il punto nel quale concorrono le linee che si concepiscono tracciate su questa superficie: dinotiamo con s l'arco di una di queste linee, piana o a doppia curvatura; con ρ' il raggio di prima curvatura di questa linea nel punto (x, y, z); con ρ il raggio di curvatura della *sezione normale* (Art. 10) avente la stessa tangente e che passa per lo stesso punto; con θ l'angolo dei raggi ρ, ρ'; in fine con $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ le prime e le seconde derivate delle coordinate x, y, z per rapporto all'arco s preso per variabile indipendente: si avrà, differenziando due volte di seguito l'equazione (1),

$$z_1 = px_1 + qy_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$z_2 = px_2 + qy_2 + rx_1^2 + 2sx_1y_1 + ty_1^2; \ldots\ldots (3)$$

e le derivate x_1, y_1, z_1 saranno legate inoltre dall'equazione di condizione

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Il raggio ρ che coincide con la normale alla superficie, fa con le x, y, z degli angoli λ, μ, ν che hanno rispettivamente per coseni (Art. 10)

$$\frac{\pm p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \frac{\pm q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}, \quad \frac{\mp 1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}};$$

da un' altra parte, il raggio ρ' fa con le stesse coordinate degli angoli di cui i coseni hanno per valori (Art. 5 e 6)

$$\pm \rho' x_2, \quad \pm \rho' y_2, \quad \pm \rho' z_2:$$

d'onde si conchiude, fatta astrazione dal segno di $\cos\theta$, ed in virtù dell'equazione (3),

$$\cos\theta = \rho' \cdot \frac{r x_1^2 + 2 s x_1 y_1 + t y_1^2}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Le derivate x_1, y_1, z_1 esprimono ancora i coseni degli angoli che forma con le x, y, z la tangente alla linea di cui il raggio di curvatura è ρ': dunque il fattore di ρ' nell'equazione (5) non cambia, qualunque sia questa curva, purchè essa passi pel punto della superficie che si considera, e che la direzione della tangente in quel punto non cambii. In altri termini, si può porre $\rho' = k \cos\theta$, k essendo una costante per tutte le curve tracciate sulla superficie, che hanno la stessa tangente nel punto di concorso. Ma, quando l'angolo θ svanisce, si ha $\rho' = \rho$: dunque $k = \rho$,

$$\rho' = \rho \cos\theta, \ldots (6), \quad \rho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{r x_1^2 + 2 s x_1 y_1 + t y_1^2} \ldots (7)$$

Così il raggio di prima curvatura di una linea qualunque tracciata sulla superficie, si fa dipendere dal raggio di curvatura della sezione normale che avrebbe la stessa tangente con quella linea, e dall'inclinazione θ.

Allorchè la prima curva è piana, si chiama *sezione obbliqua*, e ρ' diviene la proiezione di ρ sul piano della sezione obbliqua. Il teorema espresso dalla formola (6) porta allora il nome di *teorema di Meusnier*. Si rende il significato della formola più generale estendendolo alle linee a doppia curvatura, come abbiamo spiegato.

Risulta dal teorema di Meusnier che, se si descrive una sfera che abbia per centro e per raggio il centro ed il raggio di curvatura di una sezione normale, tutte le sezioni obblique, che hanno con questa sezione normale la stessa tangente, hanno per cerchi osculatori nel punto comune i circoli minori che sono le intersezioni della sfera con i loro piani rispettivi.

20. Per semplificare la discussione dei raggi di curvatura delle sezioni normali, ammettiamo da principio che il piano delle xy sia condotto parallelamente al piano tangente della superficie, nel punto di concorso delle sezioni, ciò che si riduce a porre $p=0$, $q=0$: la formola (7) diverrà

$$\rho=\frac{1}{rx_1^2+2sx_1y_1+ty_1^2}:$$

e se si pone, come è permesso in virtù dell'equazione (4),

$$x_1=\cos\varphi,\quad y_1=\operatorname{sen}\varphi,\quad \tan\varphi=\alpha,$$

si potrà scrivere

$$\rho=\frac{1}{r\cos^2\varphi+2s\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+t\operatorname{sen}^2\varphi},\ \ldots\ldots (8)$$

o

$$\rho=\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}:\ \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

φ dinotando allora l'angolo della sezione normale con un piano condotto per la normale parallelamente a quello delle xz.

Si otterranno i valori *massimi* e *minimi* del raggio di curvatura ρ, cercando i valori di α che rendono nulla o infinita la derivata

$$\frac{d\rho}{d\alpha}=\frac{2[s\alpha^2+(r-t)\alpha-s]}{(r+2s\alpha+t\alpha^2)^2}.$$

Eguagliando il denominatore a zero, avremmo

$$\alpha=\frac{-s\pm\sqrt{(s^2-rt)}}{t},\ \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

valori i quali non sarebbero reali che posta la condizione $s^2-rt>0$, e che corrisponderebbero ad un raggio di curvatura infinito, o ad una curvatura nulla. I *massimi* e *mi-*

nimi propriamente detti sarebbero dunque esclusivamente dati dall'equazione

$$\alpha^2 + \frac{r-t}{s}\alpha - 1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

d'onde si trae $\alpha = \dfrac{t - r \pm \sqrt{[(t-r)^2 + 4s^2]}}{2s}$.

Questa espressione, sempre reale, ci mostra: 1° che per ogni superficie, e per tutt'i punti non singolari in cui le derivate parziali p, q, r, s, t possono determinarsi in funzione delle due variabili indipendenti, senza soluzione di continuità, esistono tra le sezioni normali due *sezioni principali* per le quali il raggio di curvatura ha un valore massimo o minimo; 2° che i piani di queste sezioni principali si tagliano ad angoli retti, poichè il prodotto delle radici dell'equazione (11) è eguale a -1.

21. Possiamo dunque condurre parallelamente ai piani delle sezioni principali i piani delle xz e delle yz di cui avevamo lasciata la direzione indeterminata, in modo che, delle due radici dell'equazione (11), l'una sia nulla e l'altra infinita; ciò che equivale a scegliere la direzione dei piani coordinati in modo che si abbia $s=0$. Il valore di ρ diviene allora

$$\rho = \frac{1}{r\cos^2\varphi + t\,\mathrm{sen}^2\varphi};$$

e si ha, dinotando con R_1, R_2 i due *raggi di curvatura principali*, che corrispondono rispettivamente a $\mathrm{sen}\,\varphi = 0$, $\cos\varphi = 0$,

$$R_1 = \frac{1}{r}, \qquad R_2 = \frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\mathrm{sen}^2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Questa formola notevolissima è dovuta ad Eulero. Essa dà i raggi di curvatura di tutte le sezioni normali, e per conseguenza quelli di tutte le sezioni oblique, in funzione dei raggi di curvatura principali, e degli angoli φ, θ che fissano la posizione dei piani di sezione rispetto ai piani delle sezioni principali.

Dinotando con ρ_1, ρ_2 i valori di ρ per due sezioni normali rettangolari, e d'altronde qualunque, si ricava dall'equazione (12) la relazione elegante

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=r+t \; \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Allorchè i due raggi principali R_1, R_2 sono eguali e dello stesso segno, vale a dire, diretti dalla stessa parte del piano-tangente, il valore di ρ diviene indipendente dall'angolo φ e lo stesso per tutte le sezioni normali. La superficie della sfera è la sola che goda in tutti i suoi punti di questa proprietà: ma si trovano sopra altre superficie dei punti singolari ai quali appartiene la stessa proprietà, e che Monge ha chiamati *umbilichi.*

22. Se le derivate r, t sono dello stesso segno, i raggi principali R_1, R_2 sono anche dello stesso segno, ed il segno di ρ non cambia: la superficie volge la sua convessità nello stesso senso rispetto al piano tangente, intorno al punto di contatto.

Ammettiamo ora che i raggi principali siano di segni contrarii, per esempio R_1 positivo ed R_2 negativo: vi saranno delle sezioni normali situate al di sopra del piano tangente ed altre al di sotto. La formola (12) diverrà, dopo che vi si sarà mutato R_2 in $-R_2$, per non avere più a considerare che numeri positivi,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi-\frac{1}{R_2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Si vede che, se si fa crescere l'angolo φ a partire da zero, il raggio variabile ρ incomincerà con essere positivo, ed andrà sempre crescendo, da R_1 sino all'infinito. Quest' ultimo valore corrisponde ad

$$\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi=\frac{1}{R_2}\operatorname{sen}^2\varphi, \quad \text{o} \quad \alpha=\pm\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}=\pm\sqrt{\left(-\frac{r}{t}\right)},$$

che è precisamente il valore di α dato dall'equazione (10), dopo che vi si è fatto $s=0$, conformemente all'ipotesi sulla direzione degli assi.

Se dunque si dinota con φ_0 questo valore particolare di φ, e nel piano tangente, si tirano due rette che formano, con una parallela all'asse delle x, degli angoli eguali a $\pm\varphi_0$, tutte le sezioni normali di cui le tangenti cadono negli spazii angolari in cui φ prende un valore numericamente minore di φ_0, hanno i loro raggi di curvatura positivi, e quelli di cui le tangenti cadono negli spazii complementari hanno i loro raggi di curvatura negativi. R_1 è il più piccolo dei raggi di curvatura positivi; e, per la stessa ragione, R_2 è il valore numerico minimo dei raggi di curvatura negativi, vale a dire $-R_2$ è un massimo algebrico di ρ.

Allorchè t o r prende un valore nullo, s svanendo in conseguenza della disposizione degli assi, l'uno dei raggi principali è infinito, l'altro ha per conseguenza un valore numerico minimo, ed il suo segno è quello di tutti gli altri raggi di curvatura.

23. Faremo osservare che in virtù dell'equazione (8), si può rappresentare geometricamente la grandezza $\sqrt{\rho}$ col raggio vettore di una sezione conica riferita al suo centro, φ essendo l'angolo del raggio vettore con l'asse delle x. Da questa costruzione si dedurrebbe senza altro calcolo, riferendosi alla discussione ben conosciuta delle sezioni coniche, tutto ciò che abbiamo stabilito intorno ai raggi di curvatura delle sezioni normali. Si sa che la sezione conica è un ellisse, se $rt-s^2>0$; e, in questo caso, tutt'i raggi vettori della curva ausiliaria essendo finiti e reali, tutt'i raggi di curvatura sono finiti e debbono essere presi con lo stesso segno. Se si ha al contrario $rt-s^2<0$, l'ellisse deve essere rimpiazzata da due iperboli coniugate, l'una di queste iperboli corrispondendo ai valori immaginarii del raggio vettore o ai valori negativi del raggio di curvatura. I semiassi dell'ellisse o delle due iperboli coniugate corrispondono in direzione alle sezioni principali, ed in grandezza ai raggi di curvatura principali. Infine, quando si ha $rt-s^2=0$, la sezione conica si trova rimpiazzata dal sistema di due rette parallele condotte ad eguali distanze dall'origine: la perpendicolare abbassata su queste rette corrisponde in direzione ad una delle sezioni principali, ed in grandezza al raggio di curvatura minimo.

24. Riprendiamo la formola (7) la quale sussiste, qualunque sia la direzione della normale rispetto agli assi delle x, y, z. Le derivate x_1, y_1 che entrano in questa formola debbono soddisfare all'equazione (4), la quale diviene, in virtù di (2),

$$(1+p^2)\,x_1^2+2pqx_1y_1+(1+q^2)\,y_1^2=1\,,\ldots.\,(14)$$

e da essa si trae, con la differenziazione,

$$[(1+p^2)\,x_1+pqy_1]\,dx_1+[(1+q^2)\,y_1+pqx_1]\,dy_1=0.$$

Differenziando l'equazione (7) rispetto a ρ, si ha

$$(rx_1+sy_1)\,dx_1+(sx_1+ty_1)\,dy=0;$$

e combinando queste due ultime equazioni,

$$\frac{rx_1+sy_1}{(1+p^2)\,x_1+pqy_1}=\frac{sx_1+ty_1}{(1+q^2)\,y_1+pqx_1}\ldots..(15)$$

Se dunque si dinota con R uno dei raggi di curvatura principali, l'equazione in R si otterrà eliminando x_1, y_1 tra le equazioni (14), (15), e l'equazione

$$R=\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{rx_1^2+2sx_1y_1+ty_1^2}\cdot\ldots\ldots\ldots(16).$$

Poniamo per abbreviare,

$$V=rx_1^2+2sx_1y_1+ty_1^2=\frac{1}{R}\sqrt{(1+p^2+q^2)};\ldots(17)$$

moltiplichiamo rispettivamente per x_1 ed y_1 i due termini delle frazioni a sinistra e a dritta del segno d'eguaglianza nell'equazione (15), e dopo ciò faremo le somme dei numeratori e dei denominatori: la frazione risultante, in virtù dell'equazione (14), si ridurrà al polinomio V. Verrà dunque

$$V=\frac{rx_1+sy_1}{(1+p^2)\,x_1+pqy_1}=\frac{sx_1+ty_1}{(1+q^2)\,y_1+pqx_1},$$

o pure

$$\left.\begin{aligned}[\,V(1+p^2)-r\,]\,x_1&=(s-pq\,V)\,y_1\,,\\ [\,V(1+q^2)-t\,]\,y_1&=(s-pq\,V)\,x_1\,,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(18)$$

e con la moltiplicazione membro a membro,

$$[\,V(1+p^2)-r\,][\,V(1+q^2)-t\,]=(s-pq\,V)^2.$$

Rimettendo in luogo di V il suo valore in R, ricavato dall'equazione (17), ed ordinando, si avrà finalmente

$$R^2\,(rt-s^2)-R\,[(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t]\,\sqrt{(1+p^2+q^2)}$$
$$+(1+p^2+q^2)^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots..(19)$$

Siano R_1, R_2 le radici di questa equazione, o i valori dei due raggi di curvatura principali, verrà

$$\frac{1}{R_1 R_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2};$$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Così, la condizione affinchè i raggi R_1, R_2 siano dello stesso segno, è espressa da $rt-s^2>0$, qualunque siano le direzioni degli assi coordinati; e la condizione affinchè uno dei raggi principali diventi infinito, è anche espressa generalmente dall'equazione $rt-s^2=0$, che caratterizza le superficie sviluppabili.

I raggi di curvatura principali sono, per tutt'i punti di una superficie, eguali in grandezza assoluta e diretti in sensi contrarii, se l'equazione

$$(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t=0$$

è verificata per tutt'i punti della superficie.

Le superficie caratterizzate da questa equazione alle differenze parziali del primo e del secondo ordine godono di un'altra proprietà geometrica egualmente osservabile, di essere cioè superficie di area minima.

25. I raggi principali R_1, R_2, e per conseguenza tutt'i raggi di curvatura delle sezioni normali sono eguali e dello stesso segno, se si ha

$$[(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0.$$

Questa equazione, potendosi mettere sotto la forma

$$\left[(1+p^2)\,t-(1+q^2)\,r+2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)\right]^2$$

$$+4\,(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)^2=0,$$

equivale al sistema

$$\frac{pqr}{1+p^2}-s=0,\ (1+p^2)\,t-(1+q^2)\,r=0,\ \ldots (20)$$

o $$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Si sarebbero ottenute direttamente queste ultime equazioni, esprimendo che le equazioni (18) diano per V, e quindi per ρ, dei valori indipendenti da x_1, y_1.

Le coordinate dei punti ai quali si è dato il nome di *umbilichi* (Art. 21) sono dunque determinate dal sistema delle due equazioni (20), combinate con l'equazione della superficie. Questi punti sono isolati, a meno che le due equazioni (20) non diventino accidentalmente identiche: ciò che indicherebbe l'esistenza sulla superficie di una linea che l'analogia conduce a chiamare *linea umbilicale*, e che Monge ha detto *linea delle curvature sferiche*.

Applichiamo ciò all'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$

si ha $$p=-\frac{c^2x}{a^2z}, \quad q=-\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}, \quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}.$$

Poniamo, per semplificare,

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A, \quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B;$$

ci è permesso di fare inoltre l'ipotesi

$$a>b>c,$$

ciò che renderà positive le costanti A, B. Si avranno, per determinare le coordinate x, y degli umbilichi dell'ellissoide, le due equazioni

$$xy=0, \quad x^2-Ay^2-B=0, \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

di cui le sole soluzioni reali sono

$$y=0, \quad x=\pm\sqrt{B}=\pm a\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\right)}.$$

L'ellissoide ha dunque quattro umbilichi situati simmetricamente alla superficie nel piano della sezione principale che comprende il più grande ed il più piccolo asse. Si dimostra d'altronde, nella discussione analitica delle superficie di 2° grado, che i piani tangenti all'ellissoide, nei quattro punti di cui abbiamo determinato la posizione, sono paralleli a quelli che godono della proprietà di segare l'ellissoide secondo dei cerchi.

Se l'ellissoide ha due assi eguali, gli umbilichi come è facile conchiudere dalle formole precedenti, si confondono con i vertici dell'asse di rotazione.

Linee di curvatura.

26. Immaginiamo che, sopra una superficie data (S) si sia tracciata una linea qualunque (s), e costruita la superficie rigata (Σ) di cui la generatrice è assoggettata a passare per questa linea, restando costantemente normale alla superficie (S): in generale la superficie (Σ) è storta, vale a dire che le sue generatrici non hanno linea inviluppo (Art. 12), o che due normali alla superficie (S), condotte per punti infinitamente vicini, presi sulla linea (s), non s'incontrano. Al contrario, se si determina convenientemente la linea (s), la superficie (Σ) divenendo sviluppabile, ha uno spigolo di regresso (σ) toccato da tutte le rette normali alla superficie (S) e che passano per la linea (s): ciò che si esprime, nel linguaggio proprio al metodo infinitesimale, dicendo che due normali infinitamente vicine s'incontrano in un punto situato sulla linea (σ).

Le equazioni della normale alla superficie (S) nel punto (x, y, z) essendo (Art. 10)

$$x' - x + p\,(z' - z) = 0, \quad y' - y + q\,(z' - z) = 0, \ldots \text{(23)}$$

le coordinate del punto corrispondente (x', y', z') sullo spigolo (σ) saranno date dal sistema delle due equazioni (23) e delle loro derivate

$$\left.\begin{aligned} -[1 + p\,(p + qy_1)] + (z' - z)\,(r + sy_1) = 0,\\ -[1 + q\,(p + qy_1)] + (z' - z)\,(s + ty_1) = 0,\end{aligned}\right\}\ldots \text{(24)}$$

prese considerando z come una funzione delle variabili x, y, in virtù dell'equazione della superficie (S), ed y come una funzione implicita di x, data dalla descrizione della linea (s), o dalla descrizione della proiezione di questa linea sul piano

xy. Ora, le equazioni (24) le quali non racchiudono più che la coordinata z', non possono sussistere insieme che mercè l'equazione di condizione

$$y_1^2 [(1+q^2)s - pqt] + y_1 [(1+q^2)r - (1+p^2)t] \\ - (1+p^2)s + pqr = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Dopo che vi si sono sostituiti per p, q, r, s, t, i loro valori in x, y, forniti dall'equazione della superficie (S), l'equazione (25), in cui non entrano più che le quantità variabili x, y, y_1, è l'equazione differenziale comune a tutte le proiezioni sul piano xy delle linee (s) che hanno la proprietà di rendere sviluppabili le superficie (Σ), o secondo le quali due normali infinitamente vicine, elevate sulla superficie (S), hanno la proprietà di incontrarsi.

Quando si suppone il piano xy parallelo al piano tangente della superficie (S) nel punto (x, y, z), e per conseguenza $p = 0$, $q = 0$, l'equazione (25) diviene

$$y_1^2 + \frac{r-t}{s} y_1 - 1 = 0;$$

sicchè essa non differisce dall'equazione (11) che pel cangiamento di α in y_1; d'onde si deve conchiudere: 1° che per ciascun punto della superficie (S) si possono far passare due linee (s_1), (s_2) che si tagliano ad angoli retti, e che godono della proprietà enunciata più sopra; 2° che i piani normali ad (S), condotti secondo le tangenti a queste linee, coincidono con quelli delle sezioni normali principali. Per questa ragione, Monge ha dato alle linee (s_1), (s_2) il nome di *linee di curvatura*. Sopra ogni superficie, o porzione di superficie, si possono generalmente, per ciò che precede, tracciare a volontà due serie (s_1), (s_2) di linee di curvatura che dividono la superficie in quadrilateri curvilinei di cui tutti gli angoli sono retti.

L'eliminazione di y_1 tra le equazioni (24) dà

$$(z'-z)^2 (rt - s^2) - (z'-z) [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] \\ + 1 + p^2 + q^2 = 0; \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

e si ha, dinotando con R il raggio del cerchio osculatore di una delle sezioni principali, di cui il centro è all'intersezione di due normali infinitamente vicine,

$$R = \pm \sqrt{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]} = \pm (z'-z)\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

L'eliminazione di $z'-z$ tra queste due ultime equazioni riprodurrà l'equazione (19), trovata più sopra con un calcolo meno semplice.

27. Le linee di curvatura, nei punti in cui esse si tagliano, sono tangenti alle due sezioni principali; ma queste sezioni, che sono curve piane, e di cui i piani passano per la normale, non coincidono in generale con le linee di curvatura, le quali, ordinariamente, non sono comprese in un piano.

Per esempio, sopra una superficie di rotazione, l'una delle linee di curvatura è il cerchio d'intersezione della superficie con un piano condotto perpendicolarmente all'asse di rotazione, dal punto della superficie pel quale deve passare la linea di curvatura: poichè tutte le normali alla superficie, condotte dai punti presi sulla circonferenza di questo circolo, vanno a tagliare l'asse di rotazione nellò stesso punto; d'onde risulta anche che la porzione della normale, compresa tra l'asse di rotazione e la superficie, è uno dei due raggi di curvatura principali. Ma questa linea di curvatura, quantunque piana nel caso che consideriamo, non coincide con una sezione principale, poichè il suo piano non comprende la normale, a meno che la normale non si trovi accidentalmente perpendicolare all'asse di rotazione.

L'altra linea di curvatura, sopra una superficie di rotazione, è la curva meridiana; poichè le normali alla superficie, condotte per i diversi punti di questa linea, sono tutte comprese nel piano meridiano. Inoltre, la curva meridiana è una sezione principale della superficie, poichè il piano di questa sezione comprende ad un tempo la normale e la tangente ad una delle linee di curvatura. Dunque, per una superficie di rotazione, una delle sezioni principali coincide con una delle linee di curvatura; ed accade lo stesso tutte le volte che una linea di curvatura è piana, e che il suo piano comprende la normale alla superficie. Così, per le superficie cilindriche, le sezioni principali, di cui l'una è la sezione retta, e l'altra la retta generatrice, si confondono rispettivamente con le linee di curvatura.

28. L'equazione (25) diviene identica, e non si può da essa ricavare immediatamente un valore determinato di y_1, quando si hanno le tre equazioni

$$(1+p^2)s-pqr=0,\ (1+p^2)t-(1+q^2)r=0,\ (1+q^2)s-pqt=0,$$

di cui la terza è una conseguenza delle altre due, e che equivalgono al sistema (21); sicchè i punti della superficie per i quali questa circostanza ha luogo, non sono altra cosa che gli umbilichi.

L'equazione (25) essendo soddisfatta identicamente, la normale nel punto (x, y, z) è incontrata dalla normale nel punto infinitamente vicino, in qualunque direzione si prenda questo secondo punto; ma da ciò non deve tirarsi la conclusione che l'umbilico sia un punto nel quale s'intersegano delle linee di curvatura in numero infinito, o che le rette condotte per l'umbilico nel piano tangente siano tutte tangenti a linee di curvatura. Mettiamo, per abbreviare, l'equazione (25) sotto la forma

$$\varphi \cdot y_1^2 + \psi \cdot y_1 + \chi = 0,$$

φ, ψ, χ dinotando delle funzioni di x, y che svaniscono quando il punto (x, y, z) è un umbilico: la differenziazione dell'equazione (25) dà, per determinare y_1, l'equazione di terzo grado

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y_1\right) y_1^2 + \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} y_1\right) y_1 + \frac{d\chi}{dx} + \frac{d\chi}{dy} y_1 = 0.$$

Secondo che questa equazione ha o non ha tutte le sue radici reali, passano tre linee di curvatura per l'umbilico o non ne passa che una sola. Se questa equazione è ancora resa identica dai valori di x, y che convengono all'umbilico, si differenzia alla sua volta, ciò che dà un'equazione di quarto grado in y_1; e secondo che questa nuova equazione ha quattro o due radici reali, o non ha che radici immaginarie, l'umbilico è il punto d'intersezione di quattro o di due linee di curvatura, o pure non passa alcuna linea di curvatura per l'umbilico, e così di seguito. Finalmente, quando i valori di x, y che convengono all'umbilico, rendono identiche l'equazione (25) e tutte le sue derivate successive, l'umbilico è un punto in cui s'intersegano delle linee di curvatura in tutte le direzioni. Questo caso si presenta per i vertici delle superficie di rotazione, i quali godono manifestamente della proprietà caratteristica degli umbilichi (quando essi non sono però punti salienti), ed in cui vengono ad intersegarsi tutt'i meridiani che sono linee di curvatura di queste superficie.

Facciamo l'applicazione di ciò che precede all'ellissoide che si è considerato nell'Art. 25: l'equazione (25) diviene

$$Axy\,y_1^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\,y_1 - xy = 0; \ldots\ldots (27)$$

ed essa ha per derivata

$$(2Axy_1 + x^2 - Ay^2 - B)\,y_2 + Axy_1^3 + Ayy_1^2 + (x - 2Ay)\,y_1 - y = 0,$$

equazione che si riduce ad $Ay_1^3 + y_1 = 0$, per i valori $y = 0$, $x = \pm\sqrt{B}$, relativi agli umbilichi. Quest'ultima equazione non ammette che la radice reale $y_1 = 0$, per essere A un coefficiente positivo. Non passa dunque che una linea di curvatura per gli umbilichi dell'ellissoide a tre assi disuguali, e questa linea è la sezione che comprende il più grande ed il più piccolo asse.

Se si pone $a = b$, nel qual caso l'ellissoide diviene di rotazione intorno al suo asse minore, preso per asse delle z, si ha $A = 1$, $B = 0$; e le coordinate degli umbilichi sono $x = 0$, $y = 0$, poichè in effetto questi umbilichi si confondono con i poli dell'ellissoide schiacciato. L'equazione (27) può mettersi allora sotto la forma

$$(yy_1 + x)\ (xy_1 - y) = 0,$$

ed essa si decompone in

$$yy_1 + x = 0, \quad xy_1 - y = 0.$$

Per $x = 0$, $y = 0$, il valore di y_1 dato dalla prima equazione è immaginario, e quello che dà la seconda equazione resta affetto da un'indeterminazione reale: come ciò deve essere, poichè tutt' i meridiani che si proiettano in xy secondo rette che passano per l'origine delle coordinate, sono altrettante linee di curvatura dell'ellissoide.

Quando si fa $b = c$, nel qual caso l'ellissoide viene di rotazione intorno al suo asse maggiore preso per quello delle x, si ha $A = 0$, $B = a^2$, e l'equazione (27) si risolve nel sistema

$$y_1 = \infty\,, \quad (x^2 - a^2)\,y_1 - xy = 0.$$

Se s'introducono nella derivata dell' equazione precedente i valori delle coordinate dei poli o degli umbilichi, vale a dire $x = \pm a$, $y = 0$, si ricaverà $y_1 = 0$; così y_1 non è suscettibile in questi punti che dei due valori $0, \infty$. In effetto, i meridiani si proiettano in xy secondo delle ellissi che vengono tutte a tagliare perpendicolarmente l'asse delle x, ad eccezione del meridiano di cui la proiezione è lo stesso asse delle x.

29. Ai due sistemi di linee di curvatura rettangolari (s_1), (s_2) corrispondono (Art. 26) due sistemi di superficie sviluppabili (Σ_1), (Σ_2), e di spigoli di regresso (σ_1), (σ_2). Il luogo degli spigoli di regresso del primo sistema è una certa superficie, e quello degli spigoli di regresso del secondo sistema è un'altra superficie; o piuttosto i due sistemi di superficie sviluppabili, presi insieme, hanno per luogo dei loro spigoli di regresso una superficie a due falde (σ_1, σ_2), ciascuna falda riferendosi a ciascuno dei sistemi rettangolari.

Per ottenere in x', y', z' l'equazione di questa superficie a due falde, che è anche il luogo dei centri di curvatura delle sezioni principali della superficie (S), bisognerebbe eliminare x, y, z tra le equazioni (23), (26) e quella della superficie (S).

Ciascun raggio di curvatura principale, toccando uno degli spigoli di regresso, tocca la superficie che è il luogo di tutti questi spigoli: la superficie dei centri delle curvature principali è dunque, rispetto alla superficie primitiva, l'analoga della sviluppata (evoluta) di una curva piana rispetto alla curva sviluppante (involuta).

I due centri delle curvature principali, per uno stesso punto della superficie (S), trovandosi sulla stessa normale, ne risulta che ciascuna normale alla superficie (S) tocca ciascuna delle due falde della superficie (σ_1, σ_2). Se si conducono per questa normale due piani tangenti rispettivamente alle due falde, questi due piani sono rettangolari, in virtù della proprietà essenziale delle linee di curvatura. Dunque le due falde della superficie dei centri di curvatura hanno tra loro tali rapporti di forma, che, guardate da un punto qualunque O, i loro *contorni apparenti* s'intersegano ad angoli retti. Infatti, i contorni apparenti delle due falde della superficie (σ_1, σ_2) sono le linee di contatto di queste falde e delle superficie coniche circoscritte, che hanno il vertice in O. Ora queste due superficie coniche hanno una generatrice comune, che è la normale condotta dal punto O alla superficie (S), e di più i loro piani tangenti secondo questa generatrice sono rettangolari.

FINE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

CALCOLO INTEGRALE.

Tipografia A. Trani Conte di Mola 13.

TRATTATO

SUL

CALCOLO INTEGRALE

E LE SUE APPLICAZIONI

CON MOLTI ESEMPII.

PER

I. TODHUNTER, M. A.

SOCIO E PRINCIPALE LETTORE DI MATEMATICA NEL COLLEGIO
DI S. GIOVANNI A CAMBRIDGE.

Versione dall' inglese con aggiunte

PER

G. BATTAGLINI

Prof. di Geometria superiore nell' Università di Napoli.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Str. di Chiaia 60.
1870.

PREFAZIONE.

Nello scrivere il presente trattato sul *Calcolo Integrale*, si è avuto in mira di comporre un' opera ad un tempo elementare e completa — adatta per l'uso dei principianti, e sufficiente ai bisogni degli studenti provetti. Nella scelta delle proposizioni e nel modo di stabilirle, ho cercato di esibire interamente e con chiarezza i principii del soggetto, e di illustrare tutti i loro più importanti risultati. Il procedimento di *sommazione* è stato ripetutamente messo in vista, nello scopo di fissar l' attenzione dello studente sulle nozioni che formano il vero fondamento del Calcolo Integrale stesso, come anche delle sue più importanti applicazioni. Una considerabile parte dell'opera è stata dedicata alle ricerche delle lunghezze e delle aree delle curve e dei volumi dei solidi, e si è tentato di spiegare quelle difficoltà che ordinariamente rendono perplessi i principianti — specialmente rispetto ai *limiti* delle integrazioni.

La trasformazione degl' integrali è una delle parti più interessanti del Calcolo Integrale, e l'esperienza degl'insegnanti mostra che i modi soliti di trattarla non sono esenti da oscurità. Ho adottato perciò un metodo diverso da quelli dei precedenti scrittori elementari, ed ho cercato di renderlo facilmente intelligibile con minuta esposizione, e con la soluzione di diversi problemi.

Il *Calcolo delle Variazioni* sembra esigere un posto nel presente trattato così convenientemente come l'ordinaria teoria dei valori massimi e minimi è inclusa nel Calcolo Differenziale. L'ultimo capitolo del trattato è perciò dedicato a questo argomento; e si ha speranza che la teoria e le illustrazioni ivi esposte si troveranno, per rispetto alla semplicità e chiarezza, adattate ai bisogni degli studenti.

Affinchè lo studente possa trovare nel volume tutto ciò che egli richiede, si è aggiunta ai diversi capitoli un'ampia collezione di esempii per esercizio. Questi esempii sono stati scelti dalle Memorie degli Esami del Collegio e della Università, e sono stati accuratamente verificati, sicchè si crede che ben pochi errori si troveranno tra essi.

I. TODHUNTER.

Collegio di S. Giovanni
Gennaio 1862.

N. B. Le aggiunte al Calcolo Integrale, contenute in questo volume, sono state tratte dal *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions* del Cournot.

Il Traduttore.

INDICE.

AGGIUNTE.

Pagina.	Linea.	ERRORI.	CORREZIONI. Si legga.
20	14	$\int e^{-x} \cos x dx$	$\int e^{-x} \cos^3 x dx$
22	16	$a + b^n$	$a + bx^n$
28	20	e P	e P'
40	16	$\int \frac{x^m X^p}{m + np}$	$\frac{x^m X^p}{m + np}$
48	11	$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}$	$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}$
95	9	$\sqrt{(a^2 - x^3)}$	$\sqrt{(a^2 - x^2)}$
»	21	dal	del
127	18	e	è
160	16	elementi	gli elementi
248	1	e^{bx}	e^{-bx}
250	7	227	277
279	3	$\frac{(2n-1)\pi x}{2}$	$\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$
284	10	$n = 1$	$n - 1$
296	9	δp_1	δq_1
305	21	$\delta p_0 Q$	$\delta p_0 Q_0$

CALCOLO INTEGRALE.

CAPITOLO I.

SIGNIFICATO DELL'INTEGRAZIONE. ESEMPII.

1. Nel Calcolo Differenziale abbiamo un sistema di regole per mezzo delle quali deduciamo da una data funzione una seconda funzione chiamata il coefficiente differenziale della prima; nel Calcolo Integrale dobbiamo ritornare dal coefficiente differenziale alla funzione dalla quale fu dedotto. Non diciamo che questo sia l'*oggetto* del Calcolo Integrale, poichè il problema fondamentale del soggetto si è di effettuare la somma di una certa serie infinita di termini infinitamente piccoli; ma per la soluzione di questo problema dobbiamo conoscere generalmente la funzione di cui una data funzione è il coefficiente differenziale. Questo procediamo ora a mostrare.

2. Dinoti $\varphi(x)$ una funzione di x che rimane finita e continua per tutt'i valori di x compresi tra due valori fissi a e b. Sia $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ una serie di valori compresi tra a e b, sicchè $a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b$ siano in ordine di grandezza ascendente o discendente. Ci proponiamo allora di trovare il limite della serie

$$(x_1 - a)\varphi(a) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1) + (x_3 - x_2)\varphi(x_2) + \ldots\ldots + (b - x_{n-1})\varphi(x_{n-1}),$$

quando $x_1 - a$, $x_2 - x_1, \ldots b - x_{n-1}$ diminuiscono tutte senza limite, e per conseguenza n cresce senza limite.

Si ponga $x_1 - a = h_1$, $x_2 - x_1 = h_2, \ldots b - x_{n-1} = h_n$; così la serie può essere scritta

$$h_1\varphi(a) + h_2\varphi(x_1) \ldots + h_{n-1}\varphi(x_{n-2}) + h_n\varphi(x_{n-1}),$$

e può essere dinotata con $\Sigma h \varphi(x)$, poichè essa è la somma di un numero di termini di cui $h\varphi(x)$ può essere preso come il tipo. Siccome ciascuno dei termini di cui h è il tipo può essere considerato come la differenza tra due valori assegnati successivamente alla variabile x, possiamo usare anche il simbolo $\varphi(x)\Delta x$ come il tipo dei termini da sommarsi, e $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ per la somma.

Possiamo mostrare immediatamente che $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ non può mai eccedere una certa quantità finita. Infatti dinoti A il massimo valore numerico che $\varphi(x)$ può avere quando x è compreso tra a e b; allora $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ è numericamente minore di $(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) A$, vale a dire minore di $(b-a)A$.

Procediamo ora a determinare il limite di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$. Sia $\psi(x)$ una funzione di x tale che $\varphi(x)$ sia il suo coefficiente differenziale rispetto ad x. Allora conosciamo che il limite di $\dfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$ quando h diminuisce indefinitamente è $\varphi(x)$. Quindi possiamo porre

$$\begin{aligned}
\psi(x_1) - \psi(a) &= h_1 \{\varphi(a) + \rho_1\}, \\
\psi(x_2) - \psi(x_1) &= h_2 \{\varphi(x_1) + \rho_2\}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi(x_{n-1}) - \psi(x_{n-2}) &= h_{n-1} \{\varphi(x_{n-2}) + \rho_{n-1}\}, \\
\psi(b) - \psi(x_{n-1}) &= h_n \{\varphi(x_{n-1}) + \rho_n\},
\end{aligned}$$

in cui $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ in ultimo svaniscono. Da queste equazioni abbiamo con l'addizione

$$\psi(b) - \psi(a) = \Sigma\varphi(x)\Delta x + \Sigma h\rho.$$

Ora $\Sigma h\rho$ è minore di $(b-a)\rho'$ in cui ρ' dinota la più grande delle quantità $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$; quindi $\Sigma h\rho$ in ultimo svanisce, ed otteniamo questo risultato, *il limite di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ quando ciascuna delle quantità di cui Δx è il tipo diminuisce indefinitamente è $\psi(b) - \psi(a)$.*

3. La notazione in uso per esprimere il risultato precedente è

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a);$$

il simbolo $\int$ è un'abbreviazione della parola « somma, » e dx rappresenta il Δx di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$.

4. Supponiamo che $h_1, h_2, \ldots h_n$ siano tutti eguali; allora ciascuno di essi è eguale a $\frac{b-a}{n}$, ed x_r è eguale ad $a + \frac{r}{n}(b-a)$.

Quindi $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ è equivalente alla seguente direzione, « si divida $b-a$ in n parti eguali, ciascuna parte essendo h; in $\varphi(x)$ si sostituiscano per x successivamente $a, a+h, a+2h, \ldots a+(n-1)h$; si aggiungano questi valori insieme, si moltiplichi la somma per h e poi si diminuisca h senza limite ». Se queste operazioni sono effettuate avremo per risultato $\psi(b) - \psi(a)$, in cui $\psi(x)$ è la funzione di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale rispetto ad x.

Lo studente adunque deve osservare accuratamente che per fondamento del Calcolo Integrale abbiamo un certo *teorema* ed una corrispondente *notazione*. Il *teorema* è il seguente: sia $\psi(x)$ una funzione di x, e $\varphi(x)$ il suo coefficiente differenziale rispetto ad x; sia n un intero positivo ed $nh = b - a$; allora il limite quando n cresce indefinitamente di

$$h\left\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(b-h)\right\}$$

è $\psi(b) - \psi(a)$.

La *notazione* si è che questo limite è dinotato da $\int_a^b \varphi(x)\, dx$, sicchè

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \psi(b) - \psi(a).$$

Come un caso particolare possiamo supporre che a sia zero; allora $nh = b$, ed il limite quando n cresce indefinitamente di

$$h\left\{\varphi(0) + \varphi(h) + \varphi(2h) + \ldots + \varphi(b-h)\right\}$$

è dinotato da $\int_0^b \varphi(x)\, dx$, ed è eguale a $\psi(b) - \psi(0)$.

5. Un singolo termine come $\varphi(x)\,\Delta x$ si chiama frequentemente un *elemento*. Si può osservare che il *limite* di $\Sigma\varphi(x)\,\Delta x$ non sarà alterato in valore se omettiamo un numero *finito* dei suoi elementi, o aggiungiamo un numero

finito di simili elementi; poichè nel limite ciascun elemento è indefinitamente piccolo, ed un numero *finito* di quantità indefinitamente piccole in ultimo svanisce.

6. Il procedimento precedente si chiama *Integrazione;* la quantità $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ si dice un *integrale definito*, ed a e b sono chiamati i *limiti dell'integrale.* Poichè il valore di questo integrale definito è $\psi(b) - \psi(a)$ dobbiamo, quando una funzione $\varphi(x)$ deve essere integrata tra limiti assegnati, prima trovare la funzione $\psi(x)$ di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale. Per esprimere il legame tra $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ abbiamo

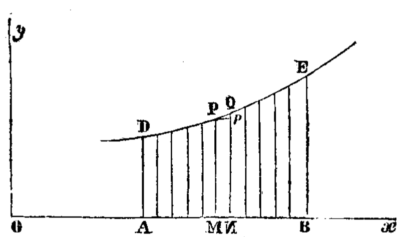
$$\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx},$$

e questo è anche dinotato dall'equazione

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x).$$

In una equazione come l'ultima, in cui non abbiamo limiti assegnati, asseriamo semplicemente che $\psi(x)$ è la funzione da cui si può ottenere $\varphi(x)$ per mezzo della differenziazione; $\psi(x)$ è quì chiamata l'integrale *indefinito* di $\varphi(x)$.

7. Il problema di trovare le aree delle curve fu uno di quelli che diedero origine al Calcolo Integrale, e fornisce un'illustrazione degli articoli precedenti.



Sia DPE una curva di cui l'equazione è $y = \varphi(x)$, e supponiamo si voglia trovare l'area racchiusa tra questa curva, l'asse delle x, e le ordinate corrispondenti alle ascisse a e b. Sia $OA = a$, $OB = b$; si divida la distanza AB in n

intervalli eguali e si tirino le ordinate nei punti di divisione. Si supponga $OM = a + (r-1)h$, allora l'area del parallelogrammo $PMNp$ è

$$h\varphi\{a + (r-1)h\}.$$

La somma ottenuta assegnando ad r in questa espressione tutt' i valori da 1 ad n differisce dall'area richiesta della curva per la somma di tutte le porzioni analoghe al triangolo PQp, e come quest'ultima somma evidentemente è minore della più grande delle figure di cui $PMNQ$ ne è una, possiamo, diminuendo sufficientemente h, ottenere un risultato che differisce tanto poco quanto ci piace dall'area richiesta. Quindi l'area della curva è il limite della serie

$$h\left\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots\ldots + \varphi(b-h)\right\},$$

ed è eguale a $\psi(b) - \psi(a)$.

8. Se $\psi(x)$ è la funzione da cui risulta $\varphi(x)$ con la differenziazione, noi dinotiamo ciò con l'equazione

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x),$$

e procediamo ora ai metodi per trovare $\psi(x)$ quando è data $\varphi(x)$. Abbiamo mostrato, *Cal. Dif.* Art. 102, che se due funzioni hanno lo stesso coefficiente differenziale rispetto ad una variabile esse possono differire solamente per una quantità costante; quindi se $\psi(x)$ è una funzione che ha $\varphi(x)$ per suo coefficiente differenziale rispetto ad x, allora $\psi(x) + C$, in cui C è una quantità indipendente da x, è la sola forma che può avere il medesimo coefficiente differenziale. Quindi, in prosieguo, quando asseriamo che una funzione è l'integrale di una proposta funzione, possiamo se ci piace aggiungere a questo integrale una quantità costante.

L'integrazione adunque apparirà per qualche tempo essere semplicemente l'*inversa* della differenziazione, ed avremmo potuto definirla in tal modo; abbiamo però preferito d'introdurre dal principio la nozione di *sommazione* poichè essa s'incontra in molte delle più importanti applicazioni del soggetto.

Possiamo osservare che se $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sono funzioni di x,

$$\int \{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\}\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx;$$

o al più le due espressioni che asseriamo essere eguali possono differire solamente per una costante, infatti se le differenziamo entrambe arriviamo allo stesso risultâto, cioè, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

Inoltre, se c è una quantità costante

$$\int c\varphi(x)\,dx = c\int \varphi(x)\,dx;$$

o al più le due espressioni possono differire solamente per una costante.

9. *Integrazione immediata.*

Quando una funzione si riconosce essere il coefficiente differenziale di un'altra funzione conosciamo allora l'integrale della prima. La seguente lista dà gl'integrali delle differenti funzioni semplici;

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \qquad \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a}, \qquad \int e^x\,dx = e^x,$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad = -\cos^{-1}\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}.$$

10. *Integrazione per sostituzione.*

Il procedimento dell'integrazione è alle volte facilitato sostituendo per la variabile una funzione di una nuova variabile. Supponiamo $\varphi(x)$ la funzione da integrarsi, ed a e b i limiti dell'integrale. È evidente che possiamo supporre x essere una funzione di una nuova variabile z, purchè la funzione scelta sia capace di prendere tutt'i valori di x richiesti nella integrazione. Si ponga adunque $x = f(z)$, e siano a' e b' i valori di z, che rendono $f(z)$ o x eguale ad a e b rispettivamente; così $a = f(a')$ e $b = f(b')$. Si supponga ora che $\psi(x)$ sia la funzione di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale, cioè si supponga $\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$; allora

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a)$$
$$= \psi\{f(b')\} - \psi\{f(a')\}.$$

Ma per i principii del Calcolo Differenziale,

$$\frac{d\psi\{f(z)\}}{dz} = \varphi\{f(z)\}f'(z);$$

quindi $$\psi\{f(b')\} - \psi\{f(a')\} = \int_{a'}^{b'} \varphi\{f(z)\}f'(z)\,dz$$
$$= \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\frac{dx}{dz}\,dz;$$

così $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\frac{dx}{dz}\,dz.$$

Questo risultato possiamo scriverlo semplicemente così

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)\frac{dx}{dz}\,dz,$$

purchè ci rammentiamo che quando il primo integrale è preso tra certi limiti a e b, l'ultimo deve essere preso tra i limiti corrispondenti a' e b'.

11. Come un esempio dell'articolo precedente si cerchi $\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Si ponga $x = a - z$, allora $\frac{dx}{dz} = -1$, e $2ax - x^2 = a^2 - z^2$. Così

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \int \frac{1}{\sqrt{(2ax - x^2)}}\frac{dx}{dz}\,dz = -\int \frac{dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{z}{a} = \cos^{-1}\frac{a - x}{a} - \operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}.$$

Inoltre, si cerchi $\int \frac{dx}{x\sqrt{(2ax - a^2)}}$. Si ponga $x = \frac{a}{1 - z}$, così

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a}{(1 - z)^2}, \text{ ed } \int \frac{dx}{x\sqrt{(2ax - a^2)}} = \int \frac{1}{x\sqrt{(2ax - a^2)}}\frac{dx}{dz}\,dz$$

$$= \int \frac{dz}{a\sqrt{\{2(1-z)-(1-z)^2\}}} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{sen}^{-1} z = \frac{1}{a}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x-a}{x}.$$

Quì abbiamo trovato gl' integrali proposti sostituendo per x nel modo indicato nell' articolo precedente. Questo procedimento spesso semplificherà un integrale proposto, ma nessuna regola può darsi per guidare lo studente circa la migliore supposizione da fare; questo punto deve essere lasciato all' osservazione ed alla pratica.

12. *Integrazione per parti.*

Dall' equazione $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

deduciamo integrando i due membri,

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

onde
$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx.$$

L' uso di questa formola si dice « integrazione per parti ».

Per un caso particolare si supponga $v = x$; allora otteniamo

$$\int u\,dx = ux - \int x\frac{du}{dx}dx.$$

Per esempio, si consideri $\int x\cos ax\,dx$. Poichè

$$\cos ax = \frac{1}{a}\frac{d\,\mathrm{sen}\,ax}{dx},$$

possiamo scrivere l' espressione proposta nella forma

$$\int \frac{x}{a}\frac{d\,\mathrm{sen}\,ax}{dx}dx,$$

e questa, per la formola, supponendo $u = \frac{x}{a}$ e $v = \mathrm{sen}\,ax$,

$$= \frac{x\,\mathrm{sen}\,ax}{a} - \int \frac{\mathrm{sen}\,ax}{a}dx$$

$$= \frac{x \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2}.$$

Inoltre, $$\int x^2 \cos ax\, dx = \int \frac{x^2}{a} \frac{d \operatorname{sen} ax}{dx} dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} - \int \frac{2x}{a} \operatorname{sen} ax\, dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} + \int \frac{2x}{a^2} \frac{d \cos ax}{dx} dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \int \frac{2 \cos ax}{a^2} dx$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \frac{2 \operatorname{sen} ax}{a^3}.$$

Ancora, $$\int e^{cx} \operatorname{sen} ax\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} ax}{c} \frac{de^{cx}}{dx} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ax}{c} e^{cx} - \int \frac{ae^{cx} \cos ax}{c} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ax}{c} e^{cx} - \int \frac{a \cos ax}{c^2} \frac{d e^{cx}}{dx} dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} ax}{c} e^{cx} - \frac{a \cos ax}{c^2} e^{cx} - \int \frac{a^2 \operatorname{sen} ax}{c^2} e^{cx}\, dx.$$

Trasponendo,

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \int e^{cx} \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{e^{cx}}{c} \left(\operatorname{sen} ax - \frac{a}{c} \cos ax\right),$$

quindi $$\int e^{cx} \operatorname{sen} ax dx = \frac{e^{cx} (c \operatorname{sen} ax - a \cos ax)}{a^2 + c^2}.$$

Similmente possiamo mostrare che

$$\int e^{cx} \cos ax dx = \frac{e^{cx} (c \cos ax + a \operatorname{sen} ax)}{a^2 + c^2}.$$

13. Il coefficiente differenziale di una funzione si può sempre trovare con l'uso delle regole date nel Calcolo Differenziale, ma non è così per l'integrale di una funzione assegnata. Conosciamo, per esempio, che se m è un numero, positivo o negativo, eccetto -1, allora $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, ma quando $m=-1$ ciò non è vero; in questo caso abbiamo $\int \frac{dx}{x} = \log x$. Se però non avessimo previamente definito il termine *logaritmo*, ed investigate le proprietà dei *logaritmi*, saremmo stati inabilitati a stabilire quale funzione abbia $\frac{1}{x}$ per suo coefficiente differenziale. Così possiamo trovarci limitati nel nostro potere di integrazione dal non aver dato un nome ad ogni funzione particolare ed investigate le sue proprietà.

Per effettuare una proposta integrazione, sarà spesso necessario di adoperare artifizii che possono essere suggeriti solamente dalla pratica.

14. Aggiungiamo pochi esempi diversi.

Es. (1). $\int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx.$

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = x\sqrt{(a^2-x^2)} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}, \text{ per l'Art. 12},$$

supponendo $u=\sqrt{(a^2-x^2)}$ e $v=x$.

$$\text{Ed} \int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,dx = \int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

quindi, per addizione,

$$2\int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

$$\text{onde} \quad \int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \frac{x\sqrt{(a^2-x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}. \text{ Art. 9.}$$

Es. (2). $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}.$

Si ponga $\sqrt{(x^2+a^2)} = z - x$, onde $a^2 = z^2 - 2zx$,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{z-x}{z}.$$

Quindi $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \frac{dx}{dz} dz = \int \frac{dz}{z} = \log z$$
$$= \log \{ x + \sqrt{(x^2+a^2)} \}.$$

Es. (3). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Come nell'Es. (2), possiamo mostrare che il risultato è

$$\log \{ x + \sqrt{(x^2-a^2)} \}.$$

Es. (4). $\displaystyle\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx$.

$$\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = x\sqrt{(x^2+a^2)} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \text{ per l'Art. 12.}$$

Inoltre

$$\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}};$$

quindi, per addizione,

$$2\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = x\sqrt{(x^2+a^2)} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}};$$

onde $$\int \sqrt{(x^2+a^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(x^2+a^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \log \{ x + \sqrt{(x^2+a^2)} \}.$$

Similmente

$$\int \sqrt{(x^2-a^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2} \log \{ x + \sqrt{(x^2-a^2)} \}.$$

Es. (5). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} + x^2\right)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}\right\}}}.$$

Ponendo $x+\frac{b}{2c}=z$, il nostro integrale diviene, per (2) e (3),

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\log\{2cx+b+2\sqrt{c}\,\sqrt{(a+bx+cx^2)}\},$$

in cui omettiamo la quantità costante $\frac{1}{\sqrt{c}}\log 2c$.

In modo simile, ponendo $z=x+\frac{b}{2c}$ possiamo far dipendere $\int\sqrt{(a+bx+cx^2)}\,dx$ dall' Es. (4).

Es. (6). $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}-x^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left\{\frac{4ac+b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2\right\}}}.$$

Si ponga h^2 per $\frac{4ac+b^2}{4c^2}$ e z per $x-\frac{b}{2c}$, allora l' integrale diviene $\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dz}{\sqrt{(h^2-z^2)}}$, il quale dà $\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}^{-1}\frac{z}{h}$, o

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{(4ac+b^2)}}.$$

In modo simile, ponendo $z=x-\frac{b}{2c}$ possiamo far dipendere $\int\sqrt{(a+bx-cx^2)}\,dx$ dall'Es. (1).

Es. (7). $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Si ponga $x=\frac{1}{y}$, allora $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}=\int\frac{1}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}\frac{dx}{dy}dy$

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{(1-a^2y^2)}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-y^2\right)}} = -\frac{1}{a}\,\text{sen}^{-1}ay$$

$$= -\frac{1}{a}\,\text{sen}^{-1}\frac{a}{x}.$$

Poichè $\text{sen}^{-1}\frac{a}{x} + \cos^{-1}\frac{a}{x} = \frac{\pi}{2}$, una costante, possiamo scrivere l'ultimo risultato anche così,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{x}.$$

Es. (8). $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}$.

Ponendo $x = \frac{1}{y}$, come nell'Es. (7), deduciamo per il risultato richiesto

$$\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}.$$

Es. (9). $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$ ed $\int \frac{dx}{x-a}$.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}},$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a).$$

Questi sono ovvii se differenziamo i secondi membri.

Es. 10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a} \log (x - a) - \frac{1}{2a} \log (x + a)$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a}.$$

Questo suppone $\dfrac{x-a}{x+a}$ positivo; se $\dfrac{x-a}{x+a}$ fosse negativo, dovremmo scrivere

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a - x}{a + x}.$$

Es. (11). $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}$.

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c^2}}.$$

Se $\dfrac{4ac - b^2}{4c^2}$ è negativo, otteniamo l'integrale con l'Es. (10), cioè

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}} \log \frac{2cx + b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2cx + b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}.$$

Se $\dfrac{4ac - b^2}{4c^2}$ è positivo, allora per l'Art. 9, l'integrale è

$$\frac{2}{\sqrt{(4ac - b^2)}} \tan^{-1} \frac{2cx + b}{\sqrt{(4ac - b^2)}}.$$

Es. (12). $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{a + bx + cx^2} dx$.

$$\int \frac{Ax + B}{a + bx + cx^2} dx = \int \frac{Ax + \frac{Ab}{2c} + B - \frac{Ab}{2c}}{a + bx + cx^2} dx$$

$$= \frac{A}{2c} \int \frac{2cx + b}{a+bx+cx^2} dx + \left(B - \frac{Ab}{2c}\right) \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}.$$

Il primo integrale è $\dfrac{A}{2c} \log (a + bx + cx^2)$, e l'altro è stato trovato nell'Es. (11).

Es. (13). $\int \frac{dx}{\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dz}{1-z^2}, \text{ se } z = \operatorname{sen} x,$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \text{ per l'Es. (10)},$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = \log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Similmente $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log \tan \frac{x}{2}.$$

Es. (14). $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, ed $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x}$.

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{dx}{a\left(\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}\, dx}{a + b + (a-b)\tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2}, \text{ se } z = \tan \frac{x}{2}.$$

Quindi, se a è maggiore di b, l'integrale è

$$\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \tan^{-1} \frac{z\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}} \text{ o } \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{(a-b)}\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{(a+b)}};$$

e se a è minore di b,

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}} \log \frac{z\sqrt{(b-a)} + \sqrt{(b+a)}}{z\sqrt{(b-a)} - \sqrt{(b+a)}},$$

o $$\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}} \log \frac{\sqrt{(b-a)}\tan \frac{x}{2} + \sqrt{(b+a)}}{\sqrt{(b-a)}\tan \frac{x}{2} - \sqrt{(b+a)}}.$$

Per trovare $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x}$ si ponga $x = \frac{\pi}{2} + z$; così l'integrale diviene $\int \frac{dx}{a + b \cos z}$, che è stato ora trovato. O pure possiamo procedere così,

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{a\left(\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) + 2b \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} \, dx}{a\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2b \tan \frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{dz}{a(1 + z^2) + 2bz}, \text{ se } z = \tan \frac{x}{2}.$$

Si ponga $y = z + \frac{b}{a}$, e l'integrale diviene

$$\frac{2}{a}\int \frac{dy}{y^2 + 1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

e questo può essere trovato come prima.

In ciascuno di questi esempii, poichè abbiamo trovato l'integrale *indefinito*, possiamo determinare immediatamente l'integrale definito tra limiti assegnati. Per esempio, essendo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \log \{ x + \sqrt{(x^2 + a^2)} \},$$

sarà

$$\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \log [2a + \sqrt{\{(2a)^2 + a^2\}}] - \log \{a + \sqrt{(a^2 + a^2)}\}$$

$$= \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}.$$

15. L'integrale $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$ si può trovare immediatamente se $\frac{p}{q}$ è un intero positivo, infatti $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si può allora sviluppare col teorema del binomio in una serie finita

di potenze di x, e ciascun termine del prodotto di questa serie per x^{m-1} sarà integrabile immediatamente. Vi sono anche due altri casi nei quali l'integrale si può trovare immediatamente.

Infatti si ponga $\quad a+bx^n=t^q;$

onde $\quad x=\left(\dfrac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{qt^{q-1}}{nb}\left(\dfrac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}.$

Quindi $\quad \displaystyle\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\frac{dx}{dt}dt.$

$$=\frac{q}{nb}\int t^{p+q-1}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dt.$$

Se $\dfrac{m}{n}$ *è un intero positivo* possiamo sviluppare $(t^q-a)^{\frac{m}{n}-1}$ in una serie finita di potenze di t, e ciascun termine del prodotto di questa serie per t^{p+q-1} sarà integrabile immediatamente.

Inoltre, $\quad \displaystyle\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=\int x^{\frac{pn}{q}+m-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}dx;$

e pel primo caso, se poniamo $ax^{-n}+b=t^q$, questo è integrabile immediatamente se

$$\frac{\dfrac{pn}{q}+m}{-n}$$

è un intero positivo; vale a dire, se $\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}$ *è un intero negativo.*

Nel primo caso, se $\dfrac{m}{n}$ fosse un intero *negativo* l'integrale potrebbe ancora trovarsi, come vedremo nel capitolo seguente, e similmente, nel secondo caso, se $\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}$ fosse un intero *positivo:* ma siccome in questi casi sono necessarie ulteriori riduzioni, non diciamo che le espressioni sono integrabili *immediatamente.*

Es. (1). $\quad \displaystyle\int x^2(a+x)^{\frac{1}{2}}dx.$

Quì $\frac{m}{n} = 3$: si prenda $a + x = t^2$; l'integrale diviene

$$2\int (t^2 - a)^2 t^2\, dt \text{ o } 2\int (t^6 - 2at^4 + a^2t^2)\, dt,$$

che dà

$$2\left\{\frac{t^7}{7} - \frac{2at^5}{5} + \frac{a^2t^3}{3}\right\};$$

così $\int x^2 (a+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = 2(a+x)^{\frac{3}{2}} \left\{\frac{(a+x)^2}{7} - \frac{2a}{5}(a+x) + \frac{a^2}{3}\right\}$.

Es. (2). $\int \frac{dx}{x^2 (1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Quì $m = -1 \quad n = 2, \quad \frac{p}{q} = -\frac{1}{2},$

onde $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = -1.$

Si ponga $x^{-2} + 1 = t^2;$

onde $x^2 = \frac{1}{t^2 - 1},$

e $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$

Adunque $$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{dx}{dt}}{x^3 (x^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}}\, dt.$$

Si sostituiscano per x e $\frac{dx}{dt}$ i loro valori, e questo diviene $-\int dt$, il quale $= -t$ o $-\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$.

Es. (3). $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Quì $m = 1, \quad n = 2, \quad \frac{p}{q} = -\frac{3}{2},$

onde
$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=-1.$$

Si ponga
$$a^2x^{-2}+1=t^2,$$

onde
$$x^2=\frac{a^2}{t^2-1},$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{at}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\frac{dx}{dt}}{x^3(a^2x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}dt=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{a^2t}$$
$$=\frac{x}{a^2\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

ESEMPII.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-3x-x^2)}}=\operatorname{sen}^{-1}\frac{3+2x}{\sqrt{13}}.$

2. $\displaystyle\int\log x\,dx=x(\log x-1).$

3. $\displaystyle\int x^n\log x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{\log x-\frac{1}{n+1}\right\}.$

4. $\displaystyle\int\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta+\operatorname{sen}\theta.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\tan^{-1}(e^x).$

6. $\displaystyle\int\sqrt{\left(\frac{m+x}{x}\right)}dx=\sqrt{(mx+x^2)}+m\log\{\sqrt{x}+\sqrt{(m+x)}\}.$

   Questo si può trovare ponendo $x=z^2$.

7. $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx=\frac{1+x^2}{2}\tan^{-1}x-\tfrac{1}{2}x.$

8. $\displaystyle\int(1-\cos x)^2dx=\frac{3x}{2}-2\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}.$

9. $$\int \frac{x\,dx}{(1-x)^3} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2}.$$

10. $$\int \frac{x^2 dx}{a^6 - x^6} = \frac{1}{6a^3} \log \frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3}.$$

11. $$\int \sqrt{(2ax - x^2)}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x-a}{a}.$$

12. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = -\sqrt{(2ax - x^2)} + a\,\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}.$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 13)}} = \log\{x - 3 + \sqrt{(x^2 - 6x + 13)}\}.$$

14. $$\int \frac{1 + \cos x}{x + \mathrm{sen}\,x}\,dx = \log(x + \mathrm{sen}\,x).$$

15. $$\int \frac{x + \mathrm{sen}\,x}{1 + \cos x}\,dx = x \tan\frac{x}{2}.$$

16. $$\int \frac{dx}{x(\log x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}}.$$

17. $$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \log x \cdot \log(\log x) - \log x.$$

18. $$\int \frac{dx}{x + \sqrt{(x^2 - 1)}} = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{(x^2-1)}}{2} + \tfrac{1}{2}\log\{x + \sqrt{(x^2 - 1)}\}.$$

19. $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(x-1)}} = 2\sqrt{(x-1)}\left\{\frac{(x-1)^3}{7} + \tfrac{3}{5}(x-1)^2 + x\right\}.$$

20. $$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,mx\cos nx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\,\frac{a\,\mathrm{sen}(m+n)x - (m+n)\cos(m+n)x}{a^2 + (m+n)^2}$$
$$+ \frac{e^{ax}}{2}\,\frac{a\,\mathrm{sen}(m-n)x - (m-n)\cos(m-n)x}{a^2 + (m-n)^2}.$$

21. $$\int e^{-x}\cos x\,dx = \tfrac{1}{4}\int e^{-x}(\cos 3x + 3\cos x)\,dx$$
$$= \frac{e^{-x}}{40}(3\,\mathrm{sen}\,3x - \cos 3x) + \frac{3e^{-x}}{8}(\mathrm{sen}\,x - \cos x).$$

22. $\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

23. $\int_0^{2a} \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

24. $\int_0^{2a} \text{vers}^{-1} \dfrac{x}{a}\, dx = \pi a$.

Si proceda così; si ponga $\text{vers}^{-1} \dfrac{x}{a} = \theta$, onde $x = a(1 - \cos\theta)$, e l'integrale diviene $\int_0^{\pi} a\theta \,\text{sen}\,\theta\, d\theta$.

25. $\int_0^{2a} x\, \text{vers}^{-1} \dfrac{x}{a}\, dx = \dfrac{5\pi a^2}{4}$.

26. $\int_0^{2a} x^2\, \text{vers}^{-1} \dfrac{x}{a}\, dx = \dfrac{11\pi a^3}{6}$.

27. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{sen}^2\theta \cos^3\theta\, d\theta = \dfrac{2}{15}$.

28. $\int \dfrac{dx}{\text{sen}\, x + \cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \log \tan \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

29. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{(a + bx + cx^2)}}$.

Si ponga $x = \dfrac{1}{y}$ e questo diviene una forma conosciuta.

30. $\int \dfrac{\sqrt{(1 - x^2)}}{x^4} \text{sen}^{-1} x dx = -\dfrac{\text{sen}^{-1} x (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \dfrac{1}{6x^2} - \dfrac{\log x}{3}$.

Questo si può ottenere ponendo $\text{sen}^{-1} x = \theta$.

31. $\int \dfrac{\text{sen}^{-1} x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \theta \tan\theta + \log\cos\theta$, in cui $\text{sen}\,\theta = x$.

32. $\int \dfrac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{1}{a^4}\left(\cot\theta + \dfrac{\cot^3\theta}{3}\right)$, in cui $x = a \cos\theta$.

33. $\int \dfrac{\text{sen}^2 x\, dx}{a + b\cos^2 x} = \left(\dfrac{a + b}{ab^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{a}\tan x}{\sqrt{(a + b)}} - \dfrac{x}{b}$.

34. $\int x^3 \sqrt{(a+bx^2)}\,dx = \left(\frac{a+bx^2}{5b^2} - \frac{a}{3b^2}\right)(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}$.

35. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(1+x^2)}} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{(1+x^2)}}{3x^3}$.

36. $\int \tan^{2n}\theta\, d\theta = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \int \tan^{2n-2}\theta\, d\theta$

$= \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \ldots\ldots - (-1)^n x + (-1)^n \theta$,

x essendo $= \tan\theta$.

37. Mostrare che $\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ed $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx$ sono zero se m ed n sono *interi disuguali*, ed $= \frac{\pi}{2}$ se m ed n sono *interi eguali*.

38. $\int \left\{\log\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^3 dx = x\left\{\log\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^3 - 3x\left\{\log\frac{x}{a}\right\}^2 + 6x\log\frac{x}{a} - 6x$.

39. $\int \frac{\cot^{-1}x}{x^2(1+x^2)}\,dx = \frac{\theta^2}{2} - \theta\tan\theta - \log\cos\theta$, in cui $\cot\theta = x$.

40. $\int \frac{2a+x}{a+x}\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}\,dx = \sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{2a\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}$.

41. $\int \frac{\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}}{\sqrt{(2ax-x^2)}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2$.

42. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+c\cos x} = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2)}}\cos^{-1}c$, se c è minore di 1.

43. $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\theta}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{3}{10}\left(e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}\right)$.

44. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{(1+3x^2+x^4)}}$. Si ponga $z = x + \frac{1}{x}$.

45. $\int \frac{(a+b^n)^{\frac{3}{4}}\,dx}{x}$. Si ponga $a + bx^n = z^4$.

CAPITOLO II.

FRAZIONI RAZIONALI.

16. Procediamo all'integrazione di espressioni come

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 \ldots + M'x^m}{A + Bx + Cx^2 \ldots + Nx^n},$$

in cui $A, B, \ldots A', B', \ldots$ sono costanti, sicchè tanto il numeratore che il denominatore sono funzioni razionali finite di x. Se m è eguale ad n, o maggiore di n, possiamo con la divisione ridurre la precedente alla forma di una funzione intera di x, ed una frazione in cui il numeratore è di grado inferiore in x rispetto al denominatore. Siccome la funzione intera di x si può integrare immediatamente, possiamo limitarci al caso di una frazione che ha il suo numeratore almeno di una dimensione inferiore al suo denominatore. Per effettuare l'integrazione risolviamo la frazione in una serie di frazioni più semplici chiamate *frazioni parziali*, la possibilità delle quali procediamo a dimostrare.

Sia $\frac{U}{V}$ una frazione razionale nei suoi minimi termini la quale debba risolversi in una serie di frazioni parziali; si supponga V una funzione di x dell'n^{mo} grado, ed U una funzione di x dell'$(n-1)^{mo}$ grado al più; possiamo senza perdita di generalità supporre il coefficiente di x^n in V essere l'unità. Supponiamo

$$V = (x-a)\,(x-b)^r\,(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)\,(x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \delta^2)^s,$$

sicchè l'equazione $V = 0$ ha

(1) una radice reale $= a$,

(2) r radici reali eguali, ciascuna $= b$,

(3) una coppia di radici immaginarie $\alpha \pm \beta \sqrt{(-1)}$,

(4) s coppie di radici immaginarie, ciascuna essendo $\gamma \pm \delta \sqrt{(-1)}$.

Per la teoria delle equazioni V deve essere il prodotto di fattori della forma che abbiamo supposta, i fattori essendo più o meno in numero. Poichè V è dell'n^{mo} grado abbiamo

$$1+r+2+2s=n.$$

Si ponga

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)^r}+\frac{B_2}{(x-b)^{r-1}}+\frac{B_3}{(x-b)^{r-2}}\cdots\cdots+\frac{B_r}{x-b}$$
$$+\frac{Cx+D}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^s}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^{s-1}}\cdots+\frac{E_sx+F_s}{x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2},$$

in cui $A, B_1, B_2, \ldots C, D, E_1, \ldots$ sono costanti le quali, per giustificare il nostro assunto, dobbiamo mostrare che possano determinarsi in modo da rendere il secondo membro dell'equazione precedente *identicamente* eguale al primo. Se riduciamo tutte le frazioni parziali allo stesso denominatore e le uniamo insieme, abbiamo V per quel denominatore comune, e per numeratore una funzione di x del $(n-1)^{mo}$ grado. Se eguagliamo i coefficienti delle diverse potenze di x in questo numeratore con i coefficienti corrispondenti in U, avremo *n equazioni di primo grado per determinare le n quantità $A, B_1, B_2, \ldots$* e con questi valori di $A, B_1, B_2, \ldots$ il secondo membro dell'equazione precedente diviene *identicamente eguale* al primo, e così $\frac{U}{V}$ è decomposta in una serie di frazioni parziali.

Se V contiene altri fattori semplici come $x-a$, ognuno di tali fattori darà origine ad una frazione come $\frac{A}{x-a}$, ed ogni fattore ripetuto come $(x-b)^r$ darà origine ad una serie di frazioni parziali della forma $\frac{B_1}{(x-b)^r}$, $\frac{B_2}{(x-b)^{r-1}}$, etc. In simil modo altri fattori della forma $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ o $(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^s$ daranno origine ad una frazione o ad una serie di frazioni rispettivamente delle forme sopra indicate.

17. La dimostrazione data nell'Art. 16 non è molto soddisfacente, poichè non abbiamo dimostrato che le n equazioni

di primo grado che adoperiamo per determinare $A, B_1, B_2, \ldots$ sono *indipendenti* e *di accordo tra loro.*

Un metodo di maggior rigore è stato dato in un trattato sul Calcolo Integrale da Mr Homersham Cox, che quì indicheremo brevemente. Si supponga $F(x)$ contenere il fattore $x-a$ ripetuto n volte; abbiamo, se

$$F(x)=(x-a)^n\psi(x),$$

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}\psi(x)}{(x-a)^n\psi(x)}+\frac{\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}}{(x-a)^n}$$

Ora $\varphi(x)-\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}\psi(x)$ svanisce quando $x=a$, ed è perciò divisibile per $x-a$; supponiamo il quoziente dinotato da $\chi(x)$, allora

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=\frac{\chi(x)}{(x-a)^{n-1}\psi(x)}+\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\frac{1}{(x-a)^n}.$$

Questo procedimento può ora essere ripetuto su $\dfrac{\chi(x)}{(x-a)^{n-1}\psi(x)}$, e così con successive operazioni effettuata completamente la decomposizione di $\dfrac{\varphi(x)}{F(x)}$. In questa dimostrazione a può essere o una radice reale o una radice immaginaria dell'equazione $F(x)=0$; se $a=\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$, allora $\alpha-\beta\sqrt{(-1)}$ sarà anche una radice di $F(x)=0$; dinoti b questa radice, allora se addizioniamo le due frazioni parziali

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\frac{1}{(x-a)^n} \text{ e } \frac{\varphi(b)}{\psi(b)}\frac{1}{(x-b)^n},$$

otterremo un risultato libero da $\sqrt{(-1)}$.

18. Rispetto all'integrazione di queste frazioni parziali ci riferiamo agli Esempii (9) e (12) dell'Art. 14 per tutte le forme eccetto $\dfrac{Lx+M}{(x^2-2\gamma x+\gamma^2+\delta^2)^m}$, e questa sarà data quì appresso.

Avendo dimostrato che una frazione razionale può essere decomposta nel modo supposto nell' Art. 16, possiamo far uso di diversi artifizii algebrici per diminuire il lavoro della determinazione di A, B_1, B_2, etc. La più utile considerazione si è, che essendo il numeratore della frazione proposta *identicamente* eguale al numeratore formato aggiungendo insieme le frazioni parziali, se assegniamo un valore *qualunque* alla variabile x l'eguaglianza ancora sussiste.

19. *Determinare la frazione parziale corrispondente ad un fattore semplice di primo grado.*

Supponiamo che $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ rappresenti una frazione da decomporsi, e contenga $F(x)$ il fattore $x-a$ una volta; si ponga

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

in cui A è una costante, e $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ rappresenta la somma di tutte le frazioni parziali eccetto $\frac{A}{x-a}$, ed $F(x) = (x-a)\,\psi(x)$.

Da (1)

$$\varphi(x) = A\psi(x) + (x-a)\,\chi(x) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

In (2), che vale per ogni valore di x, si ponga $x=a$, allora

$$\varphi(a) = A\psi(a),$$

onde

$$A = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}.$$

Poichè $F'(x) = \psi(x) + (x-a)\,\psi'(x)$, abbiamo

$$F'(a) = \psi(a),$$

onde

$$A = \frac{\varphi(a)}{F'(a)}.$$

20. *Determinare le frazioni parziali corrispondenti ad un fattore di primo grado che è ripetuto.*

Supponiamo che $F(x)$ contenga un fattore $x-a$ ripetuto n volte, e sia $F(x) = (x-a)^n\,\psi(x)$. Si ponga

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{n-2}}\ldots\ldots+\frac{A_n}{x-a}+\frac{\chi(x)}{\psi(x)},$$

in cui $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ dinota la somma delle frazioni parziali che nascono dagli altri fattori di $F(x)$. Si moltiplichino ambo i lati dell'equazione per $(x-a)^n$ e si ponga $f(x)$ per $\frac{\varphi(x)}{F(x)}(x-a)^n$; così

$$f(x)=A_1+A_2(x-a)+A_3(x-a)^2\ldots+A_n(x-a)^{n-1}+\frac{\chi(x)}{\psi(x)}(x-a)^n.$$

Si differenziino successivamente i due membri di questa identità e si ponga $x=a$ *dopo* la differenziazione; allora

$$f(a)=A_1,$$
$$f'(a)=A_2,$$
$$f''(a)=1\cdot 2A_3,$$
$$f'''(a)=\lfloor 3 A_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{n-1}(a)=\lfloor n-1 A_n.$$

Così $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono determinati.

21. *Determinare le frazioni parziali corrispondenti ad una coppia di radici immaginarie che non è ripetuta.*

Dinoti $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ la frazione da decomporsi; ed $\alpha\pm\beta\sqrt{(-1)}$ una coppia di radici immaginarie; allora se dinotiamo queste radici con a e b e procediamo come nell'Art. 19, abbiamo per le frazioni parziali

$$\frac{\varphi(a)}{F'(a)}\frac{1}{x-a} \text{ e } \frac{\varphi(b)}{F'(b)}\frac{1}{x-b}.$$

Si supponga $\frac{\varphi(a)}{F'(a)}=A-B\sqrt{(-1)}$; allora poichè $\frac{\varphi(b)}{F'(b)}$ si può ottenere da $\frac{\varphi(a)}{F'(a)}$ cambiando il segno di $\sqrt{(-1)}$, dobbiamo avere $\frac{\varphi(b)}{F'(b)}=A+B\sqrt{(-1)}$. Quindi le frazioni sono

$$\frac{A - B\sqrt{(-1)}}{x - \alpha - \beta\sqrt{(-1)}} \text{ ed } \frac{A + B\sqrt{(-1)}}{x - \alpha + \beta\sqrt{(-1)}};$$

e la loro somma è

$$\frac{2A(x-\alpha) + 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

22. O pure possiamo procedere così. Supponiamo che $x^2 - px + q$ dinoti il fattore quadratico che dà origine alla coppia di radici immaginarie $\alpha \pm \beta\sqrt{(-1)}$; allora si prenda

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{Lx + M}{x^2 - px + q} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)},$$

sicchè $F(x) = (x^2 - px + q)\,\psi(x)$. Si moltiplichi per $F(x)$; così

$$\varphi(x) = (Lx + M)\,\psi(x) + (x^2 - px + q)\,\chi(x) \;\ldots\ldots (1).$$

Ora si attribuisca ad x l'uno o l'altro dei valori che annullano $x^2 - px + q$; allora (1) si riduce a

$$\varphi(x) = (Lx + M)\,\psi(x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora con la sostituzione ripetuta di $px - q$ per x^2 nei due membri di (2), avremo finalmente x a primo grado solamente, sicchè l'equazione prende la forma

$$Px + Q = P'x + Q'.$$

Ora si ponga per x il suo valore $\alpha + \beta\sqrt{(-1)}$ e si eguaglino i coefficienti delle parti impossibili; così

$$P = P' \text{ e quindi anche } Q = Q'.$$

Quì P e Q sono quantità note, e P e Q' racchiudono le quantità ignote L ed M a primo grado solamente, sicchè abbiamo due equazioni di primo grado per trovare L ed M.

23. *Determinare le frazioni parziali corrispondenti ad una coppia di radici immaginarie che è ripetuta.*

Possiamo procedere come nell'Art. 20. O pure possiamo adottare il metodo seguente. Supponiamo che $x^2 - px + q$ dinoti il fattore quadratico che è ripetuto r volte; si prenda

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \frac{L_r x + M_r}{(x^2-px+q)^r} + \frac{L_{r-1}x + M_{r-1}}{(x^2-px+q)^{r-1}} \dots\dots + \frac{L_1 x + M_1}{x^2-px+q} + \frac{\chi(x)}{\psi(x)},$$

sicchè $F(x) = (x^2 - px + q)^r \psi(x)$. Si moltiplichi per $F(x)$; così

$$\varphi(x) = (L_r x + M_r)\,\psi(x) + (L_{r-1}x + M_{r-1})\,(x^2 - px + q)\,\psi(x)$$
$$+ \dots\dots + (x^2 - px + q)^r \chi(x) \dots\dots\dots\dots (1).$$

Ora si attribuisca ad x l'uno o l'altro dei valori che annullano $x^2 - px + q$; così l'equazione si riduce a

$$\varphi(x) = (L_r x + M_r)\,\psi(x).$$

Si proceda come nell'Art. 22, e così si trovano L_r ed M_r. Allora da (1) con la trasposizione abbiamo

$$\varphi(x) - (L_r x + M_r)\,\psi(x) = (L_{r-1}x + M_{r-1})\,(x^2 - px + q)\,\psi(x) + \dots$$

Il secondo membro ha $x^2 - px + q$ per fattore di ciascun termine; quindi siccome i due membri sono *identici* possiamo dividere per questo fattore. Dinoti $\varphi_1(x)$ il quoziente ottenuto a sinistra; allora

$$\varphi_1(x) = (L_{r-1}x + M_{r-1})\,\psi(x) + (L_{r-2}x + M_{r-2})\,(x^2 - px + q)\,\psi(x)$$
$$+ \dots\dots + (x^2 - px + q)^{r-1} \chi(x) \dots\dots\dots\dots (2).$$

Da (2) troviamo L_{r-1} ed M_{r-1} come sopra; allora con la rasposizione e la divisione

$$\varphi_2(x) = (L_{r-2}x + M_{r-2})\,\psi(x) + (L_{r-3}x + M_{r-3})\,(x^2 - px + q)\,\psi(x) + \dots$$

così di seguito finchè tutte le quantità siano determinate.

24. Prendiamo per esempio $\dfrac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + x + 1)^2\,(x+1)^2}$. Si ponga guale ad

$$\frac{L_2 x + M_2}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{L_1 x + M_1}{x^2 + x + 1} + \frac{\chi(x)}{(x+1)^2};$$

allora $x^2 - 3x - 2 = (L_2 x + M_2)\,(x+1)^2$

$$+ (L_1 x + M_1)\,(x^2 + x + 1)\,(x+1)^2 + (x^2 + x + 1)^2 \chi(x) \dots\dots\dots (1).$$

Si supponga $x^2+x+1=0$; così l'equazione si riduce ad

$$\begin{aligned} x^2-3x-2 &= (L_2x+M_2)(x+1)^2 \\ &= (L_2x+M_2)(x^2+2x+1). \end{aligned}$$

Si ponga $-x-1$ per x^2; così

$$\begin{aligned} -4x-3 &= (L_2x+M_2)\,x = L_2x^2+M_2x \\ &= -L_2(x+1)+M_2x; \end{aligned}$$

onde $$-4=-L_2+M_2, \text{ e } -3=-L_2;$$

così $$L_2=3, \text{ ed } M_2=-1.$$

Da (1) con la trasposizione

$$\begin{aligned} x^2-3x-2-(3x-1)(x+1)^2 \\ =(L_1x+M_1)(x^2+x+1)(x+1)^2+(x^2+x+1)^2\chi(x). \end{aligned}$$

Il primo membro è $-3x^3-4x^2-4x-1$; si divida per x^2+x+1; così

$$-(3x+1)=(L_1x+M_1)(x+1)^2+(x^2+x+1)\,\chi(x)\ \ldots\ldots (2).$$

Di nuovo, si supponga $x^2+x+1=0$; così

$$\begin{aligned} -3x-1 &= (L_1x+M_1)(x^2+2x+1)=(L_1x+M_1)\,x \\ &= -L_1(x+1)+M_1x; \end{aligned}$$

onde $$-3=-L_1+M_1, \text{ e } -1=-L_1;$$

così $$L_1=1 \text{ ed } M_1=-2.$$

In tal modo le frazioni parziali corrispondenti al fattore quadratico sono trovate. Le frazioni parziali corrispondenti al fattore $(x+1)^2$ possono quindi trovarsi con l'Art. 20. O pure possiamo ottenere da (2) con la trasposizione e la divisione per x^2+x+1

$$-(x-1)=\chi(x).$$

Così

$$\frac{\chi(x)}{(x+1)^2}=-\frac{x-1}{(x+1)^2}=-\frac{x+1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2};$$

onde

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}=\frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}.$$

25. Esempii. Si cerca l'integrale di $\dfrac{5x^3+1}{x^2-3x+2}$.

Con la divisione abbiamo

$$\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2} = 5x+15+\frac{35x-29}{x^2-3x+2}.$$

Si prenda $$\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2};$$

onde $$35x-29 = A(x-2)+B(x-1).$$

Si ponga x successivamente eguale ad 1 e a 2; allora

$$35-29 = -A, \text{ o } A = -6,$$
$$70-29 = B, \text{ o } B = 41;$$

onde $$\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2} = 5x+15-\frac{6}{x-1}+\frac{41}{x-2};$$

onde $$\int\frac{5x^3+1}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{5x^2}{2}+15x-6\log(x-1)+41\log(x-2)$$

Si cerca l'integrale di $\dfrac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Poichè $x^3-5x^2+3x+9 = (x-3)^2(x+1)$, prendiamo

$$\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{B_2}{x-3};$$

onde $$9x^2+9x-128 = A(x-3)^2+B_1(x+1)+B^2(x+1)(x-3).$$

Si ponga $x=3$ ed a -1 successivamente, e troviamo

$$B_1 = -5, \quad A = -8.$$

Inoltre eguagliando i coefficienti di x^2, abbiamo

$$9 = A+B_2,$$

onde $$B_2 = 17;$$

onde

$$\int\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}\,dx = -8\log(x+1)+\frac{5}{x-3}+17\log(x-3).$$

Si cerca l'integrale di $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^4(x^3+1)}$.

Si prenda $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^4(x^3+1)}$

$$=\frac{A_1}{(x-1)^4}+\frac{A_2}{(x-1)^3}+\frac{A_3}{(x-1)^2}+\frac{A_4}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1};$$

onde $x^2+1=\{A_1+A_2(x-1)+A_3(x-1)^2+A_4(x-1)^3\}(x^3+1)$

$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^4 \dots . (1).$$

Si ponga $x=1$, allora $\qquad 2=2A_1 \dots\dots\dots\dots (2);$

onde $\qquad A_1=1.$

Da (1) e (2) abbiamo con la sottrazione,

$$x^2-1=A_1(x^3-1)+\{A_2+A_3(x-1)+A_4(x-1)^2\}(x-1)(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^4.$$

Si divida per $x-1$, allora

$$x+1=A_1(x^2+x+1)+\{A_2+A_3(x-1)+A_4(x-1)^2\}(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^3 \dots (3).$$

Si ponga $x=1$, allora $\qquad 2=3A_1+2A_2 \dots\dots\dots (4);$

onde $\qquad A_2=-\dfrac{1}{2}.$

Da (3) e (4), con la sottrazione,

$$x-1=A_1(x^2+x-2)+A_2(x^3-1)+\{A_3+A_4(x-1)\}(x-1)(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^3.$$

Si divida per $x-1$, allora

$$1=A_1(x+2)+A_2(x^2+x+1)+\{A_3+A_4(x-1)\}(x^3+1)$$
$$+\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^2 \dots (5).$$

Si ponga $x=1$, allora $1=3A_1+3A_2+2A_3 \ldots\ldots\ldots (6)$;

onde $$A_3=-\frac{1}{4}.$$

Da (5) e (6), con la sottrazione,

$$0=A_1(x-1)+A_2(x^2+x-2)+A_3(x^3-1)+A_4(x-1)(x^3+1) \\ +\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1)^2.$$

Si divida per $x-1$, allora

$$0=A_1+A_2(x+2)+A_3(x^2+x+1)+A_4(x^3+1) \\ +\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1) \ldots\ldots (7).$$

Si ponga $x=1$, allora $0=A_1+3A_2+3A_3+2A_4 \ldots (8)$;

onde $$A_4=\frac{5}{8}.$$

Da (7) ed (8), con la sottrazione,

$$0=A_2(x-1)+A_3(x^2+x-2)+A_4(x^3-1) \\ +\{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)\}(x-1).$$

Si divida per $x-1$, allora

$$0=A_2+A_3(x+2)+A_4(x^2+x+1) \\ +B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1) \ldots\ldots\ldots (9).$$

Si ponga $x=-1$, allora

$$0=A_2+A_3+A_4+3B \ldots\ldots\ldots\ldots (10);$$

onde $$B=\frac{1}{24}.$$

Da (9) e (10), con la sottrazione,

$$0=A_3(x+1)+A_4(x^2+x)+B(x^2-x-2)+(Cx+D)(x+1).$$

Si divida per $x+1$, allora

$$0=A_3+A_4x+B(x-2)+Cx+D \ldots\ldots (11).$$

Si ponga $x=0$, allora

$$A_3-2B+D=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12);$$

onde $$D=\frac{1}{3}.$$

Da (11) e (12), con la sottrazione,

$$A_4 + B + C = 0;$$

onde
$$C = -\frac{2}{3};$$

onde
$$\frac{x^2+1}{(x-1)^4(x^3+1)} = \frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{5}{8(x-1)} + \frac{1}{24(x+1)} - \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)};$$

onde
$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x-1)^4(x^3+1)} = -\frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{8}\log(x-1) + \frac{1}{24}\log(x+1) - \frac{1}{3}\log(x^2-x+1).$$

26. Daremo come esempii addizionali l' integrazione di $\frac{x^{m-1}}{x^n \pm 1}$, supponendo m ed n interi positivi, ed $m-1$ minore di n.

Si cerca l' integrale di $\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$, n essendo supposto pari.

Per la teoria delle equazioni le radici reali di $x^n - 1 = 0$ sono 1 e -1, e le radici immaginarie sono date dall' espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\,\text{sen}\, r\theta$, in cui $\theta = \frac{\pi}{n}$, ed r prende successivamente i valori 2, 4, ... sino ad $n-2$. Ora per l'Art. 19 se $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ è la frazione da decomporsi, la frazione parziale corrispondente alla radice a è $\frac{\varphi(a)}{F'(a)}\frac{1}{x-a}$. Nel caso attuale

$$\frac{\varphi(a)}{F'(a)} = \frac{a^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{a^m}{na^n} = \frac{a^m}{n}, \text{ poichè } a^n = 1.$$

Quindi corrispondente alla radice 1 abbiamo la frazione parziale $\frac{1}{n(x-1)}$, e corrispondente alla radice -1 abbiamo la frazione parziale $\frac{(-1)^m}{n(x+1)}$. E corrispondenti alla coppia di radici

$$\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\,\text{sen}\, r\theta$$

abbiamo

$$\frac{\{\cos r\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}^m}{n\,\{x - \cos r\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}} + \frac{\{\cos r\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}^m}{n\,\{x - \cos r\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}},$$

cioè

$$\frac{\cos mr\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, mr\theta}{n\,\{x - \cos r\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}} + \frac{\cos mr\theta - \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, mr\theta}{n\,\{x - \cos r\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta\}},$$

cioè $$\frac{2\cos mr\theta\,(x - \cos r\theta) - 2\,\mathrm{sen}\, mr\theta\,\mathrm{sen}\, r\theta}{n\,(x^2 - 2x\cos r\theta + 1)}.$$

Così $$\frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n\,(x-1)} + \frac{(-1)^m}{n\,(x+1)}$$
$$+ \frac{2}{n}\Sigma\,\frac{\cos mr\theta\,(x - \cos r\theta) - \mathrm{sen}\, mr\theta\,\mathrm{sen}\, r\theta}{(x - \cos r\theta)^2 + \mathrm{sen}^2 r\theta},$$

in cui Σ indica una somma da formarsi dando ad r tutt'i valori interi pari da 2 ad $n-2$ inclusivamente. Quindi

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\log(x-1) + \frac{(-1)^m}{n}\log(x+1)$$
$$+ \frac{1}{n}\Sigma\cos mr\theta \log(x^2 - 2x\cos r\theta + 1) - \frac{2}{n}\Sigma\,\mathrm{sen}\, mr\theta\,\tan^{-1}\frac{x - \cos r\theta}{\mathrm{sen}\, r\theta}.$$

27. Si cerca l'integrale di $\dfrac{x^{m-1}}{x^n - 1}$, n essendo supposto dispari.

La radice reale di $x^n - 1 = 0$ è 1, e le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\, r\theta$, in cui $\theta = \dfrac{\pi}{n}$, ed r prende successivamente i valori $2, 4, \ldots$ sino ad $n-1$. Quindi come sopra troveremo

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\log(x-1) + \frac{1}{n}\Sigma\cos mr\theta\log(x^2 - 2x\cos r\theta + 1)$$
$$- \frac{2}{n}\Sigma\,\mathrm{sen}\, mr\theta\,\tan^{-1}\frac{x - \cos r\theta}{\mathrm{sen}\, r\theta}.$$

28. Si cerca l'integrale di $\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$, n essendo supposto pari.

L'equazione $x^n+1=0$ non ha ora radici reali; le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\operatorname{sen} r\theta$, in cui $\theta=\frac{\pi}{n}$, ed r prende successivamente i valori $1, 3 \ldots$ sino ad $n-1$. E se a è una radice di $x^n+1=0$, abbiamo

$$\frac{\varphi(a)}{F'(a)}=\frac{a^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{a^m}{na^n}=-\frac{a^m}{n};$$

così la somma delle due frazioni corrispondenti ad una coppia di radici immaginarie è

$$-\frac{2}{n}\,\frac{\cos mr\theta\,(x-\cos r\theta)-\operatorname{sen} mr\theta \operatorname{sen} r\theta}{(x-\cos r\theta)^2+\operatorname{sen}^2 r\theta}.$$

Quindi

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{x^n+1}=-\frac{1}{n}\Sigma\cos mr\theta\log(x^2-2x\cos r\theta+1)$$

$$+\frac{2}{n}\Sigma\operatorname{sen} mr\theta\tan^{-1}\frac{x-\cos r\theta}{\operatorname{sen} r\theta},$$

in cui Σ indica una somma da formarsi dando ad r tutt'i valori interi dispari da 1 ad $n-1$ inclusivamente.

29. Si cerca l'integrale di $\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$, n essendo supposto dispari.

La radice reale di $x^n+1=0$ è in questo caso -1, e le radici immaginarie sono date dall'espressione $\cos r\theta \pm \sqrt{(-1)}\operatorname{sen} r\theta$, in cui $\theta=\frac{\pi}{n}$ ed r prende successivamente i valori $1, 3, \ldots$ sino ad $n-2$. Quindi otterremo

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{x^n+1}=\frac{(-1)^{m-1}}{n}\log(x+1)$$

$$-\frac{1}{n}\Sigma\cos mr\theta\log(x^2-2x\cos r\theta+1)+\frac{2}{n}\Sigma\operatorname{sen} mr\theta\tan^{-1}\frac{x-\cos r\theta}{\operatorname{sen} r\theta}.$$

ESEMPII.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^2-4}\,dx=x+\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{3}{4}}.$

3. $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{x^2+7x+12}=\frac{x^2}{2}-7x+64\log(x+4)-27\log(x+3).$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^4-x^4}=\frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{4a^3}\log\frac{a+x}{a-x}.$

5. $\displaystyle\int\frac{2x^2-3a^2}{x^4-a^4}\,dx=\frac{5}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{4a}\log\frac{x-a}{x+a}.$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)\,(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}\log\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

7. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1}+\frac{\sqrt{2}}{3}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}.$

8. $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$

9. $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+3}{(x-1)\,(x-2)}\,dx=x+\log\frac{x-2}{x-1}.$

10. $\displaystyle\int\frac{(3x-1)\,dx}{x^3-x^2-2x}=\frac{1}{2}\log x+\frac{5}{6}\log(x-2)-\frac{4}{3}\log(x+1).$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\,(x+b)}=\frac{1}{b^2+a^2}\left\{\log\frac{x+b}{\sqrt{(x^2+a^2)}}+\frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right\}.$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\,(1+x+x^2+x^3)}=\log x-\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{4}\log(1+x^2)$

$$-\frac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

13. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2}\log(x-1)$$
$$+\frac{1}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\log(x^2+1).$$

14. $$\int \frac{x\,dx}{(1+x)(1+2x)^2(1+x^2)} = \frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{2}\log(1+x)$$
$$-\frac{7}{100}\log(1+x^2) + \frac{16}{25}\log(1+2x) + \frac{1}{50}\tan^{-1}x.$$

15. $$\int \frac{x^2dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\tan^{-1}(x\sqrt{2}+1)+\tan^{-1}(x\sqrt{2}-1)\right\}.$$

16. $$\int \frac{x^3dx}{x^6+1} = \frac{1}{12}\log(x^4-x^2+1) - \frac{1}{6}\log(x^2+1)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\tan^{-1}(2x-\sqrt{3})-\tan^{-1}(2x+\sqrt{3})\right\}.$$

17. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}$. Si prenda $1-y^3=y^3z^3$.

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{(1+3x+3x^2)}}$. Si prenda $y=\dfrac{x}{1+x}$.

CAPITOLO III.

FORMOLE DI RIDUZIONE.

30. Sia $a+bx^n$ dinotato con X; per mezzo dell'integrazione per parti abbiamo

$$\int x^{m-1} X^p \, dx = \frac{X^p x^m}{m} - \int \frac{x^m}{m} p X^{p-1} \frac{dX}{dx} dx$$

$$= \frac{X^p x^m}{m} - \frac{bnp}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \, dx \ldots\ldots (1)$$

L'equazione (1) si chiama una *formola di riduzione*; per mezzo di essa si fa dipendere l'integrale di $x^{m-1} X^p$ da quello di $x^{m+n-1} X^{p-1}$. Nello stesso modo l'ultimo integrale si può far dipendere da quello di $x^{m+2n-1} X^{p-2}$; e così, se p è un intero possiamo procedere sino a che si arrivi ad $x^{m+np-1} X^{p-p}$, cioè x^{m+np-1}, che è integrabile immediatamente.

Da (1), con la trasposizione,

$$\int x^{m+n-1} X^{p-1} \, dx = \frac{x^m X^p}{bnp} - \frac{m}{bnp} \int x^{m-1} X^p \, dx.$$

Si muti m in $m-n$ e p in $p+1$; così

$$\int x^{m-1} X^p \, dx = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{m-n}{bn(p+1)} \int x^{m-n-1} X^{p+1} \, dx \ldots (2).$$

Questa formola si può adoperare quando desideriamo far dipendere l'integrale di $x^m X^p$ da un altro nel quale l'esponente di x è diminuito e quello di X aumentato. Per esempio, se $m=3$, $n=2$, e $p=-\frac{3}{2}$, abbiamo

$$\int \frac{x^2 dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{b\sqrt{(a+bx^2)}} + \frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

L'ultimo integrale è stato già determinato, e così la proposta integrazione è effettuata.

Poichè $\int x^{m-1} X^p \, dx = \int x^{m-1} X^{p-1} (a + bx^n) \, dx$

$$= a \int x^{m-1} X^{p-1} \, dx + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx,$$

abbiamo da (1)

$$\frac{x^m X^p}{m} - \frac{bnp}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \, dx = a \int x^{m-1} X^{p-1} dx + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} dx,$$

onde $\displaystyle\int x^{m-1} X^{p-1} dx = \frac{x^m X^p}{am} - \frac{b(m+np)}{am} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \, dx.$

Si muti p in $p+1$, ed abbiamo

$$\int x^{m-1} X^p dx = \frac{x^m X^{p+1}}{am} - \frac{b(m+np+n)}{am} \int x^{m+n-1} X^p \, dx \ldots (3).$$

Si muti m in $m-n$ e si trasponga, allora

$$\int x^{m-1} X^p \, dx = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{b(m+np)} - \frac{(m-n)a}{b(m+np)} \int x^{m-n-1} X^p \, dx \ldots\ldots (4).$$

Abbiamo già ottenuto da (1) con la trasposizione

$$\int x^{m+n-1} X^{p-1} \, dx = \frac{x^m X^p}{bnp} - \frac{m}{bnp} \int x^{m-1} X^p \, dx\,;$$

inoltre $\displaystyle\int x^{m-1} X^p \, dx = a \int x^{m-1} X^{p-1} \, dx + b \int x^{m+n-1} X^{p-1} \, dx\,;$

onde $\displaystyle\int x^{m-1} X^p dx = a \int x^{m-1} X^{p-1} dx + \frac{x^m X^p}{np} - \frac{m}{np} \int x^{m-1} X^p \, dx\,;$

onde $\displaystyle\int x^{m-1} X^p \, dx = \int \frac{x^m X^p}{m+np} + \frac{anp}{m+np} \int x^{m-1} X^{p-1} \, dx \ldots (5).$

Si muti p in $p+1$ e si trasponga; così

$$\int x^{m-1} X^p \, dx = -\frac{x^m X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+np+n}{an(p+1)} \int x^{m-1} X^{p+1} \, dx \ldots (6),$$

31. Allorchè si propone un esempio al quale è applicabile una delle formole precedenti, possiamo o adoperare quella formola particolare o pure ottenere il risultato richiesto indipendentemente. Così, supponiamo si cerchi $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}}$; abbiamo

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} = -\int \frac{d\sqrt{(c^2 - x^2)}}{dx} x^{m-1} dx$$

$$= -\sqrt{(c^2 - x^2)}\, x^{m-1} + (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{(c^2 - x^2)}\, dx$$

$$= -\sqrt{(c^2 - x^2)}\, x^{m-1} + (m-1)\int \frac{(c^2 - x^2) x^{m-2} dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}}.$$

Con la trasposizione,

$$(1 + m - 1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} = -\sqrt{(c^2 - x^2)}\, x^{m-1} + (m-1)c^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}},$$

onde

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{(c^2 - x^2)}}{m} + \frac{(m-1)c^2}{m}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} \quad \ldots (1).$$

Questo risultato si accorda con l'equazione (4) dell'articolo precedente se facciamo $a = c^2$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, e mutiamo m in $m + 1$.

Inoltre, supponiamo si cerchi $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a^2 + x^2)}}$. Abbiamo

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a^2 + x^2)}} = \int \frac{d\sqrt{(a^2 + x^2)}}{dx} \frac{1}{x^{m+1}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{x^{m+1}} + (m+1)\int \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{x^{m+2}} dx.$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{x^{m+1}} + (m+1)\int \frac{a^2 + x^2}{x^{m+2}\sqrt{(a^2 + x^2)}} dx.$$

Con la trasposizione,

$$(m+1)a^2 \int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{(a^2 + x^2)}} = -\frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{x^{m+1}} - m\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

e mutando m in $m-2$ otteniamo

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{(a^2+x^2)}}=-\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{(m-1)a^2x^{m-1}}-\frac{m-2}{(m-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(a^2+x^2)}}$$
$$\dots\dots\dots\dots(2).$$

Un altro esempio è fornito da $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, il quale si può scrivere $\int\frac{x^{m-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(2a-x)}}$; se nell'equazione (4) dell'articolo precedente facciamo $b=-1$, $n=1$, $p=-\frac{1}{2}$, e mutiamo a ed m in $2a$ ed $m+\frac{1}{2}$ rispettivamente, abbiamo

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}}{m}+\frac{a(2m-1)}{m}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$
$$\dots\dots\dots\dots(3),$$

il che del resto può ottenersi indipendentemente.

32. Nell'equazione (6) dell'Art. 30 si ponga $a=c^2$, $m=1$, $n=2$, $b=1$, e $p=-r$; così

$$\int\frac{dx}{(x^2+c^2)^r}=\frac{x}{2(r-1)c^2(x^2+c^2)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2(r-1)c^2}\int\frac{dx}{(x^2+c^2)^{r-1}}.$$

Questa formola serve per ridurre la forma

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^r},$$

che s'incontra nell'Art. 18; poichè quest'ultima espressione si può scrivere così,

$$\int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r}+(A\alpha+B)\int\frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r},$$

cioè

$$-\frac{A}{2(r-1)}\frac{1}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{r-1}}+(A\alpha+B)\int\frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r}.$$

Ponendo $x-\alpha=x'$, abbiamo

$$\int\frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r}=\int\frac{dx'}{\{x'^2+\beta^2\}^r},$$

e così la formola precedente diviene applicabile.

33. Queste formole di riduzione sono molto utili quando l'integrale deve essere preso tra certi limiti. Si suppongano $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, funzioni di x, tali che

$$\int \varphi(x)\,dx = \chi(x) + \int \psi(x)\,dx\,,$$

allora
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \chi(b) - \chi(a) + \int_a^b \psi(x)\,dx\,,$$

come è ovvio per l'Art. 3.

Per esempiò, si può mostrare che

$$\int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{x(c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{nc^2}{n+1}\int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx\,;$$

si supponga $\frac{n}{2}$ una quantità *positiva*, allora $x(c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ svanisce per $x = 0$ e per $x = c$. Quindi

$$\int_0^c (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{nc^2}{n+1}\int_0^c (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx.$$

Il seguente è un esempio analogo. Con l'integrazione per parti

$$\int x^{r-1}(1-x)^{n-1}\,dx = -\frac{(1-x)^n}{n}x^{r-1} + \frac{r-1}{n}\int x^{r-2}(1-x)^n\,dx.$$

Quindi
$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{r-1}{n}\int_0^1 x^{r-2}(1-x)^n\,dx.$$

Così se r è un intero possiamo ridurre l'integrale ad $\int_0^1 (1-x)^{n+r-2}\,dx$, cioè ad $\frac{1}{n+r-1}$; quindi

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{(r-1)(r-2)\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}$$

34. L'integrazione delle funzioni trigonometriche è facilitata dalle formole di riduzione. Dinoti $\varphi(\operatorname{sen} x, \cos x)$ una

funzione di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$; allora se poniamo $\operatorname{sen} x = z$, abbiamo

$$\int \varphi\,(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int \varphi\,\{z, \sqrt{(1-z^2)}\}\,\frac{dx}{dz}\,dz$$

$$= \int \varphi\,\{z, \sqrt{(1-z^2)}\}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}\ldots\ldots\ldots(1).$$

Per esempio, sia $\varphi\,(\operatorname{sen} x, \cos x) = \operatorname{sen}^p x \cos^q x$; allora

$$\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \int z^p\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz\ldots\ldots(2).$$

Se nelle sei formole dell'Art. 30 poniamo $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}(q-1)$, abbiamo

$$\int z^{m-1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz$$

$$= \frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{m} + \frac{q-1}{m}\int z^{m+1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dz$$

$$= -\frac{z^{m-2}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{q+1} + \frac{m-2}{q+1}\int z^{m-3}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}\,dz$$

$$= \frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{m} + \frac{m+q+1}{m}\int z^{m+1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz$$

$$= -\frac{z^{m-2}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{m+q-1} + \frac{m-2}{m+q-1}\int z^{m-3}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dz$$

$$= \frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{m+q-1} + \frac{q-1}{m+q-1}\int z^{m-1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dz$$

$$= -\frac{z^m\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{q+1} + \frac{m+q+1}{q+1}\int z^{m-1}\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}\,dz.$$

Se poniamo $m=p+1$, e $z=\operatorname{sen} x$, la prima delle precedenti equazioni diviene

$$\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \operatorname{sen}^{p+2} x \cos^{q-2} x\,dx,$$

e similmente si possono esprimere le altre cinque equazioni.

35. Il caso seguente è molto importante:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\int \frac{d\cos x}{dx}\operatorname{sen}^{n-1} x\,dx$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Trasponendo, abbiamo

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx;$$

onde $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$

Dall' ultima equazione deduciamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Similmente $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-4} x\,dx.$

Procedendo così, se n è un intero *pari* arriveremo ad $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx$ o $\frac{1}{2}\pi$; se n è un intero *dispari* arriveremo ad $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen} x\,dx$, che è l'unità. Quindi, se n è un intero,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 2}\,\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ pari}),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 2}{n(n-2)(n-4)\ldots\ldots 3} \quad (n \text{ dispari}).$$

Questi due risultati sussistono se mutiamo $\operatorname{sen} x$ in $\cos x$, come si troverà facilmente.

36. Dai risultati precedenti possiamo dedurre un importante teorema, chiamato la Formola di Wallis.

Si supponga n pari; allora

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdots\cdots (1),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x dx = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-5} \cdots\cdots \frac{2}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

Ora è chiaro che $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x\, dx$ è minore di $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$ e maggiore di $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx$; poichè ciascun elemento del primo integrale è minore del corrispondente elemento del secondo integrale e maggiore del corrispondente elemento del terzo integrale. Ed è stato mostrato che

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx} = \frac{n-1}{n}.$$

Adunque $\dfrac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^n x\, dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x\, dx}$ è minore di 1 e maggiore di $\dfrac{n-1}{n}$.

Quindi il rapporto del secondo membro di (1) al secondo membro di (2) è minore dell'unità e maggiore di $\dfrac{n-1}{n}$; così

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots\cdots (n-2)\,(n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots (n-3)\,(n-1)},$$

$$\text{e} < \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots\cdots (n-2)\,(n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots (n-3)\,(n-1)} \frac{n}{n-1}.$$

ESEMPII.

1. $$\int (a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{n\,(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1} \int (a^2 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1} dx.$$

2. $$\int x^m \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx = -\frac{x^{m-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2}$$
$$+\frac{a(2m+1)}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

3. $$\int x\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = -\frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} + a\int\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

4. $$\int_0^{2a} x\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{\pi a^3}{2}.$$

5. $$\int x^2\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = -\frac{x}{4}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5a}{4}\int x\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx.$$

6. $$\int_0^{2a} x^2\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{5\pi a^4}{8}.$$

7. $$\int_0^{2a} x^3\sqrt{(2ax-x^2)}\, dx = \frac{7\pi a^5}{8}.$$

8. $$\int x^n(\log x)^m\, dx = \frac{x^{n+1}(\log x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\log x)^{m-1}\, dx.$$

9. $$\int x^n(\log x)^2\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{(\log x)^2 - \frac{2}{n+1}\log x + \frac{2}{(n+1)^2}\right\}.$$

10. $$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4\theta\, d\theta = \frac{4}{3}.$$

11. $$\int_0^a \frac{x^2\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}\, dx = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)a^3.$$

12. $$\int \operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + \frac{1}{6}\cos^6\theta.$$

13. $$\int\frac{d\theta}{\operatorname{sen}^4\theta\cos^4\theta} = 3(\tan\theta - \cot\theta) + \frac{1}{3}(\tan^3\theta - \cot^3\theta).$$

14. $$\int\frac{\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{4}\log\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}.$$

15. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{3\pi\sqrt{(2)}}{16}.$

Si prenda $\sqrt{(2)}\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\varphi$.

16. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\frac{a^2}{4}.$

17. $\displaystyle\int_0^{2a}\left(\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = (\pi^2-4)\,a.$

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^3 x\,dx}{1+c\cos x} = \frac{c^2-1}{c^3}\log(1+c)+\frac{2-c}{2c^2}.$

19. Se $\varphi(n) = \int (1+c\cos x)^{-n}\,dx$, mostrare che

$$(n-1)(1-c^2)\,\varphi(n) = -c\,\mathrm{sen}\,x\,(1+c\cos x)^{-n+1}$$
$$+(2n-3)\,\varphi(n-1)-(n-2)\,\varphi(n-2).$$

20. $\displaystyle\int_0^{2a}\sqrt{(2ax-x^2)}\;\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{\pi^2a^2}{4}.$

21. $\displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{(2ax-x^2)}\;\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{4a^3}{9}+\frac{\pi^2a^3}{4}.$

22. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\tan x)^7\,dx = \frac{5}{12}-\frac{1}{2}\log 2.$

23. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2 x)}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2c^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2c^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2c^6+\ldots\right\}$

c essendo < 1.

24. Sia $P = Ax^a+Bx^b+Cx^c+\ldots$, $V_{m,n} = \int x^m P^n\,dx$,

$$\alpha = m+1+na,\ \beta = m+1+nb,\ \gamma = m+1+nc\ldots$$

Allora

$$V_{m,n} = A\,V_{m+a,n-1}+B\,V_{m+b,n-1}+C\,V_{m+c,n-1}+\ldots$$
$$x^{m+1}P^n = \alpha A\,V_{m+a,n-1}+\beta B\,V_{m+b,n-1}+\gamma C\,V_{m+c,n-1}+\ldots$$

(*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. III. p. 242).

CAPITOLO IV.

OSSERVAZIONI DIVERSE.

37. Nel principio di questo libro abbiamo definito l'*integrale* di $\varphi(x)$ tra limiti assegnati a e b come il limite di una certa somma $\Sigma\varphi(x)\Delta x$, ed abbiamo dinotato questo limite con $\int_a^b \varphi(x)\,dx$. Abbiamo mostrato che questo limite si conosce appena conosciamo la funzione $\psi(x)$ di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale. Nelle pagine immediatamente seguenti demmo dei metodi per trovare $\psi(x)$ in diversi casi. Aggiungeremo ora varie osservazioni e proposizioni, alcune delle quali richiameranno l'attenzione dello studente sul procedimento di sommazione che ponemmo alla base del soggetto.

38. Supponiamo che si voglia trovare l'integrale di $\operatorname{sen} x$ tra i limiti a e b *immediatamente dalla definizione.* Per l'Art. 4 dobbiamo trovare il limite quando n è infinito di

$$h[\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) \ldots\ldots + \operatorname{sen}\{a+(n-1)h\}],$$

in cui $h = \frac{1}{n}(b-a)$.

Si conosce dalla Trigonometria che questa serie

$$= \frac{h \operatorname{sen}\left(a + \frac{n-1}{2}h\right) \operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}} = \frac{h \operatorname{sen}\left(a + \frac{b-a}{2} - \frac{h}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{b-a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}.$$

Il limite di $\dfrac{h}{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}$ quando n è infinito e quindi h zero è 2; quindi il richiesto integrale è

$$2 \operatorname{sen} \frac{b+a}{2} \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} = \cos a - \cos b.$$

39. Si cerca il limite quando n diviene infinito della serie

$$\frac{n}{n^2} + \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \frac{n}{3^2+n^2} \cdots\cdots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2}.$$

Questa serie può essere scritta

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} \cdots\cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\};$$

ponendo h per $\frac{1}{n}$, otteniamo

$$h\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+h^2} + \frac{1}{1+(2h)^2} \cdots\cdots + \frac{1}{1+(n-1)^2 h^2}\right\}.$$

Paragonando questo con l'Art. 4 vediamo che il limite richiesto è quello che dinotiamo con $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Ora $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$; quindi $\frac{\pi}{4}$ è il limite cercato.

40. Per definizione $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ è il limite quando n diviene infinito di

$$h_1\varphi(a) + h_2\varphi(x_1) \cdots\cdots + h_n\varphi(x_{n-1}).$$

Ora siano A e B il massimo ed il minimo valore che prende $\varphi(x)$ tra i limiti a e b; allora la serie è minore di

$$(h_1 + h_2 + \cdots\cdots + h_n) A,$$

ed è maggiore di

$$(h_1 + h_2 + \ldots\ldots + h_n) B;$$

vale a dire, la serie è compresa tra

$$(b - a) A \text{ e } (b - a) B.$$

Il limite deve perciò essere eguale a $(b - a) C$, in cui C è una certa quantità compresa tra A e B; ma poichè $\varphi(x)$ si suppone continua, essa deve, mentre x passa da a a b, passare per ogni valore compreso tra A e B, e deve quindi essere eguale a C quando x ha un certo valore tra a e b. Adunque $C = \varphi\{a + \theta(b - a)\}$, in cui θ è una certa frazione propria, ed

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = (b - a)\, \varphi\{a + \theta(b - a)\}.$$

Similmente se $\psi(x)$ ritiene lo stesso segno mentre x giace tra a e b, possiamo dimostrare che

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \varphi\{a + \theta(b - a)\} \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

41. La verità dell'equazione

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^c \varphi(x)\, dx + \int_c^b \varphi(x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

apparirà immediatamente; infatti si supponga essere $\psi(x)$ l'integrale di $\varphi(x)$, allora abbiamo a sinistra

$$\psi(b) - \psi(a),$$

ed a dritta

$$\psi(c) - \psi(a) + \psi(b) - \psi(c).$$

In simil modo l'equazione

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = -\int_b^a \varphi(x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

si rende evidente. Possiamo mostrare ancora che

$$\int_0^a \varphi(x)\, dx = \int_0^a \varphi(a - x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Infatti ponendo $a - x = z$ abbiamo

$$\int \varphi(a-x)\,dx = -\int \varphi(z)\,dz,$$

onde

$$\int_0^a \varphi(a-x)\,dx = -\int_a^0 \varphi(z)\,dz$$

$$= \int_0^a \varphi(z)\,dz, \text{ per } (2).$$

Evidentemente $\int_0^a \varphi(z)\,dz = \int_0^a \varphi(x)\,dx$, essendo indifferente lo usare il simbolo x o pure z nell'ottenere un risultato che non deve racchiudere x o z.

Abbiamo da (1)

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_a^{2a} \varphi(x)\,dx.$$

Il secondo integrale, cangiando x in $2a - x'$, si troverà eguale ad

$$\int_0^a \varphi(2a - x')\,dx' \text{ o } \int_0^a \varphi(2a-x)\,dx.$$

Quindi

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = \int_0^a \{\varphi(x) + \varphi(2a-x)\}\,dx.$$

Quindi, se $\varphi(x) = \varphi(2a-x)$ per tutt' i valori di x compresi tra 0 ed a, abbiamo

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

e se $\varphi(2a-x) = -\varphi(x)$, abbiamo

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Per esempio,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta \ldots\ldots \text{per } (4),$$

ed $$\int_0^\pi \cos^3\theta\, d\theta = 0 \ldots\ldots \text{per (5)}.$$

42. Le equazioni come quelle date or ora debbono essere considerate attentamente dallo studente, ed egli non deve lasciarle sino a che non abbia riconosciuta la loro ovvia ed evidente verità. $\int_0^\pi \cos^3\theta\, d\theta$ è per definizione il limite quando n diviene infinito della serie

$$h\,\{\cos^3 h + \cos^3 2h + \cos^3 3h \ldots\ldots + \cos^3(n-1)h\},$$

in cui $nh = \pi$. Ora

$$\cos^3 h = -\cos^3(n-1)h, \quad \cos^3 2h = -\cos^3(n-2)h \ldots\ldots;$$

così i termini positivi della serie eguagliano i termini negativi e lasciano zero per risultato.

Nello stesso modo la verità di $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$ segue *immediatamente* dalla definizione dell'integrazione, e dal fatto che il seno di un angolo è eguale al seno del suo supplemento.

43. Si supponga b maggiore di a e $\varphi(x)$ sempre positiva tra i limiti a e b di x; allora ogni termine nella serie $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ è positivo, e quindi il limite $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *deve essere una quantità positiva.*

44. Tutto ciò che si è stabilito suppone che la funzione da integrarsi sia sempre finita tra i limiti dell'integrazione; poichè bisogna rammentarsi che questa condizione fu introdotta espressamente nella proposizione fondamentale, Art. 2. Se quindi la funzione da integrarsi diviene infinita tra i limiti dell'integrazione, le regole dell'integrazione non possono applicarsi; al meno il caso deve essere specialmente esaminato.

45. Si consideri $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$; il valore di questo integrale è $2 - 2\sqrt{(1-a)}$. Quì la funzione da integrarsi diviene infinita quando $x = 1$; ma l'espressione $2 - 2\sqrt{(1-a)}$ è finita quando $a = 1$. Quindi in questo caso possiamo scrivere

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = 2$, purchè riguardiamo ciò come un'abbreviazione della seguente proposizione: « $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$ è sempre finito se a è una quantità minore dell'unità, e prendendo a sufficientemente prossima all'unità, possiamo far differire il valore dell'integrale tanto poco quanto ci piace da 2. »

46. Consideriamo ora $\int_0^a \frac{dx}{1-x}$; il valore di questo integrale è $-\log(1-a)$, il quale cresce indefinitamente quando a si avvicina all'unità. Quindi in questo caso possiamo scrivere $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \infty$ purchè riguardiamo ciò come un'abbreviazione della seguente proposizione: « $\int_0^a \frac{dx}{1-x}$ cresce indefinitamente a misura che a si avvicina all'unità, e prendendo a sufficientemente prossima all'unità possiamo rendere l'integrale maggiore di ogni quantità assegnata. »

47. In fine consideriamo $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$; quì l'integrale è $\frac{1}{1-x}$. Se senza osservare che la funzione da integrarsi diviene infinita quando $x=1$, proponiamo di trovare il valore dell'integrale tra i limiti 0 e 2, otteniamo $-1-1$, cioè -2. Ma ciò è falso evidentemente, poichè in questo caso ogni termine della serie indicata da $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ è positivo, e quindi il limite non può essere negativo. In fatti $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ ed $\int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$ sono entrambi infiniti. Quest'esempio mostra che le regole ordinarie per integrare tra limiti assegnati non possono essere adoperate quando la funzione da integrarsi diviene infinita tra questi limiti.

48. Nella investigazione fondamentale nell'Art. 2, del valore di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, i limiti a e b sono supposti *finiti* al pari della funzione $\varphi(x)$. Ma spesso troveremo conveniente di supporre uno o ambedue i limiti *infiniti*, come indicheremo ora con esempii.

Si consideri $\int \frac{dx}{1+x^2}$; l'integrale è $\tan^{-1} x$. Quindi $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}$ $= \tan^{-1} a$; quanto più grande diviene a, tanto maggiormente $\tan^{-1} a$ si avvicina a $\frac{\pi}{2}$, e prendendo a sufficientemente grande, possiamo far differire $\tan^{-1} a$ tanto poco quanto ci piace da $\frac{\pi}{2}$; quindi possiamo scrivere $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ come un abbreviazione di questa proposizione.

Similmente $\int_0^a \frac{dx}{1+x} = \log(1+a)$; e prendendo a sufficientemente grande possiamo rendere $\log(1+a)$ maggiore di ogni quantità assegnata. Quindi per abbreviazione possiamo scrivere

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \infty .$$

49. Supponiamo la funzione $\varphi(x)$ diventare infinita *una sola volta* tra i limiti a e b, propriamente, quando $x = c$. Allora non possiamo applicare le regole ordinarie dell'integrazione ad $\int_a^b \varphi(x)\,dx$; ma possiamo applicare queste regole ad

$$\int_a^{c-\mu} \varphi(x)\,dx + \int_{c+\mu}^b \varphi(x)\,dx$$

per ogni valore assegnato a μ comunque piccolo. Il limite dell'ultima espressione quando μ diminuisce indefinitamente è detto da Cauchy il valore *principale* dell'integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Per esempio, sia $\varphi(x) = \frac{1}{c-x}$;

allora $$\int_a^{c-\mu} \frac{dx}{c-x} = \log \frac{c-a}{\mu},$$

ed $$\int_{c+\mu}^b \frac{dx}{c-x} = -\int_{c+\mu}^b \frac{dx}{x-c} = -\log \frac{b-c}{\mu};$$

quindi il valore *principale* è $\log\frac{c-a}{\mu} - \log\frac{b-c}{\mu}$, o sia $\log\frac{c-a}{b-c}$.

50. Il valore di $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ è $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$; quindi

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \operatorname{sen}^{-1}(1) - \operatorname{sen}^{-1}(-1).$$

Gli studenti sono spesso in dubbio riguardo al valore che deve assegnarsi a $\operatorname{sen}^{-1}(1)$ ed a $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ in un risultato come il precedente. Supponiamo si ponga $x = a \operatorname{sen}\theta$; così l'integrale diviene $\int d\theta$ o θ. Ora x cresce da $-a$ ad a, quindi i limiti assegnati a θ debbono essere tali da corrispondere a questo andamento dei valori di x. Quando $x = -a$ allora θ può avere un valore qualunque contenuto nella formola $(4n-1)\frac{\pi}{2}$, in cui n è un intero qualunque. Supponiamo che si prenda il valore $(4n-1)\frac{\pi}{2}$, in cui n è un determinato numero intero, allora corrispondente al valore $x = a$ *dobbiamo* prendere $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2} + \pi$; ciò si renderà chiaro osservando che x deve variare da $-a$ a $+a$, in modo da *crescere continuamente e passare solamente una volta per il valore zero.*

Quindi $$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \pi.$$

Siccome questo punto presenta spesso difficoltà ai principianti considereremo un altro esempio.

Supponiamo si cerchi $\int_0^{\pi}\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{a^2+\tan^2\theta}$.

Abbiamo $\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{a^2+\tan^2\theta} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$;

e siccome l'integrale deve essere preso tra i limiti 0 e π, dobbiamo determinare i valori di $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ in questi casi. Si supponga $0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n, \pi$, essere una serie di quantità in ordine di grandezza. Per la natura dell'integrazione

$$\int_0^\pi u\,d\theta = \int_0^{\theta_1} u\,d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} u\,d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_3} u\,d\theta + \ldots + \int_{\theta_n}^{\pi} u\,d\theta.$$

Ora ciascuno degli integrali a dritta può rendersi tanto piccolo quanto ci piace crescendo n e facendo che due quantità consecutive come θ_r e θ_{r+1} differiscano tra loro tanto poco quanto ci piace. Quindi vediamo che il simbolo $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ deve essere preso in modo che $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta_{r+1}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta_r}{a}\right)$ diminuisca indefinitamente al pari di $\theta_{r+1} - \theta_r$.

Adunque $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ deve crescere continuamente con θ, e può passare solamente una volta per un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$ mentre θ passa da 0 a π. Quindi se prendiamo $m\pi$ per il valore di $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{a}\right)$ quando $\theta = 0$, dobbiamo prendere $(m+1)\pi$ per il valore quando $\theta = \pi$; e così il valore dell'integrale tra i limiti assegnati è $\frac{\pi}{a}$.

Un errore comune ai principianti si è di prendere il secondo valore eguale al primo, invece di fare che il secondo valore superi il primo di π; così il valore dell'integrale proposto si rende zero, il che contraddice all'Art. 43.

Inoltre, supponiamo si richieda $\int_0^\pi \frac{(a - c\cos\theta)\,d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}$.

$$\int \frac{(a - c\cos\theta)\,d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta} = \frac{1}{2a}\int \left\{ 1 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta} \right\} d\theta.$$

Così l'integrale richiesto è $\frac{\pi}{2a} + \frac{a^2 - c^2}{2a}\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta}$.

Ora $\displaystyle\int \frac{d\theta}{a^2+c^2-2ac\cos\theta}$

$$=\int \frac{\sec^2\frac{1}{2}\theta\,d\theta}{(a-c)^2+(a+c)^2\tan^2\frac{1}{2}\theta}=\frac{2}{a^2-c^2}\tan^{-1}\left(\frac{a+c}{a-c}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).$$

Quando questo risultato si prende tra i limiti assegnati si ha $\dfrac{2}{a^2-c^2}\dfrac{\pi}{2}$ se a è maggiore di c, e $-\dfrac{2}{a^2-c^2}\dfrac{\pi}{2}$ se a è minore di c.

Quindi il valore dell'integrale proposto è $\dfrac{\pi}{a}$ se a è maggiore di c, e zero se a è minore di c.

51. Sia richiesto $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\operatorname{sen}x\,dx$.

Per l'equazione (3) dell'Art. 41,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\operatorname{sen}x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\cos x\,dx.$$

Quindi, ponendo y per il richiesto integrale,

$$\begin{aligned}2y&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\log\operatorname{sen}x+\log\cos x)\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log(\operatorname{sen}x\cos x)\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\frac{\operatorname{sen}2x}{2}\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\{\log\operatorname{sen}2x-\log 2\}\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\operatorname{sen}2x\,dx-\frac{1}{2}\pi\log 2.\end{aligned}$$

Ma ponendo $2x=x'$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\operatorname{sen}2x\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\operatorname{sen}x'\,dx'\\&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\operatorname{sen}x\,dx,\end{aligned}$$ per l'equazione (4) dell'Art. 41;

quindi $$2y = y - \frac{\pi}{2}\log 2,$$

onde $$y = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}.$$

Inoltre, $\int_0^\pi \theta^2 \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \int_0^\pi (\pi-\theta)^2 \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta$, per l'equazione (3) dell'Art. 41; quindi

$$0 = \int_0^\pi (\pi^2 - 2\pi\theta) \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta,$$

onde $$\int_0^\pi \theta \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{\pi^2}{2}\log\frac{1}{2}.$$

Sia richiesto $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$. Si ponga $x = \tan y$, e l'integrale diviene $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan y)\, dy$; ma per l'equazione (3) dell'Art. 41

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan y)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right\} dy,$$

ed $$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = 1 + \frac{1-\tan y}{1+\tan y} = \frac{2}{1+\tan y};$$

quindi $$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan y)\, dy = \frac{\pi}{4}\log 2;$$

onde $$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Si vegga *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. III. p. 168.

52. Il *resto* dopo $n+1$ termini dello sviluppo di $\varphi(a+h)$ secondo le potenze di h, si può esprimere con un integrale definito. Infatti sia

$$F(z) = \varphi(x-z) + z\varphi'(x-z) + \frac{z^2}{\underline{|2}}\varphi''(x-z) \ldots + \frac{z^n}{\underline{|n}}\varphi^n(x-z).$$

Si differenzii rispetto a z, allora

$$F'(z) = -\frac{z^n}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(x-z).$$

S'integrino i due membri di questa equazione tra i limiti 0 ed h; così

$$F(h) - F(0) = -\frac{1}{\lfloor n}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(x-z)\,dz,$$

cioè,

$$\varphi(x-h) + h\varphi'(x-h) + \frac{h^2}{\lfloor 2}\varphi''(x-h) \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(x-h) - \varphi(x)$$
$$= -\frac{1}{\lfloor n}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(x-z)\,dz.$$

Ponendo $a+h$ invece di x e trasponendo, verrà

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2}\varphi''(a) \ldots + \frac{h^n}{\lfloor n}\varphi^n(a)$$
$$+ \frac{1}{\lfloor n}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(a+h-z)\,dz.$$

Così l'eccesso di $\varphi(a+h)$ sulla somma dei primi $n+1$ termini del suo sviluppo col Teorema di Taylor è espresso dall'integrale definito

$$\frac{1}{\lfloor n}\int_0^h z^n \varphi^{n+1}(a+h-z)\,dz.$$

Per mezzo del primo risultato nell'Art. 40, possiamo porre per questo integrale definito

$$\frac{\theta^n h^{n+1}}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(a+h-\theta h),$$

in cui θ è una frazione propria.

Per mezzo del secondo risultato nell'Art. 40, possiamo porre per questo integrale definito

$$\frac{1}{\lfloor n}\varphi^{n+1}(a+h-\theta h)\int_0^h z^n\,dz,$$

o $$\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} \varphi^{n+1}(a+\theta_1 h),$$

in cui θ_1 è anche una frazione propria.

53. *Serie di Bernoulli.* Con l'integrazione per parti abbiamo

$$\int \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \int x\,\varphi'(x)\,dx,$$

$$\int x\,\varphi'(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\varphi'(x) - \int \frac{x^2}{2}\varphi''(x)\,dx,$$

$$\int x^2\varphi''(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\varphi''(x) - \int \frac{x^3}{3}\varphi'''(x)\,dx.$$

. . . .

Così $$\int \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi'(x) + \frac{x^3}{\lfloor 3}\varphi''(x)\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}x^n}{\lfloor n}\varphi^{n-1}(x) + \frac{(-1)^n}{\lfloor n}\int x^n\varphi^n(x)\,dx.$$

Quindi,

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = a\,\varphi(a) - \frac{a^2}{1\cdot 2}\varphi'(a) + \frac{a^3}{\lfloor 3}\varphi''(a)\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}a^n\varphi^{n-1}(a)}{\lfloor n} + \frac{(-1)^n}{\lfloor n}\int_0^a x^n\varphi^n(x)\,dx.$$

Questa serie a dritta è chiamata la serie di Bernoulli. In alcuni casi questo procedimento può essere utile per ottenere $\int_0^a \varphi(x)\,dx$; per esempio, se $\varphi(x)$ è una funzione algebrica razionale dell'$(n-1)^{\text{mo}}$ grado, $\varphi^n(x)$ è zero; o può accadere che $\int x^n\varphi^n(x)\,dx$ sia più facile a trovarsi di $\int \varphi(x)\,dx$. O ancora, si può richiedere solamente un valore *approssimato* di $\int_0^a \varphi(x)\,dx$ e l'integrale $\int_0^a x^n\varphi^n(x)\,dx$ potrebbe essere sufficientemente piccolo da potersi trascurare.

54. Adottando diversi metodi per integrare una funzione possiamo alle volte giungere a risultati apparentemente diversi. Ma sappiamo (*Calc. Dif.* Art. 102) che due funzioni le quali hanno lo stesso coefficiente differenziale possono differire solamente per una costante, sicchè i due risultati che otteniamo debbono o essere identici o differire per una costante. Si prenda per esempio

$$\int (ax+b)(a'x+b')\,dx;$$

s'integri per parti, così otteniamo

$$\frac{(ax+b)^2}{2a}(a'x+b') - \int \frac{a'}{2a}(ax+b)^2\,dx,$$

cioè

$$\frac{(ax+b)^2(a'x+b')}{2a} - \frac{a'(ax+b)^3}{6a^2}.$$

Se integriamo per parti in altro modo, possiamo ottenere

$$\frac{(a'x+b')^2(ax+b)}{2a'} - \frac{a(a'x+b')^3}{6a'^2}.$$

Quindi

$$\frac{(ax+b)^2\{3a(a'x+b') - a'(ax+b)\}}{6a^2}$$

ed

$$\frac{(a'x+b')^2\{3a'(ax+b) - a(a'x+b')\}}{6a'^2}$$

possono differire solamente per una costante. Quindi moltiplicando per $6a^2a'^2$ abbiamo

$$a'^2(ax+b)^2\{3a(a'x+b') - a'(ax+b)\}$$
$$-a^2(a'x+b')^2\{3a'(ax+b) - a(a'x+b')\} = C,$$

in cui C è una costante. Ciò può verificarsi con la comune riduzione. Possiamo facilmente determinare il valore di C; infatti siccome esso è indipendente da x possiamo supporre $ax+b=0$, onde, $x=-\frac{b}{a}$; allora il primo membro diviene $(ab'-ba')^3$, che è per conseguenza il valore di C.

Similmente da

$$\int (ax+b)\,dx + \int (a'x+b')\,dx = \int \{(a+a')\,x+b+b'\}\,dx$$

deduciamo

$$\frac{(ax+b)^2}{2a} + \frac{(a'x+b')^2}{2a'} = \frac{\{(a+a')\,x+b+b'\}^2}{2(a+a')} + \text{costante}.$$

Si moltiplichi per $2aa'(a+a')$ e poi si determini la costante supponendo $x=0$; così otteniamo l'identità

$$a'(a+a')\,(ax+b)^2 + a(a+a')\,(a'x+b')^2$$
$$= aa'\{(a+a')\,x+b+b'\}^2 + (ba'-ab')^2.$$

55. Con $\int \varphi(x)\,dx$ noi indichiamo la funzione di cui $\varphi(x)$ è il coefficiente differenziale; si supponga questa essere $\psi(x)$. Allora possiamo richiedere la funzione di cui $\psi(x)$ è il coefficiente differenziale, la quale dinotiamo con $\int \psi(x)\,dx$, o con $\iint \varphi(x)\,dx\,dx$, e così di seguito. Per esempio, l'integrale di e^{kx} è $\frac{1}{k}e^{kx}+C_1$, in cui C_1 è una costante; l'integrale di questo è

$$\frac{1}{k^2}e^{kx} + C_1x + C_2\,;$$

l'integrale di questo è

$$\frac{1}{k^3}e^{kx} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\,,$$

in cui $\frac{C_1}{2}$ essendo ancora una costante può dinotarsi per semplicità con B se ci piace. Procedendo così troveremmo per risultato dell'integrare e^{kx} successivamente n volte

$$\frac{e^{kx}}{k^n} + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,x + A_n\,,$$

in cui $A_1,\ A_2,\ldots A_n$ sono costanti.

È facile di esprimere un integrale ripetuto per mezzo di integrali semplici. Infatti sia u una funzione di x; sia

$$u_1 = \int u dx\,; \text{ sia } u_2 = \int u_1 dx\,; \text{ sia } u_3 = \int u_2 dx\,;$$

e così di seguito.

Integrando per parti abbiamo

$$u_2 = \int u_1 dx = x u_1 - \int x \frac{du_1}{dx} dx = x \int u dx - \int x u dx;$$

$$u_3 = \int u_2 dx = \int \left\{ x \int u dx - \int x u dx \right\} dx;$$

quindi integrando per parti,

$$u_3 = \frac{x^2}{2} \int u dx - \int \frac{x^2}{2} u dx - x \int x u dx + \int x^2 u dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \int u dx - x \int x u dx + \frac{1}{2} \int x^2 u dx.$$

La formola generale è

$$\underline{\lfloor n} \, u_{n+1} = x^n \int u dx - u x^{n-1} \int x u dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \int x^2 u dx - \dots .$$

$$\dots\dots + (-1)^r \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{\underline{\lfloor r}} x^{n-r} \int x^r u dx + \dots$$

$$\dots\dots + (-1)^n \int x^n u dx.$$

La verità di questa formola può stabilirsi facilmente per induzione; infatti se differenziamo i due membri otteniamo una formola simile con $n-1$ in luogo di n.

ESEMPII DIVERSI.

1. $\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{5\pi a^3}{16}$. (Si ponga $x = a \operatorname{sen}^2 \theta$.)

2. $\int_0^{2a} \frac{x dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \pi a$.

3. $\int_0^a \frac{(a^2 - e^2x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{\pi a^2}{2}\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$.

4. $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2ab\,(a+b)}$.

5. Se $\varphi(x) = \varphi(a + x)$, mostrare che

$$\int_0^{na} \varphi(x)\,dx = n\int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

6. Mostrare che $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{2c}\int_{-c}^{c} \varphi\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2c}x\right)dx$.

7. Mostrare che $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$. (Si muti x in $\pi - x'$).

8. Mostrare che $\int_0^{2a} (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{3\pi^2 a^4}{16}$.

(Si muti x in $2a - x'$).

9. Trovare il limite quando n è infinito di

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n^2-2^2)}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{\{n^2-(n-1)^2\}}}.$$

Risultato. $\frac{\pi}{2}$.

10. Trovare il limite quando n è infinito di

$$\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^p + \left(\frac{2}{2n}\right)^p + \left(\frac{3}{2n}\right)^p + \ldots \text{ a } 2n \text{ termini}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^p + \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}\right)^p + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}\right)^p + \ldots \text{ad } n \text{ termini}}.$$

Risultato. $\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}$.

11. Trovare il limite quando n è infinito di $\left\{\dfrac{\lfloor n}{n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$.

Risultato. $\dfrac{1}{e}$. (Si prenda il logaritmo dell'espressione.)

12. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x \, dx = 0$.

13. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x \, dx = \log 2 - 1$.

14. Se $f(x)$ è positiva e finita da $x = a$ ad $x = a + c$, mostrare come si possa trovare il limite di

$$\left\{f(a)\, f\left(a+\frac{c}{n}\right) \ldots\ldots f\left(a+\frac{n-1}{n}c\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

quando n è infinito; e dimostrare che il limite in questione è minore di $\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_a^{a+c} f(x)\,dx$, ammettendo che la media geometrica di un numero finito di quantità positive che non sono tutte eguali è minore della media aritmetica.

Quindi dimostrare che $e^{\int_0^1 u dx}$ è minore di $\int_0^1 e^u \, dx$, a meno che u sia costante da $x = 0$ ad $x = 1$.

15. Il valore dell' integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+n\cos^2\theta)\,d\theta$ può trovarsi per qualunque valore positivo dato ad n per mezzo della formola

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+n\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4}\log\left\{(1+n)(1+n_1)^{\frac{1}{2}}(1+n_2)^{\frac{1}{4}}\ldots\right\}$$

in cui $n, n_1, n_2, \ldots\ldots$ sono quantità legate dall' equazione

$$n_{r+1} = \frac{n_r^{\,2}}{4(n_r+1)}.$$

16. Mostrare che

$$\int e^{cx}\cos ax\,dx = \frac{e^{cx}\cos(ax-\varphi)}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} + \text{una costante},$$

in cui $\tan\varphi = \frac{a}{c}$. Quindi mostrare che se $e^{cx}\cos ax$ s'integra n volte successivamente il risultato è

$$\frac{e^{cx}\cos(ax-n\varphi)}{(a^2+c^2)^{\frac{n}{2}}} + C + C_1x + C_2x^2 \ldots\ldots + C_{n-1}x^{n-1}.$$

CAPITOLO V.

DOPPIA INTEGRAZIONE.

56. Dinoti $\varphi(x)$ una funzione di x; allora abbiamo veduto che l'*integrale* di $\varphi(x)$ è una quantità u tale che $\frac{du}{dx} = \varphi(x)$. L'integrale si può anche riguardare come il limite di una certa somma (si veggano gli Art. 2 – 6), e da ciò è derivato il simbolo $\int \varphi(x)\,dx$ col quale si dinota l'integrale. Procediamo ora ad estendere questi concetti dell'integrale ai casi in cui si hanno più variabili indipendenti.

57. Supponiamo che si debba trovare il valore di u che soddisfi all'equazione $\frac{d^2u}{dy\,dx} = \varphi(x, y)$, in cui $\varphi(x, y)$ è una funzione delle variabili indipendenti x ed y. L'equazione può essere scritta

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = \varphi(x, y),$$

o

$$\frac{dv}{dy} = \varphi(x, y),$$

se $v = \frac{du}{dx}$. Così v deve essere una funzione tale che se la differenziamo rispetto ad y, considerando x come costante, il risultato sarà $\varphi(x, y)$. Possiamo porre perciò

$$v = \int \varphi(x, y)\,dy,$$

o sia

$$\frac{du}{dx} = \int \varphi(x, y)\,dy.$$

Quindi u deve essere una funzione tale che se la differenziamo rispetto ad x, considerando y costante, il risultato sarà la funzione dinotata da $\int \varphi(x, y)\, dy$. Adunque

$$u = \int \left\{ \int \varphi(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Il metodo per trovare u si può descrivere dicendo che prima s'intégra $\varphi(x, y)$ rispetto ad y, e poi s'integra il risultato rispetto ad x.

La precedente espressione di u si può scrivere più concisamente così,

$$\iint \varphi(x, y)\, dy\, dx, \quad \text{o} \quad \iint \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Su questo punto della notazione gli scrittori non sono del tutto uniformi; in questa opera adotteremo l'ultima forma, cioè, dei due simboli dx e dy porremo dy a dritta, allorchè consideriamo l'integrazione rispetto ad y eseguita prima dell'integrazione rispetto ad x, e *viceversa*.

58. Potremmo trovare u integrando prima rispetto ad x e poi rispetto ad y; questo procedimento sarebbe indicato dall'equazione

$$u = \iint \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

59. Poichè abbiamo *due metodi* per trovare u dall'equazione $\frac{d^2u}{dx\, dy} = \varphi(x, y)$, sarà desiderabile di investigare se si può ottenere più di *un risultato*. Supponiamo adunque che u_1 ed u_2 siano due funzioni ciascuna delle quali quando si pone per u soddisfi alla data equazione, sicchè

$$\frac{d^2u_1}{dx\, dy} = \varphi(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{d^2u_2}{dx\, dy} = \varphi(x, y).$$

Abbiamo, con la sottrazione,

$$\frac{d^2u_1}{dx\, dy} - \frac{d^2u_2}{dx\, dy} = 0,$$

o sia $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0, \text{ in cui } v = u_1 - u_2.$$

Ora da un'equazione $\frac{dw}{dx} = 0$ deduciamo che w deve essere una *costante*, cioè, deve essere una *costante* in quanto si riferisce ad x; in altri termini, w non può essere una funzione di x, ma *può* essere una funzione di ogni altra variabile che occorre nella questione che si considera.

Così dall'equazione $\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$ deduciamo che $\frac{dv}{dy}$ non può essere una funzione di x, ma *può* essere una funzione arbitraria di y. Sicchè possiamo porre

$$\frac{dv}{dy} = f(y).$$

Integrando deduciamo

$$v = \int f(y)\, dy + \text{costante}.$$

Quì la costante, come la chiamiamo, non deve contenere y, ma può contenere x; la possiamo dinotare con $\chi(x)$. Ed $\int f(y)\, dy$ lo dinoteremo con $\psi(y)$; così finalmente

$$v = \psi(y) + \chi(x).$$

Adunque due valori di u che sodisfanno all'equazione $\frac{d^2u}{dx\, dy} = \varphi(x, y)$ possono differire solamente per la somma di due funzioni arbitrarie, l'una della sola x e l'altra della sola y.

60. Mostreremo ora il legame tra la doppia integrazione e la sommazione. Sia $\varphi(x, y)$ una funzione di x ed y, che rimane finita e continua finchè x è compreso tra i valori fissi a e b, ed y tra i valori fissi α e β. Sia $a, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}, b$ una serie di quantità in ordine di grandezza; del pari sia $\alpha, y_1, y_2, \ldots\ldots y_{m-1}, \beta$ un'altra serie di quantità in ordine di grandezza.

Sia $x_1 - a = h_1,\ x_2 - x_1 = h_2, \ldots\ldots\ldots\ b - x_{n-1} = h_n$;

similmente sia

$$y_1 - \alpha = k_1,\ y_2 - y_1 = k_2, \ldots\ldots\ldots\ \beta - y_{m-1} = k_m.$$

Proponiamoci ora di trovare il limite della somma di una certa serie in cui ogni termine è della forma

$$h_r k_s \varphi(x_{r-1}, y_{s-1}),$$

in cui r prende tutt'i valori interi tra 1 ed n inclusivamente, ed s prende tutt'i valori interi tra 1 ed m inclusivamente; ed ultimamente m ed n debbono supporsi infiniti; ancora x_0 ed y_0 debbono considerarsi equivalenti ad a ed α rispettivamente. Così possiamo prendere $hk\varphi(x, y)$ come tipo dei termini di cui vogliamo la somma, o pure possiamo prendere $\Delta x\, \Delta y \varphi(x, y)$ come un simbolo anche più espressivo. La serie è allora

$$h_1 \{ k_1 \varphi(a, \alpha) + k_2 \varphi(a, y_1) + k_3 \varphi(a, y_2) \ldots\ldots + k_m \varphi(a, y_{m-1}) \}$$

$$+ h_2 \{ k_1 \varphi(x_1, \alpha) + k_2 \varphi(x_1, y_1) + k_3 \varphi(x_1, y_2) \ldots\ldots + k_m \varphi(x_1, y_{m-1}) \}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ h_n \{ k_1 \varphi(x_{n-1}, \alpha) + k_2 \varphi(x_{n-1}, y_1) + \ldots\ldots\ldots + k_m \varphi(x_{n-1}, y_{m-1}) \}.$$

Consideriamo una delle linee orizzontali di termini che possiamo scrivere

$$h_{r+1} \{ k_1 \varphi(x_r, \alpha) + k_2 \varphi(x_r, y_1) + k_3 \varphi(x_r, y_2) \ldots\ldots + k_m \varphi(x_r, y_{m-1}) \}.$$

Il limite della serie in parentesi quando $k_1, k_2, \ldots k_m$ diminuiscono indefinitamente è, per l'Art. 3,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x_r, y)\, dy.$$

Poichè questo è il limite della serie, possiamo supporre la serie stessa eguale ad

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x_r, y)\, dy + \rho_{r+1},$$

in cui ρ_{r+1} ultimamente svanisce.

Si dinoti $\int_\alpha^\beta \varphi(x_r, y)\, dy$ con $\psi(x_r)$; allora sommando tutte le linee orizzontali otteniamo un risultato che possiamo dinotare con

$$\Sigma h\, \psi(x) + \Sigma h \rho.$$

Ora si diminuisca indefinitamente ciascun termine di cui h è il tipo, allora $\Sigma h\rho$ svanisce, ed abbiamo finalmente

$$\int_a^b \psi(x)\,dx\,;$$

cioè,

$$\int_a^b \left\{\int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dy\right\} dx.$$

Questo si scrive più concisamente

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dx\,dy\,.$$

dy essendo posto a dritta di dx perchè l'integrazione si esegue prima rispetto ad y.

61. Possiamo di nuovo rammentare allo studente che gli scrittori non sono tutti d'accordo riguardo alla notazione degl'integrali doppii. Così noi usiamo $\int_a^b\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,dx\,dy$ per indicare il seguente ordine di operazioni: s'integra $\varphi(x,y)$ rispetto ad y tra i limiti α e β; indi s'integra il risultato rispetto ad x tra i limiti a e b. Alcuni scrittori dinoterebbero lo stesso ordine di operazioni con $\int_a^b\int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dy\,dx$.

62. Avremmo potuto ottenere il limite della somma nell'Art. 60 prendendo prima tutt' i termini in una colonna, e poi prendendo tutte le colonne. In questo modo otterremmo per la somma $\int_\alpha^\beta\int_a^b \varphi(x, y)\,dy\,dx$; per conseguenza

$$\int_\alpha^\beta\int_a^b \varphi(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b\int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

63. Sinora abbiamo integrato tanto rispetto ad x quanto rispetto ad y tra limiti costanti; nelle applicazioni della doppia integrazione, però, i limiti nella prima integrazione sono spesso funzioni dell'altra variabile. Così, per esempio,

il simbolo $\int_a^b \int_{\chi(x)}^{\psi(x)} \varphi(x, y)\, dx\, dy$ dinoterà le seguenti operazioni: prima s'integra rispetto ad y considerando x costante; si supponga essere $F(x, y)$ l'integrale; indi prendendo l'integrale tra i limiti assegnati abbiamo il risultato

$$F\{x, \psi(x)\} - F\{x, \chi(x)\}.$$

Finalmente dobbiamo ottenere l'integrale indicato da

$$\int_a^b [F\{x, \psi(x)\} - F\{x, \chi(x)\}]\, dx.$$

La sola differenza che si richiede nel procedimento sommatorio dell'Art. 60 si è, che le quantità $\alpha, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ non avranno lo stesso significato in ciascuna linea orizzontale. Nella $(r+1)^{ma}$ linea, per esempio, cioè, in

$$h_{r+1}\{k_1\varphi(x_r, \alpha) + k_2\varphi(x_r, y_1) + k_3\varphi(x_r, y_2) \ldots + k_m\varphi(x_r, y_{m-1})\},$$

dobbiamo considerare α come messa per $\chi(x_r)$, ed $y_1, y_2, \ldots$ come una serie di quantità, tale che $\chi(x_r), y_1, y_2, \ldots\ldots y_{m-1}, \psi(x_r)$, sono in ordine di grandezza, e che la differenza tra due consecutive qualunque ultimamente svanisce. Quindi, procedendo come sopra, otteniamo $\int_{\chi(x_r)}^{\psi(x_r)} \varphi(x_r, y)\, dy$ per il limite della somma dei termini nella $(r+1)^{ma}$ linea.

64. Non è necessario di supporre lo stesso numero di termini in tutte le linee orizzontali; poichè m ultimamente diviene infinitamente grande, sicchè otteniamo la stessa espressione per il limite della $(r+1)^{ma}$ linea qualunque possa essere il numero dei termini dal quale partiamo.

65. Quando i limiti nella prima integrazione sono funzioni dell'altra variabile non possiamo eseguire le integrazioni in ordine diverso, come nell'Art. 62, senza una speciale investigazione per determinare quali saranno allora i limiti. Questa quistione sarà considerata in uno dei capitoli seguenti.

66. Dalla definizione della doppia integrazione, segue che quando i limiti delle due integrazioni sono costanti,

$$\iint \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = \int \varphi(x)\, dx \times \int \psi(y)\, dy,$$

supponendo che i limiti in $\int \psi(y)\,dy$ sono gli stessi che nell'integrazione rispetto ad y nel primo membro, ed i limiti in $\int \varphi(x)\,dx$ gli stessi che nell'integrazione rispetto ad x nel primo membro. Infatti il primo membro è il limite della somma di una serie di termini, tali che

$$h_r k_s\,\varphi(x_{r-1})\,\psi(y_{s-1}),$$

ed il secondo membro è il limite del prodotto di

$$h_1\varphi(x_0)+h_2\varphi(x_1)+h_3\varphi(x_2)\,\ldots\ldots+h_n\varphi(x_{n-1}),$$

per $\qquad k_1\psi(y_0)+k_2\psi(y_1)+k_3\psi(y_2)\,\ldots\ldots+k_m\psi(y_{m-1}).$

67. Il lettore sarà ora capace di estendere i procedimenti dati in questo capitolo agl'integrali *tripli* ed agl'integrali *multipli* in generale. Il simbolo

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

indicherà che deve essere eseguita la seguente serie di operazioni: integrare $\varphi(x,y,z)$ rispetto a z tra i limiti ζ_0 e ζ_1 considerando x ed y costanti; indi integrare il risultato rispetto ad y tra i limiti η_0 ed η_1 considerando x costante; finalmente integrare questo risultato rispetto ad x tra i limiti ξ_0 e ξ_1. Quì ζ_0 e ζ_1 possono essere funzioni di x ed y; ed η_0 ed η_1 possono essere funzioni di x. Questo integrale triplo è il limite di una certa serie che può essere dinotata da $\Sigma\varphi(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$.

ESEMPII DIVERSI.

Ottenere gli otto integrali seguenti.

1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a^3-x^3)}}\,dx.$ (Si ponga $y=x^{\frac{3}{2}}$.)

Risultato. $\dfrac{2}{3}\,\text{sen}^{-1}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$.

2. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

Risultato. $\displaystyle x + \frac{a^3 \log(x-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3 \log(x-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3 \log(x-c)}{(c-a)(c-b)}$.

3. $\displaystyle\int \frac{\tan x \, dx}{1 + m^2 \tan^2 x}$. *Risultato.* $\displaystyle\frac{\log(\cos^2 x + m^2 \operatorname{sen}^2 x)}{2(m^2-1)}$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^{2n} + x^{2n})}}$. $\left(\text{Si ponga } x = \frac{1}{y}\right)$.

Risultato. $\displaystyle\frac{1}{na^n} \log \frac{x^n}{a^n + \sqrt{(a^{2n} + x^{2n})}}$.

5. $\displaystyle\int \sec x \sec 2x \, dx$.

Risultato. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{sen} x} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

6. $\displaystyle\int \frac{\tan a - \tan x}{\tan a + \tan x} dx$.

Risultato. $\operatorname{sen} 2a \log \operatorname{sen}(a + x) - x \cos 2a$.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + a^2x^2 + a^4}$.

Risultato. $\displaystyle\frac{1}{4a^3} \log \frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{xa\sqrt{3}}{a^2 - x^2}$.

8. $\displaystyle\int \frac{(a - bx^2)\, dx}{x\sqrt{\{cx^2 - (a - bx^2)^2\}}}$. (Si ponga $\frac{a}{x} + bx = y$.)

Risultato. $\displaystyle\cos^{-1} \frac{y}{\sqrt{(c + 4ab)}}$.

9. Trovare il limite quando n è infinito di

$\displaystyle\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} \dots\dots \operatorname{sen}\frac{n\pi - \pi}{n}\right\}^{\frac{1}{n}}$. *Risultato* $\frac{1}{2}$.

10. Mostrare che

$$\int_0^1 x\,(\tan^{-1} x)^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-1\right) + \log\sqrt{2}.$$

11. Mostrare che

$$\int_0^a\int_0^x\int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \frac{e^{4a}}{8} - \frac{3e^{2a}}{4} + e^a - \frac{3}{8}.$$

12. Sia $A = \iint x^2\,dx\,dy,\quad B = \iint xy\,dx\,dy,\quad C = \iint y^2\,dx\,dy,$

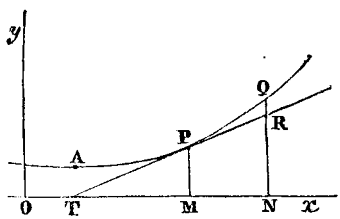
e si suppongano gli stessi limiti delle integrazioni nei tre integrali; allora dimostrare che AC è maggiore di B^2.

CAPITOLO IV.

LUNGHEZZE DELLE CURVE.

Curve piane. Coordinate rettangolari.

68. Sia P un punto qualunque sulla curva APQ, e siano x, y le sue coordinate; dinoti s la lunghezza dell'arco AP misurato da un punto fisso A sino a P;



allora (*Cal. Dif.* Art. 307)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Onde
$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} dx.$$

Dall'equazione della curva possiamo esprimere $\frac{dy}{dx}$ in x, e così con l'integrazione si conosce s.

69. Il procedimento per trovare la lunghezza di una curva si chiama la *rettificazione della curva,* poichè possiamo supporre che la quistione sia questa: trovare una *linea retta* eguale in lunghezza ad una porzione assegnata della curva.

Nell'articolo precedente abbiamo mostrato che la lunghezza di un arco di una curva sarà conosciuta se può ottenersi un certo integrale. Può accadere in molti casi che questo integrale non si possa ottenere. Sempre che la lunghezza di un arco di una curva si può esprimere per mezzo di una o di entrambe le coordinate dell'estremità variabile dell'arco, la curva si dice essere *rettificabile*.

70. *Applicazione alla Parabola.*

L'equazione della parabola è $y = \sqrt{(4ax)}$; onde

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{x+a}{a}\right)};$$

così
$$s = \int \sqrt{\left(\frac{x+a}{x}\right)} dx \quad \text{(Si vegga Es. 6, p. 19)}$$

$$= \sqrt{(ax + x^2)} + a \log \{ \sqrt{x} + \sqrt{(a+x)} \} + C.$$

Quì C dinota una quantità *costante*, cioè, una quantità che non dipende da x; il suo valore dipenderà dalla posizione del punto fisso dal quale si misura l'arco s. Se misuriamo dal vertice allora s svanisce con x; quindi per determinare C abbiamo

$$a \log \sqrt{a} + C = 0;$$

e così
$$s = \sqrt{(ax + x^2)} + a \log \{ \sqrt{x} + \sqrt{(a+x)} \} - a \log \sqrt{a}$$

$$= \sqrt{(ax + x^2)} + a \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{(a+x)}}{\sqrt{a}}.$$

Se dunque richiediamo la lunghezza della curva misurata dal vertice sino al punto che ha un'ascissa assegnata, dobbiamo porre solamente quell'ascissa assegnata in luogo di x nell'ultima espressione. Così, per esempio, per una delle estremità del lato retto $x = a$; quindi la lunghezza dell'arco tra il vertice ed un'estremità del lato retto è

$$a \sqrt{2} + a \log (1 + \sqrt{2}).$$

71. Nell'articolo precedente abbiamo trovato il valore della costante C, ma nell'applicare la formola per trovare le lunghezze di porzioni assegnate delle curve questo non è ne-

cessario. Infatti supponiamo che si voglia trovare la lunghezza dell'arco di una curva misurato dal punto che ha per ascissa x_1 sino al punto di cui l'ascissa è x_2. Dinoti $\psi(x)$ l'integrale di $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$, e siano s_1 ed s_2 le lunghezze degli archi della curva misurati da un punto fisso sino ai punti di cui le ascisse sono x_1 ed x_2 rispettivamente, sicchè $s_2 - s_1$ è la lunghezza richiesta; allora

$$s = \int \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx = \psi(x) + C;$$

onde $$s_1 = \psi(x_1) + C; \quad s_2 = \psi(x_2) + C;$$

quindi $$s_2 - s_1 = \psi(x_2) - \psi(x_1).$$

Quindi per trovare la lunghezza cercata dobbiamo porre successivamente x_1 ed x_2 in luogo di x in $\psi(x)$ e sottrarre il primo risultato dal secondo. Così non abbiamo bisogno di prendere alcuna notizia della costante C; infatti il nostro risultato si può scrivere

$$s_2 - s_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx.$$

72. *Applicazione alla Cicloide.*

Nella cicloide, se l'origine è al vertice e l'asse delle y è la tangente in quel punto, abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 358).

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)};$$

onde $$s = \sqrt{(8ax)} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal vertice.

Viceversa se $s = \sqrt{(8ax)} + C$ s'inferisce che la curva è una cicloide. E più generalmente se abbiamo

$$s + A = \sqrt{(B + C_1 x + C_2 y)},$$

in cui A, B, C_1, e C_2 sono costanti, s'inferisce che la curva è una cicloide. Infatti per mezzo di convenienti cangiamenti nell'origine e negli assi all'ultima equazione può darsi la forma

$$s = \sqrt{(8ax)} + C.$$

73. *Applicazione alla Catenaria.*

L'equazione della catenaria è $y = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})$; onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}), \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}});$$

così $$s = \frac{1}{2}\int(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})\,dx = \frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}) + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal punto pel quale $x = 0$.

74. *Applicazione alla Curva data dall'equazione*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Quì $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{ds}{dx} = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

così $$s = a^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco dal punto pel quale $x = 0$. La curva è una ipocicloide in cui il raggio del circolo mobile è un quarto del raggio del circolo fisso. (Si vegga *Cal. Dif.* Art. 360; e si ponga $b = \frac{a}{4}$).

75. Nello stesso modo col quale si è ottenuto il risultato nell'Art. 68 possiamo mostrare che

$$s = \int\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}\,dy.$$

O pure possiamo dedurre questo risultato dal primo così;

$$\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,dx=\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\,\frac{dx}{dy}\,dy$$

$$=\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}\,dy.$$

Dall'equazione della curva possiamo esprimere $\frac{dx}{dy}$ in y, e così con l'integrazione si conosce s. In alcuni casi questa formola può essere più conveniente di quella nell'Art. 68.

76. *Applicazione alla Curva Logaritmica.*

L'equazione di questa curva è $y = ba^x$, o $y = be^{\frac{x}{c}}$ se supponiamo $a = e^{\frac{1}{c}}$; così $x = c\log\frac{y}{b}$,

onde $$\frac{dx}{dy}=\frac{c}{y}, \qquad \frac{ds}{dy}=\frac{\sqrt{(c^2+y^2)}}{y},$$

ed $$s=\int\frac{\sqrt{(c^2+y^2)}}{y}\,dy=\int\frac{c^2dy}{y\sqrt{(c^2+y^2)}}+\int\frac{ydy}{\sqrt{(c^2+y^2)}}.$$

L'ultimo integrale è $\sqrt{(c^2+y^2)}$; il primo è

$$c\log\frac{y}{c+\sqrt{(c^2+y^2)}}, \quad \text{(Art. 14)}.$$

Quindi $$s=c\log\frac{y}{c+\sqrt{(c^2+y^2)}}+\sqrt{(c^2+y^2)}+C.$$

77. Se x ed y sono funzioni di una terza variabile t, abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 307)

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}};$$

così $$s=\int\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}\,dt.$$

78. L'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Possiamo pren-

dere perciò $x = a \operatorname{sen} \varphi$, $y = b \cos \varphi$, sicchè φ è il complemento dell'*angolo eccentrico*. Quindi per l'articolo precedente,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

ed $$s = \int \sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}\, d\varphi = a \int \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}\, d\varphi.$$

L'integrale esatto non si può ottenere; possiamo però sviluppare $\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}$ in una serie, sicchè

$$s = a \int \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} e^4 \operatorname{sen}^4 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \operatorname{sen}^6 \varphi \ldots \right\} d\varphi$$

e ciascun termine si può integrare separatamente. Per ottenere la lunghezza del quadrante ellittico dobbiamo integrare tra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Curve piane. Coordinate polari.

79. Siano r, θ le coordinate polari di un punto qualunque di una curva, ed s la lunghezza dell'arco misurato da un punto fisso sino a questo punto; allora (*Cal. Dif.* Art. 311)

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}};$$

onde $$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}}\, d\theta.$$

80. *Applicazione alla Spirale di Archimede.*

In questa curva $r = a\theta$, così $\frac{dr}{d\theta} = a$;

quindi $$s = \int \sqrt{(r^2 + a^2)}\, d\theta = a \int \sqrt{(1 + \theta^2)}\, d\theta$$

$$= \frac{a\theta}{2} \sqrt{(1 + \theta^2)} + \frac{a}{2} \log \{ \theta + \sqrt{(1 + \theta^2)} \} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal polo, cioè, dal punto ove $\theta = 0$.

81. *Applicazione alla Cardioide.*

L'equazione di questa curva è $r = a(1 + \cos\theta)$; così

$$s = \int \sqrt{\{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta\}}\, d\theta = a \int \sqrt{(2 + 2\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= 2a \int \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + C.$$

La costante sarà zero se misuriamo l'arco s dal punto pel quale $\theta = 0$, cioè, dal punto in cui la curva attraversa la linea iniziale.

La lunghezza di quella parte della curva che è compresa tra la linea iniziale ed una linea per il polo ad angoli retti sulla linea iniziale è $4a \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$. La lunghezza del semiperimetro della curva è $4a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, cioè, $4a$.

82. Supponiamo che si richieda la lunghezza dell'intero perimetro della cardioide; potremmo sulle prime supporre che essa sia eguale a $2a\int_0^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$; ma ciò darebbe zero per risultato, il che evidentemente è inammissibile. La ragione di questo si può vedere facilmente, infatti abbiamo mostrato che

$$\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{(2 + 2\cos\theta)},$$

e questo non si deve porre eguale a $2a\cos\frac{\theta}{2}$ ma a $\pm 2a\cos\frac{\theta}{2}$, ed il segno conveniente deve essere determinato in ogni applicazione della formola. Ora per s noi intendiamo una quantità positiva, e possiamo misurare s in modo che essa cresca con θ, e così $\frac{ds}{d\theta}$ è positivo. Quindi quando $\cos\frac{\theta}{2}$ è positivo, prendiamo il segno superiore e poniamo $\frac{ds}{d\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$; quando $\cos\frac{\theta}{2}$ è negativo, prendiamo il segno inferiore e poniamo $\frac{ds}{d\theta} = -2a\cos\frac{\theta}{2}$. Quindi la lunghezza dell'intero perimetro non è $2a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$, ma $2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$; cioè, $8a$. Questo risultato poteva prevedersi, poichè è chiaro per la simmetria della figura che la lunghezza dell'intero perimetro è il doppio della lunghezza di quella parte che è situata da una parte della linea iniziale, la quale si è mostrato essere $4a$ nell'articolo precedente.

83. Alle volte può essere più conveniente di trovare la lunghezza di una curva per mezzo della formola

$$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1 \right\}}\, dr,$$

che segue immediatamente da quella nell'Art. 79.

84. *Applicazione alla Spirale Logaritmica.*

L'equazione di questa curva è $r = ba^{\theta}$, o $r = be^{\frac{\theta}{c}}$ se supponiamo $a = e^{\frac{1}{c}}$; così $\theta = c\log\frac{r}{b}$; onde $\frac{d\theta}{dr} = \frac{c}{r}$ ed

$$s = \int \sqrt{(1 + c^2)}\, dr = \sqrt{(1 + c^2)}\, r + C.$$

Così la lunghezza della porzione della curva che ha r_1 ed r_2 per raggi vettori dei suoi punti estremi è

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(1 + c^2)}\, dr\,, \text{ cioè}, \ \sqrt{(1 + c^2)}\,(r_2 - r_1).$$

L'angolo tra il raggio vettore e la corrispondente tangente in ogni punto di questa curva è costante (*Cal. Dif.* Art. 354); e se quell'angolo si dinota con α abbiamo $c = \tan\alpha$; così $\sqrt{(1 + c^2)} = \sec\alpha$; onde $\frac{ds}{dr} = \sec\alpha$, ed $s = r\sec\alpha + C$. Quindi $(r_2 - r_1)\sec\alpha$ è la lunghezza della porzione sopra menzionata.

Formole che racchiudono il raggio vettore e la perpendicolare.

85. Sia φ l'angolo tra il raggio vettore r di un punto qualunque di una curva e la tangente in questo punto; allora $\cos\varphi = \frac{dr}{ds}$ (*Cal. Dif.* Art. 310). Sia p la perpendicolare dal polo sulla stessa tangente; allora

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{p}{r}, \text{ onde } \cos\varphi = \frac{\sqrt{(r^2-p^2)}}{r};$$

così
$$\frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{(r^2-p^2)}}{r};$$

quindi
$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{(r^2-p^2)}}, \quad \text{ed} \quad s = \int \frac{rdr}{\sqrt{(r^2-p^2)}}.$$

86. *Applicazione all' Epicicloide.*

Con la notazione e la figura nel *Cal. Dif.* Art. 360, si può mostrare che l'equazione della tangente all'epicicloide in P è

$$y' - y = -\frac{\cos\theta - \cos\frac{a+b}{b}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta}(x'-x),$$

in cui x ed y sono le coordinate di P, ed x' ed y' le coordinate variabili. Quindi si troverà che la perpendicolare p dall'origine sulla tangente in P è data da

$$p = (a+2b)\operatorname{sen}\frac{a\theta}{2b};$$

inoltre
$$r^2 = a^2 + 4b(a+b)\operatorname{sen}^2\frac{a\theta}{2b};$$

così
$$p^2 = \frac{c^2(r^2-a^2)}{c^2-a^2}, \text{ in cui } c = a+2b.$$

Quindi, per l'Art. 85,

$$s = \frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int\frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}} = -\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)} + C.$$

In una cuspide $r=a$, ed in un vertice $r=c$; così la lunghezza della porzione della curva tra una cuspide ed il vertice adiacente è

$$\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_a^c \frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}, \text{ cioè } \frac{c^2-a^2}{a}, \text{ o sia } \frac{4b(a+b)}{a}.$$

Quindi la lunghezza della porzione tra due cuspidi consecutive è $\frac{8b(a+b)}{a}$.

87. Quì si può fare un' osservazione simile a quella nell' Art. 82. Se applichiamo la formola

$$s=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)}+C$$

a trovare la lunghezza tra due cuspidi consecutive, arriviamo al risultato zero, poichè $r=a$ nei due limiti. La ragione si è di aver usato la formola

$$\frac{ds}{dr}=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}}$$

mentre la vera formola è

$$\frac{ds}{dr}=\pm\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}}.$$

Poichè s si può prendere in modo che cresca continuamente, ne segue che $\frac{ds}{dr}$ è positivo quando r è crescente, e negativo quando r è decrescente. Ora nel passare lungo la curva da una cuspide al vertice adiacente r cresce, così $\frac{ds}{dr}$ è positivo, e dobbiamo prendere il segno *superiore* nella formola per $\frac{ds}{dr}$; indi nel passare dal vertice alla cuspide seguente r diminuisce, così $\frac{ds}{dr}$ è negativo, e deve prendersi il segno *inferiore*. Quindi la lunghezza da una cuspide alla cuspide seguente è

$$=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_a^c\frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_c^a\frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int_a^c\frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}=\frac{8b(a+b)}{a}.$$

88. Da ciò che si è stabilito nell'articolo precedente, apparisce che se l'arco s incomincia da un vertice la formola conveniente si è

$$\frac{ds}{dr}=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}},$$

onde $$s=-\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\int\frac{rdr}{\sqrt{(c^2-r^2)}}=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\sqrt{(c^2-r^2)}.$$

Non si richiede alcuna costante poichè incominciamo a misurare dal punto per quale $r=c$; la formola vale per i valori di s minori di $\frac{4b(a+b)}{a}$.

Si può osservare che così

$$s=\frac{c^2-a^2}{a^2}\sqrt{(r^2-p^2)}.$$

89. Similmente per l'ipocicloide possiamo mostrare che

$$p^2=\frac{c^2(a^2-r^2)}{a^2-c^2},\text{ in cui } c=a-2b.$$

Supponiamo c^2 minore di a^2; allora possiamo mostrare che

$$\frac{ds}{dr}=\pm\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(r^2-c^2)}},$$

e così può trovarsi s. La lunghezza della curva tra due cuspidi adiacenti è $\frac{8b(a-b)}{a}$.

Supponiamo in seguito c^2 maggiore di a^2; allora dovremo scrivere il valore di $\frac{ds}{dr}$ così,

$$\frac{ds}{dr}=\pm\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{a}\frac{r}{\sqrt{(c^2-r^2)}};$$

in questo caso b è maggiore di a, e troveremo che la lunghezza della curva tra due cuspidi adiacenti è $\frac{8b(b-a)}{a}$.

Quando $a=2b$ abbiamo $c=0$ e $p=0$; in questo caso l'ipocicloide diviene una linea retta coincidente con un diametro del circolo fisso.

Se $a=b$ abbiamo $c^2=a^2$; in questo caso il denominatore nel valore di p^2 svanisce; si troverà che l'ipocicloide si riduce allora ad un punto, ed $r=a$.

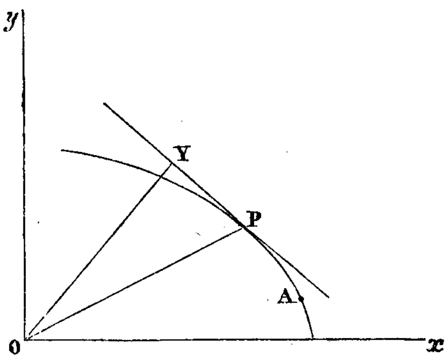
Si può mostrare come nell'Art. 88, che se s è misurato da un vertice ad un punto non al di là della cuspide adiacente, abbiamo

$$s=\pm\frac{c^2-a^2}{a^2}\sqrt{(r^2-p^2)},$$

prendendosi il segno superiore o l'inferiore secondo che c è maggiore o minore di a.

Formole che racchiudono la Perpendicolare e la sua Inclinazione.

90. Un altro metodo di esprimere la lunghezza di una curva è degno di notizia.



Sia P un punto di una curva; x, y le sue coordinate. Sia s la lunghezza dell'arco misurato da un punto fisso A sino a P. Si tiri OY perpendicolare dall'origine O sulla tangente in P, e si supponga $OY=p$, $PY=u$, $YOx=\theta$; allora

$$p = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta,$$
$$u = x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\cot \theta, \quad \frac{ds}{dx} = -\operatorname{cosec} \theta;$$

onde

$$\frac{dp}{d\theta} = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta + \cos \theta \frac{dx}{d\theta} + \operatorname{sen} \theta \frac{dy}{d\theta} = -u,$$

$$\frac{d^2p}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta} = -x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{d\theta} + \cos \theta \frac{dy}{d\theta}$$
$$= -p - \operatorname{cosec} \theta \frac{dx}{d\theta} = -p + \frac{ds}{d\theta};$$

onde, con l'integrazione,

$$\frac{dp}{d\theta} = -\int p d\theta + s,$$

quindi $$s = \frac{dp}{d\theta} + \int p d\theta;$$

questo si può anche scrivere

$$s + u = \int p d\theta.$$

Supponiamo s_1 ed u_1 i valori di s ed u quando θ ha il valore θ_1, ed s_2 ed u_2 i loro valori quando θ ha il valore θ_2, allora

$$s_2 - s_1 + u_2 - u_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p d\theta.$$

Abbiamo misurato u nella direzione della rotazione da P e lo abbiamo preso positivo in questo caso; quando u è negativo indicherà che Y è dall'altra parte di P.

I risultati precedenti si possono usare per diversi oggetti, tra i quali possiamo notarne due.

(1) Per determinare la lunghezza di una porzione di una curva quando è data l'equazione della curva; infatti da quell'equazione insieme con $\frac{dy}{dx} = -\cot \theta$ possiamo trovare x ed y per mezzo di θ, e quindi p che è eguale ad $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$; allora s può trovarsi dall'equazione

$$s = \frac{dp}{d\theta} + \int p d\theta.$$

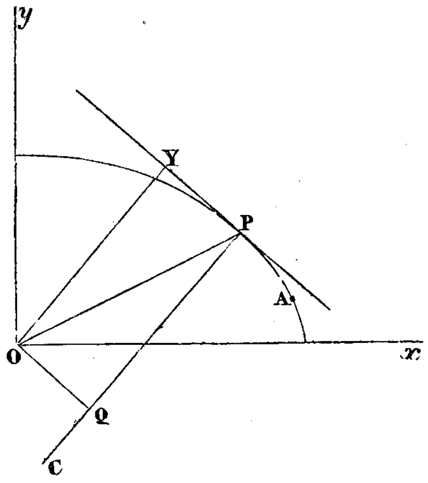
(2) Per trovare una curva tale che per mezzo del suo arco si possa rappresentare un proposto integrale; infatti se il proposto integrale è $\int p d\theta$, in cui p è una funzione di θ, la curva richiesta si ottiene eliminando θ tra le equazioni

$$x = p \cos\theta - \frac{dp}{d\theta}\operatorname{sen}\theta,\quad y = p\operatorname{sen}\theta + \frac{dp}{d\theta}\cos\theta,$$

ed allora l'integrale si può rappresentare con $s - \frac{dp}{d\theta}$.

Questo articolo è stato tratto dall' *Integral Calculus* di Hymers, Art. 136.

91. I risultati dell'articolo precedente si possono ottenere in altro modo. Dinoti ρ il raggio di curvatura della curva



in P; sia $OP = r$, ed abbiano s, u, e θ lo stesso significato come sopra, allora dal Calcolo Differenziale abbiamo

$$\rho = \frac{ds}{d\theta},\quad \text{e}\quad \rho = r\frac{dr}{dp},\ \text{onde}\ \frac{dp}{d\theta} = r\frac{dr}{ds}.$$

Inoltre $$PY = r\cos OPY = -r\frac{dr}{ds};$$

quindi $$\frac{dp}{d\theta} = -PY = -u.$$

Sia PC il raggio di curvatura in P; si tiri OQ perpendicolare a PC. Il luogo di C è l'evoluta della curva AP; e QC è rispetto a questo luogo ciocchè PY è rispetto al luogo di P. Siano θ', p' le coordinate polari di Q, e sia $QC=u'$; allora

$$\theta' = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ e } p' = u.$$

E $$QC = u' = -\frac{dp'}{d\theta'} = -\frac{dp'}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta} = \frac{d^2p}{d\theta^2}.$$

Inoltre $$\rho = PQ + QC = p + u' = p + \frac{d^2p}{d\theta^2};$$

ma $$\rho = \frac{ds}{d\theta}, \text{ quindi } s = \frac{dp}{d\theta} + \int p d\theta.$$

Dal valore di PY possiamo ottenere una facile dimostrazione di un teorema di qualche interesse nel Calcolo Differenziale (*Cal. Dif.* Art. 329). Dinoti p_1 la perpendicolare da O sul luogo di Y; allora (*Cal. Dif.* Art. 284)

$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2,$$

poichè p è il raggio vettore di Y. Così

$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{u^2}{p^4} = \frac{p^2+u^2}{p^4} = \frac{r^2}{p^4};$$

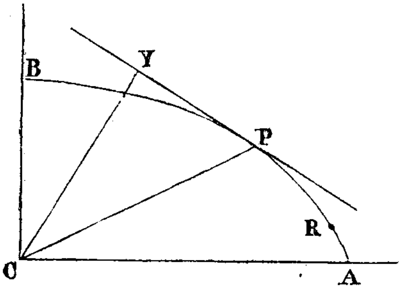
quindi $$p_1 = \frac{p^2}{r}.$$

Un caso particolare della formola

$$s_2 - s_1 + u_2 - u_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p d\theta$$

si potrebbe notare. Supponiamo che si prenda una *completa* curva ovale senza punti singolari; allora $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, ed $u_2 = u_1$; così il perimetro completo della curva è $\int_{\theta}^{\theta_1+2\pi} p d\theta$.

92. *Applicazione all' Ellisse.*



Sia APB un quadrante di un'ellisse, CY la perpendicolare sulla tangente in P; sia $ACY=\theta$. Allora (per la *Geometria piana analitica*) $CY = a\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}$;

onde $$AP+PY = a\int\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}\,d\theta,$$

la costante da aggiungersi all'integrale si suppone essere presa in modo che l'integrale svanisca con θ. Se R è un punto tale che il suo angolo eccentrico sia $\frac{\pi}{2}-\theta$, abbiamo, per l'Art. 78,

$$BR = a\int\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}\,d\theta;$$

così $$AP+PY=BR \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

E $$PY = -\frac{dp}{d\theta} = \frac{ae^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}}.$$

Sia x l'ascissa di P; allora per l'Art. 90,

$$x = p\cos\theta - \frac{dp}{d\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$= a\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}\cos\theta + \frac{ae^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta)}}.$$

Così $PY = e^2x\operatorname{sen}\theta$; e se x' è l'ascissa di R abbiamo $x' = a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ sicchè $PY = \frac{e^2xx'}{a}$. Così (1) si può scrivere

$$BR - AP = \frac{e^2}{a}xx' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

questo risultato si chiama il Teorema di Fagnani.

Dai valori notati di x ed x' abbiamo

$$x^2 = \frac{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{a^2 - x'^2}{1 - \dfrac{e^2 x'^2}{a^2}};$$

quindi $$e^2 x^2 x'^2 - a^2 (x^2 + x'^2) + a^4 = 0.$$

Così l'equazione che lega x ed x' racchiude queste quantità *simmetricamente;* quindi da (2) possiamo inferire che

$$BP - AR = \frac{e^2}{a} xx'.$$

Questo è anche chiaro dalla figura.

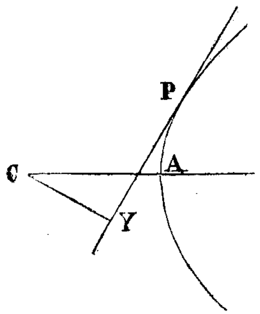
Possiamo osservare che il valore di PY si può ottenere più semplicemente per mezzo di una nota proprietà dell'ellisse. Infatti supponiamo condotta la normale in P che incontri CA in G; e per P si tiri la parallela a CA che incontri CY in Q. Allora $PQ = CG = e^2 x$, per la natura dell'ellisse; e

$$PY = PQ \operatorname{sen} \theta = e^2 x \operatorname{sen} \theta.$$

93. *Applicazione all' Iperbole.*

Sia C il centro ed A il vertice di un'iperbole, CY la perpendicolare sulla tangente in P. Sia $ACY = \theta$ e $CY = p$; allora si può dimostrare che

$$PY - AP = a \int \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta.$$



Questo può dimostrarsi nello stesso modo del risultato corrispondente dell'articolo precedente; possiamo o fare i convenienti cangiamenti di segno nelle formole dell'Art. 90, che provengono dalla differenza della figura; o possiamo incominciare da capo nel modo di quell'articolo. La costante da aggiungersi all'integrale si suppone presa in modo che l'integrale svanisca con θ.

Si supponga α il massimo valore che θ può avere, allora (per la *Geometria piana analitica*), $\cot\alpha = \sqrt{(e^2 - 1)}$. Quando P si allontana a distanza infinita $PY - AP$ diviene la differenza tra la lunghezza dell'asintoto da C e l'infinito arco iperbolico da A. Così questa differenza è

$$a\int_0^\alpha \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta.$$

Quistioni inverse sulle lunghezze delle curve.

94. Negli articoli precedenti abbiamo mostrato come possa trovarsi la lunghezza di un arco di una curva conosciuta in termini dell'ascissa della sua estremità variabile; noteremo ora brevemente il problema inverso di trovare una curva tale che l'arco sia una data funzione dell'ascissa della sua estremità variabile.

Supponiamo $\varphi(x)$ la funzione data; allora $s = \varphi(x)$;

onde $$\varphi'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}};$$

così $$\frac{dy}{dx} = [\{\varphi'(x)\}^2 - 1]^{\frac{1}{2}},$$

ed $$y = \int [\{\varphi'(x)\}^2 - 1]^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

95. Come un esempio del metodo precedente, supponiamo $\varphi(x) = \sqrt{(4cx)}$; così $\varphi'(x) = \sqrt{\frac{c}{x}}$; onde

$$y = \int \left[\frac{c}{x} - 1\right]^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{(c-x)\,dx}{\sqrt{(cx-x^2)}}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{c}{2} - x\right) dx}{\sqrt{(cx - x^2)}} + \frac{c}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(cx - x^2)}}$$

$$= \sqrt{(cx - x^2)} + \frac{c}{2} \operatorname{vers}^{-1} \frac{2x}{c} + C.$$

Possiamo scrivere y' per $y - C$ e così troviamo che la curva è una cicloide (*Cal. Dif.* Art. 358).

96. Per un altro esempio supponiamo $\varphi(x) = a \log x$; così $\varphi'(x) = \frac{a}{x}$.

Qui
$$y = \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)} dx = \int \frac{(a^2 - x^2)\,dx}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$= \int \frac{a^2 dx}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^3)}}$$

$$= a \log \frac{x}{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}} + \sqrt{(a^2 - x^2)} + C.$$

Involute ed Evolute.

97. La lunghezza di un arco di una curva si può esprimere senza integrazione quando conosciamo l'equazione dell'involuta della curva. Supponiamo che s' rappresenti la lunghezza di un arco di una curva, ρ il raggio di curvatura in quel punto dell'involuta che corrisponde all'estremità variabile di s', allora (*Cal. Dif.* Art. 331) $s' \pm \rho = l$, in cui l è una costante. Se l'equazione dell'involuta è conosciuta, ρ può trovarsi in termini delle coordinate del punto dell'involuta; indi queste coordinate si possono esprimere in termini delle coordinate dal punto corrispondente dell'evoluta, e così si conosce s'. Con questo metodo eseguiamo il procedimento di differenziazione e di riduzione algebrica invece dell'integrazione.

98. *Applicazione all'Evoluta della Parabola.*

Prendiamo per involuta la parabola che ha per sua equazione $y^2 = 4ax$; siano x', y' le coordinate del punto dell'evoluta che corrisponde al punto (x, y) sulla parabola. Allora con i metodi ordinarii (*Cal. Dif.* Art. 330) abbiamo

$$x' = 2a + 3x, \quad y' = -\frac{y^3}{4a^2},$$

e
$$\rho = 2a\left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Così otterremo per l'equazione dell'evoluta

$$27ay'^2 = 4(x' - 2a)^3;$$

e
$$\rho = 2a\left(\frac{x'+a}{3a}\right)^{\frac{3}{2}};$$

onde
$$s' \pm 2a\left(\frac{x'+a}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} = l.$$

Supponiamo che si misuri s' dal punto pel quale $x' = 2a$, cioè, dal punto che corrisponde al vertice della parabola; allora vediamo che s' cresce con x', sicchè dobbiamo prendere il segno inferiore nell'ultima equazione; inoltre supponendo $x' = 2a$ ed $s' = 0$ troviamo $l = -2a$; così

$$s' = 2a\left(\frac{x'+a}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} - 2a.$$

Questo valore di s' si può anche ottenere con l'applicazione del metodo ordinario d'integrazione.

99. Quando la lunghezza dell'arco di una curva è conosciuta in termini delle coordinate della sua estremità variabile, l'equazione dell'involuta si può trovare col procedimento ordinario di eliminazione.

Infatti abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 331).

$$\frac{\frac{dx'}{dx}}{x' - x} = \pm\frac{1}{\rho}\frac{ds'}{dx},$$

in cui le lettere accentate si riferiscono ad un punto di una curva, e le lettere senza accento al punto corrispondente dell' involuta. Così

$$x = x' \mp \rho \frac{dx'}{ds'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Similmente

$$y = y' \mp \rho \frac{dy'}{ds'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Quindi se s' è conosciuto in termini di x', o di y', o di tutte e due, per mezzo di questa relazione e della data equazione della curva possiamo trovare $\frac{dx'}{ds'}$ e $\frac{dy'}{ds'}$; e ρ è conosciuto dall' equazione $s' \mp \rho = l$. Rimane quindi solamente ad eliminare x' ed y' da (1) e (2) e la nota equazione della curva; otteniamo così un' equazione tra x ed y, che è l'equazione richiesta dell' involuta.

100. *Applicazione alla Catenaria.*

L' equazione della catenaria è

$$y' = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} + e^{-\frac{x'}{c}}\right),$$

ed

$$s' = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} - e^{-\frac{x'}{c}}\right),$$

supponendo s' misurato dal punto pel quale $x' = 0$ ed $y' = c$; troveremo ora l' equazione di quell' involuta della catenaria che incomincia dal punto della curva testè indicato.

Abbiamo allora

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{s'}{c}, \qquad \frac{ds'}{dx'} = \frac{y'}{c};$$

così

$$\frac{dy'}{ds'} = \frac{s'}{y'}, \qquad \frac{dx'}{ds'} = \frac{c}{y'};$$

e $\rho = s'$, non richiedendosi alcuna costante, poichè per la supposizione ρ svanisce con s'.

Quindi le equazioni (1) e (2) dell'articolo precedente divengono

$$x = x' - \frac{s'c}{y'};$$

$$y = y' - \frac{s'^2}{y'} = \frac{y'^2 - s'^2}{y'} = \frac{c^2}{y'}.$$

Ed $\qquad s' = \sqrt{(y'^2 - c^2)} = \sqrt{\left(\frac{c^4}{y^2} - c^2\right)} = \frac{c}{y}\sqrt{(c^2 - y^2)};$

onde $\qquad \frac{s'}{y'} = \frac{\sqrt{(c^2 - y^2)}}{c};$

così $\qquad x = x' - \sqrt{(c^2 - y^2)}$; onde $x' = \sqrt{(c^2 - y^2)} + x$.

Dobbiamo quindi sostituire questi valori di x' ed y' nell'equazione della catenaria, e così otteniamo la richiesta relazione tra x ed y. La sostituzione si può effettuare convenientemente così,

$$y' = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} + e^{-\frac{x'}{c}}\right);$$

onde $\qquad \sqrt{(y'^2 - c^2)} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x'}{c}} - e^{-\frac{x'}{c}}\right);$

onde $\qquad y' + \sqrt{(y'^2 - c^2)} = ce^{\frac{x'}{c}},$

quindi $\qquad x' = c \log \frac{y' + \sqrt{(y'^2 - c^2)}}{c}.$

Così finalmente, $\qquad x + \sqrt{(c^2 - y^2)} = c \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - y^2)}}{y}.$

Questa curva si chiama la *trattrice*; a motivo del radicale, vi sono due valori di x per ogni valore di y minore di c, questi due valori essendo numericamente eguali, ma di segni opposti. Vi è una cuspide nel punto pel quale $x = 0$ ed $y = 0$; e l'asse delle x è un asintoto.

101. Le formole polari si possono anche usare in simil modo per determinare l'involuta quando la lunghezza di un arco dell'evoluta si può esprimere in termini delle coordinate polari della sua estremità variabile. Abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 332).

$$r'^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho p \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$p'^2 = r^2 - p^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quì, come sopra, le lettere accentate appartengono alla curva nota, cioè all'evoluta, e le lettere senza accento alla richiesta involuta; così poichè l'evoluta è nota, vi è una conosciuta relazione tra p' ed r'. Ed $s' \mp \rho = l$, sicchè se s' si può esprimere in termini di p' ed r' possiamo eliminare p' ed r' per mezzo di (1), (2), e la relazione nota tra p' ed r'. Così otteniamo un'equazione tra p ed r, che serve a determinare l'involuta.

102. *Applicazione alla Spirale equiangola.*

In questa curva $p'=r' \operatorname{sen} \alpha$, in cui α è l'angolo costante della spirale. Se supponiamo che l'involuta incominci dal polo della spirale, ed s' sia misurato da quel punto, abbiamo $\rho = s' = r' \sec \alpha$ (Art. 84). Così (1) dell'articolo precedente diviene

$$r'^2 = r'^2 \sec^2 \alpha + r^2 - 2r'p \sec \alpha$$

$$= r'^2 \sec^2 \alpha + r'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + p^2 - 2r'p \sec \alpha, \text{ per } (2).$$

Da quest'equazione quadratica in p otteniamo

$$p - r' \sec \alpha = \pm r' \cos \alpha.$$

Se prendiamo il segno superiore troviamo $p = \dfrac{r'(1+\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}$, ed allora da (2) abbiamo $r^2 = \dfrac{1+3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} r'^2$. Ma questa soluzione deve essere rigettata, poichè da essa troveremmo ρ o $r\dfrac{dr}{dp} = \dfrac{1+3\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\cos^2\alpha)} r'$, che non è d'accordo con l'equazione $\rho = r' \sec \alpha$.

Se prendiamo il segno inferiore troviamo $p = \dfrac{r' \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$, ed allora da (2) troviamo $r^2 = \dfrac{r'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$; così $p = r \operatorname{sen} \alpha$. Quindi l'involuta è una spirale equiangola con lo stesso angolo costante come nell'evoluta.

Equazione intrinseca di una Curva.

103. Dinoti s la lunghezza di un arco di una curva misurata da un punto fisso, φ l'inclinazione della tangente nell'estremità variabile sulla tangente in un punto fisso della curva; allora l'equazione che determina la relazione tra s e φ si chiama *l'equazione intrinseca* della curva. In alcune ricerche, specialmente quelle relative alle involute ed evolute, questo metodo di determinare una curva è più semplice del metodo ordinario di riferire la curva ad assi rettangolari che sono linee *estrinseche*.

104. Mostreremo prima come si può ottenere l'equazione *intrinseca* dall'equazione ordinaria.

Supponiamo che $y = f(x)$ sia l'equazione della curva, essendo l'origine un punto della curva, e l'asse delle y la tangente in quel punto; dall'equazione data abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\tan \varphi} \text{ per ipotesi;}$$

così x è conosciuta in termini di $\tan\varphi$, o sia $x = F(\tan\varphi)$; allora

$$\frac{dx}{d\varphi} = F'(\tan\varphi) \sec^2\varphi;$$

inoltre
$$\frac{ds}{dx} = \operatorname{cosec}\varphi;$$

onde
$$\frac{ds}{d\varphi} = F'(\tan\varphi) \sec^2\varphi \operatorname{cosec}\varphi;$$

da quest'equazione con l'integrazione si può trovare s in termini di φ. Un simile risultato si otterrà se nell'origine si suppone che l'asse delle x coincida con la tangente.

105. *Applicazione alla Cicloide.*

Dal *Cal. Dif.* Art. 358, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)} = \frac{1}{\tan\varphi};$$

onde $$\frac{2a}{x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi},\quad x = 2a\operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = 4a\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \operatorname{cosec}\varphi\,\frac{dx}{d\varphi} = 4a\cos\varphi;$$

onde $$s = 4a\operatorname{sen}\varphi + C.$$

La costante sarà zero se supponiamo s misurato dal punto fisso nel quale si è tirata la prima tangente, cioè, dal vertice della curva.

106. Essendo data l'equazione intrinseca dedurre l'equazione ordinaria.

Abbiamo $$\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}\varphi;$$

onde $$x = \int ds\operatorname{sen}\varphi.$$

Similmente $$y = \int ds\cos\varphi.$$

Ora per supposizione si conosce s in termini di φ; così con l'integrazione possiamo trovare x ed y in termini di φ, ed allora eliminando φ otteniamo l'equazione ordinaria della curva in termini di x ed y.

107. *Applicazione alla Cicloide.*

Quì $s = 4a\operatorname{sen}\varphi$;

così $$x = \int ds\operatorname{sen}\varphi = 4a\int\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi = C - a\cos 2\varphi,$$

$$y = \int ds\cos\varphi = 4a\int\cos^2\varphi\,d\varphi = C' + 2a\varphi + a\operatorname{sen}2\varphi.$$

Quindi eliminando φ possiamo ottenere l'equazione ordinaria; se l'origine degli assi rettangolari è il vertice della curva, avremo $C = a$ e $C' = 0$.

108. Daremo ora diversi esempii di equazioni intrinseche.

L'equazione intrinseca del circolo evidentemente è $s = a\varphi$.

109. L'equazione della catenaria è

$$y + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

l'origine essendo sulla curva. Quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right), \quad s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

così se φ è l'angolo che la tangente in un punto qualunque fa con la tangente nell'origine,

$$s = c \tan\varphi.$$

110. Abbiamo veduto nell'Art. 86, che per l'epicicloide

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta - \cos\frac{a+b}{b}\theta}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta - \operatorname{sen}\theta} = \tan\varphi \text{ supponiamo,}$$

così
$$\varphi = \frac{a+2b}{2b}\theta.$$

Inoltre, per lo stesso articolo,

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\sqrt{(c^2 - a^2)}}{a}\sqrt{(c^2 - r^2)} + C \\ &= -\frac{4b(a+b)}{a}\cos\frac{a\theta}{2b} + C \\ &= \frac{4b(a+b)}{a}\left(1 - \cos\frac{a\theta}{2b}\right), \end{aligned}$$

se supponiamo s misurato dal punto pel quale $\theta = 0$.

Così
$$s = \frac{4b(a+b)}{a}\left(1 - \cos\frac{a\varphi}{a+2b}\right).$$

Possiamo semplificare questo risultato ponendo

$$\varphi = \frac{\pi(a+2b)}{2a} + \varphi', \text{ ed } s = \frac{4b(a+b)}{a} + s';$$

ciò corrisponde a misurare l'arco da un vertice invece che da una cuspide. Così

$$s' = \frac{4b(a+b)}{a} \operatorname{sen} \frac{a\varphi'}{a+2b},$$

in cui l'accento può ora togliersi.

111. Similmente l'equazione intrinseca dell'ipocicloide si può scrivere

$$s = \frac{4b(a-b)}{a} \operatorname{sen} \frac{a\varphi}{a-2b}.$$

112. Apparisce dai due ultimi articoli che $s = l \operatorname{sen} n\varphi$ rappresenta un'epicicloide o un'ipocicloide, secondo che n è minore o maggiore dell'unità. Per esempio, se

$$s = l \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}, \quad s = l \operatorname{sen} \frac{\varphi}{3}, \quad s = l \operatorname{sen} \frac{\varphi}{4}, \quad s = l \operatorname{sen} \frac{\varphi}{5}, \ldots$$

abbiamo epicicloidi nelle quali $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \; 1, \; \frac{3}{2}, \; 2, \ldots$

Se $s = l \operatorname{sen} 2\varphi, \quad s = l \operatorname{sen} 3\varphi, \quad s = l \operatorname{sen} 4\varphi, \quad s = l \operatorname{sen} 5\varphi, \ldots$
abbiamo ipocicloidi nelle quali $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{3}{8}, \; \frac{2}{5}, \ldots$

113. Se ρ è il raggio di curvatura della curva nel punto determinato da s e φ, abbiamo (*Cal. Dif.* Art. 324)

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Nella spirale logaritmica sappiamo che ρ varia proporzionalmente ad s se l'arco è misurato dal polo; così

$$\rho = ks = \frac{ds}{d\varphi};$$

onde $k = \frac{1}{s}\frac{ds}{d\varphi}$, e quindi con l'integrazione

$$k\varphi + \text{costante} = \log s;$$

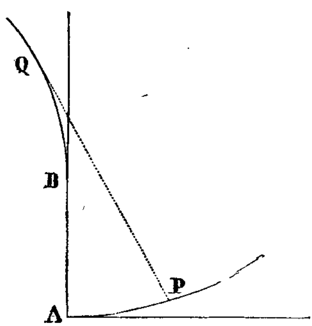
quindi $$s = ae^{k\varphi},$$

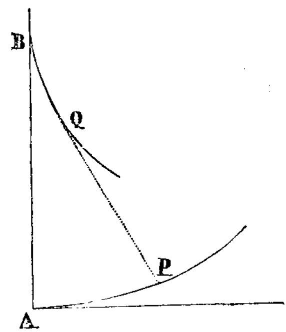
in cui a è una costante. Se poniamo $s = s' + a$ abbiamo

$$s' = a\,(e^{k\varphi} - 1),$$

ed ora s' è misurato dal punto pel quale $\varphi = 0$.

114. Se l'equazione intrinseca di una curva è conosciuta, può trovarsi quella dell'evoluta.





Sia AP una curva, BQ l'evoluta; sia s la lunghezza di un arco di AP misurato da un punto fisso sino a P; s' la lunghezza di un arco di BQ misurato da un punto fisso sino a Q. È evidente che φ è lo stesso per s ed s', se in BQ misuriamo φ da BA, che è perpendicolare alla linea dalla quale si misura φ in AP.

Nella figura a sinistra $s' = \rho - C = \dfrac{ds}{d\varphi} - C$.

Nella figura a dritta $s' = C - \rho = C - \dfrac{ds}{d\varphi}$.

Così se s è conosciuto in termini di φ, possiamo trovare s' espresso in φ. La costante C è eguale al valore di ρ nel punto corrispondente a quello pel quale $s' = 0$.

115. Per esempio, nella cicloide $s = 4a \operatorname{sen} \varphi$; così

$$s' = C - 4a \cos \varphi.$$

Si ponga $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ ed $s' = \sigma + C$; così

$$\sigma = 4a \operatorname{sen} \psi.$$

Questo mostra che l'evoluta è una cicloide eguale.

116. Similmente conoscendo l'equazione intrinseca di una curva, può trovarsi quella dell'involuta. Infatti per l'Art. 114

$$\frac{ds}{d\varphi} = C \pm s';$$

onde

$$s = \int (C \pm s')\, d\varphi.$$

Così se s' è conosciuto in termini di φ, possiamo trovare s espresso in φ.

117. Per esempio, nel circolo $s' = a\varphi$. Così

$$s = \int (C \pm a\varphi)\, d\varphi = C\varphi \pm \frac{a\varphi^2}{2} + C'.$$

Se supponiamo che s incominci dove $\varphi = 0$ abbiamo $C' = 0$, ed inoltre, se s incomincia dove l'involuta incontra il circolo abbiamo $C = 0$; così $s = \frac{a\varphi^2}{2}$. (Si vegga *Cal. Dif.* Art. 333).

118. È chiaro che con i metodi degli Art. 114 e 116 possiamo trovare l'evoluta dell'evoluta di una curva, o l'involuta dell'involuta di una curva, e così di seguito.

119. Lo studente si può esercitare nel tracciare curve per mezzo delle loro equazioni intrinseche; egli troverà utile di prendere una curva tale come la cicloide, la forma della quale è ben conosciuta, e riconoscere che l'equazione intrinseca conduce a quella forma; egli può quindi prendere alcuna delle epicicloidi o ipocicloidi date nell'Art. 112. Per ulteriore informazione su questo soggetto, e per le figure illustrative, lo studente può consultare due memorie del D.r Whewell, pubblicate nelle *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. VIII. pag. 659, e Vol IX. pag. 150.

Curve a doppia Curvatura.

120. Siano x, y, z le coordinate di un punto di una curva nello spazio; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ le coordinate di un punto adiacente sulla curva. Allora si conosce per i principii della geometria solida, che la lunghezza della corda che congiunge questi due punti è $\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}}$. Sia s la lunghezza dell'arco della curva misurato da un punto fisso sino ad (x, y, z); e sia $s+\Delta s$ la lunghezza dell'arco misurato dallo stesso punto fisso sino ad $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Ammetteremo che Δs serbi alla corda che congiunge i punti adiacenti un rapporto che è ultimamente eguale all'unità quando il secondo punto si muove lungo la curva sino al primo punto. Così il limite di

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}}}, \text{ cioè, di } \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2\right\}}},$$

è l'unità. Quindi

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}},$$

onde
$$s=\int\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}\,dx.$$

Dalle equazioni della curva $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ si possono esprimere in x, e quindi con l'integrazione si conoscerà s in termini di x.

121. Rispetto a ciò che si è ammesso nell'articolo precedente, lo studente può riferirsi al *Cal. Dif.* Art. 307, 308; egli può anche consultare il *Differential and Integral Calculus* di De Morgan, pag. 444, e l'*Integral Calculus* di Homersham Cox, pag. 95.

122. Supponiamo, per esempio, che la curva sia determinata dalle equazioni

$$y^2=4ax \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$z=\sqrt{(2cx-x^2)}+c\,\text{vers}^{-1}\frac{x}{c} \ldots\ldots (2),$$

sicchè la curva è formata dall'intersezione di due cilindri, cioè un cilindro che ha le sue generatrici parallele all'asse delle z, e che poggia sulla parabola nel piano delle (x, y) data da (1), ed un cilindro che ha le sue generatrici parallele all'asse delle y, e che ha per base la cicloide nel piano delle (x, z) data da (2). Allora

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)}, \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2c - x}{x}\right)};$$

onde

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{2c}{x} - 1\right)} = \sqrt{\left(\frac{2c + a}{x}\right)};$$

quindi

$$s = \sqrt{(2c + a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{(2c + a)}\sqrt{x}.$$

Non si richiede alcuna costante se misuriamo l'arco dall'origine delle coordinate.

123. La formola data nell'Art. 120 si può cambiare in

$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\, dy,$$

ed

$$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right\}}\, dz,$$

ed in alcuni casi queste forme possono essere più convenienti di quella nell'Art. 120.

124. Alle volte una curva nello spazio è determinata da tre equazioni, le quali esprimono x, y, z rispettivamente per mezzo di una variabile ausiliaria; allora eliminando questa variabile, possiamo, se è necessario, ottenere due equazioni tra x, y, e z, e così determinare la curva nel modo ordinario. Supponiamo adunque che ciascuna delle x, y, z sia una funzione nota di t; allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

ed $$s = \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} dx$$

$$= \int \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}} dt$$

125. *Applicazione all' Elica.*

Questa curva può essere determinata dalle equazioni

$$x = a \cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad z = ct;$$

così $$s = \sqrt{(a^2 + c^2)} \int dt = t \sqrt{(a^2 + c^2)} + C.$$

126. Quando si adoperano le coordinate polari per determinare la posizione di un punto nello spazio, abbiamo le seguenti equazioni che legano le coordinate rettangolari e polari di un punto qualunque,

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

E come una curva nello spazio è determinata da due equazioni tra x, y, e z, essa può anche essere determinata da due equazioni tra r, θ, e φ. Così possiamo concepire che r e φ siano funzioni conosciute di θ, e quindi x, y, e z diventino funzioni note di θ.

Quindi

$$\frac{dx}{d\theta} = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi}{d\theta} + r \cos \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{dr}{d\theta} + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\theta} + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta.$$

Onde $$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + r^2,$$

ed $$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 \right\}}\, d\theta.$$

Questo può trasformarsi in

$$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \right\}}\, dr$$

o in $$s = \int \sqrt{\left\{ r^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \right\}}\, d\varphi.$$

127. Se p è la perpendicolare dall'origine sulla tangente di una curva nello spazio, allora l'equazione

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - p^2)}},$$

che si dimostrò per una curva *piana* nell'Art. 85, reggerà ancora. Infatti ciascun membro dell'equazione esprime la secante dell'angolo che la tangente fa col raggio vettore al punto di contatto.

Quindi $$s = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2 - p^2)}}.$$

ESEMPII.

1. Per quali valori di m ed n le curve $a^m y^n = x^{m+n}$ sono *rettificabili?* (Si vegga l'Art. 15.)

   Risultato. Se $\frac{n}{2m}$ o $\frac{n}{2m} + \frac{1}{2}$ è un intero.

2. Mostrare che la lunghezza dell'arco di una Trattrice misurato dalla cuspide è determinata da $s = c \log \frac{c}{y}$.

3. Mostrare che la Cissoide è rettificabile.

4. Mostrare che l'intera lunghezza della curva che ha per equazione $4(x^2 + y^2) - a^2 = 3a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ è eguale a $6a$.

   $$\left[\text{Si può dimostrare che } \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{4y^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)}\right].$$

5. La lunghezza dell'arco della curva

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

tra i limiti (x_1, y_1) ed (x, y) è

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(x_1+y_1)^{\frac{2}{3}} + (x_1-y_1)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

6. Se $s = ae^{\frac{x}{c}}$, trovare la relazione tra x ed y.

7. Mostrare che l'equazione intrinseca della parabola è

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2a}{\cos^3\varphi} \text{ o } s = \frac{a}{2}\log\frac{1+\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi} + \frac{a\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

8. L'equazione intrinseca della curva $y^3 = ax^2$ è

$$s = \frac{8a}{27}(\sec^3\varphi - 1).$$

9. Mostrare che la lunghezza dell'arco dell'evoluta di una parabola dalla cuspide sino al punto in cui l'evoluta incontra la parabola è $2a(3\sqrt{3}-1)$; in cui $4a$ è il lato retto della parabola.

10. L'evoluta di un'epicicloide è un'epicicloide, il raggio del circolo fisso essendo $\dfrac{a^2}{a+2b}$ ed il raggio del circolo generatore $\dfrac{ab}{a+2b}$. (Art. 110 e 114.)

11. Mostrare che se l'equazione di una curva si trova eliminando θ tra le equazioni

$$x = \operatorname{sen}\theta\,\psi'(\theta) + \cos\theta\,\psi''(\theta),$$

ed $\quad y = \cos\theta\,\psi'(\theta) - \operatorname{sen}\theta\,\psi''(\theta),$

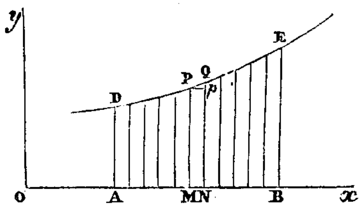
allora $\quad s = \psi(\theta) + \psi''(\theta).$

12. Mostrare che la lunghezza della curva $8a^3y = x^4 + 6a^2x^2$ misurata dall'origine è $\dfrac{x}{8a^3}(x^2+4a^2)^{\frac{3}{2}}$.

CAPITOLO VII.

AREE DELLE CURVE PIANE E DELLE SUPERFICIE.

Aree piane. Formole rettangolari. Semplice integrazione.



128. Sia DPE una curva, di cui l'equazione è $y=\varphi(x)$, e supponiamo essere x, y le coordinate di un punto P. Dinoti A l'area racchiusa tra la curva, l'asse delle x, l'ordinata PM, ed un'ordinata fissa AD, allora (*Cal. Dif.* Art. 43)

$$\frac{dA}{dx} = \varphi(x);$$

onde
$$A = \int \varphi(x)\, dx.$$

Sia $\psi(x) + C$ l'integrale di $\varphi(x)$; così

$$A = \psi(x) + C.$$

Dinoti A_1 l'area quando l'ordinata variabile è ad una distanza x dall'asse delle y, e dinoti A_2 l'area quando l'ordinata variabile è ad una distanza x_2 dall'asse delle y; allora

$$A_1 = \psi(x_1) + C, \quad A_2 = \psi(x_2) + C;$$

quindi $$A_2 - A_1 = \psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx.$$

129. *Applicazione al Circolo.*

L'equazione del circolo riferito al suo centro come origine è $y^2 = a^2 - x^2$; quì $\varphi(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; così

$$A = \int \varphi(x)\, dx = \int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

La costante C svanisce se supponiamo che l'*ordinata fissa* coincida con l'asse delle y. Si vedrà tracciando una figura, che l'area compresa tra l'asse delle x, l'asse delle y, il circolo, e l'ordinata alla distanza x dall'asse delle y, si può dividere in un triangolo ed un settore, i valori dei quali sono dati dal primo e dal secondo termine dell'espressione precedente di A. Questa osservazione può essere d'aiuto allo studente per rammentare l'importante integrale

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}.$$

130. *Applicazione all'Ellisse.*

Supponiamo si voglia trovare l'area totale dell'ellisse. L'equazione dell'ellisse si può scrivere $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Quindi l'area di un quadrante dell'ellisse

$$= \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4};$$

quindi l'area dell'ellisse è πab.

131. *Applicazione alla Parabola.*

L'equazione della Parabola è $y^2 = 4ax$; quì dunque

$$\varphi(x) = \sqrt{(4ax)},$$

ed $$\int \sqrt{(4ax)}\, dx = \frac{4\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} + C;$$

così con la notazione dell' Art. 128

$$A_2 - A_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(4ax)}\, dx = \frac{4\sqrt{a}}{3}(x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}).$$

Se $x_1 = 0$ abbiamo per l' area $\frac{4\sqrt{a}}{3} x_2^{\frac{3}{2}}$, cioè, due terzi del prodotto dell'ascissa x_2 e dell'ordinata $\sqrt{(4ax_2)}$,

132. *Applicazione alla Cicloide.*

L' integrazione richiesta dalla formola $\int y dx$ diviene alle volte più facile se esprimiamo x ed y in termini di una nuova variabile. Così, per esempio, nella cicloide possiamo porre (*Cal. Dif.* Art. 358)

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad y = a(\theta + \operatorname{sen}\theta);$$

quindi $$\int y dx = a^2 \int (\theta + \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int \theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta + \frac{a^2}{2}\int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta;$$

ciò dà $$a^2(-\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + \frac{a^2}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right).$$

Se prendiamo questo tra i limiti 0 e π per θ, otteniamo l' area di una mezza cicloide; il risultato è $\frac{3a^2\pi}{2}$. Quindi l' area dell' intera cicloide è eguale a tre volte quella del circolo generatore.

133. Le equazioni della *compagna della cicloide* sono

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad y = a\theta;$$

da ciò si può mostrare che l' area dell' intera curva è due volte quella del circolo generatore.

134. Se una curva è determinata dall' equazione $x = \varphi(y)$, allora l' area contenuta tra la curva, l' asse delle y, e le linee

parallele all'asse delle x alle distanze eguali rispettivamente ad y_1 ed y_2 è $\int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\, dy$. Ciò è manifesto dopo la dimostrazione della simile proposizione nell'Art. 128.

135. Le formole negli Art. 128 e 134 forniscono uno dei più semplici ed importanti esempii dell'applicazione del Calcolo Integrale. Come abbiamo già osservato, il problema di determinare le aree delle curve fu uno di quelli che diedero origine al Calcolo Integrale, ed i simboli adoperati sono molto espressivi del procedimento necessario per risolvere il problema. Nella figura dell'Art. 128, lo studente vedrà che il rettangolo $PpNM$ si può appropriatamente dinotare con $y\Delta x$, ed il procedimento per trovare l'area di $ADEB$ si riduce a questo; prima si effettua l'addizione dinotata da $\Sigma y\Delta x$, e poi si diminuisce Δx indefinitamente.

136. Supponiamo che si voglia l'area contenuta tra la curva $y = c \operatorname{sen} \frac{x}{a}$, l'asse delle x, e le ordinate alle distanze x_1 ed x_2 rispettivamente dall'asse delle y. Abbiamo

$$c\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\, dx = ca\left(\cos\frac{x_1}{a} - \cos\frac{x_2}{a}\right).$$

Si supponga quindi $x_1 = 0$ ed $x_2 = a\pi$; l'area è $2ca$. In seguito si supponga $x_1 = 0$ ed $x_2 = 2a\pi$; il risultato

$$ca\left(\cos\frac{x_1}{a} - \cos\frac{x_2}{a}\right)$$

diviene zero in questo caso, il che evidentemente è inammissibile, poichè l'area deve essere una quantità positiva. Infatti $\operatorname{sen}\frac{x}{a}$ è *negativo* da $x = a\pi$ sino ad $x = 2a\pi$, ma nella dimostrazione che l'area è eguale ad $\int y dx$, si suppone che y sia *positiva*. Se y è realmente negativa l'area sarà $\int (-y)\, dx$.

Così nell'esempio attuale l'area non sarà

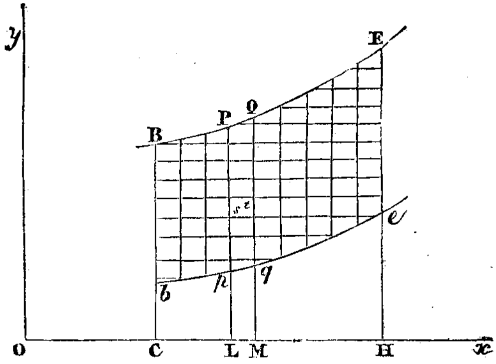
$$c\int_0^{2a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\, dx \text{ ma } c\int_0^{a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\, dx + c\int_{a\pi}^{2a\pi}\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{a}\right) dx,$$

cioè, $$c\int_0^{a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx - c\int_{a\pi}^{2a\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx;$$

ciò darà $2ca + 2ca$, cioè, $4ca$.

Aree piane. Formole rettangolari. Doppia Integrazione.

137. Nell'Art. 128 abbiamo ottenuto una formola per trovare l'area di una curva; questa formola suppone che l'area sia il limite di più aree elementari, ciascun elemento essendo una quantità di cui $y\Delta x$ è il tipo. Procediamo ora a spiegare un altro modo di decomporre l'area richiesta in aree elementari.



Supponiamo che si voglia l'area racchiusa tra le curve $BPQE$ e $bpqe$, e le linee rette Bb ed Ee. Si tiri una serie di linee parallele all'asse delle y, ed un'altra serie di parallele all'asse delle x. Rappresenti st uno dei rettangoli così formati, e supponiamo essere x ed y le coordinate di s, ed $x + \Delta x$ ed $y + \Delta y$ le coordinate di t; allora l'area del rettangolo st è $\Delta x \Delta y$. Quindi l'area richiesta si può trovare sommando tutt'i valori di $\Delta x \Delta y$, e poi procedendo al limite che si ottiene supponendo che Δx e Δy diminuiscano indefinitamente.

Si effettua la richiesta sommazione dei termini come $\Delta x \Delta y$ nel modo seguente: riuniamo prima tutt'i rettangoli simili ad st che sono contenuti nella striscia $PQqp$, ed otteniamo così l'area di questa striscia; in seguito sommiamo tutte le striscie simili a questa striscia che giacciono tra Bb ed Ee. L'errore che possiamo commettere trascurando l'elemento dell'area posto nella parte superiore e nella inferiore di ciascuna striscia, e che non è un rettangolo completo, sparirà nel limite quando Δx e Δy si diminuiscono indefinitamente.

Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione della curva superiore, ed $y=\psi(x)$ l'equazione della curva inferiore; sia $OC=c$ ed $OH=h$, allora se A dinota l'area richiesta, abbiamo

$$A=\int_c^h\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dx\,dy;$$

poichè l'espressione simbolica quì data dinota il procedimento che abbiamo stabilito pocanzi in parole.

Ora $\int dy=y$, quindi $\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dy=\varphi(x)-\psi(x)$; così abbiamo

$$A=\int_c^h \{\varphi(x)-\psi(x)\}\,dx.$$

In questa forma possiamo immediatamente vedere la verità dell'espressione, poichè $\varphi(x)-\psi(x)=PL-pL=Pp$; così $\{\varphi(x)-\psi(x)\}\Delta x$ si può prendere per l'area della striscia $PQqp$, e la formola asserisce che A è eguale al limite della somma di tali striscie.

Le linee nella figura non sono necessariamente equidistanti: cioè, gli elementi di cui $\Delta x\Delta y$ è il tipo non sono necessariamente tutti della stessa area.

138. Il risultato dell'articolo precedente si è, che l'area A è data dall'equazione

$$A=\int_c^h \{\varphi(x)-\psi(x)\}\,dx.$$

Questo risultato si può ottenere in un modo molto semplice come si è mostrato nell'ultima parte dell'articolo precedente, sicchè non era assolutamente *necessario* di introdurre la formola di doppia integrazione. Nondimeno abbiamo richiamata l'attenzione sulla formola

$$A=\int_c^h\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dx\,dy$$

a motivo dell'illustrazione che si è quì data del procedimento di doppia integrazione; lo studente può così trovare più facile l'applicare il procedimento di doppia integrazione a quei casi in cui è assolutamente necessario, dei quali si avranno esempii in appresso.

139. Se l'area che si deve valutare è limitata dalle curve $x=\psi(y)$, ed $x=\varphi(y)$, e da linee rette parallele all'asse delle x alle distanze eguali rispettivamente a c ed h, abbiamo in modo simile

$$A=\int_c^h\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} dy\,dx=\int_c^h \{\varphi(y)-\psi(y)\}\,dy.$$

Alcuni esempii delle formole degli Art. 137 e 139 saranno ora considerati; vedremo che ciascuna di queste formole si può usare in un esempio, benchè generalmente l'una sarà più semplice dell'altra.

140. Si voglia l'area racchiusa tra la parabola $y^2=ax$ ed il circolo $y^2=2ax-x^2$.

Le curve passano per l'origine e s'incontrano nel punto pel quale $x=a$; così se prendiamo solamente l'area che sta dalla parte positiva dell'asse delle x, abbiamo

$$A=\int_0^a \{\sqrt{(2ax-x^2)}-\sqrt{(ax)}\}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3}.$$

L'intera area sarà perciò $2\left(\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3}\right)$.

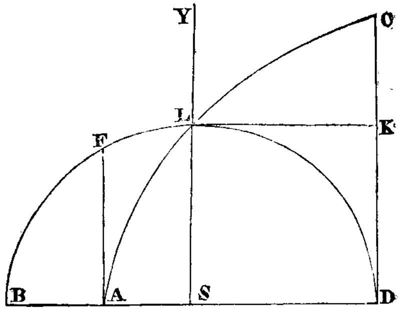
Supponiamo che in questo esempio si voglia integrare prima rispetto ad x. Dall'equazione $y^2=2ax-x^2$ deduciamo $x=a\pm\sqrt{(a^2-y^2)}$, e si vedrà immediatamente da una figura che nella presente quistione dobbiamo prendere il segno inferiore. Così posto x_1 per $a-\sqrt{(a^2-y^2)}$, ed x_2 per $\frac{y^2}{a}$, verrà

$$A=\int_0^a\int_{x_1}^{x_2} dy\,dx=\int_0^a\left\{\frac{y^2}{a}-a+\sqrt{(a^2-y^2)}\right\}dy$$

$$=\frac{a^2}{3}-a^2+\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3},\text{ come prima.}$$

Il lettore dovrebbe tracciare le figure e porre attenzione ai *limiti* delle integrazioni.

141. Nella figura seguente S è il centro di un circolo BLD, S è anche il fuoco di una parabola ALC; indicheremo le



integrazioni che dovrebbero effettuarsi per ottenere le aree ALB ed LDC. Questo esempio si è messo con lo scopo di illustrare il procedimento di doppia integrazione, e non per alcun interesse nei risultati: le aree si possono ottenere facilmente per mezzo delle formole già date; così ALB è la differenza tra l'area parabolica ALS ed il quadrante SLB; e similmente LDC è conosciuta.

Si prenda S per origine. Nel trovare l'area ALB sarà conveniente supporre che la direzione positiva dell'asse delle x sia verso sinistra; così se $4a$ è il lato retto della parabola, e per conseguenza $2a$ il raggio del circolo, l'equazione della parabola è $y^2=4a(a-x)$, e quella del circolo $y^2=4a^2-x^2$.

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad x, allora

$$\text{area } ALB=\int_0^{2a}\int_{x_1}^{x_2} dy\,dx,$$

in cui $$x_1=a-\frac{y^2}{4a},\quad x_2=\sqrt{(4a^2-y^2)}.$$

Poichè quì $(x_2-x_1)\Delta y$ rappresenta una striscia racchiusa tra le due curve e due linee parallele all'asse delle x; e le striscie sono situate a distanze dall'asse delle x disposte tra 0 e $2a$, sicchè l'integrazione rispetto ad y è presa tra i limiti 0 e $2a$.

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad y; dovremo allora dividere l'area in due parti con la linea AF. Sia

$$y_1 = \sqrt{(4a^2 - 4ax)}, \qquad y_2 = \sqrt{(4a^2 - x^2)};$$

allora $$\text{area } ALF = \int_0^a \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy = \int_0^a (y_2 - y_1)\, dx;$$

$$\text{area } AFB = \int_0^{2a} \int_0^{y_2} dx\, dy = \int_0^{2a} y_2\, dx;$$

la somma di queste due parti esprime l'area ALB.

Prendiamo in secondo luogo l'area LDC; supponiamo ora che la direzione positiva dell'asse delle x sia verso dritta, allora l'equazione della parabola è $y^2 = 4a(a+x)$, e quella del circolo $y^2 = 4a^2 - x^2$.

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad y; sia

$$y_1 = \sqrt{(4a^2 - x^2)} \text{ ed } y_2 = \sqrt{(4a^2 + 4ax)};$$

allora $$\text{area } DLC = \int_0^{2a} \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy.$$

Supponiamo che s'integri prima rispetto ad x; dovremo allora dividere l'area in due parti con la linea LK. Sia

$$x_1 = \sqrt{(4a^2 - y^2)}, \quad x_2 = \frac{y^2}{4a} - a;$$

allora troveremo che $DC = 2a\sqrt{3} = b$ poniamo; così

$$\text{area } DLK = \int_0^{2a} \int_{x_1}^{2a} dy\, dx,$$

$$\text{area } CLK = \int_{2a}^{b} \int_{x_2}^{2a} dy\, dx;$$

la somma di queste due parti esprime l'area LDC.

142. Un caso nel quale sono utili le formole degli Art. 137 e 139 è quello in cui le curve limiti sono diversi rami di una stessa curva. Supponiamo che l'equazione di una curva sia $(y - mx - c)^2 = a^2 - x^2$; così

$$y = mx + c \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Quì possiamo porre

$$\psi(x) = mx + c - \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

$$\varphi(x) = mx + c + \sqrt{(a^2 - x^2)};$$

così $\varphi(x) - \psi(x) = 2\sqrt{(a^2 - x^2)}$, e l'area completa della curva è

$$\int_{-a}^{a} 2\sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx, \text{ cioè, } \pi a^2.$$

143. Abbiamo sinora supposto gli assi rettangolari, ma se essi sono obbliqui ed inclinati sotto un angolo ω, la formola nell'Art. 128 diviene

$$A = \operatorname{sen} \omega \int \varphi(x)\, dx,$$

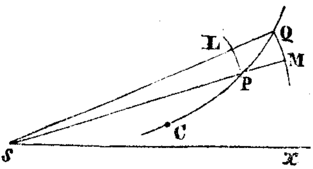
ed un simile cambiamento si fa in tutte le altre formole. È chiaro che quegli elementi dell'area che sono dinotati da $y\Delta x$ e $\Delta y \Delta x$ quando gli assi sono rettangolari saranno dinotati da $\operatorname{sen}\omega\, y\Delta x$ e $\operatorname{sen}\omega\, \Delta y\Delta x$ quando gli assi sono inclinati sotto un angolo ω.

Per esempio, l'equazione della parabola è $y^2 = 4a'x$ quando gli assi sono il sistema obbliquo formato da un diametro e dalla tangente nella sua estremità; quindi l'area racchiusa tra la curva, l'asse delle x, ed un'ordinata al punto pel quale $x = c$, è

$$\operatorname{sen}\omega \int_0^c \sqrt{(4a'x)}\, dx = \frac{4 \operatorname{sen}\omega \sqrt{a'} c^{\frac{3}{2}}}{3};$$

cioè, i due terzi del parallelogrammo che ha l'ascissa c e l'ordinata nella sua estremità per lati adiacenti.

Aree piane. Formole polari. Semplice integrazione.



144. Sia CPQ una curva, di cui l'equazione polare è $r = \varphi(\theta)$, e supponiamo che r, θ siano le coordinate di un punto P. Dinoti A l'area racchiusa tra la curva, il raggio vettore SC condotto ad un punto fisso C, ed il raggio vettore SP, allora (*Cal. Dif.* Art. 313)

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{\{\varphi(\theta)\}^2}{2}.$$

Onde $$A = \frac{1}{2}\int \{\varphi(\theta)\}^2 \, d\theta.$$

Sia $\psi(\theta)$ l'integrale di $\dfrac{\{\varphi(\theta)\}^2}{2}$, allora

$$A = \psi(\theta) + C.$$

Dinoti A_1 l'area quando il raggio vettore variabile è ad una distanza angolare θ_1 dalla linea iniziale, e dinoti A_2 l'area quando il raggio vettore variabile è ad una distanza angolare θ_2 dalla linea iniziale; allora

$$A_1 = \psi(\theta_1) + C, \qquad A_2 = \psi(\theta_2) + C,$$

quindi $$A_2 - A_1 = \psi(\theta_2) - \psi(\theta_1) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\varphi(\theta)\}^2 \, d\theta.$$

145. *Applicazione alla Spirale Equiangola.*

In questa curva $r = be^{\frac{\theta}{c}}$; così

$$A = \frac{1}{2}\int b^2 e^{\frac{2\theta}{c}} \, d\theta = \frac{b^2 c}{4} e^{\frac{2\theta}{c}} + C,$$

ed $\quad A_2 - A_1 = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} b^2 e^{\frac{2\theta}{c}}\, d\theta = \frac{b^2 c}{4}\left(e^{\frac{2\theta_2}{c}} - e^{\frac{2\theta_1}{c}}\right) = \frac{c}{4}\left(r_2^2 - r_1^2\right),$

in cui r_1 ed r_2 sono i raggi vettori estremi dell' area che si considera.

146. *Applicazione alla Parabola.*

Sia il fuoco il polo, allora

$$r = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\,;\ \text{così}\ A = \frac{a^2}{2}\int \frac{d\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)\sec^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = a^2\tan\frac{\theta}{2} + \frac{a^2}{3}\tan^3\frac{\theta}{2} + C.$$

Quindi $A_2 - A_1 = a^2\left(\tan\frac{\theta_2}{2} - \tan\frac{\theta_1}{2}\right) + \frac{a^2}{3}\left(\tan^3\frac{\theta_2}{2} - \tan^3\frac{\theta_1}{2}\right).$

Supponiamo che sia $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, allora otteniamo per l' area $a^2 + \frac{a^2}{3}$, cioè, $\frac{4a^2}{3}$; ciò è d' accordo con l' Art. 131.

Per un altro esempio supporremo la parabola riferita all' intersezione della direttrice e dell' asse come polo, l' asse essendo la linea iniziale. Quì

$$r = 2a\,\frac{\cos\theta - \sqrt{(\cos 2\theta)}}{\text{sen}^2\theta},$$

così $\quad A = 2a^2\int\frac{\cos^2\theta + \cos 2\theta - 2\cos\theta\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\text{sen}^4\theta}\, d\theta$

$$= 2a^2\int\frac{2\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}^4\theta}\, d\theta - 4a^2\int\frac{\cos\theta\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\text{sen}^4\theta}\, d\theta.$$

Ora $$\int \frac{2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta = \int (2\cot^2\theta - 1)\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$$
$$= -\frac{2}{3}\cot^3\theta + \cot\theta.$$

Ed $$\int \frac{\cos\theta\,\sqrt{(\cot 2\theta)}\,d\theta}{\operatorname{sen}^4\theta} = \int \frac{\sqrt{(1-2\operatorname{sen}^2\theta)}\,d\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^4\theta};$$

si ponga $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{t}$, allora l'integrale diviene

$$-\int \sqrt{(t^2-2)}\, t dt, \text{ cioè, } -\frac{1}{3}(t^2-2)^{\frac{3}{2}}.$$

Quindi, aggiungendo la costante, abbiamo

$$A = \frac{4a^2}{3}(\operatorname{cosec}^2\theta - 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4a^2}{3}\cot^3\theta + 2a^2\cot\theta + C.$$

$$= 2a^2\cot\theta + \frac{4a^2}{3}\,\frac{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - \cos^3\theta}{\operatorname{sen}^3\theta} + C.$$

La costante sarà zero se A incomincia dalla linea iniziale; poichè si troverà facendone ricerca che

$$2\cot\theta + \frac{4}{3}\,\frac{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - \cos^3\theta}{\operatorname{sen}^3\theta} \text{ svanisce quando } \theta = 0.$$

147. *Applicazione alla curva* $r = a(\theta + \operatorname{sen}\theta)$. Quì

$$A = \frac{a^2}{2}\int (\theta + \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int (\theta^2 + 2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta;$$

ed $$\int \theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$$

$$\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4},$$

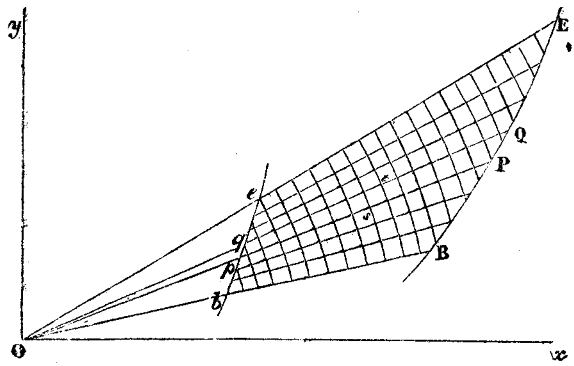
così $$A = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{\theta^3}{3} - 2\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right\} + C.$$

Supponiamo che si voglia l'area della più piccola porzione che è limitata dalla curva e da un raggio vettore inclinato alla linea iniziale per un angolo retto; allora abbiamo 0 ed $\frac{1}{2}\pi$ come limiti dell'integrazione. Così l'area richiesta è

$$\frac{a^2}{2}\left\{\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{4}+2\right\}.$$

Curve piane. Formole polari. Doppia Integrazione.

148. Nell'Art. 144 abbiamo ottenuto una formola per trovare l'area di una curva; quella formola suppone che l'area sia il limite di più aree elementari, ciascun elemento essendo una quantità di cui $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ è il tipo. Procediamo ora a spiegare un altro modo di decomporre l'area richiesta in aree elementari.



Supponiamo che si voglia l'area racchiusa tra le curve $BPQE$ e $bpqe$, e le linee rette Bb ed Ee. Si conduca una serie di raggi vettori da O, ed una serie di circoli col centro in O; così l'area piana è divisa in una serie di quadrilateri curvilinei. Rappresenti st uno di questi elementi, e supponiamo che r e θ siano le coordinate polari di s, ed $r+\Delta r$ e $\theta+\Delta\theta$ le coordinate polari di t; allora l'area dell'elemento st sarà ultimamente $r\Delta\theta\,\Delta r$. Quindi l'area richiesta si deve trovare sommando tutt'i valori di $r\Delta\theta\,\Delta r$, e poi procedendo al limite ottenuto supponendo che $\Delta\theta$ e Δr diminuiscano indefinitamente.

Si ottiene la richiesta sommazione di termini come $r\Delta\theta\,\Delta r$ nel modo seguente: prima riuniamo tutti gli elementi simili ad st che sono contenuti nella striscia $PQqp$, e così otteniamo l'area della striscia; poi sommiamo tutte le strisce simili a questa striscia che giacciono tra Bb ed Ee.

Sia $r=\varphi(\theta)$ l'equazione della curva $BPQE$ ed $r=\psi(\theta)$ l'equazione della curva $bpqe$, siano α e β gli angoli che OB ed OE fanno rispettivamente con Ox; e dinoti A l'area richiesta, allora

$$A=\int_\alpha^\beta\int_{\psi(\theta)}^{\varphi(\theta)} r d\theta\, dr;$$

poichè l'espressione simbolica quì data dinota il procedimento che abbiamo poco prima stabilito in parole.

Ora $\int r dr=\frac{r^2}{2}$, quindi

$$\int_{\psi(\theta)}^{\varphi(\theta)} r dr=\frac{1}{2}\left[\{\varphi(\theta)\}^2-\{\psi(\theta)\}^2\right],$$

così abbiamo

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[\{\varphi(\theta)\}^2-\{\psi(\theta)\}^2\right]d\theta.$$

In questa forma possiamo vedere immediatamente la verità dell'espressione, poichè $OP=\varphi(\theta)$ ed $Op=\psi(\theta)$, e così

$$\frac{1}{2}\{\varphi(\theta)\}^2\Delta\theta-\frac{1}{2}\{\psi(\theta)\}^2\Delta\theta$$

si può prendere per l'area della striscia $PQqp$, e la formola asserisce che l'area A è eguale al limite della somma di tali strisce.

149. L'osservazione fatta nell'Art. 138 si può ripetere quì; si è introdotto il procedimento nella prima parte dell'articolo precedente, non perchè la doppia integrazione sia assolutamente necessaria per trovare l'area di una curva, ma perchè il procedimento per trovare l'area di una curva chiarisce la doppia integrazione.

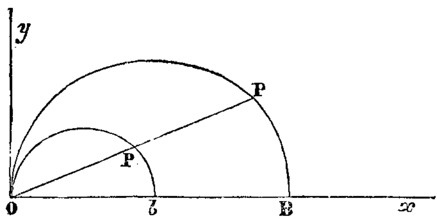
150. Se l'area che deve valutarsi è limitata dalle curve di cui le equazioni sono $\theta=\varphi(r)$, $\theta=\psi(r)$ rispettivamente,

e dai circoli di cui le equazioni sono $r=a$ ed $r=b$ rispettivamente, sarà conveniente d'integrare prima rispetto a θ. In questo caso, invece di sommare prima tutti gli elementi come st, che formano la striscia $PQqp$, sommiamo prima tutti gli elementi simili ad st che sono racchiusi tra i due circoli che limitano st e le curve determinate da $\theta=\varphi(r)$ e $\theta=\psi(r)$. Così abbiamo

$$A=\int_a^b\int_{\psi(r)}^{\varphi(r)} r dr\, d\theta.$$

Alcuni esempii delle formole negli Art. 148 e 150 saranno ora considerati; vedremo che ciascuna di queste formole può essere usata in un esempio, benchè l'una possa essere più conveniente dell'altra.

151. Applicheremo le formole per trovare l'area tra i due semicircoli OPB ed Opb e la linea retta bB.



Sia $Ob=c$, $OB=h$, allora l'equazione di OPB è $r=h\cos\theta$, e l'equazione di Opb è $r=c\cos\theta$. Così l'area

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{c\cos\theta}^{h\cos\theta} r d\theta\, dr.$$

Ora $$\int_{c\cos\theta}^{h\cos\theta} r dr=\frac{1}{2}(h^2-c^2)\cos^2\theta;$$

così $$\text{l'area}=\frac{1}{2}(h^2-c^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{8}(h^2-c^2).$$

Supponiamo che si voglia integrare prima rispetto a θ; dovremo allora dividere l'area in due parti descrivendo un arco di circolo da O come centro, col raggio Ob. Allora l'area limitata da quest'arco, la linea retta Bb, ed il semicircolo maggiore è

$$\int_c^h \int_0^{\cos^{-1}\frac{r}{h}} r dr\, d\theta.$$

L'area limitata dal suddetto arco, il semicircolo Opb, ed il semicircolo maggiore è

$$\int_0^c \int_{\cos^{-1}\frac{r}{c}}^{\cos^{-1}\frac{r}{h}} r dr\, d\theta.$$

La somma di queste due parti esprime l'area richiesta.

152. Applichiamo le formole polari all'esempio nell'Art. 141. Con S come polo, l'equazione polare della parabola è $r(1+\cos\theta) = 2a$ o $r\cos^2\frac{\theta}{2} = a$, in cui θ è misurato da SB; e l'equazione polare del circolo è $r = 2a$. Quindi, se integriamo prima rispetto ad r,

$$\text{area } ALB = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a\sec^2\frac{\theta}{2}}^{2a} r d\theta\, dr.$$

Se integriamo prima rispetto a θ, avremo se $\theta_1 = \cos^{-1}\frac{2a-r}{r}$

$$\text{area } ALB = \int_a^{2a} \int_0^{\theta_1} r dr\, d\theta.$$

In seguito consideriamo l'area DLC. L'equazione di DC è $r\cos\theta = -2a$; la lunghezza di SC è $4a$, e l'angolo BSC è $\frac{2\pi}{3}$. Sia $\theta_1 = \cos^{-1}\frac{2a-r}{r}$, $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-2a}{r}\right)$. Allora se integriamo prima rispetto a θ,

$$\text{area } DLC = \int_{2a}^{4a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r dr\, d\theta.$$

Se integriamo prima rispetto ad r, dovremo dividere l'area in due parti, per mezzo della linea che congiunge S

con C. L'area della porzione che ha LC per uno dei suoi contorni è

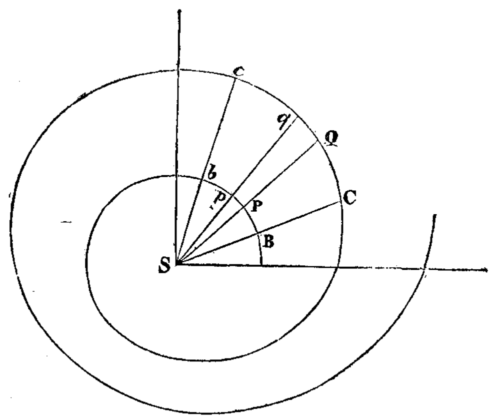
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_{2a}^{a\sec^2\frac{\theta}{2}} r d\theta\, dr.$$

L'area della rimanente porzione è

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\int_{2a}^{-2a\sec\theta} r d\theta\, dr.$$

La somma di queste due parti esprime l'area richiesta.

153. Un buon esempio è fornito dal problema di trovare l'area racchiusa tra due raggi vettori e due rami diversi della stessa curva polare.



Supponiamo che $BPpb$, $CQqc$ siano due differenti archi di una spirale, e che debba valutarsi l'area limitata da questi archi e dalle linee rette BC e bc; allora l'area è

$$\frac{1}{2}\int (r_2^2 - r_1^2)\, d\theta;$$

in cui r_2 dinota un raggio vettore qualunque dell' arco esteriore, come SQ, ed r_1 il corrispondente raggio vettore SP dell' arco interiore. I limiti di θ saranno dati dagli angoli che SB ed Sb rispettivamente fanno con la linea iniziale.

Si prenda per esempio la spirale di Archimede; sia θ l' intero angolo che il raggio vettore ha percorso a partire dalla linea iniziale finchè prenda la posizione SP; sicchè θ può essere un angolo di ogni grandezza. Per la natura della curva abbiamo SP o $r = a\theta$, in cui a è una costante. Se dunque CQ è il ramo seguente a BP avremo

$$SQ = a(\theta + 2\pi).$$

Siano θ_1 e θ_2 i valori di θ per SB ed Sb rispettivamente; così l' area $BbcC$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{(\theta + 2\pi)^2 - \theta^2\} \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\{2\pi(\theta_2^2 - \theta_1^2) + 4\pi^2(\theta_2 - \theta_1)\}.$$

154. Lo studente osserverà una certa differenza tra le formole $\iint dx\,dy$ ed $\iint r d\theta\, dr$, che esprimono l' area di una figura piana. La prima suppone l' area decomposta in più rettangoli e $\Delta x\,\Delta y$ rappresenta la vera area di un rettangolo. Quindi nel prendere l' aggregato di questi rettangoli onde rappresentare l' area richiesta il solo errore che può nascere è dovuto al trascurarsi degli elementi irregolari situati nella parte superiore e nella inferiore di ciascuna striscia; come abbiamo già osservato nell' Art. 137. Ma nel secondo caso $r\Delta\theta\,\Delta r$ non è il *valore esatto* dell' area di uno degli elementi, sicchè si commette un errore nel caso di ogni elemento. È perciò importante di mostrare formalmente che l' errore sparisce nel limite, il che può farsi come segue. L' elemento st nella figura dell' Art. 148 è la differenza di due settori circolari, e la sua area esatta è

$$\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

cioè

$$r\Delta r\,\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\theta.$$

Prendendo il primo termine per rappresentare l'area trascuriamo $\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$. Quindi il rapporto del termine trascurato al termine ritenuto

$$=\frac{\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta}{r\Delta r\,\Delta\theta}=\frac{\Delta r}{2r}.$$

Prendendo Δr sufficientemente piccolo questo rapporto si può rendere tanto piccolo quanto ci piace. Quindi possiamo conchiudere che la somma dei termini trascurati svanirà ultimamente in paragone della somma dei termini ritenuti, cioè, ogni errore nel limite sparisce.

Altre formole Polari.

155. Sia s la lunghezza dell'arco di una curva misurato da un punto fisso sino al punto di cui le coordinate sono r e θ; sia p la perpendicolare dall'origine sulla tangente nell'ultimo punto; allora il seno dell'angolo tra questa tangente ed il corrispondente raggio vettore è $r\frac{d\theta}{ds}$ (*Cal. Dif.* Art. 310); inoltre $\frac{p}{r}$ è un'altra espressione per questo seno; quindi $r\frac{d\theta}{ds}=\frac{p}{r}$. Dinoti A l'area tra la curva e certi raggi vettori limiti; allora

$$A=\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int r^2\frac{d\theta}{ds}\,ds=\frac{1}{2}\int r\frac{p}{r}\,ds=\frac{1}{2}\int p\,ds;$$

i limiti di s nell'ultimo integrale debbono essere quelli che corrispondono ai raggi vettori limiti dell'area che si considera.

Il risultato si può illustrare geometricamente; supponiamo P, Q punti adiacenti su di una curva, S il polo, p' la perpendicolare da S sulla corda PQ; allora, l'area del triangolo PQS

$$=\frac{1}{2}p'\times\text{corda } PQ.$$

Supponiamo ora che Q si avvicini indefinitamente a P, allora $p'=p$, ed il limite del rapporto della corda PQ all'arco PQ è l'unità.

156. Poichè $\int p ds = \int p \frac{ds}{dr} dr = \int \frac{pr\,dr}{\sqrt{(r^2 - p^2)}}$ (Art. 85),

abbiamo
$$A = \frac{1}{2} \int \frac{pr\,dr}{\sqrt{(r^2 - p^2)}}.$$

157. *Applicazione all' Epicicloide.*

Quì $p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}$; così

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{c\sqrt{(r^2 - a^2)}\,rdr}{a\sqrt{(c^2 - r^2)}} = \frac{c}{2a} \int \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}\,rdr}{\sqrt{\{c^2 - a^2 - (r^2 - a^2)\}}}$$

$$= \frac{c}{2a} \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} \text{ in cui } z^2 = r^2 - a^2.$$

Ora

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} = \int \frac{z^2 - (c^2 - a^2)}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} dz + (c^2 - a^2) \int \frac{dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}}$$

$$= (c^2 - a^2) \int \frac{dz}{\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}} - \int \sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}\,dz$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{z}{\sqrt{(c^2 - a^2)}} - \frac{z\sqrt{(c^2 - a^2 - z^2)}}{2}$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{\sqrt{(c^2 - a^2)}} - \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}\sqrt{(c^2 - r^2)}}{2}.$$

Prendendo questo tra i limiti $r = a$ ed $r = c$, otteniamo $\frac{c^2 - a^2}{2} \frac{\pi}{2}$, cioè, $b(a + b)\pi$. Quindi l'area è $\frac{c}{2a} b(a+b)\pi$, cioè, $\frac{(a + 2b)\,b(a + b)\pi}{2a}$. Raddoppiando questo risultato otteniamo l'area tra la curva ed i raggi vettori condotti a due cuspidi consecutive, che è perciò $\frac{(a + 2b)\,b\,(a + b)\pi}{a}$. L'area del settore circolare che forma parte di quest'area è πab; si sottragga quest'ultima ed otteniamo l'area tra un arco dell'epicicloide che si estende da una cuspide alla cuspide seguente, ed il circolo fisso sul quale ruzzola il circolo generatore; il risultato è

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a+2b).$$

158. Similmente si può trovare nell'ipocicloide l'area tra il circolo fisso e la parte della curva che si estende tra due cuspidi consecutive. Se a è maggiore di b il risultato è

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a-2b).$$

Area tra una Curva e la sua Evoluta.

159. Nelle figure dell'Art. 114, se supponiamo il filo o la linea PQ muoversi per un piccolo angolo $\Delta\varphi$, la figura tra le due posizioni della linea e la curva AP si può considerare ultimamente come un settore di circolo; la sua area sarà perciò $\frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi$, in cui $\rho=PQ$. Così se A dinota l'intera area limitata dalla curva, la sua evoluta, e due raggi di curvatura corrispondenti ai valori φ_1 e φ_2 di φ, abbiamo

$$A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi.$$

Poichè $\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\rho}$, possiamo ancora scrivere questo

$$A=\frac{1}{2}\int\rho\, ds,$$

i limiti di s essendo presi in modo da corrispondere ai noti limiti di φ.

160. *Applicazione alla Catenaria.*

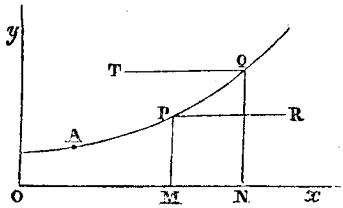
Quì $s=c\tan\varphi$, Art. 109;

onde $\qquad \rho=c\sec^2\varphi, \qquad A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}c^2\sec^4\varphi\, d\varphi,$

ed $$\int \sec^4\varphi\, d\varphi = \tan\varphi + \frac{1}{3}\tan^3\varphi + C;$$

così A è conosciuta.

Area delle Superficie di Rotazione. Formole rettangolari.



161. Sia A un punto fisso nella curva APQ; siano x, y le coordinate di un punto qualunque P, ed s la lunghezza dell'arco AP. Supponiamo che la curva giri intorno l'asse delle x, e dinoti S l'area della superficie generata dalla rotazione di AP; allora (*Cal. Dif.* Art. 315)

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y;$$

onde $$S = \int 2\pi y\, ds \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

così $$S = \int 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ed $$S = \int 2\pi y \frac{ds}{dy}\, dy \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Di queste tre forme possiamo scegliere in ogni esempio particolare quella che è più conveniente. Se y si può esprimere facilmente in termini di s possiamo usare (1); se $\frac{ds}{dy}$ si può esprimere facilmente in termini di y possiamo usare (3); in alcuni casi può essere più conveniente di esprimere y e $\frac{ds}{dx}$ in termini di x ed usare (2).

In ciascun caso l'area della superficie generata dall'arco della curva compreso tra punti assegnati si troverà integrando tra limiti appropriati.

162. *Applicazione al Cilindro.*

Supponiamo che una linea retta parallela all'asse delle x giri intorno all'asse delle x, generando così un cilindro retto circolare; sia a la distanza della linea che gira dall'asse delle x; allora

$$y = a, \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dx} = 1;$$

così per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = 2\pi \int a dx = 2\pi a x + C.$$

Supponiamo che le ascisse dei punti estremi della porzione della linea che gira siano x_1 ed x_2; allora la superficie generata

$$= 2\pi a \int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi a (x_2 - x_1).$$

163. *Applicazione al Cono.*

Una linea retta che passa per l'origine ed è inclinata all'asse delle x sotto un angolo α giri intorno l'asse delle x, e generi così una superficie conica. Allora

$$y = x \tan\alpha, \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dx} = \sec\alpha;$$

così per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = 2\pi \int \tan\alpha \sec\alpha \, x dx = \pi \tan\alpha \sec\alpha \, x^2 + C.$$

Quindi la superficie del tronco di cono tagliato da piani perpendicolari al suo asse alle distanze x_1, x_2 rispettivamente dal vertice è

$$\pi \tan\alpha \sec\alpha (x_2^2 - x_1^2).$$

Si supponga $x_1 = 0$, e sia r il raggio della sezione fatta dal piano alla distanza x_2, allora $r = x_2 \tan\alpha$, e l'area è

$$\pi \operatorname{cosec}\alpha\, r^2.$$

164. *Applicazione alla Sfera.*

Il circolo dato dall'equazione $y^2 = a^2 - x^2$ giri intorno l'asse delle x; quì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

e
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{a}{y}.$$

Quindi per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = 2\pi\int y\,\frac{a}{y}\,dx = 2\pi a\int dx = 2\pi a x + C.$$

Così la superficie racchiusa tra i piani determinati da

$$x = x_1 \text{ ed } x = x_2 \text{ è } 2\pi a\,(x_2 - x_1).$$

Quindi l'area di una zona sferica dipende solamente dall'*altezza* della zona e dal *raggio* della sfera, ed è eguale all'area che i piani che la terminano taglierebbero da un cilindro col suo asse perpendicolare a quei piani e circoscritto alla sfera; e così la superficie della sfera intera è $4\pi a^2$. Questi risultati sono molto importanti.

165. *Applicazione allo Sferoïde allungato.*

L'ellisse data da $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ giri intorno l'asse delle x che si suppone coincidere con l'asse maggiore dell'ellisse; quì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

e
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)} = \frac{b\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}}{ay}.$$

Quindi per l'equazione (2) dell'Art. 161,

$$S = \frac{2\pi b}{a}\int \sqrt{(a^2 - e^2x^2)}\,dx = \frac{2\pi b e}{a}\int\sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)}\,dx$$

$$= \frac{\pi b e}{a}\left\{x\sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)} + \frac{a^2}{e^2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{ex}{a}\right\}.$$

La superficie generata dalla rotazione di un quadrante dell'ellisse si otterrà prendendo 0 ed a come limiti di x nell'integrazione. Ciò dà

$$\pi ab \left\{ \sqrt{(1-e^2)} + \frac{\operatorname{sen}^{-1} e}{e} \right\}.$$

166. Supponiamo che una curva abbia per sua equazione $y = \varphi(x)$, ed un'altra curva abbia per sua equazione $y = \psi(x)$, e tutte e due le curve girino intorno l'asse delle x. Dinotino s_1 ed s_2 le lunghezze degli archi misurati da punti fissi nelle due curve sino al punto che ha per ascissa x. Dinoti S la *somma* delle aree delle due superficie comprese tra due piani perpendicolari all'asse delle x alle distanze x_1 ed x_2 rispettivamente dall'origine. Allora, per l'Art. 161,

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \varphi(x) \frac{ds_1}{dx} + \psi(x) \frac{ds_2}{dx} \right\} dx.$$

Supponiamo, per esempio, che si abbia una curva divisa per metà dalla linea $y = a$, sicchè possiamo porre $y = a + \chi(x)$ pel ramo superiore ed $y = a - \chi(x)$ pel ramo inferiore. Quindi

$$\frac{ds_1}{dx} = \frac{ds_2}{dx},$$

ed
$$S = 4\pi a \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds_1}{dx}\, dx = 4\pi a \int ds_1,$$

i limiti di s_1 essendo presi in modo da corrispondere con i limiti assegnati di x.

Quindi, se si ha una curva completa che è bisegata da una linea retta e si fa girare intorno un asse parallelo a questa linea e ad una distanza a da essa e che non taglia la curva, l'area dell'intera superficie generata è eguale alla lunghezza della curva moltiplicata per $2\pi a$.

167. Per esempio, si prenda il circolo dato dall'equazione

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - c^2 = 0.$$

Quì l'area dell'intera superficie generata dalla rotazione del circolo intorno l'asse delle x sarà $2\pi k \times 2\pi c$.

Non vi è difficoltà in questo esempio per ottenere separatamente le due porzioni della superficie. Per la parte al di sopra della linea $y=k$, abbiamo $2\pi\int yds$, cioè,

$$2\pi\int [k+\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}]\,ds,$$

cioè,
$$2\pi\int kds+2\pi\int\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}\,ds.$$

Il primo di questi integrali è $2\pi ks$; l'altro è eguale a

$$2\pi\int\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}\,\frac{ds}{dx}\,dx,$$

che si ridurrà a $2\pi\int cdx$, cioè, $2\pi cx$. Quindi la superficie richiesta si trova prendendo l'espressione $2\pi ks+2\pi cx$ tra limiti convenienti.

Area delle superficie di rotazione. Formole polari.

168. Alle volte può essere conveniente di usare coordinate polari; così dall'Art. 161 deduciamo

$$S=\int 2\pi yds=\int 2\pi y\frac{ds}{d\theta}\,d\theta=\int 2\pi r\operatorname{sen}\theta\,\frac{ds}{d\theta}\,d\theta,$$

in cui
$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}.$$

169. *Applicazione alla Cardioide.*

Quì $r=a(1+\cos\theta)$; così

$$\frac{ds}{d\theta}=a\sqrt{\{(1+\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta\}}=a\sqrt{(2+2\cos\theta)}=2a\cos\frac{\theta}{2};$$

onde

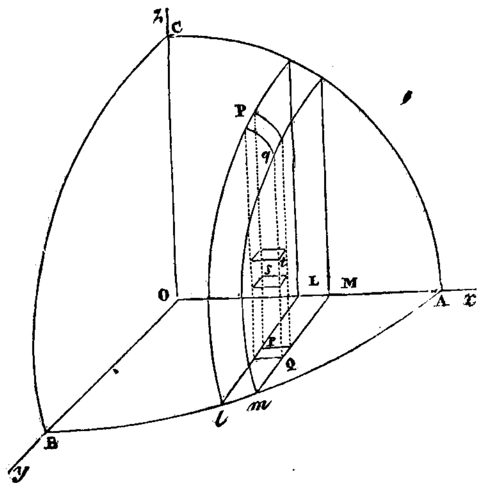
$$S=4\pi a^2\int(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\theta d\theta=16\pi a^2\int\cos^4\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-\frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\theta}{2}+C.$$

La superficie generata dalla rotazione dell'intera curva intorno alla linea iniziale si otterrà prendendo 0 e π come limiti di θ nell'integrale. Ciò dà $\frac{32\pi a^2}{5}$.

Superficie qualunque. Doppia integrazione.

170. Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque p di una superficie; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ le coordinate di



un punto adiacente q. Per p si conduca un piano parallelo a quello delle (x, z), ed un piano parallelo a quello delle (y, z); ancora per q si conduca un piano parallelo a quello delle (x, z) ed un piano parallelo a quello delle (y, z). Questi piani intercetteranno un elemento pq della superficie curva, e la proiezione di questo elemento sul piano delle (x, y) sarà il rettangolo PQ. Supponiamo che il piano tangente della superficie in p sia inclinato al piano delle (x, y) sotto un angolo γ, allora si conosce per la geometria solida che

$$\sec\gamma = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}},$$

in cui $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ debbono trovarsi dalla nota equazione della superficie. Ora l'area di PQ è $\Delta x\,\Delta y$, quindi per la geometria solida l'area dell'elemento del piano tangente in p di cui PQ è la proiezione è $\Delta x\,\Delta y \sec\gamma$. Ammetteremo che il limite della somma dei termini come $\Delta x \Delta y \sec\gamma$ per tutt'i valori di x ed y compresi tra limiti assegnati sia l'area della superficie corrispondente a questi limiti. Dinoti allora S questa superficie; così

$$S = \iint \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\, dx\, dy,$$

i limiti delle integrazioni essendo dipendenti dalla porzione della superficie considerata.

171. Rispetto al punto ammesso nell'articolo precedente, il lettore si riferisca alle osservazioni sopra un simile punto nel *Cal. Dif.* Art. 308. Egli può anche consultare il *Differential and Integral Calculus* di De Morgan, pag. 444, e l'*Integral Calculus* di Homersham Cox, pag. 96.

172. *Applicazione alla Sfera.*

Si voglia trovare l'area dell'ottava parte della superficie della sfera data dall'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Quì
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z};$$

così
$$S = \iint \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)}\, dx\, dy = \iint \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}.$$

Ora nella figura supponiamo $OL = x$; si ponga y_1 per Ll, allora $y_1 = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, poichè il valore di y_1 si ottiene dall'equazione della superficie supponendo $z = 0$. Se integriamo rispetto ad y tra i limiti 0 ed y_1, sommiamo tutti gli elementi compresi in una striscia di cui $LMml$ è la proiezione sul piano delle (x, y). Ora

$$\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(y_1{}^2 - y^2)}} = \frac{\pi}{2};$$

così
$$S = \frac{\pi a}{2}\int dx.$$

Se integriamo rispetto ad x da 0 ad a, sommiamo tutte le strisce comprese nella superficie di cui OAB è la proiezione. Così $\frac{\pi a^2}{2}$ è il risultato richiesto; e perciò l'intera superficie della sfera è $4\pi a^2$.

Se integriamo prima rispetto ad x, avremo
$$S = \int_0^a \int_0^{x_1} \frac{a dy\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}},$$
in cui $x_1 = \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

173. Come altro esempio si voglia trovare l'area di quella parte della superficie data dall'equazione
$$z^2 + (x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)^2 - a^2 = 0,$$
che è situata nella regione positiva delle coordinate. Questa superficie è un cilindro retto circolare, avendo per suo asse la linea determinata da $z = 0$, $x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = 0$, ed a è il raggio di una sua sezione circolare. Qui
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\cos\alpha\,(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)}{z},$$
$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha\,(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)}{z},$$
così
$$S = \iint \frac{a dx\, dy}{z} = \iint \frac{a dx\, dy}{\sqrt{\{a^2 - (x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)^2\}}}.$$

Il piano coordinato delle (x, y) sega la superficie secondo le linee rette $a = \pm(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)$, e se si prende il segno superiore, abbiamo una linea situata nel quadrante positivo del piano delle (x, y).

Per ottenere il valore di S integriamo prima rispetto ad y tra i limiti $y = 0$ ed $y = (a - x\cos\alpha)\operatorname{cosec}\alpha$; ora
$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{a^2 - (x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)^2\}}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha}{a};$$

si prenda questo tra i limiti assegnati, ed otteniamo

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{x\cos\alpha}{a}\right);$$

onde $$S=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\int\left\{\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^{-1}\frac{x\cos\alpha}{a}\right\}dx,$$

ed i limiti dell'integrazione sono 0 ed $\frac{a}{\cos\alpha}$. Quindi troveremo

$$S=\frac{a^2}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}.$$

174. Invece di prendere l'elemento del piano tangente in un punto di una superficie, in modo che la sua proiezione sia il rettangolo $\Delta x\,\Delta y$, può essere in alcuni casi più conveniente di prenderlo in modo che la sua proiezione sia l'elemento polare $r\Delta\theta\,\Delta r$. Così avremo

$$S=\iint\sec\gamma\, r d\theta\, dr.$$

Per esempio, supponiamo che si voglia l'area della superficie $xy=az$, che è tagliata dalla superficie $x^2+y^2=c^2$; quì

$$\sec\gamma=\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)}=\frac{\sqrt{(a^2+r^2)}}{a}, \text{ poichè } x^2+y^2=r^2.$$

Così $$S=\int_0^{2\pi}\int_0^c\frac{\sqrt{(a^2+r^2)}}{a}r d\theta\, dr=\frac{2\pi}{3a}\left\{(c^2+a^2)^{\frac{3}{2}}-a^3\right\}.$$

175. Supponiamo $x=r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\cos\theta$, sicchè r, θ, φ sono le ordinarie coordinate polari di un punto nello spazio; allora vedremo in appresso che l'equazione

$$S=\iint\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}dx\,dy$$

si può trasformare in

$$S=\iint\sqrt{\left\{r^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}}r d\theta\, d\varphi.$$

Una indipendente dimostrazione geometrica si troverà nel *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. IX, ed anche nel *Treatise on the Calculus of Operations* di Carmichael. Converrà ricordarsi che in questa formola $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, mentre nell'Art. 174 dinotiamo $\sqrt{(x^2+y^2)}$ con r.

Valori approssimati degl' Integrali.

176. Supponiamo y una funzione di x, e che si voglia $\int_a^c y\,dx$. Se l' integrale *indefinito* $\int y\,dx$ è conosciuto possiamo immediatamente avere il richiesto integrale definito. Se l'integrale indefinito è ignoto, possiamo ancora determinare approssimativamente il valore dell'integrale definito. Questo procedimento di approssimazione è meglio illustrato supponendo che y sia un'ordinata di una curva sicchè $\int_a^c y\,dx$ rappresenti una certa area. Si divida $c-a$ in n parti ciascuna eguale ad h e si tirino $n-1$ ordinate ad eguali distanze tra l'ordinata iniziale e la finale; allora le ordinate si possono dinotare con $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n, y_{n+1}$. Quindi possiamo prendere

$$h\,(y_1+y_2+\ldots\ldots+y_n)$$

come un valore approssimato dell'area richiesta. O pure possiamo prendere

$$h\,(y_2+y_3+\ldots\ldots+y_{n+1})$$

come un valore approssimato.

Possiamo ottenere un'altra approssimazione così; supponiamo congiunte le estremità delle ordinate r^{ma} ed $(r+1)^{\text{ma}}$; così abbiamo un trapezio, l'area del quale è $(y_r+y_{r+1})\,\frac{h}{2}$. La somma di tutti questi trapezii dà come un valore approssimato dell'area

$$h\left\{\frac{y_1}{2}+y_2+y_3\ldots\ldots+y_n+\frac{y_{n+1}}{2}\right\}.$$

Questo risultato è infatti la semisomma dei due primi risultati. È chiaro che possiamo prendere l'approssimazione tanto vicina quanto ci piace crescendo sufficientemente n.

177. Il seguente è un altro metodo di approssimazione. Sia descritta una parabola con l'asse parallelo a quello delle y; rappresentino y_1, y_2, y_3 tre ordinate equidistanti, h la distanza tra y_1 ed y_2, e quindi anche tra y_2 ed y_3. Allora si può dimostrare che l'area contenuta tra la parabola, l'asse delle x, e le due ordinate estreme è

$$\frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Questo si mostrerà facilmente con una figura, essendo formata l'area da un trapezio e da un segmento parabolico, e l'area di quest'ultimo è conosciuta per l'Art. 143.

Supponiamo ora che n sia pari, sicchè l'area da valutare sia divisa in un numero pari di parti. Allora si supponga che l'area delle prime due parti sia

$$\frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3),$$

che l'area della terza e della quarta parte sia

$$\frac{h}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5),$$

e così di seguito. Così avremo finalmente come risultato approssimato

$$\frac{h}{3}\{ y_1 + 2(y_3 + y_5 + \cdots\cdots y_{n-1}) + y_{n+1} + 4(y_2 + y_4 \cdots\cdots + y_n) \}.$$

Quindi abbiamo la seguente regola: si uniscano insieme la prima ordinata, l'ultima ordinata, due volte la somma di tutte le altre ordinate dispari, e quattro volte la somma di tutte le ordinate pari; indi si moltiplichi il risultato per un terzo della comune distanza tra le ordinate. Questa regola è detta la *Regola di Simpson*.

ESEMPII.

1. Se A dinota l'area contenuta tra la catenaria, l'asse delle x, l'asse delle y, ed un'ordinata all'estremità dell'arco s, mostrare che $A = cs$. L'arco s incomincia dal punto più basso della curva.

2. L'intera area della curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

è $\frac{3}{8}\pi ab$. (L'integrazione si può effettuare ponendo $x=a\cos^3\varphi$).

3. L'area della curva $y(x^2+a^2)=c^2(a-x)$ da $x=0$ sino ad $x=a$ è $c^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)$.

4. L'area della curva $y^2x=4a^2(2a-x)$ da $x=0$ ad $x=2a$ è $4\pi a^2$.

5. Trovare l'intera area tra la curva $y^2(x^2+a^2)=a^2x^2$ ed i suoi asintoti. *Risultato.* $4a^2$.

6. Trovare l'area del cappio della curva $y^2=\frac{x^2(a+x)}{a-x}$.

Risultato. $2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

7. Trovare l'area limitata dalla curva $y^2=\frac{x^2(a+x)}{a-x}$ e l'asintoto $x=a$, escludendo il cappio.

Risultato. $2a^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$.

8. Trovare l'intera area tra la curva $y^2(2a-x)=x^3$ ed i suoi asintoti. *Risultato.* $3\pi a^2$.

9. Trovare l'intera area della curva $(y-x)^2=a^2-x^2$.

Risultato. πa^2.

10. Trovare l'area compresa tra le curve

$$y^2-4ax=0,\ x^2-4ay=0. \quad \textit{Risultato.}\ \frac{16a^2}{3}.$$

11. Trovare l'intera area della curva $a^4y^2+b^2x^4=a^2b^2x^2$.

Risultato. $\frac{4}{3}ab$.

12. Trovare l'area di un cappio della curva $a^2y^4 = x^4 (a^2 - x^2)$.

Risultato. $\frac{4a^2}{5}$.

13. L'area fra la trattrice, l'asse delle y, e l'asintoto è $\frac{\pi c^2}{4}$. (Si vegga l'Art. 100).

14. Trovare l'area di un cappio della curva

$$y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2). \qquad \textit{Risultato. } \frac{a^2}{2}(\pi - 2).$$

15. Trovare l'area del cappio della curva

$$16a^4y^2 = b^2x^2 (a^2 - 2ax). \qquad \textit{Risultato. } \frac{ab}{30}.$$

16. Trovare l'area del cappio della curva

$$2y^2 (a^2 + x^2) = (a^2 - x^2)^2.$$

Risultato. $a^2 \{3 \sqrt{2} \log(1 + \sqrt{2}) - 2\}$.

17. Trovare l'intera area della curva

$$2y^2 (a^2 + x^2) - 4ay (a^2 - x^2) + (a^2 - x^2)^2 = 0.$$

Risultato. $a^2\pi \left\{4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$.

18. Trovare l'area della curva

$$y = c \operatorname{sen} \frac{x}{a} . \log \operatorname{sen} \frac{x}{a}$$

da $x = 0$ ad $x = a\pi$. *Risultato.* $2ac (1 - \log 2)$.

19. Trovare l'area della curva $\frac{y}{c} = \left(\frac{x}{a}\right)^n$ tra $x = \alpha$ ed $x = \beta$, e *dal risultato* dedurre l'area dell'iperbole $xy = a^2$ tra gli stessi limiti.

20. Trovare l'area dell'ellisse di cui l'equazione è

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1. \qquad \textit{Risultato. } \frac{\pi}{\sqrt{(ac - b^2)}}.$$

21. Trovare l'area di un cappio della curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Risultato. $\frac{a^2}{2}$.

22. Trovare l'area contenuta da tutti i cappî della curva

$$r = a \operatorname{sen} n\theta.$$

Risultato. $\frac{\pi a^2}{4}$ o $\frac{\pi a^2}{2}$ secondo che n è dispari o pari.

23. Trovare l'area tra le curve $r = a \cos n\theta$ ed $r = a$.

24. Trovare l'area di un cappio della curva $r^2 \cos\theta = a^2 \operatorname{sen} 3\theta$.

Risultato. $\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \log 2$.

25. Trovare l'intera area della curva $r = a(\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta)$.

Risultato. πa^2.

26. Trovare l'area di un cappio della curva $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Risultato. $\frac{\pi a^2}{8}$.

27. Trovare l'intera area della curva

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2x^2 + 4b^2y^2.$$ *Risultato.* $2\pi(a^2 + b^2)$.

28. Trovare l'intera area della curva

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$ *Risultato.* $\frac{\pi c^2}{2ab}(a^2 + b^2)$.

29. Trovare l'area del cappio della curva

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0.$$ *Risultato.* $\frac{3a^2}{2}$.

30. Trovare l'area del cappio della curva

$$r \cos\theta = a \cos 2\theta.$$ *Risultato.* $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$.

31. Trovare l'area della curva

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2 \cos^2 \theta)}} + b \cos \theta,$$

a essendo maggiore di b. *Risultato.* $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{(a^2-b^2)}} + \dfrac{\pi b^2}{2}$.

32. In una spirale logaritmica trovare l'area tra la curva e due raggi vettori condotti dal polo.

33. Trovare l'area tra la concoide $r = a + b \operatorname{cosec} \theta$ e due raggi vettori condotti dal polo.

34. In un'ellisse trovare l'area tra la curva e due raggi vettori condotti dal centro.

35. In una parabola trovare l'area tra la curva e due raggi vettori condotti dal vertice.

36. Trovare l'area racchiusa tra la curva

$$r = a(\sec \theta + \tan \theta)$$

ed il suo asintoto $r \cos \theta = 2a$. *Risultato.* $\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2$.

37. L'intera area della curva $r = a(2\cos\theta + 1)$ è $a^2\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

e l'area del cappio interno è $a^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

38. Trovare l'intera area della curva $r = a\cos\theta + b$, in cui a è maggiore di b. Trovare ancora l'area del cappio interno.

39. Se x ed y sono le coordinate di un'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$, mostrare che

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}} + e^{-\frac{2u}{a^2}}\right), \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}} - e^{-\frac{2u}{a^2}}\right),$$

in cui u è l'area intercetta tra la curva, il raggio vettore centrale, e l'asse.

40. Trovare l'intera area della curva che è il luogo dell'intersezione di due normali di un'ellisse ad angoli retti. *Risultato.* $\pi(a-b)^2$.

Si può mostrare che l'equazione della curva è

$$r^2(a^2+b^2)(a^2\,\text{sen}^2\theta+b^2\cos^2\theta)^2 = (a^2-b^2)^2(a^2\,\text{sen}^2\theta-b^2\cos^2\theta)^2.$$

41. Trovare l'area racchiusa tra un arco qualunque descritto dall'estremità del raggio vettore di una spirale in una completa rivoluzione, e la linea retta che congiunge le estremità dell'arco. Se, per esempio, l'equazione della spirale è $r=a\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^n$, dimostrare che l'area corrispondente ad un valore di θ maggiore di 2π è

$$\frac{\pi a^2}{2n+1}\left\{\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^{2n+1}-\left(\frac{\theta}{2\pi}-1\right)^{2n+1}\right\}.$$

42. Trovare l'area contenuta tra una parabola, la sua evoluta, e due raggi di curvatura della parabola. (Art. 159).

43. Trovare l'area contenuta tra una cicloide, la sua evoluta, e due raggi di curvatura della cicloide.

44. Trovare l'area della superficie generata dalla rotazione intorno l'asse delle x della curva $xy=k^2$.

45. Ancora della curva $y=ae^{\frac{x}{c}}$.

46. Ancora della catenaria $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

47. Mostrare che l'intera superficie di uno sferoide schiacciato è

$$2\pi a^2\left\{1+\frac{1-e^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}\right\}.$$

48. Una cicloide gira intorno la tangente al vertice; mostrare che l'intera superficie generata è $\frac{32}{3}\pi a^2$.

49. Una cicloide gira intorno alla sua base; mostrare che l'intera superficie generata è $\frac{64}{3}\pi a^2$.

50. Una cicloide gira intorno al suo asse; mostrare che l'intera superficie generata è $8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

51. L'intera superficie generata dalla rotazione della trattrice intorno l'asse delle x è $4\pi c^2$.

52. Una sfera è attraversata perpendicolarmente al piano di uno dei suoi circoli massimi da due cilindri retti, di cui i diametri sono eguali al raggio della sfera e gli assi passano per i punti medii di due raggi che compongono un diametro di questo circolo massimo. Trovare la superficie di quella porzione della sfera non racchiusa tra i cilindri.

Risultato. Due volte il quadrato del diametro della sfera.

53. Trovare la superficie generata dalla porzione della curva $y = a \pm a \log \frac{x}{a}$ tra i limiti $x = a$ ed $x = ae$.

Risultato. $4\pi a^2 \left\{ 1 + \sqrt{(1+e^2)} - \sqrt{2} + \log \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{(1+e^2)}} \right\}$.

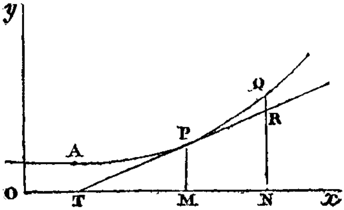
54. Trovare $\int \frac{dS}{p}$, in cui dS rappresenta un elemento di superficie, e p la perpendicolare dall'origine sul piano tangente dell'elemento, l'integrale essendo esteso su tutto l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Risultato. $\frac{4\pi}{3abc}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

CAPITOLO VIII.

VOLUMI DEI SOLIDI.

Formole che racchiudono Semplice Integrazione. Solido di Rotazione.



178. Sia A un punto fisso di una curva APQ, e P un altro punto sulla curva di cui le coordinate sono x ed y. Giri la curva intorno l'asse delle x, e dinoti V il volume del solido limitato dalla superficie generata dalla curva e da due piani perpendicolari all'asse delle x, l'uno per A e l'altro per P; allora (*Cal. Dif.* Art. 314)

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2,$$

onde
$$V = \int \pi y^2 dx.$$

Dall'equazione della curva y è una funzione nota di x; supponiamo che $\psi(x)$ sia l'integrale di πy^2; allora

$$V = \psi(x) + C.$$

Dinoti V_1 il volume quando il punto P ha x_1 per sua ascissa, e V_2 il volume quando il punto P ha x_2 per sua ascissa; così

$$V_1 = \psi(x_1) + C,$$

$$V_2 = \psi(x_2) + C,$$

onde
$$V_2 - V_1 = \psi(x_2) - \psi(x_1) = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

179. *Applicazione al Cono retto circolare.*

Una linea retta passi per l'origine e faccia un angolo α con l'asse delle x; allora questa linea retta genererà un cono retto circolare girando intorno l'asse delle x. Quì $y = x \tan \alpha$; così

$$V = \int \pi \tan^2 \alpha \, x^2 dx = \frac{\pi \tan^2 \alpha}{3} x^3 + C,$$

$$V_2 - V_1 = \frac{\pi \tan^2 \alpha}{3} (x_2{}^3 - x_1{}^3).$$

Supponiamo $x_1 = 0$, e sia $r = x_2 \tan \alpha$; così il volume diviene $\dfrac{\pi \tan^2 \alpha \, x_2{}^3}{3}$, cioè, $\dfrac{\pi r^2 x_2}{3}$. Quindi il volume del cono retto circolare è un terzo del prodotto dell'area della base per l'altezza.

180. *Applicazione alla Sfera.*

Quì prendendo l'origine al centro della sfera abbiamo $y^2 = a^2 - x^2$; così

$$\int \pi y^2 dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Il volume di un emisfero $= \displaystyle\int_0^a \pi y^2 dx = \frac{2\pi a^3}{3}$.

181. *Applicazione al Paraboloide.*

Quì la curva generatrice è la parabola, sicchè

$$y^2 = 4ax.$$

Così $$V_2 - V_1 = \pi \int_{x_1}^{x_2} 4ax\,dx = 2a\pi(x_2^2 - x_1^2).$$

Supponiamo $x_1 = 0$, allora il volume diviene $2a\pi x_2^2$, cioè $\frac{1}{2}\pi y_2^2 x_2$, in cui $y_2^2 = 4ax_2$; così il volume è la metà di quello di un cilindro che ha la stessa altezza, cioè x_2, e la stessa base, cioè il circolo di cui y_2 è il raggio.

182. *Applicazione al Solido formato da una Cicloide.*

Giri una cicloide intorno il suo asse; quì (*Cal. Dif.* Art. 358)

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a \operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}.$$

L'integrazione è meglio effettuata ponendo per x ed y i loro valori in termini di θ (*Cal. Dif.* Art. 358). Così

$$\pi \int y^2 dx = \pi a^3 \int (\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Per ottenere il volume generato da una semicicloide i limiti per x sarebbero 0 e $2a$; così i corrispondenti limiti per θ sono 0 e π.

Ora $$\int \theta^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\int \theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= -\theta^2\cos\theta + 2\theta\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta,$$

onde $$\int_0^\pi \theta^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \pi^2 - 4;$$

$$2\int \theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \int \theta(1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta\operatorname{sen}2\theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{4},$$

onde $$2\int_0^\pi \theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ed $$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot \text{(Art. 35).}$$

Così il volume richiesto

$$= \pi a^3 \left\{ \pi^2 - 4 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{3} \right\} = \pi a^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right).$$

183. Questa formola per il volume di un solido di rotazione, $V=\int \pi y^2 dx$, simile alle altre che abbiamo notate, è una di cui la verità è manifesta, appena si è compresa la notazione del Calcolo Integrale. Nella figura dell'Art. 128, se PM è y ed MN sia dinotato da Δx, allora $\pi y^2 \Delta x$ è il valore del solido generato dalla rotazione di $MNpP$ intorno l'asse delle x. Così $\Sigma \pi y^2 \Delta x$ differirà dal volume generato dalla rotazione di $ADEB$ per la somma dei volumi che sono generati da PpQ, e l'ultima somma svanirà nel limite. Così il volume generato dalla rotazione di $ADEB$ è eguale al limite di $\Sigma \pi y^2 \Delta x$, cioè, ad $\int \pi y^2 dx$.

184. Similmente, se V dinota il volume limitato dalla superficie formata da una curva che gira intorno l'asse delle y, e da piani perpendicolari all'asse delle y, avremo

$$V=\int \pi x^2 dy.$$

E, come nell'Art. 178, avremo

$$V_2 - V_1 = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy.$$

185. Supponiamo che due curve girino intorno l'asse delle x, generando così due superficie, e che si voglia la *differenza* dei due volumi, l'uno limitato dalla prima superficie e da piani perpendicolari all'asse delle x, e l'altro limitato dalla seconda superficie e dai piani già assegnati. Sia $y=\varphi(x)$ l'equazione della prima curva, ed $y=\psi(x)$ quella della seconda. Allora se V dinota la richiesta differenza, abbiamo

$$V=\int \pi \{\varphi(x)\}^2 dx - \int \pi \{\psi(x)\}^2 dx$$

$$=\pi \int [\{\varphi(x)\}^2 - \{\psi(x)\}^2]\, dx.$$

Se i piani che limitano il volume richiesto sono determinati da $x = x_1$ ed $x = x_2$, dobbiamo integrare tra i limiti x_1 ed x_2 per x.

186. Supponiamo, per esempio, che una curva chiusa sia tale che la linea $y = a$ divida per metà ogni ordinata parallela all'asse delle y; allora abbiamo $\varphi(x) = a + \chi(x)$ e $\psi(x) = a - \chi(x)$, in cui $\chi(x)$ dinota una funzione di x. Così

$$\{\varphi(x)\}^2 - \{\psi(x)\}^2 = 4a\chi(x),$$

e

$$V = \pi \int 4a\chi(x)\, dx$$

Supponiamo che le ascisse dei punti estremi della curva siano x_2 ed x_1 allora il volume generato dalla rotazione della curva chiusa intorno l'asse delle x è $4a\pi \int_{x_1}^{x_2} \chi(x)\, dx$. E $2\int_{x_1}^{x_2} \chi(x)\, dx$ è l'area della curva chiusa, sicchè il volume è eguale al prodotto di $2a\pi$ per l'area. Questa dimostrazione suppone che la curva generatrice sia posta interamente da una parte dell'asse delle x.

Se la curva generatrice è il circolo dato da

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = c^2,$$

abbiamo πc^2 per la sua area, e quindi $2kc^2\pi^2$ per il volume generato dalla sua rotazione intorno l'asse delle x.

187. In simil modo se le curve $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, girano intorno l'asse delle y otteniamo per il volume limitato da queste superficie e da piani perpendicolari all'asse delle y

$$V = \pi \int [\{\varphi(y)\}^2 - \{\psi(y)\}^2]\, dy.$$

188. Il metodo dato nell'Art. 178 per trovare il volume di un *solido di rotazione* si può adattare ad *ogni* solido. Il metodo si può descrivere così: si concepisca il solido tagliato in strati sottili da una serie di piani paralleli, si valuti approssimativamente il volume di ciascuno strato e si sommino questi volumi; il limite di questa somma quando ogni

strato diviene indefinitamente sottile è il volume del solido richiesto. Supponiamo che un solido sia tagliato in strati da piani perpendicolari all'asse delle x; sia $\varphi(x)$ l'area della sezione del solido fatta da un piano alla distanza x dall'origine, e sia $x + \Delta x$ la distanza del piano seguente dall'origine; così questi due piani intercettano uno strato di cui la spessezza è Δx, e di cui il volume si può rappresentare con $\varphi(x)\Delta x$. Il volume del solido sarà perciò il limite di $\Sigma\varphi(x)\Delta x$, cioè, sarà $\int \varphi(x)\, dx$; i limiti dell'integrazione dipenderanno dal particolare solido o porzione di solido che si considera.

189. *Applicazione ad un Ellissoide.*

L'equazione dell'ellissoide è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

se si fa una sezione con un piano perpendicolare all'asse delle x ad una distanza x dall'origine, il contorno della sezione è un'ellisse, di cui i semiassi sono $b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ e $c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$; quindi l'area di questa ellisse è $\pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$; questo è perciò il valore di $\varphi(x)$. Quindi il volume dell'ellissoide

$$= \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{4\pi abc}{3}.$$

190. *Applicazione ad una Piramide.*

Supponiamo una piramide, che abbia per base una figura rettilinea qualunque; sia A l'area della base ed h l'altezza. Si prenda l'origine delle coordinate al vertice della piramide, e l'asse delle x perpendicolare alla base della piramide, allora il volume della piramide

$$= \int_0^h \varphi(x)\, dx.$$

Ora la sezione della piramide fatta da un piano parallelo alla base è una figura rettilinea simile alla base, e le aree delle figure simili stanno come i quadrati dei loro lati omologhi; ed x ed h sono proporzionali ai lati omologhi; quindi deduciamo che

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{h^2} A.$$

Così il volume della piramide

$$= \frac{A}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{Ah}{3}.$$

Questa investigazione vale ancora per un cono, di cui la base è una curva chiusa qualunque.

191. Come esempio troveremo il volume compreso tra un'iperboloide ad una falda, il suo cono asintotico e due piani perpendicolari al loro asse comune.

Sia l'equazione dell'iperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

e quella del cono

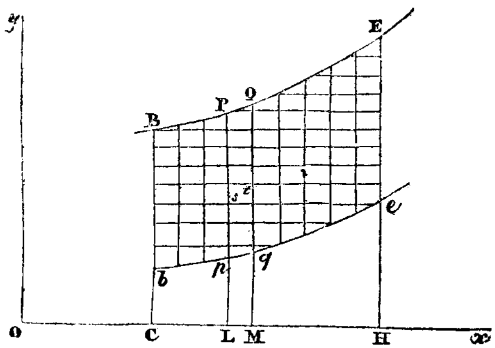
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Se si fa una sezione della prima superficie con un piano perpendicolare all'asse delle x e ad una distanza x dall'origine, il contorno è un'ellisse di cui l'area è $\pi bc \left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)$; la sezione fatta nella seconda superficie dallo stesso piano ha anche per suo contorno un'ellisse, e la sua area è $\frac{\pi bcx^2}{a^2}$. Onde la differenza delle aree è πbc. Quindi il volume richiesto, supponendolo limitato dai piani $x = x_1$ ed $x = x_2$, è

$$\int_{x_1}^{x_2} \pi bc\, dx, \text{ cioè, } \pi bc\,(x_2 - x_1).$$

192. Alle volte può essere conveniente di fare sezioni con piani paralleli non perpendicolari all'asse delle x. Se α è l'inclinazione dell'asse delle x ai piani paralleli, allora $\varphi(x)\,\text{sen}\,\alpha\,\Delta x$ si può prendere come il volume di uno strato e l'integrazione si esegue come prima.

Formole che racchiudono Doppia Integrazione.



193. Daremo prima una formola per il volume di un solido di rotazione. Nella figura, siano x, y le coordinate di s, ed $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ quelle di t. Supponiamo che l'intera figura giri intorno l'asse delle x, allora l'elemento st genererà un anello, il volume del quale sarà ultimamente $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$; questo segue dalla considerazione che $\Delta x\,\Delta y$ è l'area di st e $2\pi y$ il perimetro del circolo descritto da s. Quindi il volume generato dalla figura $BEeb$, o da una porzione di essa, sarà il limite della somma di termini come $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$. Dinoti V il volume richiesto, allora

$$V = 2\pi \iint y\,dx\,dy;$$

i limiti dell'integrazione essendo presi in modo da includere tutti gli elementi del volume richiesto.

194. Supponiamo che il volume richiesto sia quello che si ottiene dalla rotazione di tutta la figura $BEeb$; sia $y=\varphi(x)$

l'equazione della curva superiore, $y=\psi(x)$ quella della curva inferiore, e siano $OC=x_1$, $OH=x_2$. Dovremo allora integrare prima rispetto ad y tra i limiti $y=\psi(x)$ ed $y=\varphi(x)$; così sommiamo tutti gli elementi simili a $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$ che sono contenuti nel solido formato dalla rotazione della striscia $PQqp$; poi integriamo rispetto ad x tra i limiti x_1 ed x_2. Così per esprimere l'operazione simbolicamente

$$V=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} y\,dx\,dy$$

$$=\pi\int_{x_1}^{x_2}[\{\varphi(x)\}^2-\{\psi(x)\}^2]\,dx.$$

La seconda espressione si è ottenuta effettuando l'integrazione rispetto ad y tra i limiti assegnati, e coincide con quella già ottenuta nell'Art. 185.

195. Così nel precedente articolo dividiamo il solido in anelli elementari, di cui $2\pi y\,\Delta x\,\Delta y$ è il tipo; nella prima integrazione riuniamo un numero di questi anelli, in modo da formare una figura, che è la differenza di due strati circolari concentrici; nella seconda integrazione riuniamo tutte queste figure e così otteniamo il volume del solido richiesto.

196. Supponiamo la figura che gira intorno l'asse delle x limitata dalle curve $x=\varphi(y)$ ed $x=\psi(y)$, e dalle linee rette $y=y_1$ ed $y=y_2$; allora applicando la formola per V sarà conveniente di integrare prima rispetto ad x; così

$$V=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} y\,dy\,dx.$$

In questo caso nell'integrazione rispetto ad x riuniamo tutti gli elementi simili a $2\pi y\,\Delta y\,\Delta x$ che hanno lo stesso raggio y, sicchè la somma degli elementi è un sottile guscio cilindrico, di cui Δy è la spessezza, y il raggio, e $\varphi(y)-\psi(y)$ l'altezza. Così

$$V=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\{\varphi(y)-\psi(y)\}\,y\,dy.$$

197. Come un esempio delle formole precedenti, si cerchi il volume del solido generato dalla rotazione dell'area ALB intorno l'asse delle x nella figura già data nell'Art. 141. Questo volume è l'eccesso dell'emisfero generato dalla rotazione di SLB sul paraboloide generato dalla rotazione di ASL; il risultato è perciò conosciuto, e proponiamo l'esempio, non ad oggetto del risultato, ma per illustrazione delle formole di doppia integrazione.

Sia S l'origine. Supponiamo che la direzione positiva dell'asse delle x sia a sinistra, allora l'equazione di AL è $y^2=4a(a-x)$ e quella di BL è $y^2=4a^2-x^2$. Sia V il volume richiesto, allora

$$V=\int_0^{2a}\int_{\frac{4a^2-y^2}{4a}}^{\sqrt{(4a^2-y^2)}} 2\pi y\, dy\, dx.$$

Se vogliamo integrare prima rispetto ad y, dobbiamo, come nell'Art. 141, supporre la figura ALB divisa in due parti; così

$$V=\int_0^{a}\int_{\sqrt{(4a^2-4ax)}}^{\sqrt{(4a^2-x^2)}} 2\pi y\, dx\, dy+\int_a^{2a}\int_0^{\sqrt{(4a^2-x^2)}} 2\pi y\, dx\, dy.$$

Inoltre, si cerchi il volume generato dalla rotazione di LDC intorno l'asse delle x. Sia ora la direzione positiva dell'asse delle x a dritta, allora l'equazione di LC è $y^2=4a(a+x)$ e quella di LD è $y^2=4a^2-x^2$. Sia V il volume richiesto, allora

$$V=\int_0^{2a}\int_{\sqrt{(4a^2-x^2)}}^{\sqrt{(4a^2+4ax)}} 2\pi y\, dx\, dy.$$

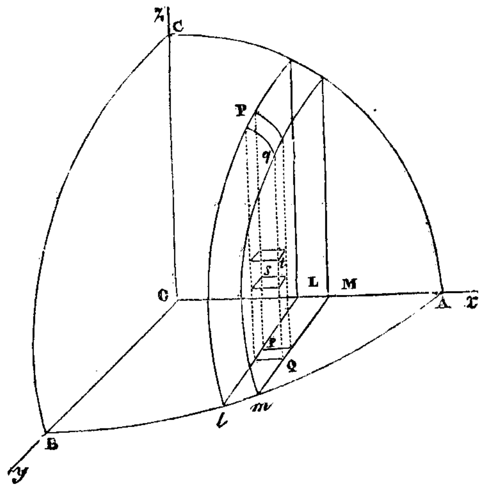
Se vogliamo integrare prima rispetto ad x, dobbiamo, come nell'Art. 141, supporre la figura LDC divisa in due parti; così

$$V=\int_0^{2a}\int_{\sqrt{(4a^2-y^2)}}^{2a} 2\pi y\, dy\, dx+\int_{2a}^{2a\sqrt{3}}\int_{\frac{y^2-4a^2}{4a}}^{2a} 2\pi y\, dy\, dx.$$

198. Similmente, se un solido è formato dalla rotazione di una curva intorno l'asse delle y, abbiamo

$$V=\iint 2\pi x\, dy\, dx.$$

199. Procediamo ora a considerare un solido qualunque.



Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque p di una superficie, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ le coordinate di un punto adiacente q. Per p si conducano i piani paralleli ai piani coordinati delle (x, z) ed (y, z); per q si tirino anche i piani paralleli agli stessi piani coordinati. Questi quattro piani racchiuderanno tra loro una colonna, di cui PQ è la base e Pp l'altezza. Il volume di questa colonna sarà ultimamente $z\Delta x\,\Delta y$, ed il volume tra una porzione assegnata della data superficie ed il piano delle (x, y) si troverà prendendo il limite della somma di una serie di termini come $z\Delta x\Delta y$. Dinoti V questo volume, allora

$$V=\iint z dx\, dy.$$

L'equazione della superficie dà z come una funzione di x ed y; i limiti dell'integrazione debbono essere presi in modo da includere tutti elementi del solido proposto.

Se integriamo prima rispetto ad y, sommiamo le colonne che formano uno strato compreso tra due piani perpendicolari all'asse delle x; così i limiti dell'integrazione rispetto ad y possono essere funzioni di x, ed otterremo

$$\int z dy = f(x),$$

in cui $f(x)$ è in fatti l'area della sezione del solido considerato fatta da un piano perpendicolare all'asse delle x ad una distanza x dall'origine. Allora finalmente

$$V = \int f(x)\, dx;$$

questo coincide con la formola già data nell'Art. 188.

200. *Applicazione all'Ellissoide.*

Si cerchi il volume dell'ottava parte dell'ellissoide determinato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Quì dobbiamo trovare

$$\iint c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx\, dy.$$

S'integri prima rispetto ad y, allora i limiti di y sono 0 ed Ll, cioè, 0 e $b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$; otteniamo così la somma di tutte le colonne che formano lo strato tra i piani Lpl ed Mqm. Ora tra i limiti assegnati

$$\int \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dy = \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

così
$$V = \int \frac{\pi}{4} bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

I limiti di x sono 0 ed a; otteniamo così la somma di tutti gli strati che sono compresi nel solido $OABC$. Quindi $V = \frac{\pi abc}{6}$.

201. Supponiamo la data superficie determinata da $xy = az$, e si cerchi il volume limitato dal piano delle (x, y), dalla superficie data, e dai quattro piani $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$. Quì il volume è dato da

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{xy}{a} \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{4a} (y_2^2 - y_1^2)(x_2^2 - x_1^2)$$

$$= \frac{1}{4a} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \{ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 \}$$

$$= \frac{1}{4} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

in cui z_1, z_2, z_3, z_4 sono le ordinate dei quattro punti agli angoli della porzione scelta.

202. Trovare il volume compreso tra il piano $z = 0$ e le superficie $xy = az$ ed $(x - h)^2 + (y - k)^2 = c^2$.

Qui dobbiamo integrare $\iint \frac{xy}{a} \, dx \, dy$ tra i limiti determinati da $(x - h)^2 + (y - k)^2 = c^2$.

Ora $\int y dy = \frac{y^2}{2}$, ed i limiti di y sono

$$k - \sqrt{\{ c^2 - (x - h)^2 \}} \text{ e } k + \sqrt{\{ c^2 - (x - h)^2 \}}.$$

Così otteniamo

$$2k \sqrt{\{ c^2 - (x - h)^2 \}}.$$

Così finalmente il volume richiesto

$$= \frac{2k}{a} \int x \sqrt{\{ c^2 - (x - h)^2 \}} \, dx,$$

in cui i limiti di x sono $h - c$ ed $h + c$.

Ed

$$\int x\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}\,dx=\int(x-h)\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}\,dx$$
$$+h\int\sqrt{\{c^2-(x-h)^2\}}\,dx.$$

Si ponga $x-h=t$; così otteniamo

$$\int t\sqrt{(c^2-t^2)}\,dt+h\int\sqrt{(c^2-t^2)}\,dt.$$

I limiti di t sono $-c$ e $+c$; onde il risultato è $\frac{hc^2\pi}{2}$; ed il volume richiesto è $\frac{hkc^2\pi}{a}$.

Questo risultato però suppone che xy sia *positivo* tra i limiti dell'integrazione; cioè, il circolo determinato da $(x-h)^2+(y-k)^2=c^2$ è supposto giacere interamente nel primo quadrante o interamente nel terzo quadrante. Se questa condizione non è soddisfatta il nostro risultato non dà il valore aritmetico del volume, ma la differenza che nasce dal considerare alcune parti del volume come positive ed altre come negative; per esempio, se h e k svaniscono il nostro risultato svanisce.

Similmente nel risultato dell'articolo precedente, si è supposto che xy sia *positivo* tra i limiti dell'integrazione.

203. Invece di dividere un solido in colonne su basi rettangolari, sicchè $z\Delta x\,\Delta y$ sia il volume della colonna, possiamo dividerlo in colonne che abbiano per base l'elemento polare dell'area; allora $zr\Delta\theta\,\Delta r$ è il volume della colonna. Onde per il volume V di un solido abbiamo la formola

$$V=\iint zr\,d\theta\,dr.$$

Dall'equazione della superficie z si può esprimere come una funzione di r e θ,

Per esempio, si voglia il volume compreso tra il piano $z=0$, e le superficie $x^2+y^2=4az$ ed $y^2=2cx-x^2$. Qui $z=\frac{r^2}{4a}$; ed i limiti di r e θ debbono essere tali da estendere l'integrazione sull'intera area del circolo $y^2 = 2cx - x^2$. Sia $r_1 = 2c\cos\theta$; allora il volume richiesto

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{r_1} \frac{r^3}{4a}\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{c^4}{a} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2c^4}{a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2c^4}{a} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ (Art. 35)}$$

$$= \frac{3\pi c^4}{8a}.$$

204. Si cerchi il volume del solido compreso tra il piano delle (x, y) e la superficie di cui l'equazione è

$$z = ae^{-\frac{x^2+y^2}{c^2}}.$$

Qui, poichè $x^2 + y^2 = r^2$,

$$V = a \iint e^{-\frac{r^2}{c^2}}\, r d\theta\, dr.$$

La superficie si estende ad un'infinita distanza dall'origine in ogni direzione; così i limiti di θ sono 0 e 2π, e quelli di r sono 0 ed ∞.

Ora $$\int e^{-\frac{r^2}{c^2}}\, r dr = -\frac{e^{-\frac{r^2}{c^2}}}{2}\, c^2;$$

così $$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{c^2}}\, r dr = \frac{c^2}{2}.$$

Ed $$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Quindi il volume richiesto è $\pi a c^2$.

Formole che racchiudono Tripla Integrazione.

205. Nella figura dell' Art. 199, supponiamo che si tiri una serie di piani perpendicolari all'asse delle z; sia z la distanza di un piano dall'origine e $z + \Delta z$ la distanza del seguente. Questi piani intercettano dalla colonna $pqPQ$ un parallelepipedo rettangolo elementare, il volume del quale è $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. L'intero solido si può considerare come il limite della somma di tali elementi. Quindi se V dinota il suo volume,

$$V = \iiint dx\, dy\, dz.$$

206. Si cerchi il volume di una porzione del cilindro determinato dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

che è intercettata tra i piani

$$z = x \tan\alpha \text{ e } z = x \tan\beta.$$

Quì se y_1 sta per $\sqrt{(2ax - x^2)}$, abbiamo

$$V = \int_0^{2a} \int_{-y_1}^{y_1} \int_{x\tan\alpha}^{x\tan\beta} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{2a} \int_{-y_1}^{y_1} (\tan\beta - \tan\alpha)\, x dx\, dy$$

$$= 2(\tan\beta - \tan\alpha) \int_0^{2a} x \sqrt{(2ax - x^2)}\, dx$$

$$= 2(\tan\beta - \tan\alpha) \frac{\pi a^3}{2}.$$

207. L'elemento polare dell'area piana è, come abbiamo veduto negli articoli precedenti, $r\Delta\theta\, \Delta r$. Supponendo che questo giri intorno la linea iniziale per un angolo 2π, allora si genererà un anello solido, di cui il volume è

$2\pi r \operatorname{sen}\theta\, r\Delta\theta\, \Delta r$, poichè $2\pi r \operatorname{sen}\theta$ è la circonferenza del circolo descritta dal punto di cui le coordinate polari sono r e θ. Dinoti φ l'angolo che il piano dell'elemento in una posizione qualunque fa con la posizione iniziale del piano, $\varphi + \Delta\varphi$ l'angolo che il piano in una posizione consecutiva fa col piano iniziale; allora la parte dell'anello solido che è intercetta tra il piano rotante in queste due posizioni sta all'intero anello nella stessa proporzione come $\Delta\varphi$ sta a 2π. Quindi il volume di questa parte intercetta è

$$r^2 \operatorname{sen}\theta\, \Delta\varphi\, \Delta\theta\, \Delta r.$$

Questa è perciò un'espressione in coordinate polari per un elemento di un solido qualunque. Quindi il volume dell'intero solido si può trovare prendendo il limite della somma di tali elementi; cioè, se V dinota il volume richiesto,

$$V = \iiint r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr.$$

I limiti dell'integrazione debbono essere presi in modo da includere nell'integrazione tutti gli elementi del solido proposto. Lo studente si rammenterà che r dinota la distanza di un punto dall'origine, θ l'angolo che questa distanza fa con una retta fissa condotta per l'origine, e φ l'angolo che il piano condotto per questa distanza e per la retta fissa fa con un piano fisso che passa per la retta fissa.

208. Supponiamo, per esempio, che si applichi la formola a trovare il volume dell'ottava parte della sfera. S'integri prima rispetto ad r; abbiamo

$$\int r^2\, dr = \frac{r^3}{3}.$$

Si supponga a il raggio della sfera, allora i limiti di r sono 0 ed a; così

$$V = \iint \frac{a^3}{3} \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Nell'integrare così rispetto ad r, riuniamo tutti gli elementi come $r^2 \operatorname{sen}\theta\, \Delta\varphi\, \Delta\theta\, \Delta r$ che compongono un solido piramidale, che ha il suo vertice al centro della sfera, e per sua base l'elemento curvilineo di superficie sferica, che è dinotato da $a^2 \operatorname{sen} \theta \, \Delta\varphi \, \Delta\theta$.

S' integri in seguito rispetto a θ; abbiamo

$$\int \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\cos \theta;$$

i limiti di θ sono 0 e $\frac{\pi}{2}$; così

$$V = \int \frac{a^3}{3} d\varphi.$$

Integrando così rispetto a θ, riuniamo tutte le piramidi simili ad $\frac{a^3}{3} \operatorname{sen} \theta \, \Delta\varphi \, \Delta\theta$ che formano uno strato cuneiforme del solido contenuto tra i due piani condotti per la linea fissa corrispondenti a φ e $\varphi + \Delta\varphi$.

Finalmente, s' integri rispetto a φ da 0 a $\frac{\pi}{2}$; così

$$V = \frac{\pi a^3}{6}.$$

In questo esempio le integrazioni si possono eseguire in ordine qualunque, e lo studente dovrebbe esaminarle ed illustrarle.

209. Un cono retto ha il suo vertice sulla superficie di una sfera, ed il suo asse coincide col diametro della sfera che passa per quel punto; trovare il volume comune al cono ed alla sfera.

Sia a il raggio della sfera; α il semi-angolo al vertice del cono, V il volume richiesto, allora l'equazione polare della sfera col vertice del cono come origine è $r = 2a \cos \theta$. Onde

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr.$$

210. La curva $r = a(1 + \cos \theta)$ giri intorno alla linea iniziale, trovare il volume del solido generato.

Quì il volume richiesto

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

Si troverà che questo è $=\frac{8\pi a^3}{3}$.

ESEMPII.

1. Se la curva $y^2(x-4a)=ax(x-3a)$ gira intorno l'asse delle x, il volume generato tra $x=0$ ed $x=3a$ è $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\log 2)$.

2. Una cicloide gira intorno alla tangente al vertice; mostrare che il volume generato dalla curva è $\pi^2 a^3$.

3. Una cicloide gira intorno alla sua base; mostrare che il volume generato dalla curva è $5\pi^2 a^3$.

4. La curva $y^2(2a-x)=x^3$ gira intorno al suo asintoto; mostrare che il volume generato è $2\pi^2 a^3$.

5. La curva $xy^2=4a^2(2a-x)$ gira intorno al suo asintoto; mostrare che il volume generato è $4\pi^2 a^3$.

6. Trovare il volume della porzione chiusa del solido generato dalla rotazione della curva $(y^2-b^2)^2=a^3x$ intorno all'asse delle y.

Risultato. $\frac{256}{315}\frac{\pi b^9}{a^6}$.

7. Esprimere il volume di un segmento sferico in termini della sua altezza e dei raggi delle basi.

Risultato. $\frac{\pi h}{6}\{h^2+3(r_1^2+r_2^2)\}$.

8. Se la curva $y^2 = 2mx + nx^2$ gira intorno l'asse delle x, trovare il volume di un segmento qualunque; e mostrare che esso può esprimersi con

$$\frac{\pi h}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{1}{3} n h^2\right) \text{ o con } \pi h\left(r^2 + \frac{nh^2}{12}\right),$$

in cui h è l'altezza del segmento e b, c, r sono i raggi delle sue basi e della sezione media. Dedurre le espressioni per il volume di un cono e di uno sferoide.

9. Trovare con l'integrazione il volume racchiuso tra un cono retto il di cui angolo al vertice è di 60°, ed una sfera di dato raggio che lo tocca lungo un circolo.

Risultato. $\frac{\pi r^3}{6}$.

10. Se un paraboloide ha il suo vertice nella base, e l'asse sulla superficie di un cilindro, il cilindro sarà diviso in due parti che stanno come 3 : 5 dalla superficie del paraboloide; l'altezza ed il diametro della base del cilindro ed il lato retto del paraboloide essendo tutti eguali.

11. Un paraboloide di rotazione ed un cono retto hanno la stessa base, lo stesso asse, e lo stesso vertice, ed una sfera è descritta su questo asse come diametro; mostrare che il volume intercetto tra il paraboloide ed il cono serba la stessa ragione al volume della sfera che il lato retto della parabola serba al diametro della sfera.

12. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

Risultato. $\frac{8\pi abc}{5}$.

13. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a^3xyz.$$

Risultato. $\frac{9}{2}a^3$.

14. Trovare il volume del solido formato dalla rotazione della curva $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ intorno l'asse delle x, supponendo a maggiore di b. Mostrare ciò che il risultato diviene quando $a=b$.

$$\textit{Risultato. } \frac{\pi}{6}(2a^2+3b^2)\,a+\frac{\pi b^4}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}\log\frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}.$$

15. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione della curva $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ intorno l'asse delle y, supponendo a maggiore di b. Mostrare ciò che il risultato diviene quando $a=b$.

$$\textit{Risultato. } \frac{\pi}{6}(2b^2+3a^2)\,b+\frac{\pi a^4}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}.$$

16. Trovare il volume del solido formato dalla rotazione della curva $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ intorno l'asse delle x.

$$\textit{Risultato. } \frac{\pi a^3}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{3}\right\}.$$

17. Un paraboloide di rotazione ha il suo asse che coincide con un diametro di una sfera, ed il suo vertice fuori della sfera; trovare il volume della porzione della sfera fuori del paraboloide.

Risultato. $\dfrac{\pi h^3}{6}$, in cui h è la distanza tra i due piani nei quali sono situate le curve d'intersezione delle superficie.

18. Trovare il volume tagliato dalla superficie

$$\frac{z^2}{c}+\frac{y^2}{b}=2x$$

con un piano parallelo a quello delle (y, z) ad una distanza a da esso. *Risultato.* $\pi a^2\sqrt{(bc)}$.

19. Un quadrante di un' ellisse gira intorno la tangente all'estremità dell' asse minore dell'ellisse; mostrare che

il volume racchiuso dalla superficie formata dalla *curva* è

$$\frac{\pi a b^2}{6}(10 - 3\pi).$$

20. Trovare il volume compreso tra le superficie definite dalle equazioni

$$x^2 + y^2 = cz, \qquad x^2 + y^2 = ax, \qquad z = 0,$$

illustrando con figure il progresso della sommazione.

Risultato. $\dfrac{3\pi a^4}{32c}$.

21. Se S è una superficie chiusa, dS un elemento di S intorno un punto P ad una distanza r da un punto fisso O, e φ l'angolo che la normale in P condotta all'indentro fa con il raggio vettore OP, mostrare che il volume contenuto dalla superficie

$$= \frac{1}{3}\int r \cos\varphi \, dS,$$

la sommazione essendo estesa sull'intera superficie.

Prendendo il centro di un ellissoide per il punto O, applicare questa formola a trovare il suo volume, interpetrando geometricamente i passi dell'integrazione.

22. Trovare il valore di $\iiint x^2\,dx\,dy\,dz$ sul volume di un ellissoide.

Risultato. $\dfrac{4\pi a^3 bc}{15}$.

23. Determinare i limiti dell' integrazione per ottenere il volume contenuto tra il piano delle (x, y) e la superficie di cui l'equazione è

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - Dz - F = 0.$$

24. Stabilire i limiti dell' integrazione da adoperarsi nell'applicare la formola $\iiint dx\,dy\,dz$ per trovare il volume di una superficie chiusa di secondo ordine di cui l'equazione è

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + a'yz + b'xz + c'xy = 1.$$

25. Stabilire tra quali limiti debbono effettuarsi le integrazioni in

$$\iiint dx\, dy\, dz$$

per ottenere il volume contenuto tra la superficie conica di cui l'equazione è

$$z = a - \sqrt{(x^2 + y^2)},$$

ed i piani di cui le equazioni sono $x = z$ ed $x = 0$; e trovare il volume con questo o con altro metodo.

Risultato. $\frac{2a^3}{9}$.

26. Stabilire tra quali limiti si debbono prendere le integrazioni per ottenere il volume del solido contenuto tra le due superficie $cz = mx^2 + ny^2$ e $z = ax + by$; e mostrare che il volume è $\frac{\pi c^3}{8}$ quando

$$m = n = a = b = 1.$$

27. Una cavità è giustamente ampia abbastanza da permettere la completa rotazione di un disco circolare di raggio c, il di cui centro descrive un circolo dello stesso raggio c, mentre il piano del disco è costantemente parallelo ad un piano fisso, e perpendicolare a quello del circolo nel quale il suo centro si muove. Mostrare che il volume della cavità è

$$\frac{2c^3}{3}(3\pi + 8).$$

28. L'asse di un cono retto coincide con la linea generatrice di un cilindro; il diametro sì del cono che del cilindro è eguale alla comune altezza; trovare la superficie ed il volume di ciascuna parte in cui il cono è diviso dal cilindro.

Risultati.

Superficie $\frac{4\pi\sqrt{5} - 3\sqrt{15}}{6}a^2$ e $\frac{2\pi\sqrt{5} + 3\sqrt{15}}{6}a^2$;

Volumi, $\frac{8\pi + 27\sqrt{3} - 64}{9} a^3$ e $\frac{64 - 27\sqrt{3} - 2\pi}{9} a^3$;

in cui a è il raggio della base del cono o cilindro.

29. Trovare il volume del cono-cuneo determinato da

$$z^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2} = c^2,$$

che è contenuto tra i piani $x = 0$ ed $x = a$.

Risultato. $\frac{\pi c^2 a}{2}$.

30. Un conoide è generato da una linea retta che si appoggia all'asse delle z ed è perpendicolare ad esso. Due sezioni sono fatte da piani paralleli, i due piani essendo paralleli all'asse delle z. Mostrare che il volume del conoide racchiuso tra i piani è eguale al prodotto della distanza tra i piani per la semi-somma delle aree delle sezioni fatte dai piani.

CAPITOLO IX.

DIFFERENZIAZIONE DI UN INTEGRALE RISPETTO AD UNA QUANTITÀ QUALUNQUE CHE ESSO PUÒ RACCHIUDERE.

211. È alle volte necessario di differenziare un integrale rispetto a qualche quantità che esso racchiude; questa quistione andremo ora a considerare.

Si voglia il coefficiente differenziale di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ rispetto a b, supponendo che $\varphi(x)$ non contenga b, ed a sia indipendente da b.

Sia
$$u = \int_a^b \varphi(x)\,dx;$$

supponiamo b mutato in $b + \Delta b$, in conseguenza di che u diviene $u + \Delta u$; così

$$u + \Delta u = \int_a^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx;$$

onde
$$\Delta u = \int_a^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx$$
$$= \int_b^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx.$$

Ora, per l'Art. 40,

$$\int_b^{b+\Delta b} \varphi(x)\,dx = \Delta b\, \varphi(b + \theta\Delta b),$$

in cui θ è una frazione propria; così

$$\frac{\Delta u}{\Delta b} = \varphi(b + \theta\Delta b).$$

Diminuiscano Δb e Δu senza limite; così

$$\frac{du}{db} = \varphi(b).$$

212. Similmente, se differenziamo u rispetto ad a, supponendo che $\varphi(x)$ non contenga a, e b sia indipendente da a, otteniamo

$$\frac{du}{da} = -\varphi(a).$$

213. Supponiamo che $\varphi(x)$ contenga una quantità c, e si voglia trovare il coefficiente differenziale di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ rispetto a c, supponendo a e b indipendenti da c.

Invece di $\varphi(x)$ sarà conveniente di scrivere $\varphi(x, c)$, sicchè la presenza della quantità c possa essere più chiaramente indicata; si dinoti l'integrale con u, così

$$u = \int_a^b \varphi(x, c)\,dx.$$

Si supponga c mutato in $c + \Delta c$, in conseguenza di che u diviene $u + \Delta u$; così

$$u + \Delta u = \int_a^b \varphi(x, c + \Delta c)\,dx;$$

onde

$$\Delta u = \int_a^b \varphi(x, c + \Delta e)\,dx - \int_a^b \varphi(x, c)\,dx$$

$$= \int_a^b \{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)\}\,dx;$$

così

$$\frac{\Delta u}{\Delta c} = \int_a^b \frac{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)}{\Delta c}\,dx.$$

Ora per la natura del coefficiente differenziale abbiamo

$$\frac{\varphi(x, c + \Delta c) - \varphi(x, c)}{\Delta c} = \frac{d\varphi(x, c)}{dc} + \rho,$$

in cui ρ è una quantità che diminuisce senza limite con Δc. Così abbiamo

$$\frac{\Delta u}{\Delta c} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, c)}{dc} dx + \int_a^b \rho dx.$$

Quando Δc è diminuito indefinitamente, il secondo integrale svanisce; poichè esso non è maggiore di $(b-a)\rho'$, in cui ρ' è il più gran valore che ρ può avere, e ρ' ultimamente svanisce. Quindi, procedendo al limite, abbiamo

$$\frac{du}{dc} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, c)}{dc} dx.$$

214. Si deve notare che l'articolo precedente suppone che nè a nè b sia infinito; se, per esempio, b fosse infinito, non potremmo asserire che $(b-a)\rho'$ debba necessariamente svanire nel limite.

215. Abbiamo adunque mostrato nell'Art. 213 che

$$\frac{d}{dc}\int_a^b \varphi(x, c)\, dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x, c)}{dc} dx \ldots\ldots\ldots (1).$$

Indicheremo un' utile applicazione di questa equazione. Supponiamo che $\psi(x, c)$ sia la funzione di cui $\varphi(x, c)$ è il coefficiente differenziale rispetto ad x, e che $\chi(x, c)$ sia la funzione di cui $\frac{d\varphi(x, c)}{dc}$ è il coefficiente differenziale rispetto ad x; così (1) si può scrivere

$$\frac{d\psi(b, c)}{dc} - \frac{d\psi(a, c)}{dc} = \chi(b, c) - \chi(a, c) \ldots\ldots (2),$$

supponiamo che b non si trovi in $\varphi(x, c)$, e che a sia anche indipendente da b; allora (2) si può scrivere

$$\frac{d\psi(b, c)}{dc} + C = \chi(b, c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

in cui C dinota termini che sono indipendenti da b, cioè, sono costanti rispetto a b. Quindi siccome b può avere quel valore che ci piace in (3), possiamo rimpiazzare b con x, e scrivere

$$\chi(x, c) = \frac{d\psi(x, c)}{dc} + C \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Questa equazione si può applicare per trovare $\chi(x, c)$; siccome la costante può essere introdotta se si vuole, possiamo dispensarci dallo scriverla, e porre (4) sotto la forma

$$\int \frac{d\varphi(x, c)}{dc} dx = \frac{d}{dc}\int \varphi(x, c)\, dx.$$

Per esempio, sia $\varphi(x, c) = \dfrac{1}{1 + c^2x^2}$; allora

$$\int \varphi(x, c)\, dx = \int \frac{dx}{1 + c^2x^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1} cx,$$

così
$$\frac{d}{dc}\left(\frac{1}{c}\tan^{-1} cx\right) = \int \frac{d}{dc}\left(\frac{1}{1 + c^2x^2}\right) dx.$$

$$= -\int \frac{2cx^2}{(1 + c^2x^2)^2}\, dx.$$

Così dal conoscere il valore di $\int \dfrac{dx}{1 + c^2x^2}$ possiamo dedurre con la differenziazione il valore dell' integrale più complicato $\int \dfrac{2cx^2}{(1 + c^2x^2)^2}\, dx$.

216. Si cerchi il coefficiente differenziale di $\int_a^b \varphi(x, c)\, dx$ rispetto a c quando b ed a sono tutte e due funzioni di c. Si dinoti l' integrale con u; allora $\dfrac{du}{dc}$ consiste di tre termini, uno proveniente dal fatto che $\varphi(x, c)$ contiene c, uno dal fatto che b contiene c, ed uno dal fatto che a contiene c.

Quindi per gli articoli precedenti,

$$\frac{du}{dc}=\int_a^b \frac{d\varphi(x,c)}{dc}\,dx+\frac{du}{db}\frac{db}{dc}+\frac{du}{da}\frac{da}{dc}$$

$$=\int_a^b \frac{d\varphi(x,c)}{dc}\,dx+\varphi(b,c)\frac{db}{dc}-\varphi(a,c)\frac{da}{dc}.$$

217. Con le supposizioni dell'articolo precedente possiamo procedere a trovare $\frac{d^2u}{dc^2}$. Differenziando rispetto a c il termine $\int_a^b \frac{d\varphi(x,c)}{dc}\,dx$ otteniamo

$$\int_a^b \frac{d^2\varphi(x,c)}{dc^2}\,dx+\frac{d\varphi(b,c)}{dc}\frac{db}{dc}-\frac{d\varphi(a,c)}{dc}\frac{da}{dc}.$$

Dagli altri termini in $\frac{du}{dc}$ otteniamo con la differenziazione

$$\varphi(b,c)\frac{d^2b}{dc^2}+\frac{d\varphi(b,c)}{db}\left(\frac{db}{dc}\right)^2+\frac{d\varphi(b,c)}{dc}\frac{db}{dc}$$

$$-\varphi(a,c)\frac{d^2a}{dc^2}-\frac{d\varphi(a,c)}{da}\left(\frac{da}{dc}\right)^2-\frac{d\varphi(a,c)}{dc}\frac{da}{dc}.$$

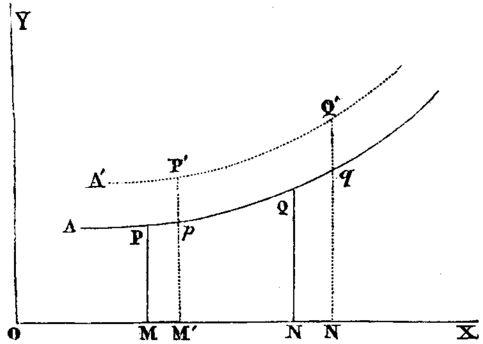
Così
$$\frac{d^2u}{dc^2}=\int_a^b \frac{d^2\varphi(x,c)}{dc^2}\,dx$$

$$+\varphi(b,c)\frac{d^2b}{dc^2}+\frac{d\varphi(b,c)}{db}\left(\frac{db}{dc}\right)^2+2\frac{d\varphi(b,c)}{dc}\frac{db}{dc}$$

$$-\varphi(a,c)\frac{d^2a}{dc^2}-\frac{d\varphi(a,c)}{da}\left(\frac{da}{dc}\right)^2-2\frac{d\varphi(a,c)}{dc}\frac{da}{dc}.$$

Similmente si possono trovare $\frac{d^3u}{dc^3}$ ed i coefficienti differenziali di ordine superiore di u.

218. Si può dare la seguente illustrazione geometrica dell' Art. 216.



Sia $y=\varphi(x,c)$ l'equazione della curva APQ, ed $y=\varphi(x,c+\Delta c)$ l'equazione della curva $A'P'Q'$.

Sia $$OM=a,\qquad ON=b,$$

$$MM'=\Delta a,\qquad NN'=\Delta b.$$

Allora u dinota l'area $PMNQ$, ed $u+\Delta u$ dinota l'area $P'M'N'Q'$. Quindi

$$\Delta u = P'pqQ' + QNN'q - PMM'p,$$

e $$\frac{\Delta u}{\Delta c} = \frac{P'pqQ'}{\Delta c} + \frac{QNN'q}{\Delta c} - \frac{PMM'p}{\Delta c}.$$

Si può vedere facilmente che il limite del primo termine è il limite di $\int_a^b \frac{\varphi(x,c+\Delta c)-\varphi(x,c)}{\Delta c}\,dx$, che il limite del secondo termine è il limite di $\varphi(b,c)\frac{\Delta b}{\Delta c}$, e che il limite del terzo termine è il limite di $\varphi(a,c)\frac{\Delta a}{\Delta c}$. Ciò dà il risultato dell' Art. 216.

219. *Esempio.* Trovare una curva tale che l'area tra la curva, l'asse delle x, ed un'ordinata qualunque, serbi un rapporto costante al rettangolo contenuto da quell'ordinata e dalla corrispondente ascissa.

Supponiamo che $\varphi(x)$ sia l'ordinata della curva per l'ascissa x; allora $\int_0^c \varphi(x)\,dx$ esprime l'area tra la curva, l'asse delle x, e l'ordinata $\varphi(c)$: quindi per la supposizione dobbiamo avere

$$\int_0^c \varphi(x)\,dx = \frac{c\varphi(c)}{n},$$

in cui n è una costante. Ciò deve valere per tutt' i valori di c; quindi possiamo differenziare rispetto a c; così

$$\varphi(c) = \frac{\varphi(c)}{n} + \frac{c\varphi'(c)}{n};$$

onde
$$c\varphi'(c) = (n-1)\,\varphi(c),$$

e
$$\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \frac{n-1}{c}.$$

Con l'integrazione $\log\varphi(c) = (n-1)\log c +$ costante;

così
$$\varphi(c) = Ac^{n-1},$$

e
$$\varphi(x) = Ax^{n-1},$$

che determina la curva richiesta.

220. Trovare la forma di $\varphi(x)$, in modo che per tutt' i valori di c

$$\frac{\int_0^c x\,\{\varphi(x)\}^2\,dx}{\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx} = \frac{c}{n}.$$

Per la supposizione

$$\int_0^c x\,\{\varphi(x)\}^2\,dx = \frac{c}{n}\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx.$$

Si differenzii rispetto a c; così

$$c\,\{\varphi(c)\}^2 = \frac{1}{n}\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx + \frac{c}{n}\{\varphi(c)\}^2;$$

così
$$c\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\varphi(c)\}^2 = \frac{1}{n}\int_0^c \{\varphi(x)\}^2\,dx.$$

Si differenzii di nuovo rispetto a c;

così
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\{\varphi(c)\}^2 + 2c\left(1-\frac{1}{n}\right)\varphi(c)\,\varphi'(c) = \frac{\{\varphi(c)\}^2}{n}$$

onde
$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\varphi(c) + 2c\left(1-\frac{1}{n}\right)\varphi'(c) = 0;$$

quindi
$$\frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \frac{2-n}{2(n-1)}\,\frac{1}{c}.$$

S'integri; così

$$\log\varphi(c) = \frac{2-n}{2(n-1)}\log c + \text{costante};$$

onde
$$\varphi(c) = Ac^{\frac{2-n}{2(n-1)}};$$

in cui A è una costante; così abbiamo finalmente

$$\varphi(x) = Ax^{\frac{2-n}{2(n-1)}}.$$

Questa è la soluzione di un problema nella Statica Analitica, che si può enunciare così. La distanza del centro di gravità di un segmento di un solido di rotazione dal vertice è sempre $\frac{1}{n}$ ma parte dell'altezza del segmento; trovare la curva generatrice. La richiesta equazione è $y = \varphi(x)$.

221. Trovare la forma di $\varphi(x)$ sicchè l'integrale $\int_0^c \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{(c-x)}}$ sia indipendente da c.

Si dinoti l'integrale con u, e supponiamo $x = cz$; così

$$u = \int_0^c \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{(c-x)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{c}\,\varphi(cz)\,dz}{\sqrt{(1-z)}}.$$

Poichè u deve essere indipendente da c, il coefficiente differenziale di u rispetto a c deve svanire. Ora

$$\frac{du}{dc} = \int_0^1 \frac{\dfrac{\varphi(cz)}{2\sqrt{c}} + z\sqrt{c}\,\varphi'(cz)}{\sqrt{(1-z)}}\,dz$$

$$= \int_0^c \frac{\varphi(x) + 2x\varphi'(x)}{2c\sqrt{(c-x)}}\,dx.$$

Quest'ultimo integrale adunque deve svanire qualunque sia c; quindi dobbiamo avere

$$\varphi(x) + 2x\varphi'(x) = 0;$$

onde
$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2x};$$

onde
$$\log\varphi(x) = -\frac{1}{2}\log x + \text{costante},$$

onde
$$\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}.$$

Questa è la soluzione di un problema in Dinamica, che si può enunciare così. Trovare una curva, tale che il tempo della discesa per un arco della curva da un punto *qualunque* al punto infimo sia sempre lo stesso. Se s dinota l'arco della curva misurato dal punto infimo, x l'ascissa orizzontale dell'estremità di s, allora abbiamo

$$\frac{ds}{dx} = \varphi(x) \text{ ed } s = 2A\sqrt{x};$$

sicchè la curva è una cicloide (Art. 72).

ESEMPII DIVERSI.

1. Se la linea retta $SP_1P_2P_3$ incontra tre spire successive di una spirale equiangola, la di cui equazione è $r = a^\theta$, nei punti P_1, P_2, P_3, trovare l'area racchiusa tra P_1P_2, P_2P_3, e le linee curve P_1P_2, P_2P_3.

Risultato. $\dfrac{1}{4\log_e a}(P_3P_1)^2.$

2. Trovare l'area della curva $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$.

Risultato. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{16}$.

3. Trovare l'area della curva $x^{2n} + y^{2n} = a^2 (xy)^{n-1}$, in cui n è un intero positivo.

Risultato. Se n è un numero *pari* $\frac{a^2\pi}{2n}$; se n è un numero *dispari* $\frac{a^2\pi}{n}$.

4. Un filo la lunghezza del quale è eguale al perimetro di un'ovale è avvolto completamente intorno all'ovale, e si formi un'involuta svolgendo il filo, a cominciare da un punto qualunque; mostrare che quando la lunghezza dell'involuta è un massimo o un minimo la lunghezza del filo è eguale alla circonferenza del circolo di curvatura nel punto dal quale incomincia lo svolgimento.

5. Trovare la porzione del cilindro $x^2 + y^2 - rx = 0$ intercetta tra i piani

$$ax + by + cz = 0, \text{ ed } a'x + by + cz = 0.$$

Risultato. $\frac{\pi (a' - a) r^3}{8c}$.

6. Trovare il volume del solido limitato dal paraboloide $y^2 + z^2 = 4a(x + a)$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, supponendo c maggiore di a.

Risultato. $2\pi a \left(c^2 - \frac{a^2}{3}\right)$.

CAPITOLO X.

INTEGRALI ELLITTICI.

222. Gl' integrali $\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}}$, $\int \sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta$, ed $\int \frac{d\theta}{(1+a \operatorname{sen}^2 \theta)\sqrt{(1-c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}}$, si chiamano *funzioni ellittiche* o *integrali ellittici* del primo, secondo, e terzo ordine rispettivamente; il primo è dinotato con $F(c, \theta)$, il secondo con $E(c, \theta)$, ed il terzo con $\Pi(c, a, \theta)$. Gl' integrali si suppongono presi tutti tra i limiti 0 e θ, sicchè essi svaniscono con θ; θ si chiama l'*amplitudine* della funzione. La costante c è supposta minore dell'unità; essa si chiama il *modulo* della funzione. La costante a, che si trova nella funzione del terzo ordine, si chiama il *parametro*. Quando gl' integrali sono presi tra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, essi si chiamano funzioni *complete*; cioè, l'*amplitudine* di una funzione completa è $\frac{\pi}{2}$.

223. Il secondo integrale ellittico esprime la lunghezza di una porzione dell'arco di un'ellisse misurato dall'estremità dell' asse minore, l'eccentricità dell'ellisse essendo il *modulo* della funzione. Da questa circostanza, e dal fatto che i tre integrali sono collegati per mezzo di rimarchevoli proprietà, è stato derivato il nome di *integrali ellittici*.

224. Il soggetto degl'*integrali ellittici* è molto esteso; daremo semplicemente alcuni dei più semplici risultati, e rimandiamo lo studente per più estese investigazioni all'*Integral Calculus* di Hymers, o agli scritti di Legendre, Jacobi ed Abel.

225. Se θ e φ sono legati dall'equazione

$$F(c, \theta) + F(c, \varphi) = F(c, \mu),$$

in cui μ è una costante; allora sarà

$$\cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} = \cos\mu.$$

Si considerino θ e φ come funzioni di una nuova variabile t, e si differenzii l'equazione data; così

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \ldots\ldots (1).$$

Ora siccome t è una nuova variabile arbitraria, siamo in libertà di prendere

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)},$$

così dall'equazione (1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}.$$

Si elevino a quadrato queste due equazioni e si differenzii; così

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - c^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta, \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - c^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi;$$

onde $$\frac{d^2(\theta \pm \varphi)}{dt^2} = - \frac{c^2}{2} (\operatorname{sen} 2\theta \pm \operatorname{sen} 2\varphi).$$

Sia $\theta + \varphi = \psi$ e $\theta - \varphi = \chi$; così

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = - c^2 \operatorname{sen}\psi \cos\chi, \qquad \frac{d^2\chi}{dt^2} = - c^2 \operatorname{sen}\chi \cos\psi.$$

Inoltre $$\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = - c^2 \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\chi;$$

onde $$\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2}}{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}} = \cot\chi, \quad \frac{\frac{d^2\chi}{dt^2}}{\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}} = \cot\psi;$$

onde
$$\frac{d}{dt}\left(\log\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\log\operatorname{sen}\chi, \quad \frac{d}{dt}\left(\log\frac{d\chi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\log\operatorname{sen}\psi;$$

onde $$\log\frac{d\psi}{dt} = \log\operatorname{sen}\chi + \text{costante},$$

quindi $$\frac{d\psi}{dt} = A\operatorname{sen}\chi$$

e similmente $$\frac{d\chi}{dt} = B\operatorname{sen}\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

in cui A e B sono costanti.

Quindi $$A\operatorname{sen}\chi\frac{d\chi}{dt} = B\operatorname{sen}\psi\frac{d\psi}{dt},$$

onde $$A\cos\chi = B\cos\psi + C \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora dalla data equazione originale vediamo che se $\varphi = 0$

$$F(c, \theta) = F(c, \mu);$$

onde allora $$\theta = \mu \text{ e } \chi = \psi = \mu;$$

così da (3) $$(A - B)\cos\mu = C;$$

così $$A\cos(\theta - \varphi) = B\cos(\theta + \varphi) + (A - B)\cos\mu;$$
quindi
$$(A - B)\cos\theta\cos\varphi + (A + B)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi = (A - B)\cos\mu \ldots (4).$$

In (2) si ponga per $\frac{d\psi}{dt}$ il suo valore

$$\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta)} - \sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\varphi)},$$

e per $\frac{d\chi}{dt}$ il suo valore

$$\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} + \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

e poi si supponga $\varphi = 0$; così

$$\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} - 1 = A \operatorname{sen} \mu,$$

e

$$\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} + 1 = B \operatorname{sen} \mu.$$

Si sostituiscano i valori di $A - B$ ed $A + B$ in (4);

così $\quad \cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)} = \cos\mu.$

226. La relazione ora trovata si può mettere sotto una forma diversa. Si liberi l'equazione dai radicali; così

$$(\cos\theta \cos\varphi - \cos\mu)^2 = (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu) \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi;$$

onde

$$\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \cos^2\mu - 2\cos\theta\cos\varphi\cos\mu$$
$$= 1 - c^2 \operatorname{sen}^2\mu \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi.$$

Si aggiunga $\cos^2\varphi \cos^2\mu$ ai due lati e si trasponga; così

$$(\cos\theta - \cos\varphi\cos\mu)^2$$
$$= 1 - \cos^2\varphi - \cos^2\mu + \cos^2\varphi\cos^2\mu - c^2 \operatorname{sen}^2\mu \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi$$
$$= \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\mu (1 - c^2 \operatorname{sen}^2\theta);$$

quindi $\quad \cos\theta = \cos\varphi\cos\mu + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\mu \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2\theta)}.$

Si è preso il segno positivo del radicale, poichè quando $\theta = 0$, dobbiamo avere $\varphi = \mu$.

227. Mostreremo ora come una funzione ellittica del primo ordine si può far dipendere da un'altra con un modulo differente.

Dinoti $F(c, \theta)$ la funzione; si prenda

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{c + \cos 2\varphi};$$

onde
$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{2(1+c\cos 2\varphi)}{(c+\cos 2\varphi)^2},$$

quindi
$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\frac{2(1+c\cos 2\varphi)}{1+2c\cos 2\varphi+c^2}.$$

Ed
$$1-c^2\operatorname{sen}^2\theta=1-\frac{c^2\operatorname{sen}^2 2\varphi}{1+2c\cos 2\varphi+c^2}$$
$$=\frac{1+2c\cos 2\varphi+c^2\cos^2 2\varphi}{1+2c\cos 2\varphi+c^2};$$

quindi

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\theta)}}=\int\frac{2(1+c\cos 2\varphi)}{1+2c\cos 2\varphi+c^2}\cdot\frac{\sqrt{(1+2c\cos 2\varphi+c^2)}}{1+c\cos 2\varphi}\,d\varphi$$
$$=2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1+2c\cos 2\varphi+c^2)}}=\frac{2}{1+c}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\left\{1-\frac{4c}{(1+c)^2}\operatorname{sen}^2\varphi\right\}}}.$$

Non si aggiunge costante, poichè φ svanisce con θ. Così $F(c,\theta)=\frac{2}{1+c}F(c_1,\varphi)$, in cui

$$c_1^2=\frac{4c}{(1+c)^2}\ \text{ e }\ \tan\theta=\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{c+\cos 2\varphi}.$$

L'ultima relazione si può scrivere così;

$$c\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}(2\varphi-\theta).$$

Possiamo notare che c_1 è maggiore di c, poichè

$$\frac{c_1^2}{c^2}=\frac{4}{c(1+c)^2},$$

e poichè c è minore dell'unità, 4 è maggiore di $c(1+c)^2$.

Se $\varphi=\frac{\pi}{2}$, allora $\theta=\pi$; così

$$\frac{2}{1+c}F\left(c_1,\frac{\pi}{2}\right)=F(c,\pi)=2F\left(c,\frac{\pi}{2}\right).$$

228. Daremo ancora una proposizione su questo soggetto, con lo stabilire una relazione tra le funzioni ellittiche del secondo ordine, analoga a quella dimostrata nell' Art. 225 per le funzioni del primo ordine.

Se $$\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\mu)} = \cos\mu,$$

allora sarà

$$E(c,\theta) + E(c,\varphi) - E(c,\mu) = c^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu.$$

In virtù dell' equazione data che lega le amplitudini, φ è una funzione di θ; così possiamo supporre

$$E(c,\theta) + E(c,\varphi) - E(c,\mu) = f(\theta).$$

Si differenzii; così

$$f'(\theta) = \sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\theta)} + \sqrt{(1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi)}\frac{d\varphi}{d\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \cos\varphi\cos\mu}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu} + \frac{\cos\varphi - \cos\theta\cos\mu}{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\mu}\frac{d\varphi}{d\theta}$$

(per l'Art. 226),

$$= \frac{d\{\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi + 2\cos\theta\cos\varphi\cos\mu\}}{d\theta} \times \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu}.$$

Ma $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi + 2\cos\theta\cos\varphi\cos\mu$

$$= 1 + \cos^2\mu + c^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\mu;$$

così $$f'(\theta) = c^2\operatorname{sen}\mu\frac{d(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)}{d\theta}.$$

Quindi, con l'integrazione,

$$f(\theta) = c^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\mu.$$

Non si aggiunge costante, poichè $f(\theta)$ evidentemente svanisce con θ.

ESEMPII DIVERSI.

1. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$z^2 = \frac{2axy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - (x^2+y^2).$$

Risultato. $\frac{\pi a^3}{6}$; supponendo il radicale ristretto al segno positivo.

2. Trovare l'intero volume del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Risultato. $\frac{4\pi abc}{35}$.

3. Dimostrare che il volume di quella porzione del solido limitato dalla superficie di cui l'equazione è

$$x^2 z + a y^2 = z\,(a^2 - z^2),$$

che giace dalla parte positiva del piano delle xy è $\frac{8\pi a^3}{21}$.

4. Trovare il valore di $\int \frac{dS}{r^n}$, in cui dS dinota l'elemento della superficie di una sfera, ed r la distanza di questo elemento da un punto fisso fuori della sfera; l'integrazione essendo estesa su tutta la superficie della sfera.

Risultato. $\frac{2\pi a}{c\,(n-2)}\left\{\frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}}\right\}$; in cui a è il raggio della sfera, e c la distanza del punto fisso dal centro della sfera.

5. Un cilindro è costruito sopra un solo cappio della curva $r = a\cos n\theta$ avendo le sue generatrici perpendicolari al piano di questa curva; determinare l'area della porzione della superficie della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

intercettata dal cilindro; determinare ancora il volume del cilindro intercettato dalla sfera.

Risultati. L'area $= \frac{4a^2}{n}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$;

il volume $= \frac{4a^3}{3n}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

6. Trovare il volume del solido generato dalla rotazione della parte chiusa della curva

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

intorno alla linea $x + y = 0$. *Risultato.* $\frac{8\pi^2 a^3}{3\sqrt{6}}$.

7. Se gli assi di due cilindri circolari eguali di raggio a s'intersegano sotto un angolo β, il volume comune ad entrambi è $\frac{16}{3}\frac{a^3}{\operatorname{sen}\beta}$; e la superficie di ciascuno intercettata dall'altro è $\frac{8a^2}{\operatorname{sen}\beta}$.

8. Il centro di un circolo variabile si muove lungo l'arco di un circolo fisso; il suo piano è normale al circolo fisso, ed il suo raggio eguale alla distanza del suo centro da un diametro fisso; trovare il volume generato; e se il solido così formato gira intorno al diametro fisso, mostrare che il volume attraversato sta al volume del solido come 5 a 2.

9. Il centro di un esagono regolare si muove lungo un diametro di un circolo dato (raggio $= a$), il piano dell'esagono essendo perpendicolare a questo diametro e la sua grandezza variando in modo che una delle sue diagonali coincida sempre con una corda del circolo; mostrare che il volume del solido generato è $2\sqrt{3}a^3$. Mostrare ancora che la superficie del solido è

$$a^2(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

10. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{2}{3a} F\left(c, \frac{\pi}{2}\right), \text{ in cui } c = \frac{1}{3}.$$

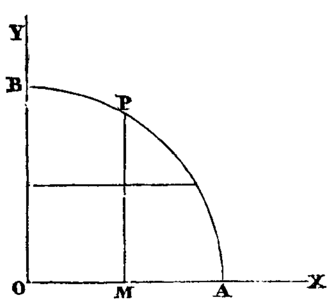
CAPITOLO XI.

CAMBIAMENTO DELLE VARIABILI IN UN INTEGRALE MULTIPLO.

229. Abbiamo veduto nell' Art. 62 che il doppio integrale $\int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\, dx\, dy$ è eguale ad $\int_\alpha^\beta \int_a^b \varphi(x, y)\, dy\, dx$ quando i *limiti sono costanti*, cioè, un cambiamento nell' *ordine* dell' integrazione non produce alcun cambiamento nei limiti delle due integrazioni. Ma quando i limiti della prima integrazione sono funzioni dell' altra variabile, questa proprietà non ha più luogo, come abbiamo veduto in diversi esempii nei capitoli settimo ed ottavo. Diamo quì per aggiunta alcuni pochi esempii.

230. Cambiare l'ordine dell' integrazione in

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{(a^2-x^2)}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$



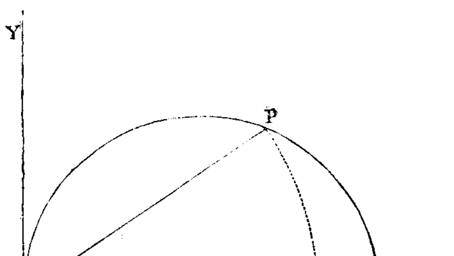
I limiti dell' integrazione rispetto ad y sono quì $y=0$ ed $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$; cioè, possiamo considerare che l' integrale si estenda dall'asse delle x al contorno di un circolo, che ha il centro nell'origine, ed il raggio eguale ad a. Allora l'integrazione rispetto ad x si estende dall'asse delle y all'estremo punto A del quadrante. Così se consideriamo $z=\varphi(x,y)$ come l'equazione di una superficie, il precedente doppio integrale rappresenta il volume di quel solido che è contenuto tra la superficie, il piano delle (x, y), ed una linea che si muove perpendicolarmente a questo piano lungo il contorno $OAPBO$.

È quindi chiaro dalla figura che se prima si esegue l'integrazione rispetto ad x, i limiti saranno $x=0$ ed $x=\sqrt{(a^2-y^2)}$, e poi i limiti di y saranno $y=0$ ed $y=a$. Così l'integrale trasformato è

$$\int_0^a\int_0^{\sqrt{(a^2-y^2)}} \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

231. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} \varphi(r, \theta)\, r d\theta\, dr.$$



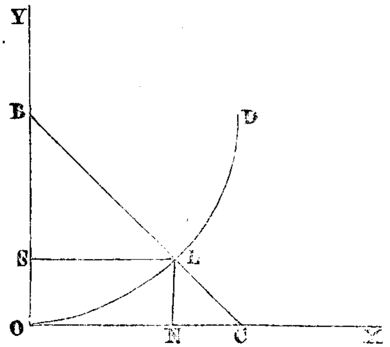
Sia $OA=2a$, e si descriva un semicircolo sopra OA come diametro. Sia $POX=\theta$, allora $OP=2a\cos\theta$. Così il doppio integrale si può considerare come il limite della somma dei valori di $\varphi(r,\theta)\, r\Delta\theta\,\Delta r$ su tutta l'area del semicircolo. Quindi quando si cambia l'ordine dobbiamo integrare per θ da 0 sino a $\cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$, e per r da 0 a $2a$.

Così l'integrale trasformato è

$$\int_0^{2a}\int_0^{\cos^{-1}\frac{r}{2a}} \varphi(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

232. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^{2a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} \varphi(x,y)\, dx\, dy.$$



L'integrazione per y è presa da $y=\frac{x^2}{4a}$ ad $y=3a-x$. L'equazione $y=\frac{x^2}{4a}$ appartiene ad una parabola OLD, ed $y=3a-x$ ad una linea retta BLC, che passa per L, l'estremità del lato retto della parabola.

Così l'integrazione si può considerare come estesa sull'area $OLBSO$. Ora si muti l'ordine dell'integrazione; dovremo considerare separatamente gli spazii OLS e BLS. Per lo spazio OLS dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=2\sqrt{(ay)}$, e poi da $y=0$ ad $y=a$; e per lo spazio BLS dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=3a-y$, e poi da $y=a$ ad $y=3a$. Così l'integrale tra formato è

$$\int_0^{a}\int_0^{2\sqrt{(ay)}} \varphi(x\ \ y)\, dy\, dx + \int_a^{3a}\int_0^{3a-y} \varphi(x,y)\, dy\, dx.$$

233. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^1 \int_x^{x(2-x)} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Quì l'integrazione rispetto ad y è presa da $y = x$ sino ad $y = x(2-x)$. L'equazione $y = x$ rappresenta una linea retta, ed $y = x(2-x)$ rappresenta una parabola. Il lettore troverà esaminando una figura, che l'integrale trasformato è

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{(1-y)}}^{y} \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

234. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_{\sqrt{(a^2-x^2)}}^{x+2a} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

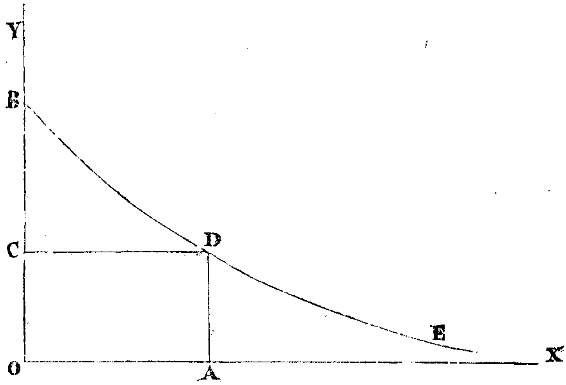
Qui l'integrazione rispetto ad y è presa da $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ad $y = x + 2a$. L'equazione $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ rappresenta un circolo, ed $y = x + 2a$ rappresenta una linea retta. Il lettore troverà esaminando una figura, che quando si esegue prima l'integrazione rispetto ad x, l'integrale deve essere separato in tre porzioni; l'integrale trasformato è

$$\int_0^a \int_{\sqrt{(a^2-y^2)}}^{a} \varphi(x, y)\, dy\, dx + \int_a^{2a} \int_0^a \varphi(x, y)\, dy\, dx + \int_{2a}^{3a} \int_{y-2a}^{a} \varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

235. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Quì l'integrazione rispetto ad y è presa da $y = 0$ ad $y = \dfrac{b}{b+x}$. L'equazione $y = \dfrac{b}{b+x}$ rappresenta un'iperbole; sia BDE questa iperbole, e sia $OA = a$. Allora l'integrazione si può considerare come estesa sullo spazio $OBDA$. Si muti



l'ordine dell'integrazione; dovremo allora considerare separatamente gli spazii $OADC$ e CDB. Per lo spazio $OADC$ dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=a$, e poi da $y=0$ ad $y=\frac{b}{b+a}$. Per lo spazio CDB dobbiamo integrare da $x=0$ ad $x=\frac{b(1-y)}{y}$, e poi da $y=\frac{b}{b+a}$ ad $y=1$. Così l'integrale trasformato è

$$\int_0^{\frac{b}{b+a}}\int_0^a \varphi(x,y)\,dy\,dx+\int_{\frac{b}{b+a}}^1\int_0^{\frac{b(1-y)}{y}} \varphi(x,y)\,dy\,dx.$$

236. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^h\int_{\lambda x}^{c-\mu x} \varphi(x,y)\,dx\,dy,$$

in cui $h=\frac{c}{\lambda+\mu}$. L'integrale trasformato è

$$\int_0^{\lambda h}\int_0^{\frac{y}{\lambda}} \varphi(x,y)\,dy\,dx+\int_{\lambda h}^c\int_0^{\frac{c-y}{\mu}} \varphi(x,y)\,dy\,dx.$$

237. Cambiare l'ordine dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^y \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Quì l'integrazione si può considerare essere estesa per una piramide, ed i piani che la limitano sono dati dalle equazioni

$$z = 0,\ \ z = y,\ \ y = x,\ \ x = a.$$

L'integrale si può trasformare in diversi modi, e così otteniamo

$$\int_0^a \int_y^a \int_0^y \varphi(x, y, z)\, dy\, dx\, dz,$$

o $$\int_0^a \int_0^y \int_y^a \varphi(x, y, z)\, dy\, dz\, dx,$$

o $$\int_0^a \int_z^a \int_y^a \varphi(x, y, z)\, dz\, dy\, dx,$$

o $$\int_0^a \int_0^x \int_z^x \varphi(x, y, z)\, dx\, dz\, dy,$$

o $$\int_0^a \int_z^a \int_z^x \varphi(x, y, z)\, dz\, dx\, dy.$$

Queste trasformazioni si possono verificare ponendo per $\varphi(x, y, z)$ qualche funzione semplice, così che gl'integrali si possano attualmente ottenere; per esempio, se rimpiazziamo $\varphi(x, y, z)$ con l'unità troviamo $\frac{a^3}{6}$ come il valore di una qualunque delle sei forme.

238. Questi esempii illustreranno sufficientemente il soggetto; non è possibile di dare delle regole semplici per scoprire i limiti dell'integrale trasformato. Non è assolutamente necessario di tracciare delle figure come abbiamo fatto, poichè le figure non danno alcuna informazione che non si potesse ottenere riflettendo sui differenti valori che le variabili debbono avere, per fare che l'integrazione si estenda sullo spazio indicato dai dati limiti. Ma le figure aiutano materialmente per arrivare al risultato prontamente e correttamente.

Procediamo ora al problema che è propriamente l'oggetto del presente capitolo, cioè, il cambiamento delle variabili in un integrale *multiplo*. Incominciamo dal caso di un integrale *doppio*.

239. Il problema da risolvere è il seguente. Si voglia trasformare il doppio integrale $\iint V\,dx\,dy$, in cui V è una funzione di x ed y, in un altro doppio integrale nel quale le variabili sono u e v, le antiche e le nuove variabili essendo legate dalle equazioni

$$\varphi_1(x, y, u, v) = 0, \quad \varphi_2(x, y, u, v) = 0 \ldots\ldots (1).$$

Supponiamo che l'integrale primitivo debba prendersi tra limiti conosciuti di y ed x; siccome integriamo prima rispetto ad y, i limiti di y possono essere funzioni di x. Naturalmente integrando rispetto ad y si riguarda x come costante.

Trasformiamo prima l'integrale rispetto ad y in un integrale rispetto a v. Ciò teoreticamente è molto semplice; dalle equazioni (1) si elimini u ed otteniamo y come una funzione di x e v, sia

$$y = \psi(x, v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

dalla quale si ha

$$dy = \psi'(x, v)\,dv,$$

in cui $\psi'(x, v)$ dinota il coefficiente differenziale di $\psi(x, v)$ rispetto a v.

Si sostituiscano allora y e dy in $\int V\,dy$, ed otteniamo $\int V_1\psi'(x, v)\,dv$, in cui V_1 è ciocchè diviene V quando poniamo in V per y il suo valore. Quindi il doppio integrale primitivo diviene

$$\iint V_1\psi'(x, v)\,dx\,dv.$$

Così abbiamo eliminata y e presa invece v. Siccome i valori limiti di y tra i quali dovevamo primitivamente integrare sono conosciuti, potremo da (2) conoscere i valori limiti di v, tra i quali dobbiamo integrare. Si osserverà, che nel trovare $\frac{dy}{dv}$ da (2), si suppose x costante; si fa così perchè, come già si è osservato, quando integriamo l'espressione proposta rispetto ad y dobbiamo considerare x costante.

Il passo seguente consiste nel cambiare l'*ordine* delle predette integrazioni rispetto ad x e v, cioè, eseguire *prima* l'integrazione rispetto ad x. Questo è un soggetto che abbiamo già esaminato; non si deve far altro che determinare convenientemente i *nuovi limiti*. Così supponendo stabilito questo punto, abbiamo cambiata l'espressione primitiva in

$$\iint V_1 \psi'(x, v)\, dv\, dx.$$

Rimane ad eliminare la x da questa espressione e rimpiazzarla con u. Procediamo precisamente come sopra. Dalle equazioni (1) si elimini y, ed otteniamo x come una funzione di v ed u, sia

$$x = \chi(v, u) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3),$$

dalla quale si ha

$$dx = \chi'(v, u)\, du$$

in cui $\chi'(v, u)$ dinota il coefficiente differenziale di $\chi(v, u)$ rispetto ad u.

Si sostituiscano allora x e dx, ed il doppio integrale diviene

$$\iint V' \psi'(x, v)\, \chi'(v, u)\, dv\, du,$$

in cui V' è ciocchè diviene V_1 quando si pone in V_1 per x il suo valore. Così il doppio integrale contiene ora solamente u e v, poichè per la x che si trova in $\psi'(x, v)$ supponiamo sostituito il suo valore, cioè, $\chi(v, u)$. Inoltre poichè i limiti tra i quali si doveva prendere l'integrazione rispetto ad x sono stati già stabiliti, conosciamo i limiti tra i quali deve prendersi l'integrazione rispetto ad u.

Abbiamo dato così la completa soluzione *teoretica* del problema; rimane solamente ad aggiungere un metodo *pratico* per determinare $\psi'(x, v)$ e $\chi'(v, u)$; a questo ora procediamo.

Osserviamo che $\psi'(x, v)$ o $\frac{dy}{dv}$ deve trovarsi dalle equazioni (1) eliminando u, considerando x costante; ciò che segue vale esattamente lo stesso; da (1)

$$\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_1}{du}\frac{du}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dv} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_2}{du}\frac{du}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dv} = 0.$$

Si elimini $\frac{du}{dv}$; così

$$\frac{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{du}} = \frac{\frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_2}{du}},$$

onde

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\frac{d\varphi_1}{dv}\frac{d\varphi_2}{du} - \frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{du}}.$$

Questo adunque è equivalente a $\psi'(x, v)$, supponendo che dopo eseguite le differenziazioni si pongano per y ed u i loro valori in termini di x e v da (1).

Di nuovo, $\chi'(v, u)$ o $\frac{dx}{du}$ deve trovarsi dalle equazioni (1) eliminando y, riguardando v come costante; ciò che segue vale esattamente lo stesso; da (1)

$$\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{d\varphi_1}{du} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_2}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{d\varphi_2}{du} = 0.$$

Da queste equazioni eliminando $\frac{dy}{du}$ troviamo

$$\frac{dx}{du} = \frac{\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{du}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}}.$$

Questo adunque è equivalente a $\chi'(v, u)$.

Così $$\psi'(x, v)\,\chi'(v, u) = \frac{\frac{d\varphi_1}{dv}\frac{d\varphi_2}{du} - \frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}}.$$

Quindi la conclusione si è che

$$\iint V\,dx\,dy = \iint V \frac{\frac{d\varphi_1}{dv}\frac{d\varphi_2}{du} - \frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}}\,dv\,du \,\ldots\ldots\ldots (4),$$

in cui dopo eseguite le differenziazioni, dobbiamo porre per x ed y i loro valori in termini di u e v da trovarsi da (1); anche i valori di x e y debbono sostituirsi in V.

Un importante caso particolare si è quello in cui x ed y sono date *esplicitamente* come funzioni di u e v; le equazioni (1) prendono allora la forma

$$x - f_1(u, v) = 0, \qquad y - f_2(u, v) = 0 \,\ldots\ldots\ldots (5).$$

Quì $$\frac{d\varphi_1}{dx} = 1, \ \frac{d\varphi_1}{dy} = 0, \ \frac{d\varphi_2}{dx} = 0, \ \frac{d\varphi_2}{dy} = 1,$$

e l'integrale trasformato diviene

$$\iint V\left(\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_1}{dv}\frac{df_2}{du}\right) dv\,du,$$

in cui dobbiamo sostituire in V per x ed y i loro valori da (5).

Così possiamo scrivere

$$\iint V\,dx\,dy = \iint V\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) dv\,du \;\ldots (6).$$

Le formole in (4) e (6) sono quelle che si danno ordinariamente; esse contengono una soluzione semplice del problema proposto in quei casi in cui i limiti delle nuove integrazioni sono manifesti. Ma in alcuni esempii la difficoltà di determinare i limiti delle nuove integrazioni sarà molto grande, e per assicurare un risultato corretto sarà necessario invece di usare queste formole, di procedere precisamente nel modo indicato nella teoria, togliendo una per volta ciascuna delle antiche variabili.

240. Ciò che segue è un esempio.

Si voglia trasformare $\int_0^a\int_0^b V\,dx\,dy$, essendo dato

$$y + x = u, \qquad y = uv.$$

Dalle equazioni date abbiamo

$$x = u(1 - v), \qquad y = uv;$$

così
$$\frac{dx}{du} = 1 - v, \quad \frac{dx}{dv} = -u, \quad \frac{dy}{du} = v, \quad \frac{dy}{dv} = u;$$

onde
$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} = u(1 - v) + uv = u.$$

Quindi dall'equazione (6) dell'Art. 239, abbiamo

$$\int_0^a\int_0^b V\,dx\,dy = \iint Vu\,dv\,du;$$

ma non abbiamo determinato i limiti delle integrazioni rispetto ad u e v, sicchè il risultato è di poco valore. Risolveremo ora questo esempio seguendo i passi indicati nella teoria data precedentemente.

Dalle date equazioni che legano le antiche e le nuove variabili eliminiamo u; così abbiamo

$$y = \frac{vx}{1-v}, \quad \text{onde} \quad \frac{dy}{dv} = \frac{x}{(1-v)^2};$$

ai limiti $y=0$ ed $y=b$, corrispondono rispettivamente $v=0$ e $v=\frac{b}{b+x}$; così

$$\int_0^a \int_0^b V\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv.$$

Dobbiamo ora cambiare l'*ordine* dell'integrazione in

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv.$$

Questa quistione è stata risoluta nell'Art. 235; quindi otteniamo

$$\int_0^a \int_0^b V\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{b+x}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dx\,dv$$

$$= \int_0^{\frac{b}{b+a}} \int_0^a V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dv\,dx + \int_{\frac{b}{b+a}}^1 \int_0^{\frac{b(1-v)}{v}} V_1\,x\,(1-v)^{-2}\,dv\,dx.$$

Dobbiamo ora cambiare x per u dove

$$x = u\,(1-v), \qquad \frac{dx}{du} = 1-v;$$

così otteniamo

$$\int_0^{\frac{b}{b+a}} \int_0^{\frac{a}{1-v}} V'\,u\,dv\,du + \int_{\frac{b}{a+b}}^1 \int_0^{\frac{b}{v}} V'\,u\,dv\,du,$$

poichè ai limiti 0 ed a per x corrispondono rispettivamente 0 ed $\frac{a}{1-v}$ per u, ed ai limiti 0 e $\frac{b(1-v)}{v}$ per x corrispondono rispettivamente 0 e $\frac{b}{v}$ per u.

Se $a = b$ l'integrale trasformato diviene

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{a}{1-v}} V' u \, dv \, du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{a}{v}} V' u \, dv \, du.$$

Se a è infinito, questi due termini si riuniscono nella sola espressione

$$\int_0^1 \int_0^{\infty} V' u \, dv \, du.$$

241. *Secondo Esempio.* Si voglia trasformare

$$\int_0^c \int_0^{c-x} V \, dx \, dy,$$

essendo dato $y + x = u$, $y = uv$.

Si esegua l'intera operazione come sopra; sicchè poniamo

$$y = \frac{vx}{1-v} \text{ e } \frac{dy}{dv} = \frac{x}{(1-v)^2}.$$

Quando $y = 0$ abbiamo $v = 0$, e quando $y = c - x$ abbiamo $v = \frac{c-x}{c}$. Così l'integrale si trasforma in

$$\int_0^c \int_0^{\frac{c-x}{c}} V_1 x (1-v)^{-2} \, dx \, dv.$$

Si muti ora l'ordine dell'integrazione; così otteniamo

$$\int_0^1 \int_0^{c(1-v)} V_1 x (1-v)^{-2} \, dv \, dx.$$

Ora si ponga $x = u(1-v)$ e $\frac{dx}{du} = 1 - v$; i limiti di u saranno 0 e c. Quindi abbiamo finalmente per l'integrale trasformato

$$\int_0^1 \int_0^c V' u \, dv \, du.$$

242. *Terzo Esempio.* Trasformare $\iint V\,dx\,dy$ in un doppio integrale con le variabili r e θ, supponendo

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Possiamo porre θ per v ed r per u nelle formole generali; così

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r;$$

e l'integrale trasformato è

$$\iint V' r d\theta\, dr.$$

Questa è una trasformazione con la quale lo studente probabilmente è già familiare; i limiti naturalmente si debbono prendere in modo che ogni elemento che entra nell'integrale primitivo si trovi anche nell'integrale trasformato.

Si può notare un caso particolare di questo esempio. Supponiamo che l'integrale sia

$$\iint \varphi\,(ax + by)\,dx\,dy;$$

con la presente trasformazione questo diviene

$$\iint \varphi\,\{kr\cos(\theta - \alpha)\}\,rd\theta\,dr.$$

in cui $k\cos\alpha = a$ e $k\,\mathrm{sen}\,\alpha = b$. Ora si ponga $\theta - \alpha = \theta'$, sicchè l'integrale diventa

$$\iint \varphi\,(kr\cos\theta')\,rd\theta'\,dr;$$

allora si supponga $r\cos\theta' = x'$ ed $r\,\mathrm{sen}\,\theta' = y'$ e l'integrale si può cambiare di nuovo in

$$\iint \varphi\,(kx')\,dx'\,dy'.$$

Così togliendo gli accenti possiamo scrivere

$$\iint \varphi(ax+by)\,dx\,dy = \iint \varphi(kx)\,dx\,dy\,,$$

in cui $k=\sqrt{(a^2+b^2)}$. I limiti saranno generalmente diversi nei due integrali; quelli a dritta debbono essere determinati con un esame speciale, corrispondenti ai dati limiti a sinistra.

243. *Quarto Esempio.* Trasformare $\int_0^c\int_0^x V\,dx\,dy$, essendo dato

$$x = au + bv, \qquad y = bu + av, \qquad a > b.$$

Si elimini u, così $ay - bx = (a^2-b^2)v$, e la prima trasformazione dà

$$\frac{a^2-b^2}{a}\int_0^c\int_{-\frac{bx}{a^2-b^2}}^{\frac{x}{a+b}} V_1\,dx\,dv\,,$$

in cui V_1 è ciò che diviene V quando si pone $\frac{bx}{a}+\frac{a^2-b^2}{a}v$ per y. In seguito si muti l'ordine dell'integrazione; ciò dà

$$\frac{a^2-b^2}{a}\int_0^{\frac{c}{a+b}}\int_{(a+b)v}^{c} V_1\,dv\,dx + \frac{a^2-b^2}{a}\int_{-\frac{bc}{a^2-b^2}}^{0}\int_{-\frac{a^2-b^2}{b}v}^{c} V_1\,dv\,dx.$$

Dobbiamo ora passare da x ad u per mezzo dell'equazione $x = au + bv$, che dà $\frac{dx}{du} = a$; i limiti di u corrispondenti ai limiti conosciuti di x si determinano facilmente.

Così abbiamo finalmente per l'integrale trasformato

$$(a^2-b^2)\int_0^{\frac{c}{a+b}}\int_v^{\frac{c-bv}{a}} V'\,dv\,du + (a^2-b^2)\int_{-\frac{bc}{a^2-b^2}}^{0}\int_{-\frac{av}{b}}^{\frac{c-bv}{a}} V'\,dv\,du.$$

L'esattezza della trasformazione si può verificare supponendo che V sia qualche funzione semplice di x ed y; per esempio, se V è l'unità, il valore dell'integrale primitivo come del trasformato è $\frac{c^2}{2}$.

244. *Quinto Esempio.* L'area di una superficie è data dall'integrale

$$\iint dx\, dy \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} \qquad \text{(Art. 170);}$$

si voglia trasformarlo in un integrale rispetto a θ e φ, essendo dato

$$z = r \cos\theta, \qquad x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

Dall'equazione nota della superficie z è data in termini di x ed y; quindi sostituendo abbiamo un'equazione che dà r in termini di θ e φ.

Troveremo prima la trasformazione per $dx\, dy$:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + r \cos\theta \cos\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi.$$

Quindi $\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta} = r \operatorname{sen}\theta \left(r \cos\theta + \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta\right)$;

così $dx\, dy$ sarà rimpiazzato da

$$r \operatorname{sen}\theta \left(r \cos\theta + \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta\right) d\varphi\, d\theta.$$

Dobbiamo in seguito trasformare

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}.$$

Abbiamo
$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\theta}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\theta},$$
$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\varphi}.$$

Inoltre
$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta,$$
$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{dr}{d\varphi}\cos\theta.$$

Così $\frac{dz}{dx}$ è una frazione di cui il numeratore è
$$\frac{dz}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dz}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta},$$
cioè,
$$\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{dr}{d\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right)$$
$$-\frac{dr}{d\varphi}\cos\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right),$$
cioè,
$$-r\operatorname{sen}\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{dr}{d\theta}-r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi,$$
ed il denominatore è
$$\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\theta},$$
di cui il valore fu trovato sopra; così
$$\frac{dz}{dx}=\frac{r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi}{r\operatorname{sen}\theta\left(r\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}\right)}.$$

Similmente
$$\frac{dz}{dy}=\frac{r\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{dr}{d\theta}-r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi}{r\operatorname{sen}\theta\left(r\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}\right)};$$

onde

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{r^4 \operatorname{sen}^2\theta+r^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(r\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

e finalmente l'integrale trasformato è

$$\iint\sqrt{\left\{r^2\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\, r\, d\varphi\, d\theta.$$

245. Non vi sarà difficoltà ora nella trasformazione di un integrale triplo. Supponiamo che V sia una funzione di x,y,z, e che $\iiint V\,dx\,dy\,dz$ debba trasformarsi in un integrale triplo rispetto a tre nuove variabili u, v, w, che sono legate ad x, y, z da tre equazioni. Dall'investigazione dell'Art. 239, possiamo prevedere che il risultato prenderà la sua forma più semplice quando le antiche variabili sono date esplicitamente in termini delle nuove. Supponiamo adunque

$$x=f_1(u,v,w),\ \ y=f_2(u,v,w),\ \ z=f_3(u,v,w)\ \ldots\ (1).$$

Trasformiamo prima l'integrale rispetto a z in un integrale rispetto a w. Durante l'integrazione per z riguardiamo x ed y come costanti; teoreticamente allora dovremmo da (1) esprimere z come una funzione di x, y, e w, eliminando u, e v; dovremmo poi trovare il coefficiente differenziale di z rispetto a w riguardando x ed y come costanti. Ma possiamo ottenere il risultato richiesto differenziando le equazioni (1) come esse sono, così

$$\frac{df_1}{du}\frac{du}{dw}+\frac{df_1}{dv}\frac{dv}{dw}+\frac{df_1}{dw}=0,$$

$$\frac{df_2}{du}\frac{du}{dw}+\frac{df_2}{dv}\frac{dv}{dw}+\frac{df_2}{dw}=0,$$

$$\frac{df_3}{du}\frac{du}{dw}+\frac{df_3}{dv}\frac{dv}{dw}+\frac{df_3}{dw}=\frac{dz}{dw}.$$

Si eliminino $\frac{du}{dw}$ e $\frac{dv}{dw}$; così troviamo

$$\frac{dz}{dw} = \frac{N}{\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}},$$

in cui

$$N = \frac{df_3}{dw}\left(\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}\right) + \frac{df_1}{dw}\left(\frac{df_2}{du}\frac{df_3}{dv} - \frac{df_3}{du}\frac{df_2}{dv}\right) + \frac{df_2}{dw}\left(\frac{df_3}{du}\frac{df_1}{dv} - \frac{df_1}{du}\frac{df_3}{dv}\right).$$

Quindi l'integrale si trasforma in

$$\iiint V_1 \frac{N}{\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}}\, dx\, dy\, dw,$$

in cui V_1 dinota ciò che diviene V quando si sostituisce per z il suo valore in termini di x, y e w. Dobbiamo inoltre determinare i limiti di w dai dati limiti di z. In seguito dobbiamo cambiare l'ordine dell'integrazione per y e w, e quindi procedere come sopra a togliere y ed introdurre v. Allora dovremmo di nuovo cambiare l'ordine dell'integrazione per w ed x e poi per v ed x, e finalmente togliere x ed introdurre u. E negli esempii gioverà procedere passo a passo, per ottenere i limiti dell'integrale trasformato.

Nondimeno possiamo pervenire più semplicemente alla formola finale nel seguente modo. Si trasformi l'integrale rispetto a z in un integrale rispetto a w come sopra; indi si muti due volte l'ordine dell'integrazione, sicchè abbiamo

$$\iiint V_1 \frac{N}{\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}}\, dw\, dx\, dy.$$

Ora dobbiamo trasformare il doppio integrale rispetto ad x ed y in un doppio integrale rispetto ad u e v per mezzo delle prime due delle equazioni (1). Quindi conosciamo per l'Art. 239 che il simbolo $dx\,dy$ sarà rimpiazzato da

$$\left(\frac{df_1}{du}\frac{df_2}{dv} - \frac{df_2}{du}\frac{df_1}{dv}\right) dv\, du;$$

e l'integrale finalmente si trasforma in

$$\iiint V' N\, dw\, dv\, du,$$

in cui V' è ciò che diviene V quando per x, y e z, si sostituiscono i loro valori in termini di u, v, e w.

Lo studente non avrà ora alcuna difficoltà nell'investigare il caso più complicato, in cui le antiche e le nuove variabili sono legate da equazioni della forma

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x, y, z, u, v, w) = 0\\ \varphi_2(x, y, z, u, v, w) = 0\\ \varphi_3(x, y, z, u, v, w) = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quì si troverà che

$$\frac{dz}{dw} = \frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{N_2}{D_2}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{N_3}{D_3};$$

inoltre che $\qquad N_2 = D_1$, ed $N_3 = D_2$.

Così $\qquad \iiint V\, dx\, dy\, dz = \iiint V' \frac{N_1}{D_3}\, du\, dv\, dw$, in cui

$$N_1 = \frac{d\varphi_1}{dw}\left(\frac{d\varphi_2}{du}\frac{d\varphi_3}{dv} - \frac{d\varphi_3}{du}\frac{d\varphi_2}{dv}\right) + \frac{d\varphi_2}{dw}\left(\frac{d\varphi_3}{du}\frac{d\varphi_1}{dv} - \frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_3}{dv}\right)$$
$$+ \frac{d\varphi_3}{dw}\left(\frac{d\varphi_1}{du}\frac{d\varphi_2}{dv} - \frac{d\varphi_2}{du}\frac{d\varphi_1}{dv}\right),$$

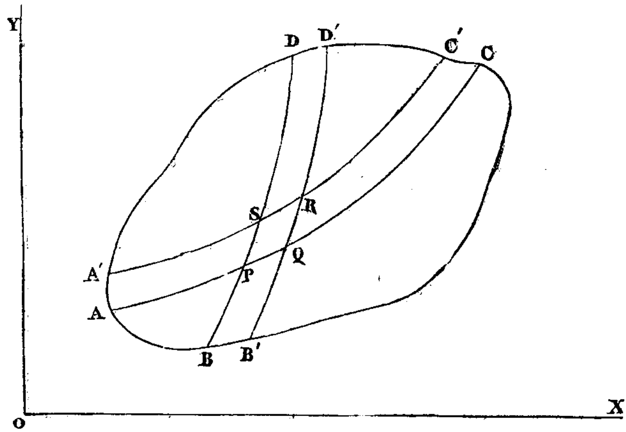
e $-D_3$ è eguale ad una simile espressione con x, y, z invece di u, v, w rispettivamente.

Può accadere che le equazioni (2) impongano qualche restrizione intorno al modo nel quale le trasformazioni debbono essere effettuate. Per esempio supponiamo che si abbia

$$x + y + z - u = 0, \quad x + y - uv = 0, \quad y - uvw = 0.$$

Da queste equazioni non possiamo esprimere z in termini di w ed x ed y, e quindi non possiamo incominciare dal trasformare da z a w. Possiamo però incominciare dal trasformare da z ad u o da z a v; o pure possiamo incominciare dal trasformare da x o y ad u o v o w.

246. Può essere instruttivo di illustrare queste trasformazioni geometricamente. Incominciamo con l'integrale doppio.



Sia $\iint V\,dx\,dy$ un integrale doppio, che si debba prendere per tutti i valori di x ed y compresi dentro il contorno $ABCD$. Supponiamo le variabili x ed y legate alle due nuove variabili u e v dalle equazioni

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Da queste equazioni siano trovate u e v in termini di x ed y, sicchè possiamo scrivere

$$u = F_1(x, y), \quad v = F_2(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora attribuendo un valore costante qualunque ad u la prima delle equazioni (2) si può considerare come rappresentante una curva, e dando successivamente diversi valori costanti ad u, abbiamo una serie di tali curve. Sia adunque $APQC$ una curva, in ogni punto della quale $F_1(x, y)$ ha un certo valore costante u; e sia $A'SRC'$ una curva, in ogni punto della quale $F_1(x, y)$ ha un certo valore costante $u + \delta u$. Similmente sia $BPSD$ una curva, in ogni punto della quale $F_2(x, y)$ ha un certo valore costante v; e sia

$B'QRD'$ una curva, in ogni punto della quale $F_2(x, y)$ ha un certo valore costante $v + \delta v$. Dinotino ora x, y le coordinate di P; procederemo ad esprimere le coordinate di Q, S, ed R.

Le coordinate di Q si trovano da quelle di P, cambiando v in $v + \delta v$; quindi da (1) esse sono ultimamente, quando δv è indefinitamente piccolo,

$$x + \frac{dx}{dv}\delta v, \text{ ed } y + \frac{dy}{dv}\delta v.$$

Similmente le coordinate di S si trovano da quelle di P cambiando u in $u + \delta u$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{du}\delta u, \text{ ed } y + \frac{dy}{du}\delta u.$$

Le coordinate di R si trovano da quelle di P cambiando insieme u in $u + \delta u$ e v in $v + \delta v$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{du}\delta u + \frac{dx}{dv}\delta v, \text{ ed } y + \frac{dy}{du}\delta u + \frac{dy}{dv}\delta v.$$

Questi risultati mostrano che P, Q, R, S sono ultimamente situati ai vertici di un parallelogrammo. L'area di questo parallelogrammo si può prendere senza errore nel limite per l'area della figura curvilinea $PQRS$. L'espressione per l'area del triangolo PQR in termini delle coordinate dei suoi vertici è conosciuta (dalla *Geometria analitica*), e l'area del parallelogrammo è il doppio di quella del triangolo. Quindi abbiamo ultimamente per l'area di $PQRS$ l'espressione

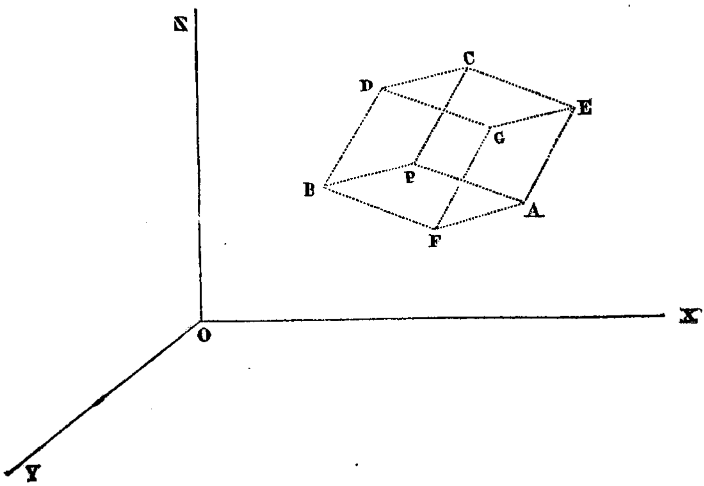
$$\pm\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\delta u\,\delta v.$$

Così è chiaro che l'integrale $\iint V\,dx\,dy$ si può rimpiazzare con

$$\pm\iint V'\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)du\,dv;$$

l'ambiguità del segno sparirà in un esempio nel quale si conoscano i limiti dell'integrazione. Nel trovare il valore dell'integrale trasformato, possiamo supporre che s'integri prima rispetto a v, sicchè u sia tenuta costante; ciò equivale a prendere tutti gli elementi come $PQRS$, che formano una striscia come $AA'C'C$. Allora l'integrazione rispetto ad u equivale a prendere tutte le strisce come $AA'C'C$ che sono contenute dentro al contorno assegnato $ABCD$.

247. Procediamo ad illustrare geometricamente la trasformazione di un integrale triplo.



Sia $\iiint V\,dx\,dy\,dz$ un integrale triplo, che debba essere preso per tutt' i valori di x, y, e z compresi tra limiti assegnati. Supponiamo le variabili x, y, e z legate con tre nuove variabili u, v, w dalle equazioni

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w) \;\ldots\ldots (1).$$

Da queste equazioni siano trovate u, v, e w in termini di x, y, e z, sicchè possiamo scrivere

$$u = F_1(x, y, z), \quad v = F_2(x, y, z) \quad w = F_3(x, y, z) \;\ldots\ldots (2).$$

Ora attribuendo un valore costante qualunque ad u, la prima delle equazioni (2) si può considerare come rappresentante una superficie, e dando successivamente diversi valori costanti ad u abbiamo una serie di superficie. Supponiamo esservi una superficie in ogni punto della quale $F_1(x, y, z)$ abbia il valore costante u, e siano i quattro punti P, B, D, C su questa superficie; inoltre supponiamo esservi una superficie in ogni punto della quale $F_1(x, y, z)$ abbia il valore costante $u + \delta u$, e siano i quattro punti A, F, G, E in questa superficie. Similmente si suppongano P, A, E, C sulla superficie in ogni punto della quale $F_2(x, y, z)$ ha il valore costante v, e B, D, G, F sulla superficie in ogni punto della quale $F_2(x, y, z)$ ha il valore costante $v + \delta v$. Finalmente si suppongano P, A, F, B sulla superficie in ogni punto della quale $F_3(x, y, z)$ ha il valore costante w, e C, D, G, E sulla superficie in ogni punto della quale $F_3(x, y, z)$ ha il valore costante $w + \delta w$.

Dinotino ora x, y, z le coordinate di P; procederemo ad esprimere le coordinate degli altri punti. Le coordinate di A si trovano da quelle di P cambiando u in $u + \delta u$; quindi da (1) esse sono ultimamente quando δu è indefinitamente piccolo,

$$x + \frac{dx}{du}\delta u,\ \ y + \frac{dy}{du}\delta u,\ \ z + \frac{dz}{du}\delta u.$$

Le coordinate di B si trovano da quelle di P cambiando v in $v + \delta v$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{dv}\delta v,\ \ y + \frac{dy}{dv}\delta v,\ \ z + \frac{dz}{dv}\delta v.$$

Similmente le coordinate di C sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{dw}\delta w,\ \ y + \frac{dy}{dw}\delta w,\ \ z + \frac{dz}{dw}\delta w.$$

Le coordinate di D si trovano da quelle di P cambiando v in $v + \delta v$, e w in $w + \delta w$; quindi da (1) esse sono ultimamente

$$x + \frac{dx}{dv}\delta v + \frac{dx}{dw}\delta w,\ \ y + \frac{dy}{dv}\delta v + \frac{dy}{dw}\delta w,\ \ z + \frac{dz}{dv}\delta v + \frac{dz}{dw}\delta w.$$

Similmente si possono trovare le coordinate di E, F e G.

Questi risultati mostrano che P, A, B, C, D, E, F, G sono ultimamente situati ai vertici di un parallelepipedo; ed il volume di questo parallelepipedo si può prendere senza errore nel limite per il volume del solido limitato dalle sei superficie di cui abbiamo parlato. Ora per un noto teorema il volume di un tetraedro si può esprimere in termini delle coordinate dei suoi vertici, ed il volume del parallelepipedo PG è sei volte quello del tetraedro $ABPC$. Quindi abbiamo finalmente per il volume del parallelepipedo

$$\pm\left\{\frac{dx}{du}\left(\frac{dy}{dv}\frac{dz}{dw}-\frac{dy}{dw}\frac{dz}{dv}\right)+\frac{dy}{du}\left(\frac{dz}{dv}\frac{dx}{dw}-\frac{dz}{dw}\frac{dx}{dv}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{dz}{du}\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dw}-\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right\}\delta u\,\delta v\,\delta w=\pm N\delta u\,\delta v\,\delta w \text{ poniamo.}$$

Quindi il triplo integrale si trasforma in

$$\pm\iiint V' N\,du\,dv\,dw;$$

l'ambiguità nel segno sparirà in un esempio in cui si conoscano i limiti dell'integrazione.

248. Abbiamo dato ora la teoria della trasformazione degl'integrali doppii e tripli; il punto essenziale nella nostra investigazione si è, che abbiamo mostrato come togliere le antiche variabili e rimpiazzarle con le nuove variabili *una alla volta*. Raccomandiamo allo studente di porre attenzione su questo punto, poichè crediamo che in tal modo la teoria del soggetto è resa chiara e semplice, e nello stesso tempo si possono più facilmente determinare i limiti dell'integrale trasformato. Non riguardiamo essenziali le *illustrazioni* geometriche nei due articoli precedenti; esse richiedono molto maggiore sviluppo prima che si possano accettare come rigorose *dimostrazioni*.

249. Prima di lasciare l'argomento indicheremo brevemente il metodo che prima si adoperava per risolvere il problema. Non abbiamo messo innanzi questo metodo a preferenza, in parte perchè non dà alcun mezzo per determi-

nare i nuovi limiti, ed in parte per la sua oscurità; quest'ultimo difetto è stato spesso notato dagli scrittori sull'oggetto.

Supponiamo che $\iint V dx dy$ debba trasformarsi in un integrale rispetto a due nuove variabili u e v di cui le antiche variabili sono note funzioni.

Siano sottoposte le variabili a cangiamenti infinitesimi: così

$$dx = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ora nell'espressione primitiva $V dx\, dy$ nel formare dx supponiamo y *costante*, cioè, $dy = 0$; quindi (2) diviene

$$0 = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

si trovi da questa dv e si sostituisca in (1); così

$$dx = \frac{\dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{dv} - \dfrac{dx}{dv}\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dy}{dv}} du \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Inoltre, nel formare dy in $V dx\, dy$ supponiamo x costante, cioè, $dx = 0$; quindi per (4) dobbiamo supporre $du = 0$; così da (2)

$$dy = \frac{dy}{dv} dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Da (4) e (5)

$$dx\, dy = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) du\, dv;$$

ed $\iint V dx\, dy$ diviene

$$\iint V' \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) du\, dv.$$

Rispetto ai limiti dell'integrazione possiamo dare solamente la regola generale, che i nuovi limiti debbono essere presi in modo da includere ogni elemento che era incluso dai limiti antichi.

250. Similmente nel trasformare un integrale triplo

$$\iiint V\, dx\, dy\, dz$$

si procedeva come segue. Siano le nuove variabili u, v, w; nel formare dz dobbiamo supporre x ed y costanti; così abbiamo

$$dz = \frac{dz}{du}\, du + \frac{dz}{dv}\, dv + \frac{dz}{dw}\, dw,$$

$$0 = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv}\, dv + \frac{dx}{dw}\, dw,$$

$$0 = \frac{dy}{du}\, du + \frac{dy}{dv}\, dv + \frac{dy}{dw}\, dw,$$

così
$$dz = \frac{N dw}{\dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{dv} - \dfrac{dx}{dv}\dfrac{dy}{du}} \dots\dots\dots\dots (1),$$

in cui N ha lo stesso valore come nell'Art. 247.

In seguito formando dy dobbiamo riguardare x e z come costanti; quindi da (1) dobbiamo riguardare w come costante; così abbiamo

$$dy = \frac{dy}{du}\, du + \frac{dy}{dv}\, dv\,,$$

$$0 = \frac{dx}{du}\, du + \frac{dx}{dv}\, dv;$$

onde
$$dy = \frac{\left(\dfrac{dy}{dv}\dfrac{dx}{du} - \dfrac{dy}{du}\dfrac{dx}{dv}\right) dv}{\dfrac{dx}{du}} \dots\dots\dots\dots (2).$$

E finalmente nel formare dx supponiamo y e z costanti, cioè, per (1) e (2) supponiamo w e v costanti; così

$$dx = \frac{dx}{du} du \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Da (1), (2), e (3)

$$dx\, dy\, dz = N du\, dv\, dw.$$

251. Lo studente che desidera studiare la storia di questo soggetto può trarre partito dalle opere seguenti. Lacroix, *Calcul Diff. et Intégral*, Vol. II, p. 205; ancora le indicazioni delle più antiche autorità si troveranno nella pagina XI, della tavola annessa a questo volume. De Morgan, *Diff. and Integral Calculus*, p. 392. Moigno, *Calcul Diff. et Intégral*, Vol. II. p. 214; Ostrogradsky, *Mémoires de l'Académie de St Pétersbourg*, Sixième Série, 1838, p. 401. Catalan, *Mémoires Couronnés par l'Académie...de Bruxelles*, Vol. XIV. p. 1. Boole, *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. IV. p. 20. Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, Vol. IV. p. 128. Svanberg, *Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis*, Vol. XIII. 1847, p. 1. De Morgan, *Transactions of the Cambridge Phil. Society*, Vol. IX. p. [133].

ESEMPII.

1. Mostrare che se $x = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ ed $y = b \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$, l'integrale doppio $\iint dx\, dy$ si trasforma in

$$\pm \iint ab \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

2. Se $x = u \operatorname{sen} \alpha + v \cos \alpha$ ed $y = u \cos \alpha - v \operatorname{sen} \alpha$, dimostrare che

$$\iint f(x, y) \frac{dx\, dy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}} = \iint f_1(u, v) \frac{du\, dv}{\sqrt{(1 - u^2 - v^2)}}.$$

3. Dimostrare che

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi\,(a^2 x^2 + b^2 y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{\infty} \varphi\,(x)\,dx.$$

4. Trasformare $\iint V\,dx\,dy$, in cui $y = xu$ ed $x = \dfrac{v}{1+u}$.

Se i limiti di y sono 0 ed x ed i limiti di x sono 0 ed a, trovare i limiti dell'integrale trasformato.

Risultato. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{a\,(1+u)} V'v\,(1+u)^{-2}\,du\,dv.$

5. Trasformare $\iint e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$ da coordinate rettangolari a polari, e quindi mostrare che se i limiti sì di x che di y sono zero e l'infinito, il valore dell'integrale sarà $\dfrac{\alpha}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}$.

6. Trasformare $\displaystyle\int_0^a\int_0^b \varphi\,(x, y)\,dx\,dy$ in coordinate polari, ed indicare i limiti per ciascun ordine nell' integrale trasformato.

Mostrare che

$$\int_0^a\int_0^b \frac{dx\,dy}{(c^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

7. Applicare la trasformazione da coordinate rettangolari a polari negl'integrali doppii a mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\,(x^2+y^2+a'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{a+a'}.$$

8. Trasformare l'integrale doppio $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ in uno nel

quale r e θ siano le variabili indipendenti, essendo dato

$$x = r\cos\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta + a\cos\theta.$$

Risultato.

$$\iint f(r\cos\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta + a\cos\theta)\ (a\,\mathrm{sen}\,2\theta - r)\, d\theta\, dr.$$

9. Trasformare $\iint e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ in un integrale doppio in cui r e t sono le variabili indipendenti essendo $\frac{y}{x} = t$ ed $r^2 = x^2 + y^2$; e se i limiti di x ed y siano per ciascuna 0 ed ∞, trovare i limiti di r e t.

Risultato. $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-r^2}\,r\,dr\,dt}{1+t^2}$.

10. Se x ed y sono date come funzioni di r e θ, trasformare l'integrale $\iiint dx\,dy\,dz$ in un altro in cui le variabili sono r, θ e z; e se $x = r\cos\theta$ ed $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, trovare il volume racchiuso dalle quattro superficie di cui le equazioni sono $r = a$, $z = 0$, $\theta = 0$, e $z = mr\cos\theta$.

Risultato. Il volume $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2 m\cos\theta\, d\theta\, dr = \frac{ma^3}{3}$.

11. Se $\alpha x = yz$, $\beta y = zx$, $\gamma z = xy$, mostrare che

$$\iiint f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = 4\iiint f\left(\frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z}\right) dx\, dy\, dz.$$

12. Trasformare $\iiiint V\,dx_1\,dx_2\,d_3\,dx_4$ in r, θ, φ e ψ essendo

$$x_1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \qquad x_3 = r\cos\theta\cos\psi,$$

$$x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad x_4 = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\psi.$$

Risultato. $\iiiint V' r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, d\psi$.

13. Trovare l' area elementare racchiusa tra le curve $\varphi(x, y) = u$, $\psi(x, y) = v$, e le curve che si ottengono dando ai parametri u e v incrementi indefinitamente piccoli.

Trovare l'area racchiusa tra una parabola e le tangenti nelle estremità del lato retto dividendo l'area con una serie di parabole che toccano queste tangenti e con una serie di rette condotte per l'intersezione delle tangenti.

14. Trasformare l'integrale triplo $\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ in uno nel quale le variabili indipendenti sono r, y, z, essendo dato $\psi(x, y, z, r) = 0$; e cambiare le variabili nel suddetto integrale da x, y, z ad r, θ, φ, essendo dato

$$\psi(x, y, z, r) = 0,\quad \psi_1(y, z, r, \theta) = 0,\quad \psi_2(z, r, \theta, \varphi) = 0.$$

Risultato. $$-\iiint \frac{\dfrac{d\psi}{dr}\,\dfrac{d\psi_1}{d\theta}\,\dfrac{d\psi_2}{d\varphi}}{\dfrac{d\psi}{dx}\,\dfrac{d\psi_1}{dy}\,\dfrac{d\psi_2}{dz}}\, f_1(r, \theta, \varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

15. Trasformare l'integrale doppio

$$\iint dx\, dy \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}},$$

in cui x, y, z sono legate dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, in un integrale in termini di θ e φ, avendo queste relazioni,

$$x = \operatorname{sen}\varphi \sqrt{(1 - m^2 \operatorname{sen}^2\theta)},\qquad y = \cos\theta \cos\varphi,$$

$$z = \operatorname{sen}\theta \sqrt{(1 - n^2 \operatorname{sen}^2\varphi)},\qquad m^2 + n^2 = 1.$$

Quindi dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\theta + n^2\cos^2\varphi}{\sqrt{(1 - m^2\operatorname{sen}^2\theta)}\sqrt{(1 - n^2\operatorname{sen}^2\varphi)}}\, d\theta\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

16. Trasformare l'integrale $\iiint dx\,dy\,dz$ in r, θ, φ, essendo

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \sqrt{(1 - n^2 \cos^2 \theta)}, \qquad y = r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta,$$
$$z = r \cos \theta \sqrt{(\cos^2 \varphi + n^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

Risultato. $\displaystyle\iiint \frac{r^2 \{(n^2 - 1) \cos^2 \varphi - n^2 \operatorname{sen}^2 \theta\}\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{(1 - n^2 \cos^2 \theta)} \sqrt{(\cos^2 \varphi + n^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$.

17. Trasformare l'espressione $\displaystyle\iint \frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\varphi$ per un volume, in coordinate rettangolari.

Risultato. $\displaystyle\frac{1}{3}\iint (z - px - qy)\, dx\, dy$; questo dovrebbe interpetrarsi geometricamente.

18. Se $x + y + z = u$, $x + y = uv$, $y = uvw$, dimostrare che

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty V\, dx\, dy\, dz = \int_0^\infty\int_0^1\int_0^1 V\, u^2 v\, du\, dv\, dw.$$

19. Se
$$x_1 = r \cos \theta_1,$$
$$x_2 = r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2,$$
$$x_3 = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1},$$
$$x_n = r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1},$$

mostrare che $\displaystyle\iiint \ldots\ldots V\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$

$$= \pm \iiint \ldots\ldots V'\, r^{n-1} (\operatorname{sen} \theta_1)^{n-2} (\operatorname{sen} \theta_2)^{n-3}$$
$$\ldots\ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2}\, dr\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots\ldots d\theta_{n-1},$$

in cui V è una funzione qualunque di $x_1, x_2 \ldots x_n$, e V' ciò che diviene questa funzione quando si cangiano le variabili.

CAPITOLO XII.

INTEGRALI DEFINITI.

252. Quando si conosce l'integrale indefinito di una funzione, possiamo ottenere immediatamente il valore dell'*integrale definito* corrispondente a limiti assegnati della variabile. Alle volte però possiamo assegnare con metodi speciali il valore di un integrale *definito* mentre non possiamo esprimere l'integrale indefinito in una forma finita; alle volte senza trovare attualmente il valore di un integrale definito possiamo mostrare che esso possiede proprietà importanti. In alcuni casi nei quali si può trovare l'integrale indefinito di una funzione, l'integrale definito tra certi limiti può avere un valore degno di nota, per la forma semplice nella quale può essere espresso. In questo capitolo daremo esempii di queste indicazioni generali.

Si può osservare che una collezione dei risultati conosciuti rispetto agl'Integrali Definiti è stata pubblicata in un volume in quarto ad Amsterdam, da D. Bierens de Haan, sotto il titolo di *Tables d'Intégrales Définies.*

253. Supponiamo $f(x)$ ed $F(x)$ funzioni algebriche razionali di x, ed $f(x)$ di grado inferiore ad $F(x)$, e supponiamo che l'equazione $F(x)=0$ non abbia radici reali; si cerca il valore di

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx.$$

Si vedrà che per le supposizioni precedenti, l'espressione da integrarsi non diviene mai infinita per valori reali di x.

Rappresenti $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ ed $\alpha-\beta\sqrt{(-1)}$ una coppia di radici immaginarie di $F(x)=0$; allora la frazione quadratica corrispondente della serie nella quale si può decomporre $\frac{f(x)}{F(x)}$, si può rappresentare con

$$\frac{2A(x-\alpha)+2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

le costanti A e B essendo date dall'equazione

$$A-B\sqrt{(-1)}=\frac{f\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}}{F'\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}} \qquad \text{(Art. 21)}.$$

Ora
$$\int\frac{2B\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=2B\tan^{-1}\frac{x-\alpha}{\beta},$$

quindi
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2B\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=2B\pi.$$

Inoltre
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,dt}{t^2+\beta^2},$$

ed è chiaro che l'ultimo integrale tra i limiti assegnati è zero, poichè la parte negativa è numericamente eguale alla parte positiva. Così $2B\pi$ rappresenta la parte dell'integrale corrispondente alla coppia di radici immaginarie che si considera.

Se quindi si suppone $F(x)$ del grado $2n$, e che $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ siano gli n termini di cui abbiamo preso B come tipo, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx=2\pi\{B_1+B_2+\ldots\ldots+B_n\}.$$

254. Come un esempio dell'articolo precedente prendiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}},$$

in cui m ed n sono interi positivi, ed m minore di n. Quì

$$A-B\sqrt{(-1)}=\frac{1}{2n\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}^{2n-2m-1}},$$

e si conosce per la teoria delle equazioni che i valori di $\alpha + \beta\sqrt{(-1)}$ si ottengono dall'espressione

$$\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n} + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2r+1)\pi}{2n},$$

dando ad r successivamente i valori 0, 1, 2,...... sino ad $n-1$.

Così, pel teorema di Demoivre,

$$\{\alpha + \beta\sqrt{(-1)}\}^{2n-2m-1} = \cos\varphi + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

in cui

$$\varphi = (2n-2m-1)\frac{(2r+1)\pi}{2n} = (2r+1)\pi - (2r+1)\frac{(2m+1)\pi}{2n};$$

sicchè

$$\cos\varphi + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,\varphi = -\cos(2r+1)\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta,$$

in cui
$$\theta = \frac{2m+1}{2n}\pi.$$

Quindi

$$A - B\sqrt{(-1)} = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{-\cos(2r+1)\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta}$$

$$= -\frac{\cos(2r+1)\theta + \sqrt{(-1)}\,\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta}{2n}.$$

onde
$$B = \frac{\mathrm{sen}\,(2r+1)\theta}{2n}.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\{\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,3\theta + \mathrm{sen}\,5\theta + \ldots + \mathrm{sen}\,(2n-1)\theta\}.$$

La somma della serie di seni si dimostra nelle opere sulla Trigonometria essere $\dfrac{\mathrm{sen}^2 n\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$, e nel caso attuale $n\theta = \dfrac{2m+1}{2}\pi$, sicchè $\mathrm{sen}^2 n\theta = 1$. Adunque

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

È chiaro che $\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$ è la metà del risultato precedente, cioè

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

255. Nell'ultima formola dell'articolo precedente si ponga $x^{2n}=y$, e si supponga $\frac{2m+1}{2n}=k$; così otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Questo risultato vale quando k ha un valore qualunque compreso tra 0 ed 1. Poichè la sola restrizione sugl'interi positivi m ed n si è che m deve essere minore di n, e quindi scegliendo convenientemente m ed n possiamo rendere $\frac{2m+1}{2n}$ eguale ad una frazione propria assegnata qualunque che ha un denominatore *pari* quando è ridotta a minimi termini. E sebbene non si possa rendere $\frac{2m+1}{2n}$ *esattamente* eguale ad una frazione che ha un denominatore *dispari* quando è ridotta a minimi termini, pure possiamo farla differire da una tale frazione per una quantità tanto piccola quanto ci piace, e così dedurre il risultato richiesto.

Nell'ultimo risultato si ponga x^r per y, in cui r è una quantità positiva qualunque; così

$$\int_0^\infty \frac{r x^{kr-r} x^{r-1}\,dx}{1+x^r} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi},$$

cioè,

$$\int_0^\infty \frac{x^{kr-1}\,dx}{1+x^r} = \frac{\pi}{r \operatorname{sen} k\pi}.$$

Sia $kr=s$; così

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^r} = \frac{\pi}{r \operatorname{sen} \frac{s}{r}\pi}.$$

La sola restrizione sulle quantità positive r ed s si è che s deve essere minore di r.

Lo studente probabilmente non troverà alcuna seria difficoltà nel metodo che abbiamo indicato per dimostrare la verità dell'equazione (1) quando k è una frazione che ha un denominatore *dispari* allorchè è ridotta a minimi termini; nonpertanto si possono fare alcune poche osservazioni che stabiliranno la proposizione decisivamente, e che serviranno anche come utili esercizii sull'argomento del presente capitolo.

Sia $$u = \int_0^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y}; \text{ allora}$$

$$u = \int_0^1 \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y} + \int_1^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y};$$

e ponendo $\frac{1}{z}$ per y troviamo che

$$\int_1^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y} = \int_0^1 \frac{z^{-k}\,dz}{1+z}; \text{ così}$$

$$u = \int_0^1 \frac{y^{k-1} + y^{-k}}{1+y}\,dy.$$

Quindi $$\frac{du}{dk} = \int_0^1 \frac{\log y}{1+y}(y^{k-1} - y^{-k})\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

L'equazione (2) mostra che $\frac{du}{dk}$ è negativo se $y^{k-1} - y^{-k}$ è costantemente positivo, e positivo se $y^{k-1} - y^{-k}$ è costantemente negativo, tra i limiti 0 ed 1 per y. Quindi $\frac{du}{dk}$ è negativo o positivo secondo che k è minore o maggiore di $\frac{1}{2}$. Così u diminuisce quando k cresce da 0 ad $\frac{1}{2}$, ed u cresce quando k cresce da $\frac{1}{2}$ ad 1.

Ora dinoti $\frac{\alpha}{\beta}$ una frazione ridotta a minimi termini, in cui β è un intero dispari; e sia p un intero pari. Sia $k_1 = \frac{p\alpha - 1}{p\beta}$, e $k_3 = \frac{p\alpha + 1}{p\beta}$, e k_2 dinoti $\frac{\alpha}{\beta}$. Siano u_1, u_2, u_3 i valori di $\int_0^\infty \frac{y^{k-1}\,dy}{1+y}$ quando per k si sostituiscono k_1, k_2, k_3 rispettivamente. Allora dall'equazione (1)

$$u_1 = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k_1 \pi} \text{ ed } u_3 = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k_3 \pi}.$$

Ora possiamo prendere p tanto grande in modo che k_1 e k_2 siano entrambi maggiori o entrambi minori di $\frac{1}{2}$; ed allora per ciò che si è dedotto dall'equazione (2) ne segue che u_2 deve giacere numericamente tra u_1 ed u_3. Così la differenza tra u_2 ed u_1 o u_3 deve essere minore della differenza tra u_1 ed u_3; e quindi *a fortiori* la differenza tra u_2 e $\frac{\pi}{\operatorname{sen} k_2 \pi}$ deve essere minore della differenza tra u_1 ed u_3. Quindi siccome p può crescere indefinitamente abbiamo finalmente $u_2 = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k_2 \pi}$.

Integrali Euleriani.

256. L'integrale definito

$$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx$$

si chiama il *primo integrale Euleriano;* lo dinoteremo col simbolo $B(l, m)$.

L'integrale definito

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx.$$

si chiama il *secondo integrale Euleriano;* è dinotato dal simbolo $\Gamma(n)$.

Daremo ora alcune delle proprietà di questi integrali; le costanti in questi integrali, che abbiamo indicate con l, m, n, si suppongono *positive* in tutto ciò che segue.

257. Nel primo integrale Euleriano si ponga $x = 1 - z$;

così $$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \int_0^1 z^{m-1}(1-z)^{l-1}\,dz;$$

questo mostra che le costanti l ed m si possono scambiare senza alterare il valore dell'integrale; cioè,

$$B(l, m) = B(m, l).$$

Di più nel primo integrale Euleriano si ponga $x = \frac{y}{1+y}$;

così $$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{l-1}\,dy}{(1+y)^{l+m}}.$$

Nello stesso integrale si ponga $x = \frac{1}{1+y}$; così

$$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y)^{l+m}}.$$

258. Sia $e^{-x} = y$, sicchè $x = \log\frac{1}{y}$; allora abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy,$$

che dà per conseguenza un'altra forma di $\Gamma(n)$.

259. Abbiamo con l'integrazione per parti

$$\int e^{-x}x^n\,dx = -e^{-x}x^n + n\int e^{-x}x^{n-1}\,dx;$$

ed $e^{-x}x^n$ svanisce quando $x = 0$, ed anche quando $x = \infty$. (Si vegga *Cal. Dif.* Art. 153); così

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx;$$

cioè $$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Poichè $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$ abbiamo $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$; cioè,

$$\Gamma(1) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da (1) e (2) vediamo che se n è un intero

$$\Gamma(n+1) = \lfloor n.$$

Quando n non è un intero possiamo con l'uso ripetuto dell'equazione (1) far dipendere il valore di $\Gamma(n)$ in cui n è maggiore dell'unità da quello di $\Gamma(m)$ in cui m è minore dell'unità.

260. Ponendo $kx = z$ abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{k^n}\int_0^\infty e^{-z} z^{n-1}\,dz = \frac{\Gamma(n)}{k^n}.$$

261. Dimostreremo ora un'equazione importante che lega i due integrali Euleriani.

S'integri il doppio integrale $\int_0^\infty\int_0^\infty x^{l+m-1} y^{m-1} e^{-(1+y)x}\,dy\,dx$

prima rispetto ad x; otteniamo così, per l'Art. 260.

$$\Gamma(l+m)\int_0^\infty \frac{y^{m-1}dy}{(1+y)^{l+m}}.$$

Inoltre s'integri lo stesso doppio integrale prima rispetto ad y; otteniamo così

$$\Gamma(m)\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,x^{l+m-1}}{x^m}\,dx,$$

cioè,
$$\Gamma(m)\int_0^\infty e^{-x} x^{l-1}\,dx,$$

cioè,
$$\Gamma(m)\ \Gamma(l).$$

Quindi
$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y)^{l+m}} = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

Quindi, per l'Art. 257,

$$B(l, m) = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

262. Nel risultato dell' articolo precedente, supponiamo $l+m=1$; così, se m è minore dell' unità,

$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y} = \Gamma(m)\,\Gamma(1-m),$$

poichè $\Gamma(1)=1$. Quindi, per l'Art. 255, se m è minore dell' unità

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} m\pi}.$$

263. Si ponga nell' ultimo risultato $m=\frac{1}{2}$; allora

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

onde $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Daremo un' altra dimostrazione dell' ultimo risultato.

Sia $u = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; allora è chiaro che u ancora

$$= \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy;$$

così $$u^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \times \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad \text{(Art. 66)}.$$

Questo doppio integrale si è mostrato nell'Art. 204 essere

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{4},$$

quindi $$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ora $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx;$$ si ponga $x=y^2$,

così $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = 2u = \sqrt{\pi}.$$

264. Daremo ora un' espressione per $\Gamma(n)$ che somministrerà un' altra pruova del risultato nell'Art. 262. Conoscia-

mo che il limite di $\frac{x^h - 1}{h}$ quando h diminuisce indefinitamente è $\log x$; quindi

$$\left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1} = \text{limite di } \left(\frac{1-x^h}{h}\right)^{n-1};$$

così possiamo scrivere

$$\left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1} = \left(\frac{1-x^h}{h}\right)^{n-1} + y;$$

in cui y è una quantità che diminuisce senza limite al pari di h.

Si ponga $h = \frac{1}{r}$, allora, per l'Art. 258,

$$\Gamma(n) = r^{n-1}\int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{r}})^{n-1}\,dx + \int_0^1 y\,dx.$$

Nel primo integrale si ponga $x = z^r$; così

$$\Gamma(n) - \int_0^1 y\,dx = r^n \int_0^1 z^{r-1}(1-z)^{n-1}\,dz.$$

Possiamo supporre r un intero; allora l'integrale a dritta, per l'Art. 33, è

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots r}{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}\, r^{n-1}.$$

Cresca r indefinitamente, allora y svanisce ed abbiamo

$$\Gamma(n) = \text{limite di } \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots r}{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}\, r^{n-1}.$$

265. Dal risultato dell'articolo precedente abbiamo

$$\frac{\{\Gamma(n)\}^2}{\Gamma(n-m)\,\Gamma(n+m)} = \left\{1 - \frac{m^2}{n^2}\right\}\left\{1 - \frac{m^2}{(n+1)^2}\right\}\left\{1 - \frac{m^2}{(n+2)^2}\right\}\ldots$$

Un caso particolare di questo si ottiene supponendo $n = 1$; così

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)\,\Gamma(1+m)} = \left(1 - \frac{m^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{3^2}\right)\ldots\ldots;$$

l'espressione a dritta si conosce che è eguale a $\frac{\operatorname{sen} m\pi}{m\pi}$; così

$$\Gamma(1-m)\,\Gamma(1+m)=\frac{m\pi}{\operatorname{sen} m\pi},$$

onde

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} m\pi} \qquad \text{(Art. 259).}$$

266. Stabiliremo ora l'equazione seguente, n essendo un intero,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}$$

Prima si supponga n *dispari*; nell'Art. 262 si ponga per m successivamente $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ... sino ad $\frac{n-1}{2n}$, e si moltiplichi; così

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}}$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

(*Per la Trigonometria*).

In secondo luogo si supponga n *pari*; in questo caso si ponga per m successivamente $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ... sino ad $\frac{n-2}{2n}$, e si formi il prodotto come sopra; indi si moltiplichi il primo membro per $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ed il secondo membro per l'equivalente $\sqrt{\pi}$; allora otteniamo lo stesso risultato come prima.

267. Una formola ancora più generale è

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\Gamma(nx)\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx},$$

che ora dimostreremo. Dinoti $\varphi(x)$

$$\frac{n^{nx}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nx)};$$

dobbiamo allora mostrare che $\varphi(x)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}$.

Abbiamo

$$\varphi(x+1)=\frac{n^{nx+n}\,\Gamma(x+1)\,\Gamma\left(x+1+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+1+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nx+n)}$$

$$=\frac{n^n\,x\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{(nx+n-1)(nx+n-2)\ldots\ldots nx}\,\varphi(x)$$

$$=\varphi(x).$$

Similmente $\varphi(x+2)=\varphi(x+1)=\varphi(x)$; e procedendo così abbiamo

$$\varphi(x)=\varphi(x+m),$$

in cui m può essere tanto grande quanto ci piace. Quindi $\varphi(x)$ è eguale al limite di $\varphi(\mu)$ quando μ è infinito; così $\varphi(x)$ *deve essere indipendente da* x, cioè, deve avere lo stesso valore qualunque sia x; quindi $\varphi(x)$ deve avere lo stesso valore che ha quando $x=\frac{1}{n}$; così il teorema discende dall'articolo precedente. Questo teorema è attribuito a Gauss; una dimostrazione più rigorosa è data negli *Exercices de Calcul Intégral* di Legendre, Vol. II. p. 23; si vegga anche il *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Vol. XVI. p. 212.

268. Molti integrali definiti si possono esprimere in termini della *funzione-Gamma;* daremo alcuni esempii.

L'integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx$ diviene ponendo y per a^2x^2

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{2a\sqrt{y}},\ \text{cioè},\ \frac{1}{2a}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\ \text{o}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Di più, in $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{(x+a)^{l+m}}$ si ponga $\frac{x}{x+a}=\frac{y}{1+a}$; così otteniamo

$$\frac{1}{a^m(1+a)^l}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}dy,\ \text{cioè},\ \frac{1}{a^m(1+a)^l}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

Inoltre, in $\int_0^1 x^{l-1}(1-x^2)^{m-1}\,dx$ si ponga $x^2=y$; così otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{l}{2}-1}(1-y)^{m-1}\,dy,\ \text{cioè},\ \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma(m)}{2\Gamma\left(\frac{l}{2}+m\right)}.$$

Così
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^p\theta\cos^q\theta\,d\theta=\int_0^1 x^p(1-x^2)^{\frac{q-1}{2}}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{p+1-1}(1-x^2)^{\frac{q+1}{2}-1}\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

Di più, in $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{\{ax+b(1-x)\}^{l+m}}$ si ponga $x=\frac{by}{a(1-y)+by}$; così otteniamo

$$\frac{1}{a^lb^m}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}dy,\ \text{cioè},\ \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{a^lb^m\,\Gamma(l+m)}.$$

269. In $\int_0^a x^{l-1}(a-x)^{m-1}dx$ si ponga $x=ay$; così otteniamo

$$a^{l+m-1}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}\,dy,\ \text{cioè},\ a^{l+m-1}\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}.$$

270. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \ldots x^{l-1}\,y^{m-1}\,z^{n-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili tutt'i valori *positivi* d'accordo con la condizione che $x+y+z+\ldots$ non sia maggiore dell'unità.

Supporremo che vi siano tre variabili, e per conseguenza che l'integrale sia un integrale triplo; il metodo adottato si vedrà che è applicabile per un numero qualunque di variabili.

Dobbiamo prima integrare rispetto ad una delle variabili, supponiamo z; i limiti allora saranno 0 ed $1-x-y$; così tra questi limiti

$$\int z^{n-1}\,dz = \frac{(1-x-y)^n}{n} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}(1-x-y)^n.$$

In seguito s'integri rispetto ad una delle variabili rimanenti, supponiamo y; i limiti saranno 0 ed $1-x$; e tra questi limiti, per l'Art. 269,

$$\int y^{m-1}(1-x-y)^n\,dy = \frac{(1-x)^{m+n}\,\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

Finalmente s'integri rispetto ad x tra i limiti 0 ed 1; così tra questi limiti

$$\int x^{l-1}(1-x)^{m+n}\,dx = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)}.$$

Quindi il risultato finale è

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)},$$

cioè,

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}.$$

271. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \ldots \xi^{l-1}\,\eta^{m-1}\,\zeta^{n-1}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili tutt'i valori positivi d'accordo con la condizione che

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r + \ldots$$

non sia maggiore dell'unità.

Si ponga $x = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p$, $y = \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q$, $z = \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r$, ...

Allora l'integrale diviene

$$\frac{\alpha^l \beta^m \gamma^n \ldots}{p\,q\,r \ldots} \iiint \ldots x^{\frac{l}{p}-1} y^{\frac{m}{q}-1} z^{\frac{n}{r}-1} \ldots dx\,dy\,dz \ldots$$

con la condizione che $x + y + z + \ldots$ non sia maggiore dell'unità. Il valore dell'integrale è, quindi, per l'articolo precedente

$$\frac{\alpha^l \beta^m \gamma^n \ldots}{p\,q\,r \ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m}{q}\right) \Gamma\left(\frac{n}{r}\right) \ldots\ldots}{\Gamma\left(\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} + \ldots + 1\right)}.$$

272. Come un caso semplice dell'articolo precedente possiamo supporre $p, q, r \ldots$ essere ciascuno l'unità, ed $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ciascuno eguale ad una costante h; così la condizione si è che $\xi + \eta + \zeta + \ldots$ non sia maggiore di h. Quindi il valore dell'integrale

$$\iiint \ldots \xi^{l-1} \eta^{m-1} \zeta^{n-1} \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots$$

è

$$h^{l+m+n+\ldots} \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n) \ldots}{\Gamma(l + m + n + \ldots + 1)},$$

che possiamo dinotare con

$$N h^{l+m+n+\ldots}.$$

Similmente se l'integrale deve essere preso in modo che la somma delle variabili non ecceda $h + \Delta h$, otteniamo per risultato

$$N(h + \Delta h)^{l+m+n+\ldots}.$$

Quindi conchiudiamo che il valore dell'integrale esteso a tutti quei valori positivi delle variabili che danno la somma delle variabili compresa tra h ed $h+\Delta h$ è

$$N\{(h+\Delta h)^{l+m+n+\dots}-h^{l+m+n+\dots}\},$$

e quando Δh diminuisce indefinitamente, questo diviene

$$N(l+m+n+\dots)\,h^{l+m+n+\dots-1}\,\Delta h,$$

cioè,
$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots}{\Gamma(l+m+n+\dots)}\,h^{l+m+n+\dots-1}\,\Delta h.$$

273. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint\dots x^{l-1}\,y^{m-1}\,z^{n-1}\dots f(x+y+z+\dots)\,dx\,dy\,dz\dots$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili tutt'i valori *positivi* d'accordo con la condizione che $x+y+z+\dots$ non sia maggiore di c.

Supporremo per semplicità che vi siano tre variabili. Per l'articolo precedente se $f(x+y+z)$ si rimpiazzasse con l'unità quella parte dell'integrale che nasce dal supporre la somma delle variabili compresa tra h ed $h+\Delta h$ sarebbe ultimamente

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\,h^{l+m+n-1}\,\Delta h.$$

E se la somma delle variabili è compresa tra h ed $h+\Delta h$, il valore di $f(x+y+z)$ può differire solamente da $f(h)$ per una piccola quantità dello stesso ordine di Δh. Quindi, trascurando il quadrato di Δh, quella parte dell'integrale che nasce dal supporre la somma delle variabili compresa tra h ed $h+\Delta h$ è ultimamente

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\,f(h)\,h^{l+m+n-1}\,\Delta h.$$

Quindi l'intero integrale è

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}\int_0^c f(h)\,h^{l+m+n-1}\,dh.$$

274. Similmente il valore di

$$\iiint \xi^{l-1} \eta^{m-1} \zeta^{n-1} f\left\{\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

per tutt'i valori positivi delle variabili, tali che

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^q + \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^r$$

non sia maggiore di c, è

$$\frac{\alpha^l \beta^m \gamma^n}{p\,q\,r} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m}{q}\right) \Gamma\left(\frac{n}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}\right)} \int_0^c f(h)\, h^{\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} - 1}\, dh.$$

Il risultato di questo articolo e del precedente si può estendere al caso di un numero qualunque di variabili.

275. Si voglia trovare il valore dell'integrale multiplo

$$\iiint \ldots f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

l'integrale essendo preso in modo da dare alle variabili *tutti* i valori d'accordo con la condizione che $x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2$ non sia maggiore dell'unità.

Con la successiva applicazione di una trasformazione di integrale doppio data nell'Art. 242, l'integrale multiplo si può ridurre ad

$$\iiint \ldots f(kx_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

in cui $\qquad k = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}\,;$

e queste trasformazioni non alterano la condizione che la somma dei quadrati delle variabili non sia maggiore dell'unità.

Dobbiamo allora trovare prima il valore dell' integrale multiplo $\iiint \ldots dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$, le variabili essendo supposte avere tutt' i valori d'accordo con la condizione che $x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$ non sia maggiore di $1 - x_1^2$. Si supponga dapprima che le variabili debbano avere solamente valori *positivi;* allora otteniamo il valore dell' integrale supponendo nell' Art. 271, che ciascuna delle quantità $l, m, \ldots$ sia l' unità, che ciascuna delle quantità $p, q, \ldots$ sia eguale a 2, e che ciascuna delle quantità $\alpha, \beta, \ldots$ sia eguale a $\sqrt{(1 - x_1^2)}$. Così il risultato è

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}(1 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ma se le variabili possono avere sì i valori negativi come i positivi, questo risultato deve essere moltiplicato per 2^{n-1}. Così otteniamo

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}(1 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}.$$

Quindi, finalmente, poichè i limiti di x_1 saranno -1 ed 1, l' integrale multiplo è eguale a

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}\int_{-1}^{1} f(kx_1)\,(1 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx_1.$$

Questo è d' accordo col risultato dato dal Professore Boole nel *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. III. pag. 280, come si può trovare integrando per parti la sua equazione (15).

276. Si voglia trovare il valore dell' integrale multiplo

$$\iiint \ldots \frac{f(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2)}}\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

l' integrale essendo preso in modo da dare alle variabili *tutt'i* valori d'accordo con la condizione che $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ non sia maggiore dell'unità.

Come nell'articolo precedente l'integrale si può trasformare in

$$\iiint \ldots \frac{f(kx_1)}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2)}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

S'integri prima rispetto alle variabili $x_2, x_3, \ldots x_n$, i limiti essendo dati dalla condizione che $x_2^2 + x_3^2 \ldots + x_n^2$ non sia maggiore di $1 - x_1^2$. Ora se le variabili fossero ristrette ai valori positivi, l'integrale

$$\iiint \ldots \frac{dx_2 dx_3 \ldots dx_n}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2)}}$$

per l'Art. 274 sarebbe eguale ad

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{1-x_1^2} (1 - x_1^2 - h)^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{n-1}{2}-1} dh,$$

cioè, ad

$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - x_1^2)^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad \text{(Art. 269)},$$

cioè, ad
$$\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1 - x_1^2)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Ma se le variabili possono avere sì i valori negativi come i positivi, questo risultato deve essere moltiplicato per 2^{n-1}. Così otteniamo

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1 - x_1^2)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Quindi finalmente, poichè i limiti di x_1 sono -1 ed 1, l'integrale multiplo è eguale a

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-1}^{1} f(kx_1)\,(1-x_1^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx_1.$$

277. Diversi metodi sono stati usati per esibire in termini semplici un valore approssimato di $\Gamma(n+1)$ quando n è molto grande: ne diamo uno di essi.

Il prodotto $e^{-x}x^n$ svanisce quando $x=0$ e quando $x=\infty$; e si può mostrare che esso ha solamente un valore massimo, cioè quando $x=n$. Possiamo per conseguenza supporre

$$e^{-x}x^n = e^{-n}n^n e^{-t^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

in cui t è una variabile che deve essere compresa tra i limiti $-\infty$ e $+\infty$.

Così $$\int_0^{\infty} e^{-x}x^n\,dx = e^{-n}n^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt \ldots\ldots (2).$$

Si prendano i logaritmi dei due membri di (1); così

$$x - n\log x = n - n\log n + t^2 \ldots\ldots\ldots (3);$$

si ponga $x = n + u$; così

$$u - n\log(n+u) = t^2 - n\log n \ldots\ldots\ldots (4).$$

Ma pel Teorema di Taylor

$$\log(n+u) = \log n + \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2(n+\theta u)^2},$$

in cui θ è una frazione propria; così (4) diviene

$$\frac{nu^2}{2(n+\theta u)^2} = t^2;$$

onde $$\frac{\sqrt{(n)}\,u}{\sqrt{(2)}\,(n+\theta u)} = t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

quindi $$u = \frac{\sqrt{(2)}\,nt}{\sqrt{(n)} - \theta t\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Ma da (3) $$\frac{dx}{dt} = \frac{2xt}{x-n} = 2t + \frac{2nt}{u}$$

$$= \sqrt{(2n)} + 2(1-\theta)\,t, \qquad \text{per (6)}.$$

Quindi (2) diviene

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = e^{-n}n^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\left\{\sqrt{(2n)} + 2(1-\theta)\,t\right\}dt;$$

ed $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{(\pi)}$; così

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = e^{-n}n^n\sqrt{(2n\pi)}\left\{1 + \frac{2}{\sqrt{(2n\pi)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(1-\theta)\,t\,dt\right\} (7).$$

Ma poichè $1-\theta$ è positiva e minore dell'unità, il valore numerico di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(1-\theta)\,t\,dt$ è minore di $\int_0^\infty e^{-t^2}\,t\,dt$, cioè, minore di $\frac{1}{2}$. Quindi conchiudiamo da (7) che quando n cresce indefinitamente, il rapporto di $\Gamma(n+1)$ ad $e^{-n}n^n\sqrt{(2n\pi)}$ si avvicina all'unità come suo limite.

Possiamo osservare che nell'equazione originale (1) abbiamo t^2 e non t; quindi il segno di t è in nostro potere, e noi lo scegliamo in modo che l'equazione (5) possa sussistere, supponendo $\sqrt{n}$ e $\sqrt{2}$ entrambi positivi.

(Si vegga il *Journal de Mathématiques* di Liouville, Vol. x. p. 464, e Vol. xvii. p. 448.)

Integrali definiti ottenuti differenziando o integrando rispetto a costanti.

278. Daremo ora alcuni esempii nei quali gl'integrali definiti si ottengono per mezzo della differenziazione rispetto ad una costante. (Si vegga Art. 213.)

Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2rx\,dx$. Si chiami u l'integrale definito; allora

$$\frac{du}{dr} = -2\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen} 2rx\,dx.$$

S'integri per parti il termine a dritta; così troviamo

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2ru}{a^2};$$

onde
$$\frac{d\log u}{dr} = -\frac{2r}{a^2};$$

quindi
$$\log u = -\frac{r^2}{a^2} + \text{costante},$$

quindi
$$u = Ae^{-\frac{r^2}{a^2}},$$

in cui A è una quantità che è costante rispetto ad r, cioè, non contiene r. Per determinare A possiamo supporre $r=0$; così u diviene $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx$, cioè, $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$, (Art. 268). Quindi $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$, ed

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2rx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{r^2}{a^2}}.$$

279. Abbiamo stabilito nell'Art. 214, che quando uno dei limiti dell'integrazione è *infinito* il procedimento di differenziazione rispetto ad una costante *può* essere pericoloso; nel caso attuale però è facile di giustificarlo; dobbiamo mostrare che $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\rho\,dx$ svanisce quando ρ è ultimamente indefinitamente piccolo; è chiaro che questa quantità è numericamente minore di $\rho_1\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx$ in cui ρ_1 è il più grande valore di ρ, cioè, minore di $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\rho_1$; ma questo svanisce con ρ_1. Simili considerazioni si applicano ai casi seguenti.

280. Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\operatorname{sen} rx\,dx}{x}$. Dinotandolo con u, allora

$$\frac{du}{dr}=\int_0^\infty e^{-kx}\cos rx\,dx.$$

Ma $$\int e^{-kx}\cos rx\,dx=e^{-kx}\frac{r\operatorname{sen} rx-k\cos rx}{k^2+r^2};$$

quindi $$\int_0^\infty e^{-kx}\cos rx\,dx=\frac{k}{k^2+r^2};$$

così $$\frac{du}{dr}=\frac{k}{k^2+r^2};$$

quindi $$u=\tan^{-1}\frac{r}{k}.$$

Non si richiede alcuna costante poichè u svanisce con r. Questo risultato vale per ogni valore positivo di k; se supponiamo che k diminuisca senza limite, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

se r è positivo; se r è negativo il risultato sarà $-\frac{\pi}{2}$.

281. Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$. Dinotandolo con u, allora

$$\frac{du}{da}=-2a\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2};$$

si ponga $x=\frac{a}{z}$, allora i limiti di z sono ∞ e 0; ed otteniamo

$$\frac{du}{da}=-2u;$$

onde
$$\frac{d \log u}{da} = -2;$$

quindi
$$\log u = -2a + \text{costante};$$

quindi
$$u = Ae^{-2a}.$$

Per determinare A possiamo supporre $a=0$; allora $u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; onde $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; così

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

282. Possiamo applicare ancora il principio dell'*integrazione* rispetto ad una costante per determinare alcuni integrali definiti; il principio può essere stabilito così.

Sia
$$u = \int_a^b \varphi(x, c)\, dx,$$

allora
$$\int_\alpha^\beta u\,dc = \int_\alpha^\beta \int_a^b \varphi(x, c)\, dc\, dx$$
$$= \int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x, c)\, dx\, dc;$$

poichè quando i limiti sono costanti, l'ordine dell'integrazione è indifferente (Art. 62). Daremo ora alcuni esempii di questo metodo.

283. Sappiamo che $\int_0^\infty e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k}$.

S'integrino i due lati rispetto a k tra i limiti a e b; così

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log \frac{b}{a}.$$

Si noti che $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\, dx}{x}$ ed $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\, dx}{x}$ sono tutti e due infiniti; poichè $\int_0^c \frac{e^{-ax}\, dx}{x}$ è maggiore di $e^{-ca}\int_0^c \frac{dx}{x}$, ed $\int_0^c \frac{dx}{x}$

è infinito. Ma ciò può stare con l'asserzione che $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{x} dx$ è finito, e senza trovare il valore di questo integrale è facile mostrare che esso deve essere finito. Infatti esso è eguale alla somma di $\int_0^c \frac{\varphi(x)\,dx}{x}$ ed $\int_c^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{x}$ in cui $\varphi(x) = e^{-ax} - e^{-bx}$; il secondo di questi integrali è finito, poichè esso è minore di $\frac{1}{c}\int_c^\infty \varphi(x)\,dx$, cioè, minore di $\frac{1}{c}\left(\frac{e^{-ac}}{a} - \frac{e^{-bc}}{b}\right)$. Dobbiamo quindi esaminare solamente $\int_0^c \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

Ora pel Teorema di Maclaurin

$$\varphi(x) = (b-a)\,x + \frac{x^2}{2}\varphi''(x\theta),$$

in cui θ è una frazione; così $\frac{\varphi(x)}{x}$ è minore di $b-a+\frac{Ax}{2}$, in cui A è il più gran valore che può prendere $\varphi''(x)$ per i valori di x minori di c. Quindi

$$\int_0^c \frac{\varphi(x)}{x} dx \text{ è minore di } (b-a)\,c + \frac{Ac^2}{4},$$

ed è per conseguenza finito.

284. Sappiamo che

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos rx\, dx = \frac{k}{k^2+r^2}.$$

S'integrino i due lati rispetto a k tra i limiti a e b; così

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \cos rx\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}.$$

285. Si dinoti $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{x} dx$ con A, ed $\int_0 \frac{\cos rx}{1+x^2} dx$ con B; determineremo ora i valori di A e B; il primo è stato già determinato con un altro metodo nell'Art. 280.

Nell'integrale A si ponga y per rx; così

$$A = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y \, dy}{y};$$

ciò mostra che A è indipendente da r.

Abbiamo $$\frac{dB}{dr} = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx \, dx}{1+x^2},$$

ed $$\int_0^r B dr = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx \, dx}{x(1+x^2)};$$

così $$\int_0^r B dr - \frac{dB}{dr} = \int_0^\infty \frac{1+x^2}{x} \frac{\operatorname{sen} rx}{1+x^2} dx = A;$$

quindi $$\int_0^r B dr - \frac{dB}{dr} - A = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Si moltiplichi per e^{-r} e s'integri; otteniamo poichè A è costante rispetto ad r

$$e^{-r}\left\{\int_0^r B dr + B - A\right\} = \text{costante}.$$

Ora qualunque sia il valore di r, è chiaro che gl'integrali rappresentati da A, B, ed $\int_0^r B dr$ sono *finiti*; quindi la costante nell'ultima equazione deve essere zero, poichè il primo membro svanisce quando r è infinito.

Così $$\int_0^r B dr + B - A = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da (1) e (2) $$\frac{dB}{dr} = -B;$$

quindi $$B = Ce^{-r},$$

in cui C è una costante. E da (2)

$$A = Ce^{-r} - C(e^{-r} - 1) = C;$$

quindi $$B = Ae^{-r} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora quando r diminuisce indefinitamente, B diviene $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, cioè, $\frac{\pi}{2}$; quindi da (3)

$$A = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{\pi}{2} e^{-r}.$$

Abbiamo supposto r positivo; è chiaro che se r è negativo, B ha lo stesso valore come se r fosse positivo, ed A ha il segno mutato; cioè, se r è negativo $B = \frac{\pi}{2} e^{r}$ ed $A = -\frac{\pi}{2}$. (*Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. XIX. p. 227.)

Da $\int_0^\infty \frac{\cos rx\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-r}$, otteniamo con la differenziazione rispetto ad r,

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-r}.$$

E dallo stesso integrale integrando rispetto ad r tra i limiti 0 e c, abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} cx\, dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-c}).$$

286. L'articolo precedente contiene una rigorosa investigazione dei valori degl'integrali A e B; un altro metodo è stato dato alle volte per trovare il valore di B che è più semplice ma molto meno soddisfacente. Non di meno daremo ora questo metodo, poichè ci condurrà a notare un punto importante.

Sia $$B = \int_0^\infty \frac{\cos rx}{1+x^2}\, dx,$$

allora $$\frac{dB}{dr} = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx,$$

e $$\frac{d^2B}{dr^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2 \cos rx}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\int_0^\infty \cos rx\, dx + \int_0^\infty \frac{\cos rx}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\int_0^\infty \cos rx\, dx + B.$$

Ora per ragioni che fra poco esamineremo, *supponiamo* che $\int_0^\infty \cos rx\, dx = 0$; così

$$\frac{d^2B}{dr^2} = B\,,$$

e dobbiamo trovare B da questa equazione. Si moltiplichino i due lati per $2\frac{dB}{dr}$ e s'integri rispetto ad r; così

$$\left(\frac{dB}{dr}\right)^2 = h + B^2\,;$$

in cui h è una costante, cioè, h è indipendente da r. Così

$$\frac{dB}{dr} = \sqrt{(h+B^2)}\,,$$

onde $$\frac{dr}{dB} = \frac{1}{\sqrt{(h+B^2)}}\,;$$

integrando abbiamo

$$r + k = \int \frac{dB}{\sqrt{(h+B^2)}} = \log\{B + \sqrt{(h+B^2)}\}\,,$$

in cui k è un'altra costante.

Così $$e^{r+k} = B + \sqrt{(h+B^2)}\,,$$

Trasponendo, elevando a quadrato, e riducendo otteniamo finalmente

$$B = C_1 e^r + C_2 e^{-r}\,,$$

in cui C_1 e C_2 sono costanti. Dobbiamo ora determinare i valori di queste costanti. Poichè B non può crescere indefinitamente con r dobbiamo avere $C_1 = 0$; ed allora poichè $B = \frac{\pi}{2}$ quando $r = 0$ abbiamo $C_2 = \frac{\pi}{2}$. Così

$$B = \frac{\pi}{2} e^{-r} .$$

Procediamo ora a considerare la supposizione fatta nel metodo precedente.

Poichè $$\int e^{-ax} \operatorname{sen} rx \, dx = - e^{-ax} \frac{a \operatorname{sen} rx + r \cos rx}{a^2 + r^2},$$

ed $$\int e^{-ax} \cos rx \, dx = e^{-ax} \frac{r \operatorname{sen} rx - a \cos rx}{a^2 + r^2}$$

abbiamo $$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} rx \, dx = \frac{r}{a^2 + r^2},$$

ed $$\int_0^\infty e^{-ax} \cos rx \, dx = \frac{a}{a^2 + r^2},$$

se a *è una quantità positiva.*

Se fosse concesso di supporre $a = 0$ otterremmo

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} rx \, dx = \frac{1}{r}, \text{ ed } \int_0^\infty \cos rx \, dx = 0.$$

Poichè $\int \operatorname{sen} rx \, dx = - \frac{\cos rx}{r}$, ed $\int \cos rx \, dx = \frac{\operatorname{sen} rx}{r}$ siamo così condotti apparentemente alla conclusione che *il seno ed il coseno di un angolo infinito sono entrambi zero.* La stessa conclusione sembra essere suggerita in altri casi, sicchè si è stabilito, che « i simboli indeterminati $\operatorname{sen} \infty$ e $\cos \infty$ si trovano in innumerevoli casi rappresentare entrambi 0, il valore medio sì di $\operatorname{sen} x$ che di $\cos x$. »

Su questo punto però vi è diversità di opinione tra i matematici, e la discussione su di ciò sarebbe inadatta in un'opera elementare; lo studente può consultare in appresso tre memorie nell' ottavo volume delle *Cambridge Philosophical Transactions*, numerate XV, XIX, e XXXII.

Integrali definiti ottenuti con lo sviluppo.

287. Se sviluppiamo $\log\{1-ae^{x\sqrt{(-1)}}\}$ e $\log\{1-ae^{-x\sqrt{(-1)}}\}$ ed aggiungiamo, si ottiene
$\log(1-2a\cos x+a^2)$

$$=-2\left(a\cos x+\frac{a^2}{2}\cos 2x+\frac{a^3}{3}\cos 3x+\ldots\ldots\right),$$

la serie essendo convergente se a è minore dell'unità. S'integrino i due lati rispetto ad x tra i limiti 0 e π; così

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=0,\ a \text{ essendo minore di } 1.$$

Se a è maggiore di 1, poichè

$$\log(1-2a\cos x+a^2)=\log a^2+\log\left(1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right),$$

abbiamo

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=\pi\log a^2=2\pi\log a.$$

Se $a=1$ si può mostrare per l'Art. 51 che l'integrale definito è zero.

Possiamo porre il risultato nella forma seguente;

$$\int_0^\pi \log(a^2-2ac\cos x+c^2)\,dx=\pi\log k^2,$$

in cui k^2 è la più grande delle due quantità a^2 e c^2, ed è eguale a ciascuna di esse se sono eguali.

Differenziando questo risultato rispetto ad a giungiamo al risultato che costituisce l'ultimo esempio dell'Art. 50.

288. Con l'integrazione per parti abbiamo

$$\int \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx$$
$$= x\log(1-2a\cos x+a^2) - 2a\int \frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}.$$

Quindi, se a è minore di 1,

$$\int_0^\pi \frac{x\,\text{sen}\,x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2a}\log(1+a)^2,\ \text{cioè},\ \frac{\pi}{a}\log(1+a);$$

se a è maggiore di 1, il risultato è

$$\frac{\pi}{a}\log(1+a) - \frac{\pi}{a}\log a,\ \text{cioè},\ \frac{\pi}{a}\log\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

289. In simil modo abbiamo, se r è un intero,

$$\int_0^\pi \cos rx\log(1-2a\cos x+a^2)\,dx = -\frac{\pi}{r}a^r,\ \text{o}\ -\frac{\pi}{r}a^{-r},$$

secondo che a è minore o maggiore dell'unità.

290. S'integri per parti l'integrale nell'articolo precedente; così troviamo

$$\int_0^\pi \frac{\text{sen}\,x\,\text{sen}\,rx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2}a^{r-1}\quad \text{o}\quad \frac{\pi}{2}a^{-(r+1)},$$

secondo che a è minore o maggiore dell'unità.

291. Similmente dal noto sviluppo

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$$
$$= 1+2a\cos x+2a^2\cos 2x+2a^3\cos 3x+\ldots\ldots$$

in cui a è minore di 1, possiamo dedurre alcuni integrali definiti; così se r è un intero

$$\int_0^\pi \frac{\cos rx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi a^r}{1-a^2},$$

infatti ogni termine che dobbiamo integrare svanisce con i limiti assegnati, eccetto $2a^r \int_0^\pi \cos^2 rx\, dx$.

292. Trovare il valore di $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{1-2a\cos cx + a^2}$.

Il termine $\frac{1}{1-2a\cos cx + a^2}$ si può sviluppare come nell'Art. 291; allora ogni termine si può integrare con l'Art. 286, e sommare i risultati. Così otterremo

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-a^2} \frac{1+ae^{-c}}{1-ae^{-c}}.$$

293. Similmente,

$$\int_0^\infty \log(1-2a\cos cx + a^2) \frac{dx}{1+x^2} = \pi \log(1-ae^{-c}).$$

294. Si conosce ancora dalla Trigonometria che

$$\frac{\operatorname{sen} cx}{1-2a\cos cx + a^2} = \operatorname{sen} cx + a \operatorname{sen} 2cx + a^2 \operatorname{sen} 3cx + \ldots,$$

a essendo minore di 1. Quindi per l'Art. 286, otteniamo

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} cx\, dx}{(1+x^2)(1-2a\cos cx + a^2)} = \frac{\pi}{2(e^c - a)}.$$

Questo segue ancora dall'Art. 293, differenziando rispetto a c.

295. Trovare $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$.

Sviluppando $(1-x)^{-1}$, troviamo per l'integrale una serie di cui il tipo è

$$\int_0^1 x^n \log x\, dx.$$

Con l'integrazione per parti questo si vede essere eguale a $-\frac{1}{(1+n)^2}$. Quindi il risultato è

$$-\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right\},$$

cioè, per una formola conosciuta, $-\frac{\pi^2}{6}$.

296. Trovare $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1+(\cos x)^2}$.

Si sviluppi il fattore $\{1+(\cos x)^2\}^{-1}$, e troviamo per l'integrale una serie di cui il tipo è

$$(-1)^n \int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, (\cos x)^{2n}\, dx.$$

Con l'integrazione per parti questo si può mostrare essere eguale a $\frac{(-1)^n \pi}{2n+1}$.

Quindi il risultato è

$$\pi\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right\},$$

cioè, per una formola conosciuta, $\frac{\pi^2}{4}$.

297. Dinoti v $e^{x\sqrt{(-1)}}$, cioè, $\cos x+\sqrt{(-1)} \operatorname{sen} x$; allora se f dinota una funzione qualunque, abbiamo pel Teorema di Taylor,

$$f(a+v)+f(a+v^{-1}) = 2\left\{f(a)+f'(a)\cos x+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}\cos 2x+\ldots\ldots\right\}.$$

Ed

$$\frac{1-c^2}{1-2c\cos x+c^2}=1+2c\cos x+2c^2\cos 2x+2c^3\cos 3x+\ldots$$

Quindi

$$\int_0^\pi \frac{f(a+v)+f(a+v^{-1})}{1-2c\cos x+c^2}\,dx = \frac{2\pi}{1-c^2}\left\{f(a)+cf'(a)+\frac{c^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots\right\}$$

$$= \frac{2\pi}{1-c^2}f(a+c).$$

Bisogna rammentarsi che in questo risultato c deve essere minore dell'unità, e le funzioni $f(a+v)$ ed $f(a+v^{-1})$ debbono essere tali che per i loro sviluppi regga il Teorema di Taylor.

In modo simile si può mostrare che

$$\int_0^\pi \frac{f(a+v)-f(a+v^{-1})}{1-2c\cos x+c^2}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi\sqrt{(-1)}}{c}\{f(a+c)-f(a)\},$$

ed $$\int_0^\pi \frac{1-c\cos x}{1-2c\cos x+c^2}\{f(a+v)+f(a+v^{-1})\}\,dx$$

$$= \pi\{f(a+c)+f(a)\}.$$

Sostituzione di valori immaginarii per le costanti.

298. Alle volte si deducono degl'integrali definiti da integrali conosciuti sostituendo valori immaginarii per alcune delle costanti che si trovano in essi. Questo procedimento non si può considerare dimostrativo, ma servirà almeno a suggerire le forme le quali possono essere esaminate, e forse verificate con altri metodi (si vegga *Differential and Integral Calculus*, di De Morgan, p. 630). Daremo alcuni esempii di ciò.

Abbiamo $$\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}\,dx = p^{-n}\,\Gamma(n).$$

Per p si ponga $a+b\sqrt{(-1)}$, e supponiamo $r=\sqrt{(a^2+b^2)}$ e $\tan\theta=\frac{b}{a}$, sicchè $p=r\{\cos\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\theta\}$; così

$$\int_0^\infty e^{-\{a+b\sqrt{(-1)}\}x}x^{n-1}\,dx = r^{-n}\{\cos n\theta-\sqrt{(-1)}\operatorname{sen} n\theta\}\,\Gamma(n).$$

Così separando le parti reali e le immaginarie abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1} \cos bx\, dx = \frac{\Gamma(n) \cos\left(n \tan^{-1} \dfrac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\Gamma(n) \operatorname{sen}\left(n \tan^{-1} \dfrac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Per i modi di verificazione si vegga De Morgan, p. 630.

299. Nella formola

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

si muti a in $\dfrac{1+\sqrt{(-1)}}{\sqrt{2}}\, c$; così

$$\int_0^\infty e^{-c^2x^2\sqrt{(-1)}}\, dx = \frac{1-\sqrt{(-1)}}{2c} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}};$$

onde

$$\int_0^\infty \left\{ \cos c^2x^2 - \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} c^2x^2 \right\} dx = \frac{1-\sqrt{(-1)}}{2c} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}};$$

quindi
$$\int_0^\infty \cos c^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{2}},$$

ed
$$\int_0^\infty \operatorname{sen} c^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{2}},$$

Se scriviamo y per c^2x^2, questi divengono

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y\, dy}{\sqrt{y}} = \int_0^\infty \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

300. Nell' integrale $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)k}\,dx$, si supponga $y=x\sqrt{k}$; così l' integrale diviene $\frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-\left(y^2+\frac{k^2a^2}{y^2}\right)}\,dy$, che è conosciuto per l'Art. 281. Così

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)k}\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2ak}.$$

Ora si ponga $\cos\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\theta$ per k; così il secondo membro diviene

$$\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a\{\cos\theta+\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\theta\}},$$

cioè,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\cos\left(2a\operatorname{sen}\theta+\frac{\theta}{2}\right)-\sqrt{(-1)}\operatorname{sen}\left(2a\operatorname{sen}\theta+\frac{\theta}{2}\right)\right\}e^{-2a\cos\theta}.$$

Così $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\cos\theta}\cos\left\{\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\operatorname{sen}\theta\right\}dx$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a\cos\theta}\cos\left(2a\operatorname{sen}\theta+\frac{\theta}{2}\right).$$

ed $\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\cos\theta}\operatorname{sen}\left\{\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\operatorname{sen}\theta\right\}dx$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a\cos\theta}\operatorname{sen}\left(2a\operatorname{sen}\theta+\frac{\theta}{2}\right).$$

ESEMPII.

1. Valutare $\int_0^\infty \frac{(x^2+a^2)\,dx}{x^4+b^2x^2+b^4}$. *Risultato.* $\frac{(a^2+b^2)\pi}{2b^3\sqrt{3}}$.

2. Valutare $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(a\tan x)\,dx$. *Risultato.* $\frac{\pi}{2}e^{-a}$.

3. Valutare $\int_0^1 x^{2n-1} e^{x^n} dx$. *Risultato.* $\frac{1}{n}$.

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{ab^3} + \frac{1}{a^3 b}\right),$$

5. Dimostrare $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\tan \varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} + \log\{\sqrt{(2)} - 1\}\right]$.

6. Dimostrare $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\cot \varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} + \log\{\sqrt{(2)} + 1\}\right]$.

7. Trovare il valore limite di $xe^{-x^2}\int_0^x e^{x^2} dx$ quando $x = \infty$.

Risultato. $\frac{1}{2}$.

8. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \log\frac{b}{a}$.

9. Se $F\left(x, \frac{1}{x}\right)$ è una funzione simmetrica di x ed $\frac{1}{x}$, allora

$$\int_0^\infty \frac{dx}{xF\left(x, \frac{1}{x}\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{xF\left(x, \frac{1}{x}\right)}.$$

10. Se $F(x)$ è un polinomio algebrico di grado inferiore ad n

$$\int_b^a \frac{F(x)\, dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{\underline{|n-1}} \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}\left\{F(c) \log\frac{a-c}{b-c}\right\}.$$

11. Dimostrare che $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi$.

12. Dimostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(1-c)}\, d\theta}{1 - c\cos^n\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{(2n)}}$ quando c è indefinitamente prossimo all'unità, n essendo una quantità positiva.

13. Valutare $\int_0^{\pi} (a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta) \log (a \cos^2 \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta)\, d\theta$.

Risultato. $2b \left\{ \log a - 2 + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}} \cos^{-1} \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right\}$,

supponendo a maggiore di b.

14. Mostrare che

$$\int_0^{\infty} \log \frac{1 + 2n \cos ax + n^2}{1 + 2n \cos bx + n^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log (1+n) \log \frac{b^2}{a^2},$$

o $\log \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \log \dfrac{b^2}{a^2}$, secondo che n è minore o maggiore dell' unità.

15. Trovare il valore di

$$\int_0^{\infty} \left\{ e^{-ax - \alpha x \sqrt{(-1)}} - e^{-bx - \beta x \sqrt{(-1)}} \right\} \frac{dx}{x},$$

in cui a e b sono positivi, ma α e β positivi o negativi; e mostrare che esso è interamente reale quando $\dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\beta}{b}$.

16. Dimostrare che $\int_0^1 \cot^{-1} (1 - x + x^2)\, dx = \dfrac{\pi}{2} - \log 2$.

17. Dimostrare che $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} \log \left(x + \dfrac{1}{x} \right) = \pi \log 2$.

18. Dal valore di $\int_0^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ dedurre quello di

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx.$$

Risultato. I due integrali sono eguali.

19. Dimostrare che $\int_0^{\infty} \left(\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx = \log \dfrac{(2a)^{2a}\,(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}$.

20. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cdot\log x}{(1+x)^2}\,dx = \pi$.

21. Mostrare che $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = (b-a)\sqrt{\pi}$.

(*Solutions of Senate-House Problems*, per O' Brien ed Ellis, p. 44.)

22. Mostrare che $\int_0^\infty \log\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$.

23. Dimostrare che $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\log x}\cdot\frac{dx}{x} = \log\frac{m}{n}$, e riconciliare con questa equazione il risultato della trasformazione dell' $\int_0^1 \frac{x^{r-1}\,dx}{\log x}$ ponendo $x^r = y$.

24. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

25. Mostrare che $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{(b+cx)^{l+m}} = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\,\frac{1}{b^m(b+c)^l}$.

26. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2l-1}\theta\,\operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,d\theta}{(a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta)^{l+m}} = \frac{\Gamma(l)\;\Gamma(m)}{2\Gamma(l+m)}\,\frac{1}{a^l b^m}$.

27. Mostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^n\theta\,d\theta}{a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}n\pi}\,\frac{1}{a^{\frac{1-n}{2}}\,b^{\frac{1+n}{2}}}$,

n essendo minore dell' unità.

28. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^{n-1}\theta\,d\theta}{(\alpha+\beta\cos\theta)^n} = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(n)}\,\frac{2^{n-1}}{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{n}{2}}}$.

29. Mostrare che $\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}}$.

30. Mostrare che $\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+cx)(1-x)^n} = \frac{\pi}{(1+c)^n \operatorname{sen} n\pi}$.

31. Mostrare che $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen}^2 cx}{x}\,dx = 0,\ \pm\frac{\pi}{4},$ o $\pm\frac{\pi}{8},$ a seconda dei valori di a e c.

32. Descrivere il luogo dell'equazione

$$y = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta x}{\theta}\,d\theta.$$

33. Descrivere il luogo dell'equazione

$$\frac{y}{b} = \int_0^\pi \log\{1 - 2e^{-u}\cos\theta + e^{-2u}\}\,d\theta,$$

in cui $u = \operatorname{sen}\frac{x}{a}$.

34. Descrivere il luogo dell'equazione

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(x^2 + 2x\operatorname{sen}\theta + 1)}},$$

in cui il segno della radice quadrata è sempre preso in modo da rendere positiva la quantità nel denominatore.

35. Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

36. Paragonare i risultati ottenuti da

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sen} ax\, e^{-xy}\,dx\,dy,$$

eseguendo le integrazioni in ordine diverso.

37. Trovare il valore di $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$, e quindi mostrare che

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}}\,dx = \frac{5a\sqrt{\pi}}{4e^2} = 5\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}}\,dx.$$

38. Mostrare che

$$\iint \frac{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

l'integrale essendo esteso su tutt'i valori positivi di x ed y che rendono x^2+y^2 non maggiore dell'unità,

39. Mostrare che

$$\iiint \cdots \frac{dx\,dy\,dz\,\ldots}{\sqrt{(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^n\,\Gamma\left\{\frac{n+1}{2}\right\}},$$

il numero delle variabili essendo n, e l'integrazione estendendosi su tutt'i valori positivi che rendono

$$x^2+y^2+x^2+\ldots\ldots$$

non maggiore dell'unità.

40. Se $\quad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots = F(x)$,

ed $\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots = f(x)$,

dimostrare che $A_0 a_0 + A_1 a_1 x^2 + A_2 a_2 x^4 + \ldots\ldots$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{F(u)+F(v)\}\{f(u)+f(v)\}\,d\theta - A_0 a_0,$$

in cui $\quad u = xe^{\theta\sqrt{(-1)}}$ e $v = xe^{-\theta\sqrt{(-1)}}$.

41. Se la somma della serie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$ si può esprimere in forma finita, allora la somma della serie $a_0^2 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + \ldots\ldots$ si può esprimere con un integrale definito. Dimostrare ciò, e quindi mostrare che la somma dei quadrati dei coefficienti dei ter-

mini dello sviluppo di $(1+x)^n$ quando n è un numero intero positivo si può esprimere con

$$\frac{2^{2n+2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \cos^2 n\theta \, d\theta - 1.$$

42. Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos cx \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{e^c}{1+\theta^{-c}} + \frac{e^{-c}}{1+\theta^c}\right\}.$$

43. Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\operatorname{sen} 2x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \cos x \, dx.$$

(*Journal de Mathématiques* di Liouville, Vol. XVIII. pag. 168.)

44. Mostrare che $$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \dots\dots$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen} y) \, dy.$$

45. Dimostrare che

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx \int_0^{\infty} y^{n-m-1} e^{-y^n} dy = \frac{\pi}{n^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$$

(Si vegga l'Art. 66; e si passi dalla variabile y ad u essendo $y = ux$.)

46. Mostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2 \cos 2\theta + \frac{a^2}{2x^2} \operatorname{sen} 2\theta\right)} \begin{matrix}\cos \\ \operatorname{sen}\end{matrix} \left\{x^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{a^2}{2x^2}\cos 2\theta\right\} dx$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} e^{-a} \begin{matrix}\cos \\ \operatorname{sen}\end{matrix} (\theta + a);$$

θ essendo compreso tra i limiti $\pm\frac{\pi}{4}$.

CAPITOLO XIII.

SVILUPPO DELLE FUNZIONI IN SERIE TRIGONOMETRICHE.

301. Il soggetto al quale c'introduciamo è una delle più importanti applicazioni del Calcolo Intégrale, e benchè in un'opera elementare come questa, non si possa dare di essa che un abbozzo imperfetto, pure a motivo della novità dei metodi, e dell'importanza dei risultati, anche un tale abbozzo può essere utile allo studente. Per più estesa informazione possiamo indicare il *Differential and Integral Calculus* del Professore de Morgan. Il soggetto si trova anche considerato spesso negli scritti di Poisson, per esempio, nel suo *Traité de Mécanique,* Vol. I. pp. 643–653; nel suo *Traité de la Chaleur*; ed in diverse Memorie nel *Journal de l'École Polytechnique.* Lo studente può anche consultare una Memoria del Professore Stokes, nell'8° Vol. delle *Cambridge Philosophical Transactions*, una Memoria del Sig. W. Hamilton, nel 19° Vol. delle *Transactions of the Royal Irish Academy*, ed una Memoria del Professore Boole, nel 21° Vol. delle stesse *Transactions.*

302. Si vogliano trovare i valori delle m costanti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$, in modo che l'espressione

$$A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} mx.$$

coincida in valore con una funzione assegnata di x quando x ha i valori $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots m\theta$, in cui $\theta = \frac{\pi}{m+1}$.

Dinoti $f(x)$ la funzione assegnata di x, allora abbiamo per ipotesi le seguenti m equazioni dalle quali si debbono determinare le costanti,

$$f(\theta)=A_1 \operatorname{sen}\theta + A_2 \operatorname{sen}2\theta + A_3 \operatorname{sen}3\theta + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} m\theta,$$

$$f(2\theta)=A_1 \operatorname{sen}2\theta + A_2 \operatorname{sen}4\theta + A_3 \operatorname{sen}6\theta + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen}2m\theta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(m\theta)=A_1 \operatorname{sen}m\theta + A_2 \operatorname{sen}2m\theta + A_3 \operatorname{sen}3m\theta + \ldots\ldots + A_m \operatorname{sen} mm\theta.$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per $\operatorname{sen} r\theta$, la seconda per $\operatorname{sen} 2r\theta, \ldots.$, l'ultima per $\operatorname{sen} mr\theta$; indi si addizionino i risultati. Il coefficiente di A_s nel secondo membro sarà allora

$$\operatorname{sen} r\theta \operatorname{sen} s\theta + \operatorname{sen} 2r\theta \operatorname{sen} 2s\theta + \ldots\ldots + \operatorname{sen} mr\theta \operatorname{sen} ms\theta;$$

mostreremo ora che questo coefficiente è zero se s è diverso da r, ed eguale ad $\frac{1}{2}(m+1)$ quando s è eguale ad r.

Supponiamo prima s diverso da r. Ora due volte il suddetto coefficiente è eguale alla serie

$$\cos(r-s)\theta + \cos 2(r-s)\theta + \ldots\ldots + \cos m(r-s)\theta,$$

diminuita della serie

$$\cos(r+s)\theta + \cos 2(r+s)\theta + \ldots\ldots + \cos m(r+s)\theta.$$

La somma della prima serie si sa per la Trigonometria essere eguale a

$$\frac{\operatorname{sen}(2m+1)\dfrac{(r-s)\theta}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{(r-s)\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{(r-s)\theta}{2}},$$

cioè, a
$$\frac{\operatorname{sen}\left\{(r-s)\pi - \dfrac{(r-s)\theta}{2}\right\} - \operatorname{sen}\dfrac{(r-s)\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{(r-s)\theta}{2}}.$$

Questa espressione svanisce quando $r-s$ è un numero dispari, ed è eguale a -1 quando $r-s$ è un numero pari.

La somma della seconda serie si può dedurre da quella della prima cambiando il segno di s; quindi questa somma svanisce quando $r+s$ è un numero dispari, ed è eguale a -1 quando $r+s$ è un numero pari.

Così quando s è diverso da r, il coefficiente di A_s è zero.

Quando s è eguale ad r, il coefficiente diventa

$$\operatorname{sen}^2 r\theta + \operatorname{sen}^2 2r\theta + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^2 mr\theta,$$

cioè, $$\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\{\cos 2r\theta + \cos 4r\theta + \ldots\ldots + \cos 2mr\theta\}.$$

E col metodo già adoperato si vedrà che la somma della serie de' coseni è -1; così il coefficiente di A_r è $\frac{1}{2}(m+1)$. Quindi otteniamo

$$A_r = \frac{2}{m+1}\{\operatorname{sen} r\theta f(\theta) + \operatorname{sen} 2r\theta f(2\theta) + \ldots\ldots + \operatorname{sen} mr\theta f(m\theta)\},$$

e così dando ad r successivamente i diversi valori interi da 1 ad m, le costanti sono determinate.

Ora supponiamo che m cresca indefinitamente, allora abbiamo ultimamente

$$A_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} rv f(v)\, dv.$$

E siccome $f(x)$ coincide ora in valore con l'espressione

$$A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots$$

per un numero infinito di valori equidistanti di x tra 0 e π, possiamo scrivere il risultato nel seguente modo

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma_1^\infty \operatorname{sen} nx \int_0^\pi \operatorname{sen} nv f(v)\, dv,$$

in cui il simbolo Σ_1^∞ indica una sommazione da ottenersi dando ad n ogni valore intero positivo.

303. Il teorema e la dimostrazione dell'articolo precedente si debbono a Lagrange; abbiamo dato questa dimostrazione

in parte pel suo interesse istorico, ed in parte perchè fornisce una veduta instruttiva del soggetto. Non ci fermeremo però ad esaminare da vicino la dimostrazione, ma procediamo immediatamente al modo d'investigazione adottato da Poisson.

304. Il seguente sviluppo si può ottenere con gli ordinarii metodi Trigonometrici,

$$\frac{1-h^2}{1-2h\cos\frac{\pi(v-x)}{l}+h^2}=1+2h\cos\frac{\pi(v-x)}{l}$$

$$+2h^2\cos\frac{2\pi(v-x)}{l}+2h^3\cos\frac{3\pi(v-x)}{l}+\ldots,$$

h essendo minore dell'unità, sicchè la serie è convergente.

Si moltiplichino i due membri per $\varphi(v)$, e s'integrino rispetto a v tra i limiti $-l$ ed l; inoltre si faccia avvicinare h all'unità come suo limite. Nel secondo membro le diverse potenze di h diventano ultimamente l'unità. Il numeratore della frazione nel primo membro svanirà ultimamente, e così l'integrale svanirebbe *se il denominatore della frazione non fosse mai zero*. Ma *se x giace tra $-l$ ed l*, il termine $\cos\frac{\pi(v-x)}{l}$ diverrà eguale all'unità durante l'integrazione, e così il denominatore della frazione sarà $(1-h)^2$, e tenderà verso zero quando h si avvicina all'unità. Così l'integrale non svanirà necessariamente; procediamo a determinarne il valore. Sia $v-x=z$ ed $h=1-g$, così

$$\int\frac{(1-h^2)\,\varphi(v)\,dv}{1-2h\cos\frac{\pi(v-x)}{l}+h^2}=\int\frac{g\,(1+h)\,\varphi(x+z)\,dz}{g^2+4h\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi z}{2l}}.$$

Ora la sola parte dell'integrale che ha un valore sensibile, è quella che nasce da valori molto piccoli positivi o negativi di z; così possiamo porre

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{2l}=\frac{\pi z}{2l},$$

e

$$\varphi(x+z)=\varphi(x);$$

e l'integrale diviene

$$g\,(1+h)\,\varphi\,(x)\int\frac{dz}{g^2+\dfrac{h\pi^2z^2}{l^2}}=2g\,\varphi\,(x)\int\frac{dz}{g^2+\dfrac{\pi^2\,z^2}{l^2}}$$
$$=\frac{2l\,\varphi\,(x)}{\pi}\tan^{-1}\frac{\pi z}{gl}.$$

Supponiamo α e $-\beta$ essere i limiti di z; otteniamo così

$$\frac{2l\varphi(x)}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{\pi\alpha}{gl}+\tan^{-1}\frac{\pi\beta}{gl}\right\}.$$

Quindi, finalmente, supponendo che g svanisca, abbiamo $2l\varphi(x)$. Così se x giace tra $-l$ ed l,

$$\varphi\,(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi\,(v)\,dv+\frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty\int_{-l}^{l}\varphi\,(v)\cos\frac{n\pi\,(v-x)}{l}\,dv.$$

Se però $x=l$ o $-l$, allora l'integrale nel primo membro ha la sua parte sensibile quando v è indefinitamente vicino ad l o a $-l$; dovremmo allora eseguire il procedimento precedente per tutti e due i casi, ma l'integrale rispetto a z si estenderebbe solamente nel primo caso da $-\beta$ a 0, e nel secondo da 0 ad α. Quindi invece di $2l\varphi(l)$ nel primo membro, avremmo

$$l\varphi\,(l)+l\varphi\,(-l).$$

Così abbiamo determinato il valore del secondo membro quando x giace tra l e $-l$, l'uno e l'altro inclusivamente; il suo valore negli altri casi sarà determinato nell'Art. 311.

305. Nello stesso modo che si è trovato il risultato nell'Art. 304, abbiamo, se s'integra tra 0 ed l,

$$\varphi\,(x)=\frac{1}{2l}\int_0^l\varphi\,(v)\,dv+\frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty\int_0^l\varphi\,(v)\cos\frac{n\pi\,(v-x)}{l}\,dv\;\ldots(1);$$

ciò vale se x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\,\varphi\,(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\,\varphi\,(l)$. Così abbiamo determinato il valore del secondo membro quando x giace tra l e $-l$, l'uno e l'altro inclusivamente; il suo valore negli altri casi sarà determinato nell'Art. 311.

Similmente

$$0=\frac{1}{2l}\int_0^l \varphi(v)\,dv+\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi(v+x)}{l}\,dv\,\ldots\ldots\ldots(2);$$

questo vale per ogni valore di x tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$.

Da (1) e (2) con l'addizione

$$\varphi(x)=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(v)\,dv+\frac{2}{l}\Sigma_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\cos\frac{n\pi v}{l}\varphi(v)\,dv\,\ldots(3).$$

Ciò vale per ogni valore di x tra 0 ed l, l'uno e l'altro inclusivamente.

Da (1) e (2) con la sottrazione

$$\varphi(x)=\frac{2}{l}\Sigma_1^\infty\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\operatorname{sen}\frac{n\pi v}{l}\varphi(v)\,dv\,\ldots\ldots(4).$$

Questo vale per ogni valore di x tra 0 ed l, l'uno e l'altro esclusivamente; e quando $x=0$ o l, il primo membro sarebbe zero.

L'equazione (4) coincide con la Formola di Lagrange.

Possiamo osservare che ciascuna delle formole (3) e (4) si può dedurre dall'altra. Supponiamo che si prenda (3) e si scriva $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\varphi(x)$ invece di $\varphi(x)$. Così

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\varphi(x)=\frac{1}{l}\int_0^l\operatorname{sen}\frac{\pi v}{l}\varphi(v)\,dv$$
$$+\frac{2}{l}\Sigma_1^\infty\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^l\cos\frac{n\pi v}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi v}{l}\varphi(v)\,dv.$$

Ora $\cos\frac{n\pi v}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi v}{l}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi v}{l}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi v}{l}$; e quindi si troverà che il risultato si può esibire nel seguente modo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\varphi(x)=$$

$$\frac{1}{l}\Sigma_1^\infty\left\{\cos\frac{(n-1)\pi x}{l}-\cos\frac{(n+1)\pi x}{l}\right\}\int_0^l \operatorname{sen}\frac{n\pi v}{l}\varphi(v)\,dv;$$

ancora $\cos\dfrac{(n-1)\pi x}{l}-\cos\dfrac{(n+1)\pi x}{l}=2\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{l}$;

e quindi con la divisione per $\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{l}$ otteniamo la formola (4).

Daremo ora alcuni esempii.

306. Sviluppare x in una serie di seni. Si prenda la formola (4) dell'Art. 305, e si supponga $l=\pi$; allora

$$\int v\operatorname{sen} nv\,dv=-\frac{v\cos nv}{n}+\frac{\operatorname{sen} nv}{n^2};$$

onde $\displaystyle\int_0^\pi v\operatorname{sen} nv\,dv=\frac{\pi}{n}$ se n è dispari, e $-\dfrac{\pi}{n}$ se n è pari.

Così

$$x=2\left\{\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x+\ldots\ldots\right\}.$$

Questo risultato vale per i valori di x tra 0 e π, e siccome i due membri svaniscono con x esso vale quando $x=0$; ed è chiaro che se esso vale per un valore positivo di x vale ancora per il corrispondente valore negativo; quindi esso vale per i valori di x tra $-\pi$ e π, eccettuati questi valori limiti.

307. Sviluppare $\cos x$ in una serie di seni. Si prenda la formola (4) dell'Art. 205 e si supponga $l=\pi$; allora

$$\int\cos v\operatorname{sen} nv\,dv=\frac{1}{2}\int\{\operatorname{sen}(n+1)v+\operatorname{sen}(n-1)v\}\,dv$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(n+1)v}{n+1}+\frac{\cos(n-1)v}{n-1}\right\};$$

onde $$\int_0^\pi \cos v \operatorname{sen} nv\, dv = 0 \text{ se } n \text{ è dispari},$$
$$= \frac{2n}{n^2-1} \text{ se } n \text{ è pari};$$

quindi

$$\cos x = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{4}{3}\operatorname{sen} 2x + \frac{8}{15}\operatorname{sen} 4x + \ldots + \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\, n \operatorname{sen} nx + \ldots\right\}.$$

Ciò vale da $x=0$ ad $x=\pi$, esclusi questi valori limiti.

308. Sviluppare x in una serie di coseni.

Si prenda la formola (3) dell'Art. 305, e si supponga $l=\pi$; allora

$$\int v \cos nv\, dv = \frac{v \operatorname{sen} nv}{n} + \frac{\cos nv}{n^2};$$

quindi $\int_0^\pi v \cos nv\, dv = 0$ se n è pari, e $-\frac{2}{n^2}$ se n è dispari; ed

$$\int_0^\pi v\, dv = \frac{\pi^2}{2},$$

così $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right\}.$$

Ciò vale da $x=0$ ad $x=\pi$ l'uno e l'altro inclusivamente.

Se poniamo $x = \frac{\pi}{2} - y$, si ottiene la formola seguente, la quale vale per ogni valore di y tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, l'uno e l'altro inclusivamente,

$$y = \frac{4}{\pi}\left\{\operatorname{sen} y - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3y + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5y - \ldots\right\}.$$

309. Sviluppare $e^{ax} - e^{-ax}$ in una serie di seni.

Qui $$\int_0^\pi (e^{av} - e^{-av}) \operatorname{sen} nv\, dv = -\frac{n\,(e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{a^2+n^2}\cos n\pi.$$

Quindi $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1^2+a^2}-\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{2^2+a^2}+\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{3^2+a^2}-\ldots\ldots$

310. Sviluppare $e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}$ in una serie di coseni.

Quì $\displaystyle\int_0^\pi \left\{ e^{a(\pi-v)}+e^{-a(\pi-v)} \right\} \cos nv\, dv=\frac{a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{a^2+n^2}$,

ed $\displaystyle\int_0^\pi \left\{ e^{a(\pi-v)}+e^{-a(\pi-v)} \right\} dv=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a}.$

Onde $\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{e^{a(\pi-x)}+e^{-a(\pi-x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{\cos x}{1^2+a^2}+\dfrac{\cos 2x}{2^2+a^2}+\ldots\ldots$

311. Abbiamo mostrato che la formola (3) dell'Art. 305 vale per ogni valore di x tra 0 ed l l'uno e l'altro inclusivamente; è facile determinare a che sia eguale il secondo membro quando x cade fuori di questi limiti. Si supponga x positivo, e tra l e $2l$; si ponga $x=2l-x'$ sicchè x' è minore di l, allora

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\cos\left(2n\pi-\frac{n\pi x'}{l}\right)=\cos\frac{n\pi x'}{l};$$

quindi il valore del secondo membro è $\varphi(x')$. In seguito supponiamo x maggiore di $2l$; e supponiamolo eguale a $2ml+x'$, in cui x' è minore di $2l$; allora

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\cos\frac{n\pi x'}{l},$$

sicchè il valore è lo stesso che si avrebbe ponendo x' in vece di x; cioè, il valore è $\varphi(x')$ se x' è minore di l, e $\varphi(2l-x')$ se x' è maggiore di l.

È chiaro che per un valore negativo qualunque di x il valore è lo stesso che per il corrispondente valore positivo.

Similmente possiamo mostrare che se x è positivo ed $=2ml+x'$, il valore del secondo membro dell'equazione (4) dell'Art. 305 è lo stesso come se x' si ponesse in vece di x, ed è $\varphi(x')$ se x' è minore di l, e $-\varphi(2l-x')$ se x' è maggiore di l. E per valori negativi di x il valore è lo stesso numericamente come per il corrispondente valore positivo, ma con un segno opposto.

312. Si può osservare che nella dimostrazione fondamentale dell'Art. 304, supponiamo che quando h si avvicina all'unità come limite, l'espressione

$$\int h^n \varphi(v) \cos \frac{n\pi(v-x)}{l} dv$$

possa essere rimpiazzata da

$$\int \varphi(v) \cos \frac{n\pi(v-x)}{l} dv,$$

comunque grande sia n. Possiamo mostrare che non si commette errore con questa supposizione, dimostrando che l'ultimo integrale svanisce quando n cresce indefinitamente. Abbiamo

$$\int \varphi(v) \cos \frac{n\pi(v-x)}{l} dv = \frac{l\varphi(v)}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(v-x)}{l}$$
$$- \frac{l}{\pi n}\int \varphi'(v) \operatorname{sen} \frac{n\pi(v-x)}{l} dv,$$

il che mostra che l'integrale nel primo membro svanirà quando n è infinito, almeno se $\varphi'(v)$ non è infinito.

313. Non abbiamo ancora fatto allusione ad uno dei punti più osservabili in relazione con le formole (3) e (4) dell'Art. 305. In queste formole $\varphi(x)$ non è necessario che sia una *funzione continua;* per esempio, da $x=0$ ad $x=a$ possiamo avere $\varphi(x)=f_1(x)$, indi da $x=a$ ad $x=b$ possiamo avere $\varphi(x)=f_2(x)$, poscia da $x=b$ ad $x=c$ possiamo avere $\varphi(x)=f_3(x)$, quindi da $x=c$ ad $x=l$ possiamo avere $\varphi(x)=f_4(x)$. La formola (3) per esempio sarebbe sempre vera per tutti i valori di x tra 0 ed l inclusivamente, come è evidente dal modo della dimostrazione, *eccetto* per i valori nei quali ha luogo la discontinuità. Quando per esempio $x=a$, allora il valore del secondo membro non sarebbe $f_1(a)$ o $f_2(a)$ ma $\frac{1}{2}\{f_1(a)+f_2(a)\}$. Quindi se per $x=a$ abbiamo $f_1(x)=f_2(x)$, la formola vale anche quando $x=a$.

314. Trovare un'espressione che sia eguale a c quando x cade tra 0 ed a, ed eguale a zero quando x cade tra a ed l.

Si prenda la formola (3) dell'Art. 305. Quì $\varphi(v) = c$ da $v = 0$ a $v = a$, e poi è zero da $v = a$ a $v = l$; così

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi v}{l} \varphi(v)\, dv$$

diviene
$$c\int_0^a \cos \frac{n\pi v}{l}\, dv = \frac{cl}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{l},$$

quindi l'espressione richiesta è

$$\frac{ca}{l} + \frac{2c}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi a}{l} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right\};$$

questa darà $\frac{1}{2}c$ quando $x = a$.

O pure possiamo usare la formola (4) dell'Art. 305. Allora

$$c\int_0^a \operatorname{sen} \frac{nv\pi}{l}\, dv = \frac{cl}{n\pi}\left(1 - \cos \frac{na\pi}{l}\right),$$

ed abbiamo per l'espressione richiesta

$$\frac{2c}{\pi} \left\{ \operatorname{vers} \frac{\pi a}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2} \operatorname{vers} \frac{2\pi a}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \operatorname{vers} \frac{3\pi a}{l} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} + \dots\dots \right\};$$

questa dà 0 quando $x = 0$, ed $\frac{1}{2}c$ quando $x = a$.

315. Trovare un'espressione che sia eguale a kx da $x = 0$ ad $x = \frac{l}{2}$, ed eguale a $k(l - x)$ da $x = \frac{l}{2}$ ad $x = l$.

Quì

$$\int_0^l \varphi(v) \cos \frac{n\pi v}{l}\, dv = \int_0^{\frac{l}{2}} kv \cos \frac{n\pi v}{l}\, dv + \int_{\frac{l}{2}}^l k(l - v) \cos \frac{n\pi v}{l}\, dv$$

$$= \frac{kl^2}{\pi}\left\{\frac{1}{2n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2\pi}\right\} + \frac{kl^2}{n\pi}\left(\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$- \frac{kl^2}{\pi}\left\{\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi - \frac{1}{2n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{\cos n\pi}{n^2\pi} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi}\right\}$$

$$= \frac{kl^2}{\pi^2 n^2}\left\{2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right\}.$$

Questo è $-\frac{4kl^2}{\pi^2 n^2}$ quando n è della forma $4r+2$, e 0 in ogni altro caso, ed

$$\int_0^l \varphi(v)\,dv = k\int_0^{\frac{l}{2}} v\,dv + k\int_{\frac{l}{2}}^l (l-v)\,dv = \frac{kl^2}{4};$$

così l'espressione richiesta è

$$\frac{kl}{4} - \frac{8kl}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{l} + \dots\right\}.$$

Se dinotiamo questa con y, allora da $x=0$ ad $x=\frac{1}{2}l$ l'uno e l'altro inclusivamente $y=kx$, indi da $x=\frac{1}{2}l$ ad $x=l$ l'uno e l'altro inclusivamente $y=k(l-x)$; per valori di x maggiori di l i valori di y ricorrono come si è mostrato nell'Art. 311. Così il valore di y è l'ordinata della figura formata misurando dall'origine lunghezze eguali lungo l'asse delle x a dritta e a sinistra, e descrivendo su ciascuna base così ottenuta lo stesso triangolo isoscele.

Come un altro esempio possiamo proporre il seguente: trovare una funzione $\varphi(x)$ che sia eguale ad x da $x=0$ ad $x=\alpha$, indi eguale ad α da $x=\alpha$ ad $x=\pi-\alpha$, e poscia eguale a $\pi-x$ da $x=\pi-\alpha$ ad $x=\pi$.

Il risultato è

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}x + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}3\alpha\operatorname{sen}3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}5\alpha\operatorname{sen}5x + \dots\right\};$$

questo è vero da $x=0$ ad $x=\pi$ l'uno e l'altro inclusivamente.

Lo studente può verificare gli esempii seguenti.

Se x è numericamente minore di a l'espressione

$$\frac{8a}{\pi^2}\Sigma_0^\infty\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi x}{2a}}{2n+1}\right\}^2$$

è eguale ad $a-x$ se x è positivo, ed $a+x$ se x è negativo.

Dimostrare che per i valori di x tra $-\pi$ e π inclusivamente

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots\dots$$

Ciò può ottenersi dall' Art. 308 con l'integrazione; o dall'equazione (3) dell'Art. 305.

316. Si possono dare altre formole analoghe a quelle nell' Art. 305; ne ricercheremo quì alcune. Abbiamo dall'Art. 305

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_0^l \varphi(v)\,dv + \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi(v-x)}{l}\,dv \ldots\ldots (1).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 e l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$. Nello stesso modo in cui si ottenne questo risultato possiamo dimostrare ancora che

$$2\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_0^l \varphi(v)\,dv + \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \int_0^l \varphi(v)\cos\frac{n\pi(v-x)}{2l}\,dv \ldots\ldots (2).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\varphi(l)$.

Si sottragga (1) da (2); così

$$\varphi(x) = \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \int_0^l \varphi(v)\cos\frac{(2n-1)\pi(v-x)}{2l}\,dv \ldots (3).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(l)$.

Ora nello stesso modo che si è ottenuto (3), possiamo ottenere il risultato seguente, partendo da $v+x$ in vece di $v-x$,

$$0 = \frac{1}{l}\,\Sigma_1^\infty \int_0^l \varphi(v)\cos\frac{(2n-1)\pi(v+x)}{2l}\,dv \ldots (4).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l; ma quando $x=0$ il primo membro deve essere $\frac{1}{2}\varphi(0)$, e quando $x=l$ il primo membro deve essere $-\frac{1}{2}\varphi(l)$.

Da (3) e (4) con l'addizione e la sottrazione otteniamo

$$\varphi(x) = \frac{2}{l}\,\Sigma_1^\infty \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\int_0^l \varphi(v)\cos\frac{(2n-1)\pi v}{2l}\,dv \ldots\ldots (5),$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{l}\,\Sigma_1^\infty \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}\int_0^l \varphi(v)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi v}{2l}\,dv \ldots\ldots (6).$$

Questo vale quando x ha un valore qualunque tra 0 ed l inclusivamente, eccetto che quando $x=0$ il primo membro di (6) deve essere 0, e quando $x=l$ il primo membro di (5) deve essere 0.

317. Applicheremo la formola (5) dell'articolo precedente a stabilire un teorema osservabile dato per la prima volta da Giovanni Bernoulli. Sia data una curva qualunque AB di cui le tangenti in A e B sono ad angoli retti; si formi l'involuta di questa curva incominciando da A, e sia dinotata da AC; si formi l'involuta di AC incominciando da C; e così di seguito continuamente; allora l'ultima figura ottenuta sarà una cicloide.

Sia s la lunghezza dell'arco della curva primitiva misurato da A ad un punto qualunque P; sia ρ il raggio di curvatura in P, e θ l'inclinazione della tangente in P alla tangente in A. Sia ρ_1 il raggio di curvatura nel punto corrispondente della prima involuta, ρ_2 quello della seconda involuta, ρ_3 quello della terza involuta; e così di seguito. Allora θ esprime l'inclinazione di $\rho, \rho_2, \rho_4, \ldots$ alla normale della curva primitiva in A; e θ esprime ancora l'inclinazione di $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \ldots$ alla normale della curva primitiva in B. Inoltre $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \ldots$ svaniscono quando $\theta=0$; e $\rho_2, \rho_4, \rho_6, \ldots$ svaniscono quando $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Ora $\rho=\frac{ds}{d\theta}$, e $\rho_1=s$; così $\rho_1=\int_0^\theta \rho\,d\theta$.

Similmente,
$$\rho_2=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \rho_1\,d\theta,$$
$$\rho_3=\int_0^\theta \rho_2\,d\theta,$$
$$\rho_4=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \rho_3\,d\theta,$$
e così di seguito.

Ora nella formola (5) dell'articolo precedente supponiamo $l=\frac{\pi}{2}$; allora siccome ρ è una funzione di θ, abbiamo

$$\rho = A_1 \cos\theta + A_3 \cos 3\theta + A_5 \cos 5\theta + \dots.$$

in cui $A_1, A_3, A_5, \dots$ sono certe costanti determinate da quella formola (5).

Così

$$\rho_1 = A_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3} A_3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5} A_5 \operatorname{sen} 5\theta + \dots\dots$$

$$\rho_2 = A_1 \cos\theta + \frac{1}{3^2} A_3 \cos 3\theta + \frac{1}{5^2} A_5 \cos 5\theta + \dots\dots$$

$$\rho_3 = A_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3^3} A_3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5^3} A_5 \operatorname{sen} 5\theta + \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Procedendo in tal modo otteniamo, quando n è indefinitamente grande,

$$\rho_n = A_1 \operatorname{sen}\theta, \quad \text{o} \quad \rho_n = A_1 \cos\theta;$$

e queste equazioni rappresentano una cicloide; si vegga l'Art. 105.

Possiamo procedere ad esaminare la natura del risultato quando le tangenti nelle estremità della curva primitiva non sono inclinate ad angolo retto. Supponiamo queste tangenti inclinate sotto un angolo α; e si ponga α per l nella formola (5) dell'articolo precedente. Allora abbiamo

$$\rho = A_1 \cos\frac{\pi\theta}{2\alpha} + A_3 \cos\frac{3\pi\theta}{2\alpha} + A_5 \cos\frac{5\pi\theta}{2\alpha} + \dots\dots;$$

e procedendo nello stesso modo come sopra arriviamo al risultato

$$\rho_n = k \cos\frac{\pi\theta}{2\alpha}, \quad \text{o} \quad \rho_n = k \operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{2\alpha},$$

in cui
$$k = A_1 \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^n.$$

Se k fosse una quantità *finita,* otterremmo così un'epicicloide se α è maggiore di $\frac{\pi}{2}$, ed un'ipocicloide in cui il diametro del circolo mobile è minore del raggio del circolo fisso se α è minore di $\frac{\pi}{2}$; si veggano gli Art. 110 e 111; ed in questo modo si sogliono enunciare i risultati. Ma si dovrà osservare che k diviene indefinitamente grande nel primo caso ed indefinitamente piccolo nel secondo; sicchè nel primo caso si dovrà supporre che i raggi del circolo fisso e del circolo mobile crescano indefinitamente, e nel secondo caso che diminuiscano indefinitamente.

318. Nella formola

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \varphi(v)\, dv + \frac{1}{l}\, \Sigma_1^\infty \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi(v-x)}{l}\, \varphi(v)\, dv,$$

supponiamo che l cresca senza limite; allora se $\varphi(v)$ è tale che il termine $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \varphi(v)\, dv$ svanisca con $\frac{1}{l}$ abbiamo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos u(v-x)\, \varphi(v)\, du\, dv.$$

Questo si chiama il Teorema di Fourier.

ESEMPII DIVERSI.

1. Cambiare l'ordine dell'integrazione nell'espressione

$$\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{(a^2-x^2)}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

2. Cambiare l'ordine dell'integrazione nell'espressione

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{(2ax-x^2)}}^{\sqrt{(4ax)}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

3. Trasformare $\int_0^c \int_{ax}^{bx} \varphi(x, y)\, dx\, dy$ in un integrale rispetto ad u e v, essendo $u = y + x$, $y = uv$; e determinare i limiti del nuovo integrale.

4. Trasformare $\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y)\, dx\, dy$ in un integrale rispetto ad u e v, essendo $y + cx = u$, $y = uv$; e determinare i limiti del nuovo integrale.

5. Trasformare l'integrale

$$\iiint (x-y)(y-z)(z-x)\, dx\, dy\, dz$$

in un altro nel quale u, v, w, sono le variabili indipendenti, essendo

$$u^3 = xyz, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad w^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

6. Dimostrare che

$$\left\{\int_0^\infty e^{-\tau}\, dx\right\}^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, dx \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^{2n})^{\frac{4}{n}}},$$

in cui $t = x^n$ e $\tau = t^2$.

(Si veggano gli Art. 263 e 66; e si trasformi come nell'Art. 242).

7. Dimostrare trasformando l'espressione da coordinate rettangolari a polari che il valore dell'integrale definito

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^4 + 2x^2y^2 \cos\alpha + y^4)}\, dx\, dy$$

è eguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\, F\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$, in cui $F\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$ dinota una funzione ellittica completa del primo ordine di cui $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ è il modulo.

8. Dimostrare che $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta \log\cot\theta\, d\theta = \frac{\pi^2}{48}$.

9. Dimostrare che

$$\int_0^\infty e^{-x^2 n \cot 2\beta} \operatorname{sen}(nx^2 + \alpha)\, dx = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \sqrt{\left(\frac{\pi \operatorname{sen} 2\beta}{4n}\right)}.$$

10. Mostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{-1}\{n\sqrt{(1-\tan^2 x)}\}\, dx = \frac{\pi}{2}\tan^{-1} n\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\cot^{-1}\frac{\sqrt{(1+n^2)}}{n}.$$

11. Se $f(\xi) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\xi \tan\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$, determinare il significato geometrico dell'equazione $y = xf(\operatorname{sen} x)$.

12. Una curva di doppia curvatura gira intorno l'asse delle x; mostrare che la superficie generata

$$= 2\pi \int \sqrt{\{(y\,dy + z\,dz)^2 + (y^2+z^2)(dx)^2\}}.$$

CAPITOLO XIV.

APPLICAZIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLE QUISTIONI DEL VALORE MEDIO E DELLA PROBABILITÀ.

319. Daremo quì alcuni pochi esempii dell'applicazione del Calcolo Integrale alle quistioni relative al *valore medio* ed alla *probabilità*.

Dinoti $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x, e supponiamo x successivamente eguale ad a, $a+h$, $a+2h, \ldots a+(n-1)h$. Allora

$$\frac{\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\ldots+\varphi\{a+(n=1)h\}}{n}$$

si può dire essere il *medio* degli n valori che $\varphi(x)$ riceve corrispondenti agli n valori di x. Sia

$$b-a=nh,$$

allora il suddetto *valore medio* si può scrivere così,

$$\frac{[\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\ldots+\varphi\{a+(n-1)h\}]\,h}{b-a}.$$

Supponiamo che a e b restino fissi ed n cresca indefinitamente; allora il limite dell'espressione precedente è

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)\,dx}{b-a}$$

Questo si può convenevolmente definire essere il *valore medio* di $\varphi(x)$ quando x varia continuamente tra a e b.

320. Come un esempio possiamo prendere la quistione seguente; trovare la media distanza di tutt'i punti dentro di un circolo da un punto fisso nella circonferenza. Con questo enunciato intendiamo che debba seguirsi il seguente procedimento. Sia divisa l'area del circolo in un grande numero n di piccole aree eguali; si formi una frazione di cui il numeratore sia la somma delle distanze di queste piccole aree da un punto fisso nella circonferenza, ed il denominatore sia n; indi si prenda il limite di questa frazione quando n è infinito.

Supponiamo che r_1, r_2, ... r_n dinotino le distanze rispettive delle piccole aree; allora la frazione richiesta è

$$\frac{1}{n}\{r_1 + r_2 + \dots + r_n\}.$$

Si moltiplichi il numeratore ed il denominatore per $r\Delta\theta\,\Delta r$, che rappresenta l'area di un piccolo elemento (Art. 148), così la frazione diviene

$$\frac{\{r_1 + r_2 + \dots + r_n\}\, r\Delta\theta\,\Delta r}{nr\,\Delta\theta\,\Delta r}.$$

Il limite del denominatore rappresenterà l'area del circolo cioè, πc^2, se c è il raggio del circolo. Il limite del numeratore sarà, per le definizioni del Calcolo Integrale, $\iint r^2\,d\theta\,dr$, i limiti essendo presi in modo da includere tutti gli elementi dell'area dentro al contorno del circolo. Così il risultato è

$$\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2c\cos\theta} r^2\,d\theta\,dr}{\pi c^2}.$$

Questo si troverà dare $\frac{32c}{9\pi}$.

321. L'equazione di una curva è $r = c \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, trovare la *lunghezza media* di tutt'i raggi vettori condotti ad eguali intervalli angolari nel primo quadrante.

Segue facilmente, come nell'ultimo articolo, che la richiesta *lunghezza media* è

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} c \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2}},$$

cioè, $\frac{c}{\pi}$.

Ancora, supponiamo che la porzione di questa curva che giace nel primo quadrante giri intorno alla linea iniziale, e così generi una superficie. Si tirino dei raggi vettori dall'origine ai differenti punti della superficie *uniformemente in tutte le direzioni*: si voglia trovare la lunghezza media dei raggi vettori.

La sola difficoltà in questa quistione sta nell'intendere chiaramente il significato delle parole in carattere Italico. Si concepisca una superficie sferica con l'origine come centro; allora per uniforme distribuzione angolare dei raggi vettori, intendiamo che essi siano condotti in modo che il numero di quelli che cadono sopra una porzione qualunque della superficie sferica sia proporzionale all'area di quella porzione. Ora l'area di una porzione di una sfera di raggio a si ottiene integrando

$$a^2 \iint \operatorname{sen} \theta \, d\varphi \, d\theta$$

tra i limiti convenienti (Art. 175). Quindi $a^2 \operatorname{sen} \theta \, \Delta\varphi \, \Delta\theta$ si può prendere per dinotare un elemento di una superficie sferica, e $2\pi a^2$ è l'area della metà della superficie della sfera. Così avremo pel risultato richiesto

$$\frac{\iint a^2 c \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\varphi \, d\theta}{2\pi a^2},$$

i limiti essendo presi in modo da estendere le integrazioni sull'intera superficie che si considera.

Quindi otteniamo

$$\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} c \operatorname{sen}^2 \theta \cos\theta \, d\varphi \, d\theta}{2\pi},$$

cioè, $\frac{c}{3}$.

322. Un'ampia area piana è rigata con linee parallele ad eguale distanza; una sottile bacchetta, di cui la lunghezza è minore della distanza tra due linee consecutive, è gittata all'avventura sull'area; trovare la probabilità che la bacchetta cada attraverso una delle linee.

Sia $2a$ la distanza tra due linee consecutive e $2c$ la lunghezza della bacchetta. Si vede facilmente che non alteriamo il problema supponendo il centro della bacchetta costretto a cadere sopra una linea condotta tra linee consecutive del dato sistema ad angoli retti su di esse, poichè la proporzione dei casi favorevoli all'intero numero dei casi rimane la stessa dopo questa limitazione come prima.

Sia il centro della bacchetta ad una distanza x dalla più vicina delle due parallele prescelte; indi supponiamo che la bacchetta giri intorno al suo centro, ed è chiaro che in questa posizione del suo centro la probabilità che essa attraversi la linea è $\frac{4\varphi}{2\pi}$, in cui

$$c \cos\varphi = x.$$

E possiamo dinotare con $\frac{\Delta x}{a}$ la probabilità che il centro della bacchetta cada tra le distanze x ed $x + \Delta x$ dalla più vicina delle due parallele. Così la probabilità richiesta sarà dinotata dal limite della somma delle quantità come $\frac{2\varphi}{\pi}\frac{\Delta x}{a}$ cioè, sarà

$$\frac{2}{\pi a}\int \varphi \, dx,$$

in cui $\cos\varphi = \frac{x}{c}$.

I limiti di x sono 0 e c; quindi il risultato

$$=\frac{2c}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$$

$$=\frac{2c}{\pi a}.$$

ESEMPII.

1. Se $r=f(\theta)$ ed $y=f\left(\frac{x}{a}\right)$ sono le equazioni di due curve, $f(\theta)$ essendo una funzione che svanisce per i valori θ_1, θ_2, ed è positiva per tutt'i valori tra questi limiti, e se A è l'area della prima tra i limiti $\theta=\theta_1$ e $\theta=\theta_2$, ed M la media aritmetica di tutte le sezioni trasversali del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle x della porzione della seconda curva tra i limiti $x=a\theta_1$ ed $x=a\theta_2$, mostrare che

$$M=\frac{2\pi}{\theta_2-\theta_1}A,$$

supposto θ_2 maggiore di θ_1.

2. Una palla è tirata all'avventura da un'arme a fuoco che con eguale probabilità si può presentare in una direzione qualunque nello spazio al di sopra dell'orizzonte; mostrare che la probabilità di giungere al di là di $\frac{1}{m}$ della sua massima portata è $\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)}$.

3. Da un punto nella circonferenza di un campo circolare è gittato all'avventura un proiettile con una data velocità, la quale è tale che il diametro del campo è eguale alla massima portata del proiettile; trovare la probabilità che esso cada dentro del campo.

Risultato. $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\sqrt{2}-1)$.

4. Sopra una tavola è tracciata una serie di linee rette ad eguali distanze l'una dall'altra, e si gitta un cubo all'avventura sulla tavola. Supponendo la diagonale del cubo minore della distanza tra le linee consecutive, trovare la probabilità che il cubo si fermi senza coprire alcuna parte delle linee.

Risultato. $\frac{4a}{c\pi}$, in cui a è il lato del cubo e c la distanza delle linee consecutive.

5. Dimostrare che il medio di tutt'i raggi vettori di un'ellisse, il fuoco essendo l'origine, è eguale alla metà dell'asse minore, quando le linee sono tirate ad eguali intervalli angolari; ed è eguale alla metà dell'asse maggiore quando le linee sono tirate in modo che le ascisse delle loro estremità crescano uniformemente.

6. Un numero indefinito di linee parallele ad eguali distanze sono tracciate su di un piano, ed una bacchetta la di cui lunghezza è eguale ad r volte la distanza perpendicolare tra due linee consecutive è gittata all'avventura sul piano; trovare la probabilità che essa cada sopra n delle linee. Se $n = r = 1$, mostrare che la probabilità è $\frac{2}{\pi}$.

7. Due frecce sono infisse in uno scudo circolare; quale è la probabilità che la loro distanza sia maggiore del raggio dello scudo?

Risultato. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

8. Supponendo le orbite delle comete uniformemente distribuite nello spazio, dimostrare che la loro inclinazione media al piano dell'eclittica è l'angolo sotteso da un arco eguale al raggio.

9. Un certo territorio è limitato da due circoli meridiani e da due paralleli di latitudine che differiscono in longitudine e latitudine rispettivamente di un grado, e si conosce che esso giace tra certi limiti di latitudine; trovare la probabile area superficiale.

10. Si prende una linea di data lunghezza a, e si prendono due altre linee ciascuna minore della prima linea le quali si lasciano cadere su di essa all'avventura, ogni posizione di ciascuna essendo tanto probabile quanto ogni altra. Le lunghezze di queste linee sono b e b'; si cerca la probabilità che esse non abbiano una parte eccedente c in comune.

Risultato. $\frac{(a-b-b'+c)^2}{(a-b)(a-b')}$.

Camb. Phil. Transactions, Vol. VIII. p. 386.

11. Un'area piana indefinitamente ampia è rigata con linee parallele ad eguali distanze, la distanza tra le linee consecutive essendo c. Una curva chiusa senza punti singolari il di cui massimo diametro è minore di c si getta sull'area. Mostrare che la probabilità per la curva di cadere sopra una delle linee è $\frac{l}{\pi c}$, in cui l dinota il perimetro della curva.

12. Un messaggiere M muove da A verso B (distanza a) alla ragione di v miglia all'ora, ma prima che arrivi in B un nembo di pioggia incomincia in A ed in tutt'i luoghi occupando una certa distanza z verso, ma non giungendo al di là, B, e si muove alla ragione di u miglia all'ora verso A; se M fosse colto in questo nembo sarebbe obbligato di fermarsi finchè esso passasse oltre; egli inoltre deve ricevere pel suo messaggio un numero di scellini inversamente proporzionale al tempo occupato in esso, alla ragione di n scellini all'ora. Supponendo ignota la distanza z, come anche il tempo nel quale incominciò la pioggia, ma che tutti gli eventi siano egualmente probabili, mostrare che il valore dell'aspettativa di M è, in scellini,

$$\frac{nv}{a}\left\{\frac{1}{2}-\frac{u}{v}+\frac{u(u+v)}{v^2}\log\frac{u+v}{u}\right\}.$$

CAPITOLO XV.

CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

Massimi e Minimi degl'integrali che contengono una variabile dipendente con limiti fissi.

323. La teoria dei valori massimi e minimi di date funzioni è considerata completamente nelle opere sul Calcolo Differenziale. Se, per esempio, y dinota una data funzione di una variabile indipendente x, allora possiamo trovare il valore o i valori di x che rendono y un massimo o un minimo, o pure possiamo far vedere che non vi sono di tali valori in alcuni casi.

Intanto andiamo ora a considerare una nuova classe di problemi di massimi e minimi. Dinoti y una funzione di x che è per ora indeterminata; e dinoti V una data funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ Supponiamo che si voglia trovare la relazione che deve passare tra x ed y affinchè l'integrale $\int Vdx$, preso tra dati limiti, possa avere un valore massimo o minimo. Quì non possiamo effettuare l'integrazione poichè y non è conosciuta come una funzione di x, e quindi V non è conosciuta come una funzione di x; così gli ordinarii metodi per risolvere i problemi di massimi e minimi non possono applicarsi. Si richiede allora un nuovo metodo, che procediamo ora a spiegare.

324. La branca dell'analisi alla quale andiamo ad introdurre lo studente si chiama il *Calcolo delle Variazioni;* il suo oggetto si è di trovare i valori massimi o minimi delle espressioni integrali, supponendo che le espressioni variino

con l'assegnare differenti *forme* alle funzioni dinotate dalle variabili dipendenti. Si vedrà, a misura che procediamo, che il metodo per trovare questi valori massimi o minimi è analogo a quello col quale si trovano gli ordinarii valori massimi o minimi nel Calcolo Differenziale.

325. Sarà utile di ricorrere al metodo dato nel Calcolo Differenziale. Lo studente si ricorderà che i termini *massimo* e *minimo* sono termini tecnici, i quali sono definiti ed illustrati nei trattati sul Calcolo Differenziale; ed essi sono adoperati in matematica nel senso ivi a loro assegnato. Sovente si commettono errori confondendo *un valore massimo* nel senso tecnico della parola massimo, con *il valore più grande* nel senso ordinario delle parole il più grande.

Si supponga y una data funzione di una variabile indipendente x; allora se un cambiamento indefinitamente piccolo si dà ad x, in generale si ha per conseguenza un cambiamento indefinitamente piccolo in y, il quale è comparabile in grandezza con quello dato ad x. Il procedimento per trovare un valore massimo o minimo di y si può dire che consista di due parti. Prima determiniamo un valore di x tale che un cambiamento indefinitamente piccolo in esso non produce in y un comparabile cambiamento indefinitamente piccolo, ma un cambiamento che è indefinitamente piccolo paragonato con quello di x. In secondo luogo, esaminiamo il segno di questo cambiamento indefinitamente piccolo proveniente in y dal cambiamento di x; e per un massimo questo segno deve essere necessariamente negativo, e per un minimo positivo.

Possiamo adunque descrivere brevemente questo procedimento così; facciamo sparire i termini del primo ordine nel cambiamento della variabile dipendente, ed esaminiamo il segno dei termini del secondo ordine. Seguiremo un metodo analogo nel problema che dobbiamo ora discutere; ci limitiamo, intanto, per ora interamente alla prima parte del procedimento, e ricorreremo in appresso alla seconda parte.

326. Dobbiamo in prima spiegare la notazione che sarà adoperata. Dinotino x una variabile indipendente, y una funzione qualunque di x, e $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... i coefficienti dif-

ferenziali di y rispetto ad x. Adopreremo δy per dinotare una quantità indefinitamente piccola la quale può essere una funzione qualunque di x; e se u dinota una quantità qualsivoglia che dipende da y dinoteremo con δu l'incremento che riceve u quando y si muta in $y + \delta y$. Così, per esempio, si consideri il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$; quando y riceve l'incremento δy questo coefficiente differenziale riceve l'incremento $\frac{d\delta y}{dx}$, sicchè con $\delta \frac{dy}{dx}$ intendiamo $\frac{d\delta y}{dx}$. È spesso conveniente di usare il simbolo p per $\frac{dy}{dx}$; e così ancora δp è un simbolo conveniente per $\frac{d\delta y}{dx}$. In seguito, si consideri il secondo coefficiente differenziale $\frac{d^2 y}{dx^2}$; quando y riceve l'incremento δy questo secondo coefficiente differenziale riceve l'incremento $\frac{d^2 \delta y}{dx^2}$, e siccome il secondo coefficiente differenziale è spesso dinotato da q possiamo convenientemente usare δq per $\frac{d^2 \delta y}{dx^2}$. Similmente r ed s si possono usare per il terzo ed il quarto coefficiente differenziale di y rispettivamente, e δr e δs per $\frac{d^3 \delta y}{dx^3}$ e $\frac{d^4 \delta y}{dx^4}$ rispettivamente; e così di seguito.

I coefficienti differenziali sono anche spesso indicati, con $y', y'', y''', \ldots$; e così $\delta y', \delta y'', \delta y''', \ldots$ si possono usare come equivalenti a $\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$ rispettivamente.

327. L'introduzione del simbolo δ è dovuta a Lagrange. Lo studente vedrà che questo simbolo ha un significato simile a quello del simbolo d, che è usato nel Calcolo Differenziale. Tutti e due dy e δy esprimono incrementi indefinitamente piccoli; dy però è generalmente usato per dinotare il cambiamento in *valore* di una *data* funzione in conseguenza di un cambiamento nel valore della variabile indipendente, δy è usato per dinotare il cambiamento ottenuto attribuendo un cambiamento arbitrario alla *forma* di una funzione. La quantità dinotata da δy si chiama la *variazione* di y.

328. Dinoti V una data funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$; e sia $U = \int_{x_0}^{x_1} V dx$, in cui x_0 ed x_1 si suppongono dinotare limiti dati. Il valore di U non si può trovare sino a che non conosciamo quale funzione particolare sia y di x; ma senza conoscere ciò possiamo ottenere un'espressione per l'incremento proveniente in U dall'attribuire l'incremento arbitrario δy ad y, dalla quale si possono trarre importanti conseguenze.

Supponiamo $\quad V = \varphi(x, y, y', y'', y''', \ldots);$

allora per definizione

$$\delta V = \varphi(x, y + \delta y,\ y' + \delta y',\ y'' + \delta y'',\ y''' + \delta y''', \ldots) \\ - \varphi(x, y, y', y'', y''', \ldots).$$

Il primo termine si può sviluppare con l'ordinaria estensione del teorema di Taylor; così

$$\delta V = \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dy'}\delta y' + \frac{dV}{dy''}\delta y'' + \frac{dV}{dy'''}\delta y''' + \ldots,$$

in cui $\frac{dV}{dy}$ è il coefficiente differenziale parziale di V rispetto ad y, ancora $\frac{dV}{dy'}$ è il coefficiente differenziale parziale di V rispetto ad y'; e così di seguito.

Nell'espressione precedente di δV abbiamo espresso solamente *termini del primo ordine*, cioè, abbiamo omesso i termini del secondo e degli ordini superiori rispetto alle piccole quantità $\delta y, \delta y', \ldots$. Questo continueremo a fare durante il seguito della investigazione.

Allora

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta V\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dy'}\delta y' + \frac{dV}{dy''}\delta y'' + \frac{dV}{dy'''}\delta y''' + \ldots \right\} dx$$

Trasformeremo ora questa espressione con l'integrazione per parti. Per brevità si ponga

$$\frac{dV}{dy}=N, \quad \frac{dV}{dy'}=P, \quad \frac{dV}{dy''}=Q, \quad \frac{dV}{dy'''}=R, \dots$$

Allora $$\int P\delta y'\,dx=\int P\frac{d\delta y}{dx}\,dx=P\delta y-\int\frac{dP}{dx}\,\delta y\,dx;$$

onde $$\int_{x_0}^{x_1}P\delta y'\,dx=(P\delta y)_1-(P\delta y)_0-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dP}{dx}\,\delta y\,dx.$$

Quì $(P\delta y)_1$ è usato per dinotare il valore di $P\delta y$ quando x_1 si pone in vece di x, e $(P\delta y)_0$ è usato per dinotare il valore di $P\delta y$ quando x_0 si pone in vece di x; una simile notazione sarà usata da per tutto. Bisogna osservare accuratamente che $\frac{dP}{dx}$ significa il coefficiente differenziale *completo* di P rispetto ad x, vale a dire, nel formare $\frac{dP}{dx}$ dobbiamo ricordarci che y ed i suoi coefficienti differenziali racchiudono tutti x implicitamente.

Ancora

$$\int Q\delta y''\,dx=\int Q\frac{d^2\delta y}{dx^2}\,dx=Q\frac{d\delta y}{dx}-\int\frac{dQ}{dx}\frac{d\delta y}{dx}\,dx$$
$$=Q\frac{d\delta y}{dx}-\frac{dQ}{dx}\,\delta y+\int\frac{d^2Q}{dx^2}\,\delta y\,dx;$$

onde

$$\int_{x_0}^{x_1}Q\delta y''\,dx=\left(Q\frac{d\delta y}{dx}-\frac{dQ}{dx}\,\delta y\right)_1-\left(Q\frac{d\delta y}{dx}-\frac{dQ}{dx}\,\delta y\right)_0$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^2Q}{dx^2}\,\delta y\,dx.$$

Similmente

$$\int_{x_0}^{x_1}R\delta y'''\,dx=\left(R\frac{d^2\delta y}{dx^2}-\frac{dR}{dx}\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\,\delta y\right)_1$$
$$-\left(R\frac{d^2\delta y}{dx^2}-\frac{dR}{dx}\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\,\delta y\right)_0-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^3R}{dx^3}\,\delta y\,dx.$$

Questo procedimento si può continuare sino a che tutti i simboli $\delta y', \delta y'', \delta y''', \delta y'''', \ldots$ siano tolti da sotto al segno integrale. Si deve osservare che tutti i coefficienti differenziali $\frac{dQ}{dx}, \frac{d^2Q}{dx^2}, \frac{dR}{dx}, \frac{d^2R}{dx^2}, \frac{d^3R}{dx^3}$ sono coefficienti differenziali *completi*.

Quindi finalmente

$$\begin{aligned}\delta U = {} & \delta y_1 \left\{ P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots \right\}_1 - \delta y_0 \left\{ P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots \right\}_0 \\ & + \delta p_1 \left\{ Q - \frac{dR}{dx} + \ldots \right\}_1 - \delta p_0 \left\{ Q - \frac{dR}{dx} + \ldots \right\}_0 \\ & + \delta p_1 \{ R - \ldots \}_1 - \delta q_0 \{ R - \ldots \}_0 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots \right) \delta y \, dx.\end{aligned}$$

Quì abbiamo adottato alcune ovvie semplificazioni di notazione; così usiamo δy_1 per $(\delta y)_1$, e δp_1 per $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1$, e così di seguito.

329. Il valore di δU si può dinotare così,

$$\delta U = H_1 - H_0 + \int_{x_0}^{x_1} K \delta y \, dx,$$

in cui H_1 dinota un certo aggregato di termini nei quali x_1 è messo in vece di x, ed H_0 un simile aggregato di termini nei quali x_0 è messo in vece di x; questi aggregati non contengono alcuna integrazione. Inoltre

$$K = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots$$

Poichè $H_1 - H_0$ contiene solamente i valori delle variabili nei *limiti*, parleremo alle volte di $H_1 - H_0$ come dei *termini ai limiti*.

330. Possiamo ora determinare le condizioni che debbono aver luogo affinchè U possa avere un valore massimo o minimo. Infatti affinchè U possa avere un valore massimo o minimo, δU deve svanire, qualunque sia δy, purchè solamente essa sia una quantità indefinitamente piccola. Ciò richiede che

$$K = 0 \text{ ed } H_1 - H_0 = 0.$$

Infatti se K non è sempre zero, sarà in nostro potere di dare a δy un valore tale da rendere δU positivo o negativo a nostro piacere, e non zero. Supponiamo, per esempio, che il più alto coefficiente differenziale di δy che si trova in $H_1 - H_0$ sia l'n^{mo}. Si ponga $\delta y = \alpha(x - x_1)^{2n}(x - x_0)^{2n}$, in cui α è una funzione di x che è indefinitamente piccola, ed è per ora indeterminata. Allora questo valore di δy fa svanire $H_1 - H_0$, sicchè δU si riduce ad $\int_{x_0}^{x_1} K\delta y\,dx$. Ora si prenda α tale che sia sempre positiva quando K è positiva, e negativa quando K è negativa; allora δU è necessariamente positiva. E se il segno di α si muta, δU è necessariamente negativa. Così se K non è sempre zero, è in nostro potere di prendere in modo δy da rendere δU positiva o negativa a nostro piacere.

Quindi per un valore massimo o minimo di U dobbiamo avere $K = 0$; ed allora $\int_{x_0}^{x_1} K\delta y\,dx$ svanisce, onde ancora $H_1 - H_0$ deve essere $= 0$.

331. Lo studente ha ora acquistato notizia dei tratti essenziali del Calcolo delle Variazioni; questi sono (1) la riduzione di δU alla forma $H_1 - H_0 + \int_{x_0}^{x_1} K\delta y\,dx$, (2) il principio che K deve svanire affinchè U possa essere un massimo o un minimo. Benchè il soggetto sia suscettibile di sviluppo considerevole, per varie estensioni del problema che abbiamo considerato, sempre i due risultati già ottenuti sono i risultati principali.

332. Prendiamo ora ad esaminare più da vicino la natura delle due condizioni

$$K = 0 \text{ ed } H_1 - H_0 = 0.$$

L'equazione $K = 0$ è ciò che si chiama un'*equazione differenziale*. Supponiamo che $\frac{d^3y}{dx^3}$ sia il più alto coefficiente differenziale che si trovi in V; allora questo si troverà in generale ancora in R, e quindi in $\frac{d^3R}{dx^3}$ si troverà il coefficiente differenziale $\frac{d^6y}{dx^6}$, e questo sarà il più alto coefficiente differenziale che si trova in K, sicchè l'equazione differenziale $K = 0$ sarà del sesto ordine. Ed in generale l'ordine dell'equazione differenziale è due volte l'ordine del più alto coefficiente differenziale che si trova in V.

Si fa vedere nei trattati sulle equazioni differenziali che la soluzione di un'equazione differenziale racchiude tante costanti arbitrarie quante ne indica il numero che esprime l'ordine dell'equazione differenziale. Dobbiamo ora mostrare come si debbano determinare le costanti arbitrarie che nascono dalla soluzione dell'equazione $K = 0$, sicchè possa ottenersi un risultato definito. La condizione $H_1 - H_0 = 0$ serve a questo scopo. Due casi possono darsi.

(1) Supponiamo che nessuna condizione sia imposta dal problema sui valori di y e dei suoi coefficienti differenziali ai limiti dell'integrazione; allora δy_1, δy_0, δp_1, δp_0, ... sono tutte quantità arbitrarie, cioè, abbiamo in nostro potere il supporre per queste quantità dei valori indefinitamente piccoli come a noi piace; per esempio, possiamo supporre che quante di esse vogliamo siano zero. Poichè δy_1, δy_0, δp_1, δp_0,... sono così tutte arbitrarie, affinchè $H_1 - H_0$ possa certamente svanire, bisogna che svanisca il coefficiente di ciascuna delle quantità arbitrarie. Ciò fornisce per determinare le costanti tante equazioni quante sono le costanti.

(2) Supponiamo che dal problema siano imposte condizioni intorno ai valori di y e dei suoi coefficienti differenziali ai limiti dell'integrazione; allora δy_1, δy_0, δp_1, δp_0, . . . non sono *tutte* arbitrarie, poichè alcune di esse si possono espri-

mere in termini delle rimanenti per mezzo delle date condizioni. Siano eliminate da $H_1 - H_0$ tante delle quantità $\delta y_1, \delta y_0, \delta p_1, \delta p_0, \ldots$ per quanto è possibile, ed allora i coefficienti di quelle che rimangono si debbono eguagliare a zero. Le equazioni così ottenute, insieme a quelle che esprimono le condizioni date, formeranno un sistema eguale in numero al numero delle costanti, e quindi serviranno per determinare queste costanti.

333. La principale difficoltà negli esempii consiste nella soluzione dell'equazione differenziale $K=0$, e questa difficoltà è spesso insuperabile.

Mostreremo ora che quando V non contiene esplicitamente la variabile indipendente, si può sempre dare un passo nella soluzione dell'equazione differenziale. Sarà sufficiente per lo scopo pratico di limitarci al caso in cui V non racchiude alcun coefficiente differenziale di ordine superiore al terzo.

Poichè V si suppone non contenere x esplicitamente, abbiamo pel coefficiente differenziale completo di V

$$\frac{dV}{dx} = N\frac{dy}{dx} + P\frac{dp}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx}.$$

E per supposizione

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Così

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dP}{dx}\frac{dy}{dx} + P\frac{dp}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2}\frac{dy}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + \frac{d^3R}{dx^3}\frac{dy}{dx} + R\frac{dr}{dx}.$$

Ora

$$\frac{dP}{dx}\frac{dy}{dx} + P\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}P\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2}\frac{dy}{dx} - Q\frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dQ}{dx}\frac{dy}{dx} - Q\frac{d^2y}{dx^2}\right\},$$

$$\frac{d^3R}{dx^3}\frac{dy}{dx} + R\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^2R}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{dR}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3}\right\}.$$

Quindi, con l'integrazione,

$$V = P\frac{dy}{dx} + \frac{dQ}{dx}\frac{dy}{dx} - Q\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2R}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{dR}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3} + C \quad (2),$$

in cui C è una costante arbitraria. Il più alto coefficiente differenziale che può trovarsi in (2) è $\frac{d^5y}{dx^5}$ che si trova in $\frac{d^2R}{dx^2}$; così (2) è un'equazione differenziale del *quinto* ordine, la quale è un primo integrale dell'equazione (1) che è del *sesto* ordine. Si possono avere casi particolari supponendo che R o Q o P sia zero. Per esempio, il più utile caso è quello in cui V racchiude solamente y e $\frac{dy}{dx}$; sicchè (1) diviene

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

e (2) diviene

$$V = P\frac{dy}{dx} + C.$$

334. L'equazione differenziale $K = 0$ è anche suscettibile di una integrazione quando V non contiene la variabile dipendente. Poichè allora $N = 0$, e l'equazione diviene

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^3R}{dx^3} - \ldots = 0,$$

e quindi

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots = C.$$

335. Sappiamo che $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int V\frac{dx}{dy}\,dy$, supponendo i limiti dell'integrazione rispetto ad y presi in modo da corrispondere a quelli dell'integrazione rispetto ad x. Ed i coefficienti differenziali di y rispetto ad x si possono esprimere in termini dei coefficienti differenziali di x rispetto ad y. Così in $\int V\frac{dx}{dy}\,dy$ possiamo riguardare y come la variabile indipendente, ed x come la variabile dipendente, e procedere a trovare il valore massimo o minimo dell'integrale in questa

nuova forma. Possiamo esser certi *a priori*, poichè il problema non è realmente mutato con questo cambiamento della variabile indipendente, che otterremo lo stesso risultato come se avessimo lasciato la primitiva variabile indipendente.

Quindi si può vedere che i casi considerati negli Art. 333 e 334 coincidono.

336. Ancora, supponiamo che V contenga solamente p e q. Allora l'equazione differenziale $K=0$ si riduce a

$$-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0;$$

onde, con l'integrazione,

$$P=\frac{dQ}{dx}+C_1.$$

Inoltre
$$\frac{dV}{dx}=P\frac{dp}{dx}+Q\frac{dq}{dx}$$
$$=C_1\frac{dp}{dx}+\frac{dQ}{dx}\frac{dp}{dx}+Q\frac{dq}{dx};$$

onde, con l'integrazione,

$$V=Qq+C_1p+C_2.$$

Quì C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie. In questo caso l'equazione differenziale $K=0$ è del *quarto* ordine, ed il risultato che abbiamo ottenuto è un'equazione differenziale del *secondo* ordine; sicchè abbiamo effettuato due passi nell'integrazione dell'equazione differenziale $K=0$.

337. Procederemo ora a considerare alcuni esempii; siccome abbiamo già detto ci limitiamo interamente alla *prima parte* del procedimento per trovare i valori massimi e minimi; si vegga l'Art. 325.

338. Trovare la linea più breve tra due punti.

Si propone questo esempio semplicemente allo scopo di illustrare le formole, essendo ovvio che il risultato deve essere la linea retta che congiunge i due punti.

Qui $V = \sqrt{(1+p^2)}$ ed $U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+p^2)}\, dx$.

Così V racchiude solamente p, e l'equazione $K=0$ si riduce a $\frac{dP}{dx}=0$; così P deve essere una costante, cioè, $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$ deve essere una costante. Ciò mostra che p deve essere una costante, e quindi la linea richiesta deve essere una linea retta.

In questo caso $H_1 - H_0 = \frac{\delta y_1\, p_1}{\sqrt{(1+p_1{}^2)}} - \frac{\delta y_0\, p_0}{\sqrt{(1+p_0{}^2)}}$.
Se ora i due punti sono punti *fissi*, abbiamo $\delta y_1 = 0$ e $\delta y_0 = 0$; così $H_1 - H_0$ svanisce. Allora il valore di p si deve trovare con la condizione che la linea retta passi per i due punti fissi.

Supponiamo però che le *ordinate* dei due punti non siano fisse; le *ascisse* sono fisse poichè x_1 ed x_0 si ritengono invariabili. In questo caso δy_1 e δy_0 sono arbitrarie; e quindi $H_1 - H_0$ non svanirà necessariamente a meno che non svaniscano i coefficienti di δy_1 e δy_0. Ciò richiede che p_1 e p_0 svaniscano, e siccome p è una costante per supposizione questa costante deve essere zero. Così le nostre formole sono d'accordo col fatto ovvio, che quando due linee sono parallele la più breve distanza tra loro si ottiene tirando una linea perpendicolare ad entrambe.

339. Trovare la curva della più celere discesa da un punto dato ad un altro.

Ciò che segue è una più estesa dichiarazione del significato di questo problema. Si supponga un tubo levigato indefinitamente sottile che congiunge i due punti, ed una molecola pesante che scorra lungo questo tubo; si vuol conoscere la forma del tubo affinchè il tempo della discesa sia un minimo. Il problema è conosciuto col nome della *brachistochrona;* esso fu proposto la prima volta da Giovanni Bernoulli nel 1696, e diede origine al Calcolo delle Variazioni.

Supporremo che la curva richiesta giaccia nel piano verticale che contiene i due punti dati. Sia l'asse delle y misurato verticalmente verso basso, e facciamo passare l'asse delle x per il punto dato superiore. La molecola si suppone partire dalla quiete, ed allora per i principii della meccanica la velocità alla profondità y è $\sqrt{(2gy)}$. Così il tempo della discesa è $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(2gy)}}\,dx$. Possiamo allora prendere

$$V = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}.$$

Quì V racchiude solamente y e p; sicchè, per l'Art. 333, dobbiamo avere per un minimo

$$V = Pp + C,$$

cioè,
$$\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}} = \frac{p^2}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}} + C;$$

onde
$$\frac{1}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}} = C.$$

Quindi $y(1+p^2)$ = ad una costante $= 2a$ supponiamo;

onde
$$p^2 = \frac{2a-y}{y};$$

quindi
$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{2a-y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{(2ay-y^2)}};$$

quindi $x = a \operatorname{vers}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{(2ay-y^2)} + b$, in cui b è un'altra costante.

Ciò mostra che la curva richiesta è una cicloide con la sua base orizzontale, il suo vertice in basso, ed una cuspide nel punto superiore. Possiamo supporre l'origine nel punto superiore sicchè $x_0 = 0$, ed allora $b = 0$.

$$\text{Quì}\quad H_1 - H_0 = \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_1 - \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{(p\delta y)_1 - (p\delta y)_0\}.$$

Siccome supponiamo che tutti e due i punti estremi siano fissi δy_1 e δy_0 svaniscono, e quindi $H_1 - H_0$ svanisce.

La costante a deve essere determinata con la condizione che la cicloide passi per il punto dato più basso.

Supponiamo però che sia data solamente l'ascissa del punto più basso, e non l'ordinata. Allora, come sopra, H_0 svanisce, ed $H_1 = \frac{(p\delta y)_1}{\sqrt{(2a)}}$. Ora δy_1 è arbitraria, affinchè H_1 svanisca, dobbiamo avere $p_1 = 0$; così la tangente della cicloide al punto limite inferiore deve essere orizzontale. Questa condizione deve essere usata in questo caso per determinare la costante a.

340. Possiamo modificare il problema precedente supponendo che la molecola non parta dalla quiete, ma parta con una velocità assegnata. In questo caso supporremo che l'asse delle x non sia condotto pel punto superiore, ma sia preso in modo che la velocità nel punto di partenza sia quella che si acquisterebbe scendendo dall'asse delle x sino al punto fisso superiore. La soluzione rimane come prima, la cuspide della cicloide però non è più nel punto fisso superiore, ma nell'asse delle x.

341. Trovare la curva che congiunge due punti fissi tale che l'area tra la curva, la sua evoluta, ed i raggi di curvatura nelle sue estremità sia un minimo.

Per l'Art. 159 l'espressione che si deve rendere un minimo è

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+p^2)^2}{q}\, dx.$$

Quì V racchiude solamente p e q; e quindi, per l'Art. 336, dobbiamo avere per un minimo

$$V = Qq + C_1 p + C_2,$$

cioè,
$$\frac{(1+p^2)^2}{q} = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}\, q + C_1 p + C_2;$$

onde
$$\frac{(C_1 p + C_2)\, q}{(1+p^2)^2} = 2.$$

Con l'integrazione

$$C_2 \tan^{-1} p + \frac{C_2 p - C_1}{1+p^2} = 4x + C_3 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Inoltre $$\frac{(C_1 p^2 + C_2 p)\, q}{(1+p^2)^2} = 2p\,;$$

onde con l'integrazione,

$$C_1 \tan^{-1} p - \frac{C_1 p + C_2}{1+p^2} = 4y + \text{costante}\,;$$

si aggiunga C_2 ai due membri di questa equazione, ed abbiamo

$$C_1 \tan^{-1} p + \frac{p\,(C_2 p - C_1)}{1+p^2} = 4y + C_4 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Si elimini $\tan^{-1} p$ da (1) e (2); così

$$\frac{(C_2 p - C_1)^2}{1+p^2} = 4\,C_2 y - 4\,C_1 x + C_2\,C_4 - C_1\,C_3,$$

onde $$\sqrt{(1+p^2)} = \frac{C_2 p - C_1}{2\sqrt{(C_2 y - C_1 x + B)}},$$

in cui B è tale che $4B = C_2\,C_4 - C_1\,C_3$.

Dinoti s la lunghezza dell' arco della curva misurato da un punto fisso; allora, integrando l' ultima equazione, abbiamo

$$s + C = \sqrt{(C_2 y - C_1 x + B)}.$$

Ciò mostra che la curva richiesta è una cicloide; si vegga l'Art. 72.

Dobbiamo ora esaminare l'espressione $H_1 - H_0$; abbiamo

$$H_1 = \delta y_1 \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)_1 + \delta p_1\, Q_1,$$

$$H_0 = \delta y_0 \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)_0 + \delta p_0\, Q.$$

Siccome i punti estremi si suppongono fissi, δy_1 e δy_0 svaniscono; così

$$H_1 = \delta p_1\, Q_1\,, \quad H_0 = \delta p_0\, Q_0.$$

Supponiamo s'imponga la condizione che le tangenti della curva richiesta debbano avere direzioni fisse nei punti estremi; allora δp_1 e δp_0 svaniscono, ed $H_1 - H_0$ svanisce. In questo caso la cicloide deve essere determinata dalle condizioni che essa passi per i due punti dati, e le sue tangenti abbiano direzioni fisse in questi punti.

Se, però, non è imposta alcuna condizione sui valori di p ai limiti, dobbiamo avere $Q_1 = 0$ e $Q_0 = 0$, affinchè $H_1 - H_0$ svanisca. Ora $Q = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$; ed il raggio di curvatura $= \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Così questo raggio di curvatura deve svanire nei punti estremi, cioè, la cicloide deve avere cuspidi in quei punti.

342. Trovare la forma di un solido di rotazione, affinchè la resistenza nel muoversi attraverso un fluido nella direzione del suo asse sia un minimo, adottando la teoria ordinaria della resistenza.

Si prenda l'asse delle x per asse di rotazione. Allora adottando la teoria della resistenza che è spiegata nelle opere sull'Idrodinamica, l'espressione che deve essere un minimo si è

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{yp^3}{1+p^2}\,dx.$$

Quì V racchiude solamente y e p, e quindi per l'Art. 333, dobbiamo avere per un minimo

$$V = Pp + C,$$

cioè,
$$\frac{yp^3}{1+p^2} = y\,\frac{3p^3+p^5}{(1+p^2)^2} + C;$$

onde
$$\frac{2yp^3}{(1+p^2)^2} + C = 0.$$

Questa è un'equazione differenziale per determinare la curva richiesta.

Integrali con limiti soggetti a variazione.

343. Abbiamo ora sufficientemente spiegato ed illustrato il metodo per trovare il valore massimo o minimo di una espressione integrale che racchiude una variabile indipendente, quando i limiti dell'integrazione si suppongono invariabili. Procederemo ad alcune estensioni del problema; ed incominciamo dal considerare la modificazione che nasce supponendo i limiti dell'integrazione variabili.

Supponiamo, per esempio, che si abbiano due curve date in un piano verticale, e che si voglia trovare la curva della più celere discesa da una di queste curve all'altra, la molecola partendo con la velocità acquistata nel cadere da una data linea orizzontale. Quì dobbiamo trovare il punto nel quale la molecola deve lasciare la curva superiore, ed il punto della curva inferiore verso del quale essa deve procedere, come anche il cammino che deve percorrere. Dobbiamo quindi effettuare di più che negli esempii sinora considerati, e spiegheremo ora come si debba procedere.

Sappiamo, da quanto è stato già detto, che la curva deve essere una cicloide con la sua base orizzontale ed una cuspide sulla data linea orizzontale. Infatti supponiamo ogni altra curva condotta da un punto della curva superiore ad un punto della inferiore; questa curva non può essere quella del minimo tempo, poichè sappiamo che, senza cambiare i punti estremi, possiamo trovare una curva di più celere discesa in paragone di questa curva, vale a dire una cicloide con la sua base orizzontale, ed una cuspide sulla data linea orizzontale. Poichè dunque conosciamo che la curva richiesta deve essere una tale cicloide, la parte del problema che dipende dal Calcolo delle Variazioni si deve considerare risoluta; e possiamo investigare, con le ordinarie regole dei massimi e minimi, la posizione della cicloide particolare per la quale il tempo è un minimo. In fatti, prendendo arbitrariamente il punto iniziale ed il punto finale, possiamo trovare l'equazione della cicloide che passa per questi punti; allora il tempo della discesa diverrà una funzione nota delle coordinate del punto iniziale e del punto finale, e possiamo determinare per quali valori di queste coordinate il tempo è un minimo.

344. Abbiamo mostrato nell'articolo precedente che non è assolutamente necessario di fare alcuna modificazione nelle nostre formole per includere il caso in cui i limiti dell'integrazione si suppongono suscettibili di cangiamento; poichè il procedimento già dato, combinato con le regole ordinarie del Calcolo Differenziale, ci abiliterebbe a risolvere ogni esempio. È però conveniente di presentare insieme tutto ciò che è necessario per risolvere tali esempii, e conformemente aggiungeremo ora le richieste modificazioni delle nostre formole primitive. Come sopra, sia

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx.$$

Supponiamo che oltre al cambiamento di y in $y + \delta y$ i limiti x_1 ed x_0 siano cambiati in $x_1 + dx_1$ ed $x_0 + dx_0$ rispettivamente. In conseguenza di questo cambiamento di limiti U riceve l'incremento

$$\int_{x_1}^{x_1+dx_1} V\, dx - \int_{x_0}^{x_0+dx_0} V\, dx,$$

cioè, trascurando i quadrati e le potenze superiori di dx_1 e dx_0, U riceve l'incremento

$$V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0.$$

Se aggiungiamo questo all'espressione già data per δU, otterremo il cangiamento completo di U in conseguenza della variazione di y, e del cangiamento dei limiti.

345. Se nessuna condizione è imposta sui valori limiti delle coordinate, i termini addizionali testè ottenuti,

$$V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0,$$

si possono solamente far svanire necessariamente supponendo $V_1 = 0$ e $V_0 = 0$. Così introduciamo due nuove equazioni in addizione a quelle che si ottengono da $H_1 - H_0 = 0$; e nello stesso tempo abbiamo due nuove quantità da determinare, cioè, x_0 ed x_1. Però, un caso più comune è quello in cui i valori limiti debbono soddisfare date equazioni. Un tal caso lo abbiamo già indicato nell'Art. 343, in cui si richiede una curva, di cui i punti estremi debbono giacere su curve date.

Considereremo quel limite dell'integrazione pel quale le quantità sono distinte con l'indice 1. Sia

$$Y = y + \delta y,$$

allora se non vi fosse alcun cambiamento del limite, i valori estremi delle variabili sarebbero x_1 ed y_1 prima della variazione ed x_1 ed Y_1 dopo della variazione. Se però x_1 si muta in $x_1 + dx_1$, Y_1 si cangia in

$$\left\{ Y + \frac{dY}{dx} dx_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} (dx_1)^2 + \ldots \right\}_1,$$

cioè, trascurando i quadrati e le potenze superiori di dx_1, Y_1 si cangia in $Y_1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)_1 dx_1$, cioè, trascurando il prodotto $\delta p_1 \, dx_1$, in $y_1 + \delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1$. Supponendo quindi che la relazione data che deve essere soddisfatta dai valori estremi sia

$$Y = \psi(X),$$

dobbiamo avere

$$y_1 = \psi(x_1),$$

ed ancora

$$y_1 + \delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 = \psi(x_1 + dx_1) = \psi(x_1) + \psi'(x_1)\, dx_1$$

al primo ordine. Così

$$\delta y_1 = \left\{ \psi'(x) - \frac{dy}{dx} \right\}_1 dx_1 .$$

Ciò dà una relazione tra δy_1 e dx_1, sicchè possiamo eliminare una di esse dal valore completo di δU.

Similmente, si può trovare la relazione tra δy_0 e dx_0.

Nei problemi geometrici $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ è la tangente dell'inclinazione all'asse delle x della linea che tocca la curva *richiesta* al punto limite; e $\psi'(x_1)$ è la tangente dell'inclinazione all'asse delle x della linea che tocca la curva *data* in quel punto.

Si può notare un caso particolare che è alle volte utile. Supponiamo che il cangiamento *completo* di y_1 debba essere zero; questo dà $\delta y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 dx_1 = 0$; similmente se il cangiamento *completo* di y_0 deve essere zero, $\delta y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0 = 0$.

346. Consideriamo ora il caso della brachistochrona, problema che è stato enunciato nell'Art. 343.

Sia la notàzione come nell'Art. 339. Allora

$$\delta U = V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0 + \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_1 - \left[\frac{p\delta y}{\sqrt{\{y(1+p^2)\}}}\right]_0$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP}{dx}\right) \delta y\, dx.$$

Come sopra dall'equazione $N - \frac{dP}{dx} = 0$ deduciamo

$$\sqrt{\{y(1+p^2)\}} = \sqrt{(2a)};$$

così $$\delta U = V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0 + \frac{1}{\sqrt{(2a)}} \{(p\delta y)_1 - (p\delta y)_0\}.$$

Supponiamo che l'equazione della curva fissa dalla quale la molecola deve partire sia $Y = \chi(X)$, e che l'equazione della curva fissa alla quale la molecola deve arrivare sia $Y = \psi(X)$. Allora per l'articolo precedente abbiamo

$$\delta y_1 = \{\psi'(x) - p\}_1\, dx_1, \quad \delta y_0 = \{\chi'(x) - p\}_0\, dx_0.$$

Così il valore di δU si può mettere sotto la forma

$$\delta U = \lambda_1\, dx_1 - \lambda_0\, dx_0;$$

in cui $$\lambda_1 = V_1 + \frac{p_1}{\sqrt{(2a)}} \{\psi'(x_1) - p_1\}$$
$$= \frac{\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{y_1}} + \frac{p_1}{\sqrt{(2a)}} \{\psi'(x_1) - p_1\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2a)}} \{1 + p_1\, \psi'(x_1)\},$$

e similmente

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{1 + p_0\chi'(x_0)\}.$$

Poichè dx_1 e dx_0 sono arbitrarii, δU non svanirà necessariamente a meno che $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_0 = 0$. Così

$$1 + p_1\psi'(x_1) = 0 \text{ ed } 1 + p_0\chi'(x_0) = 0;$$

e ciò mostra che la cicloide deve tagliare ciascuna delle due curve fisse ad angoli retti.

347. Finora abbiamo tacitamente supposto che la funzione V non racchiuda i valori limiti delle variabili o dei coefficienti differenziali. Supponiamo ora però che V contenga $x_0, x_1, y_0, y_1, p_0, p_1, \ldots$

(1) Supponiamo che x_0 ed x_1 non siano suscettibili di alcun cangiamento. Quando y si muta in $y + \delta y$, oltre la variazione che abbiamo già investigata, V riceverà una variazione addizionale proveniente dal cangiamento in $y_0, y_1, \ldots$ che si trovano esplicitamente in V. Questi termini addizionali in δV sono

$$\frac{dV}{dy_0}\delta y_0 + \frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dp_0}\delta p_0 + \frac{dV}{dp_1}\delta p_1 + \ldots;$$

e per conseguenza si trovano in δU i seguenti termini addizionali,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{dV}{dy_0}\delta y_0 + \frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dp_0}\delta p_0 + \frac{dV}{dp_1}\delta p_1 + \ldots\right\}dx.$$

Ora δy_0, δy_1, δp_0, δp_1, ... non sono funzioni della *variabile* x, ma solamente dei valori limiti di x; possiamo quindi portare queste quantità fuori del segno integrale e scrivere i termini addizionali così,

$$\delta y_0\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_0}dx + \delta y_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_1}dx + \delta p_0\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dp_0}dx + \ldots$$

Ora la presenza di questi termini addizionali non modificherà il ragionamento col quale si è mostrato nell'Art. 330 che dobbiamo avere $K = 0$ affinchè U possa essere un massimo o un minimo. Questi termini addizionali debbono essere annessi all'espressione $H_1 - H_0$, ed il tutto si deve far svanire. Poichè la relazione tra x ed y si suppone trovata per mezzo dell'equazione $K=0$, le espressioni sotto i segni integrali in questi termini addizionali diventano funzioni definite di x, sicchè le integrazioni indicate si possono effettuare, almeno teoreticamente.

(2) Supponiamo che x_0 ed x_1 siano anche mutati, e diventino $x_0 + dx_0$ ed $x_1 + dx_1$ rispettivamente. Allora V riceve l'incremento addizionale

$$\left[\frac{dV}{dx_0}\right] dx_0 + \left[\frac{dV}{dx_1}\right] dx_1,$$

in cui $\left[\frac{dV}{dx_0}\right]$ e $\left[\frac{dV}{dx_1}\right]$ indicano coefficienti differenziali *completi*; vale a dire, dobbiamo rammentarci che x_0 si trova implicitamente in y_0, p_0, ..., e similmente per x_1.

Così oltre dei termini addizionali che abbiamo già dati δU riceve l'incremento

$$dx_0 \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx_0}\right] dx + dx_1 \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx_1}\right] dx,$$

e questa espressione deve essere annessa all'aggregato formato da $H_1 - H_0$ e dai termini addizionali già dati.

348. Come esempio prenderemo un' altra modificazione del problema della brachistochrona. Supponiamo due curve date nello stesso piano verticale, e si voglia trovare la curva della più celere discesa da una di queste all' altra, il movimento incominciando sulla prima curva.

Sia l'asse delle y misurato verticalmente in basso; sia y_0 l'ordinata del punto di partenza, allora quando l'ordinata è y la velocità è $\sqrt{\{2g(y-y_0)\}}$,

Così possiamo prendere

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(y-y_0)}} dx.$$

Dobbiamo quindi cambiare y in $y-y_0$ nella soluzione dell'Art. 346, ed aggiungere all'espressione ivi data di δU i termini trovati nell'Art. 347.

Quì $V=\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(y-y_0)}}$; sicchè y_0 è il solo valore limite che si trova in V. Dobbiamo quindi aggiungere al primo valore di δU

$$\delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0}\, dx + dx_0 \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx_0}\right] dx;$$

e

$$\left[\frac{dV}{dx_0}\right] = \frac{dV}{dy_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

Quindi per l'Art. 346, dopo di aver posto $K=0$, abbiamo

$$\delta U = \lambda_1 dx_1 - \lambda_0 dx_0 + \left\{\delta y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0\right\} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0}\, dx,$$

in cui λ_1 e λ_0 hanno i valori assegnati nell'Art. 346.

Ora nel caso attuale

$$\frac{dV}{dy_0} = -\frac{dV}{dy} = -N = -\frac{dP}{dx};$$

quindi
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0}\, dx = P_0 - P_1 = \frac{p_0 - p_1}{\sqrt{(2a)}};$$

e
$$\delta y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 dx_0 = \chi'(x_0)\, dx_0, \text{ come nell'Art. 346.}$$

Così
$$\delta U = \lambda_1 dx_1 - \lambda_0 dx_0 + \frac{\chi'(x_0)}{\sqrt{(2a)}}(p_0 - p_1)\, dx_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{1 + p_1 \psi'(x_1)\}\, dx_1$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\{1 + p_1 \chi'(x_0)\}\, dx_0.$$

Allora eguagliando a zero i coefficienti di dx_1 e dx_0 abbiamo

$$1 + p_1\psi'(x_1) = 0 \quad \text{ed} \quad 1 + p_1\chi'(x_0) = 0,$$

sicchè
$$\chi'(x_0) = \psi'(x_1).$$

Così la cicloide taglia la curva fissa inferiore ad angoli retti, e la tangente alla curva fissa superiore nel punto iniziale è parallela alla tangente alla curva fissa inferiore nel punto finale.

Integrali con due variabili dipendenti.

349. Abbiamo finora supposto che V sia una funzione con una sola variabile dipendente; supponiamo ora che V sia una funzione di due variabili dipendenti.

Sia V una funzione di x, y, z, e dei coefficienti differenziali di y e z rispetto ad x; sia

$$U=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

e cerchiamo la variazione nel valore di U quando y e z ricevono variazioni.

Procedendo come nell'Art. 328 otterremo il seguente risultato

$$\delta U = H_1 - H_0 + J_1 - J_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\delta y + L\delta z)\,dx,$$

in cui i simboli hanno i significati seguenti;

δy, come prima, dinota una variazione arbitraria data ad y, cioè, δy è una funzione arbitraria indefinitamente piccola di x;

K, come prima, dinota

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''}-\ldots,$$

in cui $\dfrac{dV}{dy}$, $\dfrac{dV}{dy'}$, $\dfrac{dV}{dy''}$, ... sono coefficienti differenziali parziali, e $\dfrac{d}{dx}\dfrac{dV}{dy'}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\dfrac{dV}{dy''}$, ... sono coefficienti differenziali *completi* rispetto ad x;

δz è una variazione arbitraria data a z, cioè, δz è una funzione arbitraria indefinitamente piccola di x;

L è relativamente a z quello stesso che K relativamente ad y, cioè

$$L=\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\frac{dV}{dz'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dz''}-\ldots;$$

$H_1 - H_0$ ha il significato già dato, ed $J_1 - J_0$ è relativamente a z lo stesso che $H_1 - H_0$ relativamente ad y.

350. Procediamo ora a trovare un valore massimo o minimo di U nelle supposizioni dell'articolo precedente.

(1) Se y e z sono indipendenti, affinchè δU possa certamente svanire dobbiamo avere

$$K = 0 \text{ ed } L = 0;$$

ed anche
$$H_1 - H_0 + J_1 - J_0 = 0.$$

I valori di y e z in termini di x debbono trovarsi risolvendo le equazioni differenziali $K = 0$, $L = 0$; e le costanti arbitrarie che si trovano in queste soluzioni debbono determinarsi eguagliando a zero i coefficienti delle quantità arbitrarie δy_0, δy_1, $\left(\delta \frac{dy}{dx}\right)_0$, ... δz_0, δz_1, $\left(\delta \frac{dz}{dx}\right)_0$, ... che si trovano in $H_1 - H_0 + J_1 - J_0$.

(2) Supponiamo però che y e z non siano indipendenti, ma che siano legati dalla relazione $\varphi(x, y, z) = 0$, che deve sempre valere. Poichè si suppone che questa relazione regga sempre, abbiamo ancora

$$\varphi(x, y + \delta y, z + \delta z) = 0;$$

e quindi ultimamente

$$\frac{d\varphi}{dy} \delta y + \frac{d\varphi}{dz} \delta z = 0.$$

Così l'integrale $\int_{x_0}^{x_1} (K \delta y + L \delta z)\, dx$ diviene

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ K - \frac{L \dfrac{d\varphi}{dy}}{\dfrac{d\varphi}{dz}} \right\} \delta y\, dx,$$

ed affinchè questo svanisca abbiamo la sola condizione

$$\frac{K}{\dfrac{d\varphi}{dy}} = \frac{L}{\dfrac{d\varphi}{dz}};$$

e da questa equazione differenziale combinata con $\varphi(x,y,z)=0$, dobbiamo trovare y e z.

Come prima, dobbiamo anche avere

$$H_1 - H_0 + J_1 - J_0 = 0.$$

351. Come esempio prendiamo il seguente problema; determinare una linea di minima lunghezza sopra una data superficie curva tra due punti dati.

Quì abbiamo

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}\, dx\,;$$

così $$K = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}},\quad L = -\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}};$$

sia $\varphi(x,y,z)=0$, l'equazione della superficie sulla quale giace la linea. Allora per l'articolo precedente abbiamo, come condizione per un minimo

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}}{\dfrac{d\varphi}{dy}} = \frac{\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}}{\dfrac{d\varphi}{dz}}.$$

Rappresenti s la lunghezza dell'arco della curva; allora

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}} = \frac{dy}{ds},\ \text{e}\ \frac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}} = \frac{dz}{ds}.$$

Così l'equazione precedente si può scrivere

$$\frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\dfrac{d\varphi}{dy}} = \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\dfrac{d\varphi}{dz}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Da questa possiamo congetturare per simmetria che ciascuna di queste frazioni è eguale a

$$\frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\dfrac{d\varphi}{dx}}$$

e ciò possiamo dimostrare; infatti da (1) ciascuna delle frazioni per un noto teorema di algebra è eguale a

$$\frac{\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dz}{ds}\frac{d\varphi}{dz}};$$

e poichè l'equazione $\varphi(x, y, z)=0$ vale per ogni punto della curva, abbiamo

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{ds}=0;$$

inoltre per un noto teorema

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Quindi una linea di minima lunghezza è determinata dalle equazioni simmetriche

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dx}}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dy}}=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dz}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Si dimostra nelle opere sulla Geometria a tre dimensioni come le equazioni (2) indicano che il piano osculatore in ogni punto della curva contiene la normale della superficie in quel punto.

Massimi e Minimi relativi.

352. Rimane ancora a considerare una classe di problemi, chiamati problemi dei valori massimi e minimi *relativi*. Supponiamo si voglia che un certo integrale U abbia un valore massimo o minimo mentre un altro integrale W, che contiene le stesse variabili, ha un valore costante; per esempio possiamo richiedere una curva che racchiuda un'area massima sotto un dato perimetro. Quì non si richiede che δU svanisca sempre, ma solamente che essa svanisca per quelle relazioni tra le variabili che danno un definito valore co-

stante a W; ciò è in fatti, il richiedere che δU svanisca per tutte quelle relazioni tra le variabili che fanno svanire δW.

Il problema si risolve trovando un valore massimo o minimo di $U + aW$, in cui a dinota una costante; poichè in questa soluzione siamo certi che $\delta U + a\delta W$ svanisce necessariamente, e quindi δU deve svanire sempre che svanisca δW. Nella soluzione si trova la costante a, ed il suo valore deve essere determinato col fare che l'integrale W abbia il valore costante che si suppone dato.

Se si vuole che W sia un massimo o un minimo mentre U rimane costante, procederemo nello stesso modo a trovare il massimo o minimo di $W + bU$, in cui b è una costante; e se supponiamo $b = \frac{1}{a}$, otteniamo l'espressione $\frac{1}{a}(U + aW)$. Così per questo problema si otterrà la stessa soluzione come per quello in cui U deve essere un massimo o minimo mentre W è costante.

Procediamo ora ad alcuni esempii.

353. Si voglia trovare una curva di data lunghezza che congiunge due punti fissi, in modo che l'area limitata dalla curva, l'asse delle x, e le ordinate dei punti fissi sia un massimo.

Quì $\quad U = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \quad W = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1 + p^2)}\,dx;$

sia $V = y + a\sqrt{(1 + p^2)}$, allora dobbiamo investigare un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$. Sotto al segno integrale abbiamo solamente y e p; quindi per un massimo o minimo per l'Art. 333, dobbiamo avere

$$V = Pp + C_1,$$

cioè, $$y + a\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{ap^2}{\sqrt{(1 + p^2)}} + C_1,$$

cioè, $$y + \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)}} = C_1.$$

Così $$1 + p^2 = \frac{a^2}{(C_1 - y)^2},$$

onde $$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{p^2} = \frac{(C_1 - y)^2}{a^2 - (C_1 - y)^2};$$

quindi $$x + C_2 = \sqrt{\{a^2 - (C_1 - y)^2\}}.$$

Questo mostra che la curva richiesta è un arco circolare.

Poichè i punti estremi si suppongono fissi, la parte di δV che dipende dai limiti svanisce.

Le costanti C_1, C_2, a debbono essere determinate facendo che l'arco circolare passi per i dati punti fissi ed abbia tra essi la data lunghezza.

354. Data la lunghezza di una curva, trovare la sua forma in modo che la profondità del centro di gravità sia un massimo.

Si prenda l'asse delle x orizzontale, e l'asse delle y verticale in basso. Dinoti b la lunghezza della curva; allora la profondità del centro di gravità è $\frac{1}{b}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{(1+p^2)}\,dx$, e la lunghezza è $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+p^2)}\,dx$.

Sia $$V = \frac{1}{b}\, y\sqrt{(1+p^2)} + a\sqrt{(1+p^2)},$$

allora si cerca un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$.

Quì per l'Art. 333 dobbiamo avere

$$V = Pp + C_1, \text{ cioè,}$$

$$\frac{y}{b}\sqrt{(1+p^2)} + a\sqrt{(1+p^2)} = \frac{p^2 y}{b\sqrt{(1+p^2)}} + \frac{ap^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + C_1,$$

onde $$\frac{y+ab}{\sqrt{(1+p^2)}} = bC_1;$$

quindi $$1 + p^2 = \frac{(y+ab)^2}{b^2 C_1^{\,2}},$$

e quindi $$\frac{dx}{dy} = \frac{bC_1}{\sqrt{\{(y+ab)^2 - b^2C_1^2\}}};$$

onde $$x = A \log [y + B + \sqrt{\{(y+B)^2 - A^2\}}] + C_2,$$

in cui C_2 è una nuova costante, ed $A = bC_1$ e $B = ab$.

Questa equazione mostra che la curva richiesta è una catenaria. Se le estremità della curva richiesta si suppongono fisse, i termini dipendenti dai limiti svaniscono, e le costanti A, B, C_2 si debbono determinare facendo che la catenaria passi per i punti fissi ed abbia tra essi una data lunghezza. Supponiamo però che in vece di essere fisse le estremità siano solamente costrette a giacere su curve fisse. Procedendo come nell' Art. 346 otteniamo i seguenti termini ai limiti;

$$V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + P_1 \delta y_1 - P_0 \delta y_0.$$

Consideriamo i termini con l'indice 1; abbiamo

$$V_1 dx_1 + P_1 \delta y_1, \text{ cioè, } \left(\frac{y_1}{b} + a\right) \sqrt{(1+p_1^2)}\, dx_1 + \left(\frac{y_1}{b} + a\right) \frac{p_1 \delta y_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}.$$

Ora supponendo $y = \psi(x)$ l'equazione della curva fissa, abbiamo $\delta y_1 = \{\psi'(x_1) - p_1\}\, dx_1$, sicchè il termine si riduce ad

$$\frac{y_1 + ab}{b\sqrt{(1+p_1^2)}} \{1 + p_1 \psi'(x_1)\}\, dx_1.$$

Affinchè questo svanisca dobbiamo avere $1 + p_1 \psi'(x_1) = 0$, poichè $y_1 + ab$ non può svanire, siccome allora x_1 sarebbe impossibile. Un simile risultato ha luogo per l' altro limite; si vede così che la catenaria deve tagliare le curve fisse ad angoli retti.

355. Data la superficie di un solido di rotazione, trovare la sua natura affinchè il volume contenuto sia un massimo.

Si prenda l' asse delle x per l' asse di rotazione. Allora la superficie è $2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{(1+p^2)}\, dx$, ed il volume è $\pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$.

Sia $V = y^2 + ay\sqrt{(1+p^2)}$; allora dobbiamo trovare un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$. Quì per l' Art. 333 dobbiamo avere

$$V = Pp + C,$$

cioè,
$$y^2 + ay\sqrt{(1+p^2)} = \frac{ayp^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + C,$$

onde
$$y^2 + \frac{ay}{\sqrt{(1+p^2)}} = C,$$

Questa è l'equazione differenziale della curva che con la rotazione genererebbe la superficie richiesta. Supponendo che le estremità della curva generatrice debbano essere punti fissi, i termini ai limiti svaniscono.

Se ciascuno dei punti fissi è sull'asse di rotazione, il valore $y=0$ deve soddisfare all'equazione della curva; così $C=0$. Allora l'equazione generale si riduce ad

$$y^2 + \frac{ay}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0, \quad \text{onde } y + \frac{a}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0;$$

questa dà un arco circolare per la curva generatrice.

Un' ulteriore discussione di questo problema si troverà nel *Philosophical Magazine* per Luglio e per Agosto 1861.

356. Data la massa di un solido di rotazione di uniforme densità, si cerca la sua forma affinchè la sua attrazione sopra un punto nel suo asse sia un massimo.

Si prenda l'asse delle x per quello di rotazione, e la posizione del punto attratto per origine.

Sia il solido diviso in strati indefinitamente sottili con piani perpendicolari all'asse delle x. Se y rappresenta il raggio di uno strato, x la sua distanza dal punto attratto, $\varkappa$ la sua spessezza e ρ la sua densità, l'attrazione è (per la *Statica*)

$$2\pi\rho\varkappa\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right\}.$$

Quindi l'intera attrazione del solido è

$$2\pi\rho\int_{x_0}^{x_1}\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right\}dx;$$

e la massa del solido è

$$\pi\rho\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx.$$

Così sia $V = 1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + ay^2$; allora dobbiamo investigare il valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$.

La condizione $N - \frac{dP}{dx} + \ldots = 0$ si riduce quì ad $N = 0$, cioè,

$$2ay + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

onde

$$2a(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + x = 0.$$

Se supponiamo i limiti x_1 ed x_0 suscettibili di cangiamento abbiamo i termini limiti $V_1 dx_1 - V_0 dx_0$; e per farli svanire dobbiamo avere $V_1 = 0$ e $V_0 = 0$; ciò conduce ad $y_1 = 0$ ed $y_0 = 0$. Così il solido deve essere formato dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'intera curva chiusa determinata dall'equazione $2a(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + x = 0$; il valore di a si deve trovare per la condizione che la massa, e quindi il volume, è dato.

Integrali doppii.

357. Considereremo ora il problema di trovare il valore massimo o minimo di un *integrale doppio*; ed incominciamo dal trovare la variazione di un integrale doppio.

Sia z una funzione delle variabili dipendenti x ed y per ora incognita; sia V una data funzione di $x, y, z, \frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$; sia $U = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} V\, dx\, dy$; l'integrazione si suppone effettuata prima rispetto ad y, ed i limiti y_0 ed y_1 si suppongono funzioni date di x. Si vuol determinare quale funzione z deve essere di x ed y affinchè U possa avere un valore massimo o minimo.

Dinoti δz una funzione arbitraria indefinitamente piccola di x ed y; dinoti δV la variazione prodotta in V quando z riceve la variazione δz, e dinoti δU la variazione in U; allora dobbiamo trovare prima l'espressione di δU.

Dinoti L il coefficiente differenziale parziale di V rispetto a z, M il coefficiente differenziale parziale di V rispetto a $\frac{dz}{dx}$, ed N il coefficiente differenziale parziale di V rispetto a $\frac{dz}{dy}$; allora abbiamo

$$\delta V = L\delta z + M\frac{d\delta z}{dx} + N\frac{d\delta z}{dy},$$

in cui, come per lo innanzi, ci limitiamo alla prima potenza delle quantità indefinitamente piccole. Quindi

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(L\delta z + M\frac{d\delta z}{dx} + N\frac{d\delta z}{dy}\right) dx\, dy.$$

Il valore di δV si può scrivere così;

$$\delta V = \left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy}\right)\delta z + \frac{d}{dx}(M\delta z) + \frac{d}{dy}(N\delta z),$$

e quindi

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy}\right)\delta z\, dx\, dy$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(M\delta z)\, dx\, dy + \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dy}(N\delta z)\, dx\, dy.$$

I coefficienti differenziali rispetto ad x e ad y che quì sono indicati sono coefficienti differenziali *completi.*

Inoltre $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dy}(N\delta z)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1}\{(N\delta z)_1 - (N\delta z)_0\}\, dx,$

in cui $(N\delta z)_1$ dinota il valore di $N\delta z$ quando si pone y_1 in vece di y, ed $(N\delta z)_0$ dinota il valore di $N\delta z$ quando si pone y_0 in vece di y.

E per l'Art. 216,

$$\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(M\delta z)\, dy = \frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y_1} M\delta z\, dy - (M\delta z)_1\frac{dy_1}{dx} + (M\delta z)_0\frac{dy_0}{dx},$$

in cui $(M\delta z)_1$ dinota il valore di $M\delta z$ quando si pone y_1 in vece di y, ed $(M\delta z)_0$ dinota il valore di $M\delta z$ quando si pone y_0 in vece di y.

Quindi
$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(M\delta z)\,dx\,dy$$
$$=\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_1}-\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_0}$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_1\frac{dy_1}{dx}dx+\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_0\frac{dy_0}{dx}dx.$$

Quindi
$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(L-\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)\delta z\,dx\,dy$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left\{(N\delta z)_1-(N\delta z)_0\right\}dx$$
$$+\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_1}-\left(\int_{y_0}^{y_1}M\delta z\,dy\right)_{x=x_0}$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_1\frac{dy_1}{dx}dx+\int_{x_0}^{x_1}(M\delta z)_0\frac{dy_0}{dx}dx.$$

Se i limiti y_1 ed y_0 sono *costanti*, gli ultimi due termini svaniscono.

358. Nel valore di δU trovato nell' articolo precedente vi è un termine che è un integrale doppio contenente δz sotto i segni integrali, e vi sono diversi integrali semplici che dipendono dai valori limiti di δz. Col metodo già usato nell' Art. 330, ne seguirà che δU non svanirà certamente se non quando svanisce il coefficiente di δz sotto il doppio segno integrale; così per un valore massimo o minimo di U abbiamo come condizione necessaria

$$L-\frac{dN}{dx}-\frac{dN}{dy}=0.$$

Questa è un' equazione differenziale parziale per trovare z in termini di x ed y; e possiamo dire che le funzioni arbitrarie le quali si trovano nella sua soluzione debbono essere determinate in modo che i rimanenti termini in δU svaniscano. Ma la difficoltà d' integrare l' equazione differenziale parziale in generale impedisce ogni pratico esame di questi termini ai limiti.

359. Come esempio, si voglia determinare la superficie di area minima limitata da una data curva.

Quì per l'Art. 170,

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}\,dx\,dy\,;$$

si ponga come al solito

$$\frac{dz}{dx}=p,\ \frac{dz}{dy}=q,\ \frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=s,\ \frac{d^2z}{dy^2}=t,$$

La condizione per un minimo si riduce a

$$\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dy}=0\,,$$

cioè, a $$\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}+\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}=0\,,$$

cioè, ad

$$r(1+p^2+q^2)-(pr+qs)p+t(1+p^2+q^2)-(ps+qt)q=0,$$

cioè, ad $$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Si dimostra nelle opere sulla Geometria a tre dimensioni che questa equazione indica che la superficie cercata è tale che in ogni punto i due raggi principali di curvatura sono eguali in grandezza e di segni contrarii.

Poichè supponiamo che il contorno della superficie proposta sia una curva fissa δz svanisce lungo questo contorno; così i termini relativi ai limiti in δU svaniscono tutti.

Distinzione tra i valori Massimi e Minimi.

360. Faremo ora alcune osservazioni sulla seconda parte della ricerca dei valori massimi e minimi degl'integrali; si vegga l'Art. 325.

Consideriamo il problema di trovare la linea più breve tra due punti dati. Quì

$$V=\sqrt{(1+p^2)}, \qquad U=\int_{x_0}^{x_1} V dx.$$

Supponiamo che y si muti in $y+\delta y$, e per conseguenza p in $p+\delta p$; si ponga $p+\delta p$ in vece di p in V e si sviluppi; così V diviene

$$\sqrt{(1+p^2)}+\frac{p\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}}+\frac{(\delta p)^2}{2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}-\ldots.$$

in cui i termini non espressi sono del *terzo* ordine e degli ordini superiori in δp. Così otteniamo

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\frac{p\,\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}}dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{(\delta p)^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}dx-\ldots.$$

Il primo di questi termini è quello che per lo innanzi dinotammo con δU, e la ricerca del valore minimo di U sin dove finora è stata spinta, consiste nel far svanire questo termine. Supponendo adunque che questo termine svanisca, e trascurando i termini del terzo ordine e degli ordini superiori, abbiamo

$$\delta U=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{(\delta p)^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Se x_1-x_0 è positivo, ogni elemento di questo integrale è positivo; così δU è *positiva*, e quindi si è ottenuto un valore *minimo* di U.

361. Ancora, si prenda il caso della brachistochrona, quando i punti estremi sono fissi. Quì

$$V=\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}, \quad U=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}dx.$$

Si muti y in $y+\delta y$, e p in $p+\delta p$; e si sviluppi il nuovo valore di V. Così V diviene

$$\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{(1+p^2)}\,\delta y}{2y^{\frac{2}{2}}}+\frac{p\,\delta p}{y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{3(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\delta y)^2}{8y^{\frac{5}{2}}}-\frac{p\,\delta y\,\delta p}{2y^{\frac{3}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(\delta p)^2}{2y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\ldots\ldots;$$

e da questo possiamo ottenere δU.

Ora col procedimento dell'Art. 339 i termini del primo ordine in δU si fanno svanire; quindi trascurando i termini del terzo ordine e degli ordini superiori, abbiamo

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{3(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\delta y)^2}{8y^{\frac{5}{2}}}-\frac{p\,\delta y\,\delta p}{2y^{\frac{3}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(\delta p)^2}{2y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}dx.$$

Dobbiamo ora investigare il segno di questa espressione quando la relazione tra x ed y è quella che è determinata nell'Art. 339; e mostreremo con alcune trasformazioni che δU è positiva.

Poichè $$y^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}=(2a)^{\frac{1}{2}},$$

abbiamo $$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{3(2a)^{\frac{1}{2}}(\delta y)^2}{8y^3}-\frac{p\,\delta y\,\delta p}{2y(2a)^{\frac{1}{2}}}+\frac{y(\delta p)^2}{4a(2a)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2(2a)^{\frac{1}{2}}}\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{3a(\delta y)^2}{2y^3}-\frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}+\frac{y(\delta p)^2}{2a}\right\}dx.$$

Ora $$\int\frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}dx=\frac{p(\delta y)^2}{2y}-\frac{1}{2}\int(\delta y)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y}\right)dx;$$

e siccome i punti estremi si suppongono fissi δy svanisce ai limiti; quindi

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}dx=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(\delta y)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y}\right)dx.$$

Ora $$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{y}\right)=\frac{1}{y}p\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{y^2}=-\frac{a}{y^3}-\frac{p^2}{y^2}=-\frac{3a-y}{y^3}.$$

Quindi $$\int_{x_0}^{x_1}\frac{p\,\delta y\,\delta p}{y}dx=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(\delta y)^2\frac{3a-y}{y^3}dx;$$

e
$$\delta U = \frac{1}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{(\delta y)^2}{2y^2} + \frac{y(\delta p)^2}{2a} \right\} dx.$$

Così δU è positiva, e quindi si è ottenuto un valore minimo di U.

362. L'articolo precedente mostra come sia possibile cambiare l'espressione del secondo ordine alla quale si riduce δU con le nostre precedenti investigazioni, da una forma in cui il segno è incerto ad una forma in cui il segno è evidente. Una teoria generale rispetto alle convenevoli trasformazioni di tali termini del secondo ordine è stata data da Jacobi; per questo rimandiamo alle opere indicate nella fine del presente capitolo.

Si può osservare che molti dei problemi discussi nel Calcolo delle Variazioni sono tali da poter dedurre con maggiore o minore certezza, dalla natura del problema particolare, che vi possa essere un minimo e non un massimo, o un massimo e non un minimo.

363. Pel problema discusso nell'Art. 359 è facile mostrare che il risultato dà realmente un minimo. Quì

$$V = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}, \quad U = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}\, dx\, dy$$

Supponiamo z mutato in $z + \delta z$, in conseguenza di che p diviene $p + \delta p$ e q diviene $q + \delta q$. Così V diviene

$$(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{p\delta p}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q\delta q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{(1 + q^2)(\delta p)^2}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{pq\,\delta p\,\delta q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1 + p^2)(\delta q)^2}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Allora supponendo che si facciano sparire i termini del primo ordine, e trascurando i termini del terzo ordine e degli ordini superiori, abbiamo

$$\delta U = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{(1+q^2)(\delta p)^2 - 2pq\,\delta p\,\delta q + (1+p^2)(\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{(\delta p)^2 + (\delta q)^2 + (q\,\delta p - p\,\delta q)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

Così il termine sotto i segni integrali è necessariamente positivo; sicchè si è ottenuto un valore minimo di U.

Condizione di Integrabilità.

364. Nell'Art. 330 abbiamo trovato che $K=0$ è una condizione necessaria per l'esistenza di un valore massimo o minimo dell'integrale ivi considerato. Può accadere però che in alcuni casi la relazione $K=0$ sia soddisfatta *identicamente*; procediamo a dare un esempio di questo caso e ad interpetrarlo.

Supponiamo che si cerchi il valore massimo o minimo di

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{xy''}{y}\right)dx.$$

Quì
$$V = \frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{xy''}{y},$$

$$N = \frac{dV}{dy} = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3} - \frac{xy''}{y^2},$$

$$P = \frac{dV}{dy'} = \frac{1}{y} - \frac{2xy'}{y^2},$$

$$Q = \frac{dV}{dy''} = \frac{x}{y};$$

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3} - \frac{xy''}{y^2}$$
$$- \left\{-\frac{y'}{y^2} - \frac{2y'}{y^2} - \frac{2xy''}{y^2} + \frac{4xy'^2}{y^3}\right\}$$
$$- \frac{2y'}{y^2} - \frac{xy''}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3}.$$

Riunendo i termini si troverà che

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}$$

svanisce. Così in questo esempio la relazione $K=0$ è una *identità*, e non possiamo ottenere da essa alcun valore di y.

In questo esempio troveremo che

$$\int V\,dx = \frac{xy'}{y},$$

cioè, l'integrale $\int V dx$ si può ottenere senza assegnare il valore di y in termini di x. Così se vogliamo trovare un valore massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$, dobbiamo investigare un valore massimo o minimo di $\left(\frac{xy'}{y}\right)_1 - \left(\frac{xy'}{y}\right)_0$. Non si tratta adunque di un massimo o minimo di un'espressione integrale indeterminata della specie finora considerata, ma di un massimo o minimo di un'espressione libera dal segno integrale.

Questa specie di problema di massimo e minimo è considerata in alcuni dei trattati estesi sul Calcolo delle Variazioni; siccome essa non presenta molto interesse rimanderemo lo studente a tali opere.

365. Dimostreremo ora generalmente che la condizione necessaria e sufficiente affinchè V sia integrabile senza assegnare il valore specifico di y in termini di x, si è che $K=0$ sia identicamente vero. Un'espressione la quale è integrabile senza assegnare il valore specifico della variabile dipendente in termini della variabile indipendente si dice alle volte essere integrabile *per se*, o pure essere *immediatamente integrabile*.

366. Dimostriamo prima che la condizione è necessaria. Supponiamo che V contenga x, y ed i coefficienti differenziali di y rispetto ad x sino a $\frac{d^n y}{dx^n}$ inclusivamente.

Se la funzione V è immediatamente integrabile l'integrale $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ si può esprimere nella forma

$$\varphi\left\{x_1, y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1, \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_1\right\}$$
$$-\varphi\left\{x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0\right\},$$

in cui la forma della funzione dinotata da φ rimane immutata qualunque sia il valore di y in termini di x. Ora supponiamo che y riceva una variazione tale che lasci inalterati i valori di y e dei suoi coefficienti differenziali *ai limiti*; allora dal valore di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ segue che

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = 0\,;$$

così per l'Art. 329

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta y \left\{\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} - \ldots\right\} dx = 0.$$

Ma questo non può essere vero qualunque sia δy, a meno che

$$\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} - \ldots = 0\,,$$

e se questa equazione non è *identicamente* vera essa determina y come una funzione di x. Così se V è immediatamente integrabile la relazione $K=0$ deve essere vera identicamente.

In secondo luogo dimostreremo viceversa che se questa condizione è soddisfatta V è integrabile immediatamente. Ordinariamente si considera sufficiente il dire che se regge questa condizione la *variazione* di $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ dipende solamente dai *valori limiti* di x, y ed i coefficienti differenziali di y; e quindi $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ deve esso stesso dipendere solamente da questi valori limiti, cioè, V deve essere integrabile immediatamente. Nondimeno riprodurremo una dimostrazione più soddisfacente che è stata data di questa proposizione.

Supponiamo $V = \varphi(x, y, y', y'', \ldots)$.

Dinotino u e v due funzioni di x per ora indeterminate; dinoti α una quantità che varieremo indipendentemente da x. Dinoti $\psi(\alpha)$ ciò che diviene V quando si pone $u + \alpha v$ in vece di y, $u' + \alpha v'$ in vece di y', $u'' + \alpha v''$ in vece di y'', e così di seguito; così

$$\psi(\alpha) = \varphi(x, u + \alpha v, u' + \alpha v', u'' + \alpha v'', \ldots).$$

Si differenziino i due membri rispetto ad α, sicchè abbiamo un risultato che possiamo dinotare così,

$$\psi'(\alpha) = \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots.$$

S'integrino i due membri, da $\alpha = 0$ ad $\alpha = 1$; così

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \left\{ \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots \right\} d\alpha;$$

cioè, abbiamo quel che segue identicamente vero,

$$\begin{aligned} &\varphi(x, u + v, u' + v', u'' + v'', \ldots) \\ &= \varphi(x, u, u', u'', \ldots) \\ &+ \int_0^1 \left\{ \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots \right\} d\alpha. \end{aligned}$$

S' integrino i due membri rispetto ad x; così

$$\begin{aligned} &\int \varphi(x, u + v, u' + v', u'' + v'', \ldots)\, dx \\ &= \int \varphi(x, u, u', u'', \ldots)\, dx \\ &+ \int_0^1 d\alpha \left[\int \left\{ \frac{d\varphi}{du} v + \frac{d\varphi}{du'} v' + \frac{d\varphi}{du''} v'' + \ldots \right\} dx \right], \end{aligned}$$

in cui nell'ultimo termine si è cambiato l'ordine delle integrazioni indipendenti.

Con l'integrazione per parti

$$\int \frac{d\varphi}{du'} v' \, dx = v \frac{d\varphi}{du'} - \int v \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du'} \, dx,$$

$$\int \frac{d\varphi}{du''} v'' dx = v' \frac{d\varphi}{du''} - v \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du''} + \int v \frac{d^2}{dx^2} \frac{d\varphi}{du''} \, dx,$$

e così di seguito

Così

$$\int \varphi(x,\ u+v,\ u'+v',\ u''+v'', \ldots) \, dx$$

$$= \int \varphi(x,\ u,\ u',\ u'', \ldots) \, dx$$

$$+ \int_0^1 v \left(\frac{d\varphi}{du'} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du''} + \ldots \right) d\alpha$$

$$+ \int_0^1 v' \left(\frac{d\varphi}{du''} - \ldots \right) d\alpha$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_0^1 d\alpha \left[\int v \left\{ \frac{d\varphi}{du} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{d\varphi}{du''} - \ldots \right\} dx \right].$$

Ora per supposizione la relazione $K=0$ è soddisfatta identicamente qualunque sia il valore di y; così essa è soddisfatta ponendo $u+\alpha v$ in vece di y. Quindi

$$\frac{d\varphi}{du} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{d\varphi}{du''} - \ldots = 0.$$

Le funzioni u e v sono ora in nostro arbitrio; si ponga $y-u$ in vece di v ed abbiamo

$$\int \varphi(x, y, y', y'', \ldots)\, dx$$

$$= \int \varphi(x, u, u', u'', \ldots)\, dx$$

$$+ (y - u) \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{du'} - \frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{du''} + \ldots \right) d\alpha$$

$$+ (y' - u') \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{du''} - \ldots \right) d\alpha$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Così $\int V dx$ è quì attualmente esibito come un'espressione formata da termini, l'uno che racchiude solamente integrazione ordinaria rispetto ad x, e gli altri integrazione ordinaria rispetto ad α. La funzione u è sempre in nostro potere; essa dovrebbe essere scelta in modo che nessuna delle quantità che s'incontrano diventi infinita o indeterminata; può accadere che insieme a questa limitazione si possa porre $u = 0$.

367. Sarà ora facile di dare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione sia integrabile *per se* più di una volta.

Abbia V lo stesso significato come sopra.

Abbiamo, qualunque sia V,

$$\int \left\{ \int V dx \right\} dx = x \int V dx - \int x V dx.$$

Allora affinchè V sia integrabile *per se* due volte, naturalmente deve essere soddisfatta la condizione affinchè essa sia integrabile *per se* una volta; e quindi la sola condizione addizionale si è che xV sia anche integrabile *per se* una volta. Così affinchè V sia integrabile *per se* due volte, le condizioni necessarie e sufficienti sono che siano identicamente vere le seguenti relazioni

$$\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{dV}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dV}{dy''} - \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\frac{dVx}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dVx}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx}{dy''} - \ldots = 0 \ldots\ldots (2).$$

Possiamo modificare la forma di (2). Infatti

$$\frac{dVx}{dy} = x\frac{dV}{dy}, \quad \frac{dVx}{dy'} = x\frac{dV}{dy'}, \quad \frac{dVx}{dy''} = x\frac{dV}{dy''}, \ldots\ldots;$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dVx}{dy'} = x\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + \frac{dV}{dy'},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx}{dy''} = x\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} + 2\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy''},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{dVx}{dy'''} = x\frac{d^3}{dx^3}\frac{dV}{dy'''} + 3\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy'''},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si sostituisca in (2) omettendo i termini che sono zero per (1); allora otteniamo

$$\frac{dV}{dy'} - 2\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy''} + 3\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy'''} - \ldots = 0 \ldots\ldots (3).$$

Così (1) e (2) si possono rimpiazzare con (1) e (3).

Per una formola data nell'Art. 54 l'n^{mo} integrale di una qualunque espressione proposta è espresso in termini di $n+1$ integrali semplici. Da questa formola deduciamo che affinchè V sia integrabile *per se* n volte, è necessario e sufficiente che ciascuna delle seguenti espressioni sia integrabile *per se* una volta,

$$V, \; xV, \; x^2V, \ldots\ldots x^nV.$$

Per esempio, affinchè V sia integrabile *per se* tre volte, oltre le condizioni (1) e (2) o (1) e (3), deve essere identicamente vera la seguente,

$$\frac{dVx^2}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dVx^2}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx^2}{dy''} - \ldots = 0 \ldots\ldots (4).$$

Possiamo modificare la forma di (4). Infatti

$$\frac{d}{dx}\frac{dVx^2}{dy'} = x^2\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'} + 2x\frac{dV}{dy'},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{dVx^2}{dy''} = x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''} + 4x\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy''} + 2\frac{dV}{dy''},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{dVx^2}{dy'''} = x^2\frac{d^3}{dx^3}\frac{dV}{dy'''} + 6x\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy'''} + 6\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'''},$$

....

Si sostituisca in (4) omettendo i termini che sono zero per (1) e (3); allora otteniamo

$$\frac{dV}{dy''} - \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'''} + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dy''''} - \ldots = 0 \ldots (5).$$

Così si può prendere (5) in vece di (4), in unione con (1) e (2) o (1) e (3).

Aggiunta sulla Variabilità dei Limiti.

368. Nel metodo da noi adottato di trattare i problemi in cui si hanno cangiamenti dei limiti abbiamo seguito l'esempio dato in due opere molto elaborate sull'argomento, quelle di Strauch e Jellett; e decisamente raccomandiamo questo metodo come il migliore. Noi non attribuiamo alcuna *variazione* alla variabile indipendente, ma solamente alla variabile dipendente. Un altro metodo però è stato frequentemente adottato, e dovrebbe essere spiegato affinchè lo studente potesse intendere ogni rinvio ad esso che egli può incontrare nelle sue letture.

In questo metodo si attribuisce una variazione a tutte e due le variabili la dipendente e la indipendente.

Diventi x $x+\delta x$ ed y $y+\delta y$, si vogliono trovare le variazioni di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ...

Dinotiamo la variazione in $\frac{dy}{dx}$ con $\delta\frac{dy}{dx}$; così

$$\delta\frac{dy}{dx}=\frac{d(y+\delta y)}{d(x+\delta x)}-\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{\frac{dy}{dx}+\frac{d\delta y}{dx}}{1+\frac{d\delta x}{dx}}-\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx}+\frac{d\delta y}{dx}-\frac{dy}{dx}\frac{d\delta x}{dx}-\frac{dy}{dx},$$

trascurando le piccole quantità del secondo ordine.

Così adottando la notazione ordinaria del coefficiente differenziale, abbiamo

$$\delta y'=\frac{d\delta y}{dx}-y'\frac{d\delta x}{dx}$$

$$=\frac{d(\delta y-y'\delta x)}{dx}+y''\delta x,$$

o
$$\delta y'-y''\delta x=\frac{d(\delta y-y'\delta x)}{dx}.$$

In questo risultato si muti y in y'; così

$$\delta y''-y'''\delta x=\frac{d(\delta y'-y''\delta x)}{dx}$$

$$=\frac{d^2(\delta y-y'\delta x)}{dx^2}.$$

Similmente $\delta y'''-y''''\delta x=\frac{d^3(\delta y-y'\delta x)}{dx^3}$,

e così di seguito.

Si ponga ω per $\delta y-y'\delta x$; così

$$\delta y'=\frac{d\omega}{dx}+y''\delta x,$$

$$\delta y''=\frac{d^2\omega}{dx^2}+y'''\delta x,$$

$$\delta y'''=\frac{d^3\omega}{dx^3}+y''''\delta x,$$

. . . .

Sia ora V una funzione qualunque di x, y, ed i coefficienti differenziali di y rispetto ad x; e sia $U = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$. Si voglia esprimere la variazione di U che nasce dalle variazioni δx e δy in x ed y rispettivamente. Dinoti δV il cangiamento prodotto in V; allora

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} (V + \delta V) \frac{d(x+\delta x)}{dx}\,dx - \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} V \frac{d\delta x}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta V\,dx,$$

trascurando un termine del secondo ordine.

Ora $$\int V \frac{d\delta x}{dx}\,dx = V\delta x - \int \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x\,dx,$$

onde $$\int_{x_0}^{x_1} V \frac{d\delta x}{dx}\,dx = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x\,dx.$$

in cui $\left[\frac{dV}{dx}\right]$ dinota il coefficiente differenziale completo di V rispetto ad x.

Così $$\delta U = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \delta V - \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x \right\} dx.$$

E $$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dy'}\delta y' + \frac{dV}{dy''}\delta y'' + \dots,$$

$$\left[\frac{dV}{dx}\right] = \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} y' + \frac{dV}{dy'} y'' + \frac{dV}{dy''} y''' + \dots;$$

così

$$\delta V - \left[\frac{dV}{dx}\right] \delta x = \frac{dV}{dy}\omega + \frac{dV}{dy'}\omega' + \frac{dV}{dy''}\omega'' + \dots,$$

e finalmente

$$\delta U = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dV}{dy}\omega + \frac{dV}{dy'}\omega' + \frac{dV}{dy''}\omega'' + \dots \right) dx.$$

È inutile procedere oltre essendo giunti ad un risultato equivalente a quello nell' Art. 344; quì abbiamo ω in vece del δy che ivi si trova, e δx_1 e δx_0 per dx_1 e dx_0 rispettivamente.

Nelle applicazioni geometriche si osserverà che x ed y diventano con la variazione $x+\delta x$ ed $y+\delta y$ rispettivamente. Così $x_1+\delta x_1$ corrisponderà all' x_1+dx_1 dell' Art. 345, ed $y_1+\delta y_1$ corrisponderà all' $\left(Y+\frac{dY}{dx}dx_1\right)_1$ dell' Art. 345.

369. Per ulteriore informazione sul Calcolo delle Variazioni lo studente può consultare il trattato del Professore Jellett, e la *History of the Progress of the Calculus of the Variations during the Nineteenth Century*, del presente scrittore.

Gli esempii più interessanti in questo soggetto sono quelli che hanno relazione con la Fisica, come il problema della brachistochrona; conformemente includeremo alcune altre applicazioni di questa specie nella seguente scelta di esercizii.

ESEMPII.

1. Una curva di data lunghezza ha le sue estremità su due date linee rette che s' intersegano; determinare la sua forma quando l'area racchiusa tra la curva e la sua corda è un massimo.

2. Determinare una curva piana chiusa di dato perimetro che racchiuda un' area massima.

   (Si vegga *History* . . . , pag. 68.)

3. Si vogliono unire due punti fissi con una curva di data lunghezza in modo che l'area limitata dalla curva, le ordinate dei punti fissi, e l'asse delle ascisse sia un massimo, supponendo la lunghezza data maggiore di quella che si trova nella soluzione nell' Art. 353.

   (Si vegga *History* . . . , pag. 427).

4. Un piatto rettangolare deve accomodarsi con un coverchio di stagno di data altezza avendo le estremità verticali; determinare la forma affinchè la quantità del materiale adoperato sia la minima possibile.

5. Una montagna ha la forma di una porzione di sfera, e la velocità di un uomo che cammina su di essa varia come l'altezza al di sopra del circolo massimo orizzontale della sfera completa; mostrare che se egli vuol passare da un punto ad un altro nel minor tempo possibile, deve muoversi nel piano verticale che contiene i due punti.

6. Quando una superficie curva può essere divisa da un piano in due porzioni simmetriche l'intersezione del piano con la superficie, quando essa esiste, è in generale una linea di minima lunghezza sulla superficie.

(Si vegga *History* . . ., pag. 365.)

7. Trovare il valore minimo di

$$\int\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \operatorname{sen} x + \frac{(y+x-\operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x}\right\} dx.$$

(Si vegga *Philosophical Magazine* per Decembre, 1861.)

8. Si cerca il valore minimo di $\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$ sotto le seguenti condizioni; $y=1, \int_0^1 \frac{y}{y_1}\, dx = -1$.

(Si vegga *History* . . ., pag. 432.)

9. Si cerca la variazione di $\int V dx$, in cui V è una funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ e v, essendo $v = \int V' dx$, e V' anche una funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

(Si vegga *History* . . ., pag. 21.)

10. Dinoti s l'integrale $\int_0^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx$, e sia $\varphi(s)$ una funzione qualunque di s; allora si cerca la relazione tra x ed y che rende $\int_0^a \varphi(s)\, dx$ un massimo o un minimo mentre $\int_0^a \sqrt{(1+p^2)}\, dx$ ha un dato valore, a essendo una costante. Per un caso particolare si supponga $\varphi(s) = s$.

(Si vegga *History* . . ., pag. 453.)

11. Si cerca la curva in ogni punto della quale

$$\left\{ y + (m - x) \frac{dy}{dx} \right\} \left\{ y + (n - x) \frac{dy}{dx} \right\}$$

è un massimo o un minimo.

(Si vegga *History* . . . , pag. 1.)

12. Si cerca la curva in ogni punto della quale $y \dfrac{dy}{dx}$ è un massimo o un minimo, le variazioni di y e $\dfrac{dy}{dx}$ essendo prese in modo che in ogni punto $yx - y^2 \dfrac{dx}{dy}$ non sia sottoposto ad alcun cangiamento con la variazione.

(Si vegga *History* . . . , pag. 414.)

13. Applicare l'Art. 350 alla dimostrazione del punto supposto nell'Art. 339, cioè, che la curva richiesta nel problema della brachistochrona giace nel piano verticale che contiene i due punti dati.

14. La forma di un solido omogeneo di rotazione di data area superficiale, e descritto intorno ad un asse di data lunghezza, è tale che il suo momento d'inerzia rispetto all'asse è un massimo; dimostrare che la normale in ogni punto della curva generatrice è tre volte il raggio di curvatura.

15. Un dato volume di una data sostanza deve essere formato in un solido di rotazione, tale che il tempo di una piccola oscillazione intorno ad un asse orizzontale perpendicolare all'asse di figura sia un minimo; determinare la forma del solido.

(Si vegga *History* . . . , pag. 391.)

16. Un vaso di data capacità in forma di una superficie di rotazione con due estremità circolari, è riempito di fluido inelastico che gira intorno all'asse del vaso, e si suppone libero dall'azione della gravità. Investigare la forma del vaso affinchè la pressione totale che il fluido esercita sopra di esso sia la minima possibile, le grandezze delle estremità circolari essendo date.

Risultato. La curva generatrice è una catenaria.

17. Trovare l'equazione data dal Calcolo delle Variazioni per la sezione trasversale di un canale rettilineo ed uniforme, quando una delle tre quantità, la superficie, la capacità, e la pressione idrostatica normale, è o un massimo o un minimo, e le altre due sono date, le superficie e le pressioni terminali non essendo prese in considerazione.

Mostrare ancora che quando la superficie è un minimo e la capacità solamente è data, la sezione è circolare; e quando la pressione normale è un minimo la sezione è una catenaria o due linee rette, secondo che è data la superficie o la capacità.

18. Se vi sono due curve con le loro concavità in basso e terminate alle stesse estremità, una molecola che si muove sotto l' azione della gravità impiegherà un tempo maggiore per descrivere la curva superiore che per la curva inferiore, la velocità iniziale essendo supposta la stessa nei due casi.

(Si vegga *History* ..., pag. 348.)

AGGIUNTE

AL

CALCOLO INTEGRALE.

AGGIUNTE.

CAPITOLO I.

DELLE CONDIZIONI D'INTEGRABILITÀ PER LE FUNZIONI DIFFERENZIALI DI PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI, E DELLA LORO INTEGRAZIONE.

1. La funzione differenziale

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

in cui la variabile y si suppone legata ad x da una relazione qualunque $y = \varpi(x)$, equivale ad una funzione differenziale di una sola variabile $f(x)\, dx$, dinotando per brevità con $f(x)$ la funzione

$$\varphi[x, \varpi(x)] + \psi[x, \varpi(x)] \cdot \varpi'(x);$$

in modo che se si pone $z = \int f(x)\, dx$, e per conseguenza

$$dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

si potrà sempre, qualunque siano le funzioni φ, ψ, ϖ, ridurre alle quadrature la determinazione della funzione z.

Al contrario, se le variabili x ed y sono considerate come indipendenti, non si potrà in generale determinare una funzione z di queste due variabili, in modo che l'equazione (1) sia soddisfatta, nè costruire nello spazio una superficie di cui l'ordinata z abbia un differenziale totale espresso dal secondo membro di questa equazione. Infatti, per ciò, bisognerebbe che si avesse

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{dz}{dy} = \psi(x, y),$$

e quindi $$\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d\cdot\psi(x,y)}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Quando le funzioni φ e ψ verificano l'equazione (2), si dice che l'equazione (1) *soddisfa alla condizione d'integrabilità:* esiste allora una superficie di cui si può rappresentare con (1) l'equazione differenziale, e con $z=F(x,y)$ l'equazione in x, y, z.

2. In questo caso, la determinazione della funzione z si riduce alle quadrature; infatti, poichè si ha

$$\frac{dz}{dx}=\varphi(x,y),$$

bisogna che la funzione z sia della forma

$$z=\int\varphi(x,y)\,dx+\theta(y),$$

$\theta(y)$ dinotando una funzione della sola variabile y che deve essere trattata come una costante nell'integrazione indicata rispetto ad x. Da ciò si ricava, in virtù della regola di differenziazione delle funzioni sotto il segno $\int$:

$$\frac{dz}{dy}=\psi(x,y)=\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx+\frac{d\cdot\theta(y)}{dy},$$

$$\theta(y)=\int\left[\psi(x,y)-\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx\right]dy,$$

$$z=\int\varphi(x,y)\,dx+\int\left[\psi(x,y)-\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx\right]dy+\textit{cost}.$$

Affinchè effettivamente $\theta(y)$ non contenga x, bisogna che si abbia

$$\frac{d\cdot\left[\psi(x,y)-\int\frac{d\cdot\varphi(x,y)}{dy}dx\right]}{dx}=0,$$

ciò che fa ricadere sulla condizione d'integrabilità espressa dall'equazione (2).

Prendiamo per esempio la funzione

$$dz=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

che soddisfa alla condizione d'integrabilità: si avrà

$$z = \int \frac{y dx}{x^2 + y^2} + \theta(y) = \text{arc} \cdot \tan \frac{x}{y} + \theta(y),$$

$$\frac{d \cdot \theta(y)}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{d \cdot \text{arc} \cdot \tan \frac{x}{y}}{dy} = 0,$$

e per conseguenza in questo caso semplicissimo

$$z = \text{arc} \cdot \tan \frac{x}{y} + cost.$$

3. Queste considerazioni si estendono alle funzioni di un numero qualunque di variabili. Così, affinchè esista una funzione u di tre variabili indipendenti x, y, z, suscettibile di soddisfare all'equazione differenziale

$$du = Xdx + Ydy + Zdz \dots\dots\dots\dots (3)$$

in cui X, Y, Z dinotano, per brevità, delle funzioni delle tre variabili x, y, z, bisogna che si abbia

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy} \dots\dots\dots (4).$$

Reciprocamente, allorchè queste equazioni di condizione sono soddisfatte, si determina la funzione u con una serie di quadrature. Così si ha

$$u = \int X dx + \theta(y, z),$$

d'onde si ricava, differenziando sotto il segno $\int$,

$$\frac{du}{dy} = Y = \int \frac{dX}{dy} dx + \frac{d \cdot \theta(y, z)}{dy},$$

e per conseguenza

$$\theta(y, z) = \int \left(Y - \int \frac{dX}{dy} dx \right) dy + \chi(z).$$

Per determinare la funzione $\chi(z)$, si osserverà che

$$\frac{du}{dz} = Z = \int \frac{dX}{dz} dx + \frac{d \cdot \theta(y, z)}{dz};$$

ma, da un'altra parte, in virtù dell'equazione precedente,

$$\frac{d\cdot\theta(y,z)}{dz}=\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy+\frac{d\cdot\chi(z)}{dz};$$

dunque

$$\frac{d\cdot\chi(z)}{dz}=Z-\int\frac{dX}{dz}dx-\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy,$$

$$\chi(z)=\int\left[Z-\int\frac{dX}{dz}dx-\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy\right]dz,$$

e finalmente

$$u=\int X\,dx+\int\left(Y-\int\frac{dX}{dy}dx\right)dy$$

$$+\int\left[Z-\int\frac{dX}{dz}dx-\int\left(\frac{dY}{dz}-\int\frac{d^2X}{dy\,dz}dx\right)dy\right]dz+cost.$$

Affinchè la funzione $\theta(y,z)$ non contenga x, bisogna che si abbia

$$\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0;$$

questa condizione essendo soddisfatta, $\chi(z)$ non conterrà x, se si ha inoltre

$$\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}=0;$$

e finalmente $\chi(z)$ non conterrà y, purchè si abbia

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=0.$$

Si ritrovano dunque così le tre equazioni (4).

CAPITOLO II.

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DUE VARIABILI E DEL PRIMO ORDINE.

4. Il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali tra due variabili ha per oggetto di trovare, tra la variabile indipendente e la funzione, un'equazione che soddisfi nel modo più generale all'equazione differenziale proposta, per mezzo dei valori che se ne deducono per i coefficienti differenziali dei diversi ordini. In altri termini, si tratta di trovare l'equazione più generale delle curve che godono in tutt' i loro punti della proprietà espressa dall'equazione differenziale.

Nel Calcolo Differenziale sono stati indicati i legami che sussistono tra un'equazione differenziale di un ordine qualunque, e gl'integrali o le equazioni primitive dei diversi ordini da cui si può concepire che derivi la proposta, per la differenziazione immediata o per la differenziazione combinata con l'eliminazione delle costanti. Poggiandoci su tali principii, esamineremo i casi principali in cui si può trovare l'integrale da cui deriva un'equazione differenziale proposta.

Separazione delle variabili.

5. La formola generale delle equazioni differenziali di primo ordine a due variabili è

$$F(x, y, y') = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Se questa equazione è algebrica e di primo grado rispetto ad y' essa può mettersi sotto la forma

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0 \dots\dots\dots\dots (2).$$

L'equazione (2) s'integra sempre, o almeno l'integrazione è ridotta a semplici quadrature, allorchè le variabili vi sono *separate*, vale a dire allorchè questa equazione è messa sotto la forma

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0.$$

L'integrale generale è allora

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = C,$$

C dinotando una costante arbitraria, o

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy = 0,$$

passando agl'integrali definiti, e rappresentando con y_0 il valore di y che corrisponde all'ascissa x_0.

Sia proposta, per esempio, l'equazione

$$ydx - xdy = 0: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

essa può mettersi sotto la forma

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0;$$

e le variabili trovandosi separate, si avrà integrando $\log y - \log x = C$, d'onde si ricava $y = cx$, dinotando con c il numero di cui il logaritmo è C.

La separazione delle variabili si opera immediatamente, tutte le volte che l'equazione (1) si presenta sotto la forma

$$y' = \varphi(x)\,\psi(y), \text{ d'onde } \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx.$$

6. Altre volte la separazione non si opera che per mezzo di una trasformazione o di un cambiamento di variabili. Se, per esempio, le funzioni φ, ψ che entrano nell'equazione (2) sono omogenee rispetto alle variabili x, y, si porrà $y = xt$, onde

$$\varphi(x, y) = x^n\,\varphi_1(t), \quad \psi(x, y) = x^n\,\psi_1(t).$$

n dinotando la somma degli esponenti di x e di y in ogni termine dell'equazione proposta. In conseguenza questa equazione, dopo di aver tolto il fattore x^n, diverrà

$$\varphi_1(t)\,dx + \psi_1(t)(xdt + tdx) = 0,$$

onde
$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi_1(t)\,dt}{\varphi_1(t)+t\,\psi_1(t)}=0,$$
equazione in cui le variabili sono separate. È così che l'equazione
$$xdy-ydx=\sqrt{(x^2+y^2)}\,dx$$
diviene
$$\frac{dx}{x}-\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)}}=0;$$
onde, integrando per logaritmi e ripassando in seguito dai logaritmi ai numeri,
$$c=\frac{x}{t+\sqrt{(1+t^2)}}=\frac{x^2}{y+\sqrt{(x^2+y^2)}}=-y+\sqrt{(x^2+y^2)},$$
$$x^2-2\,cy-c^2=0.$$
In effetto, allorchè si differenzia quest'ultima equazione e si elimina c tra l'equazione primitiva e la sua differenziale immediata, si ricade sull'equazione differenziale proposta.

Accade in alcuni casi che si può, con un cangiamento di variabili o di coordinate, rendere omogenea un'equazione che non è tale. L'esempio più semplice di questa trasformazione ci è fornito dall'equazione
$$(ax+by+c)\,dx+(a'x+b'y+c')\,dy=0.$$
Se si pone $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$ (ciò che equivale a cambiare l'origine delle coordinate x, y, senza mutare la direzione degli assi), e se si dispone delle costanti arbitrarie α, β, in modo da soddisfare alle equazioni di condizione
$$a\alpha+b\beta+c=0,\ a'\alpha+b'\beta+c'=0,$$
l'equazione proposta diverrà
$$(a\xi+b\eta)\,d\xi+(a'\xi+b'\eta)\,d\eta=0,$$
e sarà resa omogenea. La trasformazione precedente non sarebbe più possibile, se si avesse $ab'-ba'=0$, ciò che renderebbe infiniti i valori di α,β. Ma in questo caso l'eliminazione di b' mette l'equazione proposta sotto la forma
$$(ax+by)\left(dx+\frac{a'}{a}\,dy\right)+cdx+c'dy=0;$$

e se si pone $ax + by = t$, si ottiene un'equazione in t, dt, dx, in cui le variabili si separano senza difficoltà, come in tutte quelle in cui una delle variabili entri solamente col suo differenziale.

Equazione lineare di primo ordine.

7. Una trasformazione semplicissima opera anche la separazione delle variabili nell'equazione

$$y' + y\,\varphi(x) = \psi(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

che si chiama *equazione lineare di primo ordine*, poichè essa non contiene nè le potenze, nè i prodotti della funzione y e della sua derivata y'. Sia

$$y = \theta t,\ dy = \theta dt + t d\theta,$$

θ e t dinotando due funzioni ausiliarie ed incognite di x: la proposta diverrà

$$\theta dt + t d\theta + \theta t \cdot \varphi(x)\,dx = \psi(x)\,dx.$$

Si può disporre delle funzioni indeterminate t e θ, in modo da decomporre questa equazione nelle due seguenti

$$\theta dt = \psi(x)\,dx, \quad d\theta + \theta \cdot \varphi(x)\,dx = 0.$$

La seconda si presta alla separazione delle variabili e dà

$$\theta = e^{-\int \varphi(x)\,dx}$$

Dopo che si è sostituito questo valore nella prima, viene

$$dt = \psi(x)\,dx \cdot e^{\int \varphi(x)\,dx}, \quad t = \int \psi(x)\,dx \cdot e^{\int \varphi(x)\,dx} + C,$$

onde $$y = \left[\int \psi(x)\,dx \cdot e^{\int \varphi(x)\,dx} + C\right] e^{-\int \varphi(x)\,dx}.$$

Esempii. 1.° $$y' + y = -x:$$

viene

$$\int \varphi(x)\,dx = x, \int \psi(x)\,dx \cdot e^x = -\int e^x x\,dx = (1 - x)\,e^x + C;$$

$$y = 1 - x + Ce^{-x}.$$

2.° $$y' + y = -x^3.$$

si ha

$$\int \varphi(x)\,dx = x, \int \psi(x)\,dx \cdot e^x = -e^x[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)] + C;$$

$$y = -[x^3 - 3x^2 + 6(x-1)] + Ce^{-x}.$$

3.° $$y' + \frac{y}{x} = -x:$$

in questo caso gli esponenziali spariscono, poichè si ha

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log x,\ e^{\int \varphi(x)\,dx} = e^{\log x} = x,$$

d'onde si ricava senza difficoltà

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3}x^2.$$

Si integra ancora l'equazione

$$y^{m-1}y' + y^m\varphi(x) = \psi(x);$$

poichè, per ridurla alla forma dell'equazione (4), basta porre $y^m = u$.

Finalmente, se la proposta fosse

$$y' + y\varphi(x) = y^n\psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

si ridurrebbe anche alla forma (4), ponendo $y^{n-1} = \frac{1}{u}$. L'equazione (5) è conosciuta sotto il nome di *equazione di Bernoulli.*

Del fattore atto a rendere l'equazione integrabile.

8. Quando il primo membro dell'equazione (2) è un differenziale esatto $d \cdot \varpi(x, y)$, si trova questa funzione ϖ col calcolo indicato nell'Art. 2, e l'integrale si presenta sotto la forma $\varpi(x, y) = c$, c dinotando una costante arbitraria. Reciprocamente, dopo che si sarà ottenuto, con un mezzo qualunque, l'integrale dell'equazione (2), supponiamo che esso si ponga sotto la forma $\varpi(x, y) = c$, risolvendo l'equa-

zione ottenuta rispetto alla costante arbitraria che l'integrazione ha introdotta: la differenziazione darà

$$\frac{d\varpi}{dx}dx + \frac{d\varpi}{dy}dy = 0,$$

equazione di cui il primo membro è necessariamente un differenziale esatto, e che deve sussistere insieme con l'equazione (2). Si avrà dunque

$$\frac{\frac{d\varpi}{dx}}{\varphi(x, y)} = \frac{\frac{d\varpi}{dy}}{\psi(x, y)} = \mu,$$

μ dinotando in generale una funzione di x e di y. Per conseguenza, se si moltiplica il primo membro dell'equazione (2) pel fattore μ, questo primo membro diverrà identico col differenziale totale $d\varpi$, e soddisferà alla condizione d'integrabilità.

Così il primo membro dell'equazione (3) non soddisfa alla condizione d'integrabilità; ma come si è trovato (Art. 5) per l'integrale di quella equazione

$$\frac{y}{x} = c, \text{ onde } \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

si vede che il fattore $\frac{1}{x^2}$ è quello che rende il primo membro della proposta un differenziale esatto.

Similmente l'integrale dell'equazione

$$[y + \sqrt{(x^2 + y^2)}]\, dx - xdy = 0$$

potendo (Art. 6) essere messo sotto la forma

$$-y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = c, \text{ onde } \frac{xdx + [y - \sqrt{(x^2 + y^2)}]\, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0,$$

ne risulta che il fattore pel quale bisogna moltiplicare la proposta per renderne il primo membro un differenziale esatto è,

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}\,[y + \sqrt{(x^2 + y^2)}]} = -\frac{y - \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

9. Si può osservare che, quando si conosce un valore del fattore μ, se ne possono dedurre infiniti altri: infatti, poichè

$$\mu\,[\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy] = d\varpi,$$

si ha
$$\mu f(\varpi)\,[\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy] = f(\varpi)\,d\varpi, \quad \ldots . \tag{6}$$

$f(\varpi)$ dinotando una funzione qualunque della quantità ϖ di cui si conosce la composizione in x, y. Ora l'espressione $f(\varpi)\,d\varpi$ è essenzialmente un differenziale esatto, e la determinazione della funzione da cui esso deriva risulta da una semplice quadratura: dunque il primo membro dell'equazione (6) è anche un differenziale esatto. In altri termini, il fattore $\mu f(\varpi)$, in cui le funzioni μ, ϖ sono conosciute, ed in cui la funzione f può essere particolarizzata in infiniti modi, gode come il fattore μ della proprietà di rendere il primo membro dell'equazione (2) un differenziale esatto.

Prendiamo per esempio l'equazione (3) e supponiamo semplicemente $f(\varpi) = \varpi$. Si ha in questo caso

$$\mu = \frac{1}{x^2}, \quad \varpi = \frac{y}{x}, \quad \text{onde} \quad \mu f(\varpi) = \frac{y}{x^3}.$$

Quest'ultimo fattore renderà dunque il primo membro dell'equazione proposta un differenziale esatto; ed infatti si ha

$$\frac{y}{x^3}(x dy - y dx) = \frac{x^2 y dy - y^2 x dx}{x^4} = \frac{1}{2}\,d\cdot\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

10. Per determinare *a priori* il fattore μ, bisognerebbe soddisfare all'equazione

$$\frac{d\cdot\mu\varphi(x, y)}{dy} = \frac{d\cdot\mu\psi(x, y)}{dx},$$

o
$$\varphi\frac{d\mu}{dy} - \psi\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dx}\right) = 0;$$

ma l'integrazione di questa equazione che è alle differenze parziali rispetto alla funzione μ delle due variabili x, y, suppone in generale, come si vedrà in seguito, l'integrazione antecedente dell'equazione (2). Solamente in alcuni casi particolarissimi si può assegnare il fattore μ e per conseguenza ridurre l'integrazione della proposta alle quadrature.

Se, per esempio, il fattore μ non dovesse contenere che la variabile x, l'equazione precedente si ridurrebbe ad

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{\psi}\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}\right);$$

e in virtù dell'ipotesi, bisognerebbe che il secondo membro di quest'ultima equazione si riducesse ad una funzione $f(x)$ della sola variabile x. Si avrebbe dunque $\mu=e^{\int f(x)\,dx}$. D'altronde non si restringerà la generalità dell'ipotesi ponendo $\psi=1$, poichè si può sempre ammettere che l'equazione (2) sia stata divisa pel coefficiente di dy; ed allora, bisognerà che il coefficiente $\frac{d\varphi}{dy}$ sia indipendente da y, e che si abbia

$$\varphi(x,y)=yf(x)+F'(x);$$

vale a dire che questo caso è quello in cui la proposta si presenta sotto la forma d'un'equazione lineare di primo ordine.

11. Quando l'equazione (2) è omogenea, essa può scriversi

$$x^n\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)dx+x^n\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)dx=0\,;\,\ldots\ldots\,(7)$$

e si è veduto (Art. 6) che essa si cambia in

$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)d\cdot\frac{y}{x}}{\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)}=0\,,\,\ldots\ldots\ldots\,(8)$$

equazione in cui le variabili sono separate, e che è per conseguenza un differenziale esatto. Il fattore pel quale si è dovuto moltiplicare (7) per ottenere (8) è

$$\mu=\frac{1}{x^{n+1}\left[\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)\right]}=\frac{1}{x\varphi(x,y)+y\psi(x,y)}\,.$$

Equazioni superiori di primo ordine.

12. Se l'equazione (1) contiene la derivata y' elevata al quadrato o a potenze superiori, se ne ricaveranno con la risoluzione algebrica altre equazioni

$$y' - f_1(x, y) = 0, \quad y' - f_2(x, y) = 0, \text{ etc.},$$

in numero eguale a quello che indica il grado della proposta rispetto ad y'. S'integreranno queste equazioni separatamente, se ciò è possibile: e ciascun integrale, completato da una costante arbitraria, soddisferà alla proposta. Il prodotto di tutti questi integrali soddisferà dunque nel modo più generale all'equazione differenziale proposta; o, in altri termini, questo prodotto ne sarà l'integrale generale. Si potrebbero dinotare le costanti arbitrarie che entrano in ciascun fattore con lettere differenti; ma non si restringerà la generalità dell'integrale dinotando tutte queste costanti arbitrarie con la stessa lettera; poichè, se si attribuiscono a questa lettera unica tutt'i valori numerici possibili, si otterranno evidentemente tutti gl'integrali particolari che ciascun fattore dell'integrale generale è suscettibile di fornire.

Per esempio, la risoluzione dell'equazione

$$y'^2 - ax = 0$$

dà
$$y' - \sqrt{ax} = 0, \quad y' + \sqrt{ax} = 0,$$

equazioni che hanno per integrali

$$c + y - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0, \quad c_1 + y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0.$$

Facendo il prodotto si ha, per l'integrale generale della proposta,

$$\left(c + y - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}\right)\left(c_1 + y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}\right) = 0;$$

e non se ne diminuirà la generalità se si pone $c_1 = c$, ciò che dà al prodotto la forma razionale

$$(c + y)^2 - \frac{4}{9}ax^3 = 0.$$

13. Si può in alcuni casi eludere la risoluzione dell'equazione proposta rispetto ad y'. Se, per esempio la variabile y non vi è contenuta, e che essa sia riducibile alla forma $x=f(y')$, si avrà, applicando alla funzione $dy=y'dx$ la regola dell'integrazione per parti,

$$y=y'x-\int xdy'+C=y'f(y')-\int f(y')\,dy'+C.$$

Allorchè la quadratura indicata nel secondo membro di questa equazione potrà effettuarsi algebricamente, non si dovrà fare altro che eliminare y' tra questa equazione e la proposta per ottenere l'integrale completato dalla costante arbitraria C. Si tratterebbe in modo simile l'equazione $y=f(y')$, dopo di aver posto $y'=\frac{1}{x'}$, vale a dire dopo di aver preso y per variabile indipendente.

14. Quando la proposta sarà della forma $y=f(x,y')$, se ne ricaverà

$$y'=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}.$$

Quest'ultima equazione è di primo ordine rispetto alle variabili x, y': ammettendo che essa cada nella categoria di quelle che si sanno integrare, basterà eliminare y' tra l'integrale ottenuto e la proposta, per avere l'integrale stesso della proposta.

Per esempio, se questa è della forma

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

si avrà

$$y'=\varphi(y')+[\psi'(y')+x\varphi'(y')]\frac{dy'}{dx},\ \text{o}\ \frac{dx}{dy'}-x\frac{\varphi'(y')}{y'-\varphi(y')}=\frac{\psi'(y')}{y'-\varphi(y')}$$

e per conseguenza (Art. 7)

$$x=\left[\int\frac{\psi'(y')\,dy'}{y'-\varphi(y')}\cdot e^{-\int\frac{\varphi'(y')\,dy'}{y'-\varphi(y')}}+C\right]\cdot e^{\int\frac{\varphi'(y')\,dy'}{y'-\varphi(y')}}.$$

Si deve osservare in particolare l'equazione

$$y=xy'+\psi(y'),\ \dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

da cui si ricava con la differenziazione

$$0 = [\psi'(y') + x] \frac{dy'}{dx} \dots\dots\dots\dots (10)$$

Si soddisfa all'equazione (10) ponendo

$$\frac{dy'}{dx} = 0, \text{ onde } y' = c,$$

e la sostituzione di questo valore di y' nell'equazione (9) dà per integrale generale

$$y = cx + \psi(c) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

equazione di una linea retta che si sposta sul piano xy quando si fa variare la costante arbitraria c.

Si soddisfa ancora all'equazione (10) ponendo

$$\psi'(y') + x = 0; \dots\dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

e se si elimina y' tra le equazioni (9) e (12), si ha un'equazione in x, y, che soddisfa all'equazione (10), ma che non ne è l'integrale generale, poichè esso non contiene costante arbitraria, e che non è neanche un integrale particolare, poichè si ricava dall'equazione (12) un valore di y' in x, incompatibile con i valori $y' = c$, ricavati dall'integrale generale. Quest'equazione risultante in x, y è dunque ciò che dicesi un integrale *singolare* della proposta.

CAPITOLO III.

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, D'ORDINE QUALUNQUE.

15. Si chiama equazione differenziale *lineare* quella che non racchiude, nè le potenze superiori alla prima, nè i prodotti della funzione e dei suoi coefficienti differenziali dei diversi ordini, e che è per conseguenza della forma

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = V, \ldots\ldots (1)$$

P, Q, ... U, V dinotando delle funzioni della sola variabile indipendente x.

Supponiamo da principio che il secondo membro di (1) sia nullo, o che si debba integrare l'equazione

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = 0. \ldots\ldots (2)$$

La proprietà caratteristica di un'equazione di questa forma consiste in ciò che, se si hanno diversi valori particolari di y in funzione di x che vi soddisfano, valori che dinoteremo con $y_1, y_2, y_3, \ldots$, la somma di questi valori, moltiplicati rispettivamente per costanti arbitrarie C_1, C_2, C_3, etc., o

$$C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \text{etc.},$$

vi soddisfa egualmente. La forma del calcolo sul quale riposa questa proposizione, risulta così evidentemente dalla forma stessa dell'equazione (2), che basta l'indicarlo.

Segue da ciò che se si conoscano n valori particolari e distinti, $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, atti a soddisfare all'equazione (2), questa avrà per integrale generale

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n;$$

poichè questo valore di y soddisfa alla proposta, ed a motivo delle n costanti arbitrarie e distinte che esso racchiude, esso ha tutta la generalità che comporta un tal integrale.

16. Ora, vi è un caso in cui si trovano facilmente n valori particolari di y atti a soddisfare all'equazione (2): si è quello in cui tutt'i coefficienti $P, Q, \dots U$ si riducono a costanti; infatti se si pone $y = e^{mx}$, si avrà, qualunque sia i, $y^{(i)} = m^i e^{mx}$; in modo che questo valore di y, sostituito nell'equazione (2), darà per risultato

$$e^{mx}(m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \dots + U) = 0;$$

ed allora, è chiaro che la funzione $y = e^{mx}$ soddisfa all'equazione (2), purchè il valore assegnato al numero m sia una delle radici dell'equazione numerica

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \dots + U = 0 \dots\dots (3)$$

Dunque, se si dinotano con $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$ le n radici di questa equazione, e con $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ delle costanti arbitrarie, l'equazione (2) ha per integrale generale

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \dots + C_n e^{m_n x} \dots (4)$$

17. Allorchè tutte le radici dell'equazione (3) sono reali e disuguali, si verifica facilmente che le costanti arbitrarie $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ possono essere sempre numericamente determinate per mezzo dei valori iniziali

$$y_0, y'_0, y''_0, \dots\dots y_0^{(n-1)},$$

corrispondenti ad $x = 0$. Sia, per esempio, $n = 3$, si avrà

$$y_0 = C_1 + C_2 + C_3,$$

$$y'_0 = m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3,$$

$$y''_0 = m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 + m_3^2 C_3;$$

da cui si ricava

$$C_1 = \frac{m_2 m_3 y_0 - (m_2 + m_3) y'_0 + y''_0}{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)},$$

$$C_2 = \frac{m_1 m_3 y_0 - (m_1 + m_3) y'_0 + y''_0}{(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)},$$

$$C_3 = \frac{m_1 m_2 y_0 - (m_1 + m_2) y'_0 + y''_0}{(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)}.$$

La simmetria di queste formole indica sufficientemente la legge delle espressioni che si otterrebbero, se si avesse un maggior numero di costanti arbitrarie a determinare, per mezzo dei valori iniziali della funzione e delle sue derivate.

18. Se l'equazione (3) avesse radici immaginarie, le esponenziali divenute immaginarie si aggrupperebbero a due a due e si trasformerebbero in seni e coseni di archi reali. Così, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ dinotando due radici immaginarie coniugate dell'equazione (3), i termini esponenziali che queste radici introducono nell'integrale generale, cioè

$$C_1 e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + C_2 e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$$

si cambiano in

$$e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right)$$

$$= e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}\beta x\right],$$

e finalmente prendono la forma

$$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\operatorname{sen}\beta x),$$

quando si stabiliscono tra le costanti indeterminate C_1, C_2, M, N le due relazioni

$$C_1 + C_2 = M, \quad (C_1 - C_2)\sqrt{-1} = N.$$

Si può ancora semplificare questa espressione ponendo

$$M = \lambda\cos\varepsilon, \quad N = -\lambda\operatorname{sen}\varepsilon,$$

ciò che dà

$$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\operatorname{sen}\beta x) = \lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x + \varepsilon):$$

allora λ ed ε sono le due costanti arbitrarie.

19. Allorchè alcune delle radici dell'equazione (3) diventano eguali tra loro, l'analisi precedente si trova in difetto. Sia, per esempio, $m_1 = m_2$: i termini $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ si confonderanno in un solo $(C_1 + C_2)e^{m_1 x}$, ed il coefficiente $C_1 + C_2$ sarà equivalente ad una sola costante arbitraria, di maniera che l'integrale (4) non avrà più la generalità richiesta. In questo caso, se poniamo

$$y_1 = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

la sostituzione di questo valore nell'equazione (3) darà

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x)(m_1{}^n + Pm_1{}^{n-1} + Qm_1{}^{n-2} + \ldots + Tm_1 + U)$$
$$+ B_1 e^{m_1 x}[nm_1{}^{n-1} + (n-1)Pm_1{}^{n-2} + (n-2)Qm_1{}^{n-3} + \ldots + T] = 0.$$

Il fattore

$$m_1{}^n + Pm_1{}^{n-1} + Qm_1{}^{n-2} + \ldots + Tm_1 + U$$

svanisce, poichè m_1 è radice dell'equazione (3); ed il polinomio che moltiplica $B_1 e^{m_1 x}$ svanisce ancora, poichè, per ipotesi, m_1 essendo una radice doppia dell'equazione (3) è anche una radice dell'equazione derivata

$$nm^{n-1} + (n-1)Pm^{n-2} + (n-2)Qm^{n-3} + \ldots + T = 0.$$

Dunque, se si continua ad indicare con $m_3, \ldots m_n$ le radici semplici dell'equazione (3), e se si pone

$$y = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x},$$

si soddisferà all'equazione (2) di cui si avrà l'integrale generale, poichè le costanti $A_1, B_1, C_3, \ldots C_n$, di numero n, sono irriducibili tra loro.

Si troverebbe similmente che, nel caso di tre radici eguali m_1, m_2, m_3, bisogna rimpiazzare il trinomio

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

con $$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_1 x^2)$$

e così di seguito.

La forma che prende l'integrale generale nel caso in cui l'equazione (3) ha radici eguali, risulta ancora dal calcolo seguente.

In luogo di porre immediatamente $m_2 = m_1$, facciamo da principio $m_2 = m_1 + \varepsilon$, ciò che darà

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x})$$
$$= e^{m_1 x}\left[C_1 + C_2\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}\right)\right],$$

sostituendo ad $e^{\varepsilon x}$ la serie sempre convergente che ne è lo sviluppo. È permesso di mettere questa espressione sotto un'altra forma, cambiando le costanti arbitrarie, e ponendo per ciò $C_1 + C_2 = A_1$, $C_2\varepsilon = B_1$. In questo modo, l'espressione precedente diviene

$$e^{m_1 x}\left[A_1 + B_1 x + B_1\left(\frac{\varepsilon x^2}{1\cdot 2} + \frac{\varepsilon^2 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}\right)\right];$$

e se si fa ora $\varepsilon = 0$, essa si riduce al secondo membro dell'equazione (5).

Il trinomio (6) essendo stato rimpiazzato da

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x},$$

nel caso in cui le due radici m_1, m_2 diventano eguali, si potrà fare $m_3 = m_1 + \varepsilon$, ciò che muta l'espressione precedente in

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_3 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}\left[A_1 + B_1 x + C_3\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1\cdot 2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}\right)\right].$$

Nulla impedisce di cambiare le costanti ponendo

$$A_1 + C_3 = D_1,\ B_1 + C_3\,\varepsilon = E_1,\ \frac{1}{2}C_3\,\varepsilon^2 = F_1;$$

con ciò il secondo membro dell'equazione precedente diviene

$$e^{m_1 x}\left[D_1 + E_1\,x + F_1\,x^2 + F_1\left(\frac{\varepsilon x^3}{3} + \text{etc.}\right)\right],$$

e si riduce ad

$$e^{m_1 x}(D_1 + E_1\,x + F_1\,x^2),$$

allorchè si fa $\varepsilon = 0$. Lo stesso metodo si applica evidentemente al caso in cui il numero delle radici eguali diviene qualunque.

20. Se si conoscesse un valore particolare y_1, atto a soddisfare all'equazione (2), si potrebbe abbassare di un'unità l'ordine dell'equazione (2) ed anche l'ordine dell'equazione (1). Per ciò basterebbe fare

$$y = y_1\int z dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

z dinotando una nuova variabile, funzione di x. Osserviamo a tale effetto che, se si dinotano con u, v delle funzioni qualunque di una stessa variabile indipendente, si ha:

$$d \cdot uv = udv + vdu,$$

$$d^2 \cdot uv = ud^2v + 2dudv + vd^2u,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^n \cdot uv = ud^nv + \frac{n}{1} \cdot dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot d^2ud^{n-2}v + \ldots$$

$$\ldots . + \frac{n}{1} \cdot dvd^{n-1}u + d^nu.$$

In conseguenza di queste formole, la sostituzione del valore di y nell'equazione (1) dà

$$y_1 z^{(n-1)} + (ny'_1 + Py_1) z^{(n-2)}$$

$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_1'' + (n-1)Py_1' + Qy_1\right] z^{(n-3)} + \ldots$$

$$\ldots + (y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} + \ldots + Uy_1) \int z dx = V.$$

Ora, il coefficiente di $\int z dx$ in questa equazione è nullo per ipotesi, poichè y_1 è un integrale particolare dell'equazione (2). Se si divide questa equazione per y_1 che è una funzione conosciuta di x, essa sarà ridotta alla forma

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = \frac{V}{y_1}, \ldots (8)$$

$P_1, Q_1, \ldots T_1$, dinotando come $P, Q, \ldots T$, delle funzioni conosciute di x, e l'ordine dell'equazione (1) si troverà abbassato di un'unità.

Nel caso in cui si tratta d'integrare, non già l'equazione (1), ma l'equazione (2), l'ultima equazione ottenuta è rimpiazzata da

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = 0 \ldots\ldots (9).$$

In questa ipotesi, se si conoscesse un secondo valore particolare y_2, atto a verificare l'equazione (2), uno dei valori di z ricavati dall'equazione (9) dovrebbe verificare l'equazione (7), dopo di avervi rimpiazzato y con y_2. Si avrebbe dunque, dinotando con z_1 questo valore particolare di z,

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx, \text{ o } z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Dunque, se si conoscono due integrali particolari dell'equazione (2), si conoscerà con ciò un integrale particolare dell'equazione (9); ed in conseguenza l'ordine dell'equazione (9) si abbasserà di un' unità per mezzo della trasformazione $z = z_1 \int u dx$. Siccome questo ragionamento può essere continuato di mano in mano, ne segue che se si conoscono m integrali particolari dell'equazione (2), l'integrazione generale di questa equazione, ed anche quella dell'equazione (1), saranno ridotte a dipendere dall'integrazione di un'equazione differenziale dell'ordine $n - m$; di maniera che questa essendo integrata, si avrà l'integrale generale dell'equazione (1) con semplici quadrature. Bel teorema dovuto a Lagrange.

21. Quando i coefficienti $P, Q, \ldots U$ dell'equazione (1) sono numeri costanti, il solo ultimo termine V essendo funzione di x, si conoscono n integrali particolari dell'equazione (2),

$$y_1 = e^{m_1 x},\ y_2 = e^{m_2 x}, \ldots y_n = e^{m_n x}:$$

$m_1, m_2, \ldots m_n$ dinotando sempre le radici dell' equazione (3). L'integrazione generale dell'equazione (1) si trova dunque ridotta alle quadrature.

Sia, per esempio, l'equazione lineare di secondo ordine

$$y'' + Py' + Qy = V,$$

in cui P, Q dinotano dei numeri costanti: m_1, m_2 sono le radici dell'equazione numerica

$$m^2 + Pm + Q = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

e si ha $$y_1 = e^{m_1 x},\ y_2 = e^{m_2 x}.$$

Poniamo $$y = y_1 \int z dx = e^{m_1 x} \int z dx:$$

la trasformata in z sarà

$$z' + (2m_1 + P) z = Ve^{-m_1 x},\ \text{o}\ z' - (m_2 - m_1) z = Ve^{-m_1 x},$$

per essere $P = -(m_1 + m_2)$. Facciamo inoltre

$$z = z_1 \int u dx = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} \int u dx = (m_2 - m_1)\, e^{(m_2 - m_1)x} \int u dx:$$

la trasformata in u darà

$$u = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_2 - m_1}.$$

Da ciò si ricava

$$z = e^{(m_2 - m_1)x} \int V e^{-m_2 x}\, dx,$$

$$y = e^{m_1 x} \int dx \left[e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x} dx \right],$$

ovvero, integrando per parti,

$$y = \frac{e^{m_2 x} \int V e^{-m_2 x} dx - e^{m_1 x} \int V e^{-m_1 x} dx}{m_2 - m_1} \ldots\ldots (11)$$

I due integrali indefiniti si suppongono racchiudere ciascuno una costante arbitraria.

Allorchè m_1, m_2 sono due radici immaginarie coniugate, della forma $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, l'espressione precedente si cambia in

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \left(\text{sen}\, \beta x \int Ve^{-\alpha x} \cos \beta x \cdot dx - \cos \beta x \int Ve^{-\alpha x} \text{sen}\, \beta x \cdot dx\right).$$

Infine, se si avesse $m_2 = m_1$, il secondo membro dell'equazione (11) si presenterebbe sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma, prendendo le derivate del numeratore e del denominatore rispetto al parametro m_2, e ponendo in seguito $m_2 = m_1$, si troverebbe per questo caso

$$y = e^{m_1 x} \left(x \int V e^{-m_1 x}\, dx - \int V e^{-m_1 x}\, x dx\right).$$

22. Non lasceremo questo soggetto senza far conoscere il metodo impiegato comunemente per far dipendere l'integrazione dell'equazione (1) da quella dell'equazione (2).

Supponiamo che si conoscano n integrali particolari dell'equazione (2), in modo che si abbia per l'integrale generale di questa equazione

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_n y_n : \ldots . (12)$$

questo valore di y si può prendere ancora per l'integrale generale dell'equazione (1), purchè si considerino i fattori $C_1, C_2, \ldots C_n$, non più come costanti, ma come delle funzioni di x, da determinarsi convenevolmente.

Infatti, in questa ipotesi si ha

$$\begin{aligned} y' = {} & C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \ldots + C_n y_n' \\ & + y_1 C_1' + y_2 C_2' + y_3 C_3' + \ldots + y_n C_n' \end{aligned}$$

(C_i' dinotando la derivata di C_i rispetto ad x), e se si assoggettano le funzioni C_i a verificare l'equazione

$$y_1 C_1' + y_2 C_2' + y_3 C_3' + \ldots + y_n C_n' = 0,$$

resta $$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \ldots + C_n y_n',$$

come nel caso in cui i fattori C_i sono costanti.

Da questa ultima equazione si ricava

$$\begin{aligned} y'' = {} & C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \ldots + C_n y_n'', \\ & + y_1' C_1' + y_2' C_2' + y_3' C_3' + \ldots + y_n' C_n', \end{aligned}$$

o semplicemente

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \ldots + C_n y_n'',$$

quando si assoggettano le derivate C_i' a verificare l'equazione di condizione

$$y_1'C_1' + y_2'C_2' + y_3'C_3' + \dots + y_n'C_n' = 0.$$

Continuando in tal modo, si trova che il valore di y dato dall'equazione (12), e che per ipotesi verifica l'equazione (2), soddisfa anche all'equazione (1), purchè le derivate C_i' verifichino il sistema delle equazioni di condizione

$$\begin{gathered}
y_1C_1' + y_2C_2' + y_3C_3' + \dots + y_nC_n' = 0, \\
y_1'C_1' + y_2'C_2' + y_3'C_3' + \dots + y_n'C_n' = 0, \\
y_1''C_1' + y_2''C_2' + y_3''C_3' + \dots + y_n''C_n' = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + y_3^{(n-1)}C_3' + \dots + y_n^{(n-1)}C_n' = V.
\end{gathered}$$

Ora, da queste equazioni in numero n si ricava il valore di ciascun'incognita C_i' eguale ad una certa funzione $\varpi_i(x)$, e per conseguenza una semplice quadratura dà

$$C_i = \int \varpi_i(x)\,dx + c_i,$$

c_i dinotando una nuova costante arbitraria. Si ottiene dunque in questo modo, con semplici quadrature, l'integrale generale dell'equazione (1), con le n costanti arbitrarie che esso comporta.

CAPITOLO IV.

INTEGRALI SINGOLARI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI PRIMO ORDINE.

23. Sia

$$f(x, y, y') = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

un'equazione differenziale di 1° ordine, di cui si ha l'integrale completo sotto la forma

$$F(x, y, a) = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

a dinotando la costante arbitraria introdotta dall'integrazione. Quando si differenzia successivamente l'equazione (2) considerandovi la quantità a, prima come una costante, e poi come una funzione delle variabili x, y, si ha

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y' \frac{da}{dy}\right) = 0,$$

onde

$$y' = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}$$

$$y' = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y' \frac{da}{dy}\right) : \frac{dF}{dy};$$

e questi due valori di y' coincideranno, se si determina a in funzione di x, y, in modo da verificare l'una o l'altra delle due equazioni

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Segue da ciò che l'equazione

$$\varphi(x, y) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

risultante dall'eliminazione di a tra l'integrale (2) e l'una delle equazioni (3) soddisfa ancora all'equazione (1) di cui essa è un integrale *singolare;* a meno che l'equazione (4) non si confonda con un integrale particolare, il valore di a ricavato da una delle equazioni (3) riducendosi ad una costante, o ad una funzione di x, y che essa stessa si riduce ad una costante in virtù dell'equazione (4). Si sa inoltre, che l'equazione (4) appartiene ad una linea che tocca o inviluppa tutte le linee di cui il sistema è rappresentato dall'integrale generale (2), finchè il parametro a conserva la sua indeterminazione.

Risulta dalle cose dette una regola semplicissima per trovare gl'integrali singolari di un'equazione differenziale di primo ordine, di cui si è antecedentemente determinato l'integrale generale: ma si può dire di più che questi integrali singolari possono essere assegnati, senza che si abbia bisogno di conoscere l'integrale generale, ed anche quando vi sarebbe impossibilità di assegnare all'integrale generale un'espressione analitica sotto forma finita, ciò che è il caso più ordinario.

Effettivamente la linea inviluppo che rappresenta l'integrale singolare, non può esistere se non quando vi è intersezione tra le linee che rappresentano gl'integrali particolari, e che corrispondono a valori distinti della costante arbitraria. Dunque, per i valori di x, y relativi a questi punti d'intersezione, il valore di y' in x, y, ricavato dall'equazione (1), deve essere multiplo; vale a dire, questa equazione, supposta algebrica, deve essere di secondo grado o di un grado superiore rispetto ad y', dopo che si saranno fatti sparire i radicali.

Segue da ciò che in generale tutt'i punti corrispondenti a valori di x, y che non rendono y' immaginario, sono punti d'intersezione di due linee almeno, prese tra quelle che rappresentano gl'integrali particolari.

Ma, per i punti situati sull'inviluppo o sulla linea di contatto di tutte queste curve, non vi è più intersezione, o almeno un'intersezione sparisce: dunque bisogna che l'equazione (1), in cui si considera y' come l'incognita, acquisti allora radici multiple, ciò che conduce alla condizione

$$\frac{df}{dy'} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Dunque reciprocamente l'equazione (5) determina la relazione tra x ed y che caratterizza la linea di contatto o l'integrale singolare.

Prendiamo per esempio l'equazione differenziale

$$y'^2(x^2-r^2)-2xyy'=x^2, \qquad \qquad (6)$$

che ha per integrale generale

$$x^2-2ay=r^2+a^2, \qquad \qquad (7)$$

a dinotando la costante arbitraria.

La prima delle equazioni (3) dà in questo caso $a=-y$, e questo valore di a, sostituito nell'equazione (7), dà per integrale singolare $x^2+y^2-r^2=0$. Ora, senza che si abbia bisogno di conoscere l'integrale (7), l'equazione (5) fornisce la relazione

$$y'=-\frac{xy}{r^2-x^2};$$

e questo valore di y', sostituito nell'equazione (6), riproduce l'integrale singolare dedotto in primo luogo dall'integrale generale.

24. La riuscita di questo metodo tiene a ciò che l'equazione differenziale è preparata in modo da non contenere radicali. Se al contrario l'equazione fosse risoluta rispetto ad y', o messa sotto la forma $y'=\theta(x,y)$, il metodo si troverebbe in difetto. Ma bisogna osservare che quando si differenzia l'equazione (1) rispetto ad y e rispetto ad x, considerando y' come una funzione delle variabili x, y, determinata implicitamente da questa equazione, si ha

$$\frac{dy'}{dy}=-\frac{df}{dy}:\frac{df}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dx}=-\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy'}.$$

Ora, il valore di y in x che appartiene all'integrale singolare, fa svanire $\frac{df}{dy'}$: dunque lo stesso valore deve rendere infiniti i coefficienti differenziali $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dy'}{dx}$, dopo che vi si è sostituito per y' il suo valore in x, y, ricavato dall'equazione (1). Per conseguenza, se si può dedurre dalle equazioni

$$\frac{d\theta(x,y)}{dy}=\infty, \quad \frac{d\theta(x,y)}{dx}=\infty.$$

un valore di y in x che verifichi anche l'equazione (1), questo valore riprodurrà l'integrale singolare.

Per esempio, l'equazione (6), risoluta rispetto ad y', dà

$$\theta(x, y) = \frac{x}{x^2 - r^2}\left[y \pm \sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)}\right],$$

onde
$$\frac{d\theta(x, y)}{dy} = \frac{x}{x^2 - r^2} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)} \pm y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)}},$$

$$\frac{d\theta(x, y)}{dx} = \frac{-(x^2 + r^2)y\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)} \mp r^2(x^2 + y^2 - r^2) \mp x^2 y^2}{(x^2 - r^2)^2\sqrt{(x^2 + y^2 - r^2)}};$$

e questi valori diventano infiniti quando si pone $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, ciò che soddisfa all'equazione (6) di cui si ottiene così l'integrale singolare.

25. Quando si differenzia l'equazione (1), considerandovi y, y' come funzioni implicite di x, viene

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}y'' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

onde
$$y'' = -\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y'\right) : \frac{df}{dy'} \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Ma il valore di y in x che dà l'integrale singolare, annulla $\frac{df}{dy'}$, e riduce l'equazione (8) a

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0;$$

dunque questo stesso valore di y in x mette sotto la forma $\frac{0}{0}$ il valore

$$y'' = \frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')}$$

dato dall'equazione (9); il che fornisce ancora un altro procedimento per trovare l'integrale singolare. In effetto, si porrà

$$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \psi(x, y, y') = 0;$$

indi si eliminerà successivamente y' tra ciascuna di queste due equazioni e la proposta (1). Se le due equazioni risultanti hanno un fattore comune, questo fattore darà l'integrale singolare cercato.

Operando in questo modo sull'equazione (6), si trova

$$y'' = \frac{y\,y' + x}{y'(x^2 - r^2) - xy}.$$

L'eliminazione di y' tra la proposta e ciascuna delle equazioni

$$y\,y' + x = 0,\ \ y'(x^2 - r^2) - xy = 0,$$

dà per risultanti in cui il fattore comune è in evidenza,

$$\frac{x^2}{y^2}(x^2 + y^2 - r^2) = 0,\ \ \frac{x^2}{x^2 - r^2}(x^2 + y^2 - r^2) = 0.$$

26. Abbiamo veduto (Art. 14) che l'equazione di primo ordine

$$y = xy' + \psi(y')$$

essendo sottoposta ad una seconda differenziazione, dà l'equazione di secondo ordine

$$[x + \psi'(y')]\,y'' = 0,$$

che si decompone immediatamente in due fattori di cui l'uno fornisce l'integrale generale, e l'altro l'integrale singolare della proposta. Bisogna generalizzare questo fatto di calcolo e mostrare che quando un'equazione di primo ordine ammette un'integrale singolare, si può sempre mettere l'equazione sotto una forma tale che la sua derivata si decomponga in due fattori, di cui l'uno dà l'integrale singolare, per mezzo dell'eliminazione di y' con la proposta, mentre l'altro, che è annullato dal valore di y in x ricavato dall'integrale generale, non lo è più dal valore ricavato dall'integrale singolare.

L'equazione

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

essendo risoluta rispetto ad a darà

$$a = \varpi(x, y, y'); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

e se si sostituisce questo valore di a nell'equazione (2), l'equazione risultante

$$F(x, y, \varpi) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

sarà equivalente all'equazione (1), in questo senso che, se esse non si confondono, si passerà dall'una all'altra moltiplicando il primo membro della prima per una funzione convenevolmente scelta delle variabili x, y, y'. Ora, differenziando l'equazione (12), si ha

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{d\varpi}\left(\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} y' + \frac{d\varpi}{dy'} y''\right) = 0;$$

e di più la somma dei due primi termini è identicamente nulla, poichè si è sostituito per a, nella funzione F, il suo valore ricavato dall'equazione (10): dunque la derivata dell'equazione (12) si riduce a

$$\frac{dF}{d\varpi}\left(\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} y' + \frac{d\varpi}{dy'} y''\right) = 0,$$

e si decompone in due fattori

$$\frac{dF}{d\varpi} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} y' + \frac{d\varpi}{dy'} y'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

L'equazione (14), che è di secondo ordine, ha evidentemente per integrale di primo ordine l'equazione (12); e l'eliminazione di y' tra le equazioni (11) e (12) avrà luogo se si elimina ϖ tra le stesse equazioni, o se si rimpiazza ϖ con a nell'equazione (12), vale a dire che questa eliminazione darà l'integrale generale della proposta.

Similmente l'eliminazione di y' tra le equazioni (11) e (13) si opererà con l'eliminazione di ϖ tra le stesse equazioni, o con l'eliminazione di a tra l'equazione (2) e la sua derivata rispetto ad a: essa condurrà dunque all'integrale singolare della proposta, o al meno all'equazione di una linea di contatto delle curve che ne rappresentano gl'integrali particolari.

Si vede anche da questo calcolo che il valore di y in x ricavato dall'integrale singolare, il quale dà per y' un valore che verifica la proposta, non dà per y'' un valore atto a verificare l'equazione (14), nè per conseguenza per y''', y'''' etc. dei valori atti a verificare le derivate successive della proposta.

Applichiamo quest'analisi all'equazione (7): si avrà

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 2x - 2ay',$$

onde $$\varpi = \frac{x}{y'},\ F(x, y, \varpi) = x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - r^2 = 0, \ldots (15)$$

equazione che si confonderebbe con (6) togliendo il denominatore y'^2. La differenziazione dell'equazione (15) dà

$$-\frac{y}{y'} + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2 y''}{y'^3} = 0,$$

o sia $$\left(y + \frac{x}{y'}\right)\left(\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2}\right) = 0.$$

Il valore di y' ricavato dall'equazione $y + \frac{x}{y'} = 0$, e sostituito nella proposta, dà l'integrale singolare $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. L'altro fattore è la derivata rispetto ad x della funzione $\frac{x}{y'}$: l'integrazione dà dunque $\frac{x}{y'} = a$; e questo valore di y', sostituito nella proposta, riproduce l'equazione (7).

CAPITOLO V.

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI.

Integrazione delle equazioni fra tre variabili ai differenziali totali, e di 1° grado.

27. Se si ha, tra le variabili indipendenti x, y, e la funzione z che ne dipende, un'equazione della forma

$$dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

l'integrazione di questa equazione si riduce alle quadrature (Art. 1), purchè le funzioni φ, ψ soddisfino alla condizione d'integrabilità

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}.$$

Se le funzioni φ, ψ contenessero la variabile z, o se si avesse tra le variabili x, y, z ed i loro differenziali totali, l'equazione

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

X, Y, Z dinotando delle funzioni di x, y, z, si ridurrebbe anche alle quadrature l'integrazione di questa equazione (Art. 3) purchè le funzioni X, Y, Z soddisfino alle condizioni d'integrabilità

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy};$$

e l'integrale avrebbe la forma $F(x, y, z) = cost.$ F dinotando la funzione di cui il primo membro dell'equazione (1) è il differenziale esatto.

In tutt'i casi, ammettendo che esista una funzione z delle due variabili indipendenti x, y, atta a soddisfare all'equazione (1), e da cui si possa ricavare il valore di dz sotto la forma

$$dz = pdx + qdy,$$

bisogna che si abbia

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ma, in virtù dell'equazione (1),

$$p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z};$$

onde

$$\frac{dp}{dy} = -\left\{\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\right\} = -\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{Y}{Z}.$$

$$\frac{dq}{dx} = -\left\{\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right\} = -\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{X}{Z}:$$

sicchè l'equazione (2) dà, dopo le riduzioni,

$$X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0 \ldots (3)$$

Allorchè quest' ultima equazione, che esprime la condizione d'integrabilità, è soddisfatta, l'integrazione dell'equazione (1) si riduce a quella delle equazioni a due variabili. Infatti, se si avesse l'integrale dell'equazione (1), e si differenziasse considerandovi z come una costante, il risultato ottenuto dovrebbe coincidere con l'equazione (1) dopo che vi si è fatto dz nullo, vale a dire con l'equazione

$$Xdx + Ydy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Reciprocamente, se si dinota con μ il fattore che rende $Xdx + Ydy$ un differenziale esatto, allorchè si riguarda z come una costante, e se si pone

$$\int \mu\,(Xdx + Ydy) = F(x, y),$$

l'equazione (1) avrà per integrale

$$F(x, y) = Z_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Z_1 dinotando una funzione della sola variabile z. Per determinarla, osserviamo che si ha

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = \frac{dZ_1}{dz}dz,$$

e da un'altra parte

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = \mu(Xdx + Ydy) = -\mu Zdz,$$

onde

$$\frac{dZ_1}{dz} = \frac{dF}{dz} - \mu Z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Bisogna dunque, se l'equazione (3) è soddisfatta, che le due variabili x, y spariscano ad un tempo dal secondo membro dell'equazione (6), allorchè si elimina una di esse per mezzo dell'equazione (5), o, in altri termini, bisogna che la derivata di questo secondo membro, presa rispetto ad x, sia nulla, allorchè vi si considera y come una funzione di x e di Z_1, data dall'equazione (5). Così, la condizione che si deve verificare, è espressa dall'equazione

$$\frac{d\cdot\left(\frac{dF}{dz} - \mu Z\right)}{dx} + \frac{d\cdot\left(\frac{dF}{dz} - \mu Z\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

o da

$$\frac{d^2F}{dx\,dz} - \mu\frac{dZ}{dx} - Z\frac{d\mu}{dx} - \left(\frac{d^2F}{dy\,dz} - \mu\frac{dZ}{dy} - Z\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{X}{Y} = 0, \ldots (7)$$

rimettendo per $\frac{dy}{dx}$ il suo valore ricavato dall'equazione (4).

Si ha d'altronde

$$\frac{d^2F}{dx\,dz} = \frac{d\cdot\mu X}{dz} = \mu\frac{dX}{dz} + X\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^2F}{dy\,dz} = \frac{d\cdot\mu Y}{dz} = \mu\frac{dY}{dz} + Y\frac{d\mu}{dz};$$

ed il fattore μ soddisfa (Art. 10) all'equazione di condizione

$$X\frac{d\mu}{dy} - Y\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0.$$

Se ora si sostituiscono nell'equazione (7) i valori di

$$\frac{d^2F}{dx\,dz}, \quad \frac{d^2F}{dy\,dz}, \quad \frac{d\mu}{dx},$$

ricavati dalle tre ultime equazioni, le quantità

$$\mu, \frac{d\mu}{dy}, \frac{d\mu}{dz}$$

vanno via nello stesso tempo, e si ricade sull'equazione (3) che esprime la condizione d'integrabilità.

28. Allorchè questa equazione non è soddisfatta, non esiste una funzione z di due variabili indipendenti x, y, suscettibile di verificare l'equazione (1); ciò che equivale a dire che questa equazione non esprime più una proprietà di cui possano godere le coordinate x, y, z di una certa superficie. Intanto l'equazione (1) non è priva per ciò di ogni significato e nulla impedisce che essa esprima, per esempio, una proprietà comune ad una serie di curve, di cui x, y, z dinoterebbero le coordinate correnti: solamente non vi è superficie che sia il luogo geometrico di tutte queste linee. Se si stabilisce un legame arbitrario tra y ed x, ciò che equivale a tracciare arbitrariamente la proiezione di una di queste linee sul piano xy, z diviene funzione della sola variabile indipendente x, e l'equazione (1), costruita come un'equazione differenziale ordinaria, determina la proiezione della stessa linea sul piano xz, purchè solamente si dia un punto pel quale questa proiezione deve passare. L'integrazione dell'equazione (1) consiste in questo caso a trovare tra le coordinate finite x, y, z un sistema di equazioni che racchiude una funzione arbitraria, e da cui si possano ricavare, con una determinazione convenevole della funzione arbitraria, tutte le linee di cui le coordinate godono della proprietà di soddisfare all'equazione differenziale proposta.

Ora, la soluzione di questo problema deriva immediatamente dall'analisi che ci ha condotto all'integrazione dell'equazione proposta, allorchè essa soddisfa alla condizione d'integrabilità; poichè se, nel caso contrario, in luogo di determinare la funzione Z_1 che entra nell'equazione (5), si pone

$$F(x, y) = \varphi(z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

φ dinotando una funzione arbitraria, ed in seguito

$$\frac{dF}{dz} - \mu Z = \varphi'(z), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

i valori di x, y in funzione di z, che verificheranno le equazioni (8) e (9), verificheranno anche l'equazione proposta, di cui l'integrale sarà espresso in conseguenza dal sistema delle equazioni (8) e (9), contenente la funzione arbitraria φ e la sua derivata.

Supponiamo che si tratti di esprimere che la linea di cui le coordinate correnti sono x, y, z, è determinata dal contatto di una superficie conica col centro nel punto (x_0, y_0, z_0), e di una superficie di rotazione intorno all'asse delle z: le coordinate dei punti situati su questa linea dovranno verificare ad un tempo (*Agg. al Cal. Dif.* Art. 14, 16) le equazioni

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \ldots\ldots (10)$$

$$py - qx = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$dz = pdx + qdy,$$

da cui si ricava con l'eliminazione di p e di q,

$$\frac{dz}{z - z_0} = \frac{xdx + ydy}{x(x - x_0) + y(y - y_0)} \ldots\ldots (12)$$

Questa equazione non soddisfa alla condizione d'integrabilità, finchè x_0, y_0 non sono nulli: si ha in questo caso

$$\mu = x(x - x_0) + y(y - y_0),$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad Z = -\frac{1}{z - z_0};$$

con ciò le equazioni (8) e (9) divengono

$$x^2 + y^2 = 2\varphi(z), \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0)}{z - z_0} = \varphi'(z) \ldots (13)$$

L'equazione (12), o il sistema delle equazioni (13) che ne è l'equivalente, appartiene dunque a tutte le linee che godono della proprietà geometrica definita quì sopra.

*

Si potrebbe modificare l'enunciato dello stesso problema, domandando l'equazione della superficie che si trova compresa ad un tempo nella famiglia delle superficie coniche caratterizzate dall'equazione (10) ed in quella delle superficie di rotazione caratterizzate dall'equazione (11). L'equazione (12) alla quale si giunge per esprimere questa doppia condizione, non soddisfacendo alla condizione d'integrabilità finchè x_0, y_0 non sono nulli, ne risulta che, nel caso generale, una tale superficie non esiste. Allorchè x_0, y_0 sono nulli, l'equazione (12) s'integra e dà

$$z - z_0 = c\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

c dinotando la costante arbitraria. Questa equazione appartiene a tutt'i coni retti che hanno il loro centro nel punto dell'asse delle z di cui l'ordinata è z_0; ed è chiaro che in effetto questi coni retti soddisfano al problema così enunciato.

Mettendo l'equazione (12) sotto la forma

$$dz\,[x\,(x - x_0) + y\,(y - y_0)] = (z - z_0)\,(xdx + ydy),$$

si vede che essa è soddisfatta dall'equazione $z - z_0 = 0$, senza che si abbia bisogno di supporre nulle le coordinate x_0, y_0. Così il piano condotto pel punto (x_0, y_0, z_0), perpendicolarmente all'asse delle z, è una superficie che soddisfa all'enunciato del problema; ma questa soluzione non è che singolare, come lo mostra bene la forma dell'equazione quì sopra, e non vi si trova la costante arbitraria essenziale all'integrale completo.

Integrazione delle equazioni alle differenze parziali, lineari e di primo ordine.

29. L'integrazione delle equazioni alle differenze parziali di primo ordine, lineari rispetto alle derivate parziali che esse racchiudono, è stata ridotta da Lagrange a dipendere dall'integrazione di un sistema di equazioni differenziali simultanee. Siano

$$X\frac{du}{dx} + Y\frac{du}{dy} + Z\frac{du}{dz} + T\frac{du}{dt} + \text{etc.} = U \ldots\ldots (1)$$

l'equazione che si deve integrare, ed

$$F(u, x, y, z, t, \text{etc.}) = 0$$

l'integrale cercato: u dinotando una funzione delle n variabili indipendenti x, y, z, t, etc., ed U, X, Y, Z, T, etc. delle funzioni qualunque delle $n+1$ variabili u, x, y, z, t, etc. Si ha

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dy}=0,\ \frac{dF}{dz}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dz}=0,\ \text{etc.}:$$

in conseguenza, l'equazione (1) può prendere la forma

$$U\frac{dF}{du}+X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}+T\frac{dF}{dt}+\text{etc.}=0;\ \ldots (2)$$

ed il problema è ridotto a determinare nel modo più generale, la funzione F che soddisfa all'equazione (2).

Supponiamo che si sia integrato, con tutta la generalità richiesta, il sistema delle n equazioni differenziali simultanee, racchiuse nell'equazione continua

$$\frac{du}{U}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{dt}{T}=\text{etc.}:\ \ldots\ldots\ldots (3)$$

si potranno mettere gl'integrali sotto la forma

$$f_1(x, y, z, t, \ldots u)=a_1,\ f_2(x, y, z, t, \ldots u)=a_2, \ldots$$
$$\ldots f_n(x, y, z, t, \ldots u)=a_n,\ \ldots\ldots\ldots (4)$$

$a_1, a_2, \ldots a_n$ dinotando le n costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione; e si avrà per conseguenza

$$\frac{df_1}{du}du+\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dt}dt+\text{etc.}=0,$$

$$\frac{df_2}{du}du+\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dt}dt+\text{etc.}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{df_n}{du}du+\frac{df_n}{dx}dx+\frac{df_n}{dy}dy+\frac{df_n}{dz}dz+\frac{df_n}{dt}dt+\text{etc.}=0;$$

o pure, in virtù delle equazioni (3),

$$\left.\begin{array}{l}
U\dfrac{df_1}{du}+X\dfrac{df_1}{dx}+Y\dfrac{df_1}{dy}+Z\dfrac{df_1}{dz}+T\dfrac{df_1}{dt}+\text{etc.}=0,\\[2mm]
U\dfrac{df_2}{du}+X\dfrac{df_2}{dx}+Y\dfrac{df_2}{dy}+Z\dfrac{df_2}{dz}+T\dfrac{df_2}{dt}+\text{etc.}=0,\\[2mm]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[2mm]
U\dfrac{df_n}{du}+X\dfrac{df_n}{dx}+Y\dfrac{df_n}{dy}+Z\dfrac{df_n}{dz}+T\dfrac{df_n}{dt}+\text{etc.}=0.
\end{array}\right\}(5)$$

Così le n funzioni $f_1, f_2, \ldots f_n$ soddisfano all'equazione (2) e forniscono altrettanti integrali particolari della proposta (1).

È facile vedere che una funzione arbitraria Φ delle quantità $f_1, f_2, \ldots f_n$ soddisfa del pari all'equazione (1); poichè se si addizionano i primi membri delle equazioni (5), dopo di averli moltiplicati rispettivamente per

$$\frac{d\Phi}{df_1},\ \frac{d\Phi}{df_2},\ldots\ \frac{d\Phi}{df_n},$$

viene

$$U\frac{d\Phi}{du}+X\frac{d\Phi}{dx}+Y\frac{d\Phi}{dy}+Z\frac{d\Phi}{dz}+T\frac{d\Phi}{dt}+\text{etc.}=0.$$

Dunque si ha per integrale della proposta

$$\Phi(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n)=0, \quad \text{o } f_1=\varphi(f_2, f_3, \ldots f_n),$$

Φ, φ essendo caratteristiche di funzioni arbitrarie; e d'altronde si riconosce che questo integrale ha tutta la generalità richiesta, poichè non si può eliminare che un segno di funzione arbitraria, con la combinazione di un'equazione con le sue derivate parziali di primo ordine.

30. Applichiamo quest'analisi all'equazione a tre variabili

$$X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z, \quad \text{o } Xp+Yq=Z, \ldots\ldots\ (6)$$

e supponiamo in primo luogo che le funzioni X, Y, Z si riducano a numeri costanti P, Q, R: le equazioni (3) diventano

$$Rdx-Pdz=0, \quad Rdy-Qdz=0,$$

ed esse conducono agl'integrali

$$Rx - Pz = a_1, \quad Ry - Qz = a_2; \dots\dots\dots (7)$$

sicchè la proposta (6) ha per integrale generale

$$Rx - Pz = \varphi\,(Ry - Qz).$$

Questa equazione caratterizza la famiglia delle superficie cilindriche, e le equazioni (7) sono quelle delle rette generatrici.

Conserviamo ad X, Y i loro valori costanti P, Q, e poniamo $Z = z$: si avranno ad integrare le equazioni differenziali

$$Pdy - Qdx = 0, \quad zdx - Pdz = 0,$$

onde $$Py - Qx = a_1, \quad z = a_2 e^{\frac{x}{P}};$$

ciò che mette l'integrale della proposta sotto la forma

$$z = e^{\frac{x}{P}} \cdot \varphi\,(Py - Qx) \dots\dots\dots\dots (8)$$

Infine, se prendiamo per ultimo esempio l'equazione

$$px + qy = n\sqrt{(x^2 + y^2)}, \dots\dots\dots\dots (9)$$

avremo da integrare le equazioni differenziali a due variabili

$$xdz = ndx\sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad xdy - ydx = 0:$$

la seconda dà $y = a_1 x$, e la prima diviene, con la sostituzione di questo valore di y,

$$dz = ndx\sqrt{(1 + a_1^2)}, \text{ onde } z = n\sqrt{(1 + a_1^2)}\,x + a_2,$$

e rimettendo per a_1 il suo valore,

$$z - n\sqrt{(x^2 + y^2)} = a_2.$$

In conseguenza l'integrale è

$$z = n\sqrt{(x^2 + y^2)} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

31. Il proprio degl'integrali completi (4) si è di soddisfare alla equazione (3) immediatamente, in questo senso che i

valori di du, dx, dy, dz, etc., ricavati dalle derivate delle equazioni (4), rendono le equazioni (3) identiche, senza che vi sia bisogno di ritornare ai legami stabiliti tra le variabili u, x, y, z, etc, dalle stesse equazioni (4); poichè questi legami dipendono dalle costanti a_1, a_2, etc., e le equazioni (4), o le loro derivate, debbono verificare le equazioni (3), qualunque siano i valori assegnati a quelle costanti arbitrarie. Inversamente, e per una ragione contraria, se le equazioni (3) ammettono degl'integrali singolari

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x, y, z, t, \ldots u) = 0,\\ \varphi_2(x, y, z, t, \ldots u) = 0, \ldots\ldots \varphi_n(x, y, z, t, \ldots, u) = 0,\end{array}\right\}\ldots(10)$$

le derivate delle equazioni (10) non verificheranno le equazioni (3) se non tenendo conto dei legami espressi dalle equazioni (10); o, in altri termini, bisognerà combinare le equazioni (10) con le loro derivate, per soddisfare al sistema delle equazioni (3). Ciò posto, ciascuna delle equazioni (10) soddisferà all'equazione (2), o all'equazione (1) di cui quella è una trasformata; ma non si soddisferà all'equazione (2) prendendo per F una funzione arbitraria delle quantità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, o una funzione arbitraria nella quale entrerebbero, in totalità o in parte, le quantità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, associate alle quantità $f_1, f_n, \ldots f_n$, prese anche in totalità o in parte. Dunque l'equazione (1) non ammette altro integrale completo che quello in cui le quantità $f_1, f_2, \ldots f_n$ entrano esclusivamente sotto il segno di funzione arbitraria, ma essa è soddisfatta da ciascuna delle equazioni (10); e queste equazioni sono degl'integrali singolari dell'equazione (1), poichè essi non si trovano racchiusi nell'integrale completo.

Prendiamo per esempio l'equazione lineare di primo ordine a tre variabili

$$p - q\left[\frac{1}{2} + x - \sqrt{(x^2 + y + z)}\right] = \frac{1}{2} - x + \sqrt{(x^2 + y + z)}, \ldots (11)$$

di cui l'integrazione è subordinata a quella delle equazioni differenziali simultanee

$$y' = -\frac{1}{2} - x + \sqrt{(x^2 + y + z)},$$

$$z' = \frac{1}{2} - x + \sqrt{(x^2 + y + z)},$$

che si possono rimpiazzare con

$$z' = 1 + y', \quad z + y = x(z' + y') + \left(\frac{z' + y'}{2}\right)^2,$$

e che hanno per integrali completi,

$$z = x + y + a_1, \quad z + y = 2a_2 x + a_2^2.$$

Il secondo di questi integrali dà origine all'integrale singolare

$$x^2 + y + z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Ciascuna delle equazioni

$$z - x - y = a_1, \quad -x + \sqrt{(x^2 + y + z)} = a_2$$

da per p e q dei valori che, messi nell'equazione (11), la rendono identica: in conseguenza, l'equazione (11) ha per integrale completo

$$-x + \sqrt{(x^2 + y + z)} = \psi(z - x - y),$$

ψ essendo una caratteristica di funzione arbitraria. Al contrario, l'equazione (12) dà per p e q dei valori che, sostituiti nell'equazione (11), non soddisfano a questa equazione se non tenendo conto dell'equazione (12) per togliere il radicale che entra nell'equazione (11). Da ciò l'equazione (12) non soddisfa alla proposta (11) che in qualità di integrale singolare.

Se si mette l'equazione (9) sotto la forma equivalente

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + n\sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{dF}{dz} = 0,$$

si troverà del pari che essa ammette per integrale singolare l'equazione

$$x^2 + y^2 = 0,$$

o il sistema delle equazioni $x = 0$, $y = 0$.

FINE DEL CALCOLO INTEGRALE.